미방. HW2.

길 신후. 21900136

1. $\frac{dy}{dx} = \frac{x+3y}{3x+y}$.

right hand side : $\frac{x+3y}{3x+y} = \frac{1+3\frac{y}{x}}{3+\frac{y}{x}}$ $(x \neq 0)$

let $\frac{y}{x} = u$.

then we can write the equation as :

$$u + x\frac{du}{dx} = \frac{1+3u}{3+u} \quad \left(\because \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(xu) = u + x\frac{du}{dx}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{1}{x} \cdot \frac{1-u^2}{3+u} \quad (\text{변수분리형 꼴})$$

$$\Rightarrow \int \frac{3+u}{1-u^2}\,du = \int \frac{1}{x}\,dx$$

① Left hand side : $\int \frac{3+u}{1-u^2}\,du$.

we can write $\frac{3+u}{1-u^2}$ as $\frac{A}{1-u} + \frac{B}{1+u}$ $(\because 1-u^2 = (1-u)(1+u))$

$\Rightarrow 3+u = A(1+u) + B(1-u)$ (multiply $1-u^2$ on the both side).

i) when $u=1$, $A=2$

ii) when $u=-1$, $B=1$.

$$\therefore \frac{3+u}{1-u^2} = \frac{2}{1-u} + \frac{1}{1+u}.$$

$$\int \frac{3+u}{1-u^2}\,du = \int \frac{2}{1-u}\,du + \int \frac{1}{1+u}\,du$$

$$= -2\ln|1-u| + \ln|1+u| + C.$$

② right hand side : $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c$.

$\therefore -2\ln|1-u| + \ln|1+u| = \ln|x| + c$. ($\because$ ①, ②)

$\Rightarrow -2\ln\left|1-\frac{y}{x}\right| + \ln\left|1+\frac{y}{x}\right| = \ln|x| + c$.

$\Rightarrow -2\ln|1-y/x| + \ln|1+y/x| - \ln|x| - c = 0$

$\Rightarrow \ln\left((1+y/x)/(1-y/x)^2\right) - \ln|x| - c = 0$

$\Rightarrow (1+y/x)/(1-y/x)^2/x = e^c$

$\Rightarrow (1+y/x) - e^c \cdot x \cdot (1-y/x)^2 = 0$

$\Rightarrow 1+y/x - e^c \cdot x \left(1 - 2y/x + \frac{y^2}{x^2}\right) = 0$

$\Rightarrow 1 + y/x - e^c \cdot x + 2e^c y - e^c \cdot \frac{y^2}{x} = 0$

$\Rightarrow x + y - e^c \cdot x^2 + 2e^c \cdot xy - e^c y^2 = 0$

$\Rightarrow y(1 + 2e^c x - e^c y) = e^c x^2 - x$

$$\Rightarrow y = \frac{e^c x^2 - x}{1 + 2e^c x - e^c y}$$ ...

2. $x^2\frac{dy}{dx} - xy = y^4$. $y(1)=1$.

divide x^2

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = \frac{y^4}{x^2}$

$\Rightarrow y^{-4}\frac{dy}{dx} - \frac{1}{x}\cdot y^{-3} = \frac{1}{x^2}$ ... ㉠

let $u = y^{-3}$. 일때

$\frac{du}{dx} = -3\cdot y^{-4}\cdot\frac{dy}{dx}$ 이므로.

we can write the equation ㉠ as :

$-\frac{1}{3}\frac{du}{dx} - \frac{1}{x}u = \frac{1}{x^2}$

$\Rightarrow \underline{\frac{du}{dx} + \frac{3}{x}u = -\frac{3}{x^2}}$ ... ㉡ 표준형.

적분인자 $= e^{3\int\frac{1}{x}dx} = e^{3\ln|x|} = x^3$

$\frac{d}{dx}(x^3u) + 3x^2u = -3x$

$\Rightarrow \frac{d}{dx}(xu) = -3x$

$\Rightarrow \int\frac{d}{dx}(xy)dx = \int -3x\,dx$

$\Rightarrow xy = -\frac{3}{2}x^2 + C$

$\Rightarrow y = -\frac{3}{2}x + \frac{C}{x}$ ... 일반해

when $y(1)=1$. $C=\frac{5}{2}$

$y = -\frac{3}{2}x + \frac{5}{2}\cdot\frac{1}{x}$ ... 특수해.

3. 시간 t분후 탱크안의 소금의 양을 $S(t)$라고 할 때,

$S'(t)$는 시간 t분후 탱크 안의 소금양의 변화율 이다.

소금물이 $5L/min$의 속도로 들어오므로

$$5\,L/min \times 0.2\,kg/L = 1\,kg/min \;\cdots ㉠$$

1kg의 소금이 매 분마다 들어오고 있다.

또한 같은속도로 소금물이 빠져나가고 있다고 했으므로.

(소금물의 농도: $S(t)\,kg / 500\,L = S(t)/500\,kg/L$)

$$5\,L/min \times S(t)/500\,kg/L = 5\cdot(S(t)/500)\cdot kg/min \cdots ㉡$$

만큼의 소금이 매 분마다 빠져나가고 있다.

(a) 따라서 미분방정식을 다음과 같이 세울 수 있다.

$$S'(t) = 1-5\cdot(S(t)/500) \quad (\because ㉠, ㉡)$$

초기값은 $S(0)=0$ 이다.

(b) $S'(t) = 1-5\left(S(t)/500\right)$

$$= -\frac{1}{100}S(t)+1$$

$\Rightarrow S'(t)+\frac{1}{100}S(t) = 1$ ← 표준형.

적분 인수: $e^{\int\frac{1}{100}dt} = e^{\frac{1}{100}t}$

$$\Rightarrow e^{\frac{1}{100}t}\cdot S'(t) + \frac{1}{100}\cdot e^{\frac{1}{100}t}\cdot S(t) = e^{\frac{1}{100}t}$$

$$\Rightarrow \left(e^{\frac{1}{100}t}\cdot S(t)\right)' = e^{\frac{1}{100}t}$$

$$\Rightarrow \int \left(e^{\frac{1}{100}t} \cdot s(t)\right)' dt = \int e^{\frac{1}{100}t} dt$$

$$\Rightarrow e^{\frac{1}{100}t} \cdot s(t) = 100 e^{\frac{1}{100}t} + C$$

$$\Rightarrow s(t) = 100 + \frac{C}{e^{\frac{1}{100}t}} = 100 + C \cdot e^{-0.0t}$$

$s(0)=0$ 이므로. $s(0) = 100 + C = 0.$

$$\therefore C = -100.$$

따라서 해는 $s(t) = 100 - 100 \cdot e^{-0.0t}$ 이다.

(c)

탱크안의 소금물의 농도는 $s(t)/500$ kg/L 이다.

따라서 $s(t)/500 = 0.1$ 일때의 t를 구하면 된다.

$$\Rightarrow 100 - 100e^{-0.0t} = 50$$

$$\Rightarrow e^{-0.0t} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow -0.0t = \ln\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\Rightarrow -0.0t = \cancel{\ln(1)}^{\,0} - \ln(2)$$

$$\Rightarrow t = 100 \ln 2 \ //.$$

따라서 탱크안의 소금물의 농도가 0.1kg/L가 되는데 걸리는 시간은 $100 \ln 2$ (분) 이 소요된다.