科学计算作业 1

张文涛 517030910425

2018 年 9 月 24 日

1.1 即要证明 x_k 为单调有界数列且极限为 $\sqrt{7}$

$$x_{k+1} - x_k = \frac{1}{2}(\frac{7}{x_k} - x_k)$$

易得数列单调递减的条件是 $x > \sqrt{7}$ 或 $x < -\sqrt{7}$, 由题意得 $x_1 = 2$，代入计算得 $x_2 = \frac{11}{4}$

观察得到，$\forall x \in (\sqrt{7}, \infty)$ 有，$\frac{1}{2}(x_k + \frac{7}{x_k}) > \sqrt{7}$,，且有 $x_2 = \frac{11}{4} > \sqrt{7}$，所以

$$x_k > \sqrt{7}, \forall k \in [2, \infty)$$

所以对于数列 $x_k(k >= 2)$，数列单调递减且有下界，所以数列有极限。又有递推式

$$x_{k+1} = \frac{1}{2}(x_k + \frac{7}{x_k})$$

两边取极限，得

$$x^* = \frac{1}{2}(x^* + \frac{7}{x^*})$$

解得 $x^* = \sqrt{7}$，负值舍去。

1.2 由题意有 $\epsilon(x_k) \leq \frac{1}{2} \times 10^{1-n}$ 要计算 $\epsilon(x_{k+1})$

$$\epsilon(x_{k+1}) = \frac{1}{2}\left|1 - \frac{7}{x_k^2}\right|\epsilon(x_k)$$

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{4}\left|1-\frac{7}{x_k^2}\right|\epsilon(x_k) &\leq \frac{1}{4}\left|1-\frac{7}{x_k^2}\right| \times 10^{1-n} \\
&= \frac{1}{4}\left|\frac{\sqrt{7}+x_k}{x_k}\right|\left|\frac{\sqrt{7}-x_k}{x_k}\right| \times 10^{1-n} \\
&= \frac{1}{4}\left|\frac{\sqrt{7}+x_k}{x_k}\right| e_r(x_k) \times 10^{1-n} \\
&\leq \frac{1}{2} e_r(x_k) \times 10^{1-n} \\
&\leq \frac{1}{2} \times 10^{1-2n}
\end{aligned}
$$

证毕

2 记 $\sqrt{2}=x$，设所取值 1.4 与真实值的误差为，对各式求导并将 $x=1.4$ 代入

$$e_1 = ((x-1)^6)' e|_{x=1.4} = 6(x-1)^5 e|_{x=1.4} = 0.6144e$$

$$e_2 = 6(3-2x)^2 e|_{x=1.4} = 0.24e$$

$$e_3 = -70e$$

$$e_4 = -6(1+x)^{-7} e|_{x=1.4} = -0.0131e$$

$$e_5 = -6(3+2x)^{-6} e|_{x=1.4} = -0.0053e$$

$$e_6 = -70(99+70x)^{-2} e|_{x=1.4} = -0.0018e$$

所以可以看出使用最后一式计算误差最小

3.1 $\frac{1}{1-2x}$ 与 $\frac{1-x}{1+x}$ 的值在 $x \ll 1$ 时非常接近，但经过通分后得到

$$\frac{2x^2}{(1+2x)(1+x)}$$

由此计算更为精确

3.2 $\sqrt{x+\frac{1}{x}}$ 与 $\sqrt{x-\frac{1}{x}}$ 在 $x \gg 1$ 的情况下值相近，因此需要

$$\frac{\sqrt{x+\frac{1}{x}}-\sqrt{x-\frac{1}{x}}}{1}$$

$$=\frac{\frac{2}{x}}{\sqrt{x+\frac{1}{x}}+\sqrt{x-\frac{1}{x}}}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{x^3+x}+\sqrt{x^3-x}}$$

这样可以避免大数加小数以及相近数相减。

4. 法一：利用三角公式

$$f(x)=\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}$$

法二：利用 $\cos x$ 在零点处的 Taylor 展开

$$f(x)=\frac{\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+O(x^6)}{x^2}$$

5. 利用递推公式计算通项公式得：

$$Y_n=28-\frac{n}{100}\sqrt{783}$$

利用误差公式，记 $x=\sqrt{783}, x^*=27.982$，则有

$$e(Y_{100})=e(x^*)$$

所以误差小于等于 $\epsilon(x^*)=\frac{1}{2}\times 10^{-3}$

而对于递推式 $Y_n=2Y_{n-1}-\frac{1}{100}\sqrt{783}$，通项公式为：

$$(28-\frac{\sqrt{783}}{100})2^{n-1}+\frac{\sqrt{783}}{100}$$

同样记 $x = \sqrt{783}, x^* = 27.982$ 得到：

$$(28 - \frac{x}{100})2^{n-1} + \frac{x}{100}$$

利用误差公式，求导得：

$$e(Y_{100}) = \frac{2^{n-1} - 1}{100} e(x^*)$$

令 $n = 100$，则误差界为：

$$\epsilon(Y_{100}) = \frac{2^{99} - 1}{2} \times 10^{-5}$$

这个误差非常大。

6. 已知矩阵 $A = A_1A_2A_3 \cdots A_n$，则可以利用结合律设计算法来减少乘法运算次数

下面做出一些规定：

$A[i] = A_i$，表示第 i 个矩阵

$A[i](m)$ 表示第 i 个矩阵的行数

$A[i](n)$ 表示第 i 个矩阵的列数

$P[i][j]$ 表示运算第 i 个到第 j 个矩阵乘法的计算次数。且 $P[i][i] = 0$

$C[i][j]$ 为一集合，记录第 i 到 j 个矩阵的计算顺序

可以写出算法伪代码：

利用小区间最优向大区间转移。

```
Input: A_1, A_2, A_3 ···, A_n
Output: A_{p_1}, A_{p_2} ···, A_{p_n}
for i = 0; i < n; i = i + 1 do
    P[i][i] = 0
    C[i][i] = A[i]
    for j = i + 1; j < n; j = j + 1 do
        P[i][j] = ∞
    end
end
for i = 1; i ≤ n; i = i + 1 do
    for j = 0; j < n − i; j = j + 1 do
        for k = j; k < j + i; k = k + 1 do
            tmp = P[j][k] + A[j](m) ∗ A[k](n) ∗ A[j + i](n)
            if tmp < P[j][j + i] then
                P[j][j + i] = tmp
                C[j][j + i] = C[j][k] + C[k][j + i]
            end
        end
    end
end
return C[0][n − 1]
```