科学计算作业 12

张文涛 517030910425

2018 年 12 月 23 日

1. 对于线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$, 使用迭代法

$$\boldsymbol{x}^{(k)}=\boldsymbol{x}^{(k)}+\alpha(\boldsymbol{Ax}^{(k)}-\boldsymbol{b}),\qquad k=0,1,\cdots$$

求解，若

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}3 & 1\\ 2 & 2\end{bmatrix}$$

(1) 试求 α 的取值范围使得迭代法收敛;

(2) 若 α 选取适当的值可以使得上述迭代法收敛，试问 α 取何值时上述迭代法收敛速度最快？

(1) 要求 $\boldsymbol{I}+\alpha\boldsymbol{A}$ 的最大特征值的绝对值 (谱半径), 利用特征多项式：

$$|(1-\lambda)\boldsymbol{I}+\alpha\boldsymbol{A}|=\lambda^2-\lambda(5\alpha+2)+4\alpha^2+5\alpha+1=0$$

解得：

$$\lambda=\left|\frac{5\alpha+2\pm|3\alpha|}{2}\right|$$

经过验证，当 $\alpha>=0$ 时，$|\lambda|\geq 1$，舍去。

当 $\alpha<0$ 时，有条件：

$$4\alpha+1>-1\Rightarrow\alpha>-\frac{1}{2}$$

所以 $\alpha\in(-\frac{1}{2},0)$ 时迭代法收敛。

(2) 利用同一个分段函数，最小值在 $|4\alpha+1|=|\alpha+1|$ 的临界点取到，即 $\alpha=-\frac{2}{5}$ 取到，此时 $\lambda=0.6$。

2. 设 $\boldsymbol{A}$ 是严格对角占优矩阵, 证明求解线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的 Jacobi 迭代法收敛.

证：由 Jacobi 方法，构造迭代方程：

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{D}-\boldsymbol{L}-\boldsymbol{U}$$

$$\boldsymbol{x}^{(k+1)}=(\boldsymbol{L}+\boldsymbol{U})\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{x}^{(k)}+\boldsymbol{D}^{-1}b$$

假设 λ 为矩阵 $\boldsymbol{J}=(\boldsymbol{L}+\boldsymbol{U})\boldsymbol{D}^{-1}$ 的特征值，考虑 J 的特征多项式：

$$|\boldsymbol{I}\lambda-(\boldsymbol{L}+\boldsymbol{U})\boldsymbol{D}^{-1}|=|\boldsymbol{D}^{-1}||\boldsymbol{D}-(\boldsymbol{L}+\boldsymbol{U})|=0$$

由于 $|\boldsymbol{D}^{-1}|\neq 0$，所以 $|\lambda\boldsymbol{D}-(\boldsymbol{L}+\boldsymbol{U})|=0$，即有：

$$\begin{vmatrix} \lambda a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \lambda a_{nn} \end{vmatrix}=0$$

但当 $|\lambda|\geq 1$ 时，矩阵 $\lambda\boldsymbol{D}-(\boldsymbol{L}+\boldsymbol{U})$ 严格对角占优，因此是非奇异的，所以行列式 $|\lambda\boldsymbol{D}-(\boldsymbol{L}+\boldsymbol{U})|\neq 0$，所以可以认为 $|\lambda|<1$，所以 $\rho(\boldsymbol{D}-(\boldsymbol{L}+\boldsymbol{U}))<1$，因此迭代法收敛。

3. 若 $\boldsymbol{A}$ 是严格对角占优的对称矩阵或不可约对角占优的对称矩阵, 且对角线元素为正, 则 $\boldsymbol{A}$ 正定.

证：由于 $\boldsymbol{A}$ 为实对称阵，则 $\boldsymbol{A}$ 有实特征值，若 $\boldsymbol{A}$ 非正定，则存在某一特征值 $\lambda_p\leq 0$，特征值满足特征多项式：

$$|\boldsymbol{A}-\lambda_p\boldsymbol{I}|=0$$

显然若 $\lambda_p\leq 0$，则 $\boldsymbol{A}-\lambda_p\boldsymbol{I}$ 是严格对角占优或不可约对角占优的，所以不可能为奇异的，所以 $|\boldsymbol{A}-\lambda_p\boldsymbol{I}|\neq 0$，矛盾。故 $\boldsymbol{A}$ 的特征值均大于零，所以为正定的。

4. 设 $\boldsymbol{A}\in\mathbb{R}^{n\times n}$, 且 $\boldsymbol{A}$ 对称, 可按照如下步骤研究 Jacobi 迭代与 Gauss-Seidel 迭代求解线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的收敛性.

(1) 设 $\boldsymbol{A}$ 对称正定，记

$$\|\boldsymbol{x}\|_{\boldsymbol{A}}=\sqrt{(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})},\quad \in\mathbb{R}^n$$

证明 $\|\boldsymbol{x}\|_{\boldsymbol{A}}$ 是 $\mathbb{R}_n$ 上的一种范数；

(2) 设 $\boldsymbol{A}$ 对称正定，若存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 使得 $2\boldsymbol{P}-\boldsymbol{A}$ 正定，则迭代法

$$\boldsymbol{x}^{(k+1)}=\boldsymbol{x}^{(k)}+\boldsymbol{P}^{-1}(b-\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^{(k)}),\quad k=0,1,\cdots$$

收敛;

(3) 若 $\boldsymbol{A}$ 对称, 利用上述得到的结论, 分别导出 Jacobi 迭代与 Gauss-Seidel 迭代求解线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 收敛的充分条件.

(1)

对于任意 $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n\neq\boldsymbol{0}$, $\|\boldsymbol{x}\|_{\boldsymbol{A}}=\sqrt{\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}}$，由于 $\boldsymbol{A}$ 为正定矩阵，所以 $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}>0$，所以 $\forall x\in$

$\mathbb{R}^n$, $\|\boldsymbol{x}\|_{\boldsymbol{A}} \geq 0$ 且满足 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 时，$\|\boldsymbol{x}\|_{\boldsymbol{A}}=0$，满足正定性。
并且 $\forall k \in \mathbb{R}$, $\|k\boldsymbol{x}\|_{\boldsymbol{A}} = \sqrt{k^2\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}} = |k|\sqrt{\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}} = |k|\|k\boldsymbol{x}\|_{\boldsymbol{A}}$，满足齐次性
作为范数，还需要满足三角不等式，即：

$$\|\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}\| \leq \|\boldsymbol{u}\| + \|\boldsymbol{v}\|$$

即要证：

$$\sqrt{(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})^T\boldsymbol{A}(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})} \leq \sqrt{\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}} + \sqrt{\boldsymbol{v}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{v}}$$

$$\Leftrightarrow (\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{u})^2 \leq 4(\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{u})(\boldsymbol{v}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{v})$$

由于 $\boldsymbol{A}$ 为对称正定，则 $\exists \boldsymbol{B}$ 使得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{B}$，所以有：

$$4(\boldsymbol{B}\boldsymbol{u},\boldsymbol{B}\boldsymbol{v})^2 \leq 4(\boldsymbol{B}\boldsymbol{u},\boldsymbol{B}\boldsymbol{u})(\boldsymbol{B}\boldsymbol{v},\boldsymbol{B}\boldsymbol{v})$$

即柯西不等式，于是满足三角不等式。于是 $\|\boldsymbol{x}\|_{\boldsymbol{A}}$ 是范数。

(2) 考虑 $\|\boldsymbol{x}\|_A^2$ 的单调性。
由原式可以推出：

$$\boldsymbol{e}^{(k+1)} = (\boldsymbol{I}-\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A})\boldsymbol{e}^{(k)}$$

两边减去 $\boldsymbol{e}^{(k)}$，记 $\boldsymbol{e}^{(k)}-\boldsymbol{e}^{(k+1)}=\boldsymbol{\delta}^{(k)}$，得到：

$$\boldsymbol{\delta}^{(k)} = -\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{e}^{(k)}$$

则可以将 $(\boldsymbol{e}^{(k+1)},\boldsymbol{A}\boldsymbol{e}^{(k+1)})$ 转化表示：

$$(\boldsymbol{e}^{(k+1)},\boldsymbol{A}\boldsymbol{e}^{(k+1)}) = (\boldsymbol{e}^{(k)},\boldsymbol{A}\boldsymbol{e}^{(k)}) - (\boldsymbol{e}^{(k)},\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{e}^{k}) - (\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{e}^{k},\boldsymbol{A}\boldsymbol{e}^{k}) + (\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{e}^{k},\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{e}^{k})$$

将 $\boldsymbol{\delta}^{(k)} = -\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{e}^{(k)}$ 代入得到：

$$(\boldsymbol{e}^{(k+1)},\boldsymbol{A}\boldsymbol{e}^{(k+1)}) - (\boldsymbol{e}^{(k)},\boldsymbol{A}\boldsymbol{e}^{(k)}) = (\boldsymbol{\delta}^{(k)},\boldsymbol{A}\boldsymbol{\delta}^{(k)}) - 2(\boldsymbol{\delta}^{(k)},\boldsymbol{P}\boldsymbol{\delta}^{(k)})$$

由于 $2\boldsymbol{P}-\boldsymbol{A}$ 正定，则可看出 $(\boldsymbol{e}^{(k+1)},\boldsymbol{A}\boldsymbol{e}^{(k+1)}) - (\boldsymbol{e}^{(k)},\boldsymbol{A}\boldsymbol{e}^{(k)}) \leq 0$，所以 $\|\boldsymbol{x}\|_A^2$ 单调减，且 $\|\boldsymbol{x}\|_A^2 \geq 0$, 则单调递减有下界。所以 $\|\boldsymbol{x}\|_A^2$ 收敛。假设存在极限 $\boldsymbol{e}_*$，代入 $\boldsymbol{e}^{(k)}$ 的递推关系得到：

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_* = \boldsymbol{0}$$

由于 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}$ 非奇异，所以 $\boldsymbol{e}_*$ 等于 $\boldsymbol{0}$，所以迭代法收敛。

(3) 由上面得出的结论，分析 Jacobi 迭代方法以及 GS 迭代法的矩阵表达形式：

$$\boldsymbol{x}^{(k+1)} = \boldsymbol{D}^{-1}(\boldsymbol{L}+\boldsymbol{U})\boldsymbol{x}^{(k)} + \boldsymbol{D}^{-1}b = (\boldsymbol{I}-\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}^{(k)} + \boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{b} \qquad (Jacobi)$$

$$\boldsymbol{x}^{(k+1)} = (\boldsymbol{I}-(\boldsymbol{D}-\boldsymbol{L})^{-1}\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}^{(k)} + (\boldsymbol{D}-\boldsymbol{L})^{-1}\boldsymbol{b} \qquad (GS)$$

可以看出我们只需要保证 $\boldsymbol{A}$ 正定，并分别保证 $2\boldsymbol{D}-\boldsymbol{A}$ 以及 $2(\boldsymbol{D}-\boldsymbol{L})-\boldsymbol{A}$ 正定即可。

3. 对 $n = 10, 20, 40$, 五对角矩阵

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -20 & -8 & 1 & & & & \\ -8 & -20 & -8 & 1 & & & \\ 1 & -8 & -20 & -8 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & -8 & -20 & -8 & 1 \\ & & & 1 & -8 & 20 & -8 \\ & & & & 1 & -8 & 20 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

分别用 Jacobi 迭代与 Gauss-Seidel 迭代求解线性方程组 $\boldsymbol{Ax} = \mathbf{0}$. 取初值 $\boldsymbol{x}_0 = (1, 1, \cdots, 1)^T \in \mathbb{R}_n$, 迭代至 $\|\boldsymbol{x}^{(k)} - \boldsymbol{x}_*\|_\infty \le 10^{-8}$ 止, 试比较两种方法的迭代次数和收敛速度.

显然 $\boldsymbol{A}$ 是可逆的，所以即比较两种迭代方式趋近于 $\mathbf{0}$ 的速度，首先编写 Jacobi 迭代法的代码：

```
function res = Jacobi(n)
L =−(diag(ones(1, n − 2), −2) + diag(−8 .* ones(1, n − 1), −1));
U = L';
D = diag(ones(1, n).* 20);
x = ones(1, n)';
x1 = x;
eps = 1e−8;
cnt = 0;
b = zeros(1,n)';
q = norm( D\(L + U), inf);
while (1)
x1 = D\((L + U) * x + b);
cnt = cnt + 1;
q1 = norm(x1 − x, inf);
if(abs(q/ (1−q) * q1) < eps)
break;
end
x = x1;
end
res = x;
fprintf("iteration times: %d\n",cnt);
end
```

在输入为 $n = 10, 20, 40$ 时分别得到结果：

iteration times: 58

iteration times: 106

iteration times: 133

作为对比，编写 GS 迭代法的代码：

```
function res = Gauss(n)
L =-(diag(ones(1, n - 2), -2) + diag(-8 .* ones(1, n - 1), -1));
U = L';
D = diag(ones(1, n).* 20);
x = ones(1, n)';
x1 = x;
eps = 1e-8;
cnt = 0;
b = zeros(1,n)';
q = norm((D - L) \ U, inf);
while(1)
x1 = (D - L) \ (U * x + b);
q1 = norm(x1 - x, inf);
cnt = cnt + 1;
if(abs(q/(1-q) * q1 )< eps)
break;
end
x = x1;
end
fprintf("iteration times: %d\n", cnt);
res = x1;
end
```

同样分别输入 $n = 10, 20, 40$，得到结果：

iteration times: 28

iteration times: 31

iteration times: 31

相比较而言显然 GS 迭代法收敛速度更快。