科学计算作业 11

张文涛 517030910425

2018 年 12 月 17 日

1. 矩阵第一行乘以一数 λ , 成为

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2\lambda & \lambda \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

证明当 $\lambda = \pm\frac{2}{3}$ 时，$\text{cond}_\infty(\boldsymbol{A})$ 有最小值.

证：可以容易求得：

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\lambda} & -1 \\ -\frac{1}{\lambda} & 2 \end{bmatrix}$$

所以有：

$$\|\boldsymbol{A}\|_\infty = \max\{2, 3|\lambda|\}$$

$$\|\boldsymbol{A}^{-1}\|_\infty = \max\{|\frac{1}{\lambda}| + 1, |\frac{1}{\lambda}| + 2\}$$

则有：

$$\text{cond}_\infty(\boldsymbol{A}) = \|\boldsymbol{A}\|_\infty \|\boldsymbol{A}^{-1}\|_\infty = \begin{cases} -3\lambda(2 - \frac{1}{\lambda}) & \lambda \le -\frac{2}{3} \\ 2(2 - \frac{1}{\lambda}) & -\frac{2}{3} < \lambda < 0 \\ 2(\frac{1}{\lambda} + 2) & 0 < \lambda \le \frac{2}{3} \\ 3\lambda(\frac{1}{\lambda} + 2) & \lambda > \frac{2}{3} \end{cases}$$

经过检验，求得最小值为 7，在 $x = \pm\frac{2}{3}$ 时取到。

2. 设 $\boldsymbol{A} = [a_{ij}]_{n\times n}$ 是对称正定矩阵, 经过 Gauss 消去法一步后,$\boldsymbol{A}$ 约化为

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \boldsymbol{a}_1^T \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}_2 \end{bmatrix}$$

其中 $\boldsymbol{A}_2 = [a_{ij}^{(2)}]_{n-1}$. 证明：

(1)$\boldsymbol{A}$ 的对角元 $a_{ii} > 0, i = 1, 2, \cdots, n$;

(2)$\boldsymbol{A}_2$ 是对称正定矩阵

证：

(1) 由于 $\boldsymbol{A}$ 是对称正定矩阵，则对于任意 $\boldsymbol{a} \in \mathbb{C}^n$，都有：

$$\boldsymbol{a}^*\boldsymbol{A}\boldsymbol{a} > 0$$

则可以构造一系列 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$，满足 $a_i=1,\ a_j=0\,(j\neq i), i=1,2,3,\cdots,n$ 使得:

$$\boldsymbol{a}^*\boldsymbol{A}\boldsymbol{a}=a_{ii}>0\quad i=1,2,\cdots,n$$

所以其对角元大于零。

(2) 记题目中的矩阵为 $\boldsymbol{B}$，则可以找到一系列初等矩阵 $\boldsymbol{P}_1,\boldsymbol{P}_2,\boldsymbol{P}_3,\cdots\boldsymbol{P}_{n-1}$ 使得：

$$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_3\cdots\boldsymbol{P}_{n-1})\boldsymbol{A}$$

记 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_3\cdots\boldsymbol{P}_{n-1}$，则有：

$$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}^T=\begin{bmatrix}a_{11}&\boldsymbol{0}\\\boldsymbol{0}&\boldsymbol{A}_2\end{bmatrix}$$

显然 $\boldsymbol{C}^T=\boldsymbol{C}$，所以 $\boldsymbol{A}_2=\boldsymbol{A}_2^T$
所以 $\boldsymbol{A}_2$ 为对称矩阵。
由于 $\boldsymbol{A}$ 是正定的，所以有：

$$\forall\boldsymbol{b}\in\mathbb{C}^n\quad\boldsymbol{b}\boldsymbol{A}\boldsymbol{b}^*>0$$

$$\boldsymbol{b}\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}^T\boldsymbol{b}^*>0\Rightarrow\boldsymbol{b}\boldsymbol{C}\boldsymbol{b}^*>0$$

于是证明 $\boldsymbol{C}$ 为正定矩阵，所以 $\boldsymbol{A}$ 的各阶主子式均大于零，所以 $\boldsymbol{A}_2$ 的各阶主子式大于零，于是 $\boldsymbol{A}_2$ 为正定矩阵。
所以 $\boldsymbol{A}_2$ 为对称正定矩阵。

3. 证明以下矩阵不等式
(1)$\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\|_F\leq\|\boldsymbol{A}\|_2\|\boldsymbol{B}\|_F$
(2)$\|\boldsymbol{A}\|_2^2\leq\|\boldsymbol{A}\|_1\|\boldsymbol{A}\|_\infty$

证：
(1) 记 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_3,\cdots,\boldsymbol{b}_n)$，则有：

$$\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\|_F=\sum_{i=1}^n\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{b}_i\|_2$$

$$\sum_{i=1}^n\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{b}_i\|_2\leq\|\boldsymbol{A}\|_2\sum_{i=1}^n\|\boldsymbol{b}_i\|_2\leq\|\boldsymbol{A}\|_2\left(\sum_{i=1}^n\|\boldsymbol{b}_i\|_2\right)=\|\boldsymbol{A}\|_2\|\boldsymbol{B}\|_F$$

(2) 已知 $\|\boldsymbol{A}\|_2^2=\lambda_{\max}(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A})$，令 $\boldsymbol{u}$ 为属于 $\lambda_{\max}(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A})$ 的特征向量，则有：

$$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}=\lambda_{\max}(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A})\boldsymbol{u}=\|\boldsymbol{A}\|_2^2\boldsymbol{u}$$

两边取 1-范数，则有：

$$\|\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}\|_1=\|\boldsymbol{A}\|_2^2\|\boldsymbol{u}\|_1$$

所以有：

$$\|\boldsymbol{A}\|_2^2\|\boldsymbol{u}\|_1 \leq \|\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}\|_1\|\boldsymbol{u}\|_1 \Leftrightarrow \|\boldsymbol{A}\|_2^2 \leq \|\boldsymbol{A}\|_1^T\|\boldsymbol{A}\|_1 = \|\boldsymbol{A}\|_\infty\|\boldsymbol{A}\|_1$$

得证。

4. 设 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}, \det \boldsymbol{A} \neq 0$. 假设 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{x}+\delta\boldsymbol{x}$ 分别满足方程组

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

$$(\boldsymbol{A}+\delta\boldsymbol{A})(\boldsymbol{x}+\delta\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{b}+\delta\boldsymbol{b}$$

式中 $\boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}$ 而且 $\|\delta\boldsymbol{A}\|$ 适当小，使得

$$\|\boldsymbol{A}^{-1}\|\|\delta\boldsymbol{A}\| < 1$$

则有

$$\frac{\|\delta\boldsymbol{x}\|}{\|\boldsymbol{x}\|} \leq \frac{\|\boldsymbol{A}\|\|\boldsymbol{A}^{-1}\|}{1-\|\boldsymbol{A}^{-1}\|\|\delta\boldsymbol{A}\|}\left(\frac{\|\delta\boldsymbol{A}\|}{\|\boldsymbol{A}\|}+\frac{\|\delta\boldsymbol{b}\|}{\|\boldsymbol{b}\|}\right)$$

证：先证 $\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}^{-1}\delta\boldsymbol{A}$ 可逆，假设其不可逆，则有：

$$\exists \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \quad (\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}^{-1}\delta\boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$$

则 -1 为 $\boldsymbol{A}^{-1}\delta\boldsymbol{A}$ 的特征值，我们推出：

$$\|\boldsymbol{A}^{-1}\|\|\delta\boldsymbol{A}\| \geq \boldsymbol{A}^{-1}\delta\boldsymbol{A} \geq \rho(\boldsymbol{A}^{-1}\delta\boldsymbol{A}) \geq 1$$

与题设矛盾，故 $\boldsymbol{A}^{-1}\delta\boldsymbol{A}$ 可逆。

我们还容易看出：

$$\|(\boldsymbol{A}+\delta\boldsymbol{A})(\boldsymbol{A}+\delta\boldsymbol{A})^{-1}\| = \|(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}^{-1}\delta\boldsymbol{A})(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}^{-1}\delta\boldsymbol{A})^{-1}\| = 1$$

记 $\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}^{-1}\delta\boldsymbol{A})^{-1}$，则有：

$$1 = \|\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}^{-1}\delta\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\| \geq \|\boldsymbol{B}\|(1-\|\boldsymbol{A}^{-1}\delta\boldsymbol{A}\|)$$

所以：

$$\|(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}^{-1}\delta\boldsymbol{A})^{-1}\| \leq \frac{1}{1-\|\boldsymbol{A}^{-1}\delta\boldsymbol{A}\|} \leq \frac{1}{1-\|\boldsymbol{A}^{-1}\|\|\delta\boldsymbol{A}\|}$$

对于原方程，我们有：

$$\delta\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{A}+\delta\boldsymbol{A})^{-1}(\boldsymbol{b}+\delta\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{A}+\delta\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{A}+\delta\boldsymbol{A})^{-1}(\delta\boldsymbol{b}-\delta\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})$$

两边取范数：

$$\|\delta\boldsymbol{x}\| = \|\boldsymbol{A}^{-1}\|\|\|(\boldsymbol{A}+\delta\boldsymbol{A})^{-1}\|\|\delta\boldsymbol{b}-\delta\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\| \leq \|\boldsymbol{A}^{-1}\|\|\|(\boldsymbol{A}+\delta\boldsymbol{A})^{-1}\|(\|\delta\boldsymbol{b}\|+\|\delta\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\|)$$

$$= \|\boldsymbol{A}^{-1}\|\|\,(\boldsymbol{A}+\delta\boldsymbol{A})^{-1}\,\|\left(\frac{\|\delta\boldsymbol{b}\|\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\|}{\|\boldsymbol{b}\|}+\|\delta\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\|\frac{\|\boldsymbol{A}\|}{\|\boldsymbol{A}\|}\right) \leq \frac{\|\boldsymbol{A}^{-1}\|\|\boldsymbol{A}\|}{1-\|\boldsymbol{A}^{-1}\|\|\delta\boldsymbol{A}\|}\left(\frac{\|\delta\boldsymbol{b}\|}{\|\boldsymbol{b}\|}+\frac{\|\delta\boldsymbol{A}\|}{\|\boldsymbol{A}\|}\right)\|\boldsymbol{x}\|$$

得证。

5. MATLAB 中命令 lu 可以给出矩阵的的 LU 分解. 假设 n 阶非奇异方阵 A 存在 LU 分解, 请基于命令 lu 设计一个算法求 $\boldsymbol{A}^{-1}$，并根据你的算法编写一个序求下列矩阵的逆.

$$\boldsymbol{H}_4 = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} \end{bmatrix}$$

利用 lu 命令编写程序，分别计算 $\boldsymbol{L}, \boldsymbol{U}$ 的逆并相乘：

```
function res = myinv(A)
[l, u, p] = lu(A);
resl = diag(ones(1, length(A)));
resu = resl;
for i = 1:length(l)
resl(i, :) = resl(i, :) ./ l(i,i);
for j = (i + 1):length(l)
resl(j,:) = resl(j, :) - l(j, i).* resl(i,:);
end
end
for i = length(u):-1:1
resu(i,:) = resu(i, :) ./ u(i,i);
for j = (i - 1):-1:1
resu(j,:) = resu(j, :) - u(j, i).*resu(i,:);
end
end
res = resu * resl * p;
end
```

得到结果：

$$1.0e+03*$$

$$\begin{bmatrix} 0.0160 & -0.1200 & 0.2400 & -0.1400 \\ -0.1200 & 1.2000 & -2.7000 & 1.6800 \\ 0.2400 & -2.7000 & 6.4800 & -4.2000 \\ -0.1400 & 1.6800 & -4.2000 & 2.8000 \end{bmatrix}$$

与使用 MATLAB 直接求逆结果相差很小。