

Differential equation **Note on resonance**

Forced motion without damping (감쇠항이 없는 강제 운동)

$$my'' + ky = A \cos \omega t$$

$$\text{Case: } \omega \neq \omega_0 = \sqrt{k/m}$$

입력진동수가 고유 진동수와 다른 경우

$$\Rightarrow \text{General solution } y(t) = C_1 \cos \omega_0 t + C_2 \sin \omega_0 t + \frac{A}{m(\omega^2 - \omega_0^2)} \cos \omega t$$

입력 진동수가 고유 진동수에 가까워진다면?

$$\text{Case: } \omega = \omega_0 \quad (\text{Input frequency} = \text{natural frequency})$$

$$y_p(t) = at \cos \omega t + bt \sin \omega t$$

$$\Rightarrow y_p = \frac{A}{2\omega_0 m} t \sin \omega_0 t$$

진폭이 일차함수로 증가한다. (공진 **resonance**)

외부에서 주기적인 힘이 시스템에 작용할 때 이 힘의 진동수가 시스템의 진동수와 가까우면 시스템을 파괴할 수도 있다.

Famous examples :

(1) Tacoma Narrow Bridge collapsed by resonance in 1940

(2) Swinging of millennium bridge at London on the opening day in 2000

(3) 1985 big earthquake (magnitude 8.1) at Mexico city, Mexico. Only middle sized buildings were destroyed. Why?



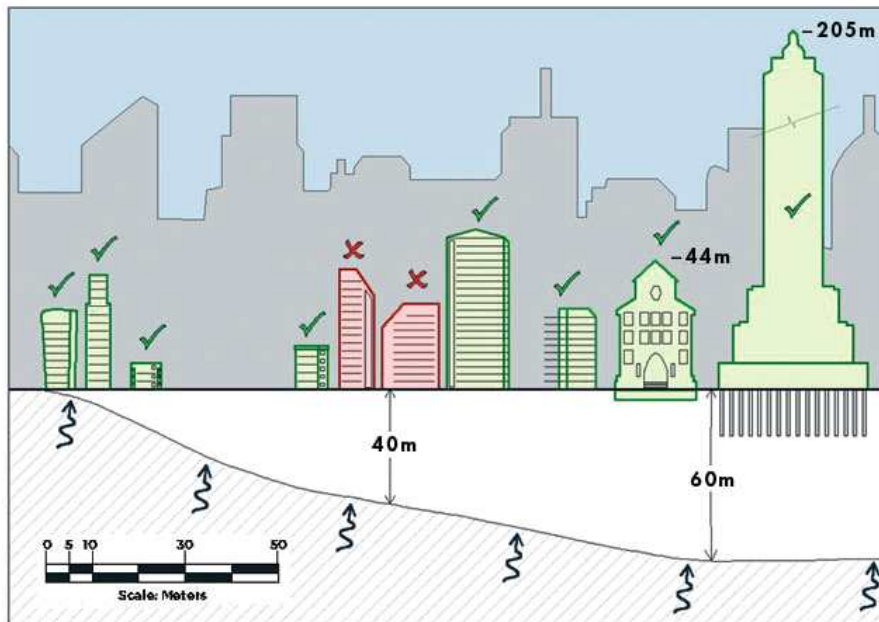
서부 해안에서 일어난 지진파가 400km 내륙에 있는 멕시코시티로 진행.
멕시코시티는 과거에 거대한 호수였던 습지 위에 세워진 도시

어떤 종류의 건물이 큰 피해를 입었을까?

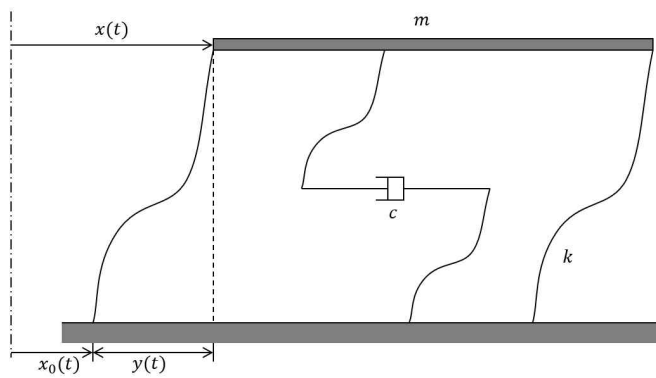
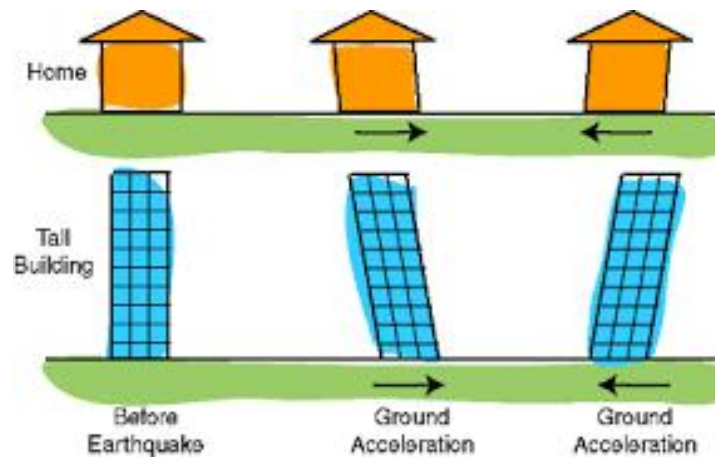
작은 집 => 높은 진동수의 지진파에 영향을 받음

높은 빌딩 => 낮은 진동수의 지진파에 영향을 받음

(바다에서 작은 배와 큰 배에 영향을 주는 파동의 진동수는 서로 다르다)



내진 설계



내진 설계의 개념 damper를 달기

2. Beat (맥놀이)

$$my'' + ky = A \cos \omega t$$

$$\text{Case: } \omega \neq \omega_0 = \sqrt{k/m}$$

$$\Rightarrow \text{General solution } y(t) = C_1 \cos \omega_0 t + C_2 \sin \omega_0 t + \frac{A}{m(\omega^2 - \omega_0^2)} \cos \omega t$$

$$y(0) = y'(0) = 0$$

$$C_1 = -\frac{A}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}, \quad C_2 = 0$$

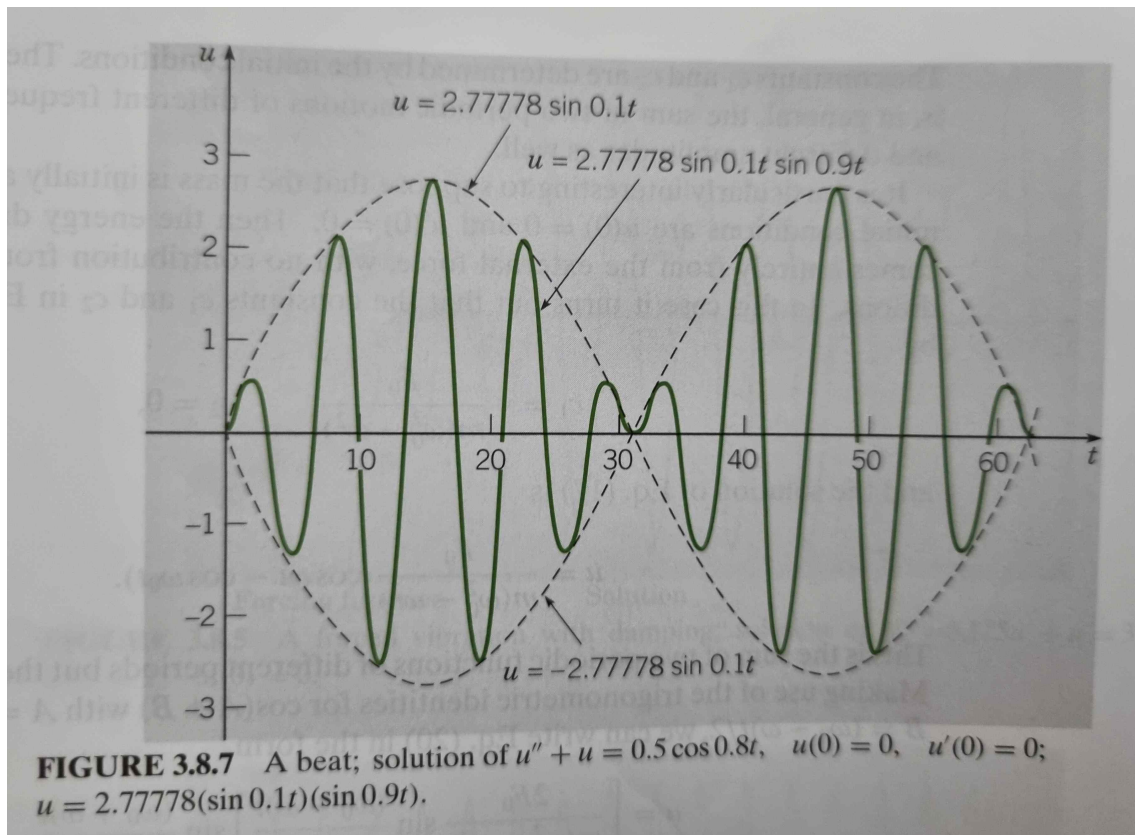
$$\Rightarrow y(t) = \frac{A}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} (\cos \omega t - \cos \omega_0 t)$$

$$y = \left[\frac{2A}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \sin \frac{(\omega_0 - \omega)t}{2} \right] \sin \frac{(\omega_0 + \omega)t}{2}$$

$\Rightarrow |\omega - \omega_0| \ll |\omega + \omega_0|$ 인 경우 진폭의 주기적인 변동이 두드러짐 (이를 beat라고 함)

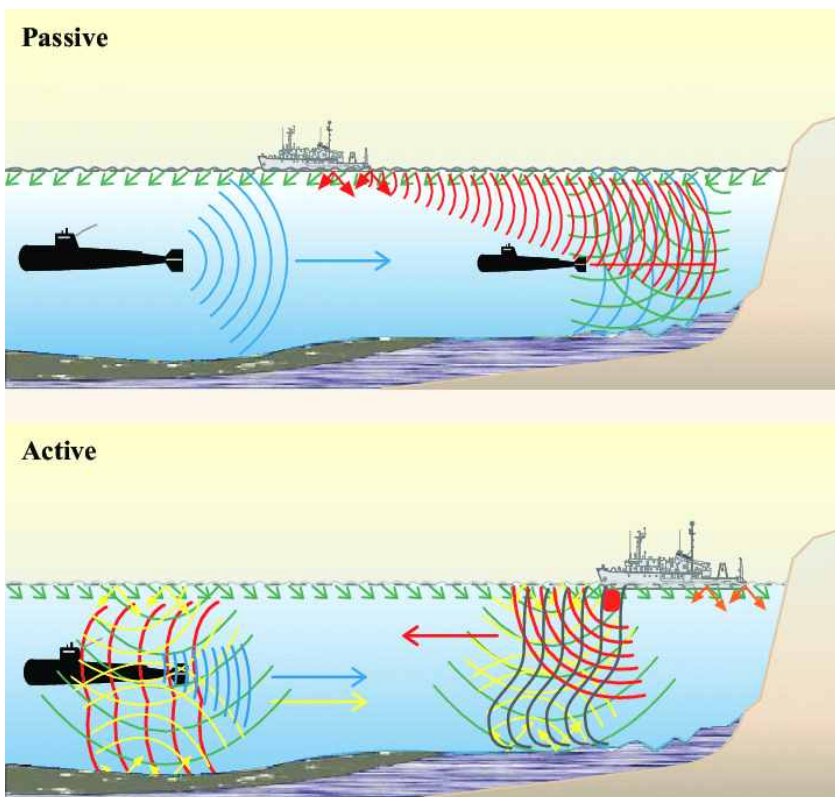
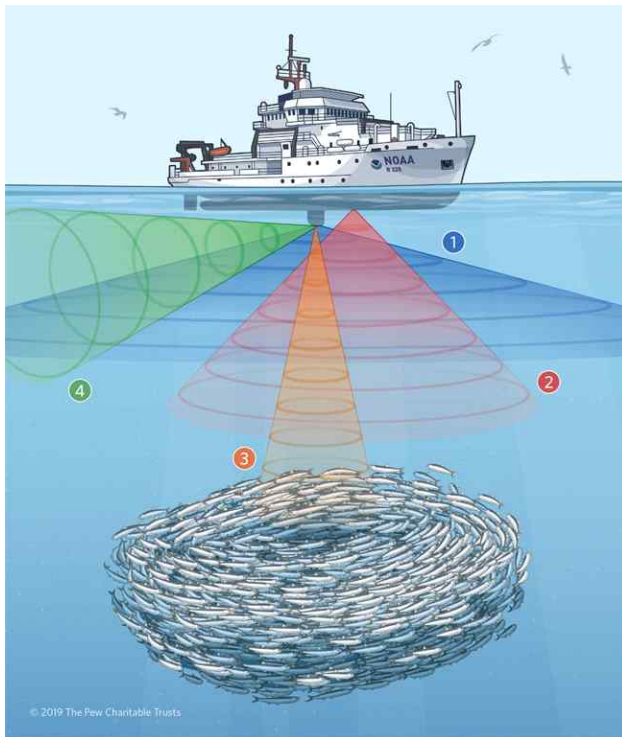
$$\text{Example } \omega_0 = 1, \quad \omega = 0.8$$

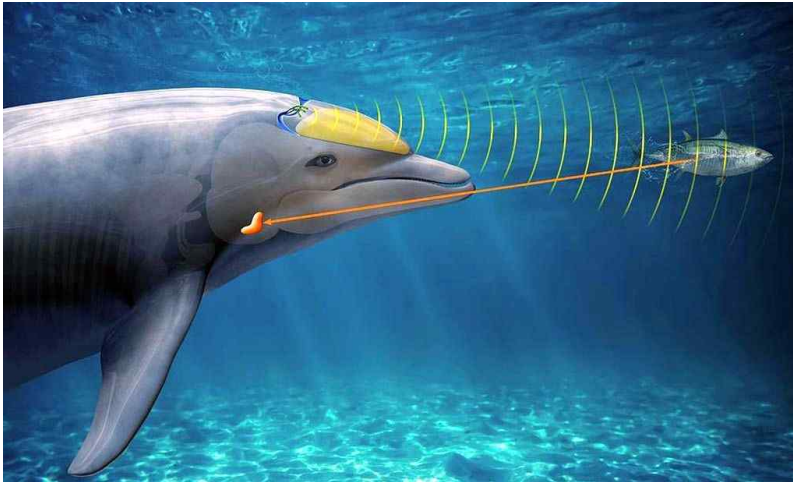
$$\Rightarrow \sin 0.1 t \sin 0.9 t$$



응용

1. 도로 위에서 과속하는 차의 속도 측정 : 스피드건 /doppler RADAR
 -> 맥놀이(beat)와 도플러효과를 함께 이용
2. SONAR =sound navigation and ranging. 수중음파탐지기
 해저의 깊이 측정 또는 군사적 목적으로 잠수함의 위치 탐지.
 돌고래가 초음파를 사용해서 이동을 하거나 사냥을 하는 경우도 일종의 sonar.





3. 성덕대왕신종의 타종 시 맥놀이

1000 Hz 이 내에 50 가지 다른 소리가 잡힘 (19세기 만들어진 영국 세인트 폴 대성당의 종은 20가지 소리)

대칭 모양의 종에서 왜 여러 주파수의 음파가 잡히는가?

주된 음은 168 Hz인데 여기도 168.52와 168.63 두 개의 파가 섞여 나오기 때문에 9초 단위로 맥놀이가 일어난다.

건축/토목의 비파괴 검사 damage detection

4. 광산의 유해 가스 검출

-> 광산 안에 유해 가스가 있을 경우 음파를 쏘아 보내면 포텐셜 에너지의 증가로 음파의 속도가 증가하기 때문에 음파의 진동수가 증가한다. 원래의 진동수와 차이가 생겨서 유해 가스가 있음을 알아낸다.