2^{nd} week 1. First Order ODE

(변수분리형 방정식 sec 2.2)

1계 미분방정식

$$F(x, y, y') = 0$$
$$y' = f(x, y)$$

변수 분리형 방정식 (Separable equation)

$$\frac{dy}{dx} = g(x)h(y)$$

$$\frac{1}{h(y)}dy = g(x)dx \quad \text{(이 때 h(y)는 0이 아니라고 가정)}$$

$$\int \frac{1}{h(y)}dy = \int g(x)dx$$

Ex)

$$\frac{dy}{dx} = y^2 e^{-x}$$

$$\frac{1}{y^2}dy = e^{-x}dx$$

$$\int \frac{1}{y^2}dy = \int e^{-x}dx$$

$$-\frac{1}{y} = -e^{-x} + C$$

$$y = \frac{1}{C + e^{-x}}$$ ← general solution.

Q: 풀이 방법은 어떻게 수학적으로 정당화되는가?

$y = \Phi(x)$을 $\frac{dy}{dx} = g(x)h(y)$의 해 라고 하자.

해를 식에 대입하면

$$\Phi'(x) = g(x)h(\Phi(x))$$

$$\int \frac{\Phi'(x)}{h(\Phi(x))}dx = \int g(x)dx$$

왼쪽의 식은 Φ를 포함하고 있고, 오른쪽의 식은 Φ를 포함하고 있지 않다.

왼쪽 적분을 계산하기 위해 치환적분법을 쓴다.

$$y = \Phi(x), \quad dy = \Phi'(x)dx$$

$$\int \frac{\Phi'(x)}{h(\Phi(x))}dx = \int \frac{1}{h(y)}dy\text{가 된다.}$$

※ 해 잃어버림 현상

변수분리형 미분방정식의 일반해는 모든 해를 포함하지 않는 경우가 있다.

예) $\dfrac{dy}{dx} = y^2 e^{-x}$

일반해 $y = \dfrac{1}{C + e^{-x}}$ $y = 0$도 미분방정식의 해가 되지만 일반해에 어떤 C 값을 선택해도 $y = 0$을 얻을 수 없다. 이와 같이 일반해를 얻는 과정에서 분실된 해를 특이해(Singular solution)라고 한다.

일반적으로 $\dfrac{dy}{dx} = g(x)h(y)$에 대해 y_0가 $h(y) = 0$의 근이 될 경우 상수 함수 $y = y_0$는 미분방정식의 해가 되는데, 이 상수해들이 특이해가 될 수 있다.

연습문제) $x^3 \dfrac{dy}{dx} = 2 + y$는 특이해를 가지는가?

$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2+y}{x^3}$ ($x^3 \neq 0$)

$\int \frac{1}{2+y} dy = \int \frac{1}{x^3} dx$

$\ln|2+y| = -\frac{1}{2}x^{-2} + C$

$2+y = \pm e^{c} \cdot e^{-\frac{1}{2}x^{-2}}$

$y = -2 + A e^{-\frac{1}{2}x^{-2}}$

$A = \{A \mid \pm e^{c} \mid 0\}$.

※ 변수분리형 미분방정식의 해는 일반적으로 음함수의 해로 주어진다.

→ implicit solution.

Ex)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{1 - y^2}$$

$$\int (1 - y^2)dy = \int x^2 dx$$

$$y - \frac{1}{3}y^3 = \frac{1}{3}x^3 + C$$

$$x^3 + y^3 - 3y = C$$

y 3차방정식.

곡선의 방정식을 정의한다.

→ if you want 해곡선 (함수)

곡선의 방정식을 정의해야 한다.

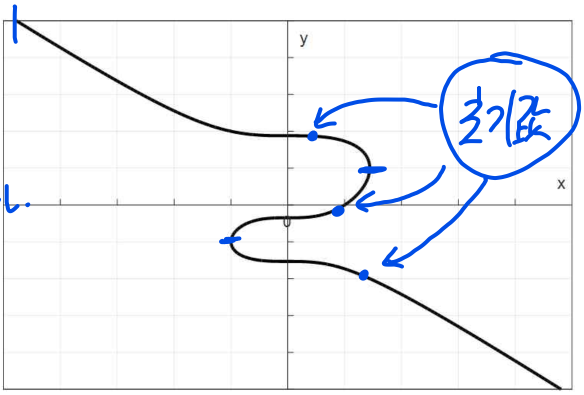

그림 1

sec 2.3 : 1계 선형(First order Linear) 미분방정식

1) 1계 선형(Linear) 미분방정식의 해 구하기

$F(t,y,y')=0$ 1계 미분방정식

F가 y와 y'에 대해 선형 즉 1차식인 경우

$$F(t,y,y')=a(t)+b(t)y+c(t)y'=0$$

(표준형) $\dfrac{dy}{dt}+P(t)y=Q(t)$ (y'의 계수가 1이 되도록) → 적분해를 구해야 함.

질문) 일반적인 1계 선형 미분방정식의 해를 어떻게 구하는가? → $e^{\int p(t)\,dt}$

Ex) (해를 구하는 방법에 대해 아이디어 얻기)

$$\frac{dy}{dt}+\frac{1}{t}y=t,\ \ (t>0)$$

→ 적분인자를 양변에 곱함.

양변에 t를 곱하면 $t\dfrac{dy}{dt}+y=t^2$

이런 형식으로 좌변을 바꿈.

좌변을 $\dfrac{d}{dt}(ty)=(t)'y+t(y)'=y+t\dfrac{dy}{dt}$와 같이 쓸 수 있다.

원래의 미분 방정식은 $\dfrac{d}{dt}(ty)=t^2$

해를 구하려면 양변을 적분

$$\int\frac{d}{dt}(ty)dt=\int t^2dt$$

→ $\int \frac{d}{\cancel{dt}}(ty)\,\cancel{dt}$

⇒ $\int (ty)\,d$

상수

⇒ ty //

$$ty=\frac{1}{3}t^3+C$$

$$y=\frac{1}{3}t^2+\frac{C}{t},\ \ (t>0)\qquad \text{(일반해)}$$

2) 관찰을 일반화하기

주어진 1계 선형 미분방정식 $\frac{dy}{dt}+P(t)y=Q(t)$의 양변에 적당한 함수를 곱해서 좌변을 단일 함수의 미분으로 표현할 수 있으면 성공!

$$\mu(t)(\frac{dy}{dt}+P(t)y)=\mu(t)Q(t)$$

질문) 어떤 함수를 곱해야 할까? Multiplier가 만족해야할 조건은?

$$\mu(t)(\frac{dy}{dt}+P(t)y)=\frac{d}{dt}(\mu(t)y)$$

$\Rightarrow$

$$\mu y'+\mu' y=\mu y'+\mu P(t)y$$

$$\mu' y=\mu P(t)y$$

$$\mu'=P(t)\mu$$

Multiplier는 위의 미분방정식을 만족하는 함수여야 한다.

$$=> \quad \frac{d\mu}{dt}=P(t)\mu$$

$$\int \frac{1}{\mu}d\mu=\int P(t)dt$$

$$\ln|\mu|=\int P(t)dt$$

$$\mu=\pm e^{\int P(t)dt}$$

이 함수를 **적분인자(Integrating factor)**라고 한다.

Ex) 미분방정식 $t\frac{dy}{dt}=t^2+3y,\ (t>0)$의 일반해를 구하여라.

STEP 1) 먼저 방정식을 다음과 같이 표준형으로 쓴다.

$$\frac{dy}{dt}-\frac{3}{t}y=t \quad \text{(선형방정식인지 확인)}$$

(여기서 $t>0$인 영역을 생각하므로 y의 계수 함수는 잘 정의가 된다).

STEP 2) 적분인자를 찾는다. 적분인자는

$$e^{-\int \frac{3}{t}dt}=e^{-3\ln t}=e^{\ln t^{-3}}=t^{-3} \quad (t>0)$$

가 된다.

(Q?)적분할 때 왜 적분 상수를 신경쓰지 않아도 될까?

STEP 3) 적분인자를 주어진 미분방정식의 표준형의 양변에 곱한다.

$$t^{-3}(y' - \frac{3}{t}y) = t^{-2}$$

$$\frac{d}{dt}(t^{-3}y) = t^{-2}$$

을 얻는다. 양변을 적분하면 일반해는

$$t^{-3}y = \int t^{-2}dt = -\frac{1}{t} + C$$

$$y = -t^2 + Ct^3, \ (t > 0)$$

가 된다.

4) 초깃값 문제: Initial value problem

$t\dfrac{dy}{dt} = t^2 + 3y, \quad y(1) = 1$에 대한 초깃값 문제의 해를 구하여라.

풀이) y(1)=1이므로 t>0 에 대해 해를 구하는 것으로 충분하다.

위의 풀이로부터 일반해는 $y = -t^2 + Ct^3$.

초기조건 $y(1) = 1$로부터 $C = 2$를 얻는다.

초깃값 문제의 해는 $y = 2t^3 - t^2$이다.

Ex) 미분 방정식 $\dfrac{dy}{dt} + \dfrac{1}{2}y = e^{t/3}$의 일반해를 구하시오.

⇒ 표준형으로 주어짐.

$$\text{적분인자} \Rightarrow \exp\left(\int \frac{1}{2}dt\right) = \exp\left(\frac{1}{2}t\right) = e^{t/2}$$

$$e^{t/2}(y'+1/2y)=e^{t/2+t/3}$$

$$\frac{d}{dt}(e^{t/2}y)=e^{5/6t}$$

$$e^{t/2}y=\frac{6}{5}e^{\frac{5}{6}t}+C$$

$$y=\frac{6}{5}e^{t/3}+Ce^{-t/2}$$

예제) $\frac{dy}{dx}=2+2xy,\ \ y(0)=1$

1계 선형 방정식

표준형 => $\frac{dy}{dx}-2xy=2$

적분인자 $e^{\int(-2x)dx}=e^{-x^2}$

$$e^{-x^2}(y'-2xy)=2e^{-x^2}$$

$$(e^{-x^2}y)'=2e^{-x^2}$$

$$e^{-x^2}y=2\int e^{-x^2}dx$$

$$e^{-x^2}y-y(0)=2\int_0^x e^{-t^2}dt$$

$$e^{-x^2}y=y(0)+2erf(x)$$

$$y=y(0)e^{x^2}+2e^{x^2}erf(x)$$