科学计算作业 7

张文涛 517030910425

2018 年 11 月 17 日

1. 确定下列求积公式中的特定参数，使其代数精度尽量高，并指明其代数精度

$$(1)\int_{-h}^{h} f(x)\,dx \approx Af(-h)+Bf(0)+Cf(h)+Dhf'(h);$$

$$(2)\int_{0}^{h} f(x)\,dx \approx \frac{h}{2}[f(0)+f(h)]+ah^2[f'(0)-f'(h)];$$

$$(3)\int_{0}^{1} f(x)\,dx \approx Af(0)+Bf(1)+Cf''(0)+Df''(1)$$

$$(4)\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx \frac{1}{3}[f(-1)+2f(x_1)+3f(x_2)]$$

$$(5)\int_{0}^{1} \frac{1}{\sqrt{x}}f(x)\,dx \approx \omega_0 f(x_0)+\omega_1 f(x_1)$$

(1) 有四个自由度，可以有三次代数精度，分别将 常数,x, x^2, x^3 代入计算得线性方程组:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -h & 0 & h & h \\ h^2 & 0 & h^2 & 2h^2 \\ -h^3 & 0 & h^3 & 3h^3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2h \\ 0 \\ \frac{2}{3}h^3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

解得：

$$\begin{bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}h \\ \frac{4}{3}h \\ \frac{1}{3}h \\ 0 \end{bmatrix}$$

经过验证，有三次代数精度。

(2) 待定系数只有 a，可以验证当 $f(x)$ 为常数或 x 时精确成立，将 x^2 代入可以计算得到 $a=\frac{1}{12}$，并且经过检验对于 x^3 也精确成立。

(3) 用与 (1) 类似的方式列出线性方程组：

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

解得：

$$\begin{bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

经过验证，有三次代数精度。

(4) 可以验证，对于任意常数，原始精确成立。可以将 $f(x) = x$ 及 $f(x) = x^2$ 代入计算待定项。于是得到方程组：

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 1 \\ 2x_1^2 + 3x_2^2 = 1 \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1+\sqrt{6}}{5} \\ x_2 = \frac{3-2\sqrt{6}}{15} \end{cases} \quad 或 \quad \begin{cases} x_1 = \frac{1-\sqrt{6}}{5} \\ x_2 = \frac{3+2\sqrt{6}}{15} \end{cases}$$

经检验 $f(x) = x^3$ 不精确成立，因此有两次代数精度。

(5) 利用待定系数法，将 $f(x) = c, x, x^2, x^3$ 代入，得到方程组：解得两个节点及其对应系数为：

$$\begin{cases} x_0 = \frac{15-2\sqrt{30}}{35} \\ \omega_0 = \frac{18+\sqrt{30}}{18} \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = \frac{15+2\sqrt{30}}{35} \\ \omega_1 = \frac{18-\sqrt{30}}{18} \end{cases}$$

经过验证，有三次代数精度。

2. 考虑 Newton-Cotes 公式

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i)$$

式中 $x_i = a_i + h, \quad h = (b-a)/n.$

证明：

$(1) A_i = A_{n-i}$

(2) 若 n 是偶数，则其具有 $n+1$ 阶代数精度.

(1) 对原函数作等距插值得到插值多项式：

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \Big(\prod_{j=0\, j\neq i}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \Big) f(x_i)$$

$$A_i = \int_a^b \prod_{j=0\, j\neq i}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}\, dx$$

由于已知 $x_i = a + ih$，记 $x = a + th,\, t \in [0, 1]$ 则有：

$$A_i = h\int_0^n \prod_{j=0\, j\neq i}^{n} \frac{t - j}{i - j}\, dt$$

$$A_i = \frac{(-1)^{n-i}h}{i!(n-i)!}\int_0^n \prod_{j=0\, j\neq i}^{n} (t - j)\, dt$$

如果令 $i = n - i$，则有：

$$A_{n-i} = \frac{(-1)^{i}h}{i!(n-i)!}\int_0^n \prod_{j=0\, j\neq n-i}^{n} (t - j)\, dt$$

令 $t = n - t$，则有：

$$A_{n-i} = \frac{(-1)^{n+i}h}{i!(n-i)!}\int_0^n \prod_{j=0\, j\neq n-i}^{n} [t - (n - j)]\, dt$$

再令 $j = n - j$，则有：

$$A_{n-i} = \frac{(-1)^{n+i}h}{i!(n-i)!}\int_0^n \prod_{j=n\, j\neq i}^{0} (t - j)\, dt$$

由于 $(-1)^{(n-i\,+(n+i)} = (-1)^{2n}$，即 $(-1)^{n+i}$ 与 $(-1)^{n-i}$ 同号，于是 $A_i = A_{n-i}$.

(2) 假设 $f(x)$ 为 $n+1$ 次多项式，考虑余项，其中 $l_i(x)$ 为 Lagrange 插值基函数：

$$R_n(x) = \int_a^b (f(x) - \sum_{i=0}^{n} l_i(x) f(x_i))\, dx$$

则由 Lagrange 插值余项公式得到：

$$R_n(x) = \int_a^b \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\prod_{i=0}^{n}(x - x_i)\, dx = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\int_a^b \prod_{i=0}^{n}(x - x_i)\, dx$$

利用与 (1) 类似替换得到：

$$R_n(x) = h^{n+2}\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\int_0^n \prod_{i=0}^{n}(t - i)\, dt$$

令 $n = 2k$，有

$$R_n(x) = h^{2k+2}\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\int_0^{2k} \prod_{i=0}^{2k}(t - i)\, dt$$

令 $t = p + k$，代入换元得到：

$$R_n(x) = h^{2k+2}\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\int_{-k}^{k} \prod_{i=0}^{2k}(t - (i - k))\, dt = h^{2k+2}\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\int_{-k}^{k} t\prod_{i=0}^{k}(t^2 - i^2)\, dt$$

$t\prod_{i=0}^{k}(t^2 - i^2)\, dt$ 是奇函数，于是 $R_n(x) = 0$，有 n+1 次代数精度。

3. 对 $f(x), g(x) \in C^1[a,b]$，定义

$$(1)(f,g)=\int_a^b f'(x)g'(x)\,dx;$$
$$(2)(f,g)=\int_a^b f'(x)g'(x)\,dx+f(a)g(a);$$

(试问上述表示两种定义是否构成内积并说明原因.

(1) 容易验证，原式满足对称性，线性性，正定性，但有：

$$\int_a^b [f'(x)]^2\,dx \nRightarrow f(x)=0$$

因此不构成内积空间。

(2)
2.1 显然，满足对称性。
2.2 $\forall V(x) \in C^1[a,b]$ 有：

$$\int_a^b (f(x)+V(x))'g'(x)\,dx+(f(a)+V(a))g(a)=\int_a^b f'(x)g'(x)\,dx+f(a)g(a)+\int_a^b V'(x)g'(x)\,dx+V(a)g(a)$$

满足线性性。
2.3 显然满足正定性
2.4 取 $f(x)=g(x)$，原式变为：

$$\int_a^b [f'(x)]^2\,dx+f^2(a)=0$$

可以看出 $f(x)$ 为常数且为 0，因此构成内积空间。

4. 试证明 $[-1,1]$ 上 Gauss-Legendre 求积公式 ($\rho(x)=1$) 的节点和求积系数关于原点 $x=0$ 是对称分布的。

证：Gauss-Legendre 多项式的零点是可以被确定的，由 Legendre 多项式的定义：

$$\phi_k(x)=\frac{1}{2^k k!}\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}[(x^2-1)^k]$$

现需要证明对于 $\forall k \in \mathbb{N}^*$，若 x_0 使 $\phi_k(x_0)=0$，则 $\phi_k(-x_0)=0$。
当 $k=1$ 时，有：

$$\phi_1(x)=x$$

显然成立。当 $k=2$ 时，有：

$$\phi_2(x)=\frac{3x^2-1}{2}$$

$\phi_2(x)$ 为偶函数，结论显然成立。现利用归纳假设，假设 $k<p$ 时结论均成立，要证明 $k=p$ 时结论成立，则利用三项递推关系：

$$\phi_p(x)=\frac{2k+1}{k+1}x\phi_{p-1}(x)-\frac{k}{k+1}\phi_{p-2}(x)$$

容易看出 $\phi_p(x)$ 也满足这个结论，因此节点关于原点对称分布。

由于求积系数 A_i 满足：

$$A_i = \int_a^b l_i(x)\ \mathrm{d}x$$

其中 $l_i(x)$ 是以 Legendre 多项式零点为插值节点的原函数的插值基函数。

所以 $l_i(x)$ 满足：

$$\begin{cases} l_i(x_i) = 1 \\ l_j(x_j) = 0 \quad j \neq i \end{cases}$$

因此可以确定：

$$A_i = \int_{-1}^1 \prod_{j=0\, j\neq i}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}\ \mathrm{d}x$$

欲证：$A_i = A_{n-i}$

$$A_{n-i} = \int_{-1}^1 \prod_{j=0\, j\neq n-i}^n \frac{x - x_j}{x_{n-i} - x_j}\ \mathrm{d}x$$

由于 $x_{n-i} = -x_i$，由此得到：

$$A_{n-i} = \int_{-1}^1 \prod_{j=0\, j\neq n-i}^n \frac{x - x_j}{-x_i - x_j}\ \mathrm{d}x$$

令 $j = n - j$，得到：

$$A_{n-i} = \int_{-1}^1 \prod_{j=n\, j\neq i}^0 \frac{x + x_j}{-x_i + x_j}\ \mathrm{d}x$$

令 $x = -x$，得到：

$$A_{n-i} = \int_{-1}^1 \prod_{j=n\, j\neq i}^0 \frac{x - x_j}{x_i - x_j}\ \mathrm{d}x$$

于是得证。

5. 考虑加权 Gauss 求积公式

$$\int_a^b \rho(x) f(x) \approx \sum_{j=0}^n A_j f(x_j)$$

记其误差为

$$R_n(f) = \int_a^b \rho(x) f(x)\ \mathrm{d}x - \sum_{j=0}^n A_j f(x_j).$$

求证：

$$|R_n(f)| \leq 2 \left(\int_a^b \rho(x)\ \mathrm{d}x \right) E_{2n+1}(f),$$

式中：

$$E_{2n+1}(f) = \min_{p \in \mathbb{P}_{2n+1}} ||f - p||_\infty$$

证：容易知道：

$$\sum_{j=0}^n A_j f(x_j) = \int_a^b \rho(x) P_n(x)\, \mathrm{d}x$$

其中 $P_n(x)$ 为以 $n+1$ 次带权正交多项式 $\omega_{n+1}(x)$ 零点为插值节点的原函数的插值多项式。

令 $P_{2n+1}(x)\rho(x)=\omega_{n+1}Q_n(x)\rho(x)+P_n(x)\rho(x)$，其中 $Q_n(x)$ 为任意 n 次多项式，对两边积分，则有：

$$\int_a^b P_{2n+1}(x)\rho(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^b P_n(x)\rho(x)\,\mathrm{d}x$$

代入则有：

$$R_n(f)=\int_a^b \rho(x)(f(x)-P_{2n+1}(x))\,\mathrm{d}x$$

$$|R_n(f)|\le\int_a^b \rho(x)\,|(f(x)-P_{2n+1}(x))|\,\mathrm{d}x$$

取合适的 $Q_n(x)$，就可以有：

$$|R_n(f)|\le|f(\xi)-P_{2n+1}(\xi)|\int_a^b\rho(x)\,\mathrm{d}x\le 2E_{2n+1}(f)\int_a^b\rho(x)\,\mathrm{d}x$$

得证。

6. 已知函数 $y=f(x)$ 在节点 $0=x_0<x_1<\cdots<x_n=1$ 处的近似值 $\tilde{y}_i=f(x_i),0\le i\le n$. 试用变分方法重构函数 $y=f(x)$ 使其一阶导函数均方取值不大.

证：构造泛函

$$J(y)=\sum_{i=0}^{n-1}\frac{h_i+h_{i+1}}{2}(\tilde{y}-y(x_i))^2+\alpha\int_0^1(y'(x))^2\,\mathrm{d}x$$

假设 $g(x)$ 为最优解，求其变分：

$$\delta J=\sum_{i=0}^{n-1}(h_i+h_{i+1})(g(x_i)-\tilde{y}_i)v(x_i)+2\alpha\int_0^1 g'(x)v'(x)$$

做一些转化：

$$\delta J=\sum_{i=0}^{n-1}(h_i+h_{i+1})(g(x_i)-\tilde{y}_i)v(x_i)+2\alpha\sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}}g'(x)v'(x)\,\mathrm{d}x$$

作分部积分：

$$\delta J=\sum_{i=0}^{n-1}(h_i+h_{i+1})(g(x_i)-\tilde{y}_i)v(x_i)+2\alpha\sum_{i=0}^{n-1}\left(g'(x)v(x)|_{x_i}^{x_{i+1}}-\int_{x_i}^{x_{i+1}}g''(x)v(x)\,\mathrm{d}x\right)=0$$

令每一部分都为 0 可以得到解。

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}}g''(x)v(x)\,\mathrm{d}x=0\;\Rightarrow\;g(x)\in\mathbb{P}_1$$

考虑 $v(x_i)$ 的系数等于零：

$$(h_i+h_{i+1})(g(x_i)-\tilde{y}_i+2\alpha(g'(x_i-)+g'(x_i+))=0$$

因此重构的函数为分段一次多项式且满足以上约束条件。

7. 将积分区间 $[0,1]$ 等距剖分，其格点为 $x_i = i/n_{i=0}^{n}, n = 2,4,8,16,32$. 利用 MATLAB 使用不同的复化方式在上述网络上计算积分：

$$I = \int_0^1 e^{-t} dt.$$

(1) 复化梯形公式;

(2) 复化 Simpson 公式;

(3) 复化两点 Gauss-legendre 公式，即 $\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x \approx \omega_1 f(x_1) + \omega_2 f(x_2)$.

利用公式，编写函数：

```
function res = intergrate(x)
p = length(x);
res1 = ones(1, p - 1);
res2 = res1;
res3 = res1;
for i = 1:p - 1
res3(i) = (x(i +1) - x(i))/2 * (exp(1).^(-(x(i + 1) - x(i))/(2*3.^(0.5)) - (x(i+1) + x(i))/ 2) + exp(1).^
end
for i = 1:p - 1
res1(i) = (x(i+1) - x(i))/2 * (exp(-x(i)) + exp(-x(i+1)));
end
for i = 1:p - 1
res2(i) = (x(i+1) - x(i))/6 * (exp(-x(i)) + 4*exp(-(x(i) +x(i+1))/2) + exp(-x(i+1)));
end
res = [sum(res1), sum(res2), sum(res3)];
```

输入等距节点：

在 $n = 2$ 时，得到0.645235190149177 0.632134175320532 0.632111485668374

在 $n = 4$ 时，得到0.635409429027693 0.632121414604742 0.632119988381843

在 $n = 8$ 时，得到0.632943418210480 0.632120612389173 0.632120523122588

在 $n = 16$ 时，得到0.632326313844500 0.632120562177264 0.632120556596104

在 $n = 32$ 时，得到0.632172000094072 0.632120559037870 0.632120558689016