科学计算作业 9

张文涛 517030910425

2018 年 11 月 30 日

1. 定义函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 如下：

$$f(x)=\ln(1+e^x)$$

证明：f 在任何有限闭区间 $[a,b]$ 上是压缩映像，但没有不动点。

证：对于任何有限闭区间 $[a,b]$，有：

$$\ln(1+e^b)-\ln(1+e^a)-(b-a)=\ln(1+\frac{1}{e^b})-\ln(1+\frac{1}{e^a})=\ln\left(\frac{e^{a+b}+e^a}{e^{a+b}+e^b}\right)<0$$

所以是压缩映像

假设原函数有不动点 x_*，代入并两边取指数得到：

$$e^{x_*}=1+e^{x_*}$$

显然 x_* 不存在，因此没有不动点。

2. 设 $f(x)\in C^1(\mathbb{R})$，满足 $f(x_*)=0$. 设对于一切 $x\in\mathbb{R}$, 满足 $0<m\le f'(x)\le M$，证明：若参数 $\lambda\in(0,2/M)$，则迭代法

$$x_{k+1}=x_k-\lambda f(x_k)$$

取任意初值 $x_0\in\mathbb{R}$ 产生的序列收敛到 x_*.

证：记 $\phi(x)=x-f(x)$，由题意有 $\phi(x_*)=x_*$，即 x_* 为 $\phi(x)$ 的不动点，对于 $\mathbb{R}$ 上任意包含 x_* 的区间 $[a,b]$，有：

$$\phi(a)-\phi(b)=\phi'(\xi)(b-a)\le\max\{1-\lambda m,1-\lambda M\}(b-a)$$

$$|\phi(a)-\phi(b)|=|\phi'(\xi)||b-a|\le\max\{|1-\lambda m|,|1-\lambda M|\}|b-a|$$

由于 $\lambda\in(0,2/M)$，则可以验证 $|1-\lambda m|<1,|1-\lambda M|<1$，因此对于 $x_{k+1},x_k\in[a,b]$，都有：

$$|x_{k+2}-x_{k+1}|=|\phi(x_{k+1})-\phi(x_k)|\le L|x_{k+1}-x_k|\qquad L=\max\{|1-\lambda m|,|1-\lambda M|\}\in(0,1)$$

所以对于任意的起始值 x_0，可以进行一次迭代得到起始区间 $[x_0,x_1]$，由于我们证明了对于任意 $\mathbb{R}$ 上区间 $\phi(x)$ 都是压缩映射，且由不动点的唯一性可以得知 x_k 收敛于 x_*。

3. 设 $a>0$，n 为正整数，应用 Newton 法于方程 $f(x)=x^n-a=0$ 及 $g(x)=1-a/x^n=0$ 求正根.

(1) 分别导出求解 $\sqrt[n]{a}$ 的迭代表达式 $x_{k+1}=\phi_1(x_k)$ 及 $x_{k+1}=\phi_2(x_k)$.

(2) 分别计算 $\lim\limits_{k\to\infty}(\sqrt[n]{a}-x_{k+1})/(\sqrt[n]{a}-x_k)^2$.

(3)) 确定待定系数, 使得基于映射 $\phi=c_1\phi_1+c_2\phi_2$ 导出的不动点方法产生的迭代序列 x_k 三阶收敛到 $\sqrt[n]{a}$.

(1) 利用牛顿迭代法公式，有：

$$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}=x_k-\frac{x_k^n-a}{nx_k^{n-1}}=\phi_1(x_k)$$

$$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}=x_k-\frac{x_k^{n+1}-ax_k}{na}=\phi_2(x_k)$$

(2) 由题意得：

$$\frac{\sqrt[n]{a}-x_{k+1}}{(\sqrt[n]{a}-x_k)^2}=\frac{\phi_1(\sqrt[n]{a})-\phi_1(x_k)}{(\sqrt[n]{a}-x_k)^2}=\frac{\phi_1'(\sqrt[n]{a})(x_k-\sqrt[n]{a})+\frac{\phi_1''(\xi_1)(x_k-\sqrt[n]{a})^2}{2!}}{(\sqrt[n]{a}-x_k)^2}\qquad \xi_1\in(x_k,\sqrt[n]{a})$$

则有：

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\sqrt[n]{a}-x_{k+1}}{(\sqrt[n]{a}-x_k)^2}=\frac{\phi_1''(\sqrt[n]{a})}{2}=-\frac{n-1}{2\sqrt[n]{a}}$$

对于 ϕ_2 可以类似计算出：

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\sqrt[n]{a}-x_{k+1}}{(\sqrt[n]{a}-x_k)^2}=\frac{\phi_2''(\sqrt[n]{a})}{2}=-\frac{n+1}{2\sqrt[n]{a}}$$

(3) 我们只需要调整系数消去二次项即可，c_1 与 c_2 需要满足以下方程：

$$\begin{cases} c_1+c_2=1 \\ \phi_1''(\sqrt[n]{a})c_1+\phi_2''(\sqrt[n]{a})c_2=0 \end{cases}$$

解得：

$$\begin{cases} c_1=\frac{n-1}{2} \\ c_2=\frac{3-n}{2} \end{cases}$$

所以 $\phi=\frac{n-1}{2}\phi_1+\frac{3-n}{2}\phi_2$

4. 设 $a>0$, n 为正整数, 给定迭代法

$$x_{k+1}=\frac{x_k(x_k^2+3a)}{3x_k^2+a}$$

证明：

(1) 迭代法是计算 $\sqrt{a}$ 的三阶方法

(2) 假定初值 x_0 充分靠近 x_*, 计算 $\lim\limits_{k\to\infty}(\sqrt{a}-x_{k+1})/(\sqrt{a}-x_k)^3$.

(1) 记 $\phi(x)=\frac{x(x^2+3a)}{3x^2+a}$，求其三阶导数：

$$\phi'(x)=3\left(\frac{x^2-a}{3x^2+a}\right)^2$$

$$\phi''(x)=\frac{48ax(x^2-a)}{(3x^2+a)^3}$$

$$\phi'''(x)=\frac{48(9ax^4-a^3-18x^4+18a^2x^2)}{(3x^2+a)^4}$$

可以验证 $\phi'(\sqrt{a})=0\,,\phi''(\sqrt{a})=0\,,\phi'''(\sqrt{a})=\frac{3}{2a}$ 由此可以看出这是计算 $\sqrt(a)$ 的三阶方法。

(2) 由题意得：

$$\frac{\sqrt{a}-x_{k+1}}{(\sqrt{a}-x_k)^3}=\frac{\phi(\sqrt{a})-\phi(x_k)}{(\sqrt{a}-x_k)^3}=\frac{\phi'''(\xi)}{3!}\qquad \xi\in(x_k,\sqrt{a})$$

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\sqrt{a}-x_{k+1}}{(\sqrt{a}-x_k)^3}=\frac{\phi'''(\sqrt{a})}{3!}=\frac{1}{4a}$$

5. 考虑方程 $3x^2-e^x=0$. 给定容许误差 $\epsilon=10^{-6}$

(1) 分析方程根的分布情况.

(2) 对于每个根，构造不动点算法求根，利用 MATLAB 编程求解，记录迭代次数并观察给定不同初值的结果.

(3) 对于每个根，构造 Newton 法求根，利用 MATLAB 编程求解，记录迭代次数并观察给定不同初值的结果.

(1) 利用 MATLAB 编程，分析解所在的大致区域：

```
function analyze()
x  = -10:0.01:10;
res = 3*x.^2 - exp(x);
    for i = 1:length(res) - 1
        if res(i) * res(i+1) < 0
            fprintf("(%.2f, %.2f)\n",x(i), x(i + 1));
        end
    end
end
```

得到 $(-0.46,-0.45)\,,(0.91,0.92)\,,(3.73,3.74)$，确定解所在的大致区间。

(2) 根据题意可以构造

对于在 $(-0.46, -0.45)$ 的根，构造得到函数：

$$\phi_1(x) = \frac{3x^2 - e^x + 2x}{2} = x$$

求导数得到：

$$\phi_1'(x) = \frac{6x - e^x + 2}{2} \leq \phi_1'(-0.45) = L_1$$

编写 MATLAB 程序：

```
function root1(st)
eps = 1e−6;
cnt = 0;
xk1 = 0;
xk = st;
L = (6*(−0.45)−exp(−0.45)+ 2)/2;
while(1)
    cnt = cnt + 1;
    xk1 = (3 * xk.^2 − exp(xk) +2*xk)/2;
    if (abs(xk1 − xk)/(1 − L) <= eps)
        break;
    end
    xk = xk1;
end
fprintf("result is %.7f, iterate %d times\n", xk, cnt);
end
```

输入-0.45 可以得到结果：result is -0.4589632, iterate 26 times. 并且离精确解越近，迭代次数越少。

对于在 $(0.91, 0.92)$ 的根，构造得到函数：

$$\frac{e^x}{3x} = x$$

求导可以得到 Lipschitz 系数：

$$|\phi_2'(x)| = \left| e^x \left(\frac{x-1}{3x^2} \right) \right| \leq |\phi_2'(0.91)| = L_2$$

则可以利用此结果编写 MATLAB 程序：

```
function root2(st)
eps = 1e−6;
cnt = 0;
xk1 = 0;
xk = st;
L = exp(0.91).*(0.91 − 1) / (3*0.91.^2);
while(1)
    cnt = cnt + 1;
```

```
        xk1 = exp(xk)./(3.*xk);
        if(abs(xk1 - xk)/(1 - L) <= eps)
            break;
        end
        xk = xk1;
    end
    fprintf("result  is  %.7f,  iterate  %d times\n", xk, cnt);
    end
```

得到结果：result is 0.9100082, iterate 5 times，改变起始节点的效果与 (1) 类似。

对于在 $(3.73, 3.74)$ 的根，构造得到函数：

$$\frac{3x^3}{e^x} = x$$

求导可以得到 Lipschitz 系数：

$$|\phi_3'(x)| = \left|\frac{9x^2 - 3x^3}{e^{2x}}\right| \le |\phi_3'(3.74)| = L_2$$

则可以利用此结果编写 MATLAB 程序：

```
function root3(st)
eps = 1e-6;
cnt = 0;
xk1 = 0;
xk = st;
L = (9*3.74^2 - 3*3.74^3) / exp(3.74);
while(1)
    cnt = cnt + 1;
    xk1 = 3*xk.^3./exp(xk);
    if(abs(xk1 - xk)/(1 - L) <= eps)
        break;
    end
    xk = xk1;
end
fprintf("result  is  %.7f,  iterate  %d times\n", xk, cnt);
end
```

输入 3.73，得到结果：result is 3.7330781, iterate 27 times，改变起始节点的效果与 (1) 类似。

(2) 计算牛顿公式得到：

$$x_{k+1} = x_k - \frac{3x_k^2 - e_k^x}{6x_k - e_k^x}$$

编写 MATLAB 程序：

```
function Newton(st)
```

```
    eps = 1e-6;
    cnt = 0;
    xk1 = 0;
    xk = st;
    while(1)
        cnt = cnt + 1;
        xk1 = xk - (3*xk.^2 - exp(xk))./(6.*xk - exp(xk));
        if(abs(xk1 - xk)/(xk) < eps)
            break;
        end
        xk = xk1;
    end
    fprintf("result is %.7f, iterate %d times\n", xk, cnt);
    end
```

分别输入 $-1, 1, 3$，得到：

result is -0.4589623, iterate 5 times

result is 0.9100076, iterate 4 times

result is 3.7330791, iterate 9 times

速度远好于不动点迭代法。