科学计算作业 3

张文涛 517030910425

2018 年 10 月 12 日

1. 设 $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$，求 $f[2^0,2^1,\cdots,2^n]$ 及 $f[2^0,2^1,\cdots,2^{n+1}]$。

   解：根据差商的性质，对于 n 阶可导的函数 $f(x)$ 的任意 n 个插值节点 $x_0,x_1,\cdots,x_n$，都有

$$f[x_0,x_1,\cdots,x_n]=\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}$$

   因此，

$$f[2^0,2^1,\cdots,2^n]=\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}=a_n$$

$$f[2^0,2^1,\cdots,2^{n+1}]=\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}=0$$

2. 求证 n 次 Newton 插值基函数 $\{1,(x-x_0),\cdots,(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})\}$ 是线性空间 $\mathbb{P}_n$ 的一组基。

   证：记 $e_0=1,e_i=(x-x_{i-1})(1\le i\le n)$。观察到 $\{1,x,x^2,x^3,\cdots,x^n\}$ 显然是线性空间 $\mathbb{P}_n$ 的一组基。只需证明 $\{e_0,e_1,\cdots,e_n\}$ 可以线性表出 $\{1,x,x^2,x^3,\cdots,x^n\}$ 即可。
   利用第二数学归纳法证明 $k=0,1$ 时，有

$$1=e_0,x=e_1+x_0e_0$$

   由此假设当 $k<p,1\le p\le n$ 时，x^k 都可以被 $\{e_0,e_1,\cdots,e_n\}$ 线性表出，只需证明 x_{k+1} 也可以被被 $\{e_0,e_1,\cdots,e_n\}$ 线性表出即可。

$$e_{k+1}=(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})\in\mathbb{P}_{k+1}$$

   故可以将 e_{k+1} 写为

$$e_{k+1}=x^{k+1}+c_kx^k+\cdots+c_1x+c_0$$

$$x^{k+1}=e_{k+1}-c_kx^k-\cdots-c_1x-c_0$$

   其中 $c_i,(0\le i\le k)$ 为常数。根据归纳法假设，x^k 都可以被 $\{e_0,e_1,\cdots,e_n\}$ 线性表出，因此证明 x_{k+1} 也可以被被 $\{e_0,e_1,\cdots,e_n\}$ 线性表出。所以 $\{1,(x-x_0),\cdots,(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})\}$ 是线性空间 $\mathbb{P}_n$ 的一组基。

3. 设 $f(x)=ln(1+x),x\in[0,1],p_n(x)$ 为 $f(x)$ 以 $n+1$ 个等距节点 $x_i=\frac{i}{n},i=0,1,2,\cdots,n$ 为插值节点的 n 次插值多项式，证明：对任意 $x\in[0,1]$，成立 $\lim\limits_{n\to\infty}|f(x)-p_n(x)|=0$

证：观察到

$$\lim_{n\to\infty}|f(x)-p_n(x)|=\lim_{n\to\infty}|R_n(x)|$$

并且原函数任意阶可导，因此只需要证：

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x(x-\frac{1}{n})\cdots(x-1)\right|=0$$

易得

$$f^{n+1}(x)=\frac{(-1)^n}{(1+x)^{n+1}}$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x(x-\frac{1}{n})\cdots(x-1)\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^n}{(1+\xi)^{n+1}(n+1)!}x(x-\frac{1}{n})\cdots(x-1)\right|$$

并且因为 $x\in[0,1]$

$$\left|\frac{(-1)^n}{(1+\xi)^{n+1}(n+1)!}x(x-\frac{1}{n})\cdots(x-1)\right|\leq\left|\frac{(-1)^n}{(1+\xi)^{n+1}(n+1)!}\right|$$

容易得到：

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^n}{(1+\xi)^{n+1}(n+1)!}\right|=0$$

且

$$\left|\frac{(-1)^n}{(1+\xi)^{n+1}(n+1)!}x(x-\frac{1}{n})\cdots(x-1)\right|\geq 0$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x(x-\frac{1}{n})\cdots(x-1)\right|=0$$

故得证。

4. 设 $l_0(x)$ $\{x_i\}_{i=0}^n$ 进行 n 次 Lagrange 插值相应于 x_0 处的基函数，证明：

$$l_0(x)=1+\frac{x-x_0}{x_0-x_1}+\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}+\cdots+\frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\cdots(x_0-x_{n-1})}$$

.

证：利用数学归纳法证明，进行 0 次 Lagrange 插值时：

$$l_0(x)=1$$

进行 1 次 Lagrange 插值时：

$$l_0(x)=\frac{x-x_1}{x_0-x_1}=1+\frac{x-x_0}{x_0-x_1}$$

观察到等式在 $n=0,n=1$ 时成立，由此假设 $n=k-1$ 时等式成立，即：

$$l_0(x)=1+\frac{x-x_0}{x_0-x_1}+\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}+\cdots+\frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{k-1})}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\cdots(x_0-x_{k-1})}=\frac{\prod_{j=1}^{j=k-1}(x-x_j)}{\prod_{j=1}^{j=k-1}(x_0-x_j)}$$

在该等式两边加上

$$\frac{\prod_{i=0}^{k}(x-x_i)}{\prod_{j=1}^{k}(x_0-x_j)}$$

等式右边变为：

$$\frac{\prod_{i=1}^{k-1}(x-x_i)}{\prod_{j=1}^{k}(x_0+x_j)}[(x-x_0)+(x_0-x_k)]=\frac{\prod_{i=1}^{k}(x-x_i)}{\prod_{j=1}^{k}(x_0+x_j)}$$

即得到 k 次 Lagrange 插值下的 $l_0(x)$，所以由归纳法，得证。

5. 若 $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$ 有 n 个不同实根 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，证明

$$\sum_{j=1}\frac{x_j^k}{f'(x_j)}=\begin{cases}0, & 0\le k\le n-2;\\ \frac{1}{a_n}, & k=n-1.\end{cases}$$

证：由题意得 n 次多项式 $f(x)$ 有 n 个不同实根，由代数学基本定理可知 $f(x)$ 可以表示为：

$$f(x)=a_n(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)$$

则 $f'(x)$ 可以记为：

$$f(x)=a_n\sum_{i=1}^{n}(\prod_{k=0,k\neq i}^{n}(x-x_k))$$

则

$$f'(x_j)=a_n\prod_{i=0,i\neq j}^{n}(x-x_i)$$

可以令 $p(x)=x^k$，则：

$$\sum_{j=1}\frac{x_j^k}{f'(x_j)}=\frac{p[x_1,x_2,\cdots,x_n]}{a_n}=\frac{p^{(n-1)}(\xi)}{a_n(n-1)!}$$

当 $k\in[0,n-2]$ 时，$p^{(n-1)}(x)=0$，

当 $k=n-1$ 时，$p^{(n-1)}(x)=\frac{1}{a_n}$，故原式得证。

6. n 次 Chebyshev 多项式定义为：$T_n(x)=\cos(n\arccos x)$.

(1) 试求出 n 次 Chebyshev 多项式的 n 个零点.

(2) 设 $f(x)=\frac{1}{1+x^2}, x\in[-5,5]$，以 $T_n(x)$ 的零点作为插值节点，利用 MATLAB 分别作出 3 次 Lagrange 插值多项式，6 次 Lagrange 插值多项式，9 次 Lagrange 插值多项式，10 次 Lagrange 插值多项式，并描述观察到的现象。

(1) 解：要求 $T_n(x)=0$，则有：

$$n\arccos x=\frac{\pi}{2}+k\pi$$

$$\arccos x=\frac{\pi}{2n}+\frac{k\pi}{n}$$

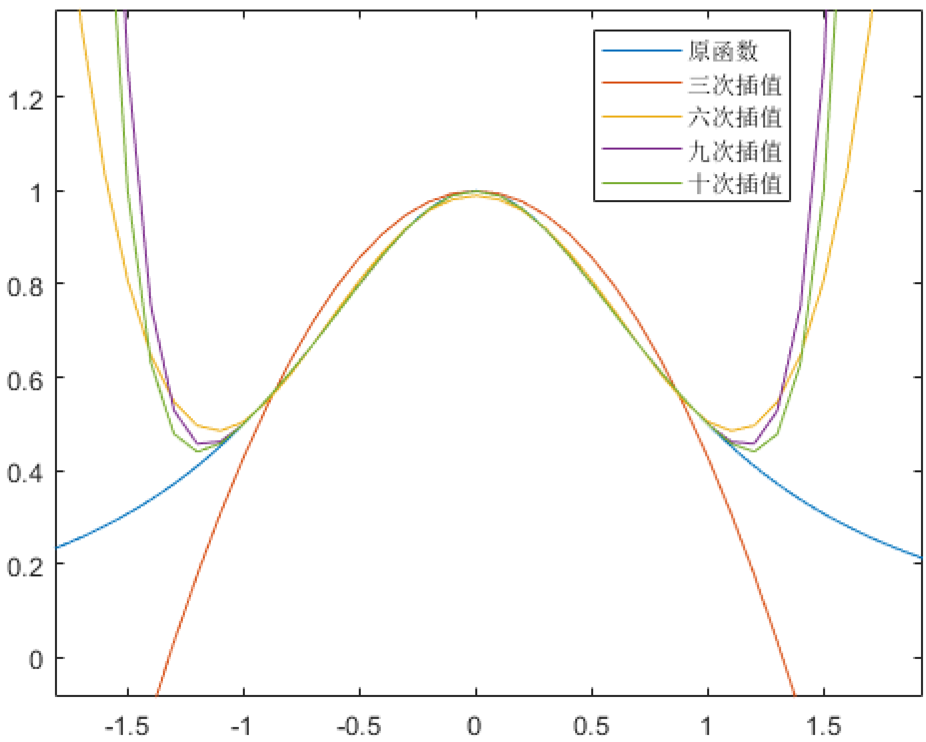
$$x=\cos(\frac{\pi}{2n}+\frac{k\pi}{n})$$

让 k 取遍 $0, 1, 2\cdots, n-1$，则可以找到 n 个零点。

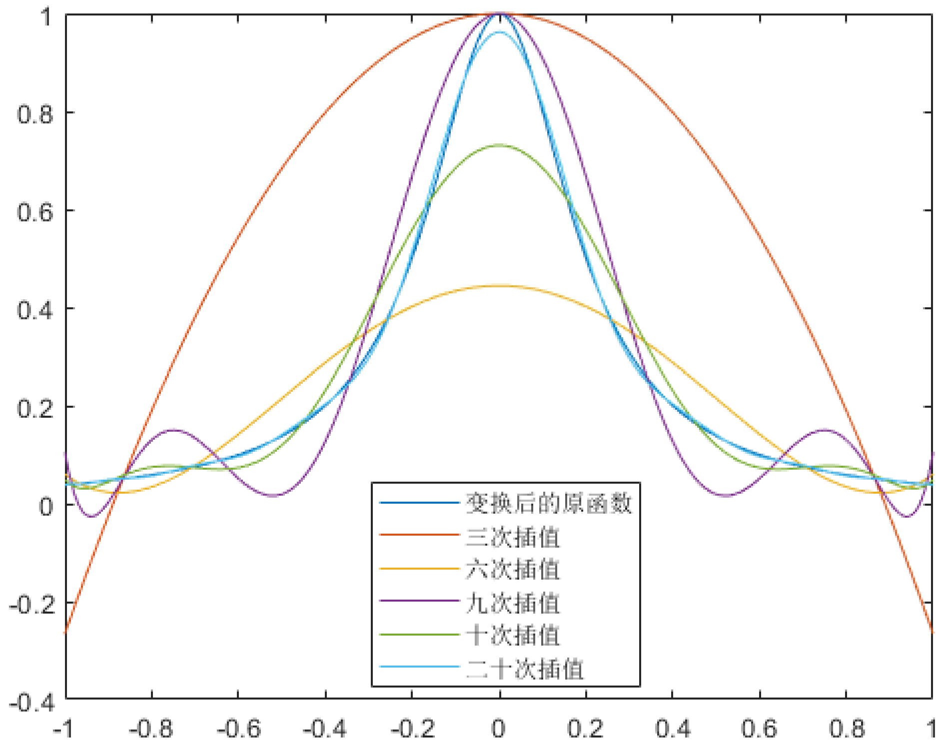
(2) 利用 MATLAB，编写如下程序：

```
function yres = chebyshev(n, xres)
k = [0:1:n-1];
xc = cos(pi/(2*n)+k.*pi/n);
yc = 1./(1+(xc).^2);
res = 0;
for i = 1 :n
z = ones(1, length(xres));
for j = 1:n
 if j ~= i
z = z.*(xres - xc(j))./(xc(i) - xc(j));
end
end
res = res + z.*yc(i);
end
yres = res;
plot(xres, yres);
end
```

在 n 取 $3, 6, 9, 10$ 时分别进行作图，得到如下图像：



可以看出在 Chebyshev 多项式定义域内插值结果相当好，但在定义域外 Runge 现象非常严重。此时令 $x = 5t, t \in [-1, 1]$，将函数变换到 $[-1, 1]$ 上，将上述程序稍作修改，再取 Chebyshev 多项式的零点进行插值，得到如下结果。



可以看到效果较好，并且边界处的 Runge 现象也消失了，达到了数值计算得到目的。并且在尝试更高次插值时，发现插值次数增高时，插值结果变得非常好。