Section 2-1 Second Order ODE: homogeneous case

1. 2계 미분방정식의 예

1) 뉴턴이 생각한 물리학 문제

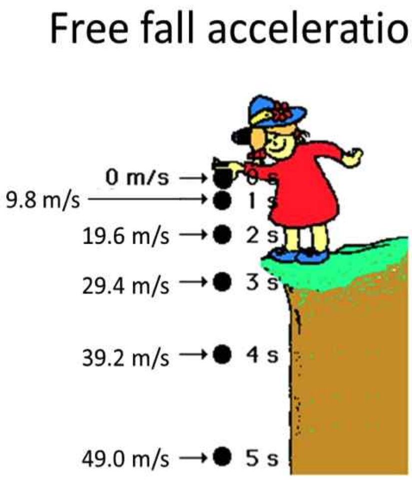


그림 1

Question) 실험적으로 확립된 갈릴레이의 법칙을 수학적으로 설명할 수 있을까? (낙하 거리는 시간의 제곱에 비례 한다.)

공이 움직이기 시작하여 t초 후의 높이를 $y=y(t)$라 하고 공의 질량을 m이라고 하자. 뉴턴의 제 2 운동법칙과 중력의 법칙에 의하면

$$m\frac{d^2y}{dt^2}=-mg$$

이다. 여기서 g는 중력 가속도이다.
이것은 우리가 앞에서 살펴본 대로 일종의 미분방정식이다.

미지의 함수 $y=y(t)$는 어떤 함수일까?
먼저 $y=y(t)$의 일계 도함수를 $v(t)$라고 놓으면 미분방정식은

$$\frac{d}{dt}v(t)=-g$$

가 되는 미지의 함수 $v(t)$를 찾는 문제가 된다.
주어진 식을 t에 대해서 적분하면 $v(t)=-gt+C_1$을 얻는다.
이제 이 식을 다시 $y=y(t)$에 대한 식으로 바꾸면

$$\frac{dy}{dt} = -gt + C_1$$

가 되고 $y = y(t)$는 미분해서 일차함수가 되는 함수이다.

이 식의 양변을 t에 대해서 적분하면 $y = -\frac{1}{2}gt^2 + C_1 t + C_2$ (자유낙하를 설명하는 미분방정식의 일반해)가 된다.

여기서 정해지지 않은 상수 C_1, C_2는 어떻게 결정할 수 있을까?

$y(0) = C_2$가 되는 것을 볼 수 있는데 이는 공의 최초의 높이 즉, 탑의 높이 h이다.

한편 $v(t) = -gt + C_1$이므로 $v(0) = C_1$가 되는데 $v(t)$라는 것은 높이의 시간에 대한 변화율 즉 속도이다. 따라서 $v(0) = C_1$는 최초의 속도임.

2. 2계 선형 미분방정식(2nd order linear differential equation)

(1) 기본 개념과 용어

2계 선형 미분방정식이란 미지의 함수 $y = y(t)$가 만족하는 다음과 같은 방정식이다.

$$\frac{d^2y}{dt^2} + p(t)\frac{dy}{dt} + q(t)y = f(t).$$

선형이란 말은 좌변의 식이 y, y', y''에 대해서 일차식이 되기에 붙은 이름이다.

*선형의 좋은 점은 가령 $f(t) = 0$인 경우 $y_1(t), y_2(t)$가 각각 미분방정식의 해일 때 임의의 상수 α, β에 대해 $\alpha y_1(t) + \beta y_2(t)$ (y_1과 y_2의 일차 결합 Linear combination)도 해가 되는 것이다.

$$y_1'' + py_1' + qy_1 = 0$$

$$y_2'' + py_2' + qy_2 = 0$$

$$=> (\alpha y_1 + \beta y_2)'' + p(\alpha y_1 + \beta y_2)' + q(\alpha y_1 + \beta y_2)$$

$$= \alpha(y_1'' + py_1' + qy_1) + \beta(y_2'' + py_2' + qy_2) = 0$$

$\Rightarrow$

1계 미분방정식에서는 미지 함수의 초기 값을 정해주는 것으로 충분했지만 2계 미분방정식은 두 번 미분한 함수에 대한 식이므로 미지함수의 1계 미분에 대한 초기 값도 정해주어야 한다. 즉 $y(t_0) = A$, $y'(t_0) = B$ 형태의 초기 조건(Initial condition)을 주어야 한다.

정리하면 2계 선형미분방정식의 초깃값문제(Initial Value Problem) 는 다음과 같이 주어진다.

$$\frac{d^2y}{dt^2}+p(t)\frac{dy}{dt}+q(t)y=f(t)$$
$$y(t_0)=A,\ y'(t_0)=B$$

GOAL) 2계 선형 미분방정식의 일반해(General solution)를 어떻게 구할 것인가?

보기 1. 2계 선형 미분방정식 $y''=y$의 해를 구해보자.

만약 함수 $y=y(t)$가 1계 미분방정식 $y'=y$를 만족하면 $y''=(y')'=y'=y$이므로 본래의 미분방정식의 해가 된다. $y=e^t$가 바로 그런 함수.

한편 $y=y(t)$가 $y'=-y$를 만족하면 $y''=(y')'=(-y)'=-y'=-(-y)=y$가 되므로 마찬가지로 본래의 미분방정식의 해가 된다. $y=e^{-t}$가 $y'=-y$의 해가 된다.

=> 방정식 $y''=y$의 해 $y=e^t$와 $y=e^{-t}$는 기본적으로 다른 해이다.

=> 두 번째 함수는 첫 번째 함수의 상수 배가 아니기 때문이다.

그런 경우 두 해가 일차 독립(Linearly independent)이라고 한다.

$y_1(t) \neq c y_2(t)$

방정식 $y''=y$가 갖는 선형성 때문에 $y=Ae^t+Be^{-t}$도 해가 된다. 이와 같이 적분 상수를 포함하는 해를 미분방정식의 일반해(General solution)라고 한다.

2계 선형 미분방정식을 푼다고 할 때는 일반해를 구하는 것을 의미한다.

일반해는 일차 독립인 두 개의 해의 선형결합 (또는 일차결합)으로 주어진다.

fundamental set $y_1(t)$ $y_2(t)$.

(2) 일반 이론

Question: Does initial value problem for 2^{nd} order linear DE always have an unique solution?

Theorem

(IVP) $\dfrac{d^2y}{dt^2}+p(t)\dfrac{dy}{dt}+q(t)y=f(t),\quad y(t_0)=\alpha,\ y'(t_0)=\beta$

where p, q, f are continuous on an open interval I including t_0.

=> there exists an unique solution for (IVP) defined on I.

Example

$$(t^2-3t)y''+ty'+(t+3)y=0$$

$$y(1)=2,\ \ y'(1)=1$$

$$y''+\frac{t}{t(t-3)}y'+\frac{t+3}{t(t-3)}y=0$$

=> I=(0,3) is the largest interval including t=1

General solution for $\frac{d^2y}{dt^2}+p(t)\frac{dy}{dt}+q(t)y=0$

Q: For which pair of solutions $y_1(t),\ y_2(t)$, does $c_1y_1(t)+c_2y_2(t)$ form a general solution?

=> condition for $y_1(t),\ y_2(t)$?

For any given IC, $y(t_0)=\alpha,\ y'(t_0)=\beta$

$c_1y_1(t_0)+c_2y_2(t_0)=\alpha$

$c_1y_1'(t_0)+c_2y_2'(t_0)=\beta$

Solve for c_1 and c_2

Wronskian determinant $W(t)=\det\begin{bmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t)\end{bmatrix}$

If it does not vanishes at t_0 then $c_1y_1(t)+c_2y_2(t)$ solves any IVP for $t=t_0$

(Definition) Such $y_1(t),\ y_2(t)$ is called "fundamental set of solutions of DE".

Exercise Back to example

$y''+5y'+6y=0$ => check Wronskian condition for a pair of solutions e^{-2t}, e^{-3t}

=>e^{-2t}, e^{-3t} is a fundamental set of solutions.

Theroem. $\frac{d^2y}{dt^2}+p(t)\frac{dy}{dt}+q(t)y=0$ (p, q are continuous on an interval I)

=> There exists an fundamental set of solutions.

Remark. The fundamental set of solutions for given DE <u>is not unique</u>

Example) $y''-y=0$ => cosh t and sinh t forms an fundamental set of solutions

----

$p(t)=A$, $q(t)=B$.

(3) 상수계수의 2계 선형 미분방정식 How to find fundamental set?

case 1.

2계 선형 미분방정식에서 계수 함수가 상수인 경우에 일반해를 구하는 것을 알아보자. 계수가 상수인 경우는 $y''+Ay'+By=f(t)$와 같이 쓸 수 있다. 여기서 A, B는 상수이다.

***동차(homogeneous) 의 경우**

fundamental set. ← 1차독립이되어야함.
find two solution

먼저 $f(t)=0$인 경우 이 때 이 방정식을 동차 방정식이라고 한다.
동차방정식은 $y''+Ay'+By=0$ 꼴이다.
일반해 ?
앞의 보기에서 살펴본 것처럼 지수함수가 해가 될 것처럼 보인다. 정해지지 않은 상수 r에 대해 함수 $y=e^{rt}$를 방정식에 대입해보면

$$\left(\frac{d^2}{dt^2}+A\frac{d}{dt}+B\right)e^{rt}=(r^2+Ar+B)e^{rt}=0$$

가 된다. 이로부터 상수 r이 만족해야할 조건

$$r^2+Ar+B=0$$

을 얻게 된다. 이를 주어진 미분방정식의 <u>특성방정식(Characteristic equation)</u>이라고 부른다.

상수 r이 특성방정식의 근이 되면 된다.

이 특성방정식은 다음 세 가지 유형의 근을 갖는다. : 2차 방정식이기 때문. (당연함)

(1) 두 개의 서로 다른 실수 근
(2) 한 개의 중복 실수 근
(3) 두 개의 복소수 근 (두 근은 켤레 복소수 관계임)

이제 다음 보기에서 세 가지 유형을 각각 살펴보자.

Ex) (첫 번째 유형) 미분 방정식 $y''+5y'+6y=0$의 해를 구해보자. 특성방정식 $r^2+5r+6=0$은 두 실 근 r=-2, -3을 가지므로 미분방정식은 e^{-2t}, e^{-3t}를 해로 갖는다. 이 두 해는 일차독립이므로 방정식의 일반해는

$$y=c_1e^{-2t}+c_2e^{-3t}$$

이다.

Ex) (두 번째 유형) 미분 방정식 $y''+4y'+4y=0$의 해를 구해보자. 특성방정식 $r^2+4r+4=0$은 중근 r=-2를 갖는다. 따라서 e^{-2t}가 해가 된다.

두 번째 해는 어떻게 구할까?

이처럼 중근이 나오는 경우 두 번째 해는 지금 얻은 해에 적당한 함수를 곱하여 얻는다.

실제로 te^{-2t}가 해가 된다. 해 e^{-2t}와 te^{-2t}는 일차독립이다. 따라서 일반해는

$$y=c_1e^{-2t}+c_2te^{-2t}=(c_1+c_2t)e^{-2t}$$

이다.

$y=u(t)e^{-2t}$가 해가 되려면?

$$(ue^{-2t})''+4(ue^{-2t})'+4ue^{-2t}=0$$

$$(u''+2u'(-2)+(-2)^2u)e^{-2t}+4(u'-2u)e^{-2t}+4ue^{-2t}$$

$$=(u''-4u'+4u'+0u)e^{-2t}=0$$

$$\Rightarrow u''=0 \Rightarrow u=at+b$$

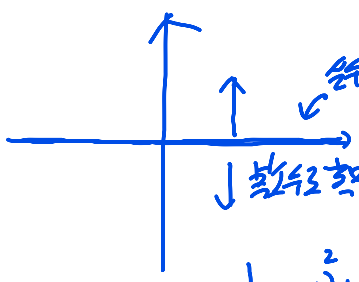
연습 1) $y=te^{-2t}$가 $y''+4y'+4y=0$의 해가 됨을 보여라.

Ex) (세 번째 유형) 미분방정식 $y''+2y'+2y=0$의 해를 구해보자.

특성방정식 $r^2+2r+2=0$은 $(r+1)^2+1=0$

=> 두 개의 복소수 근 $r=-1+i, -1-i$을 갖는다.

따라서 형식적으로는 두 해 $e^{(-1+i)t}, e^{(-1-i)t}$을 갖는다.



오일러의 항등식 e^{it}는 무엇인가?

$$e^{it}=\cos t+i\sin t$$ How?

Taylor 전개.

$: e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\cdot x^n$

$=1+x+\frac{1}{2!}x^2+\dots$

정의역 실수를 복소수 도메인까지 확대해보면?

$\Rightarrow 1+(1+i)+\frac{1}{2!}(1+i)^2+\dots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(1+i)^n$

$\Rightarrow 1+(it)+\frac{1}{2!}(it)^2+\dots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(it)^n$

홀수인경우, 짝수인경우.

ex) $y = 2+i3$ → $\bar{y} = 2-i3$

실수부만 추출: $\frac{y+\bar{y}}{2}$

허수부만 추출: $\frac{y-\bar{y}}{2i}$

$e^{it} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(it)^n$ (∵ 오일러공식)

$= \cos t + i\sin t$.

$$e^{(-1+i)t} = e^{-t+it} = e^{-t}e^{it} = e^{-t}(\cos t + i\sin t)$$
$$e^{(-1-i)t} = e^{-t}e^{-it} = e^{-t}(\cos(-t) + i\sin(-t)) = e^{-t}(\cos t - i\sin t)$$

복소수값을 fundamental set으로 쓰면 어렵다. ⇒ 재조합해서 Real valued solution을 구하라.

이 두 식의 합과 차는 다음과 같다.

$$e^{(-1+i)t} + e^{(-1-i)t} = 2e^{-t}\cos t,$$
$$e^{(-1+i)t} - e^{(-1-i)t} = 2ie^{-t}\sin t$$

동차인 선형미분방정식의 두 해를 더하거나 빼거나 상수를 곱한 것들도 원래의 미분방정식의 해가 되기 되므로 $e^{-t}\cos t$ 와 $e^{-t}\sin t$도 원래의 방정식의 해가 된다(이를 확인하여 보아라!).

(이 두 함수는 일차독립이다.)

y_1과 y_2가 해 이므로 y_1+y_2 (일차결합) 도 해가 된다. (∵ superposition principle).

$e^{-t}\cos t$ 와 $e^{-t}\sin t$를 미분방정식의 fundamental set으로 취한다.

=> real valued function을 해로 구성해야 하므로.

따라서

$$y = c_1e^{-t}\cos t + c_2e^{-t}\sin t$$

는 미분방정식의 일반해가 된다.

일반적으로 미분방정식 $y'' + Ay' + By = 0$의 특성방정식이 복소수 근을 가질 경우, 즉

$$r^2 + Ar + B = 0 \Rightarrow r = \alpha \pm i\beta$$

인 경우 일반해는

$$y = c_1e^{\alpha t}\cos\beta t + c_2e^{\alpha t}\sin\beta t$$

가 된다.

$e^{(\alpha+i\beta)t} = e^{\alpha t}e^{i\beta t} = e^{\alpha t}\cos\beta t + ie^{\alpha t}\sin\beta t$ ⇒ 실수부와 허수부