Week 1. What is differential equation?

1. What is differential equation?

1) Prototype : population growth model (인구성장모델: 가장 간단한 미분방정식)

$P = P(t)$: population of a certain city

year	Population(thousand)
2000	100
2010	150
2020	250
...	...

$\frac{dP}{dt}$ is proportional to $P(t)$ => DE

오리엔테이션 슬라이드 introduction page 볼 것

2) Free falling object (자유낙하하는 물체의 운동 기술)

h(t) = the height of the ball falling after t seconds (position)

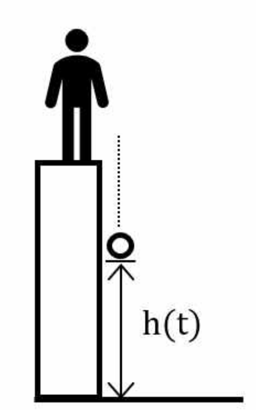


그림 1

Newton의 운동 방정식 => $F = ma$

$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\frac{dh}{dt} = \frac{d^2h}{dt^2}$ (acceleration)

Gravitational force = $-mg$

$$-mg = m\frac{d^2h}{dt^2}$$

미분방정식을 만족하는 함수 $h(t) = (-1/2)gt^2 + At + B$ (방정식을 만족하는지 확인해보라)
여기서 상수 A, B는 초기 위치와 초기 속도에 의해서 결정된다. (Initial condition and initial value problem)

Question
What issues do we have for study of differential equations?

2. DE in general

1) 일반적인 형태

$$y = y(t)$$

$$F(t, y, y', y'', \cdots, y^{(n)}) = 0$$

Ex) 비선형인 이유?

$$e^t + y^2 + y'y'' = 0$$

DEF) order of DE (계수) = order of highest derivative appearing in the equation

2) Linear DE vs nonlinear DE (선형방정식과 비선형방정식)

· 선형은 일반적으로 풀 수 있음.
· 비선형은 선형을 이용해 풀지만. 특별한 경우만 가능?

DEF) $F(t, y, y', y'', \cdots, y^{(n)}) = 0$

F is linear in $y, y', y'', \cdots, y^{(n)}$ => DE is said to be linear. (선형방정식)

Ex) linear

$$e^t + (\sin t)y + 2y'' = 0$$

Ex) nonlinear

$$y' = y^2$$

$F = y' - y^2 = 0$. ← y의 지수가 2이므로. 선형이 아니다.

자연현상들은 많은 경우 비선형이다.

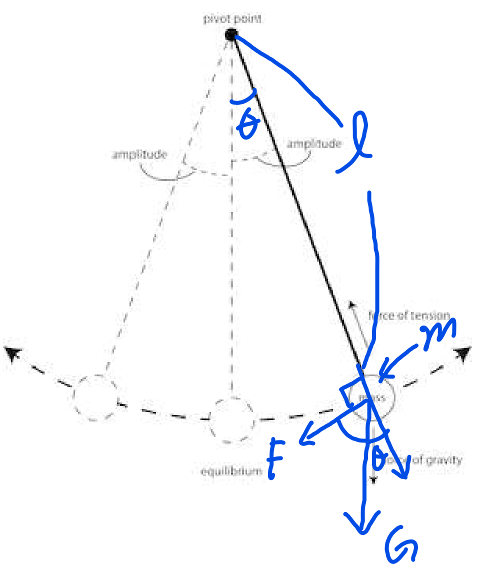
→ 1. 선형으로 근사를 시킨다.

2. 기하학적인 탐구 (방정식에 담긴 해의 behavior를 보고 해석)

Natural example of nonlinear DE

swinging pendulum (진자의 운동 : 비선형 미분방정식)

→ 각 θ의 시간에 따른 변화를 본다.



호의 길이 $= l\theta$

$$\frac{d}{dt}(\text{운동량}) = F = G\sin\theta$$

$$\frac{d}{dt}\left(m\frac{d(l\theta)}{dt}\right) = -mg\sin\theta$$

$$\cancel{m}\, l\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\cancel{m}g\sin\theta$$

$$\Rightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0.$$

비선형.

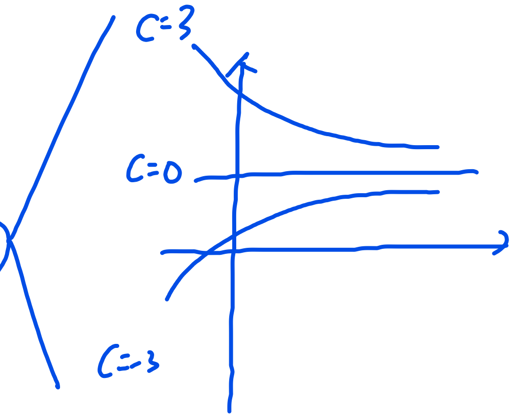
3) General solution vs Particular solution (일반해와 특수해)

Ex)

$$\frac{dy}{dt} = y$$

$y = e^t$ is a particular solution 특수해

$y = Ce^t$ is the general solution 일반해



Solving DE => Find the general solution of DE

** 특수해는 초깃값을 설정함으로써 정할 수 있다. (초깃값 문제를 푼다)

A particular solution can be determined by imposing initial condition

Initial value problem (초깃값 문제)

$$\frac{dy}{dt} = y$$

$$y(t_0) = y_0$$

=>

4) Fundamental questions (기본적인 질문들)

* 미분방정식은 항상 해를 갖을까?

Ex) $(\frac{dy}{dt})^2 + 1 = 0$ 는 해가 존재하지 않는다. 왜 그럴까?

* Does intial value problem always have a unique solution? (해의 유일성에 대한 질문)

다음 초깃값 문제 (Initial Value Problem)를 생각하자.

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = f(t,y) & \leftarrow \text{조건.} \\ y(t_0) = y_0 & \leftarrow \text{초기조건} \end{cases}$$

Q) 초깃값 문제는 해가 존재한다면 항상 유일한 해를 갖는가? 어떤조건에서는 주어진 초기값에 대해서 답이 하나가 아닐수 있다.

Ex)

$$\frac{dy}{dt} = t\sqrt[4]{y}$$

$$y(0) = 0$$

$y = 0$는 IVP의 해가 된다.

$y = \frac{1}{16}t^4$도 IVP의 해가 된다. Initial value problem.

두 해는 같은 초기 조건을 만족하는 서도 다른 해다.

정리 (해의 유일성 Uniqueness of solution)

임의의 초기치 문제 $\begin{cases} \frac{dy}{dt} = f(t,y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$ 에서

(t_0, y_0)을 중심으로 하는 사각형에서 $f(t,y)$와 $\frac{\partial f}{\partial y}$가 연속이면, 주어진 초기치 문제는 유일한 해를 갖는다. 왜?

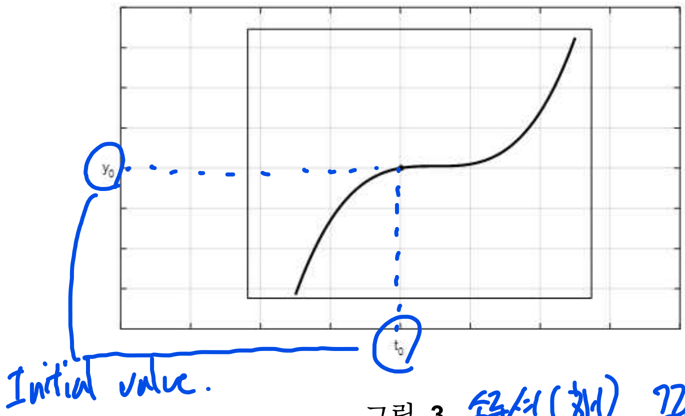


그림 3 솔루션(해) 그래프.

예) $\dfrac{dy}{dt}=t^2y=f(t,y)$ 정리의 조건을 만족함. 초깃값 문제는 해가 유일하다.

예 $\dfrac{dy}{dt}=ty^{1/4}=f(t,y)$는 (0,0)에서 정리의 조건을 만족하지 않는다.

5) Implicity defined solutions

미분방정식의 해가 곡선의 방정식 형태로 주어진다.

Ex) $x+y\dfrac{dy}{dx}=0$ => $x^2+y^2=c$ (음함수 형태로 해가 주어짐)

이 경우는 $y=f(x)$ 형태로 해를 표현할 수 있다.

예) $(1-y^2)\dfrac{dy}{dx}=x^2$

일반해 $-x^3+3y-y^3=c$

음함수를 구체적으로 표현할 수 있을까?

곡선의 방정식 => 해곡선을 얻을 수 있음 (기하학적 표현이 유용하다)

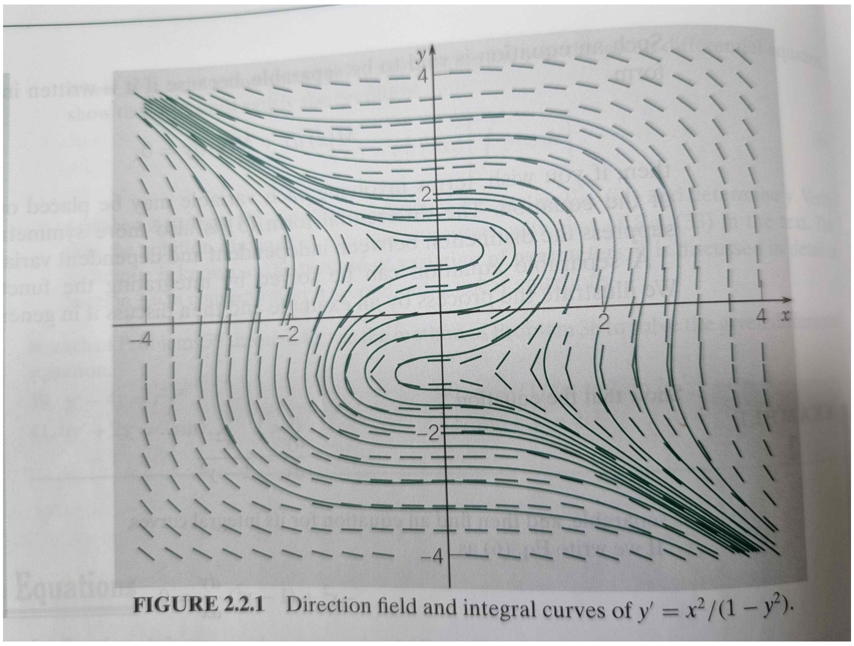


FIGURE 2.2.1 Direction field and integral curves of $y' = x^2/(1-y^2)$.

6) Integral curves. (해 곡선)

1계 미방의 해가 되는 함수의 그래프

Ex)

$$\frac{dy}{dt} + y = 2$$

$$y(t) = 2 + Ke^{-t}$$

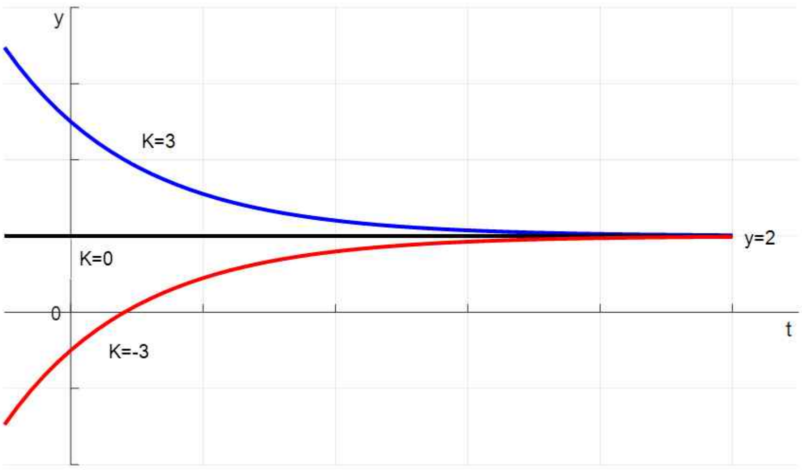


그림 5

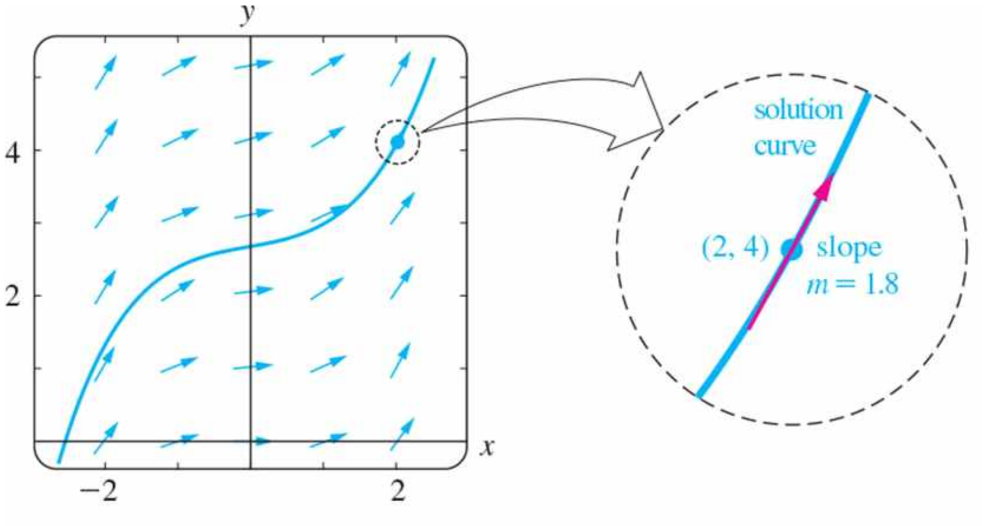
Integral curves는 family of curves로 주어진다.

Q: Integral curve로부터 알 수 있는 것은?
-해곡선의 유형이 바뀌는 지점을 발견할 수 있다.
-미분방정식의 해들이 갖는 공통적인 특성을 발견할 수 있다.

Integral curve가 유용하다면 어떻게 얻을 수 있을까?

방향장을 이용한 해곡선 그리기 (교과서 2.1) Recover original curve.

(아이디어) 함수의 그래프 => 각 점에 접선을 짧은 선분 형태로 붙일 수 있음.
=> 각 점에서 함수의 변화에 대한 정보
=> 접선의 선분들만 남기고 원래의 함수의 그래프를 지워버림.
=> 접선의 선분들만 가지고 원래의 함수의 그래프를 복원할 수 있음



(a) direction field for $y \geq 0$ (b) lineal element at (2,4)

1계 미분방정식 $\frac{dy}{dx}=f(x,y)$

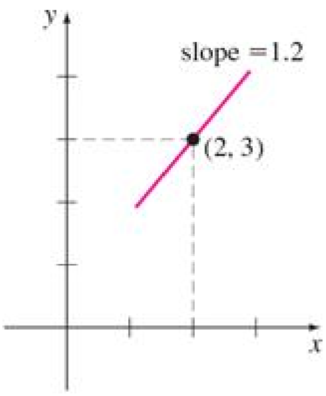
=> 방정식을 만족하는 함수의 그래프의 각 점에서의 접선의 기울기

=> 점 (a,b)를 선택하면 이 점을 지나는 해곡선 (방정식의 해의 그래프)의 접선의 기울기

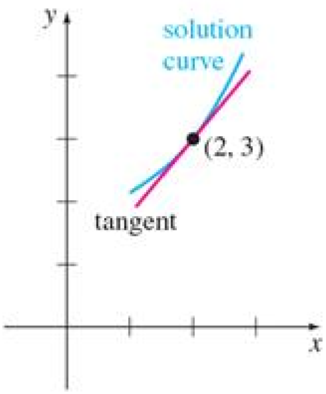
=> $\frac{dy}{dx}=f(a,b)$

예) $\frac{dy}{dx}=1.2(y-x)$ 점 (2,3)을 지나는 해곡선의 기울기?

$$\frac{dy}{dx}=1.2(3-2)=1.2$$



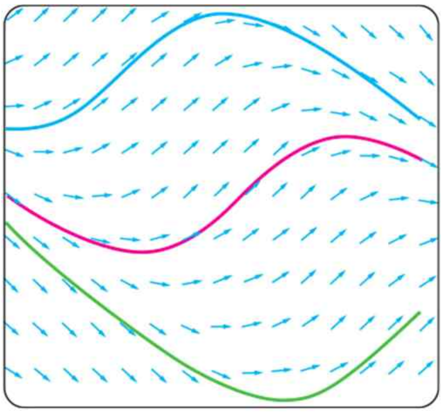
(a) lineal element at a point



(b) lineal element is tangent to solution curve that passes through the point

(정의) 1계 미분방정식의 방향장 (direction field)

$\frac{dy}{dx} = f(x,y)$에 대해서 평면 위의 각 점마다 이 점을 지나는 해곡선의 기울기를 시각적으로 표시하는 작은 화살표를 심을 수 있다. 이를 방향장이라고 한다.



예제) $\frac{dy}{dx} = y^2$의 방향장을 그리시오.

=> y 값이 같은 점들 즉 동일 수평선 위의 점들은 모두 같은 기울기를 갖는다.

=> y의 값을 바꿈으로써 여러 개의 수평선을 얻고 각 수평선 별로 방향장을 그린다.

$y=0$ => 기울기=0

y=1 => 기울기 1

y=2 => 기울기 4

y=-1 => 기울기 1

y=-2 => 기울기 4

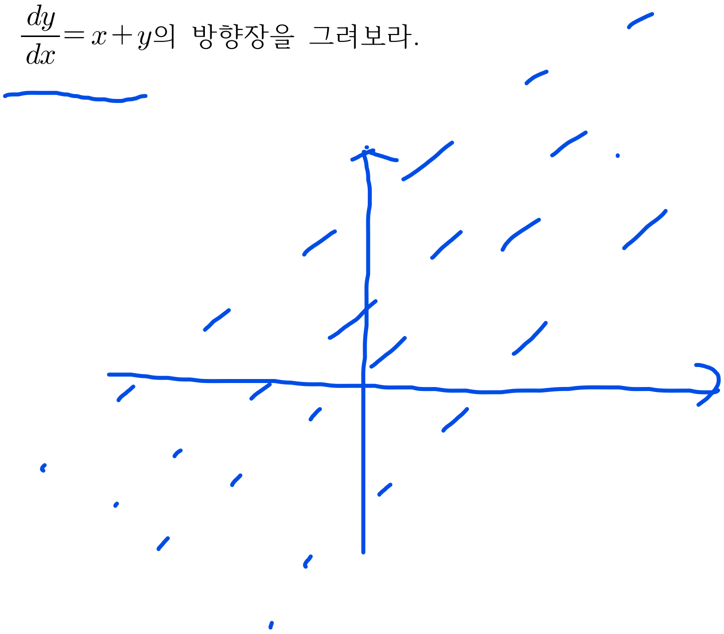
=> 방향장을 이용해서 해곡선 (integral curve)를 그려보라.

(등경사 곡선 Isocline) 방향장을 효율적으로 그리는 법

$\dfrac{dy}{dx}=f(x,y)$에서 우변이 c값을 갖는 점 들에서는 해곡선의 접선의 기울기가 모두 c이다. 이때 방향장을 구성하는 화살표는 모두 경사가 c가 된다. 이와 같이 경사가 동일한 점들의 집합 즉 곡선 $f(x,y)=c$을 **등경사 곡선 isocline**이라고 부른다.

예제) 등경사 곡선을 이용하여 $\dfrac{dy}{dx}=x+y$의 방향장을 그려보라.

등경사곡선 $x+y=c$



$c=0,\quad x+y=0$

$c=1/2,\quad x+y=1/2$

$c=1,\quad x+y=1$

$c=-1,\quad x+y=-1$