Hw 4 김신축

No.
Date.

1. (a) $m=4,\ k=1,\ c=2$ 이므로 물체의 위치를 설명하는 미분방정식은 :

$4y''+2y'+y=0$ 이고

평행점 기준 아래로 2 unit을 당긴 시점부터 관측을 하므로

$y(0)=2$ (아래방향이 +로 생각하겠음...)

"살짝" 놓았으므로 놓은 시점에 속력은 0 이라고 생각할 수 있으므로

$y'(0)=0.$

$\therefore\ 4y''+2y'+y=0\ ,\ \begin{cases} y(0)=2 \\ y'(0)=0 \end{cases}$

(b) $r=\frac{-1\pm\sqrt{1-4}}{4}=\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{4}\Rightarrow e^{-\frac{1}{4}}\cdot e^{\frac{\sqrt{3}}{4}i},\ e^{-\frac{1}{4}}\cdot e^{-\frac{\sqrt{3}}{4}i}$

일반해 $y=c_1e^{-\frac{1}{4}t}\cos\frac{\sqrt{3}}{4}t+c_2e^{-\frac{1}{4}t}\sin\frac{\sqrt{3}}{4}t$

$y'=-\frac{1}{4}c_1e^{-\frac{1}{4}t}\cos\frac{\sqrt{3}}{4}t-\frac{\sqrt{3}}{4}c_1e^{-\frac{1}{4}t}\sin\frac{\sqrt{3}}{4}t$
$\quad -\frac{1}{4}c_2e^{-\frac{1}{4}t}\sin\frac{\sqrt{3}}{4}t+\frac{\sqrt{3}}{4}c_2e^{-\frac{1}{4}t}\cos\frac{\sqrt{3}}{4}t$

$y(0)=c_1=2\ .\ y'(0)=-\frac{1}{4}c_1+\frac{\sqrt{3}}{4}c_2=0.$

$\Rightarrow c_2=\frac{2\sqrt{3}}{3}.$

$\therefore\ y=2e^{-\frac{1}{4}t}\cos\frac{\sqrt{3}}{4}t+\frac{2\sqrt{3}}{3}e^{-\frac{1}{4}t}\sin\frac{\sqrt{3}}{4}t.$

(c) $y=e^{-\frac{1}{4}t}\left(2\cos\frac{\sqrt{3}}{4}t+\frac{2\sqrt{3}}{3}\sin\frac{\sqrt{3}}{4}t\right)$

$=e^{-\frac{1}{4}t}\left(A\cos(\delta)\cos\frac{\sqrt{3}}{4}t+A\sin(\delta)\sin\frac{\sqrt{3}}{4}t\right)$

$\delta=\arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=\frac{\pi}{6}$

$A=\sqrt{2^2+\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2}=\frac{4}{\sqrt{3}}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$ $\left(\because A\cos(\delta)=2,\ A\sin(\delta)=\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$

$\Rightarrow y=\frac{4\sqrt{3}}{3}e^{-\frac{1}{4}t}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{4}t+\frac{\pi}{6}\right)$ ($\because$ 삼각함수의 합성공식)

따라서 용수철의 초기 진폭은 $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ 이고 시간에 따라 $e^{-\frac{1}{4}t}$ 때문에

진폭이 감소한다.

(d)

- $\frac{\sqrt{3}}{4}t + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$

  $t = \frac{2\pi}{6} \times \frac{4\sqrt{3}}{3} = \underline{\frac{4\sqrt{3}}{9}\pi}$ 초에 최초로 임계점 $y=0$을 지난다.

- $\frac{2\pi}{\frac{\sqrt{3}}{4}} = \frac{8\sqrt{3}}{3}\pi$ 주기로 한사이클을 진동한다.

(e) $m=8 \quad k=1 \quad c=4$

$y(t) = 8y'' + 4y' + y = 0$

$r = \frac{-2 \pm \sqrt{4-8}}{8} = \frac{-1 \pm 1i}{4} \Rightarrow e^{-\frac{1}{4}} \cdot e^{\frac{i}{4}},\ e^{-\frac{1}{4}} \cdot e^{-\frac{i}{4}}$

$y = c_1 e^{-\frac{1}{4}t} \cos\frac{1}{4}t + c_2 e^{-\frac{1}{4}t} \sin\frac{1}{4}t$

$y' = -\frac{1}{4}c_1 e^{-\frac{1}{4}t}\cos\frac{1}{4}t - \frac{1}{4}c_1 e^{-\frac{1}{4}t}\sin\frac{1}{4}t$
$\quad -\frac{1}{4}c_2 e^{-\frac{1}{4}t}\sin\frac{1}{4}t + \frac{1}{4}c_2 e^{-\frac{1}{4}t}\cos\frac{1}{4}t$

$y(0) = c_1 = 2\ ,\ y'(0) = -\frac{1}{4}c_1 + \frac{1}{4}c_2 = 0$

$\Rightarrow c_1 = 2\ ,\ c_2 = 2$

$\therefore y = 2e^{-\frac{1}{4}t}\cos\frac{1}{4}t + 2e^{-\frac{1}{4}t}\sin\frac{1}{4}t$

$\Rightarrow y = e^{-\frac{1}{4}t}(2\cos\frac{1}{4}t + 2\sin\frac{1}{4}t)$

$= e^{-\frac{1}{4}t}(A\cos(\delta)\cos\frac{1}{4}t + A\sin(\delta)\sin\frac{1}{4}t)$

$\delta = \arctan(1) = \frac{\pi}{4} \quad (\because A\cos(\delta) = 2, A\sin(\delta) = 2)$

$A = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$

$\Rightarrow y = 2\sqrt{2}\, e^{-\frac{1}{4}t} \cos\left(\frac{1}{4}t + \frac{\pi}{4}\right)$

따라서 m과 c가 2배 늘었을 때, 진폭은 $\frac{2\sqrt{2}}{\frac{4\sqrt{3}}{3}}$ 만큼 증가하였다.

No.

Date. / /

2

(a) $k=4$, $m=2$ 이므로. 시스템은 $2y''+4y$ 이고

외부힘이 $3\cos\omega t$ 이므로.

$$\begin{cases} y(t) = 2y''+4y = 3\cos\omega t \text{ 이다.} \\ \text{초기조건 } y(0)=y'(0)=0. \end{cases}$$

(b) $y_h = C_1\cos\sqrt{2}t + C_2\sin\sqrt{2}t \quad \left(\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{2}\right)$

$y_p = At\cos\omega t + Bt\sin\omega t$

$y_p'' = -\omega A\sin\omega t - \omega A\sin\omega t - \omega^2 At\cos\omega t$
$\quad + \omega B\cos\omega t + \omega B\cos\omega t - \omega^2 Bt\sin\omega t$

$2y_p'' + 4y_p = 3\cos\omega t$ 이므로

$$\begin{cases} A = -3/4 \\ B = 0 \end{cases}$$

$y = y_h + y_p = C_1\cos\sqrt{2}t + C_2\sin\sqrt{2}t - \frac{3}{4}t\cos\omega t$
$\quad = C_1\cos\sqrt{2}t + C_2\sin\sqrt{2}t - \frac{3}{4}t\cos\sqrt{2}t \quad (\because \omega = \omega_0)$

$y' = -\sqrt{2}C_1\sin\sqrt{2}t + \sqrt{2}C_2\cos\sqrt{2}t + \frac{3\sqrt{2}}{4}t\sin\sqrt{2}t - \frac{3}{4}\cos\sqrt{2}t$

$y(0) = C_1 = 0$

$y'(0) = \sqrt{2}C_2 - \frac{3}{4} = 0, \quad C_2 = \frac{3\sqrt{2}}{8}$

$\therefore y = \frac{3\sqrt{2}}{8}\sin\sqrt{2}t - \frac{3}{4}t\cos\sqrt{2}t$