科学计算作业 5

张文涛 517030910425

2018 年 10 月 27 日

1. 对权函数 $\rho(x)=1+x^2$，区间 $[-1,1]$，试求首项系数为 1 的正交多项式 $\phi_n(x)$，$n=0,1,2,3$
利用正交化过程求解。令 $\phi_0=1$，利用正交化过程，有：

$$\phi_1 = x - \frac{\int_{-1}^{1}(1+x^2)x\,dx}{\int_{-1}^{1}1+x^2\,dx} = x$$

$$\phi_2 = x^2 - \frac{\int_{-1}^{1}(1+x^2)x^2\,dx}{\int_{-1}^{1}1+x^2\,dx} - \frac{\int_{-1}^{1}(1+x^2)x^3\,dx}{\int_{-1}^{1}x^2(1+x^2)}x\,dx = x^2-\frac{2}{5}$$

$$\phi_3 = x^3 - \frac{\int_{-1}^{1}(1+x^2)x^3\,dx}{\int_{-1}^{1}1+x^2\,dx} - \frac{\int_{-1}^{1}(1+x^2)x^4\,dx}{\int_{-1}^{1}x^2(1+x^2)\,dx}x - \frac{\int_{-1}^{1}(1+x^2)(x^2-\frac{2}{5})x^3\,dx}{\int_{-1}^{1}(1+x^2)(x^2-\frac{2}{5})^2\,dx}(x^2-\frac{2}{5}) = x^3-\frac{9}{14}x$$

所以得到：

$$\begin{cases} \phi_0 = 1, \\ \phi_1 = x, \\ \phi_2 = x^2-\frac{2}{5} \\ \phi_3 = x^3-\frac{9}{14}x \end{cases}$$

2. 令 $s_n=\frac{1}{n+1}T'_{n+1}(x), n\geq 0. s_n$ 称为第二类 Chbeyshev 多项式，试求出 s_n 的表达式并证明 s_n 是 $[-1,1]$ 上带权函数 $\rho(x)=\sqrt{1-x^2}$ 的正交多项式序列.

$$\frac{T'_{n+1}(x)}{n+1} = \int_{-1}^{1}\frac{\sin[(n+1)\arccos x]}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

任取 $p,q\in[-1,1]$，

$$\int_{-1}^{1}\rho(x)s_p(x)s_q\,dx = \frac{\sin[(p+1)\arccos x]\sin[(q+1)\arccos x]}{\sqrt{1-x^2}}$$

令 $t=\arccos x$，作变量代换，改变积分上下限：

$$\int_{-1}^{1}\rho(x)s_p(x)s_q\,dx = \int_{2\pi}^{0}-\sin[(p+1)t]\sin[(q+1)t]\,dt$$

则有：

$$\int_{-1}^{1}\rho(x)s_p(x)s_q(x)\,dx = \begin{cases} 0 & p\neq q, \\ \pi & p=q \end{cases}$$

所以 s_n 是 $[-1,1]$ 上带权函数 $\rho(x)=\sqrt{1-x^2}$ 的正交多项式序列.

3. 设 n 为非负整数，$T_n(x)$ 为 Chebyshev 多项式，计算

$$\int_{-1}^{1}\frac{[T_n(x)]^2}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

由题意可知：

$$\int_{-1}^{1}\frac{[T_n(x)]^2}{\sqrt{1-x^2}}dx=\int_{-1}^{1}\frac{\cos^2(n\arccos(x))}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

令 $t=\arccos x$，作变量代换，改变积分上下限：

$$\int_{-1}^{1}\frac{[T_n(x)]^2}{\sqrt{1-x^2}}dx=\int_{0}^{2\pi}\cos^2(nt)dt=\int_{0}^{2\pi}\frac{\cos(2nt)+1}{2}$$

得到结果：

$$\int_{-1}^{1}\frac{[T_n(x)]^2}{\sqrt{1-x^2}}dx=\begin{cases}\pi & n\neq 0,\\ 2\pi & n=0\end{cases}$$

4. 设 $x_0,x_1,\cdots,x_n$ 为区间 $[a,b]$ 上相异节点，${}_{n+1}(x)=\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)$, 证明:

$$\max_{x_0\leq x\leq x_n}|\omega_{n+1}(x)|\leq\frac{1}{4}h^{n+1}n!$$

式中 $h=\max\limits_{0\leq i\leq n+1}(x_{i+1}-x_i)$

假设 $h=x_{k+1}-x_k$，则由基本不等式有当 $x=\frac{x_{k+1}+x_k}{2}$ 时：

$$|(x-x_k)(x-x_{k+1})|\leq\frac{1}{4}h^2$$

另外有，当某个确定的 $x=a,a\in[x_i,x_{i+1}]$，此时这个不等式有上限：

$$\max_{x_0\leq x\leq x_n}|\omega_{n+1}(x)|\leq|(a-x_i)(a-x_{i+1})|h^{n-1}p!q!$$

其中 $p+q=n+1,p>0,q>0$，p,q 为整数

同时考虑两个限制，可以发现当 $k=0$ 或 $k=n-1$ 且 $x=\frac{x_{k+1}+x_k}{2}$ 有最大值上限估计：

$$\max_{x_0\leq x\leq x_n}|\omega_{n+1}(x)|\leq\frac{1}{4}h^{n+1}n!$$

5. 设 L_n 为 n 次 Legendre 多项式，试证明:

$$(1-x^2)L_n'(x)+nxL_n(x)=nL_{n-1}(x).$$

利用数学归纳法证明，假设当 $\forall n,n\leq k-1$ 时等式成立，则 $n=k$ 时也成立，首先验证 $k=1,k=2,k=3$ 的情况：

$$k=1\Rightarrow(1-x^2)+x^2=1$$

$$k=2 \Rightarrow (1-x^2)3x+x(3x^2-1)=2x$$

$$k=3 \Rightarrow (1-x^2)(15x^2-3)+3x(5x^3-3x)=9x^2-1$$

显然 $k=1,k=2,k=3$ 均成立，则假设 $n \le k-1(k>3)$ 时成立，则可以利用已知的递推式以及归纳假设：

$$nL_k(x)=(2k-1)xL_{k-1}(x)-(k-1)L_{k-2}(x)$$

两边对 x 求导，得到：

$$kL_k'(x)=(2k-1)L_{k-1}(x)+(2k-1)xL_{k-1}'(x)-(k-1)L_{k-2}'(x)$$

利用归纳假设替换 $L_{k-1}'(x),L_{k-2}'(x)$，得到：

$$kL_k'(x)(1-x^2)=(2k-1)(1-kx^2)L_{k-1}(x)+3x(k-1)^2L_{k-2}(x)-(k-1)(k-2)L_{k-3}(x)$$

利用递推公式替换 $L_{k-2}(x)$，化简得到：

$$kL_k'(x)(1-x^2)=(4k^2x^2-8kx^2+3x^2+2k-1)L_{k-1}(x)-3k(k-1)xL_k(x)-(k-1)(k-2)L_{k-3}(x)$$

再两次利用递推公式替换 $L_{k-3}(x)$，得到：

$$kL_k'(x)(1-x^2)=(4k^2x^2-8kx^2+3x^2+2k-1)L_{k-1}(x)-3k(k-1)xL_k(x)-(2k-3)x((2k-1)xL_{k-1}(x)-kL_k(x))$$

进一步化简得到：

$$kL_k'(x)(1-x^2)=k^2L_{k-1}(x)-k^2xL_k(x)$$

即：

$$L_k'(x)(1-x^2)=kL_{k-1}(x)-kxL_k(x)$$

证毕

6. 设 $f \in C[0,2\pi]$，且满足 $f(0)=f(2\pi)$，记 $S_n=span\{1,\cos x,\sin x,\cdots,\cos(nx),\sin(nx)\}$.
(1) 证明：生成 S_n 的函数组相互正交.
(2) 试求 $f_*=arg\min\limits_{g\in S_n}||f-g||_2$，其中 $||g||_2=(\int_0^{2\pi}g^2(x)dx)^{\frac{1}{2}}$

(1)$\forall g_1(x),g_2(x)\in S_n$，分类讨论：
当 $g_1(x)=sin(mx),g_2(x)=sin(nx),m,n$ 为整数且 $m,n>0$ 时：

$$\int_0^{2\pi} sin(mx)sin(nx)dx=\begin{cases}0 & m\ne n\\ \pi & m=n\end{cases}$$

当 $g_1(x)=cos(mx),g_2(x)=cos(nx),m,n$ 为整数且 $m,n>0$ 时：

$$\int_0^{2\pi} cos(mx)cos(nx)dx=\begin{cases}0 & m\ne n\\ \pi & m=n\end{cases}$$

当 $g_1(x)=cos(mx), g_2(x)=sin(nx), m,n$ 为整数且 $m,n>0$ 时：

$$\int_0^{2\pi} cos(mx)sin(nx)dx=0$$

当 $g_1(x)=1, g_2(x)=sin(nx), n$ 为整数且 $n>0$ 时：

$$\int_0^{2\pi} sin(nx)dx=0$$

当 $g_1(x)=1, g_2(x)=cos(mx), m$ 为整数且 $m>0$ 时：

$$\int_0^{2\pi} cos(mx)dx=0$$

当 $g_1(x)=1, g_2(x)=1$ 时：

$$\int_0^{2\pi} 1dx=2\pi$$

所以可以证明生成 S_n 的函数组相互正交

(2) 我们可以猜想满足条件的 $p(x)\in S_n$ 为原函数的傅里叶级数展开，然后在证明其满足最佳平方逼近的条件即可。构造函数

$$p(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{n}(a_k\cos(kx)+b_k\sin(kx))$$

其中：

$$a_k=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)cos(kx)dx, n=0,1,2\cdots$$

$$b_k=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)sin(kx)dx, n=1,2\cdots$$

值得注意的是：

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)dx=0$$

则：

$$p(x)=\sum_{n=1}^{n}(a_k\cos(kx)+b_k\sin(kx))$$

假设 $\phi_n(x)$ 为任意 S_n 中的函数，且有 $\phi_0=1$，r_n 为之前我们所构造得到的系数 a_n 与 b_n 的集合，由书中已经得出的结论如果我们所构造的函数满足：

$$\sum_{j=0}^{n}(\phi_k(x),\phi_j(x))r_j=(f(x),\phi_k(x)), k=0,1,\cdots,n$$

就能证明 $p(x)$ 为原函数的最小二次逼近，所以有：

$$\sum_{j=0}^{n}(\phi_k(x),\phi_j(x))r_j=\sum_{j=0}^{n}\int_0^{2\pi}\phi_j\phi_k\,dx\,(\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\phi_k(x)\,dx)$$

观察我们在上一问中得到的结论：

$$\int_0^{2\pi}\phi_j\phi_k\,dx=\begin{cases}\pi & j=k\quad j,k\neq 0,\\ 2\pi & j=k=0\\ 0 & j\neq k\end{cases}$$

则有

$$\sum_{j=0}^{n}(\phi_k(x),\phi_j(x))r_j = \int_0^{2\pi} f(x)\phi_k(x)\,dx$$

满足最小二次逼近的要求, 所以：

$$f_*(x) = \sum_{n=1}^{n}(a_k\cos(kx) + b_k\sin(kx))$$

其中

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)cos(kx)dx \quad n = 1, 2\cdots$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)sin(kx)dx \quad n = 1, 2\cdots$$

7. 已知实验数据如下：使用 MATLAB 编程，用最小二乘法求形如 $y = a + bx^2$ 的经验公式，并

x_i	19	25	31	38	44
y_i	19.0	32.3	49.0	73.3	97.8

计算均方误差.

假设我们所求的函数为：

$$y(x) = a + bx^2$$

则要求：

$$R(a,b) = \sum_{i=1}^{5}[y_i - y(x_i)]^2 = \sum_{i=1}^{5}(y_i - a - bx_i^2)^2$$

取得最小值，即：

$$\frac{\partial R(a,b)}{\partial a} = 0$$

$$\frac{\partial R(a,b)}{\partial b} = 0$$

由此得到线性方程组：

$$\begin{cases} a + (\sum\limits_{i=1}^{5} x_i^2)b = \sum\limits_{i=1}^{5} y_i \\ (\sum\limits_{i=1}^{5} x_i^2)a + (\sum\limits_{i=1}^{5} x_i^4)b = \sum\limits_{i=1}^{5} x_i^2 y_i \end{cases}$$

可以利用 MATLAB 编程解此线性方程组得到解以及均方误差：

```
function res = lesq(x, y)
a0 = 1;
tmp = x.^2;
a1 = sum(tmp);
tmp1 = tmp.*y;
tmp = tmp.^2;
```

```
a3 = sum(tmp);
a4 = sum(tmp1);
a5 = sum(y);
lhs = [a0, a1;a1, a3];
rhs = [a5, a4]';
res = lhs\rhs;
error = sum((res(1) + res(2).*(x.^2) - y).^2);
res(3) = error;
end
```

最后的结果及均方误差为:

$$\begin{cases} a = -0.3693 \\ b = 0.0510 \\ \delta = 1.9972 \end{cases}$$