北京大学高等数学A（I）期中考试试题

（共七道大题，满分100分）

2023.11

一、（本题 20 分）求下列各极限

(1) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{3^n}{n!}$.

当 $n\geqslant 4$ 时，有

$$\begin{aligned}0\leqslant\frac{3^n}{n!}&=\frac{3}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\cdots\cdot\frac{3}{n}\\&\leqslant\frac{3}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{3}\cdot\frac{3}{n}\to 0\quad(n\to\infty).\end{aligned}$$

由夹逼定理可得 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{3^n}{n!}=0$.

(2) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[\dfrac{1}{(n+1)^3}+\dfrac{2}{(n+2)^3}+\cdots+\dfrac{n}{(2n)^3}\right]$.

当 $n\geqslant 1$ 时，有

$$\begin{aligned}0&\leqslant\frac{1}{(n+1)^3}+\frac{2}{(n+2)^3}+\cdots+\frac{n}{(2n)^3}\\&\leqslant\frac{n}{n^3}+\frac{n}{n^3}+\cdots+\frac{n}{n^3}\\&=\frac{1}{n}\to 0\quad(n\to\infty).\end{aligned}$$

由夹逼定理可得

$$\lim_{n\to+\infty}\left[\frac{1}{(n+1)^3}+\frac{2}{(n+2)^3}+\cdots+\frac{n}{(2n)^3}\right]=0.$$

(3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sin\left(\left(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x}\right)\pi\right)$.

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to+\infty}\sin\left(\left(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x}\right)\pi\right)\\=&\lim_{x\to+\infty}\sin\left(\frac{2x}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x}}\pi\right)\\=&\sin\left(\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x}}\pi\right)\\=&\sin\pi=0.\end{aligned}$$

(4) $$\lim_{n\to+\infty}\left[\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}k\ln(n+k)-\frac{n+1}{2n}\ln n\right].$$

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to+\infty}\left[\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}k\ln(n+k)-\frac{n+1}{2n}\ln n\right]\\
=&\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)\cdot\frac{1}{n}\\
=&\int_0^1 x\ln(1+x)\mathrm{d}x\\
=&\frac{1}{2}x^2\ln(1+x)\bigg|_0^1-\int_0^1\frac{1}{2}x^2\cdot\frac{1}{1+x}\mathrm{d}x\\
=&\frac{1}{2}\left[(x^2-1)\ln(1+x)-\frac{1}{2}x^2+x\right]\bigg|_0^1=\frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

二、 （本题 20 分）计算下列各题并适当化简.

(1) 设 $y=x\sqrt{1+x^2}+\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$，求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}&=\sqrt{1+x^2}+x\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\left(1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)\\
&=2\sqrt{1+x^2}.
\end{aligned}$$

(2) 计算下列函数的二阶导函数 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

$$y=\begin{cases}x^4\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

$$\begin{aligned}
y'(x)&=4x^3\sin\frac{1}{x}-x^2\cos\frac{1}{x}\quad(x\neq 0),\\
y'(0)&=\lim_{x\to 0}\frac{x^4\sin\frac{1}{x}-0}{x-0}=\lim_{x\to 0}x^3\sin\frac{1}{x}=0,\\
y''(x)&=12x^2\sin\frac{1}{x}-6x\cos\frac{1}{x}-\sin\frac{1}{x}\quad(x\neq 0),\\
y''(0)&=\lim_{x\to 0}\frac{4x^3\sin\frac{1}{x}-x^2\cos\frac{1}{x}-0}{x-0}=0.
\end{aligned}$$

(3) 设 $y=\displaystyle\int_{\cot x}^{\tan x}\sqrt{1+t^2}\mathrm{d}t$，求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

设 $F(x)=\displaystyle\int_0^x\sqrt{1+t^2}\mathrm{d}t$，则 $F'(x)=\sqrt{1+x^2}$，

$$y(x)=F(\tan x)-F(\cot x),$$

$$
\begin{aligned}
y'(x) &= F'(\tan x) \cdot \frac{1}{\cos^2 x} - F'(\cot x) \cdot \left(-\frac{1}{\sin^2 x}\right) \\
&= \frac{1}{|\cos x|^3} + \frac{1}{|\sin x|^3}.
\end{aligned}
$$

(4) 设 $F(x) = f(x) - f''(x) + f^{(4)}(x) - \cdots + (-1)^n f^{(2n)}(x)$，其中 $f(x) = x^n(1-x)^n$，求 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(F'(x)\sin x - F(x)\cos x)$.

$$
\begin{aligned}
&F''(x) = f''(x) - f^{(4)}(x) + \cdots + (-1)^n f^{(2n+2)}(x), \\
&F''(x) + F(x) = f(x) + (-1)^n f^{(2n+2)}(x).
\end{aligned}
$$

其中 $f(x) = x^n(1-x)^n$ 为 $2n$ 次多项式，可知 $f^{(2n+2)}(x) = 0$，

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(F'(x)\sin x - F(x)\cos x) &= (F''(x) + F(x))\sin x \\
&= x^n(1-x)^n \sin x.
\end{aligned}
$$

三、　（本题 15 分）计算下列不定积分.

(1) $\displaystyle\int \sqrt{1+x^2}\mathrm{d}x.$

令 $x = \sinh t$，则 $\mathrm{d}x = \cosh t\mathrm{d}t$，

$$
\begin{aligned}
\int \sqrt{1+x^2}\mathrm{d}x &= \int \cosh t \cdot \cosh t\mathrm{d}t \\
&= \int \frac{\cosh 2t + 1}{2}\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{4}\sinh 2t + \frac{1}{2}t + C \\
&= \frac{1}{2}\left(x\sqrt{1+x^2} + \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)\right) + C.
\end{aligned}
$$

(2) $\displaystyle\int \frac{\arctan \mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}\mathrm{d}x.$

令 $t = \mathrm{e}^x$，则 $\mathrm{d}t = \mathrm{e}^x\mathrm{d}x$，

$$
\begin{aligned}
\int \frac{\arctan \mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}\mathrm{d}x &= \int \frac{\arctan t}{t^2+1}\mathrm{d}t \\
&= \int \arctan t\mathrm{d}(\arctan t) \\
&= \frac{1}{2}(\arctan t)^2 + C \\
&= \frac{1}{2}(\arctan \mathrm{e}^x)^2 + C.
\end{aligned}
$$

(3) 设$y=y(x)$ 是方程$y^2(x-y)=x^2$ 所确定的函数，计算$\int\frac{1}{y^2}\mathrm{d}x$.

令 $t=\frac{x}{y}$，则 $x=\frac{t^3}{t-1}$，$y=\frac{t^2}{t-1}$，

$$\begin{aligned}\int\frac{1}{y^2}\mathrm{d}x&=\int\frac{(t-1)^2}{t^4}\cdot\frac{3t^2(t-1)-t^3}{(t-1)^2}\mathrm{d}t\\&=\int\left(\frac{2}{t}-\frac{3}{t^2}\right)\mathrm{d}t\\&=2\ln|t|+\frac{3}{t}+C\\&=2\ln|x|-2\ln|y|+\frac{3y}{x}+C.\end{aligned}$$

四、 （本题 10 分）试确定实数 a 与 b 的值使得函数

$$f(x)=\lim_{n\to+\infty}\frac{x^{2n-1}+ax^2+bx}{x^{2n}+1}$$

成为整个实数域上的连续函数.

当 $|x|>1$ 时

$$f(x)=\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}+\frac{a}{x^{2n-2}}+\frac{b}{x^{2n-1}}}{1+\frac{1}{x^{2n}}}=\frac{1}{x}.$$

当 $|x|<1$ 时

$$f(x)=\lim_{n\to+\infty}\frac{x^{2n-1}+ax^2+bx}{x^{2n}+1}=ax^2+bx.$$

显然 $f(x)$ 在 $|x|\neq1$处连续，故只需考虑 $x=\pm1$ 处的连续性.
$x=1$ 处 $f(1^+)=f(1^-)=f(1)$：

$$\frac{1}{1}=a\cdot1^2+b\cdot1=\frac{1+a+b}{2}$$

$$\Leftrightarrow a+b=1.$$

$x=-1$ 处 $f(-1^-)=f(-1^+)=f(-1)$：

$$\frac{1}{-1}=a\cdot(-1)^2+b\cdot(-1)=\frac{-1+a-b}{2}$$

$$\Leftrightarrow a-b=-1.$$

联立解得 $a=0$，$b=1$.

五、 （本题 15 分）计算定积分

(1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\mathrm{d}x.$

令 $x=t^2$，则 $\mathrm{d}x=2t\mathrm{d}t$，

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\mathrm{d}x &= \int_0^1 \frac{t}{1+t}\cdot 2t\mathrm{d}t\\ &= \int_0^1 \left(2(t-1)+\frac{2}{1+t}\right)\mathrm{d}t\\ &= \left(t^2-2t+2\ln(1+t)\right)\Big|_0^1 = -1+2\ln 2.\end{aligned}$$

(2) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x}{1+\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x.$

令 $x=-t$，则$\mathrm{d}x=-\mathrm{d}t$，

$$\begin{aligned}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x}{1+\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 t}{1+\mathrm{e}^{-t}}\mathrm{d}t = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{e}^t\sin^2 t}{\mathrm{e}^t+1}\mathrm{d}t\\ &= \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin^2 x}{1+\mathrm{e}^x}+\frac{\mathrm{e}^x\sin^2 x}{1+\mathrm{e}^x}\right)\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

(3) $\displaystyle\int_0^\pi f(x)\,\mathrm{d}x$，其中 $\displaystyle f(x)=\int_0^x \frac{\sin t}{\pi-t}\,\mathrm{d}t.$

$$\begin{aligned}\int_0^\pi f(x)\mathrm{d}x &= xf(x)|_0^\pi - \int_0^\pi xf'(x)\mathrm{d}x\\ &= \pi\int_0^\pi \frac{\sin t}{\pi-t}\mathrm{d}t - \int_0^\pi \frac{x\sin x}{\pi-x}\mathrm{d}x\\ &= \int_0^\pi \frac{\pi\sin x}{\pi-x}\mathrm{d}x - \int_0^\pi \frac{x\sin x}{\pi-x}\mathrm{d}x\\ &= \int_0^\pi \sin x\mathrm{d}x = 2.\end{aligned}$$

六、 （本题 10 分）设$f(x)$ 是 $[0,1]$ 上的黎曼可积函数，求极限：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}f(\frac{k}{n}).$$

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f(\frac{k}{n}) = \lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}\sum_{m=1}^{[\frac{n}{2}]}f(\frac{2m}{n}),$$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow 0 &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(\frac{k}{n}) - \frac{2}{n}\sum_{m=1}^{[\frac{n}{2}]} f(\frac{2m}{n})\right)\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sum_{m=1}^{[\frac{2}{n}]} f(\frac{2m-1}{n}) + \sum_{m=1}^{[\frac{2}{n}]} f(\frac{2m}{n}) - 2\sum_{m=1}^{[\frac{n}{2}]} f(\frac{2m}{n})\right)\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sum_{m=1}^{[\frac{2}{n}]} f(\frac{2m-1}{n}) + \sum_{m=1}^{[\frac{2}{n}]}(-1) f(\frac{2m}{n})\right)\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1} f(\frac{k}{n}).
\end{aligned}
$$

七、（本题 10 分）

设$f(x)$是$[0,+\infty)$上的连续函数，$f(0)=0$，当$x>0$时，$0<f(x)<x$. 令

$$a_1 = f(1),\, a_2 = f(a_1),\, \cdots,\, a_n = f(a_{n-1}),\quad n = 2, 3, \cdots$$

证明：

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = 0.$$

由题可知，$\forall n \in \mathbb{N},\ a_n > 0$，且 $\forall n \geqslant 2,\ 0 < a_n = f(a_{n-1}) < a_{n-1}$.
即$\{a_n\}$递减有下界，进而收敛，设极限为 a，由保序性可知 $a \geqslant 0$.
又由 $f(x)$ 的连续性可得

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} f(a_{n-1}) = f(\lim_{n\to\infty} a_{n-1}) = f(a).$$

若 $a>0$，则与 $0<f(a)<a$ 矛盾，故 $a=0$.