

### 习题 3

- 1、设  $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$ , 求  $f[2^0, 2^1, \cdots, 2^n]$  及  $f[2^0, 2^1, \cdots, 2^{n+1}]$ .
- 2、求证  $n$  次 Newton 插值基函数  $\{1, (x - x_0), \cdots, (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{n-1})\}$  是线性空间  $\mathbb{P}_n$  的一组基.

3、设  $f(x) = \ln(1+x)$ ,  $x \in [0, 1]$ ,  $p_n(x)$  为  $f(x)$  以  $n+1$  个等距节点  $x_i = \frac{i}{n}$ ,  $i = 0, 1, 2, \cdots, n$  为插值节点的  $n$  次插值多项式, 证明: 对任意  $x \in [0, 1]$ , 成立  $\lim_{n \rightarrow \infty} |f(x) - p_n(x)| = 0$ .

4、设  $l_0(x)$  为以节点  $\{x_i\}_{i=0}^n$  进行  $n$  次 Lagrange 插值相应于  $x_0$  处的基函数, 证明:

$$l_0(x) = 1 + \frac{x - x_0}{x_0 - x_1} + \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + \cdots + \frac{(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{n-1})}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2) \cdots (x_0 - x_{n-1})}.$$

5、若  $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$  有  $n$  个不同实根  $x_1, x_2, \cdots, x_n$ , 证明

$$\sum_{j=1}^n \frac{x_j^k}{f'(x_j)} = \begin{cases} 0, & 0 \leq k \leq n-2; \\ \frac{1}{a_n}, & k = n-1. \end{cases}$$

6、 $n$  次 Chebyshev 多项式定义为:  $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$ .

(1) 试求出  $n$  次 Chebyshev 多项式的  $n$  个零点.

(2) 设  $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ ,  $x \in [-5, 5]$ , 以  $T_n(x)$  的零点作为插值节点, 利用 MATLAB 分别作出 3 次 Lagrange 插值多项式, 6 次 Lagrange 插值多项式, 9 次 Lagrange 插值多项式, 10 次 Lagrange 插值多项式, 描述观察到的现象.