北京大学高等数学A（I）期中考试试题

（共七道大题，满分100分）

2023.11

一、　（本题 20 分）求下列各极限

(1) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{3^n}{n!}$.

(2) $\lim\limits_{n\to+\infty} \left[\dfrac{1}{(n+1)^3} + \dfrac{2}{(n+2)^3} + \cdots + \dfrac{n}{(2n)^3}\right]$.

(3) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sin\left(\left(\sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2-x}\right)\pi\right)$.

(4) $\lim\limits_{n\to+\infty} \left[\dfrac{1}{n^2}\sum\limits_{k=1}^{n} k\ln(n+k) - \dfrac{n+1}{2n}\ln n\right]$.

二、　（本题 20 分）计算下列各题并适当化简.

(1) 设 $y = x\sqrt{1+x^2} + \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$，求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

(2) 计算下列函数的二阶导函数 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

$$y = \begin{cases} x^4 \sin\dfrac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

(3) 设 $y = \displaystyle\int_{\cot x}^{\tan x} \sqrt{1+t^2}\,\mathrm{d}t$，求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

(4) 设 $F(x) = f(x) - f''(x) + f^{(4)}(x) - \cdots + (-1)^n f^{(2n)}(x)$，其中 $f(x) = x^n(1-x)^n$，求 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(F'(x)\sin x - F(x)\cos x)$.

三、　（本题 15 分）计算下列不定积分.

(1) $\displaystyle\int \sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x$.

(2) $\displaystyle\int \frac{\arctan \mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}\,\mathrm{d}x$.

(3) 设$y = y(x)$ 是方程$y^2(x-y) = x^2$ 所确定的函数，计算$\displaystyle\int \frac{1}{y^2}\,\mathrm{d}x$.

……………………………（转下一页）……………………………

四、（本题 10 分）试确定实数 a 与 b 的值使得函数

$$f(x)=\lim_{n\to+\infty}\frac{x^{2n-1}+ax^2+bx}{x^{2n}+1}$$

成为整个实数域上的连续函数.

五、（本题 15 分）计算定积分

(1) $\displaystyle\int_0^1\frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\mathrm{d}x.$

(2) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 x}{1+\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x.$

(3) $\displaystyle\int_0^{\pi}f(x)\,\mathrm{d}x$，其中 $\displaystyle f(x)=\int_0^x\frac{\sin t}{\pi-t}\,\mathrm{d}t.$

六、（本题 10 分）设$f(x)$ 是 $[0,1]$ 上的黎曼可积函数，求极限：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}f(\frac{k}{n}).$$

七、（本题 10 分）

设$f(x)$是$[0,+\infty)$上的连续函数，$f(0)=0$，当$x>0$时，$0<f(x)<x$. 令

$$a_1=f(1),\, a_2=f(a_1),\,\cdots,\, a_n=f(a_{n-1}),\quad n=2,3,\cdots$$

证明：

$$\lim_{n\to+\infty}a_n=0.$$

（全卷完）