미분방정식 week 3 Transformation technique (교과서 2장5절)

치환에 의한 해법

1계 미방 중 선형이 아닌 것에 대한 일반적인 해법은 없으나 특별한 경우 변수를 적절하게 치환함으로써 선형미방이나 변수분리형으로 변환 할 수 있다.

$\frac{dy}{dx}$ 라는 꼴로 되는 경우가 동차방정식?

1) 동차방정식(Homogeneous equation.)

미분방정식이 $\frac{dy}{dx} = f(\frac{y}{x})$ 형태로 주어지는 경우

이 때 변수분리형 방정식으로 치환이 가능하다.

$$u = \frac{y}{x} \text{라 놓으면}$$

$$y = xu, \ \frac{dy}{dx} = u + x\frac{du}{dx}$$

$$u + x\frac{du}{dx} = f(u)$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{f(u) - u}{x} \quad \text{변수 분리형}$$

Ex) Find general solution of $\frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{x-y}$.

→ 동차방정식인 why? 변수의 크기를 Scaling을 했을 때 함수가 변하지 않음.

ex) $(x, y) \rightarrow (\alpha x, \alpha y)$

$\frac{\alpha x + \alpha y}{\alpha x - \alpha y} = \frac{\alpha(x+y)}{\alpha(x-y)} = \frac{x+y}{x-y}$

우변 (분자 분모를 x로 나누면) => $\frac{1 + \frac{y}{x}}{1 - \frac{y}{x}}$

By transform $u = \frac{y}{x}$, the equation is changed into

$$u + x\frac{du}{dx} = \frac{1+u}{1-u}$$

$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(xu) \ (\because y = xu)$

$= u + x\frac{du}{dx}$

이를 다시 정리하면

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{x}\frac{1+u^2}{1-u}$$

변수분리형 방정식이므로

$$\int \frac{1-u}{1+u^2} du = \int \frac{1}{x} dx$$

$$\arctan(u) - \frac{1}{2}\ln(1+u^2) = \ln|x| + C$$

$$\arctan(\frac{y}{x}) - \ln\sqrt{1 + \frac{y^2}{x^2}} = \ln|x| + C$$

For $\frac{y}{x}$ is very small, by $\arctan x \approx x, \ln(1+x) \approx x$, the equation is approximately

$$\frac{y}{x}-\frac{1}{2}\left(\frac{y}{x}\right)^2=\ln|x|+C$$
$$y \approx x(1 \pm \sqrt{1-2(\ln|x|+C)})$$

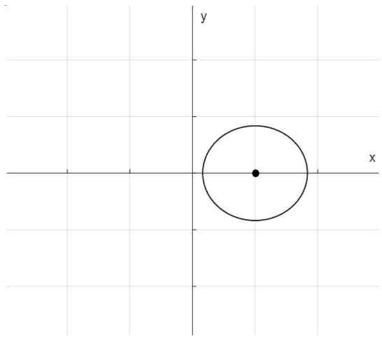

그림 1

2) 베르누이 방정식

$$\frac{dy}{dx}+p(x)y=R(x)y^{\alpha},\ \ (\alpha \neq 1, 0)$$
$$y^{-\alpha}y'+p(x)y^{1-\alpha}=R(x)$$
$$v=y^{1-\alpha}\text{로 치환}$$
$$\frac{dv}{dx}=(1-\alpha)y^{-\alpha}\frac{dy}{dx}$$
$$\frac{1}{1-\alpha}\frac{dv}{dx}+p(x)v=R(x)\ \text{선형 방정식}$$

Ex) Find general solution of $\frac{dy}{dx}+\frac{1}{x}y=3x^2y^3$.

$$y^{-3}y'+\frac{1}{x}y^{-2}=3x^2\ \ (y \neq 0)$$
$$v=y^{-2}, v'=-2y^{-3}y'$$
$$-\frac{1}{2}v'+\frac{1}{x}v=3x^2$$
$$v=-6x^3+Cx^2$$
$$y=(Cx^2+6x^3)^{-1/2}$$

응용문제) 40피트 길이의 체인이 있다. 체인은 피트 당 ρ파운드의 무게를 갖는다. 체인은 천장 위에 있고 10피트 길이의 일부가 구멍을 통해 풀려나와있다. 체인이 모두 풀렸을 때 체인이 떨어지는 속도를 구하라.

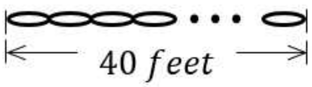

그림 2

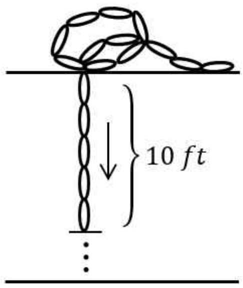

그림 3

체인이 풀려난 길이를 x라 하고 그 때 체인이 떨어지는 속도를 v라 하면 우리가 알기 원하는 함수는 $v = v(x)$이다. 이 함수에 대한 미분방정식을 유도한다.

$$\begin{aligned} F &= \frac{d}{dt}mv \\ &= \frac{dm}{dt}v + m\frac{dv}{dt} \\ F &= mg = x\rho \end{aligned}$$

Chain: weight ρ pounds per foot

주어진 미분방정식은 t가 독립변수로 되어 있는데 $v = v(x)$이므로 독립변수를 x로 변환하는 것이 더 좋다.

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = v\frac{dv}{dx}$$

$$\frac{dm}{dt}g = v\rho$$

미분방정식을 다시 정리하면 다음과 같다

$$\frac{\rho}{g}v^2 + mv\frac{dv}{dx} = x\rho$$

(m은 x의 함수이므로 x에 대한 식으로 바꾼다)

표준형으로 다시 써보자

$$\begin{aligned} &\frac{x}{g}\frac{dv}{dx} + \frac{\rho}{g}v = x\rho v^{-1} \\ &\rightarrow \frac{dv}{dx} + \frac{1}{x}v = gv^{-1} \end{aligned}$$

이는 Bernoulli equation 이다.

(g=32 ft/s^2) 초기조건 $v(10) = 0$

$$v(x)^2 = \frac{64}{3}\left[x - \frac{1000}{x^2}\right]$$

$$v(40)^2 = \frac{64}{3}\left[40 - \frac{10}{16}\right]$$
$$= \frac{1}{3}[64 \times 40 - 40]$$
$$= \frac{40}{3} \times 63 = 40 \times 21$$
$$v(40) = 2 \times \sqrt{210} \approx 29\,ft/s$$

Q) 체인이 다 풀리는데 걸리는 시간을 얼마일까?

$$\int_{x=10}^{x=40} dt = \int_{x=10}^{x=40} \frac{dt}{dx} dx = \int_{x=10}^{x=40} \frac{dx}{\sqrt{\frac{64}{3}}\sqrt{x - \frac{1000}{x^2}}}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{8}\int_{10}^{40} \frac{x}{\sqrt{x^3 - 10^3}} dx$$

(3) Nearly homogeneous equations (준동차방정식)

$$\frac{dy}{dx} = F\left(\frac{ax + by + 1}{cx + dy + 1}\right)$$

예) $\frac{dy}{dx} = \frac{2x + y - 1}{6x + 2y - 3}$

준동차방정식은 두 경우로 나누어 생각

경우1) $ad - bc \neq 0$

치환 $X = x + h$, $Y = y + k$ 적당한 h,k를 선택

$$\frac{ax + by + 1}{cx + dy + 1} = \frac{a(X-h) + b(Y-k) + 1}{c(X-h) + d(Y-k) + 1}$$

$$= \frac{aX + bY - ah - bk + 1}{cX + dY - ch - dk + 1}$$

원하는 조건은

$$-ah - bk + 1 = 0$$

$$-ch - dk + 1 = 0$$

h, k에 대해 풀면

$$h = \frac{d - b}{ad - bc}, \quad k = \frac{a - c}{ad - bc}$$

이 h,k를 이용하여 주어진 미분방정식을 치환하면

$$Y' = F\left(\frac{aX+bY}{cX+dY}\right)$$

이는 동차미분방정식이다.

경우2) ad-bc =0

u= (ax+by)/a (a가 0이 아니라면)를 이용하여 치환

ad=bc를 이용하고

$$\frac{ax+by+1}{cx+dy+1}$$

$$= \frac{a(ax+by+1)}{acx+ady+a} = \frac{a(ax+by+1)}{acx+bcy+a} = \frac{a(ax+by+1)}{c(ax+by)+a}$$

$$= \frac{a(au+1)}{acu+a} = \frac{au+1}{cu+1}$$

주어진 미분방정식 $\frac{dy}{dx} = F\left(\frac{ax+by+1}{cx+dy+1}\right)$을 치환

$$u' = 1+1+(b/a)y'$$

$$(a/b)(u'-1) = F(\frac{au+1}{cu+1})$$

$$u' = 1+\frac{b}{a}F(\frac{au+1}{cu+1})$$

=>변수분리형

연습문제) $\frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{x-y}$의 방향장(direction field)과 해곡선(integral curves)을 스케치하여라.

연습문제) $\frac{dy}{dx} = \frac{x+y+1}{x-y+3}$을 치환법을 통해 해를 구하여라.