제3장 다차원우연량과 그 분포 137

3.1 다차원우연량과 그 동시분포 137

3.1.1 다차원우연량 137

3.1.2 동시분포함수 137

3.1.3 동시분포렬 140

3.1.4 동시밀도함수 141

3.1.5 대표적인 다차원분포 142

3.2 주변분포와 우연량의 독립성 149

3.2.1 주변분포함수 149

3.2.2 주변분포렬 150

3.2.3 주변밀도함수 151

3.2.4 우연량들사이의 독립성 153

3.3 다차원우연량함수의 분포 158

3.3.1 다차원리산우연량함수의 분포 158

3.3.2 최대값과 최소값의 분포 161

3.3.3 련속인 경우의 합성적공식 163

3.3.4 변수변환법 166

3.4 다차원우연량의 특징수 169

3.4.1 다차원우연량함수의 수학적기대값 170

3.4.2 수학적기대값과 분산의 연산에 관한 성질 171

3.4.3 공분산 174

3.4.4 상관곁수 177

3.4.5 우연벡토르의 수학적기대벡토르와 공분산행렬 182

3.5 조건부분포와 조건부기대값 188

3.5.1 조건부분포 188

3.5.2 조건부수학적기대값 193

제4장 큰수의 법칙과 중심극한정리 200

4.1 우연량렬의 두가지 수렴성 200

4.1.1 확률수렴 200

4.1.2 분포수렴, 약수렴 202

4.2 특징함수 206

4.2.1 특징함수의 정의 206

4.2.2 특징함수의 성질 208

4.2.3 특징함수에 의한 분포함수의 유일결정 211

4.3 큰수의 법칙 216

4.3.1 베르누이의 큰수법칙 216

4.3.2 대표적인 몇가지 큰수의 법칙 219

4.4 중심극한정리 224

4.4.1 독립우연량들의 합 224

4.4.2 독립동일분포하는 경우의 중심극한정리 226

4.4.3 2항분포의 정규근사 228

4.4.4 독립이지만 분포가 서로 다른 경우의 중심극한정리 231

# 제3장 다차원우연량과 그 분포

일부 우연현상에서는 매 표본점 를 하나의 우연량으로만 설명하는것은 충분하지 않다. 례를 들어 어린이의 성장발육정형을 연구하기 위해서는 국부적으로 키 만 연구하거나 몸무게 만 연구할것이 아니라 와 를 전체적으로 고려할 필요가 있으며 그래야 그것들이 동시에 변화되는 통계적규칙성을 론의하고 나아가서 와 사이의 관계도 론의할수 있다. 심지어 일부 우연현상에서는 두개 이상의 우연량를 동시에 연구하기도 한다.

다차원우연량의 통계적규칙성을 어떻게 연구할것인가? 1차원우연량에서와 같이 먼저 동시분포함수에 대해 연구한 다음 리산우연량의 동시분포렬, 련속우연량의 동시밀도함수 등을 연구한다.

## 3.1 다차원우연량과 그 동시분포

### 3.1.1 다차원우연량

우선 차원우연량의 정의를 보도록 하자.

정의 3.1.1 이 동일한 표본공간 우에서 정의된 개의 우연량이면 을 **차원우연량** 또는 **우연벡토르**라고 한다.

다차원우연량에서 중요한것은 동일한 표본공간우에서 정의된다는것이다. 서로 다른 표본공간 와 우의 두 우연량에 대하여서는 승적공간 과 그 사건령역에서만 론의할수 있다. 이것을 가정한 조건에서 아래의 론의를 진행한다.

실천문제에서 다차원우연량의 경우를 자주 보게 된다. 례를 들면

• 4~6살의 어린이들의 성장발육을 연구할 때 매 어린이(표본점 )의 키 와 몸무게 에 관심을 가진다. 여기서 는 2차원우연량이다.

• 매 학생의 시간소비정형을 연구할 때 그들의 학습, 오락, 취침, 식사의 네가지 령역에 관심을 가진다. 이 각각 이 령역에 바쳐지는 시간이 전체 시간에서 차지하는 백분률이라고 하면 는 4차원우연량이다.

### 3.1.2 동시분포함수

정의 3.1.2 임의의 개의 실수 에 대하여 개의 사건 들이 동시에 발생하는 확률

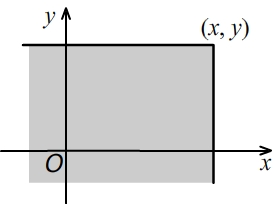


을 차원우연량 의 **동시분포함수**라고 한다.

이 장에서는 주로 2차원우연량를 론의하는데 2차이상의 경우에도 류사하게 론의할수 있다.

2 차원우연량 의 경우에 동시분포함수 는 사건 과 가 동시에 발생하(사귀)는 확률이다. 2차원우연량 를 평면우의 임의의 점의 좌표로 본다면 에서 의 함수값은 임의의 점 가 를 정점으로 하는 왼쪽 아래 무한직각령역에 놓일 확률이다(그림 3.1.1).

그림 3.1.1 를 정점으로 하는 왼쪽 아래 무한직각 령역



정리 3.1.1 임의의 2차원 동시분포함수 는 다음과 같은 네가지 기본성질을 가진다.

① 단조성: 는 각각 또는 에 대하여 단조비감소이다. 즉 일 때 이고 일 때 이다.

② 유계성: 임의의 와 에 대하여 이며



③ 오른쪽련속성: 모든 변수에 대하여 오른쪽련속이다. 즉 이다.

④ 비부성: 임의의 에 대하여 이다.

증명. ① 일 때 이므로 임의의 가 주어지면 이다.

이로부터 이다. 즉 는 에 관하여 단조비감소이다. 마찬가지 방법으로 가 에 관하여 단조비감소라는것을 증명할수 있다.

② 확률의 성질로부터 이다. 또한 임의의 정의 옹근수 에 대하여



에 대하여서도 마찬가지로 증명할수 있다. 그리고 확률의 련속성으로부터 이다.

③ 를 고정하고 1차원분포함수의 오른쪽련속성을 증명할 때처럼 증명하면 가 에 관하여 오른쪽련속임을 알수 있다. 마찬가지로 를 고정하면 가 에 관하여 오른쪽련속임을 증명할수 있다.

④ 에 대하여 을 증명하면 된다.

그림 3.1.2에서와 같이 , 라고 표시하자.















그림 3.1.2 2차원우연량 가 직4각형안에 놓이는 경우

여기서 는 와 같고 는 와 같으며 다른것들도 마찬가지이다. 이제



이라는것과 로부터



또한 우의 4가지 성질을 가지는 2차원함수 는 반드시 어떤 2차원우연량의 분포함수라는것을 증명할수 있다.

임의의 2차원분포함수 는 우의 네가지 성질을 가져야 하며 그중 성질 ④는 2차원의 경우에만 특유한것으로서 성질 ①, ②, ③으로부터 유도할수 없다. 그것은 성질 ①, ②, ③을 만족시키지만 성질 ④를 만족시키지 않는 2차원함수 가 존재하기때문이다.

실례 3.1.1 2차원함수 는 성질 ①, ②, ③을 만족시키지만 성질 ④를 만족시키지 않는다는것을 설명하시오.

증명. 의 정의로부터 직선 으로 평면 를 두 부분으로 나눌수 있다는것을 알수 있다. 즉 는 오른쪽 상반평면()에서 1을 취하고 왼쪽 하반평면()에서 0을 취한다. 는 비감소성, 유계성, 오른쪽련속성을 가지지만 바른직4각형구역 의 4개 정점에서 이므로 성질 ④를 만족시키지 않으며 결국 아무런 2차원우연량의 분포함수도 될수 없다.

### 3.1.3 동시분포렬

정의 3.1.3 2차원우연량 가 유한개 또는 셀수 있는 개수의 쌍 만 취할수 있다면 를 **2차원리산우연량**이라고 하고



를 의 **동시분포렬**이라고 한다. 다음과 같은 표의 형식으로 동시분포렬을 표시할수도 있다.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  | | | | |
|  |  | … |  | … |
|  |  |  | … |  | … |
|  |  |  | … |  | … |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ |  | ⋮ |  |
|  |  |  | … |  | … |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ |  | ⋮ |  |

성질 3.1.1 동시분포렬의 기본성질

① 비부성: .

② 정규성: .

2차원리산우연량의 동시분포렬을 구할 때 중요한것은 2차원우연량이 취할수 있는 값쌍과 그 발생확률을 구하는것이다.

실례 3.1.2 수 1, 2, 3, 4로부터 임의로 한개 수를 뽑아 로 표시하고 다시 1, 2, …, 로부터 임의의 수를 취하여 로 표시한다. 의 동시분포렬과 를 구하시오.

풀기. 는 2차원리산우연량이며 그중 의 분포렬은 이다. 의 값범위도 1, 2, 3, 4이다. 를 가 취하는 값이라고 하면 일 때 이고 일 때 곱하기공식으로부터 이다. 따라서 의 동시분포렬은 다음과 같다.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  | | | |
| 1 | 2 | 3 | 4 |
| 1 | 1/4 | 0 | 0 | 0 |
| 2 | 1/8 | 1/8 | 0 | 0 |
| 3 | 1/12 | 1/12 | 1/12 | 0 |
| 4 | 1/16 | 1/16 | 1/16 | 1/16 |

이로부터 사건 의 확률을 다음과 같이 계산할수 있다.

.

### 3.1.4 동시밀도함수

정의 3.1.4 부아닌 2차원함수 가 존재하여 2차원우연량 의 분포함수 가 다음과 같이 다음과 같이 표시된다고 하자.

.

이때 를 **2차원련속우연량**이라고 하고 를 의 **동시밀도함수**라고 한다.

의 편도함수가 존재하는 점에서 이 성립한다.

성질 3.1.2 동시밀도함수의 기본성질

① 비부성: .

② 정규성: .

동시밀도함수 가 주어지면 관련 사건의 확률을 구할수 있다. 만일 가 평면우의 한 령역이라면 사건 의 확률은 우에서 에 대한 2중적분으로 표시될수 있다.



우의 식을 리용할 때 적분구역이 의 비령구역과 의 사귐모임이라는것, 계산과정에 직선의 면적이 0이므로 적분구역의 경계가 적분구역안에 있는가 밖에 있는가는 적분계산결과에 영향을 주지 않는다는것을 주의하여야 한다.

실례3.1.3 의 동시밀도함수가 다음과 같다.



이때 ① , ② 을 구하시오.

풀기.

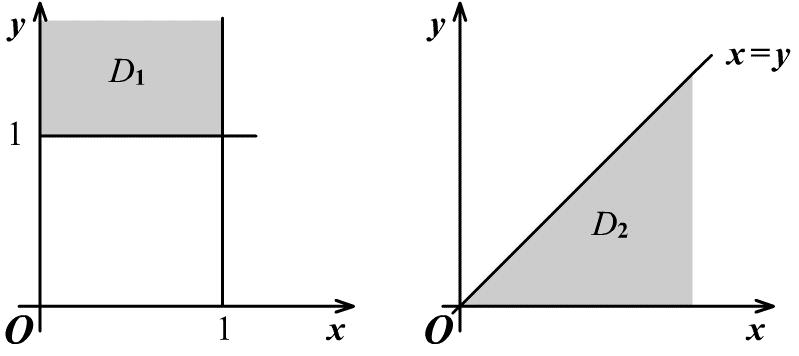
① 적분구역은 그림 3.1.3(a)의 어두운 부분 이다.



(b) 구역 

(a) 구역 

그림 3.1.3 의 비령구역과 관련된 사건들의 사귐부분



② 적분구역은 그림 3.1.3(b)의 어두운 부분 로서 반복적분을 쉽게 리용할수 있다.



### 3.1.5 대표적인 다차원분포

1. 다항분포

다항분포는 중요한 다차원리산분포로서 2항분포의 일반화이다.

번의 독립적인 반복시행을 진행하는데 매 시행에서 서로 겹치지 않는 결과 들가운데 어느 하나가 발생하며 가 발생하는 확률이 이고 이라고 하자. 를 번의 독립인 반복시행과정에 가 나타나는 회수라고 하면 가 값 을 취할 확률 즉 가 번, 이 번, …, 가 번 나타날 확률은 다음과 같다.

.

여기서 이다.

이 동시분포렬을 **항분포** 또는 **다항분포**라고 하며 로 표시한다. 이 확률은 다항식 에 대한 전개식의 한개 항이므로 그 합은 1이다. 이면 2항분포이다.

2항분포는 1차원우연량의 분포이며 항분포는 이고 이므로 차원우연량의 분포이다.

실례 3.1.4 100개의 제품이 있는데 그중 1등품이 60개, 2등품이 30개, 3등품이 10개이다.이 제품무지에서 반환표본화의 방식으로 3개의 제품을 한개씩 임의로 꺼내는데 그가운데서 1등품, 2등품의 개수를 각각 와 로 표시하자. 2차원우연량 의 동시분포렬을 구하시오.

풀기. 와 의 가능한 값이 모두 0, 1, 2, 3이므로 의 동시분포렬은 다음과 같다.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  | | | |
| 0 | 1 | 2 | 3 |
| 0 |  |  |  |  |
| 1 |  |  |  |  |
| 2 |  |  |  |  |
| 3 |  |  |  |  |

이면 이다. 즉 .

일 때 사건 은 꺼낸 3개의 제품가운데서 1등품이 개, 2등품이 개, 3등품이 개 있다는것을 나타낸다. 그러므로 반환발취를 진행할 때 이면 이다.

우의 식으로부터 의 동시분포렬을 구체적으로 계산해낼수 있다.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  | | | |
| 0 | 1 | 2 | 3 |
| 0 | 0.001 | 0.009 | 0.027 | 0.027 |
| 1 | 0.018 | 0.108 | 0.162 | 0 |
| 2 | 0.108 | 0.324 | 0 | 0 |
| 3 | 0.216 | 0 | 0 | 0 |

이러한 동시분포렬이 있으면 사건들의 확률을 계산할수 있다. 실례로



이 실례는 2장 4절의 2항분포를 일반화한것이다. 차이점은 2항분포에서는 "합격품"과 "불합격품"의 두가지 경우에서 발취하였다면 여기서는 1등품, 2등품, 3등품의 세가지 경우에서 발취한다는것이다. 이것을 3항분포라고 하는데 한가지 2차원우연량의 분포라고 볼수있다.

2. 초기하분포

주머니에 번호가 달린 개의 공이 있는데 그중에 ()개는 번호의 공이고 이다. 임의로 를 꺼내고 를 꺼낸 개의 공가운데서 번호 공의 개수라고 한다면

.

여기서 이다.

실례 3.1.5 실례 3.1.4를 비반환발취로 바꾸어 고찰한다. 즉 이 제품무지에서 다시 넣지 않고 3개의 제품을 뽑을 때 1등품과 2등품의 제품개수를 와 로 표시한다면 2차원우연량 의 동시분포렬을 구하시오.

풀기. 와 가 각각 와 의 값이라고 할 때 에 대하여 이다. 즉 이다. 에 대하여 이다.

이로부터 의 동시분포렬을 얻을수 있다. 실례로

.

기타 확률들을 모두 류사하게 구하면 아래와 같은 동시분포렬을 얻을수 있다.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  | | | |
| 0 | 1 | 2 | 3 |
| 0 | 0.0007 | 0.0083 | 0.0269 | 0.0251 |
| 1 | 0.0167 | 0.1113 | 0.1614 | 0 |
| 2 | 0.1095 | 0.3284 | 0 | 0 |
| 3 | 0.2116 | 0 | 0 | 0 |

이러한 동시분포렬을 리용하면 관련 사건의 확률을 계산할수 있다. 실례로



이 실례는 초기하분포의 일반화이며 차이점은 2.4.3에서는 "합격품"과 "불합격품" 두 경우에서 비반환발취를 진행하였다면 여기서는 1등품, 2등품, 3등품의 세 경우에 비반환발취를 진행한다. 여기서 이것을 3차원초기하분포라고 하는데 한가지 특정한 다차원초기하분포라고 볼수 있다.

3. 다차원평등분포

를 의 한 유계구역, 그 척도(평면이면 면적, 공간이면 체적)를 라고 하자. 이때 다차원우연량 의 동시밀도함수가 다음과 같으면 는 우의 **다차원평등분포**에 따른다고 하고 로 표시한다.



2차원평등분포는 평면령역 에 우연적으로 점을 찍는 우연현상을 나타내며 이 점의 좌표 가 의 부분구역 에 놓일 확률이 의 면적과 관계되고 그의 위치와는 무관계하다면 이것은 제1장에서 기하확률로 론의하였다. 여기서는 2차원평등분포로 설명한다. 즉

. 여기서 는 각각 의 면적이다. 이것이 바로 기하확률의 계산공식이다.

실례 3.1.6 를 중심이 원점에 있고 반경이 인 원안의 구역이라고 하자. 이 원안에 우연적으로 점을 찍을 때 그 좌표 는 우에서의 2차원평등분포에 따르며 밀도함수는 다음과 같다.



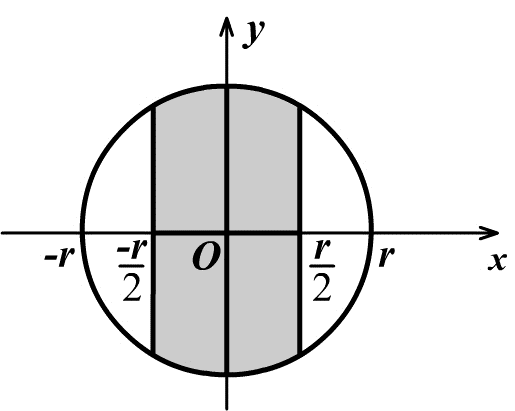
이때 확률 를 구하시오.

풀기.

의 비령구역과 의 사귐부분은 그림 3.1.4와 같다. 따라서 구하려는 확률은



그림 3.1.4 의 비령구역



4. 2차원정규분포

2차원우연량 의 동시밀도함수가 다음과 같다(그림 3.1.5).



이때 는 2차원정규분포에 따른다고 하며 로 표시한다. 여기서 5개의 파라메터들의 값범위는 각각 이다.

뒤에서 은 각각 와 의 평균, 은 각각 와 의 분산, 는 와 의 상관곁수라는것을 설명한다.

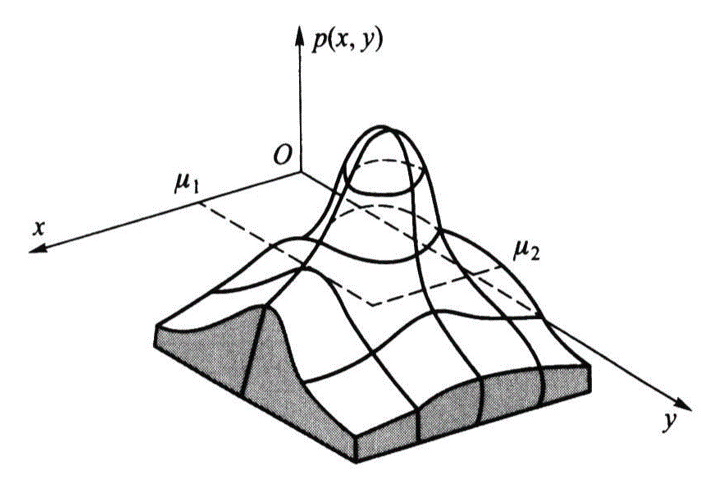


그림 3.1.5 2차원정규밀도함수

2차원정규밀도함수의 그라프는 사방으로 무한히 퍼진 밀짚모자와 비슷한데 그 중심점은 이고 그 등고선은 타원형이다. 평면 혹은 평면에 평행인 자름면은 정규곡선을 나타낸다 (그림 3.1.5).

실례3.1.7 2차원우연량 에 대하여 가 구역 에 놓일 확률을 구하시오.

풀기. 구하려는 확률은



변환 을 실시하면 을 얻는다. 이로부터

.

다시 극좌표변환 을 진행하면 을 얻고 결국



련습문제 3.1

1. 100개의 제품가운데 1등품이 50개, 2등품이 30개, 3등품이 20개 있다. 그중에서 5개를 취하고 로 1등품과 2등품의 개수를 표시한다. 다음 경우에 의 동시분포렬을 구하시오.

① 비반환발취 ② 반환발취

2. 통에 검은 공 3개, 빨간 공 2개, 흰 공 2개가 들어있다. 그중 4개를 선택하는데 검은 공의 개수를 로, 빨간 공의 개수를 로 표시한다. 를 구하시오.

3. 주머니에 흰 공 5개, 검은 공 8개가 있는데 그중에서 비반환방식으로 한개씩 3번 꺼낸다. 만일 ()번째 꺼낸것이 흰 공이면 이고 그렇지 않으면 이다. 이때 다음의 동시분포렬을 구하시오.

① 의 동시분포렬

② 의 동시분포렬

4. 우연량 의 동시분포렬이 아래와 같이 주어지고 을 만족한다. 이때 을 구하시오.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | -1 | 0 | 1 |
|  | 0.25 | 0.5 | 0.25 |

5. 우연량 의 동시밀도함수가 다음과 같다.



이때 다음과 같은 값들을 구하시오.

① 상수 

② 

③ 

④ 

6. 우연량 의 동시밀도함수가 다음과 같다.



이때 다음과 같은 값들을 구하시오.

① 상수 

② 의 동시분포함수 

③ 

7. 우연량 의 동시밀도함수가 다음과 같다.



이때 다음과 같은 값들을 구하시오.

① 

② 

③ 

④ 의 동시분포함수

8. 2차원우연량 가 변의 길이가 2, 중심이 (0, 0)인 바른4각형구역에서 평등분포에 따른다고 할 때 를 구하시오.

9. 2차원우연량 의 동시밀도함수가 다음과 같다.



이때 다음과 같은 값들을 구하시오.

① 상수 

② 와 

10. 2차원우연량 의 동시밀도함수가 다음과 같다.



이때 다음과 같은 값들을 구하시오.

① 

② 와 

③ 

11. 우연량 가 파라메터 인 지수분포에 따른다고 하고 우연량 를 다음과 같이 정의한다.



와 의 결합분포를 구하시오.

12. 2차원우연량 의 동시밀도함수가 다음과 같다.



이때 를 구하시오.

13. 2차원우연량 의 동시밀도함수가 다음과 같다.



이때 을 구하시오.

14. 2차원우연량 의 동시밀도함수가 다음과 같다.



이때 와 가운데서 적어도 하나가 0.5보다 작을 확률을 구하시오.

15. 구간 (0, 1)에서 임의로 2개의 수를 취할 때 그 적이 3/16보다 작지 않고 그 합이 1보다 크지 않을 확률을 구하시오.

## 3.2 주변분포와 우연량의 독립성

2차원동시분포함수(2차원동시분포렬, 2차원동시밀도함수도 마찬가지이다)는 다음과 같은 세가지 측면에서 풍부한 정보를 포함하고 있다.

• 매 성분의 분포(매 성분의 모든 정보) 즉 주변분포.

• 두 성분들사이의 관련정도, 3.4에서 공분산과 상관곁수를 리용하여 설명한다.

• 한 성분이 주어졌을 때 다른 성분의 분포 즉 조건부분포.

궁극적인 목적은 이러한 정보를 동시분포로부터 얻어내는것인데 이 절에서는 먼저 주변분포에 대해 론의한다.

### 3.2.1 주변분포함수

2차원우연량 의 동시분포함수 에서 라고 하면 는 필연사건이므로 .

이것은 의 동시분포함수 로부터 구한 의 분포함수로서 의 **주변분포**(marginal distribution)라고 하며 다음과 같이 표시한다.

.

마찬가지로 에서 라고 놓으면 의 주변분포를 얻을수 있다.

.

3차원우연량 의 동시분포함수 에서 비슷한 방법으로 더 많은 주변분포함수를 얻을수 있다.



더 높은 차원의 경우에는 이와 류사하게 동시분포함수로부터 낮은 차원의 주변분포함수를 얻을수 있다. 례를 들어 5차원동시분포에는 5개의 1차원주변분포, 10개의 2차원주변분포, 10개의 3차원주변분포, 5개의 4차원주변분포들이 있다.

실례3.2.1 2차원우연량 의 동시분포함수가 다음과 같다.



이 분포를 **2차원지수분포**라고 하는데 는 파라메터이다.

이 동시분포함수 로부터 와 의 주변분포함수를 쉽게 구할수 있다.



이것들은 모두 1차원지수분포이다. 에 따라 2차원지수분포가 달라지지만 두 주변분포는 파라메터 와 무관하다. 이로부터 알수 있다싶이 2차원동시분포는 매 성분의 확률분포를 포함할뿐만아니라 두 변수 와 사이의 관계에 대한 정보도 포함하고있다. 이것이 바로 다차원우연량을 연구하는 원인이다.

### 3.2.2 주변분포렬

2차원리산우연량 의 동시분포렬 에서 에 대한 합계로 얻은 분포렬



을 의 **주변분포렬**이라고 부른다. 마찬가지로 에 대한 합계로 얻은 분포렬



을 의 **주변분포렬**이라고 부른다.

실례 3.2.2 2차원우연량 의 동시분포렬이 다음과 같다.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  | | |
| 1 | 2 | 3 |
| 0 | 0.09 | 0.21 | 0.24 |
| 1 | 0.07 | 0.12 | 0.27 |

이때 와 의 주변분포렬을 구하시오.

풀기. 우의 동시분포렬에서 매 행에 대한 합은 0.54와 0.46이다. 이것을 대응한 행의 오른쪽에 쓰면 이것이 의 주변분포렬이다. 다시 매 렬에 대한 합을 구한다. 얻은 0.16, 0.33, 0.51을 대응한 렬의 아래쪽에 쓰면 의 주변분포렬을 얻는다.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  | | |  |
| 1 | 2 | 3 |
| 0 | 0.09 | 0.21 | 0.24 | 0.54 |
| 1 | 0.07 | 0.12 | 0.27 | 0.46 |
|  | 0.16 | 0.33 | 0.51 | 1 |

### 3.2.3 주변밀도함수

2차원련속우연량 의 동시밀도함수가 라고 하자. 이때



여기서 는 각각



.

이것들은 밀도함수위치에 있기때문에 를 의 **주변밀도함수**, 를 의 **주변밀도함수**라고 한다.

동시밀도함수에 의하여 주변밀도함수를 구할 때 적분구역을 정확히 확정해야 한다.

실례3.2.3 2차원우연량 의 동시밀도함수가 다음과 같다.



이때

① 주변밀도함수 와 를 구하시오.

② 와를 구하시오.

풀기. 먼저 그림 3.2.1에서 보여준것처럼 의 비령구역을 찾는다.

① 먼저 를 구한다.

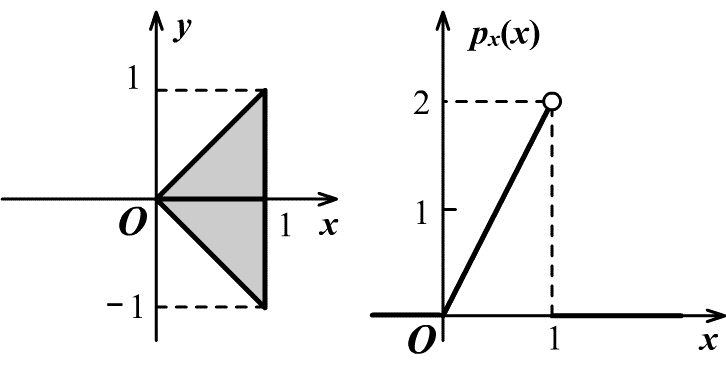
 또는 일 때 이고 일 때 이다. 따라서 의 주변밀도함수는 다음과 같다(그림 3.2.2).



다음으로 를 구한다.

그림 3.2.1 의 비령구역

그림 3.2.2 의 주변밀도함수()



 또는 일 때 이고 일 때 , 이면 이다.

그러므로 의 주변밀도함수는 다음과 같다(그림 3.2.3).



1

-1

1





그림 3.2.3 의 주변밀도함수(3각형분포)



② 구하려는 확률은 각각 다음과 같다.



실례 3.2.4 3항분포의 1차원주변분포는 2항분포이다.

3항분포 은 본질적으로 2차원우연량 의 분포이며 그 동시분포렬은 다음과 같다.

.

우의 식에 대하여 을 곱하고 나누어주며 를 0부터 까지 합하자. 라고 표시하면



그러므로 이다. 마찬가지로 이라는것을 증명할수 있다.

비슷한 방법으로 항분포 의 최저차원주변분포는 개의 2항분포 , 라는것을 증명할수 있다.

실례3.2.5 2차원정규분포의 주변분포는 1차원정규분포이다.

2차원우연량 에 대하여 식 (3.1.8)의 2차원정규밀도함수 의 지수부분 을 로 변환한다.

다시 적분 에 대하여 변환 을 실시(이때 를 상수로 본다)하면

.

웃식에서의 적분이 이므로 이다.

이것은 바로 1차원정규분포 의 밀도함수 즉 이다. 같은 방법으로 을 증명할수 있다.

이로부터 다음과 같은것을 알수 있다.

• 2차원정규분포의 주변분포는 파라메터 를 포함하지 않는다.

• 이것은 2차원정규분포 와 의 주변분포가 같다는것을 말하여준다.

• 같은 주변분포를 가지는 다차원동시분포는 여러가지일수 있다.

### 3.2.4 우연량들사이의 독립성

다차원우연량에서 매 성분의 값은 서로 영향을 줄수도 있고 전혀 영향을 주지 않을수도 있다. 례를 들면 한 사람의 키 와 몸무게 는 서로 영향을 주지만 보통 그의 수입에는 영향을 주지 않는다. 두 우연량의 값이 서로 영향을 주지 않을 때 그것들은 서로 독립이라고 한다.

정의 3.2.1 차원우연량 의 동시분포함수는 , 는 의 주변분포함수이다. 임의의 개의 실수 에 대하여



이면 는 **서로 독립**이라고 한다.

리산우연량의 경우 임의의 개의 값 에 대하여



이면 는 서로 독립이라고 한다.

련속우연량의 경우 임의의 개의 실수 에 대하여



이면 는 서로 독립이라고 한다.

앞에서 우리는 동시분포로부터 주변분포를 구할수 있지만 주변분포로부터 반드시 동시분포를 구할수 있는것은 아니라는것을 보았다. 이때 우연량들이 서로 독립이라는것을 알면 주변분포의 적을 통하여 동시분포를 구할수 있다.

실례 3.2.6 구간 (0, 1)에서 임의의 2개의 수를 취할 때 다음 사건의 확률을 구하시오.

① 두 수의 합이 1.2보다 작다.

② 두 수의 적이 1/4보다 작다.

풀기. 두 수를 각각 와 로 표시하면 와 는 모두 (0, 1)우의 평등분포에 따르며 와 의 값이 서로 아무런 영향도 주지 않으므로 와 는 서로 독립, 그 밀도함수는 다음과 같다.



이 동시밀도함수를 리용하여 ①과 ②의 확률을 다음과 같이 계산할수 있다.

① 사건 의 비령구역은 그림 3.2.4(a)에 표시되여있는데 그 확률은 다음과 같다.

.

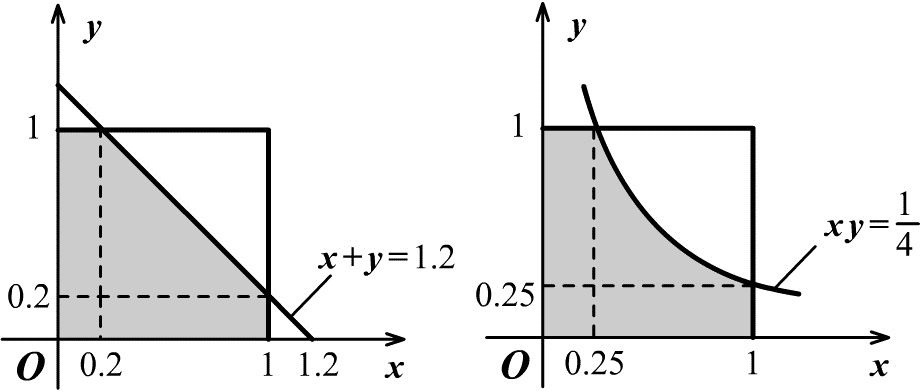
②그림 3.2.4(b)에 사건 의 비령구역을 표시하였으며 그 확률은 다음과 같다.

.

(a) 

(b) 

그림 3.2.4 의 비령구역과 관련된 사건의 사귐부분



이 실례는 독립성이 주어지면 적의 방법으로 동시밀도함수를 얻을수 있으며 2개의 우연량과 관련된 사건의 확률을 구할수 있다는것을 보여준다.

실례3.2.7 2차원우연량 의 동시밀도함수가 다음과 같을 때 와 는 서로 독립인가?



풀기. 와 가 독립인가를 판단하기 위하여 주변밀도함수의 적이 동시밀도함수와 같은가를 보면 된다. 그를 위해서는 우선 주변밀도함수를 구해야 한다.

 또는 일 때 이며 일 때 이다.

따라서 

이와 마찬가지로  또는 일 때 이며 일 때 이다.

따라서 

이로부터  즉 와 는 독립이 아니다.

직관적으로 볼 때 동시밀도함수 는 변수들을 분리할수 있는것처럼 보이지만 비령구역들이 서로 사귀기때문에 의 값은 의 값의 영향()을 받고 의 값은 의 값의 영향()을 받는다. 결국 의 변수들이 서로 분리될수 없고 와 는 서로 독립이 될수 없다.

실례3.2.8 2차원우연량 의 동시밀도함수 가 다음과 같을 때 와 가 독립인가를 판단하시오.

① 

② 

③ 

④ 

풀기. ① 주변분포는 다음과 같다.



따라서 이고 와 는 서로 독립이다.

이런 상태를 변수 와 가 분리가능하다고 하는데 이라는 의미와 의 비령구역이 두개의 1차원구역의 적공간으로 분해될수 있다는 의미를 담고있다.

② 의 값과 의 값이 서로 영향을 주기때문에 는 분리될수 없으며 따라서 와 는 서로 독립이 아니다.

③ 주변분포는 다음과 같다.



그리고 이므로 와 는 분리가능하고 서로 독립이다.

④ 주변분포는 다음과 같다.



이므로 와 는 분리될수 없고 서로 독립이 아니다.

련습문제 3.2

1. 2 차원리산우연량 이 취할수 있는 값은 (0, 0), (-1, 1), (-1, 2), (1, 0)이고 이 값들을 취할 확률은 각각 1/6, 1/3, 1/12, 5/12이다. 와 의 주변분포렬을 구하시오.

2. 2차원우연량 의 동시분포함수가 다음과 같다.



와 의 주변분포함수를 각각 구하시오.

3. 다음과 같은 2차원평등분포의 주변분포를 구하시오.

p (x, y)

4. 2차원우연량 가 곡선 와 직선 들에 의해 둘러막힌 평면령역 우에서 평등분포에 따를 때 의 주변밀도함수를 구하시오.

5. 아래에 제시한 의 동시밀도함수의 주변밀도함수 와 를 구하시오.

① 

② 

③ 

6. 2차원우연량 의 동시분포함수가 다음과 같다.



이때 와 를 구하시오.

7. 다음과 같은 두개의 서로 다른 동시밀도함수들이 동일한 주변밀도함수를 가진다는것을 검증하시오.



8. 우연량 와 가 독립동일분포이고 일 때 를 구하시오.

9. 두 사람 A, B가 독립적으로 각각 2번씩 사격한다. A의 명중률은 0.2, B의 명중률은 0.5 라고 하고 A와 B가 명중한 회수를 각각 와 로 표시한다. 를 구하시오.

10. 우연량 와 가 서로 독립이고 그 동시분포렬이 다음과 같을 때 상수 를 구하시오.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  | | |
|  |  |  |
|  |  | 1/9 |  |
|  | 1/9 |  | 1/3 |

11. 와 를 서로 독립인 우연량, 이라고 할 때 다음의 값들을 구하시오.

① 와 의 동시밀도함수 ②  ③ 

12. 우연량 의 동시분포함수가 다음과 같다.



이때

① 주변밀도함수 와 을 구하시오. ② 와 는 독립인가?

13. 우연량 의 동시분포함수가 다음과 같다.



이때

① 주변밀도함수 와 을 구하시오. ② 와 는 독립인가?

14. 2차원우연량 의 동시밀도함수가 다음과 같을 때 와 는 서로 독립인가?

① 

② 

③ 

④ 

⑤ 

⑥ 

15. 길이 인 선분의 안쪽에 임의로 두 점을 취할 때 그 두점사이의 거리가 보다 작을 확률을 구하시오.

16. 2차원우연량 가 구역 우의 평등분포에 따를 때 와 가 서로 독립이라는것을 증명하시오.

## 3.3 다차원우연량함수의 분포

이 차원우연량이면 그것의 함수 는 1차원우연량이다. 의 동시분포로부터 의 분포를 구하는것은 기교를 요구하는 문제로서 리산인 경우, 련속인 경우에 방법이 다를뿐아니라 의 형식에 따라서 서로 다른 방법을 취하여야 한다. 지어 어떤 방법은 특정한 형식의 에만 적용될수 있다. 아래에서 일반적으로 리용되는 방법들을 소개한다.

### 3.3.1 다차원리산우연량함수의 분포

가 차원리산우연량이면 어떤 함수 는 1차원리산우연량이다. 이 취할수 있는 값이 적은 경우 의 값을 하나하나 렬거한 다음 다시 합쳐 정리하면 결과를 얻을수 있다.

실례3.3.1 2차원우연량 의 동시분포렬이 다음과 같다.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  | | |
| -1 | 1 | 2 |
| -1 | 5/20 | 2/20 | 6/20 |
| 2 | 3/20 | 3/20 | 1/20 |

이때 우연량 들의 분포렬을 구하시오.

①  ②  ③ 

풀기. 와 매 함수의 값을 한 표에 정리하여본다.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 5/20 | 2/20 | 6/20 | 3/20 | 3/20 | 1/20 |
|  | (-1, -1) | (-1, 1) | (-1, 2) | (2, -1) | (2, 1) | (2, 2) |
|  | -2 | 0 | 1 | 1 | 3 | 4 |
|  | 0 | -2 | -3 | 3 | 1 | 0 |
|  | -1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 |

이것을 합칠것은 합치고 정돈하면 다음의 결과를 얻을수 있다.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | -2 | 0 | 1 | 3 | 4 |
|  | 5/20 | 2/20 | 9/20 | 3/20 | 1/20 |

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | -3 | -2 | 0 | 1 | 3 |
|  | 6/20 | 2/20 | 6/20 | 3/20 | 3/20 |

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | -1 | 1 | 2 |
|  | 5/20 | 2/20 | 13/20 |

실례 3.3.2 (뽜쏭분포의 가법성) 우연량 들이 서로 독립일 때 이라는것을 증명하시오.

증명. 는 0, 1, 2, … 등 모든 비부인 옹근수를 취할수 있다. 또한 사건 은 서로 배반인 사건 들의 합으로서 독립성을 고려하면 임의의 비부인 옹근수 에 대하여

.

이 확률등식을 리산인 경우의 **합성적공식**이라고 한다. 이 공식을 리용하면



이것은 이라는것을 나타낸다. 는 뽜쏭분포에 따르지 않는다는것을 주의하여둔다.

뽜쏭분포의 이러한 성질은 뽜쏭분포의 합성적은 여전히 뽜쏭분포라는것이며 다음과 같이 표시할수 있다.

.

여기서 합성적(convolution)은 "두개의 독립인 우연량들의 합의 분포를 구하는 연산"을 의미한다. 이것은 유한개의 독립인 뽜쏭우연량들의 합의 분포로 확장할수 있다.

.

특히 일 때

.

이런 결론은 리론과 응용측면에서 모두 중요한것이다.

앞으로 "같은 종류의 분포에 따르는 독립인 우연량들의 합이 여전히 그 종류의 분포에 따른다"는 성질을 이러한 분포가 가법성을 가지고 있다고 말하겠다. 우의 실례에서 뽜쏭분포가 가법성을 가지고 있다는것을 보았는데 다음 실례에서는 2항분포도 가법성을 가진다는것을 설명한다.

실례3.3.3(2항분포의 가법성) 우연량 들이 서로 독립일 때 이라는것을 증명하시오.

증명. 는 0, 1, 2, …, 의 개 값을 가진다. 리산경우의 합성적공식 (3.3.1)을 리용하면 사건 의 확률을 다음과 같이 표시할수 있다.

.

이므로 웃식에서  즉 만 고려하면 된다.

그러므로 라고 표시하면



초기하분포를 리용하면  또는 이라는것을 증명할수 있다.

이로부터 .

이것은 이라는것을 말해준다. 즉 파라메터 가 같은 경우에 2항분포의 합성적은 여전히 2항분포에 따르며 이다. 이 성질은 유한개의 경우에로 확장할수 있다.



특히 이면



이로부터 이 독립이고 모두 에 따르면 그 합 이며 또는 2항분포 에 따르는 우연량은 개의 서로 독립인 0-1분포우연량들의 합으로 분해될수 있다는것을 알수 있다.

### 3.3.2 최대값과 최소값의 분포

한 지역의 년강수량 는 하나의 우연량으로서 그 분포함수를 로 표시하자. 만일 최근 50년동안 그 지역에서 발생한 큰물과 가물의 가능성을 연구하려면 그 기간의 최대년강수량과 최소년강수량을 조사해야 한다. 이 값들은 로 표시할수 있다. 여기서 는 이 50년가운데서 번째 년도의 강수량을 나타낸다. 같은 지역의 관측값이므로 들은 모두 독립동일분포한다고 볼수 있다. 이렇게 독립동일분포하는 여러 개의 우연량들의 최대값 와 최소값 의 분포를 연구하는것은 매우 중요한 의의를 가진다. 이제 실례를 들어 최대값과 최소값의 확률분포를 구하는 방법에 대해 론의하겠다.

실례3.3.4(최대값분포) 이 서로 독립인 개의 우연량이고 이면 다음과 같은 몇가지 경우에 의 분포를 구하시오.

① 

② 들이 같은 분포에 따를 때 즉 

③ 매 가 련속우연량이고 같은 분포에 따를 때 즉 의 밀도함수가 모두 

④ 

풀기. ① 의 분포함수는 다음과 같다.



② 들의 공동의 분포함수 를 웃식에 갈아넣으면



③ 의 분포함수는 여전히 웃식이므로 밀도함수는 웃식의 에 관한 도함수를 구하여 얻을수 있다.



④ 의 분포함수와 밀도함수를 식 (3.3.8)과 식 (3.3.9)에 대입하면



실례3.3.5(최소값분포) 이 서로 독립인 개의 우연량이고 이면 다음과 같은 몇가지 경우에 의 분포를 구하시오.

① 

② 들이 같은 분포에 따를 때 즉 

③ 매 가 련속우연량이고 같은 분포에 따를 때 즉 의 밀도함수가 모두 

④ 

풀기. ① 의 분포함수는 다음과 같다.



② 들의 공동의 분포함수 를 웃식에 갈아넣으면

.

③ 의 분포함수는 여전히 웃식이므로 밀도함수는 웃식의 에 관한 도함수를 구하여 얻을수 있다.



④ 의 분포함수와 밀도함수를 식 (3.3.11)과 식 (3.3.12)에 대입하면



우의 실례3.3.4와 3.3.5에서 알수 있듯이 가 독립동일분포이고 가 파라메터 인 지수분포에 따를 때 는 지수분포에 따르지 않지만 는 여전히 파라메터가 인 지수분포에 따른다.

실례 3.3.6 한 구간의 도로에 5개의 가로등이 있었으나 공사를 진행한 다음 20개의 가로등이 설치되였다.그후에 도로관리원들은 늘 가로등이 더 쉽게 못쓰게 된다고 생각하는데 그 원인을 설명하시오.

풀기. 모든 가로등의 수명이 서로 독립동일분포하는 우연량, 그 공동분포를 지수분포 , 평균수명(즉 기대값)은 시간이라고 할 때 실례 3.3.5에서와 같이 고찰하면 도로공사전 5개 가로등가운데서 처음 못쓰게 되는 시간은 이고 이다. 만일 가로등들을 매일 10시간씩만 리용한다면 30일내에 가로등을 교체하여야 하는 확률은 이다.

공사진행후 20개의 가로등가운데서 처음 못쓰게 되는 시간은 이고 이다. 30일내에 가로등을 교체하여야 하는 확률은 이다.

이것으로부터 도로공사후 30일내에 가로등을 갈아 끼워야 하는 확률이 훨씬 높아졌다는것을 알수 있다.

도로에 100개의 가로등이 있다고 가정하면 30일내에 가로등을 갈아끼워야 하는 확률은 더 크다.

### 3.3.3 련속인 경우의 합성적공식

정리 3.3.1 와 가 각각 서로 독립인 련속우연량이고 그 밀도함수들이 각각 , 라고 하면 의 밀도함수는 다음과 같다.

.

증명. 의 분포함수는 다음과 같다.



따라서 의 밀도함수는 다음과 같다.

.

웃식에서 라고 하면 이다.

이것이 바로 련속인 경우의 합성적공식이다.

주의할것은 합성적공식을 와 가 독립이 아닌 경우에도 리용할수 있는데 이때 식 (3.3.13) 또는 (3.3.1)에서 주변분포밀도(주변분포렬)의 적을 동시분포밀도(동시분포렬)로 바꾸면 된다.

이 공식을 정규분포와 감마분포에 대하여 리용할수 있다.

실례 3.3.7 (정규분포의 가법성) 서로 독립인 우연량 애 대하여 이라는것을 증명하시오.

증명. 는 여전히 에서 값을 취하며 합성적공식 (3.3.13)을 리용하면

.

웃식에서 피적함수의 지수부분을 의 차수에 따라 전개한후 같은 항을 합치면

.

여기서 이다. 따라서

이다. 정규밀도함수의 정규성을 리용하면 앞의 식에서의 적분은 가 되여야 하며 따라서 이다.

이것이 바로 평균 , 분산 인 정규밀도함수이다.

이상의 결론을 통하여 두개의 독립인 정규우연량의 합은 여전히 정규우연량이며 그 분포의 두 파라메터는 대응하는것들을 각각 더하여 얻을수 있다는것을 알수 있다.



이 결론은 유한개의 독립인 정규우연량들의 합으로 확장할수 있다.

이밖에 만일 우연량 이면 임의의 비령인 실수 에 대하여 이라는것을 알수 있다.

따라서 임의의 개의 서로 독립인 정규우연량들의 선형결합이 여전히 정규우연량이라는 중요한 결론을 얻을수 있다.



만일 이면 파라메터 과 은 각각 이다.

례를 들어 이고 와 가 독립이라면 이다.

실례 3.3.8(감마분포의 가법성) 서로 독립인 우연량 에 대하여 이라는것을 증명하시오.

증명. 는 여전히 에서 값을 취하므로 일 때 이고 일 때 합성적공식 (3.3.13)을 리용할수 있는데 이때 의 비령구역은 이다. 따라서



마지막 적분은 베타함수로서 와 같다. 웃식에 대입하면

.

이것이 바로 형태파라메터 , 척도파라메터 인 감마분포이다.

이 결론을 통하여 같은 척도파라메터를 가지는 독립인 두개의 감마변수의 합이 여전히 감마변수이며 그 척도파라메터는 불변이고 형태파라메터는 합으로 된다.

.

이 결과는 동일한 척도파라메터를 가지는 유한개의 독립인 감마변수들의 합으로 확장될수 있다.

또한 2장에서 감마분포에는 두가지 특수경우 즉 로 주어지는 지수분포와 분포가 있다는것을 보았다. 이로부터 또 두가지 결론이 나온다.

① 개의 독립동일분포하는 지수변수의 합은 감마변수이다. 즉

.

② 개의 독립된 변수의 합은 변수(분포의 가법성)이다. 즉

.

실례3.3.9 가 독립동일분포하는 개의 표준정규변수일 때 그 2제곱합 이 자유도가 인 분포에 따른다는것을 증명하시오.

증명. 앞의 실례2.6.3에서 이미 일 때 임을 증명하였으므로 분포의 가법성으로부터 결론을 증명할수 있다.

이로부터 분포의 파라메터 은 독립인 표준정규변수의 개수라는것을 알수 있으며 따라서 이 파라메터 을 자유도라고 한다.

### 3.3.4 변수변환법

여기에서는 2차원련속우연량함수의 분포를 찾는 방법만 소개하는데 차원련속우연량함수의 분포를 찾는 방법은 이와 류사하다.

1. 변수변환법

2차원우연량 의 동시밀도함수를 라고 하자. 함수 가 련속인 편도함수를 가지며 한개의 거꿀함수 만 존재한다면 그 변환의 야꼬비행렬식은

.

만일 이면 의 동시밀도함수는 다음과 같다.



이 방법은 사실상 2중적분의 변수변환법인데 그 증명은 해석수학교과서를 참고할수 있다.

실례3.3.10 우연량 와 가 독립동일분포이며 모두 정규분포 에 따른다고 하자. 일 때 의 동시밀도함수를 구하시오. 와 가 독립인가?

풀기. 의 거꿀함수가 이므로 .

따라서 의 동시밀도함수는 다음과 같다.



이것은 2차원정규분포 의 밀도함수이며 그 주변분포는 , 이다. 그러므로 로부터 와 가 서로 독립아라는것을 알수 있다.

변수변환법에서 와 가 독립일 필요는 없다는것을 강조하여둔다. 따라서 실례3.3.10에서 가 2차원정규분포에 따른다고 변경하여도 가 2차원정규분포에 따른다는것을 얻을수 있다. 더 나아가서 다차원정규변수는 선형변환을 거친 다음에도 여전히 다변량정규변수라는것을 알수 있다. 이 결론은 통계에서 자주 리용된다.

2. 변수보충법

이 방법은 본질적으로 변수변환법의 한가지 응용에 불과하다. 2차원련속우연량 의 함수 의 밀도함수를 구하기 위하여 새로운 우연량 를 보충한다. 일반적으로  또는 로 놓는다. 먼저 변수변환법을 리용하여 의 동시밀도함수 를 구한 다음 에 관한 적분을 계산하여 의 주변밀도함수를 얻는다.

례를 들어 두 우연량의 적과 상의 공식을 보도록 하자.

실례3.3.11(적의 공식) 우연량 와 가 서로 독립이고 그 밀도함수들이 각각 , 라고 하자. 이때 의 밀도함수는 다음과 같다.



증명. 로 표시하면 의 거꿀함수는 이고 야꼬비행렬식은 이다.

따라서 의 동시밀도함수는 이다.

를 에 관하여 적분하면 의 밀도함수가 식 (3.3.21)이라는것을 알수 있다.

실례3.3.12(상의 공식) 우연량 와 가 서로 독립이고 그 밀도함수들이 각각 , 라고 하자. 이때 의 밀도함수는 다음과 같다.



증명. 로 표시하면 의 거꿀함수는 이고 야꼬비행렬식은 이다.

따라서 의 동시밀도함수는 이다.

를 에 관하여 적분하면 의 밀도함수가 식 (3.3.22)이라는것을 알수 있다.

우의 두 실례에서 와 가 서로 독립이 아니면 식 (3.3.21)과 (3.3.22)에서 주변밀도의 적을 동시밀도로 바꾸면 된다.

련습문제 3.3

1. 2차원우연량 의 동시분포렬이 다음과 같다.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  | | |
| 1 | 2 | 3 |
| 0 | 0.05 | 0.15 | 0.20 |
| 1 | 0.07 | 0.11 | 0.22 |
| 2 | 0.04 | 0.07 | 0.09 |

와 의 분포렬을 구하시오.

2. 와 가 서로 독립인 우연량이고 라고 하자. 우연량 의 분포렬을 구하시오.

3. 우연량 와 의 분포렬이 각각 다음과 같다.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | -1 | 0 | 1 |
|  | 1/4 | 1/2 | 1/4 |
|  | 0 | 1 |
|  | 1/2 | 1/2 |

이 주어졌을 때 의 분포렬을 구하시오.

4. 우연량 가 독립동일분포할 때 다음과 같은 경우 우연량 의 분포렬을 구하시오.

① 가 인 0-1분포에 따른다.

② 가 기하분포에 따른다. 즉 

5. 두 우연량 와 에 대하여 이 성립할 때 를 구하시오.

6. 와 의 동시밀도함수가 다음과 같다.



이때 다음 우연량의 밀도함수를 구하시오.

①  ② 

7. 와 의 동시밀도함수가 다음과 같다.



이때 의 밀도함수를 구하시오.

8. 어떤 상품의 주간 수요량은 밀도함수가 인 우연량이다. 매 주의 수요량들이 서로 독립이라고 할 때

① 2주간 필요한 수요량의 밀도함수 를 구하시오.

② 3주간 필요한 수요량의 밀도함수 를 구하시오.

9. 우연량 가 서로 독립일 때 다음과 같은 경우 의 밀도함수를 구하시오.

①  ② 

10. 우연량 가 서로 독립일 때 다음과 같은 경우 의 밀도함수를 구하시오.

①  ② 

11. 가 서로 독립인 우연량이고 모두 (0, 1)우의 평등분포에 따른다고 가정할 때 그중에서 가장 큰 우연량이 다른 두개 우연량의 합보다 클 확률을 구하시오.

12. 우연량 와 가 독립동일분포하고 그 밀도함수가 일 때 의 분포를 구하시오.

13. 한 설비에 3개의 같은 종류의 전기부속품이 설치되여있는데 그 부속품들의 작업은 서로 독립이며 정상동작시간은 모두 파라메터 인 지수분포에 따른다. 3개 부속품이 모두 정상동작해야 설비가 동작한다면 설비의 정상동작시간 의 밀도함수를 구하시오.

14. 2차원우연량 가 직사각형 우에서 평등분포에 따른다고 할 때 변의 길이가 각각 와 인 직사각형의 면적 의 밀도함수를 구하시오.

15. 2차원우연량 가 원점을 중심으로 하는 단위원에서의 평등분포에 따른다고 할 때 극좌표 의 동시밀도함수를 구하시오.

16. 우연량 와 가 독립동일분포하고 그 밀도함수가 일 때

① 와 의 동시밀도함수 를 구하시오.

② 우의 와 가 서로 독립인가?

17. 우연량 와 가 독립동일분포하고 모두 에 따른다고 할 때 와 가 서로 독립이라는것을 증명하시오.

18. 우연량 와 가 서로 독립이고 일 때 와 가 서로 독립이며 이라는것을 증명하시오.

19. 우연량 와 가 서로 독립이고 (0,1)우의 평등분포에 따른다고 할 때 다음을 증명하시오.

① 

② 와 는 서로 독립인 표준정규우연량

20. 우연량 이 서로 독립이며 일 때 다음을 증명하시오.

.

21. 련속우연량 이 독립동일분포할 때 임을 증명하시오.

## 3.4 다차원우연량의 특징수

1차원우연량에서와 같이 다차원우연량도 특징수를 가지는데 매 성분의 기대값, 분산, 표준편차외에도 두 우연량의 상관정도 즉 공분산과 상관곁수가 있는데 이것은 두 우연량의 의존관계를 반영하는 특징수로서 많이 리용된다.

### 3.4.1 다차원우연량함수의 수학적기대값

2장에서 정리 2.2.1는 1차원우연량함수 에 대한 수학적기대값을 구하는데서 중요한 역할을 하였다. 이제 다차원우연량함수 에 대한 수학적기대값 를 구하는데서 정리 3.4.1도 중요한 역할을 한다. 이 정리를 리용하면 우연량함수 의 분포를 쉽게 구할수 있다. 이 정리의 증명은 많은 지식을 요구하므로 여기서는 그 증명을 략한다. 편리상 이 정리를 2차원우연량를 리용하여 설명하지만 차원우연량에 대해서도 결론은 류사하다.

정리 3.4.1 2차원우연량 의 분포를 동시분포렬  또는 동시밀도함수 로 표시하면 의 수학적기대값은 다음과 같다.



여기서 언급된 수학적기대값들은 모두 존재를 가정한다.

또한 련속인 경우(리산인 경우에도 이와 류사)에 다음과 같은 성질이 성립한다.

• 일 때 에 대한 수학적기대값은 다음과 같다.

.

• 일 때 의 분산은 다음과 같다.



류사하게 의 수학적기대값과 분산에 대한 공식도 얻을수 있다.

실례3.4.1 길이 인 선분에서 두 점 와 를 임의로 취할 때 두 점사이의 평균거리를 구하시오.

풀기. 와 는 모두 우의 평등분포에 따르고 서로 독립이기때문에 의 동시밀도함수는 다음과 같다.



정리 3.4.1를 리용하면 두 점사이의 평균길이는 다음과 같다.



주의할것은 정리 3.4.1을 리용하면 우연량함수의 분포를 구하는것은 생략될수 있지만 어떤 경우에 합이나 적을 구하기 힘들므로 두 단계로 나누어 진행한다. 즉 먼저 우연량함수 의 분포를 구하고 다시 의 분포를 리용하여 를 구한다.

실례 3.4.2 와 를 각각 지수분포 에 따르는 독립동일분포우연량이라고 할 때 의 수학적기대값을 구하시오.

풀기. 앞의 실례3.3.4에서 의 밀도함수 를 구하였다.

이때 의 수학적기대값은 다음과 같다.



### 3.4.2 수학적기대값과 분산의 연산에 관한 성질

2장에서 수학적기대값과 분산에 대한 간단한 성질을 제시하였다. 우의 정리 3.4.1을 리용하면 수학적기대값과 분산에 대한 연산의 몇가지 성질을 제시할수 있다.

성질 3.4.1 를 2차원우연량이라고 하면



증명. 를 련속우연량(리산우연량의 경우도 류사하게 증명할수 있다)으로 가정하고 그 동시밀도함수가 이라고 하자. 라고 하면 정리 3.4.1로부터



이 성질은 합의 기대값은 기대값의 합과 같다는것으로 간단히 설명할수 있으며 차원우연량의 경우에로 일반화할수 있다. 즉

.

성질 3.4.2 우연량 와 가 서로 독립이면 다음과 같다.



증명. 를 련속우연량(리산우연량의 경우도 류사하게 증명할수 있다)으로 가정하고 그 동시밀도함수가 이라고 하자. 와 의 독립성으로부터 임을 알수 있다. 라면 정리 3.4.1로부터 .

이 성질은 독립인 경우에 우연량승적의 수학적기대값은 수학적기대값의 적과 같다는것으로 간단히 설명할수 있으며 차원우연량의 경우에로 일반화할수 있다. 즉 이 서로 독립이면

.

성질 3.4.3 우연량 와 가 서로 독립이면 .

증명. 성질 3.4.1과 3.4.2로부터



마지막 항은 독립성으로부터 0이므로 성질 3.4.3이 증명된다.

이 성질은 독립변수들의 대수적합의 분산은 매 분산들의 합과 같다는것을 보여준다. 그러나 이 성질은 표준편차에 대해서는 성립되지 않는다. 즉 이 아니라 이다.

이 성질을 차원우연량의 경우로 일반화할수 있다. 즉 이 서로 독립이면

.

이로부터 독립우연량의 경우 이것들사이의 합이건 차이건 관계없이 분산은 루적되며 오직 증가할뿐 감소되지 않는다는것을 알수 있다.

특히 개의 독립동일분포(분산은 )하는 우연량 의 산수평균의 분산은 이다.

이것은 만일 어떤 물리적량 (실례로 무게)에 대해 측정할 경우 번의 독립적인 반복측정으로 얻은 평균값을 리용하여 측정의 정확도를 높일수 있다는것을 말해준다.

실례 3.4.3 우연량 이 서로 독립이고 일 때 의 수학적기대값, 분산, 표준편차를 구하시오.

풀기. 수학적기대값과 분산의 연산성질로부터

. . .

하나의 우연량을 여러 우연량의 합으로 쓴 다음 다시 수학적기대값의 성질을 리용하여 계산하면 복잡한 계산을 간단하게 할수 있다. 다음의 실례에서 이것을 설명하였다.

실례 3.4.4 한 봉지에 색갈이 서로 다른 공 개를 넣고 그중에서 하나씩 반환발취의 방식으로 번 선택한다. 가 선택된 개의 공가운데서 서로 다른 색갈의 개수라고 한다면 를 구하시오.

풀기. 의 분포렬을 직접 리용하는것은 쉽지 않다. 그 리유는 째 색갈의 공을 선택하였으면 그 색갈의 공이 또다시 1번, 2번, …, 번 선택될수 있고 경우가 비교적 많기때문이다. 그러나 대립사건 ="째 색갈의 공이 선택되지 않는다"의 확률은 쉽게 로 구할수 있다. 이제 을 번의 공선택과정에 째 색갈의 공이 적어도 한번 선택된 경우 1, 그렇지 않은 경우에 0이라고 하자. 이 들은 계수기의 역할을 수행하는데 째 색갈의 공이 선택되였는가 아닌가를 기록한다. 는 선택되였던 공의 색갈개수이므로 이다. 또한 이므로 . 따라서 .

실례로 일 때 이다.

이것은 주머니속에 6개의 서로 다른 색갈의 공이 들어있을 때 그중에서 반환하면서 6번 선택하였다면 평균 4가지 색갈의 공만이 선택될수 있다는것을 의미한다.

실례 3.4.5 우연량 에 대하여 의 수학적기대값과 분산을 구하시오.

풀기. 2항분포에 대한 수학적기대값과 분산은 2장에서 론의하였는데 그 계산과정은 비교적 복잡하다. 여기서는 다른 간단한 방법으로 그것을 구해보기로 하자. 는 서로 독립이며 모든 들이 2점분포 에 따른다고 하면 이고 이다. 이로부터



례를 들면 주사위를 72번 던질 때 6점이 나타나는 회수는 이며 평균회수는 이고 분산은 , 표준편차는 이다.

### 3.4.3 공분산

2차원동시분포에는 매 성분의 주변분포외에도 두 성분사이의 호상관계에 관한 정보도 포함되여있다. 이러한 호상관련정도를 설명하는 특징수가 바로 공분산이며 그 정의는 다음과 같다.

정의 3.4.1 2차원우연량 에 대하여 이 존재하면 이 수학적기대값을 와 의 **공분산** 또는 와 의 **상관(중심)모멘트**라고 하고 다음과 같이 표시한다.



특히 이다.

정의로부터 공분산은 의 편차 와 의 편차 의 적의 수학적기대값이다.

편차가 정이거나 부, 0일수 있기때문에 공분산에 대하여 다음과 같은 경우가 있다.

• 일 때 와 는 **정상관**이며 이 경우 두 편차 와 는 동시에 증가하거나 감소하는 경향이 있다. 와 는 모두 상수이므로 와 가 동시에 증가하거나 동시에 감소하며 이것이 바로 정상관의 의미이다.

• 일 때 와 는 **부상관**이라고 하는데 이때 가 증가하고 가 감소 또는 가 증가하고 가 감소하는 경향이 있으며 이것이 부상관의 의미이다.

• 일 때 와 는 **비상관**이라고 한다. 이것은 두가지 경우로부터 초래될수 있는데 하나는 와 의 값이 전혀 관련이 없는 경우이고 다른 하나는 와 사이에 일정한 비선형관계가 존재하는 경우이다 (실례 3.4.6을 참고하시오).

다음의 성질은 공분산계산에서 매우 쓸모있게 리용된다.

성질 3.4.4 .

증명. 공분산의 정의와 수학적기대값의 성질로부터



이제 다음과 같은 성질로 비상관이 독립성보다 더 약한 개념이라는것을 설명한다.

성질 3.4.5 우연량 와 가 독립이면 이지만 그 거꿀은 성립하지 않는다.

증명. 독립인 경우 이고 우의 성질 3.4.4로부터 공분산이 0임을 알수 있다. 그 거꿀이 성립하지 않는다는것은 다음의 반례를 보면 알수 있다.

실례3.4.6 우연량 이 있을 때 이라고 하면 와 는 독립이 아니다. 이때 와 의 공분산은 이다. 마지막 등식은 정규분포

의 홀수차 원점모멘트가 모두 0 즉 이기때문이다.

이 실례로부터 "독립성"은 "비상관성"으로 이어지지만 "비상관성"은 반드시 "독립성"으로 이어지는것은 아니라는것을 알수 있다(그림 3.4.1). 독립성에 대한 요구가 높은것은 독립성이 분포를 리

용하여 정의된것이기때문이며 비상관의 요구가 높지 않은것은 비상관은 단지 모멘트를 리용하여 정의한것이기때문이다. 이 두가지의 차이를 정확히 인식하여야 한다.

앞의 수학적기대값에 관한 성질 3.4.2에서 와 가 서로 독립일 때 이라고 하였는데 이제는 이 "독립성"조건을 "비상관성"조건으로 약화시킬수 있다.

비상관

그림 3.4.1 비상관과 독립의 론리적관계

공분산의 개념을 받아들임으로 하여 우연량합의 분산을 다음과 같이 계산할수 있다.

성질 3.4.6 임의의 2차원우연량 에 대하여



증명. 분산의 정의로부터



이 성질은 와 가 상관인 경우 합의 분산이 분산의 합과 같지 않다는것을 보여준다. 와 사이의 정상관은 합의 분산을 증가시키고 부상관은 합의 분산을 감소시키며 와 사이에 비상관인 경우에는 합의 분산은 분산의 합과 같다. 따라서 앞에서 언급한 분산의 성질 3.4.3을 다음과 같이 갱신할수 있다. 즉 와 가 비상관이면 .

우의 성질 3.4.6은 많은 개수의 우연량으로 일반화할수 있다. 즉 임의의 개의 우연량 에 대하여



공분산의 계산에 다음과 같은 네가지 성질을 리용할수 있다.

성질 3.4.7 공분산 의 계산은 의 순서와 관계가 없다. 즉 .

이것은 공분산의 정의로부터 직접 증명할수 있다.

성질 3.4.8 임의의 우연량 와 상수 의 공분산은 0이다. 즉 .

이것은 공분산의 정의로부터 계산하면 증명할수 있다.

성질 3.4.9 임의의 상수 에 대하여 .

증명. 공분산의 정의로부터 . 공통인수 를 뽑아내면 를 얻을수 있다.

성질 3.4.10 임의의 세 우연량 에 대하여 .

증명. 공분산의 성질 3.4.4로부터



실례3.4.7 2차원우연량 의 동시밀도함수가 다음과 같다.



이때 를 구하시오.

풀기. 공분산의 계산공식을 리용하는데 먼저 의 값을 계산해야 한다. 이것들은 직접 로부터 유도할수 있다. 그러나 적분구역을 정확히 확정하여야 한다. 구체적으로 다음과 같다.

그리하여 

이로부터 와 는 서로 독립이 아니라는 결론을 얻을수 있다.

실례3.4.8 2차원우연량 의 동시밀도함수가 다음과 같다.



이때 를 구하시오.

풀기.



이므로 먼저 를 각각 계산해야 한다. 이것을 위해서 먼저 두개의 주변밀도함수를 계산한다.



그리고 1차, 2차 모멘트를 계산한다.





이로부터 이다.

또한 를 계산해야 하는데 이것은 동시밀도함수로부터 얻는다.



그러므로 공분산은 이고 원래 식에 갈아넣으면

.

### 3.4.4 상관곁수

공분산 는 단위를 가지는 량이다. 례를 들어 로 사람의 키를 표시할 때 단위는 메터 (m)이며 로 몸무게를 표시할 때 단위는 키로그람 (kg), 이때 는 (mkg)을 단위로 가진다. 단위의 영향을 제거하기 위하여 공분산을 같은 단위의 량으로 나누면 상관곁수라는 새로운 개념이 나온다. 그 정의는 다음과 같다.

정의 3.4.2 2차원우연량 에 대하여 이라고 가정하면



을 와 의 **(선형)상관곁수**라고 한다.

우의 정의에서 알수 있는것처럼 상관곁수 와 공분산 는 부호가 같다. 따라서 상관곁수도 와 사이의 정상관관계, 부상관관계, 비상관관계를 반영할수 있다.

상관곁수에 대한 다른 설명은 그것이 해당한 표준화된 우연량들의 공분산이라는것이다. 와 의 수학적기대값을 각각 , 그 표준화된 우연량을 로 표시하면

.

실례 3.4.9 2차원정규분포 의 상관곁수는 이다.

풀기. 먼저 를 구한다.



먼저 웃식의 중괄호안의 식을 변환하면 .

변수변환 을 실시하면 

이로부터 을 얻는다.

웃식의 오른쪽에 있는 적분을 두 적분의 합으로 나눌수 있다. 그런데



이므로



상관곁수의 성질을 연구하기 위하여 다음과 같은 명제를 리용하여야 한다.

보조정리3.4.1(**슈와르쯔부등식**) 임의의 2차원우연량 에 대하여 와 의 분산이 모두 존재하고 이면

.

증명. 라고 해도 무방하다. 왜냐하면 일 때 는 거의 모든 곳에서 상수이고 따라서 와 의 공분산은 0이며 이로부터 식 (3.4.11)의 량변이 모두 0이므로 결론은 성립된다. 일 때 에 관한 다음과 같은 2차함수를 생각한다.

.

우의 2차식은 부수가 아니고 2차마디의 곁수 가 정이므로 그 판별식이 0보다 크지 않다. 즉 .

이것을 정돈하면 슈와르쯔부등식이 나온다.

슈와르쯔부등식을 리용하여 상관곁수의 중요한 성질을 얻을수 있다.

성질 3.4.11  또는 .

상관곁수가 일 때는 다른 성질이 있다.

성질 3.4.12 의 필요충분조건은 거의 모든 곳에서 와 사이에 선형관계가 존재하는것이다. 즉 이 성립하는 와 가 존재하는것이다. 여기서 일 때 이며 일 때 이다.

증명. 충분성을 증명하자. 만일 (도 마찬가지)이면 , 을 상관곁수의 정의에 대입하면



필요성을 증명하자.



이므로 일 때 이다. 이로부터  또는 이다.

이렇게 일 때 와 는 거의 모든 곳에서 선형정상관관계를 가진다는것을 증명할수 있다.

일 때 식 (3.4.12)로부터 , 이로부터  또는 이다.

이렇게 일 때 와 는 거의 모든 곳에서 선형부상관관계를 가진다는것을 증명할수 있다.

이 성질에 대하여 몇가지 다음과 같은 설명을 할수 있다.

• 상관곁수 는 와 사이의 선형관계의 세기를 나타내며 그렇기때문에 일반적으로 선형상관곁수라고 부른다.

• 이면 와 는 **비상관**이다. 비상관일 때 와 사이에 선형관계는 없지만 다른 함수관계 실례로 2차관계나 로그관계는 있을수 있다.

• 이면 와 는 **완전정상관,** 이면 와 는 **완전부상관**이라고 부른다.

• 이면 와 는 "일정한 정도"의 선형관계를 가진다. 이 1에 가까울수록 선형상관성이 더 높고 0에 가까울수록 선형상관성은 낮다. 공분산으로는 이것을 알수 없다. 공

분산이 매우 작고 두 표준편차 와 도 매우 작아도 그 비가 반드시 작은것은 아니다. 이것을 아래의 실례 3.4.10에서 본다.

실례3.4.10 우연벡토르 의 동시밀도함수가 다음과 같다.



이때 상관곁수 를 구하시오.

풀기. 먼저 두개의 주변밀도함수를 계산한다.

일 때 , 일 때 .

따라서 의 주변밀도함수는 다음과 같다.



일 때 , 일 때 이므로 의 주변밀도함수는 다음과 같다.





그림 3.4.2 실례 3.4.10에서 의 비령구역

다음으로 와 의 1차, 2차 모멘트를 계산한다.

,

.

이로부터 와 의 분산을 얻을수 있다.

.

또한 를 계산해야 하는데 이것은 동시밀도함수로부터 유도한다.



공분산과 상관곁수는 각각 다음과 같다.

.

.

여기서 공분산은 작지만 상관곁수는 작지 않다.

우의 례에서 상관곁수 를 보면 와 는 비교적 높은 정도의 정상관관계를 가진다. 그러나 대응한 공분산 를 볼 때 와 사이의 상관성은 거의 무시해도 될 정도로 약하다. 이런 오판단은 표준편차가 고려되지 않았기때문에 생기는데 공분산이 작더라도 두 표준편차가 모두 작다면 상관곁수는 어느 정도 상관성을 나타낼수 있다. 이로부터 공분산의 기초우에서 가공하여 얻어진 상관곁수는 더 중요한 상관성의 특징수이다.

일반적으로 독립성으로부터 비상관성이 얻어지지만 비상관성으로부터 독립성을 유도할수 없다. 그러나 례외도 있는데 그것은 다음과 같은 성질에 의하여 설명된다.

성질 3.4.13 2차원정규분포 에 대하여 비상관성과 독립성은 동등하다.

증명. 우의 실례 3.4.9로부터 2차원정규분포 의 상관곁수는 이므로 과 독립성이 동등하다는것을 증명하면 된다. 2차원정규분포 의 두 주변분포가 과 이므로 동시밀도함수를 , 주변밀도함수를 로 표시한다.

일 때 정규밀도함수의 표시식으로부터 . 즉 와 는 서로 독립이다.

반대로 와 가 서로 독립이면 와 는 비상관이며 따라서 이다.

실례 3.4.11(투자의 위험) 일정한 자금이 축적되여있는데 총액을 1로 표시하자. 이제 두 종류의 증권 A, B에 투자하려고 한다. 만일 만한 자금을 증권 A에 투자하고 나머지 를 증권 B에 투자한다면 은 하나의 투자조합을 형성하게 된다. 를 증권 A에 대한 투자수익률, 를 증권 B에 대한 투자수익률로 표시하면 그것들은 모두 우연량이다. 와 의 평균을 각각 로, 분산을 각각 로, 와 사이의 상관곁수를 로 표시한다면 이 투자조합의 평균수익과 위험(분산)을 구하시오. 또한 위험을 가장 적게 하는 를 구하시오.

풀기. 투자조합의 수익은 이다.

따라서 평균수익은 이고 위험(분산)은 다음과 같다.



이제 최소의 위험을 구하자. 즉 에 관한 의 최소점을 구하자.

이를 위하여 라고 놓으면 를 얻을수 있다. 이것은 과 무관계하고 에서 의 곁수가 정수이므로 우의 는 투자조합이 최소로 되게 하는 값이다.

례를 들어 이면 이다.

이것은 전체 자금의 70%를 증권 A에 투자하고 30%를 증권 B에 투자하는 조합이 가장 위험하지 않다는것을 설명하여준다.

### 3.4.5 우연벡토르의 수학적기대벡토르와 공분산행렬

다음은 차원우연량의 수학적기대값과 분산을 행렬형태로 표시하여보자.

정의 3.4.3 차원우연벡토르 에서 매 성분의 수학적기대값이 존재하면 을 차원우연벡토르 의 **수학적기대벡토르**, 간단히 의 **수학적기대값**이라고 부른다. 또한



을 그 우연벡토르의 **분산-공분산행렬**, 간단히 **공분산행렬**이라고 부르고 로 표시한다.

이로부터 차원우연벡토르의 수학적기대값은 매 성분의 수학적기대값으로 구성된 벡토르이며 그 분산은 매 성분의 분산과 공분산으로 구성된 행렬로서 대각선원소들이 분산이고 비대각선원소들이 공분산이라는것을 알수 있다.

공분산행렬의 중요한 성질은 다음과 같다.

정리 3.4.2 차원우연벡토르의 공분산행렬 는 대칭이고 비부인 정값행렬이다.

증명. 이므로 대칭성은 분명하다. 정의 반정값성을 증명하자. 임의의 차원벡토르 에 대하여



그러므로 행렬 는 정의 반정값행렬이다.

실례 3.4.12(차원정규분포) 차원우연량 의 공분산행렬 가 정의 정값행렬, 수학적기대값벡토르는 라고 하고 로 표시하면 다음의 밀도함수



로 정의되는 분포를 차원정규분포라고 부르고 로 표시한다. 여기서 는 의 행렬식, 은 의 거꿀행렬, 는 의 전위를 나타낸다.

이제 로 표시하면 식 (3.4.13)은



로 쓸수 있다.

일 때 수학적기대값벡토르와 공분산행렬은 각각 다음과 같다.



식 (3.4.13)에 대입하면 식 (3.1.8)로 주어지는 2차원정규밀도함수를 얻을수 있다.

차원정규분포는 아주 중요한 다차원분포로서 확률론과 수리통계, 우연과정론에서 중요한 위치를 차지한다.

련습문제 3.4

1. 한개의 주사위를 2번 던질 때 최소점수를 로 표시한다면 를 구하시오.

2. 주사위를 번 던질 때 출현하는 점수들의 합에 대한 수학적기대값과 분산을 구하시오.

3. 수자 0, 1, …, 가운데서 임의로 두개의 서로 다른 수자를 선택할 때 이 두 수자들의 절대차에 대한 수학적기대값을 구하시오.

4. 구간 (0, 1)우에서 임의로 개의 점을 선택할 때 거리가 제일 큰 두 점사이거리의 수학적기대값을 구하시오.

5. 통안에 개의 서로 다른 공이 있고 그 공들에 수자 1, 2, …, 이 매겨져 있다. 매번 우연적으로 한개를 뽑고 그 번호를 기록한 다음 다시 통에 넣는다. 이렇게 계속 뽑아서 서로 다른 수자가 나타날 때까지 뽑는다면 평균 몇번 뽑아야 하는가를 구하시오.

6. 우연량 의 동시분포렬이 다음과 같다.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | |
| 0 | 1 |
| 0 | 0.1 | 0.15 |
| 1 | 0.25 | 0.2 |
| 2 | 0.15 | 0.15 |

이때 의 수학적기대값을 구하시오.

7. 우연량 이 점 (0, 1), (1, 0), (1, 1)을 정점으로 하는 3각형우의 평등분포에 따를 때 와 를 구하시오.

8. 를 (0, 1)우에서 독립인 평등분포우연량이라고 할 때 다음을 증명하시오.

.

9. 와 가 독립동일분포하는 우연량이고 일 때 를 증명하시오.

10. 우연량 와 가 독립동일분포하고 일 때 를 구하시오.

11. 우연량 의 동시밀도함수가 다음과 같다.



이때 를 구하시오.

12. 가 독립동일분포하는 우연량이고 공동의 밀도함수가 다음과 같다.



이때 의 밀도함수, 수학적기대값, 분산을 구하시오.

13. 체계가 개의 부속품으로 구성되여 있다. 가 째 부속품이 련속 동작할수 있는 시간이라고 표시하자. 가 독립동일분포하고 일 때 다음과 같은 경우 체계가 련속 작업할수 있는 평균시간을 구하시오.

① 부속품 하나가 동작을 정지하면 체계는 작업할수 없다.

② 적어도 하나의 부속품이 동작하면 체계가 작업한다.

14. 가 독립동일분포하고 모두 표준정규분포 에 따른다고 할 때 를 구하시오.

15. 우연량 는 서로 독립이며 모두 우의 평등분포에 따른다. , 라고 할 때 를 구하시오.

16. 우연량 가 (-2, 2)우의 평등분포에 따르고 와 를 다음과 같이 정의한다.



이때 를 구하시오.

17. 어떤 상품을 판매하는 상점에서 매주의 재고량 와 그 상품에 대한 수요량 는 서로 독립인 우연량이며 모두 구간 (10, 20)우의 평등분포에 따른다. 상점은 상품 한개를 팔 때마다 1000원의 리윤을 얻으며 만일 수요량이 재고량을 초과할 경우에는 다른 상점에서 먼저 조절할수 있는데 이때 상품의 개당 리윤은 500원이다. 상점에서 이 상품을 판매한다고 할 때 매주의 평균리윤을 구하시오.

18. 우연량 와 가 독립이고 모두 정규분포 에 따른다고 할 때 를 구하시오.

19. 우연량 의 동시분포렬이 다음과 같다.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  | | |
| -1 | 0 | 1 |
| 0 | 0.07 | 0.18 | 0.15 |
| 1 | 0.08 | 0.32 | 0.20 |

이때 와 의 공분산을 구하시오.

20. 주사위를 번 독립적으로 던질 때 1점이 나타나는 회수와 6점이 나타나는 회수의 공분산과 상관곁수를 구하시오.

21. 주사위를 두번 던져 관측한 점수들의 합과 차사이의 공분산을 구하시오.

22. 어떤 상자에 100개의 제품을 포장하는데 그중 1, 2, 3등급은 각각 80, 10, 10개이다. 그가운데서 임의로 하나를 뽑을 때 두개의 우연량 ()를 등급의 제품을 뽑으면 1, 그렇지 않으면 0이라고 정의한다. 우연량 과 의 상관곁수 를 구하시오.

23. 동전을 번 반복적으로 던졌을 때 앞면이 우에 올라온 회수와 뒤면이 우로 올라온 회수를 각각 와 로 표시한다. 와 의 공분산과 상관곁수를 구하시오.

24. 우연량 와 가 독립동일분포하며 모두 파라메터가 인 뽜쏭분포에 따른다. 라고 할 때 와 의 상관곁수 을 구하시오.

25. 명이 참가한 생일축하연에 매 사람이 선물을 가져왔는데 모두 서로 다르다고 가정하자. 매 사람이 함께 무져놓은 개의 선물가운데서 우연적으로 하나를 뽑는다. 자기가 가져온 선물을 뽑은 사람 수 의 평균값과 분산을 구하시오.

26. 우연량 와 의 수학적기대값을 각각 -2, 2, 분산을 각각 1, 4, 상관곁수를 -0.5 라고 하자. 체븨쉐브부등식을 리용하여 의 상한을 추정하시오.

27. 2차원우연량 의 동시밀도함수가 다음과 같다.



이때 를 구하시오.

28. 2차원우연량 의 동시밀도함수가 다음과 같다.



이때 와 의 상관곁수를 구하시오.

29. 우연량 와 의 상관곁수가 일 때 와 의 상관곁수를 구하시오. 여기서 는 모두 0이 아닌 정의 상수이다.

30. 우연량 와 이 독립동일분포하고 그 공동분포가 일 때 과 의 상관곁수를 구하시오.

31. 우연량 와 이 독립동일분포하고 그 공동분포가 일 때 과 의 상관곁수를 구하시오. 여기서 는 비령인 상수이다.

32. 2 차원우연량 가 2 차원정규분포 에 따를 때 다음을 구하시오.

① .

② 와 의 공분산과 상관곁수.

33. 2차원우연량 가 구역 에서의 평등분포에 따를 때 와 의 공분산과 상관곁수를 구하시오.

34. 2차원우연량 의 동시밀도함수가 다음과 같다.



이때 와 의 공분산과 상관곁수를 구하시오.

35. 2차원우연량 가 4각형 우에서 평등분포에 따른다고 하자. 이제 라고 놓을 때 와 의 상관곁수를 구하시오.

36. 2차원우연량 의 동시밀도함수가 다음과 같을 때 의 공분산행렬을 구하시오.

① 

② 

37. 를 구간 (0, 1)우의 한 고정점, 우연량 를 구간 (0, 1)우에서 평등분포에 따른다고 하고 점 로부터 까지의 거리를 로 표시한다. 가 어떤 값을 가질 때 와 가 비상관인가를 구하시오.

38. 우연벡토르 에 대하여 다음의 조건이 만족된다고 하자.



여기서 가 모두 상수라면 상관곁수 을 구하시오.

39. 우연량 와 가 모두 두개의 값만 취할수 있다고 하면 와 의 독립성과 비상관성은 동등하다는것을 증명하시오.

40. 우연량 가 구간 (-0.5, 0.5)에서의 평등분포에 따르고 라고 하면 와 는 함수관계에 있다. 를 구하시오.

41. 2차원우연량 가 단위원안에서의 평등분포에 따르고 그 동시밀도함수는 다음과 같다.



이때 와 가 독립은 아니지만 비상관이라는것을 증명하시오.

42. 우연벡토르 의 상관곁수를 각각 이라고 할 때 이라는것을 증명하시오.

43. 우연벡토르 의 상관곁수를 각각 이라고 하고 , 일 때 라고 하면 이 둘씩 서로 비상관일 필요충분조건은 이라는것을 증명하시오.

44. 이고 가 각각 0.5의 확률로 을 취하며 와 는 서로 독립이라고 가정한다. 일 때 다음을 증명하시오.

① .

② 는 와 비상관이지만 독립은 아니다.

45. 우연량 가 짝함수인 밀도함수 를 가지고 라고 하면 와 은 비상관이지만 독립은 아니라는것을 증명하시오.

46. 2차원우연벡토르 가 2차원정규분포에 따르고 이면 임의의 정의 상수 에 대하여 이라는것을 증명하시오.

47. 우연벡토르 에 대하여 이 만족되면 이라는것을 증명하시오.

48. 우연량 의 임의의 둘사이의 상관곁수가 모두 일 때 을 증명하시오.

49. 가 독립동일분포하며 정수값을 가지는 우연량이라고 할 때 을 증명하시오.

## 3.5 조건부분포와 조건부기대값

2차원우연량 사이의 관계는 주로 독립성과 의존성으로 표현된다. 많은 문제들에서 우연량들의 값은 보통 서로 영향을 미치기때문에 조건부분포를 변수들사이의 의존관계를 연구하는 중요한 수단으로서 론의하게 된다.

### 3.5.1 조건부분포

2차원우연량 에 대하여 우연량 의 조건부분포라는것은 가 어떤 값을 취한 조건밑에서 의 분포이다. 례하면 가 몸무게, 가 키라고 하면 와 사이에는 일반적으로 서로 의존관계가 있다. 이제 (m)로 고정할 때 몸무게 의 분포는 의 무조건부분포(키제한이 없는 몸무게의 분포)와는 분명히 큰 차이가 있다. 이 절에서는 조건부분포의 정의를 제시하고 그 기초우에서 조건부기대값의 개념을 제시한다.

1. 리산우연량의 조건부분포

2차원리산우연량 의 동시분포렬이 이라고 하자. 이때 조건부확률의 정의에 따라 리산우연량의 조건부분포렬을 다음과 같이 줄수 있다.

정의 3.5.1 이 만족되는 모든 에 대하여



을 가 주어진 조건하에서 의 조건부분포렬이라고 말한다.

마찬가지로 이 만족되는 모든 에 대하여



을 가 주어진 조건하에서 의 조건부분포렬이라고 말한다.

조건부분포렬이 있으면 리산우연량의 조건부분포함수를 구할수 있다.

정의 3.5.2 가 주어진 조건하에서 의 조건부분포함수는 다음과 같다.



가 주어진 조건하에서 의 조건부분포함수는 다음과 같다.



실례3.5.1 2차원리산우연량 의 동시분포렬이 다음과 같다.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  | | |  |
| 1 | 2 | 3 |
| 0 | 0.1 | 0.3 | 0.2 | 0.6 |
| 1 | 0.2 | 0.05 | 0.15 | 0.4 |
|  | 0.3 | 0.35 | 0.35 | 1.0 |

이기때문에 첫 행의 모든 원소를 0.6으로 나누면 이 주어진 조건하에서 의 조건부분포렬을 얻을수 있다.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | 1 | 2 | 3 |
|  | 1/6 | 1/2 | 1/3 |

두번째 행의 모든 원소를 0.4로 나누면 이 주어진 조건하에서 의 조건부분포렬을 얻을수 있다.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | 1 | 2 | 3 |
|  | 1/2 | 1/8 | 3/8 |

첫번째 렬의 모든 원소를 0.3으로 나누면 이 주어진 조건하에서 의 조건부분포렬을 얻을수 있다.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | 1 | 2 |
|  | 1/3 | 2/3 |

두번째 렬의 모든 원소를 0.35로 나누면 이 주어진 조건하에서 의 조건부분포렬을 얻을수 있다.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | 1 | 2 |
|  | 6/7 | 1/7 |

세번째 렬의 모든 원소를 0.35로 나누면 이 주어진 조건하에서 의 조건부분포렬을 얻을수 있다.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | 1 | 2 |
|  | 4/7 | 3/7 |

이 실례로부터 2차원동시분포렬은 하나이지만 조건부분포렬은 5개라는것을 알수 있다. 와 가 취할수 있는 값이 많을수록 조건부분포도 더 많아진다. 매 조건부분포는 한 측면에서 특정한 상태의 분포를 설명한다. 이로부터 조건부분포의 내용이 풍부하고 그 응용범위도 더 넓다는것을 알수 있다.

실례3.5.2 우연량 와 가 서로 독립이고 고 하자. 이 주어진 조건하에서 의 조건부분포를 구하시오.

풀기. 독립인 뽜쏭변수의 합은 여전히 뽜쏭변수 즉 이므로



즉 의 조건하에서 는 2항분포 에 따르는데 그중 이다.

실례3.5.3 일정한 시간동안 어떤 상점에 드나드는 손님의 수 는 뽜쏭분포 에 따르고 매 손님이 물건을 구매할 확률은 이며 그들이 물건구매를 하는가 마는가는 서로 독립이다. 이 상점에 들어와서 물건을 구입하는 손님수 의 분포렬을 구하시오.

풀기. 문제로부터 이라는것을 알수 있다. 상점에 들어가는 인원수 인 조건하에서 물건을 구매하는 손님수 의 조건부분포는 2항분포 이다. 즉

.

완전확률공식으로부터



즉 는 파라메터가 인 뽜쏭분포에 따른다.

이 실례는 의 분포를 직접 구하기 어려울 때 조건부분포를 리용하여 쉽게 구할수도 있다는것을 보여주고있다.

2. 련속우연량의 조건부분포

2차원련속우연량 의 동시밀도함수를 , 주변밀도함수를 라고 하자.

리산우연량의 경우 조건부분포함수는 이다. 그러나 련속우연량이 어떤 값을 취할 확률은 0 즉 이므로 조건부확률로 를 직접 계산할수 없다. 자연스러운 해결방도는 를 일 때 의 극한으로 보는것이다. 즉



에서 가 련속일 때 적분중값정리로부터 .

그래서 .

왼변은 바로 인 조건하에서 의 조건부분포함수로서 로 표시할수 있다. 그리고 밀도함수의 정의로부터 오른변은 인 조건하에서 의 조건부밀도함수라는것을 알수 있으며 로 표시할수 있다. 이로부터 련속우연량의 조건부분포함수와 조건밀도함수는 다음과 같이 정의할수 있다.

정의 3.5.3 을 만족하는 모든 에 대하여 가 주어진 조건하에서 의 조건부분포함수와 조건부밀도함수는 각각 다음과 같다.

.

.

마찬가지로 인 모든 에 대하여 가 주어진 조건하에서 의 조건부분포함수와 조건부밀도함수는 각각 다음과 같다.

.

.

조건부분포함수 와 조건부밀도함수 는 모두 조건 의 함수이며 서로 다른 조건(실례로 과 )밑에서 그 분포함수 와 는 같지 않으며 조건부밀도함수 와 도 같지 않다. 이로부터 조건부분포(밀도)함수 ()는 분포(밀도)함수족을 나타낸다는것을 알수 있다. 와 에 대하여서도 비슷한 리해를 가질수 있다. 아래의 실례에서 구체적으로 알아볼수 있다.

실례 3.5.4 가 2차원정규분포 에 따른다고 할 때 그 주변분포로부터 는 정규분포 에, 는 에 따른다는것을 알수 있다. 이제 조건부분포를 구하면 식 (3.5.6)에 의하여



이것은 정규밀도함수로서 그 평균 , 분산 은 각각 다음과 같다.

.

마찬가지로 가 주어졌을 때 의 조건부분포는 역시 정규분포 에 따르며 그 평균과 분산은 각각 다음과 같다.

.

이로부터 2차원정규분포의 주변분포와 조건부분포는 모두 1차원정규분포이라는것을 알수 있다. 이것은 정규분포의 한가지 중요한 성질이다.

실례 3.5.5 2차원우연량 가 우의 평등분포에 따른다고 할 때 가 주어진 조건하에서 의 조건부밀도함수 를 구하시오.

풀기. 이므로 의 주변밀도함수는 

따라서 일 때



과 를 각각 웃식에 대입하면 2개의 평등분포를 얻을수 있다.



더 나아가서 일 때 의 조건하에서 는 우의 평등분포에 따른다. 마찬가지로 일 때 의 조건하에서 는 우의 평등분포에 따른다.

3. 련속인 경우의 완전확률공식과 베이스공식

조건부분포밀도함수의 개념을 리용하여 련속우연량의 경우에 완전확률공식과 베이스공식을 얻을수 있다. 식 (3.5.6)과 식 (3.5.8)을 다음과 같이 쓸수 있다.

.

.

다시 에 대하여 주변밀도함수를 구하면 완전확률공식의 밀도함수형식을 얻을수 있다.

.

.

식 (3.5.9)을 식 (3.5.6)의 분자에, 식 (3.5.11)을 식 (3.5.6)의 분모에 대입하면 베이스공식의 밀도함수형식이 얻어진다.

.

.

비록 주변분포로는 동시분포를 얻을수 없지만 식 (3.5.9)과 (3.5.10)은 주변분포와 조건부분포로 동시분포를 얻을수 있다는것을 보여준다.

실례 3.5.6 우연량 이고 인 조건에서 의 조건부분포는 이다. 의 (무조건)밀도함수 를 구하시오.

풀기. 문제로부터 , 임을 알수 있다.

그러므로 식 (3.5.11)으로부터



라고 표시하면 웃식을 다음과 같이 변환할수 있다.



이것은 가 여전히 정규분포 에 따른다는것을 의미한다.

### 3.5.2 조건부수학적기대값

조건부분포의 수학적기대값을 조건수학적기대값이라고 하는데 그 정의는 다음과 같다.

정의 3.5.4 조건부분포의 수학적기대값(존재하는 경우)을 **조건부기대값**이라고 하며 그 정의는 다음과 같다.





주의하여둘것은 조건부기대값 는 의 함수로서 무조건부기대값 와 구별되는것은 계산공식뿐아니라 그 의미도 다르다. 실례로 가 어떤 나라 성인들의 키를 나타낸다면 는 평균키를 나타낸다. 가 그 나라 성인들의 발크기를 나타낸다면 는 발크기가 인 그 나라 성인들의 평균키를 나타낸다. 만일 어떤 연구를 통하여 이라는 사실을 안다고 하면 이것을 범죄수사에 적용할수도 있다. 즉 범인이 남긴 발크기가 25.3cm라면 그의 키가 대략 174cm라고 추산할수 있다.

일반적으로 사람의 키와 발크기 는 2차원정규변수로, 즉 가 2차원정규분포 에 따른다고 보고 처리할수 있다. 실례3.5.4로부터 의 조건하에서 는 1차원정규분포 에 따른다는것을 알수 있다. 이로부터 을 얻을수 있다. 이것은 의 1차함수이다. 다시 통계적방법(6장의 내용)을 리용하여 대량의 실제자료로부터 의 추정값을 얻으면 우의 공식을 얻을수 있다.

조건부기대값은 조건부분포의 수학적기대값이기때문에 수학적기대값의 모든 성질을 가진다. 실례로 . 다른 성질들은 여기서 구체적으로 취급하지 않는다.

여기서 특별히 강조하여둘것은 는 의 함수이며 값이 변하는데 따라 조건부기대값 의 값도 변한다는것이다. 그러므로 로 표시할수 있다.

더 나아가서 조건부기대값을 우연량 의 함수로 볼수 있기때문에 로 표시하고 를 일 때 의 값으로 볼수 있으며 따라서 자체가 우연량이라는것을 알수 있다.

를 도입하면 앞에서 정의한 를 통일적으로 처리할수 있을뿐만 아니라 더 심도있는 결과를 얻을수 있다.

정리 3.5.1(재기대값공식, Law of total expectation, law of iterated expectations, 重期望公式) 가 2차원우연량이고 가 존재한다고 가정하면



증명. 여기서는 련속인 경우에만 증명하지만 라산인 경우에도 비슷하게 증명할수 있다. 2차원련속우연량 의 동시밀도함수가 라고 하자. 라고 할 때 이다. 를 리용하면

.

여기서 중괄호안의 적분은 바로 조건부기대값 이다.

따라서 식 (3.5.17)이 증명된다.

재기대값공식은 실천에서 매우 쓸모있는 확률론의 중요한 결론이다. 례컨대 값범위가 큰 지표 의 평균값 를 구할 때 계산에서 여러가지 문제에 부닥치게 된다. 이때 사고를 바꾸어 와 관계되는 량 를 찾고 가 취하는 값에 따라 큰 범위를 몇개의 작은 구역으로 나누며 그 우에서 의 평균을 구한 다음 이런 평균에 대해 무게평균을 구하면 큰 범위에서의 의 평균 를 구할수 있다. 학교 전체 학생들의 평균키를 구하려고 할 때 먼저 매 학급 학생들의 평균키를 구한 다음 다시 그 평균키에 대한 무게평균을 구하는데 이때 무게곁수는 매 학급의 인원수가 전체 학생들가운데서 차지하는 비률이다.

재기대값공식의 리용은 구체적으로 다음과 같다.

① 가 리산우연량이면 식 (3.5.17)은 다음과 같다.

.

② 가 련속우연량이면 식 (3.5.17)은 다음과 같다.



실례 3.5.7 광부 한명이 3개의 출구가 있는 갱에 갇혔다. 첫번째 출구를 따라 3시간 걸으면 안전구역에 도달할수 있고 두번째 출구를 따라 5시간 걸으면 다시 원래 자리로 돌아온다. 세번째 출구를 따라 7시간 걸으면 원래의 위치로 돌아온다. 광부가 같은 확률로 세개의 출구가운데 하나를 선택한다고 가정하면 안전구역에 도달하는데 평균 몇시간이 걸리겠는가?

풀기. 광부가 안전구역에 도달하는데 시간 걸린다고 하면 는 3, 5 + 3, 7 + 5 + 5 + 3, 7 + 5 + 3, 7 + 7 + 3, …과 같은 값들을 취할수 있다.

의 분포렬을 구하는것은 어려우므로 를 직접 구할수는 없다. 이 경우 처음 선택한 출구를 로 표시하면 문제의 설정으로부터 이다.

첫번째 출구를 선택하면 3시간만에 안전구역에 도달할수 있으므로 이다.

또한 두번째 출구를 선택하면 5시간후에 원래 장소로 돌아오기때문에 , 세번째 출구를 선택하면 7시간후 원래 자리로 돌아오기때문에 이다.

이로부터 식 (3.5.18)로부터 이다. 결국 이며 광부가 안전구역에 도달하는데 평균 15시간이 걸린다.

웃실례의 풀이방법은 일정한 보편성을 띠고있는데 다음 실례에서 이 방법을 다시 리용하게 된다.

실례3.5.8 주머니에 번호가 1, 2, …, 인 개의 공이 있고 그가운데서 임의로 한개를 선택한다. 1번 공을 뽑으면 1점을 가지고 공선택을 정지한다. 만일 번 공을 선택하면 점을 가지고 이 공을 다시 주머니에 넣은후 다시 공을 선택한다. 이렇게 계속할 때 얻은 평균총점수를 구하시오.

풀기. 얻은 총점수를 로, 처음 선택한 공의 번호를 로 표시하면

.

또한 이므로 일 때 이다. 따라서 이고 이다.

실례 3.5.9 배전소가 어떤 공장에 매달 공급할수 있는 전력 는 (10, 30)(단위:100kW)우의 평등분포에 따르고 그 공장이 매달 필요한 전력 는 (10, 20)(단위:100kW) 우의 평등분포에 따른다고 하자. 공장이 충분한 전력을 공급받으면 100kW당 30만원의 리득을 얻고 그렇지 못하면 다른 방법으로 전력을 해결하는데 이때 100kW당 10만원의 리득을 얻는다. 이 공장의 매달 평균리득을 구하시오.

풀기. 월별 전력공급량은 이고 실제 전력수요량은 이다. 만일 공장의 매달 리득 만원이라면 다음과 같은 식이 성립한다는것을 알수 있다.



가 주어진 조건에서 는 의 함수이며 따라서 일 때 의 조건부기대값은 다음과 같다.



일 때 의 조건부기대값은 이다.

다음 의 분포를 리용하여 조건부기대값 에 대하여 다시 한번 평균을 구한다. 즉



그리하여 공장의 월평균리득은 433만원에 달한다.

실례3.5.10(우연량의 수학적기대값) 을 독립동일분포하는 우연량, 정의 옹근수만을 취하는 우연량 과 이 서로 독립이라고 할 때 이라는것을 증명하시오.

증명. 정리 3.5.1로부터



이 문제의 결론을 리용하여 많은 실천문제들을 풀수 있는데 아래에 몇가지 실례를 주었다.

① 하루동안 어떤 상점에 오는 손님수 은 비부인 정의 옹근수만을 취하는 우연량으로써 이라고 하자. 또한 상점에 온 번째 손님의 구매액을 로 표시하면 들은 독립동일분포하는 우연량이라고 볼수 있으며 (원)이라고 하자. 과 가 서로 독립이라고 가정할 때 이 상점의 하루평균판매액은 (만원)이다.

② 한마리의 곤충이 한번에 낳는 알수 은 파라메터가 인 뽜쏭분포에 따르며 매 알의 생존 확률은 이고 는 0-1분포에 따른다고 하자. 로서 째 알이 생존하였다는것을 나타낸다면 한마리의 곤충이 한번 배란한 후의 평균생존알수는 이다.

련습문제 3.5

① 어떤 병원에서 하루동안 태여나는 애기의 수를 로, 그가운데서 남자애의 수를 로 표시할 때 와 의 동시분포렬이 다음과 같다고 하자.

.

조건부분포렬 를 구하시오.

2. 어떤 사수가 한발에 목표를 명중시킬 확률은 이며 목표를 두번 명중시킬 때까지 사격한다. 를 처음 명중시킬 때까지 필요한 사격수로, 를 총 사격수로 표시하면 의 동시분포와 조건부분포를 구하시오.

3. 의 동시분포렬이 다음과 같다.

.

이때

① ()의 조건에서 의 조건부분포렬을 구하시오.

② 와 는 독립인가?

4. 우연량 와 가 독립동일분포할 때 다음과 같은 경우 를 구하시오.

① 와 는 모두 파라메터가 인 기하분포에 따른다.

② 와 는 모두 파라메터가 인 2항분포에 따른다.

5. 2차원련속우연량 의 동시밀도함수가 다음과 같다.



이때 조건부밀도함수 를 구하시오.

6. 2차원련속우연량 의 동시밀도함수가 다음과 같다.



이때 조건부밀도함수 를 구하시오.

7. 2차원련속우연량 의 동시밀도함수가 다음과 같다.



이때 조건부확률 를 구하시오.

8. 우연량 의 밀도함수가 다음과 같다.



또한 의 조건밑에서 우연량 의 조건부밀도함수는 다음과 같다.



이때 확률 를 구하시오.

9. 우연량 는 (1, 2)우의 평등분포에 따르고 의 조건밑에서 우연량 의 조건부분포는 파라메터가 인 지수분포이라고 하자. 이때 는 파라메터가 1인 지수분포에 따른다는것을 증명하시오.

10. 2차원리산우연량 의 동시분포렬이 다음과 같다.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  | | | |
| 0 | 1 | 2 | 3 |
| 0 | 0 | 0.01 | 0.01 | 0.01 |
| 1 | 0.01 | 0.02 | 0.03 | 0.02 |
| 2 | 0.03 | 0.04 | 0.05 | 0.04 |
| 3 | 0.05 | 0.05 | 0.05 | 0.06 |
| 4 | 0.07 | 0.06 | 0.05 | 0.06 |
| 5 | 0.09 | 0.08 | 0.06 | 0.05 |

이때 와 를 구하시오.

11. 우연량 와 가 서로 독립이고 각각 파라메터가 , 인 뽜쏭분포에 따를 때 을 구하시오.

12. 2차원련속우연량 의 동시밀도함수가 다음과 같다.



이때 를 구하시오.

13. 2차원련속우연량 의 동시밀도함수가 다음과 같다.



일 때 를 구하시오.

14. 가 존재한다고 할 때 이라는것을 증명하시오.

15. 필요한 수학적기대값들이 모두 존재한다고 가정하고 아래의 식들을 증명하시오.

① 

② 

③ 

16. 우연량 와 가 독립동일분포하고 모두 파라메터가 인 지수분포에 따른다고 하자.

라고 할 때 를 구하시오.

17. 두 우연량 이 서로 독립이고 라고 할 때 의 분포가 무엇인가를 고려하면서 다음을 증명하시오.

① 

② 

③ 

18. 가 독립동일분포하는 우연량렬이고 또 분산이 존재한다고 하자. 우연량 이 정의 옹근수만을 취하고 이 존재하며 과 이 독립일 때 다음을 증명하시오.

.

# 제4장 큰수의 법칙과 중심극한정리

## 4.1 우연량렬의 두가지 수렴성

우연량렬의 수렴성에는 여러가지가 있는데 흔히 리용하는것은 확률수렴과 분포수렴이다. 이 장에서 론의하는 큰수의 법칙은 확률수렴과, 중심극한정리는 분포수렴과 관련된다. 이런 극한정리는 확률론에서 중심적인 연구대상일뿐만아니라 수리통계에서도 널리 응용되고있다. 이 절에서는 이러한 두가지 수렴성의 정의와 성질을 제시하는데 이것들로부터 사고방식을 장악하여야 한다.

### 4.1.1 확률수렴

1장에서 잦음률를 리용하여 확률을 결정할 때 "확률은 잦음률의 안정값이다" 또는 "잦음률은 확률로 안정되여간다"라고 하였다. 이제 "안정"의 의미와 그 수학적표시식을 설명해보자.

많은 제품이 있는데 그 불합격률은 라고 하자. 이제 제품이 합격인가를 하나하나씩 검사하여 처음 번의 검사에서 개 불합격품이 발견되였다고 하면 은 불합격품이 출현하는 잦음률이다. 이렇게 검사를 계속해나가면 잦음률의 렬 에 대하여 다음과 같은 두가지 현상을 발견할수 있다.

① 잦음률 의 확률 에 대한 절대편차 은 의 증가에 따라 점차 감소하는 경향이 있지만 0으로 수렴한다고 말할수는 없다.

② 잦음률의 우연성때문에 절대편차 가 커졌다 작아졌다 한다. 비록 큰 편차가 발생할 가능성을 배제할수는 없지만 이 부단히 커짐에 따라 큰 편차가 발생할 가능성은 점점 작아진다. 이것은 새로운 극한개념이다.

아래에서 우의 개념들을 식으로 표현해보자. 임의의 에 대하여 사건 이 발생한다는것은 큰 편차가 발생한다는것을 의미하며 큰 편차가 발생하는 가능성이 점점 작아진다는것은 에 해당한다. 이때 잦음률의 렬 이 확률수렴한다고 말한다. 이것이 바로 "잦음률이 확률로 안정되여간다"의 의미이다.

아래에서 일반적인 우연량렬 이 어떤 우연량 로 확률수렴한다는것에 대한 정의를 주었다.

정의 4.1.1 를 우연량렬이라고 하고 를 어떤 우연량이라고 하자. 만일 임의의 에 대하여



이면 가 로 **확률수렴**한다고 말하고 라고 표시한다.

확률수렴의 의미는 의 에 대한 절대편차가 임의의 주어진 값보다 작지 않을 가능성이 이 증가하는데 따라 점점 작아진다는것이다. 또는 절대편차 가 임의의 주어진 값보다 적을 가능성이 이 증가하는데 따라 1로 다가간다는것이다. 즉 식 (4.1.1)은 로 쓸수도 있다.

특히 가 퇴화분포 즉 이면 렬 은 로 확률수렴한다고 말하며 로 표시한다.

아래에서 먼저 상수로 확률수렴하는 4칙연산성질을 준다.

정리 4.1.1 은 우연량렬이고 는 상수이다. 이면 다음의 성질이 성립한다.

①  ②  ③ 

증명. ① 이므로



즉 .

이로부터 를 얻는다. 비슷하게 를 증명할수 있다.

② 몇단계로 나누어 증명한다.

i) 이면 이다. 왜냐하면 임의의 에 대하여 이기때문이다.

ⅱ)  이면 이다. 그것은 일 때 이기때문이다.

일 경우 결론은 명백하다.

ⅲ) 라면 이다. 그것은 다음과 같은 결론이 성립하기때문이다.



ⅳ) ⅲ)과 ①로부터 

따라서 

③ 먼저 을 증명한다. 그것은 임의의 에 대하여



이렇게 을 증명한 다음 와 결합하고 ②를 리용하면 를 증명할수 있다.

이 정리로부터 알수 있는것처럼 확률의 의미에서 우연량렬의 극한은 (즉 상수 로 확률수렴하는것) 4칙연산에 대하여 여전히 성립된다. 이것은 해석수학에서의 수렬극한과 류사하다. 이런 결론은 우연량 로 확률수렴하는데 대하여서도 성립한다(련습문제 2를 참고하시오).

### 4.1.2 분포수렴, 약수렴

앞에서 분포함수가 우연량의 통계적규칙성을 전면적으로 반영한다는것을 론의하였다. 그러므로 여기서는 분포함수렬 이 극한분포함수 로 수렴한다는것이 어떤 실천적의의가 있는가를 론의한다. 그러면 어떻게 의 수렴성을 정의하겠는가? 당연히 가 실변량함수렬이기때문에 모든 에 대하여 이 성립할것을 요구할수 있다. 그러나 다음의 실례는 이 요구가 너무 강한것이라는것을 보여준다.

실례4.1.1 우연량렬 은 퇴화분포 에 따른다. 그 분포함수는 다음과 같다.



우선 지적하여둘것은 점수렴하는 조건하에서 의 극한함수 는 오른쪽련속성을 만족하지 않는다는것 즉 가 분포함수가 아니라는것이다.

이것은 분포함수렬 에 대하여 하나의 극한분포함수로 점수렴할것을 요구하는것은 강한 조건이라는것을 말하여준다. 그러면 어떻게 점수렴의 이 강한 요구조건을 약화시키겠는가?

는 점 을 비약점으로 하고있기때문에 일 때 비약점의 위치는 0으로 다가가고 따라서 자연스럽게 가 의 퇴화함수 즉 로 수렴한다고 볼수 있다. 그러나 임의의 에 대하여 이지만 이다. 따라서 .

이 실례로부터 수렴관계가 성립되지 않는 점 이 바로 의 중단점이라는것을 알수 있으며 이러한 중단점들을 제거하고 련속점만을 고려할수 있다는것을 시사한다. 이것이 바로 아래에서 제시하는 분포함수렬의 약수렴에 대한 정의이다.

정의 4.1.2 우연량 의 분포함수는 각각 이다. 의 임의의 련속점 에 대하여



이면 는 로 **약수렴**한다고 하고 다음과 같이 표시한다.



또는 대응한 우연량렬 이 로 **분포수렴**한다고 하고 다음과 같이 표시한다.



약수렴이라는 개념은 모든 점에서 수렴해야 한다는 요구보다 약하기때문에 타당하다. 만일 가 직선우의 련속함수라면 약수렴은 곧 점수렴이다.

주의할것은 우의 정의에서 분포함수렬 이 약수렴한다고 부르고 우연량렬 은 분포수렴한다고 부르는것이다. 이 두가지는 본질상 같은 의미를 가지며 모두 의 련속점우에서 식 (4.1.2)이 성립할것을 요구한다.

아래의 정리는 확률수렴이 분포수렴보다 더 강한 수렴성이라는것을 설명한다.

정리 4.1.2 .

증명. 우연량 의 분포함수가 각각 이라고 하자. 을 증명하는것은 이므로 모든 에 대하여 다음 식이 성립한다는것을 증명하기만 하면 된다.



그것은 웃식이 성립되면 가 의 련속점일 때 이고 따라서 을 얻을수 있기때문이다. 식 (4.1.5)을 증명하기 위하여 라고 하면



따라서 이다.

로부터 을 얻고 따라서 .

라고 하면 .

마찬가지로 일 때 이고 라고 하면 .

이렇게 정리가 증명된다.

웃 정리의 거꿀명제는 성립되지 않는다. 즉 분포수렴성으로부터 확률수렴성을 얻을수 없다.

실례4.1.2 우연량 의 분포렬이 이라고 하자. 라고 놓으면 과 는 분포가 같다. 즉 같은 분포함수를 가지며 따라서 이다.

그러나 임의의 에 대하여 . 즉 은 로 확률수렴하지 않는다.

우의 실례는 일반적으로 분포수렴과 확률수렴은 동등하지 않다는것을 말해준다. 다음의 정리는 극한우연량이 상수(퇴화분포를 따른다)일 때 분포수렴과 확률수렴은 동등하다는것을 설명한다.

정리 4.1.3 가 상수이면 의 필요충분조건은 이다.

증명. 필요성은 정리 4.1.2에 의해 증명된다. 충분성을 보자. 의 분포함수를 로 표시하면 상수 의 분포함수(퇴화분포)가 이므로 임의의 에 대하여



또한 이 모두 의 련속점이고 이므로 일 때 이다. 이로부터 이며 이 증명된다.

련습문제 4.1

1. 이면 이라는것을 증명하시오.

2. 이 성립할 때 다음을 증명하시오.

① . ② .

3. 이고 가 직선우의 련속함수라면 를 증명하시오.

4. 라면 임의의 상수 에 대하여 라는것을 증명하시오.

5. 의 필요충분조건은 일 때 라는것을 증명하시오.

6. 를 퇴화분포 라고 할 때 다음 분포함수렬의 극한함수가 여전히 분포함수인가? 여기서 이다.

①  ② ③ 

7. 분포함수렬 가 련속인 분포함수 로 약수렴한다면 가 우에서 분포함수 로 일치수렴한다는것을 증명하시오.

8. 이고 수렬 일 때 라는것을 증명하시오.

9. 이면 라는것을 증명하시오.

10. 이면 라는것을 증명하시오.

11. 이고 , 상수 이면 라는것을 증명하시오.

12. 코씨분포에 따르는 우연량 의 밀도함수가 일 때 이라는것을 증명하시오.

13. 우연량렬 가 독립동일분포하고 그 밀도함수가 다음과 같다고 하자.



여기서 상수 이다. 라고 하면 라는것을 증명하시오.

14. 우연량렬 가 독립동일분포하고 그 밀도함수가 다음과 같다고 하자.



라고 하면 라는것을 증명하시오.

15. 우연량렬 가 독립동일분포하고 이다. 라고 하면 라는것을 증명하고 상수 를 구하시오.

16. 분포함수렬 가 분포함수 로 약수렴하고 가 모두 련속이며 엄격한 단조증가함수라고 하자. 가 (0, 1)우의 평등분포에 따를 때 라는것을 증명하시오.

17. 우연량렬 가 독립동일분포하고 수학적기대값과 분산이 존재하며 라고 할 때 라는것을 증명하시오.

18. 우연량렬 가 독립동일분포하고 수학적기대값과 분산이 존재하며 일 때 라는것을 증명하시오.

19. 우연량렬 가 독립동일분포하고 이 존재할 때 , 라고 놓으면 이라는것을 증명하시오.

20. 1부터 까지 번호가 붙은 공 개를 1부터 까지 번호가 붙은 개의 상자에 넣는데 매 상자에 공 1개만 넣는다. 우연량 가 번호 인 공이 같은 번호의 상자에 들어갔을 때 1을 취하고 그밖의 경우에 0을 취한다면 이라는것을 증명하시오. 여기서 .

## 4.2 특징함수

가 우연량 의 밀도함수라면 그의 푸리에변환은 이다. 여기서 은 허수단위이다. 수학적기대값의 관점으로 보면 는 이다. 이것이 바로 이 절에서 취급하려는 특징함수인데 이것은 많은 확률문제를 처리하는 도구로 널리 리용되고있다. 이것은 독립인 우연량들의 합의 분포를 구하는 합성적(적분)연산을 곱하기연산으로 변환할수 있으며 분포의 원점모멘트를 구하는 적분연산을 미분연산으로 변환할수 있다. 특히 우연량렬의 극한분포를 구하는 문제를 일반적인 함수의 극한문제로 바꿀수 있다. 아래에서 특징함수의 정의를 한 다음 그것들을 소개한다.

### 4.2.1 특징함수의 정의

먼저 복소우연량의 개념을 소개한다.

특징함수는 실값을 취하는 우연량(실우연량)외에 복소수값을 취하는 우연량(복소우연량)도 고려해야 한다. 복소우연량 에서 와 는 우에서 정의된 실우연량이며 를 의 복소공액우연량이라고 한다. 복소우연량 의 크기(magnitude) 는 로 또는 , 로 정의된다.

우연량과 관련된 개념과 정의는 일반적으로 복소우연량의 경우에도 그대로 리용된다. 례를 들어 우연량 와 의 수학적기대값 가 모두 존재한다면 복소우연량 의 수학적기대값은 로 정의된다. 다른 례를 들면 복소우연량 , 은 과 이 서로 독립(의 동시분포 가 주변분포 와 의 적)일 때 그리고 그때에만 서로 독립이다. 오일레르공식 에서 가 실우연량이라면 이고 그 크기는 이다. 가 서로 독립이면 와 도 독립이다. 이제 특징함수의 정의를 보자.

정의 4.2.1 우연량 에 대하여



을 의 **특징함수**라고 한다.

이기때문에 는 항상 존재하며 결국 임의의 우연량의 특징함수는 항상 존재한다.

리산우연량 의 분포렬이 일 때 의 특징함수는

.

련속우연량 의 밀도함수가 일 때 의 특징함수는

.

우연량의 수학적기대값, 분산, 모멘트와 마찬가지로 특성함수는 우연량의 분포에만 의존하며 분포가 같으면 특성함수도 같다. 그래서 일반적으로 어떤 **분포의 특징함수**라고 부르기도 한다.

실례 4.2.1 대표적인 분포들의 특징함수(1)

① 한점분포, : 특징함수 .

② 0-1분포, : 특징함수 , 여기서 이다.

③ 뽜쏭분포 , : 특징함수 .

④ 평등분포, : 밀도함수가 이므로 .

⑤ 표준정규분포, : 밀도함수가 이므로

.

우의 식에서 꺾쇠괄호안의 항은 표준정규분포의 차모멘트 이다. 이 홀수일 때 이고 짝수 즉 이면 이다. (참고: 정의 옹근수 의 중차례곱 는 일반 차례곱 의 일반화로서 다음과 같이 정의된다. , 즉 이 짝수이면 이고 홀수이면 이다.)

원래 식에 대입하면 표준정규분포의 특징함수를 얻을수 있다.

.

표준정규분포의 특징함수를 알고 다음 절에서 설명하는 특징함수의 성질을 리용하면 일반정규분포 의 특징함수를 쉽게 얻을수 있다(실례4.2.2).

⑥ 지수분포, ; 밀도함수가 이므로 특성함수는



우의 적분에서 복소함수의 오일레르공식 을 리용하였다.

### 4.2.2 특징함수의 성질

이제 특징함수의 일부 성질을 보자. 여기서 는 의 특징함수를 나타낸다.

성짓 4.2.1

.

성질 4.2.2

.

여기서 는 의 공액을 표시한다.

성질 4.2.3 이고 가 상수이면

.

성질 4.2.4 독립인 우연량들의 합의 특징함수는 매 우연량의 특징함수들의 적과 같다. 즉 와 가 서로 독립이면

.

성질 4.2.5 가 존재하면 의 특징함수 는 계미분가능하며 에 대하여

.

우의 공식은 우연량에 대한 각이한 차수의 모멘트를 구하는 방법을 주는데 아래의 공식으로는 수학적기대값과 분산을 구할수 있다.

.

증명. 여기서는 련속인 경우에 대해서만 증명을 하지만 리산인 경우에도 마찬가지로 증명할수 있다.

① .

② .

③ .

④ 와 는 서로 독립이므로 와 도 독립이고 따라서 .

⑤ 가 존재하기때문에 즉 이므로 보조변수 를 포함하는 일반화된 적분 는 에 관하여 번 미분가능하고 에 대하여 이다. 으로 놓으면 이다.

이렇게 우의 5가지 성질을 모두 증명할수 있다.

다음 실례에서 성질 4.2.3과 성질 4.2.4를 리용하여 다른 대표적인 분포들의 특징함수를 구한다.

실례 4.2.2 대표적인 분포들의 특징함수(2)

① 2항분포, : 우연량 은 로 표시할수 있는데 여기서 들은 독립동일분포하는 우연량들로서 이다. 실례 4.2.1의 ②로부터 . 독립동일분포하는 우연량합의 특징함수는 매개 특징함수들의 적분이므로 이다.

② 정규분포, : 우연량 이라고 할 때 이다. 실례 4.2.1로부터 이다. 따라서 과 성질 4.2.3으로부터 을 얻게 된다.

③ 감마분포, : 우연량 은 로 표시할수 있는데 여기서 들은 독립동일분포하는 우연량들로서 이다. 실례 4.2.1로부터 이다.

독립동일분포하는 우연량합의 특징함수는 매개 특징함수들의 적분이므로 더 나가서 가 임의의 정의 실수일 때 의 특징함수는 이다.

④ 분포: 이므로 분포의 특징함수는 이다.

대표적인 분포들의 특징함수를 표 4.2.1에 주었다.

표 4.2.1대표적인 분포들의 특징함수

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 분포 | 분포렬  또는 분포밀도 | 특징함수 |
| 한점분포 |  |  |
| 0-1분포 |  |  |
| 2항분포 |  |  |
| 뽜쏭분포 |  |  |
| 기하분포 |  |  |
| 부의 2항분포 |  |  |
| 정규분포 |  |  |
| 평등분포 |  |  |
| 지수분포 |  |  |
| 감마분포 |  |  |
| 분포 |  |  |
| 베타분포 |  |  |
| 코씨분포 |  |  |

다음 실례는 성질 4.2.5를 리용하여 분포의 수학적기대값과 분산을 구한다.

실례 4.2.3 특징함수를 리용하여 감마분포 의 수학적기대값과 분산을 구하시오.

풀기. 감마분포 의 특징함수와 그의 1차, 2차 도함수는 다음과 같다.



따라서 식 (4.2.9)로부터



특징함수는 또한 다음과 같은 좋은 성질들을 가진다.

정리 4.2.1(일치련속성) 우연량 의 특징함수 는 에서 일치련속이다.

증명. 가 련속우연량(리산우연량인 경우에도 증명은 비슷하다)이고 그 밀도함수가 라고 하면 임의의 실수 와 정수 에 대하여



임의의 에 대하여 먼저 충분히 큰 를 취하여 이 만족되도록 한다.

그다음 임의의 에 대하여 을 취하면 

따라서 모든 에 대하여 이다. 즉 는 에서 일치련속이다.

정리 4.2.2(정의 반정값성) 우연량 의 특징함수 는 정의 반정값성을 가진다. 즉 임의의 정의옹근수 과 실수 , 복소수 에 대하여

.

증명. 가 련속우연량(리산우연량인 경우에도 증명은 비슷하다)이고 그 밀도함수가 라고 하면



이리하여 식 (4.2.10)이 증명되였다.

### 4.2.3 특징함수에 의한 분포함수의 유일결정

특징함수의 정의로부터 우연량의 분포는 그 특징함수를 유일하게 결정한다는것을 알수 있다.우에서는 사실상 모두 우연량의 분포로부터 출발하여 특징함수와 그 성질을 론의하였다. 그러나 두 분포의 수학적기대값, 분산, 모멘트가 같다고 해도 두 분포가 같다는것을 증명할수는 없다는것을 강조하여둔다. 그러나 특징함수는 수학적기대값, 분산, 모멘트보다 더 좋은 성질 즉 특징함수가 분포를 완전히 결정한다는 성질을 가지고있다. 다시말하여 두 분포함수는 대응한 특징함수들이 같을 때에만 같다. 아래에서 이것에 대하여 론의한다.

정리 4.2.3(거꿀변환공식) 와 를 각각 우연량 의 분포함수, 특징함수라고 하면 의 임의의 두 련속점 에 대하여

.

증명. 가 련속우연량(리산우연량인 경우에도 증명은 비슷하다)이고 그 밀도함수가 라고 하자. 이제 라고 놓자.

임의의 실수 에 대하여 이다. 왜냐하면 에 대하여 이고 에 대하여 이기때문이다.

따라서 , 즉 의 피적분함수가 유계이므로 적분순서를 바꿀수 있다.



또 라고 놓으면 디리클레(Dirichlet)적분 으로부터 이라는것을 알수 있다. 가 구간 의 끝점, 내부, 외부에 있을 때 대응한 디리클레적분의 값으로부터 이며 가 유계라는것을 알수 있고 따라서 적분기호와 극한기호를 교체할수 있다. 즉 .

이렇게 정리가 증명된다.

정리 4.2.4(유일성정리) 우연량의 분포함수는 특징함수에 의해 유일하게 결정된다.

증명. 의 모든 련속점 에 대하여 가 의 련속점을 따라 에 다가갈 때 거꿀변환공식으로부터 . 또한 분포함수는 그 련속점에서의 값으로 유일하게 결정된다. 따라서 결론이 성립한다.

특히 가 련속우연량일 경우 다음과 같은 더 강한 결과가 있다.

정리 4.2.5 가 련속우연량이고 그 밀도함수는 , 특징함수는 라고 하자. 만일 이면

.

증명. 의 분포함수를 라고 하면 거꿀변환공식으로부터

.

부등식 을 다시 리용하면 .

또한 이므로 극한기호와 적분기호를 엇바꿀수 있다. 즉



이렇게 정리가 증명된다.

해석수학에서 식 (4.2.12)을 거꿀푸리에변환이라고도 하는데 따라서 식 (4.2.3)과 식 (4.2.12)은 본질적으로 한쌍의 거꿀변환이다.



즉 특징함수는 밀도함수의 푸리에변환이고 밀도함수는 특징함수의 거꿀푸리에변환이다.

여기서 강조하여둘것은 확률론에서 독립인 우연량들의 합에 대한 문제는 중요한 자리를 차지하는데 합성적공식을 리용하여 이 문제를 처리하는것은 대단히 복잡하지만 특징함수를 리용하면 특징함수들의 적으로 독립인 우연량합의 특징함수를 편리하게 구할수 있고 유일성정리로부터 그 특징함수로 독립인 우연량합의 분포를 쉽게 알아볼수 있다는것이다. 아래에서 이것에 대하여 실례들어본다.

실례4.2.4 3.3절에서 합성적공식을 리용하여 2항분포, 뽜쏭분포, 감마분포, 분포의 가법성을 복잡한 계산을 통하여 증명했다. 이제 특징함수를 리용하는 방법(성질 4.2.4와 유일성정리)으로 정규분포의 가법성을 증명하여보자.

독립인 우연량 들의 특징함수들은 각각 . 따라서 성질 4.2.4로부터 .

이것이 바로 의 특징함수이며 특징함수의 유일성정리로부터 이다.

마찬가지로 들이 서로 독립일 때 라는것을 증명할수 있다.

실례 4.2.5 련속우연량의 특징함수가 다음과 같을 때 그 분포를 구하시오.

① 

② 

풀기. ① 거꿀변환공식 (4.2.12)로부터 그 밀도함수는 다음과 같다는것을 알수 있다.



이것은 코씨분포이므로 특징함수 는 코씨분포에 대응한다.

② 는 평등분포 의 특징함수이므로 유일성정리로부터 이 특징함수에 대응되는 분포는 다름아닌 평등분포 이다.

다음의 정리는 분포함수렬의 약수렴성과 대응한 특징함수렬의 점수렴성은 동등하다는것을 설명한다.

정리 4.2.6 분포함수렬 이 분포함수 로 약수렴하기 위한 필요충분조건은 의 특징함수렬 이 의 특징함수 로 수렴하는것이다.

이 정리의 증명은 해석수학의 결과들만 련관되여있고 증명이 길기때문에 여기서는 증명을 생략한다(문헌 [1]). 일반적으로 우의 정리를 특징함수의 련속성정리라고 하는데 이것은 그것이 분포함수와 특징함수의 1:1대응관계가 련속성을 나타낸다는것을 설명하기때문이다.

실례 4.2.6 가 파라메터가 인 뽜쏭분포에 따를 때 라는것을 증명하시오.

증명. 의 특징함수가 이므로 의 특징함수는 다음과 같다.

.

임의의 에 대하여 이므로

.

그리하여 이고 은 의 특징함수이다. 정리 4.2.6 으로부터 결론이 성립한다는것을 알수 있다.

련습문제 4.2

1. 리산우연량 의 분포렬이 다음과 같을 때 의 특징함수를 구하시오.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 0 | 1 | 2 | 3 |
|  | 0.4 | 0.3 | 0.2 | 0.1 |

2. 리산우연량 가 기하분포 에 따른다고 할 때 의 특징함수를 구하고 를 구하시오.

3. 리산우연량 가 파스칼분포 에 따를 때 의 특징함수를 구하시오.

4. 다음과 같은 분포함수의 특징함수를 구하고 그것을 리용하여 수학적기대값과 분산을 구하시오.

① 

② 

5. 우연량 에 대하여 특징함수를 리용하는 방법으로 그의 3차, 4차 중심모멘트를 구하시오.

6. 특징함수를 리용하는 방법으로 2항분포의 가법성 즉 독립인 두 우연량 에 대하여 을 증명하시오.

7. 특징함수를 리용하는 방법으로 뽜쏭분포의 가법성 즉 독립인 두 우연량 에 대하여 을 증명하시오.

8. 특징함수를 리용하는 방법으로 감마분포의 가법성 즉 독립인 두 우연량 에 대하여 을 증명하시오.

9. 특징함수를 리용하는 방법으로 분포의 가법성 즉 독립인 두 우연량 에 대하여 을 증명하시오.

10. 서로 독립인 우연량 에 대하여 특징함수를 리용하는 방법으로 라는것을 증명하시오.

11. 련속우연량 가 다음과 같은 밀도함수를 가지는 코씨분포에 따른다고 하자.

 여기서 파라메터 이다. 이것을 로 표시한다.

① 의 특징함수가 이라는것을 증명하고 그것을 리용하여 코씨분포의 가법성을 증명하시오.

② 일 때 라고 놓으면 이지만 와 는 독립이 아니라는것을 증명하시오.

③ 이 서로 독립이고 모두 코씨분포에 따를 때 과 의 분포가 같다는것을 증명하시오.

12. 련속우연량 의 밀도함수가 일 때 그것이 원점대칭이기 위한 필요충분조건은 그 특징함수가 짝함수라는것을 증명하시오.

13. 우연량 이 서로 독립이고 모두 에 따를 때 의 분포를 구하시오.

14. 특징함수를 리용하는 방법으로 다음과 같은 뽜쏭정리 즉 2항분포렬 에 대하여 이면 이라는것을 증명하시오.

15. 우연량 에 대하여 일 때 우연량 가 표준정규분포우연량으로 분포수렴한다는것을 증명하시오.

## 4.3 큰수의 법칙

큰수의 법칙에는 여러가지 형식이 있는데 아래에서 가장 간단한 베르누이의 큰수법칙으로부터 시작하여 점차 형식의 큰수의 법칙을 소개한다.

### 4.3.1 베르누이의 큰수법칙

를 번의 베르누이시행에서 사건 가 발생한 차수라고 하고 을 사건 가 발생한 잦음률이라고 하자.

만일 한번의 시행에서 가 발생할 확률을 로 표시하면 은 2항분포 에 따르므로 잦음률 의 수학적기대값과 분산은 각각 다음과 같다.



아래에서 일 때 잦음률 과 확률 의 절대오차 의 극한상태를 론의하자.

해석수학에서 학습한 수렬의 극한개념에 따르면 이 수렬일 때 그 극한이 라는것은 임의의 에 대하여 이 충분히 클 때 절대오차가 보다 작다는것 즉 이라는것을 의미한다.

그러나 이 중베르누이시행에서 성공(가 발생)한 회수(하나의 우연량)일 때 우와 같은 현상은 재현될수 없다. 즉 임의의 표본점 (길이가 인 0, 1렬)에 대하여 잦음률 의 성공확률 에 대한 절대오차가 모두 보다 작다고 말할수 없다. 다시 말하여 충분히 작은 과 큰 에 있어도 임의의 표본점 에 대하여 부등식



이 모두 만족된다고 말할수 없다. 실례로 에 대하여 

이지만 충분히 작은 에 대하여서도 부등식 (4.3.2)는 성립할수 없다.

그러나 이 크면 사건 과 의 확률은 매우 작으며 큰 오차 의 확률도 작아질것을 바라고 이 커질수록 점점 작아져야 한다. 특히 아래와 같은 확률적사실이 성립하기를 바란다.



아래에서 설명하는 베르누이의 큰수법칙은 이러한 론의에 대하여 긍정적인 대답을 준다.

정리 4.3.1(베르누이의 큰수법칙) 를 중베르누이시행에서 사건 가 발생한 회수라고 하고 를 매 실험에서 가 나타날 확률이라고 하면 임의의 에 대하여 이 만족된다.

증명. 이고 의 수학적기대값과 분산이 식 (4.3.1)과 같으므로 체븨쉐브부등식으로부터

.

일 때 웃식의 오른변이 1로 다가간다. 따라서 이다.

베르누이의 큰수법칙은 이 증가함에 따라 사건 가 발생하는 잦음률 과 그 확률 의 편차 이 미리 정한 정확도 보다 클 가능성은 점점 더 작아진다. 이것이 바로 잦음률이 확률로 안정화되여간다는것의 의미이다.

례를 들면 동전 한개를 던지면 앞면이 나타날 확률은 이다. 동전을 련속 10번 던지면 이 비교적 작기때문에 편차가 생길 가능성이 때에 따라 컸다 작았다 한다. 그러나 이 동전을 10만번 던질 때 체븨쉐브부등식으로부터 앞면이 나타나는 잦음률과 0.5의 편차가 미리 주어진 정밀도 (실례로 0.01)보다 클 가능성은 이다. 결국 큰 편차가 발생할 가능성은 1/40=2.5%보다 작으며 일 때는 이 가능성이 1/400=0.25%보다 작다. 이것으로부터 시행회수가 많아질수록 큰 편차가 발생할 가능성은 점점 작아진다는것을 알수 있다.

베르누이의 큰수법칙은 잦음률로 확률을 결정하는 리론적근거를 제공하였다. 례를 들어 어떤 제품의 불합격품률 를 추정할 경우 그 종류의 제품가운데서 우연적으로 개를 뽑는데 이 매우 클 때 개 제품가운데서 불합격품의 비률을 의 추정값으로 볼수 있다.

실례 4.3.1(몬테카를로방법에 의한 정적분계산-우연투점법) 일 때 구간 [0,1]에서 의 적분값 를 구하시오.

풀기. 2차원우연량 가 바른4각형 우에서 평등분포에 따른다고 가정하면 와 가 모두 [0,1]우의 평등분포에 따르며 서로 독립이라는것을 알수 있다. 이때 사건 의 확률은 이다.

즉 정적분의 값 는 사건 의 확률 이다(그림 4.3.1). 베르누이의 큰수법칙에 따르면 반복시행에서  가 출현하는 잦음률을 의 추정값으로 삼을수 있다. 이러한 정적분계산방법을 **우연투점법**이라고 부른다. 즉 를 바른4각형 안에 우연적으로 던지는 점이라고 보고 우연점이 구역 안에 떨어지는 잦음률을 정적분의 근사값으로 삼는다.

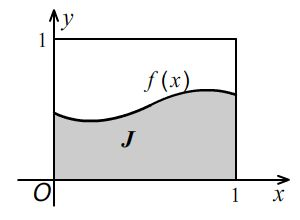


그림 4.3.1 우연투점법

아래에서 몬테카를로방법에 의하여 가 나타나는 잦음률을 얻는다.

① 먼저 콤퓨터로 (0,1)우에서 평등분포하는 개의 우연수를 발생하고 개 쌍의 우연수 을 구성한다. 여기서 은 대단히 클수 있다. 례를 들면  또는 일수 있다.

② 개 쌍의 자료 에 대하여 부등식 을 만족하는 회수를 기록한다. 이것이 바로 사건 가 발생하는 잦음률 이다. 이렇게 사건 가 발생하는 잦음률 을 구한다. 즉 이다.

실례로 을 계산할 때 정확한 값과 , 인 경우의 모의값은 다음과 같다.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 정확한 값 |  |  |
| 0.341344 | 0.340698 | 0.341355 |

일반적인 구간 에서의 정적분 에 대하여서는 선형변환 를 실시하면 [0, 1]구간에서의 적분계산으로 귀착시킬수 있다. 한편 이면 라고 놓을 때 으로 되고 이다. 여기서 이다.

이것은 우의 몬테카를로방법에 의한 적분계산방법이 보편적의의를 가진다는것을 말해준다.

### 4.3.2 대표적인 몇가지 큰수의 법칙

1. 큰수법칙의 일반적인 형태

베르누이의 큰수법칙은 하나의 서로 독립동일분포하는 우연량렬 을 론의하였는데 그 공동분포는 2점분포 이다. ()를 째 시행에서 사건 가 발생한 경우 1, 발생하지 않은 경우 0으로 표시한다면 은 독립인 2점분포우연량렬이다. 이제 그 렬의 첫 개 우연량들의 합 을 보면 이다. 그러면 베르누이 큰수법칙의 결론은 임의의 에 대하여

.

일반적으로 큰수의 법칙은 모두 우연량렬 와 관련되여있으며 큰수의 법칙의 결론은 식 (4.3.5)과 같은 형식이다. 이를 위하여 다음과 같은 정의를 준다.

정의 4.3.1 우연량렬 에 대하여 그것이 식 (4.3.5)과 같은 성질을 가진다면 은 **큰수의 법칙에 따른다**고 말한다.

이때 우연량렬 이 어떤 조건하에서 큰수의 법칙에 따르는가 하는 문제가 제기된다. 아래에서취급하는 몇가지 큰수의 법칙들은 그것들의 조건에서 차이난다. 어떤것은 서로 독립인 우연량렬, 어떤것은 서로 의존하는 우연량렬, 또 어떤것은 동일분포하는 우연량렬, 또 다른것은 서로 다른 분포에 따르는 우연량렬에 대한것들이다.

2. 체븨쉐브의 큰수법칙

체븨쉐브의 부등식을 리용하여 다음과 같은 체븨쉐브의 큰수법칙을 증명할수 있다.

정리 4.3.2(체븨쉐브의 큰수법칙) 가 둘씩 서로 비상관인 우연량렬이고 매 들의 분산이 존재하며 꼭같은 상계를 가진다(즉 )고 하면 은 큰수의 법칙에 따른다. 즉 임의의 에 대하여 식 (4.3.5)이 성립한다.

증명. 이 둘씩 서로 비상관이므로 이다. 그리고 체븨쉐브부등식을 리용하면 임의의 에 대하여 .

따라서 일 때 .

체븨쉐브의 큰수법칙은 이 서로 비상관일것만 요구할뿐 그것들의 분포가 같은것은 요구하지 않는다. 따라서 만일 가 독립동일분포하는 우연량렬이고 또 그 분산이 유한이면 은 반드시 큰수의 법칙에 따른다는것을 알수 있다. 베르누이의 큰수법칙은 체븨쉐브의 큰수법칙의 특수경우이다.

실례 4.3.2 를 독립동일분포하는 우연량렬이고 이라고 하자. 로 표시하면 우연량 의 렬 은 큰수의 법칙에 따른다. 즉 임의의 에 대하여 .

증명. 우연량렬 은 명백히 독립동일분포하는 우연량렬이고 그 분산은 이다.

이 존재하므로 도 존재한다. 체븨쉐브의 큰수법칙으로부터 임을 알수 있다. 여기서 

그러므로 는 큰수의 법칙에 따른다.

3. 마르꼬브의 큰수법칙

우의 큰수의 법칙에 대한 증명과정에서 다음과 같은 관계만 만족되게 되면 큰수의 법칙이 성립한다는것을 볼수 있다.



이 조건 (4.3.6)을 **마르꼬브조건**이라고 부른다.

정리 4.3.3(마르꼬브의 큰수법칙) 우연량렬 에 대하여 식 (4.3.6)이 만족되면 는 큰수의 법칙에 따른다. 즉 임의의 에 대하여 식 (4.3.5)이 성립한다.

증명. 체븨쉐브의 부등식을 리용하면 직접 증명할수 있다.

마르꼬브의 큰수법칙의 중요성은 에 대하여 동일분포, 독립성, 비상관성과 같은 가정이 아무것도 없다는것이다. 체븨쉐브의 큰수법칙은 마르꼬브의 큰수법칙으로부터 분명히 유도될수 있다.

실례 4.3.3 를 동일분포하고 분산이 존재하는 우연량들의 렬이고 은 린접한 과만 상관이고 다른 들과는 비상관이라고 하자. 이 우연량렬 이 큰수의 법칙에 따르는가?

풀기. 는 서로 의존하는 우연량렬이다. 다음과 같은 마르꼬브조건을 생각한다.

.

라고 표시하면 이고 따라서 . 즉 마르꼬브조건이 성립되므로 는 큰수의 법칙에 따른다.

4. 신친(Khinchin)의 큰수법칙(큰수의 약법칙)

이미 알다싶이 한 우연량의 분산이 존재한다면 그 수학적기대값은 반드시 존재한다. 그러나 그 반대경우는 성립되지 않는다. 즉 한 우연량의 수학적기대값이 존재하여도 그 분산은 반드시 존재하는것은 아니다. 우의 몇가지 큰수의 법칙들은 우연량렬 의 분산이 존재한다고 가정하고 있지만 신친의 큰수법칙은 이 가정을 배제하고 매 의 수학적기대값이 존재하고 이 독립동일분포하는 우연량일것을 요구한다. 분명히 베르누이의 큰수법칙은 신친의 큰수법칙의 특수경우이다.

정리 4.3.4(신친의 큰수법칙) 를 독립동일분포하는 우연량렬이라고 할 때 의 수학적기대값들이 존재한다면 는 큰수의 법칙에 따른다 즉 임의의 에 대하여 식 (4.3.5)이 성립한다.

증명. 가 독립동일분포하고 이라고 하자. 이제 를 증명하기 위하여 라고 표시하자. 정리 4.1.3으로부터 만 증명하면 되는데 또 정리 4.2.6으로부터 만 증명하면 된다. 가 동일분포하므로 같은 특징함수를 가지는데 그것을 라고 하자. 이므로 의 0점에서의 전개식은 다음과 같다.

.

의 독립성으로부터 의 특징함수는 다음과 같다는것을 알수 있다.

.

임의의 에 대하여 이고 는 바로 퇴화분포의 특징함수이다. 이렇게 가 증명되며 정리가 증명된다.

신친의 큰수법칙은 우연량의 수학적기대값 의 근사값를 구하는 방법을 준다. 우연량 를 독립적으로 번 반복관측한다고 하고 번째 관측값을 라고 하면 는 서로 독립이고 그것들의 분포는 의 분포와 같다. 그러므로 가 존재한다는 조건에서 신친의 큰수의 법칙에 따라 이 충분히 클 때 평균관측값 을 의 근사값으로 볼수 있다. 이 방법의 우점은 의 분포가 어떠한것인가를 상관하지 않고 수학적기대값의 근사값를 찾을수 있다는데 있다.

실천에서 관측값의 평균을 리용하여 우연량의 평균을 근사하는 방법은 흔히 리용되고있다. 례하면 관측한 어떤 지역의 5천명의 평균수명을 그 지역 평균수명의 근사값로 하는것은 합리적인 방법인데 그런 방법의 리론적근거가 바로 신친의 큰수법칙이다.

신친의 큰수법칙으로부터 만일 가 독립동일분포하는 우연량렬이고 이 존재(여기서 는 정의 옹근수)하면 는 큰수의 법칙에 따른다는것을 쉽게 얻어낼수 있다. 이 결론은 수리통계학에서 매우 쓸모있는것으로서 을 의 근사값으로 볼수 있다.

실례4.3.4(몬테카를로방법에 의한 정적분계산-평균값법) 정적분 을 계산하여보자.

우연량 가 (0,1)우의 평등분포에 따른다고 가정하면 의 수학적기대값은 다음과 같다.

.

그러므로 의 값을 추정하는것은 의 수학적기대값을 추정하는것이다. 신친의 큰수법칙에 따르면 의 관측값의 평균을 리용하여 에 대한 수학적기대값을 추정할수 있다. 구체적인 방법은 다음과 같다. 먼저 콤퓨터로 개의 (0, 1)우에서 평등분포하는 우연수 를 생성하고 매 에 대하여 를 계산한다. 그러면 의 추정값을 로 얻을수 있다.

례를 들어 의 정확한 값과 , 인 경우의 1차모의값은 다음과 같다.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 정확한 값 |  |  |
| 0.341344 | 0. 341329 | 0.341334 |

실례4.3.1에서 설명한바와 같이 선형변환을 통하여 구간 의 정적분을 [0, 1]구간의 정적분으로 변환할수 있으므로 우의 정적분계산방법은 보편적의의를 가진다.

련습문제 4.3

1. 독립우연량렬 에 대하여 이 성립하면 은 큰수의 법칙에 따른다는것을 증명하시오.

2. 독립우연량렬 에 대하여 이 성립하면 은 큰수의 법칙에 따른다는것을 증명하시오.

3. 독립우연량렬 에 대하여 이 성립하면 은 큰수의 법칙에 따른다는것을 증명하시오.

4. 베르누이시행에서 사건 가 나타날 확률은 이다. 을 번째와 번째 시행에서 가 나타났을 때 1, 그렇지 않으면 0이라고 한다면 이 큰수의 법칙에 따른다는것을 증명하시오.

5. 독립우연량렬 에 대하여 이 성립하면 은 큰수의 법칙에 따른다는것을 증명하시오.

6. 독립동일분포하는 우연량렬 에 대하여 그 공동분포함수가 이면 신친의 큰수법칙이 이 우연량렬에 대하여 성립하는가?

7. 독립동일분포하는 우연량렬 에 대하여 그 공동분포함수가 이면 은 큰수의 법칙에 따르는가?

8. 독립동일분포하는 우연량렬 에 대하여 그 공동분포함수가 이다. 여기서 . 이때 은 큰수의 법칙에 따르는가?

9. 독립인 우연량렬 에 대하여 이 파라메터가 인 뽜쏭분포에 따른다면 은 큰수의 법칙에 따르는가?

10. 독립인 우연량렬 에 대하여의 분산 이 일치유계 즉 어떤 상수 가 있어서 이면 은 큰수의 법칙에 따른다는것을 증명하시오.

11. (뽜쏭의 큰수법칙) 를 개의 독립적인 시행에서 사건 가 나타나는 회수이고 가 번째 시행에서 나타날 확률이 이면 임의의 에 대하여 이라는것을 증명하시오.

12. (베른슈타인의 큰수법칙-Bernstein Law of Large Numbers) 우연량렬 의 분산이 일치유계이고 일 때 일치하게 이면 이 큰수의 법칙에 따른다는것을 증명하시오.

13. (그네덴코의 큰수법칙-Gnedenko Law of Large Numbers) 우연량렬 에 대하여 라고 표시하면 이 큰수의 법칙에 따르기 위한 필요충분조건은 라는것을 증명하시오.

14. 독립동일분포하는 우연량렬 에 대하여 분산이 존재하고 이 절대수렴하는 무한합렬이라고 하자. 일 때 이 큰수의 법칙에 따른다는것을 증명하시오.

15. 독립동일분포하는 우연량렬 에 대하여 분산이 존재하고 라고 하자. 이 상수렬일 때 어떤 상수 가 존재하여 모든 에 대하여 이면 은 큰수의 법칙에 따른다는것을 증명하시오.

16. 독립동일분포하는 우연량렬 에 대하여 분산이 유한이고 이 모두 상수는 아니라고 하자. 이면 은 큰수의 법칙에 따르지 않는다는것을 증명하시오.

17. 우연투점법과 평균값법을 리용하여 다음과 같은 정적분을 계산하시오.

.

## 4.4 중심극한정리

### 4.4.1 독립우연량들의 합

큰수의 법칙은 어떤 조건밑에서 우연량렬의 산수평균이 그 평균값의 산수평균으로 확률수렴하는가를 론의하였다. 이제 여기서는 어떤 조건밑에서 독립우연량들의 합 의 분포함수가 정규분포로 수렴하는가를 론의한다. 아래에서 먼저 독립우연량들의 합에 대한 실례를 준다.

실례 4.4.1 오차는 현실에서 자주 맞다드는 우연량이다. 많은 연구에 의하면 오차는 서로 독립적인 많은 미소우연인자들의 중첩에 의해 생긴다. 례하면 한 선반공이 선반으로 기계축을 가공할 때 직경이 규정된 요구에 부합되게 하지만 가공후의 기계축과 요구사이에 일정한 오차가 생기게 되는데 이것은 가공할 때 일부 우연인자의 영향을 받기때문이다. 그러한 인자들에는 다음과 같은것들이 속한다.

• 선반에서 진동과 회전속도의 영향.

• 절삭공구에서 조립과 마모의 영향.

• 재료방면에서 강재의 성분, 생산지의 영향.

• 선반공의 주의력 집중정도, 그날의 기분상태의 영향.

• 측정면에서 측정계기의 오차와 측정기술의 영향.

• 환경측면에서 작업장의 온도, 습도, 조명, 작업전압의 영향.

• 이밖에 많은 영향인자들을 구체적인 경우에 따라 제시할수 있다.

이러한 요소들은 매우 많고 가공 정밀도에 대한 영향은 아주 미세하고 우연적이며 사람이 조정할수 없을뿐아니라 있을수도 없을수도 있고 클수도 작을수도 있으며 정이거나 부일수 있다. 이 요소들이 종합되여 최종적으로 기계축의 직경에 오차를 산생한다. 만일 이 오차를 이라고 한다면 이것은 우연량이고 또 많은 미소우연파동 들의 합 즉 으로 볼수도 있다. 여기서 은 대단하 큰데 우리가 관심하는것은 일 때 의 분포가 무엇인가 하는것이다.

물론 합성적공식을 리용하여 의 분포를 계산할수 있다. 하지만 이런 계산은 매우 복잡하고 실현하기도 쉽지 않다. 다음 실례에서 이것을 알아볼수 있다.

실례 4.4.2 독립동일분포하는 우연량렬 의 공동분포가 구간 (0, 1)우에서의 평등분포라고 하자. 이고 가 의 밀도함수라면 합성적공식을 리용하여 밀도함수를 다음과 같이 구할수 있다.



그림 4.4.1에 를 표시하였다. 그림으로부터 이 증가함에 따라 의 그라프가 점점 더 미끈해지며 정규곡선에 접근한다는것을 알수 있다.

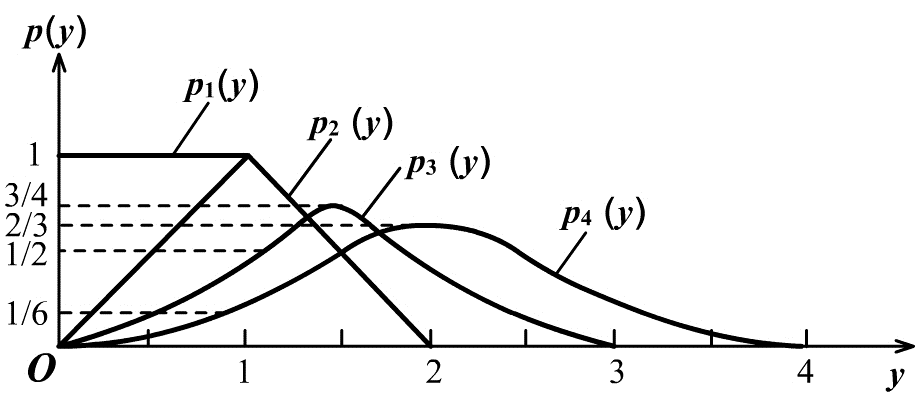


그림 4.4.1 평등분포의 합성적

일 때 의 비령구역을 (0, 100)이라고 가정할수 있다. 만일 합성적공식을 리용하여 100개의 토막으로 나눈 다음 의 표시식을 구하면 그것들은 99차다항식으로서 이렇게 복잡한 형식은 설사 구해낸다고 해도 리용할수 없다. 그리하여 근사분포를 찾기 시작하였다. 의 분포함수가 이고 약수렴의 의미에서 그 극한분포 를 구한다면 이 충분히 클 때 를 의 근사분포로 리용할수 있다.

먼저 의 극한분포를 찾는 문제를 설정하자. 그림 4.4.1에서 이 커지면 의 중심이 오른쪽으로 이동하고 그 분산이 커지는것을 볼수 있다. 이것은 일 때 의 분포중심과 분산이 로 가고 분포가 극히 불안정해진다는것을 의미한다. 이 결함을 극복하기 위하여 중심극한정리의 연구에서는 를 다음과 같이 표준화한다.



이므로 의 극한분포가 표준정규분포 가 될수 있다는것을 알수 있다.

중심극한정리는 바로 우연량합의 극한분포가 어떤 조건밑에서 정규분포가 되는가 하는 문제를 연구한다.

### 4.4.2 독립동일분포하는 경우의 중심극한정리

정리 4.4.1[린드버그-레비(Lindeberg-Lévy)의 중심극한정리] 독립동일분포하는 우연량렬 에 대하여 이고 라고 놓으면 임의의 실수 에 대하여

.

증명 식 (4.4.1)을 증명하려면 의 분포함수렬이 표준정규분포로 약수렴한다는것만 증명하면 된다. 또한 정리 4.2.6로부터 의 특징함수렬이 표준정규분포의 특징함수로 수렴한다는것만 증명하면 된다. 이것을 위하여 의 특징함수를 라고 하면 의 특징함수는 다음과 같다.

.

또한 이므로 이다.

따라서 특징함수 의 전개식은 다음과 같다.

.

그리하여 이며 은 바로 의 특징함수이다. (증명끝)

정리 4.4.1은 에 대하여 독립동일분포하고 분산이 존재할것만을 가정할뿐 원래의 분포가 무엇이든 관계없이 이 충분히 크기만 하면 정규분포를 리용하여 우연량합의 분포를 근사시킬수 있다는것을 보여주고 있다. 그러므로 이 정리는 널리 응용되고 있다. 동시에 이 정리는 측정오차가 근사하게 정규분포에 따른다는 사실을 제시해주고 있다. 아래에서 린드버그-레비의 중심극한정리에 대한 몇가지 응용실례를 보여 준다.

실례 4.4.3(정규우연수의 생성) 우연모의(몬테카를로법)에서는 보통 정규분포 에 따르는 우연수가 필요하며 일반적인 통계쏘프트웨어들은 정규우연수를 생성하는 기능을 가지고있다. 이제 중심극한정리를 리용하여 (0, 1)우의 평등분포우연수로부터 정규분포 의 우연수를 생성하는 방법을 보자.

우연량 가 (0, 1)우의 평등분포에 따른다면 수학적기대값과 분산은 각각 1/2, 1/12이다. 이로부터 12개의 서로 독립인 평등분포우연량들의 합의 수학적기대값과 분산은 각각 6, 1이다. 따라서 다음과 같이 정규분포 의 우연수를 생성할수 있다.

① 콤퓨터로 (0, 1)우에서 평등분포하는 12개의 서로 독립인 우연량 을 생성한다.

② 을 계산한다. 린드버그-레비의 중심극한정리로부터 를 근사적으로 표준정규분포 에 따르는 우연수라고 볼수 있다.

③ 를 계산하면 를 정규분포 의 우연수라고 볼수 있다.

④ ①-③을 번 반복하면 분포 의 개 우연수를 얻을수 있다.

이 실례로부터 알수 있는것처럼 평등분포하는 12개의 우연수로부터 한개의 정규분포우연수를 얻을 때 린드버그-레비의 중심극한정리를 리용하였다.

실례 4.4.4(수치계산에서의 오차분석) 수치계산에서 임의의 실수 는 모두 일정한 자리수의 소수 를 리용하여 근사시킨다. 례컨대 계산과정에 5자리의 소수를 취할 때 6자리이후의 소수는 모두 사사오취의 방법으로 근사시킨다.

이제 개의 실수 의 합 를 구하려면 수치계산과정에는 부득불 의 근사값 을 리용하여 의 근사값 를 얻게 된다. 개별적오차를 로 표시하면 총오차는 다음과 같다.

.

만일 수치계산에서 자리의 소수를 취한다면 들이 구간 우의 평등분포에 따르며 서로 독립이라고 볼수 있다. 이제 총오차를 추정해보도록 하자. 한가지 대략적인 추정방법은 이므로



이라는것이다.

이제 중심극한정리를 리용하여 추정하여보자. 들이 독립동일분포에 따르고 , 이므로 총오차에 대하여 다음의 사실이 성립한다.

.

린드버그-레비의 중심극한정리로부터 임의의 에 대하여

.

우의 식으로부터 총오차의 상한 를 구하려면 오른변의 확률을 0.99로 설정할수 있다. 그러면 . 다시 표준정규분포함수의 0.995분위수를 찾아 구하면 를 얻을수 있다. 이로부터 를 얻게 된다.

즉 99%의 확신성을 가지고 다음과 같은 사실을 말할수 있다.

.

례를 들어 수치계산에서 소수점아래 5자리를 보존하면서 10,000개의 근사값를 합한 총오차를 구하는데 식 (4.4.2)을 리용하면 0.05로 추정한다면 식 (4.4.3)을 리용할 때에는 0.99의 확률로 0.0007436 즉 만분의 7 정도로 담보할수 있다.

우의 실례로부터 알수 있다싶이 중심극한정리를 리용하면 총오차의 상한을 구할수 있을뿐만아니라 일정한 믿음정도를 줄수 있다.

### 4.4.3 2항분포의 정규근사

린드버그-레비의 중심극한정리를 리용하여 뫼브르-라플라스의 중심극한정리를 얻을수 있다.

정리 4.4.2[뫼브르-라플라스(de Moivre-Laplace)의 중심극한정리] 중베르누이시행을 진행할 때 사건 가 매번의 시행에서 발생하는 확률을 라고 하고 는 번의 시행에서 사건 가 발생하는 회수라고 하자. 라고 표시하면 임의의 실수 에 대하여 이다.

뫼브르-라플라스의 중심극한정리는 확률론 력사상 최초의 중심극한정리로서 2항분포를 위한것이며 그래서 2항분포의 정규근사로 알려져 있다. 제2장의 정리 2.4.1(뽜쏭정리)은 "2항분포의 뽜쏭근사"를 보여주었다. 두가지를 비교할 때 일반적으로 가 비교적 작으면 뽜쏭분포로 근사시키는것이 좋고 , 일 때는 정규분포로 근사시키는것이 좋다.

뫼브르-라플라스의 중심극한정리를 응용하기전에 두가지를 먼저 주의하여두겠다.

① 2항분포는 리산분포이고 정규분포는 련속분포이기때문에 정규분포를 리용하여 2항분포를 근사계산할 때 약간의 수정을 하면 정밀도를 높일수 있다. 만일 이 모두 옹근수이면 다음과 같이 수정을 한 후에 정규근사를 적용한다.

.

례컨대 의 값은 그림 4.4.2에서 5~15구간에서 긴 직사각형들의 면적의 합이고 그 정확한 값은 0.9780이다.



그림 4.4.2 2항분포의 수정된 정규근사

수정된 정규근사를 리용하면



수정하지 않은 정규근사를 리용하면

.

이렇게 수정하지 않은 정상근사의 오차가 비교적 크다.

② 또한 2항분포의 계산에 대하여 수정된 정상근사를 리용하여 다음과 같은것을 알수 있다.



례를 들면 일 때 의 정확한 값은 0.1612이고 식 (4.4.4)로 계산한 근사값은 0.1629이다.

중심극한정리의 응용과정에 라고 표시하면 뫼브르-라플라스의 중심극한정리로부터 얻은 근사식 을 리용하여 다음과 같은 세가지 계산문제를 풀수 있다.

① 를 알고 를 구하기 ② 를 알고 를 구하기 ③ 를 알고 을 구하기

이제 이 세가지 류형으로 나누어 구체적인 실례들을 들어보도록 하자.

1. 를 알고 를 구하기(확률계산)

실례4.4.5 어떤 복잡한 체계가 100개의 독립적으로 동작하는 부속품들로 구성되여있으며 매 부속품들이 정상적으로 동작할 확률은 0.9이다. 체계가 제대로 동작하기 위해서는 전체 체계에서 적어도 85개 부속품이 제대로 동작해야 한다. 체계가 정상동작할 확률을 구하시오.

풀기. 라고 놓고 을 100개의 부속품가운데서 정상적으로 동작하는 부속품의 개수라고 하자. 그러면 이다. 따라서 구하려는 확률은 .

실례 4.4.6 한 제약공장에서 생산하는 어떤 약품의 질병치료률이 80%라고 한다. 완치률을 검증하기 위해 이 질병을 앓고있는 환자 100명을 임의로 선택하여 림상실험을 진행한다. 그중에서 적어도 75명이 완치되면 이 약이 검정에서 통과된다. 아래의 두가지 경우에 각각 이 약이 검정에서 통과될 가능성을 계산하시오.

① 이 약의 실제치료률이 80%.

② 이 약의 실제치료률이 70%.

풀기. 라고 놓고 을 100명의 림상실험자들가운데서 완치된 환자의 수라고 하자.

① 이므로 검정에서 통과될 가능성은



즉 이 약이 검정에서 통과될 가능성은 높다.

② 이므로 검정에서 통과될 가능성은

.

즉 이 약이 검정에서 통과될 가능성은 낮다.

2. 를 알고 를 구하기(분위수계산)

실례 4.4.7 한 작업장에 같은 형의 공작기계 200대가 있다. 매 공작기계는 1시간동안 약 70%의 시간을 작업한다. 만일 공작기계들이 서로 독립적으로 작업하며 작업시 매 공작기계가 15 kW의 전력을 소비한다면 이 작업장의 정상적인 생산을 보장할 가능성이 95% 되게 하는데 최소 얼마만한 전력이 필요한가?

풀기. 라고 놓고 을 200대의 공작기계가운데서 동시에 작업하는 공작기계수라고 하자. 그러면 이다.

대의 공작기계가 동시에 동작할 때 (kW)의 전력이 필요하다. 전력공급량을 (kW)로 설정하면 정상적인 생산을 보장할수 있는 사건 은 로 표시할수 있다. 여기서 이다.

분포표를 조사하여 표준정규분포의 0.95분위수 1.645를 얻을수 있다. 그러면 .

이로부터 (kW) 즉 시간당 최소 2253(kW)의 전력을 소비해야 95%의 가능성으로 정상생산을 담보한다는것을 알수 있다.

3. 를 알고 을 구하기(표본량계산)

실례 4.4.8 도시 S에서 어떤 TV프로에 대한 시청률 를 조사한다. 이때 조사대상자들이 이 프로를 시청하는 잦음률을 의 추정값 로 삼는다. 현재 조사하여 얻은 시청률 와 실지 시청률 사이의 차이가 5%를 넘지 않도록 90%의 확률로 담보해야 한다. 적어도 몇명의 대상(표본량)을 조사해야 하는가?

풀기. 총 명의 대상을 조사하는데 를 번째 조사대상이 이 TV프로를 시청하는 경우 1, 그렇지 않은 경우 0이라고 하자. 그러면 들은 독립동일분포에 따르며 이다.

또 명의 조사대상자가운데 이 TV프로를 시청한 수를 이라고 표시하면 이다.

큰수의 법칙으로부터 이 매우 클 때 잦음률 과 확률 는 아주 근사하고 따라서 잦음률을 의 추정값으로 보는것은 합리적이다. 그러나 과 의 접근정도를 중심극한정리를 리용하여 계산하면 이다. 따라서 이다.

분포표를 조사하여 표준정규분포의 0.95분위수 1.645를 얻을수 있다. 결국 이고 을 얻는다. 또한 이므로 이다. 즉 적어도 271명을 조사해야 한다.

### 4.4.4 독립이지만 분포가 서로 다른 경우의 중심극한정리

앞에서는 독립동일분포하는 경우에 우연량합의 극한분포문제를 해결하였다. 현실문제에서 들이 독립인것은 흔한 현상이지만 그것들이 동일분포에 따른다고는 말하기 어렵다. 앞에서 언급한 오차 는 매우 작고 서로 독립인 우연인자들의 중첩으로 발생한다. 즉 . 들은 서로 독립이지만 반드시 같은 분포를 가지는것은 아니다. 여기서는 독립이지만 서로 다른 분포에 따르는 우연량합의 극한분포문제에 대하여, 극한분포가 정규분포로 되기 위한 조건을 주는 방향에서 론의한다.

극한분포가 정규분포이기 위해서는 반드시 의 매 항에 대하여 일정한 요구가 있어야 한다. 례컨대 만일 두번째 항부터 모두 0이 되는것을 허용한다면 극한분포는 분명히 의 분포에 의해 완전히 결정되며 이때 아무런 의의있는 결과를 얻을수 없다. 따라서 중심극한정리가 성립하려면 합계의 매 항들이 독특한 역할을 하지 말아야 하며 또는 매 항이 확률적의미에서 평등하게 작아야 한다. 아래에서 어떻게 수학적인 식으로 이 요구를 표시할것인가를 분석해본다.

가 유한한 수학적기대값과 분산을 가지는 독립인 우연량들의 렬이라고 하자. 즉 .

우연량합 를 론의하기 위해서 먼저 그것을 표준화(평균을 덜고 표준편차로 나눈다)한다.

, 이고 라고 놓으면 의 표준화는 이다. 이제 의 매 항 이 평등하게 작을것을 요구한다면 임의의 에 대하여 사건 이 발생할 가능성이 작을것을 요구하는것이며 또는 직접 그 확률이 0으로 다가갈것을 요구하는것이다. 이를 위하여 을 요구한다. 왜냐하면 이기때문이다.

모든 들이 련속우연량이고 그 밀도함수가 라면 웃식의 오른변은 이다.

따라서 임의의 에 대하여



이기만 하면 의 모든 항들이 평등적으로 작다는것을 담보할수 있다.

우의 조건 (4.4.5)을 **린드버그조건**이라고 한다. 린드버그는 조건 (4.4.5)을 만족시키는 의 극한분포가 정규분포라는것을 증명하였다. 이것이 바로 아래에서 설명하는 린드버그의 중심극한정리인데 증명과정에 많은 수학적도구들을 필요로 하기때문에 여기서는 정리만 주고 증명은 생략한다.

정리 4.4.3[린드버그(Lindeberg)의 중심극한정리] 서로 독립인 우연량렬 은 다음과 린드버그조건을 만족한다. 즉 임의의 에 대하여 .

가령 독립인 우연량렬 이 같은 분포를 가지고 분산이 유한하다는 조건이 성립하면 반드시 우의 린드버그조건 (4.4.5)를 만족한다. 즉 정리 4.4.1은 정리 4.4.3의 특수경우이다. 이것은 간단히 증명할수 있다.

이 독립동일분포하는 우연량렬이라고 하자. 또한 편리상 들이 모두 련속우연량이고 그 공동밀도함수가 이며 라고 하자. 이때 이고 따라서 이다. 분산이 존재하므로 즉 이므로 이 성립하고 결국은 린드버그조건이 만족된다.

린드버그조건은 일반화되였지만 그 조건을 검증하기 어렵다. 그러나 다음의 랴푸노브(Lyapunov)조건은 모멘트에 대해서만 요구를 제기하기때문에 쉽게 적용할수 있다. 아래에서 그 결론만 주고 증명은 생략한다.

정리 4.4.4[랴푸노브의 중심극한정리] 독립인 우연량렬 에 대하여 어떤 이 있어서



을 만족하면 임의의 에 대하여 이 성립한다. 여기서 의 의미는 앞에서와 같다.

실례 4.4.9 한 시험지에 99개의 문제가 쉬운것으로부터 어려워지는 차례로 배렬되여있다. 어떤 학생이 1번문제를 옳게 맞힐 확률은 0.99, 2번을 맞힐 확률은 0.98이고 일반적으로 번 문제를 맞힐 확률은 이다. 이제 이 학생의 매 문제에 대한 답이 서로 독립이고 그가운데서 60개이상의 문제만 맟히면 시험에서 통과하는것으로 보자. 그러면 학생의 시험통과가능성은 얼마인가?

풀기. 우연량 가 학생이 번 문제를 맞힐 때 1, 그렇지 못할 때 0이라고 하자. 그러면 들은 독립이고 서로 다른 2점분포에 따른다.

.

구하려는것은 이다.

중심극한정리를 리용하기 위해서 에서부터 시작하여 모든 우연량들이 와 독립동일분포한다고 생각할수 있다. 이제 을 리용하여 우연량렬 이 랴푸노브의 조건 (4.4.6)을 만족하는가를 따져보겠다. 그런데 , 이므로 . 즉 은 랴푸노브의 조건 (4.4.6)을 만족하고 따라서 중심극한정리를 리용할수 있다.

또한 일 때



이므로 그 학생이 시험에서 통과될 가능성은

.

이렇게 이 학생이 시험에 통과할 가능성은 약 천분의 5로서 매우 작다.

련습문제 4.4

1. 어떤 보험회사의 다년간의 통계자료에 의하면 보험청구신청자들가운데서 도난관련청구가 20%를 차지한다. 우연발취한 100명의 배상을 요구하는 청구자들가운데서 도난에 의한 청구자들의 수를 로 표시하자. 이때

① 의 분포렬을 쓰시오.

② 도난배상청구자의 수가 14보다 작지 않고 30보다 많지 않을 확률의 근사값을 구하시오.

2. 어떤 콤퓨터봉사기에 100개의 포트가 열려져 있는데 매 포트는 80%의 시간동안 리용된다. 매 포트가 리용되는 시간이 서로 독립이라면 최소 15개의 포트가 리용되지 않고 휴식상태일 확률을 구하시오.

3. 어떤 건축물에 리용되는 나무기둥가운데서 80%의 길이가 3m보다 짧지 않다. 이런 나무기둥들의 무지에서 임의로 100대를 뽑을 때 그중에서 적어도 30대가 3m보다 짧을 확률은 얼마인가?

4. 같은 주사위를 100번 던지는데 번째로 던져 얻는 점수를 이라고 하자. 평균점수를 로 표시할 때 확률 를 구하시오.

5. 같은 주사위를 련속 80번 던져 점수의 합이 300을 초과할 확률을 구하시오.

6. 10개의 전구가 있는데 매 전구의 수명은 지수분포에 따르며 그 평균수명은 60일이다. 매번 한개의 전구를 리용하며 전구가 고장나면 즉시 새 전구로 갈아끼운다. 이렇게 총 450일이상 리용할 확률을 구하시오.

7. 가 독립동일분포하는 우연량으로서 그 공동분포가 이라고 하자. 평균을 로 표시할 때 확률 를 구하시오.

8. 손전화기판매소에서 매일 판매되는 손전화기의 대수는 인 뽜쏭분포에 따른다. 1년 365일 매일 봉사하며 매일 판매하는 손전화기대수가 서로 독립이라면 1년에 700대이상 판매할 확률을 구하시오.

9. 어떤 식당은 매일 400명의 손님을 봉사한다. 매 손님의 소비액(단위:원)은 (20, 100)우의 평등분포에 따르며 또한 손님들의 소비액은 서로 독립이라고 하자. 이때

① 식당의 매일 평균영업액

② 식당의 매일 영업액이 평균영업액±760원범위에 있을 확률

10. 어떤 기구가 동시에 50개의 신호를 접수한다. 그가운데서 번째 신호의 길이는 이다. 가 서로 독립이고 모두 평등분포 에 따를 때 을 구하시오.

11. 콤퓨터가 더하기연산을 할 때 매 연산수에 대하여 옹근수(자기와 가장 가까운 옹근수)를 취한다. 모든 오차가 서로 독립이고 평등분포 에 따른다고 가정하자.

① 1500개의 수를 합할 때 오차총합의 절대값이 15를 초과할 확률을 구하시오.

② 최대로 몇개의 수를 합쳐야 오차총합의 절대값이 10보다 작을 확률이 90%보다 작지 않겠는가?

12. 매 부속품의 무게가 모두 독립동일분포하는 우연량이고 그 수학적기대값은 0.5kg, 표준편차는 0.1kg이라고 하자. 이때 5천개의 부속품 전체의 중량이 2510kg을 넘을 확률은 얼마인가?

13. 어떤 제품이 20개의 동일한 부속품으로 련결되여있으며 매 부속품의 길이는 평균 2mm, 표준편차 0.02mm인 우연량이다. 만일 이 20개 부속품의 길이가 독립동일분포하고 제품의 총길이가 (40±0.2)mm일 때 합격품이라고 하면 이 제품의 불합격률을 구하시오.

14. 어떤 보험회사에 10,000명의 손전화기보험계약자가 있고 보험계약자당 배상금은 평균 280원, 표준편차는 800원이라고 하자. 총배상액이 2700만원을 초과할 확률을 구하시오.

15. 두개 학급 A, B가 동시에 한 과목을 배우는데 학급 A는 25명, B는 64명이다. 이 과목의 학기말시험성적이 평균 78점, 표준편차가 14점이라면 학급 A, B가운데서 평균성적이 80점을 초과하는 확률이 큰것은 어느 학급인가?

16. 독립적으로 반복시행을 진행하며 매 시행에서 사건 가 발생할 확률은 0.25이다. 95%의 믿음성정도로 1000번의 실험에서 사건 가 발생하는 잦음률과 확률이 얼마나 차이나는가를 담보할수 있는가? 이때 가 발생하는 회수는 어느 범위인가?

17. 매 제품의 조립시간은 서로 독립이고 모두 지수분포에 따르는데 평균 10분이 소요된다.

① 100개 제품을 조립하는데 15~20시간 걸릴 확률을 구하시오.

② 95%의 믿음성을 준다면 16시간내에 최대로 몇개의 제품을 조립할수 있는가?

18. 어떤 복권의 당첨금액 는 추첨에 의해 결정되며 그 분포렬은 다음과 같다.

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| (만원) | 5 | 10 | 20 | 30 | 40 | 50 | 60 |
|  | 0.2 | 0.2 | 0.2 | 0.1 | 0.1 | 0.1 | 0.1 |

1년에 300개의 복권이 당첨되게 하려면 당첨금 총액이 얼마나 있어야 95%의 확률로 당첨금을 지불할수 있겠는가?

19. 500개의 방이 있는 호텔의 매 방마다 2kW의 공기조화기가 설치되여있다. 만일 손님이 류숙하는 방이 80%라면 몇kW의 전력이 있어야 99%의 가능성으로 공기조화기를 사용할수 있도록 충분한 전력을 보장한다고 담보할수 있는가?

20. 어떤 부속품이 전기설비의 핵심부속품인데 그 부속품이 고장나면 즉시 새로운것으로 교체한다. 부속품의 평균수명이 100시간이고 표준편차가 30시간이라고 할 때 몇개의 예비부속품이 있어야 체계가 2000시간이상 련속적으로 동작하는것을 0.95이상의 확률로 담보할수 있는가?

21. 어떤 물체의 길이 를 독립적으로 번 반복측정한다. 매 측정결과 가 정규분포 에 따르고 를 번 측정한 결과의 산수평균값이라고 하자. 이때 95%의 확률로 평균값과 실제값 의 차이가 0.1보다 작도록 하기 위해서는 적어도 몇번 측정해야 하는가?

22. 어떤 공장에서 매달 1만대의 액정투영기를 생산하지만 액정필림직장의 합격품률은 90%이다. 99.7%의 가능성을 가지고 출하되는 액정투영기에 모두 합격된 액정필림을 조립할수 있도록 담보하려면 액정필림직장에서 매달 적어도 몇개의 액정필림을 생산해야 하는가?

23. 어떤 제품의 합격품률이 99%일 경우 포장상자에 이런 제품을 몇개 넣어야 95%의 가능성으로 매 상자에 합격제품이 적어도 100개 있도록 담보할수 있겠는가?

24. 어떤 도시의 성년남자들가운데서 흡연자의 비률 를 확정하기 위해 임의로 명의 성년남자를 뽑아 그중의 흡연자수를 으로 표시한다. 이 적어도 얼마여야 과 의 차이가 0.01보다 작을 확률이 95%보다 커지게 할수 있는가?

25. 일 때 이 얼마여야 를 만족시킬수 있는가?

26. 독립동일분포하는 우연량렬 에 대하여 일 때 이 충분히 크면 은 정규분포에 근사적으로 따른다는것을 증명하고 그 정규분포의 파라메터들을 구하시오.

27. 확률론적방법으로 을 증명하시오.