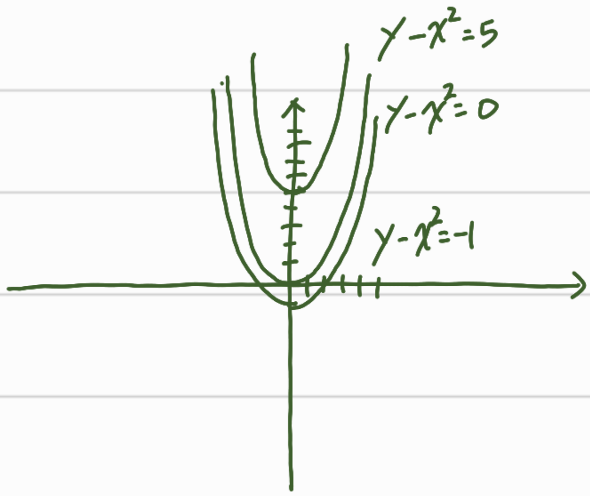
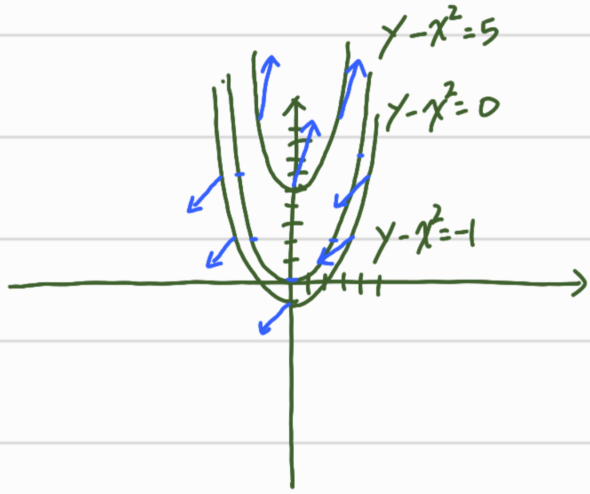
미분방정식 HW 1

김신후 21900136

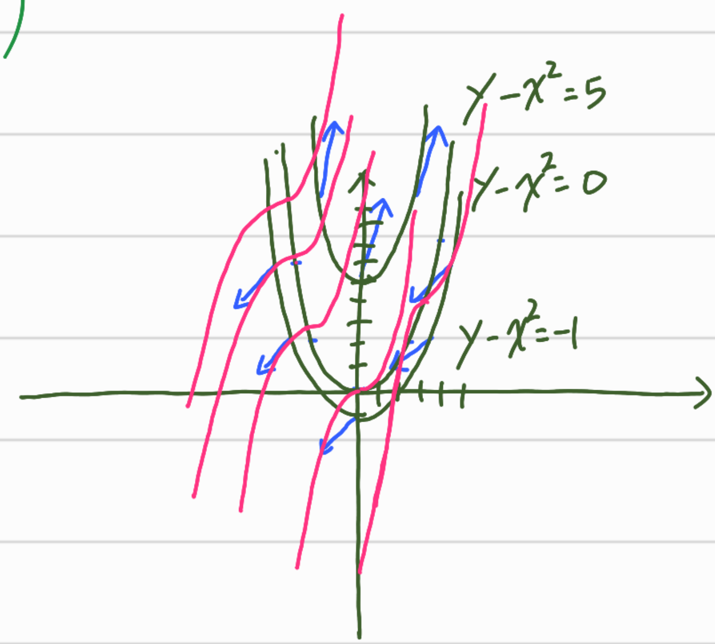
1. (i)



(ii)



(iii)



2. $\frac{dy}{dt} + 3ty^2 = 0 \quad y(0) = 1$

베르누이 미방을 이용해 위 식을 선형으로 바꾸어 특수해를 찾겠습니다.

$\frac{dy}{dt} = -3ty^2$

$\Rightarrow y^{-2}\frac{dy}{dt} = -3t \quad \cdots ㉠ \quad (y^2 \neq 0)$

위 식에서 $y^{-1} = u$ 이라고 할 때, u를 t로 미분하면

Chain Rule 에 의해 $\frac{du}{dt} = -y^{-2}\frac{dy}{dt}$ 가 된다.

따라서 식 ㉠을 다음과 같이 적을 수 있다.

$\Rightarrow y^{-2}\left(-y^2 \cdot \frac{du}{dt}\right) = -3t$

$\Rightarrow \frac{du}{dt} = 3t \leftarrow$ u와 t의 선형 방정식.

$\Rightarrow \frac{d}{dt}u = 3t$

$\Rightarrow u\int \frac{d}{dt}\,dt = 3\int t\,dt$

$\Rightarrow u = \frac{3}{2}t^2 + C$

$\Rightarrow y = \frac{1}{\frac{3}{2}t^2 + C} \quad (\because u = y^{-1})$

$y(0) = 1$ 일 때 $C = 1$ 이므로

특수해는 $y = \frac{1}{\frac{3}{2}t^2 + 1}$ 입니다.

3. $\dfrac{dy}{dt} + 4ty = te^{-2t^2}$, $y(0) = 1$.

표준형.

i) 적분계수 구하기 | $p(t) = 4t$.

$$e^{\int p(t)\,dt} = e^{\int 4t\,dt} = e^{2t^2}.$$

ii) 양변에 적분계수 곱하기.

$$e^{2t^2}\left(\frac{dy}{dt} + 4ty\right) = e^{2t^2} \cdot t e^{-2t^2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\left(e^{2t^2} y\right) = t$$

iii) 양변을 적분해서 일반해 도출하기

$$\int \frac{d}{\cancel{dt}}\left(e^{2t^2} y\right) \cancel{dt} = \int t\,dt$$

$$\Rightarrow \quad e^{2t^2} y = \frac{1}{2}t^2 + C$$

$$\Rightarrow \quad y = C \cdot e^{-2t^2} + \frac{1}{2}e^{-2t^2}t^2 \quad (\text{일반해})$$

iv) 초기값 적용 특수해 구하기.

when $y(0) = 1 \rightarrow C = 1$

$$\Rightarrow \quad y = e^{-2t^2} + \frac{1}{2}e^{-2t^2}t^2 \quad (\text{특수해}).$$