DE class note Second Order ODE: Inhomogeneous case

비동차 방정식의 특수해

미분방정식 $y''+Ay'+By=f(t)$에서 $f(t)\neq 0$경우를 비동차방정식이라고 한다.

실제 2계 선형 미분방정식을 이용하여 어떤 시스템을 모델링 한 경우 함수 $f(t)$는 외부로 부터 시스템에 전해지는 일종의 자극 같은 것이다.

$f(t)$=0 인 경우에 얻은 해가 있는데 이 해는 순전히 주어진 시스템 자체에만 의존한다. 만약 이 시스템에 외부로 부터 자극이 주어지면 자극에 대한 시스템의 반응이 추가 되어야 한다.

이를 특수해(Particular solution)이라고 부른다.

비동차방정식의 일반해는 동차방정식의 일반해 $c_1 y_1(t)+c_2 y_2(t)$에다 한 개의 특수해 $y_p(t)$를 더해서 얻어진다.
따라서 $y''+Ay'+By=f(t)$의 일반해는

$$y(t)=c_1y_1(t)+c_2y_2(t)+y_p(t)$$

가 된다.

----

1) The method of undetermined coefficients.

보기) $y''+5y'+6y=\cos 2t$의 특수해를 구하시오.

우변의 함수를 보면 삼각함수이기 때문에 특수해는 같은 유형의 함수일 것이다.
특수해의 후보로 $y=A\cos 2t+B\sin 2t$를 대입해보면

$$\begin{aligned} y''+5y'+6y= &-4A\cos 2t-4B\sin 2t \\ &+5(-2A\sin 2t+2B\cos 2t) \\ &+6(A\cos 2t+B\sin 2t) \quad = \cos 2t. \end{aligned}$$

이 식이 성립하려면 A와 B는

$$\begin{cases} -4A+10B+6A=1 & \rightarrow \quad 2A+10B=1 \\ -4B-10A+6B=0 & \rightarrow \quad -10A+2B=0 \end{cases}$$

를 만족해야 한다. 이로부터 한 개의 특수해

우변이 case가 섞여있는 경우
Superposition principle..!!

$$y_p = \frac{1}{52}\cos 2t + \frac{5}{52}\sin 2t$$

을 얻을 수 있다.

보기) $y'' + 5y' + 6y = \cos 2t$의 일반해를 구하시오.

-동차의 경우 일반해

$$y_h = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{-3t}$$

-방정식의 특수해는

$$y_p = \frac{1}{52}\cos 2t + \frac{5}{52}\sin 2t$$

따라서 방정식의 일반해는

$$y = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{-3t} + \frac{1}{52}\cos 2t + \frac{5}{52}\sin 2t$$

가 된다.

만약 초깃값 문제 $y'' + 5y' + 6y = \cos 2t,\ y(\pi) = 0, y'(\pi) = 0$의 해를 구한다면

$$y(\pi) = C_1 e^{-2\pi} + C_2 e^{-3\pi} + \frac{1}{52} = 0$$

$$y'(t) = -2C_1 e^{-2t} - 3C_2 e^{-3t} - \frac{2}{52} sin2t + \frac{10}{52} cos2t$$

$$=> \ y'(0) = -2C_1 e^{-2\pi} - 3C_2 e^{-3\pi} + \frac{10}{52} = 0$$

$y_p(t)$

특수해를 구하는 문제를 더 생각해보자.

보기)

$$y'' - 4y = 8t^2 - 2t$$

다항함수? → y도 다항함수이겠다.
최고차항이 2차인...

우변의 함수가 다항함수이기 때문에 특수해는 다항함수임을 짐작할 수 있다

$$y_p = at^2 + bt + c$$

$$y_p'' - 4y_p = 2a - 4(at^2 + bt + c) = -4a^2 - 4bt + 2a - 4c = 8t^2 - 2t$$

$$a = -2,\ b = 1/2,\ 2a - 4c = 0 => c = -1$$

보기)

$$y'' + 2y' - 3y = 4e^{2t}$$

우변의 함수가 지수함수이기 때문에 특수해는 지수함수임을 짐작할 수 있다

$$y_p = ae^{2t}$$

$a = \frac{4}{5}$

$y_p' = 2ae^{2t}$

$y_p'' = 4ae^{2t}$

대입 → $4ae^{2t} + 4ae^{2t} - 3ae^{2t}$

⇒ $5ae^{2t} = 4e^{2t}$

∴ $a = \frac{4}{5}$

대입했더니 0이 된다..

Why? Homogeneous solution이기 때문에.

곤란한 상황

보기 $y'' + 2y' - 3y = 8e^t$

$$y_p = ae^t$$

$ae^t + 2ae^t - 3ae^t = 0 \neq 8e^t$ 왜 작동하지 않는가?

특성방정식 => $r^2 + 2t - 3t = (r+3)(r-1) = 0 \Rightarrow r = -3, 1$

e^t는 동차방정식의 해이다.

$y_p = ate^t$ 을 시도.

$$y_p'' + 2y_p' - 3y_p = a(2e^t + te^t + 2(e^t + te^t) - 3te^t) = 4ae^t = 8e^t$$

=> 4a = 8 => a= 2

신기하게도 t가 다 사라졌네...

보기)

$$y'' - 6y' + 9y = 5e^{3t}$$

$y_p = ae^{3t}$ 시도. $a(9 - 6 \times 3 + 9)e^{3t} = 0$

특성방정식 $r^2 - 6r + 9 = (r-3)^2 = 0$ => $y = e^{3t}$는 동차방정식의 해.

위의 경우처럼 $y_p = ate^{3t}$을 시도한다면?

이 또한 동차방정식의 해 => 방정식에 대입하면 좌변이 0이 됨

(IDEA) $y_p = at^2e^{3t}$ 을 시도

$$y_p' = a(2t + 3t^2)e^{3t}$$

$$y_p'' = a(2 + 6t)e^{3t} + 3a(2t + 3t^2)e^{3t} = a(2 + 12t + 9t^2)e^{3t}$$

$$y_p'' - 6y_p' + 9y_p = a(2 + 12t + 9t^2 - 6(2t + 3t^2) + 9t^2)e^{3t} = 2ae^{3t} = 5e^{3t}$$

=> a= 5/2

2) Method of variation of parameters. (매개변수 변화법)

$$\begin{cases} y_p(x) = u(x)y_1(x) + v(x)y_2(x) \\ y'_p = u'y_1 + v'y_2 + uy_1' + vy_2' \end{cases}$$

상수계수가 아닌 경우에는 미정계수법을 사용할수 없다(일반적으로)

$p(x)$, $q(x)$ ... 가 시스템 다 값을 바꿀 수 있기 때문.

Impose condition $u'y_1 + v'y_2 = 0$ why? y_1과 y_2가 fundamental set 이기 때문에,,?

$$
\begin{aligned}
y_p{}' &= uy_1{}' + vy_2{}' \\
y_p{}'' &= u'y_1{}' + v'y_2{}' + uy_1{}'' + vy_2{}'' \\
y_p{}'' + py_p{}' + qy_p &= u'y_1{}' + v'y_2{}' + uy_1{}'' + vy_2{}'' + puy_1{}' + pvy_2{}' + quy_1 + qvy_2 \\
&= u'y_1{}' + v'y_2{}' + u(y_1{}'' + py_1{}' + qy_1) + v(y_2{}'' + py_2{}' + qy_2) \\
&= u'y_1{}' + v'y_2{}' = f
\end{aligned}
$$

$$
\begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1{}' & y_2{}' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u' \\ v' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ f \end{bmatrix}
$$

$$
\begin{bmatrix} u' \\ v' \end{bmatrix} = \frac{1}{W} \begin{bmatrix} y_2{}' & -y_2 \\ -y_1{}' & y_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{-y_2 f}{W} \\ \dfrac{y_1 f}{W} \end{bmatrix}
$$

What is it?

Ex)

$$
y'' + 4y = \sec x, \quad \frac{-2}{4} < x < \frac{2}{4}
$$

Characteristic equation: $\lambda^2 + 4 = 0$ $\qquad \lambda = \pm 2i$

$$
e^{2ix} = \cos(2x) + i\sin(2x)
$$

$$
y_1 = \cos(2x), \quad y_2 = \sin(2x)
$$

$$
\begin{aligned}
W &= \begin{vmatrix} \cos(2x) & \sin(2x) \\ -2\sin(2x) & 2\cos(2x) \end{vmatrix} \\
&= 2(\cos^2(2x) + \sin^2(2x)) = 2
\end{aligned}
$$

$$
u' = -\frac{1}{2} sin(2x)\sec x = -\sin x
$$

$$
\begin{aligned}
v' &= \frac{1}{2} cos(2x)\sec x = \frac{1}{2}[2\cos^2 x - 1]\sec x \\
&= \frac{1}{2}[2\cos x - \sec x]
\end{aligned}
$$

$$
u(x) = \cos x
$$

$$
v(x) = \sin x - \frac{1}{2} ln|\sec x + \tan x|
$$

$$
y_p = \cos x \cos(2x) + (\sin x - \frac{1}{2} ln|\sec x + \tan x|)\sin(2x)
$$

$$
y = C_1 \cos(2x) + C_2 \sin(2x) + y_p
$$

2) Variation of parameters. fundamental set → 상수처리가 function으로 조정 ...

Ex)

$$
y'' - 4y' + 4y = (x+1)e^{2x}
$$

$$
\lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2 = 0, \quad \lambda = 2
$$

$$
e^{2x}, xe^{2x}
$$

$$\begin{bmatrix} e^{2x} & xe^{2x} \\ 2e^{2x} & e^{2x}+2xe^{2x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1{}' \\ u_2{}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ (x+1)e^{2x} \end{bmatrix}$$

$$e^{2x} \begin{bmatrix} 1 & x \\ 2 & 1+2x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1{}' \\ u_2{}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ (x+1)e^{2x} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & x \\ 2 & 1+2x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1{}' \\ u_2{}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -(x+1) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} u_1{}' \\ u_2{}' \end{bmatrix} = \frac{1}{1+2x-2x} \begin{bmatrix} 1+2x & -x \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ x+1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -x(x+1) \\ x+1 \end{bmatrix}$$

$$u_1 = -\int (x^2+x)dx$$

$$u_2 = \int (x+1)dx$$

$$y_p = u_1 y_1 + u_2 y_2 = -\left(\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2\right)e^{2x} + \left(\frac{1}{2}x^2 + x\right)xe^{2x}$$

$$= \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x^2\right]e^{2x}$$

$$= \left(\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2\right)e^{2x}$$

General solution $y = (C_1 + C_2)e^{2x} + \left(\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2\right)e^{2x}$

3) Variable coefficient.

Ex)

$$t^2 y'' - 2y = 4t^2 - 3 \qquad (t > 0)$$

$$y'' - \frac{2}{t^2}y = 4 - \frac{3}{t^2} = f$$

$$y_1 = t^2, y_2 = t^{-1}$$

$$y_p = u_1 y_1 + u_2 y_2$$

$$u_1 = -\int \frac{y_2}{W} f dt$$

$$u_2 = \int \frac{y_1}{W} f dx$$

$$W = \begin{vmatrix} t^2 & t^{-1} \\ 2t & -t^{-2} \end{vmatrix} = -1 - 2 = -3$$