

周期 $T_p = 2\pi/\omega_0$ の関数

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ a_n \cos\left(\frac{2\pi n t}{T_p}\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi n t}{T_p}\right) \right\} \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \{ a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t) \} \end{aligned} \quad (1)$$

について考える.

フーリエ変換の定義式は次のようになる.

$$\mathcal{F}[g](\omega) := \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-j\omega t} dt. \quad (2)$$

上式より, $g(t) = 0, t \in (-\infty, 0] \cup [N_{data}\tau, \infty)$ の場合, 離散フーリエ変換との関係が得られる.

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[g](\omega) &:= \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-j\omega t} dt = \int_0^{N_{data}\tau} g(t) e^{-j\omega t} dt \\ &\cong \sum_{i=0}^{N_{data}-1} g(i\tau) e^{-j\omega i\tau}. \end{aligned} \quad (3)$$

ここで, 離散フーリエ変換を $\text{DFT}[g](\omega) := \sum_{i=0}^{N_{data}-1} g(i\tau) e^{-j\omega i\tau}$ と定義すると,

$$\mathcal{F}[g](\omega) \cong \tau \{ \text{DFT}[g](\omega) \} \quad (4)$$

が成り立つ.

以上より, 以下の関数について考える.

$$g(t) := f(t) \left\{ \mathcal{H}\left(t + \frac{N_{data}\tau}{2}\right) - \mathcal{H}\left(t - \frac{N_{data}\tau}{2}\right) \right\}. \quad (5)$$

このフーリエ変換は,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[g](\omega) &:= \int_{-\frac{N_{data}\tau}{2}}^{\frac{N_{data}\tau}{2}} g(t) e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-\frac{N_{data}\tau}{2}}^{\frac{N_{data}\tau}{2}} \left\{ \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \{ a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t) \} \right\} \{ \cos\omega t - j \sin\omega t \} dt \\ &= a_0 \int_0^{\frac{N_{data}\tau}{2}} \cos\omega t dt + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ 2a_n \int_0^{\frac{N_{data}\tau}{2}} \cos(n\omega_0 t) \cos\omega t dt - j 2b_n \int_0^{\frac{N_{data}\tau}{2}} \sin(n\omega_0 t) \sin\omega t dt \right\} \\ &= a_0 \int_0^{\frac{N_{data}\tau}{2}} \cos\omega t dt \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ a_n \int_0^{\frac{N_{data}\tau}{2}} \{ \cos(n\omega_0 + \omega)t + \cos(n\omega_0 - \omega)t \} dt \right. \\ &\quad \left. + j b_n \int_0^{\frac{N_{data}\tau}{2}} \{ \cos(n\omega_0 + \omega)t - \cos(n\omega_0 - \omega)t \} dt \right\}. \end{aligned} \quad (6)$$

ここで,

$$\int_0^{\frac{N_{data}\tau}{2}} \cos \omega t dt = \begin{cases} \frac{\sin\left(\frac{\omega N_{data}\tau}{2}\right)}{\omega} = \frac{\sin(m\pi N_{data})}{m2\pi/\tau} = 0 & , (\omega \neq 0), \\ \frac{N_{data}\tau}{2} & , (\omega = 0), \end{cases} \quad (7)$$

および,

$$\begin{aligned} & \int_0^{\frac{N_{data}\tau}{2}} \cos(n\omega_0 + \omega) dt \\ &= \begin{cases} \frac{\sin\left(\frac{(n\omega_0 + \omega)N_{data}\tau}{2}\right)}{n\omega_0 + \omega} = \frac{\sin\left(\frac{(n\omega_0 + \omega)N_{data}\tau}{2}\right)}{n\omega_0 + m2\pi/\tau} \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} 0 & , (\omega \neq -n\omega_0), \\ \frac{N_{data}\tau}{2} & , (\omega = -n\omega_0), \end{cases} \end{aligned} \quad (8)$$

である。以上より、以下の式が得られる。

$$\mathcal{F}[g](\omega) = a_0 \frac{N_{data}\tau}{2} u(\omega) + \frac{N_{data}\tau}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \{(a_n + jb_n)u(n\omega_0 + \omega) + (a_n - jb_n)u(n\omega_0 - \omega)\}. \quad (9)$$

ここで,

$$u(\omega) := \begin{cases} 1 & , (\omega = 0), \\ 0 & , (\omega \neq 0). \end{cases} \quad (10)$$

$\mathcal{F}[g](\omega)$ の振幅は以下の形になる。

$$\|\mathcal{F}[g](\omega)\| = a_0 \frac{N_{data}\tau}{2} u(\omega) + \frac{N_{data}\tau}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \{u(n\omega_0 + \omega) + u(n\omega_0 - \omega)\}. \quad (11)$$

負の周波数成分を正の周波数成分で表現すると,

$$\|\mathcal{F}[g](\omega)\| = a_0 \frac{N_{data}\tau}{2} u(\omega) + N_{data}\tau \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n^2 + b_n^2} u(n\omega_0 - \omega). \quad (12)$$

となる。式(4)より,

$$\frac{\|\text{DFT}[g](\omega)\|}{N_{data}} \simeq \frac{\|\mathcal{F}[g](\omega)\|}{N_{data}\tau} = \frac{a_0}{2} u(\omega) + \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n^2 + b_n^2} u(n\omega_0 - \omega). \quad (13)$$

つまり、離散フーリエ変換データをデータ数で除すると、各種波数成分の振幅が得られる。

【確認】

フーリエ変換として $f(t) = 6 \sin(2\pi 1.25t) + 5 \sin(2\pi 100t) + 3 \cos(2\pi 1000t)$ の場合について考える。
このとき、

$$\frac{\|\mathcal{F}[g](\omega)\|}{N_{data}\tau} = 6u(2\pi 1.25 - \omega) + 5u(2\pi 100 - \omega) + 3u(2\pi 1000 - \omega) \quad (14)$$

が成立する。以下で MATLAB により確認を行う。

【ソースコード 1】

Contents

- [delete](#)
- [time series](#)
- [FFT spectrum](#)
- [plot](#)

```
clc  
clear all  
close all hidden
```

delete

```
delete( '*.asv' )
```

time series

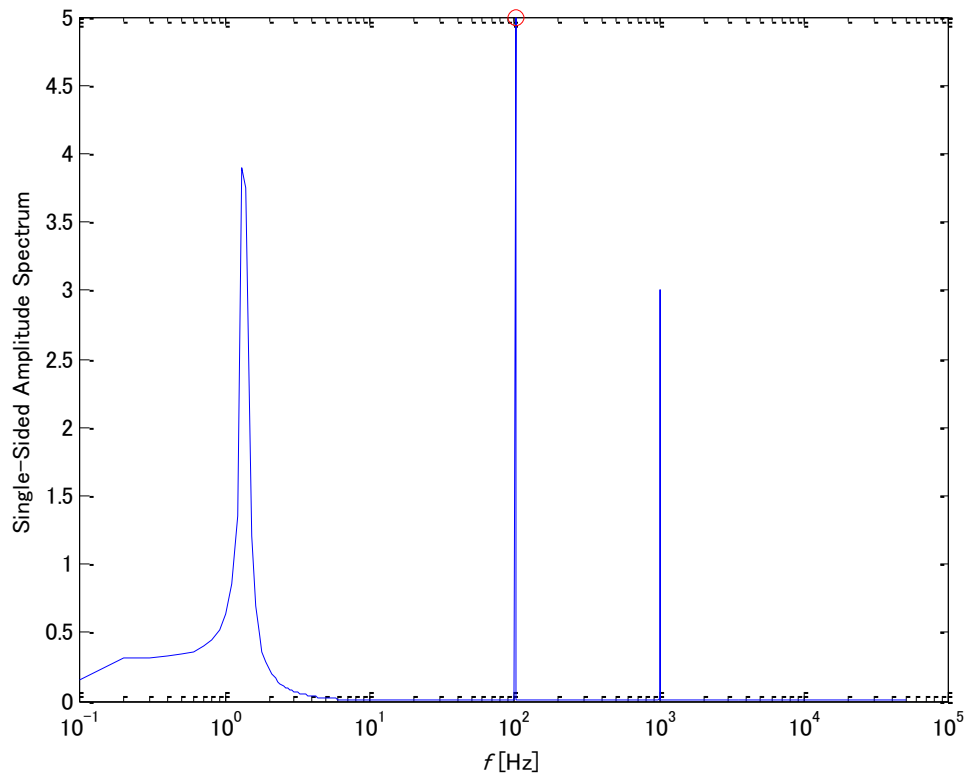
```
time_m = linspace( 0, 10, 1e+6 );  
y_data = @( time ) ( 6*sin( 2*pi*1.25*time ) + 5*sin( 2*pi*100*time ) + 3*cos( 2*pi*1000*time ) );  
  
data = [ time_m.' y_data( time_m).' ];
```

FFT spectrum

```
[ dom_freq, dom_amp ] = FFT_data( data, [], 1 );
```

plot

```
hold( gca, 'on' )  
plot( dom_freq, dom_amp, 'ro' )
```



本来, $\omega = 2\pi 1.25$ で最大振幅スペクトル値である

$$\left. \frac{\|\mathcal{F}[g](\omega)\|}{N_{data}\tau} \right|_{\omega=2\pi 1.25} = 6 \quad (15)$$

となるはずであるが, $\omega = 2\pi 100$ で最大値5をとっている. これは, 離散化周波数の刻みの整数倍の周波数以外の周波数成分の振幅が正確に推定できないためである. よって, 離散化周波数の刻みを細かくすればよい. 離散フーリエ変換を計算する前にデータをゼロパディングすると, 振幅推定精度の向上に役立つことがよくある.

【ソースコード2】

Contents

- [delete](#)
- [time series](#)
- [FFT spectrum](#)
- [plot](#)

```
clc
clear all
close all hidden
```

delete

```
delete( '*.*asv')
```

time series

```
time_m = linspace( 0, 10, 1e+6);  
y_data=@(time) ( 6*sin( 2*pi*1.25*time) + 5*sin( 2*pi*100*time) + 3*cos( 2*pi*1000*time) );  
  
data = [ time_m.' y_data( time_m).'];
```

FFT spectrum

```
[ dom_freq, dom_amp] = FFT_data( data, 1e+7, 1);
```

plot

```
hold( gca, 'on')  
plot( dom_freq, dom_amp, 'ro')
```

Published with MATLAB® 7.5

