科学计算作业 8

张文涛 517030910425

2018 年 11 月 27 日

1. 假设函数 $f(x)$ 充分光滑，$h>0$ 且 h 很小，确定下列数值微分公式的误差.

$$(1) f'(x_0) \approx \frac{1}{4h}[f(x_0+3h) - f(x_0-h)];$$
$$(2) f'(x_0) \approx \frac{1}{2h}[4f(x_0+h) - 3f(x_0) - f(x_0+2h)].$$

(1) 利用 $f(x)$ 在 x_0 处的 Taylor 展开：

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3 + \cdots$$

计算 $f(x_0+3h), f(x_0-h)$，得到：

$$f(x_0+3h) = f(x_0) + 3hf'(x_0) + \frac{9h^2}{2}f''(\xi_1)$$

$$f(x_0-h) = f(x_0) - hf'(x_0) + \frac{h^2}{2}f''(\xi_1)$$

则可以求得：

$$\frac{1}{4h}[f(x_0+3h) - f(x_0-h)] = f'(x_0) + hf''(\xi_1)$$

所以误差为 $O(h)$ 的，且不超过 $h||f''(x)||$。

(2) 利用类似的方法得到：

$$f(x_0+h) = f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{h^2}{2}f''(x_0) + \frac{h^3}{3!}f'''(\xi_2)$$

$$f(x_0+2h) = f(x_0) + 2hf'(x_0) + \frac{4h^2}{2}f''(x_0) + \frac{8h^3}{3!}f'''(\xi_2)$$

可以类似求得：

$$\frac{1}{2h}[4f(x_0+h) - 3f(x_0) - f(x_0+2h)] = f'(x_0) - \frac{h^2}{3}f'''(\xi_2)$$

所以误差是 $O(h^2)$ 的，且不超过 $\frac{h^2}{3}||f'''(x)||$。

2. 记 $C_p[0,2\pi]$ 中以 2π 为周期的函数全体所成集合. 设 $f(x)\in C_p[0,2\pi]$, 对区间进行等距剖分, 相应节点为

$$x_j=\frac{2\pi j}{2N},\quad j=0,1,\cdots,2N-1.$$

给定求积公式

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\,\mathrm{d}x\approx\frac{1}{2N}\sum_{j=0}^{2N-1}f(x_j),$$

证明：当 $f(x)=e^{ikx},|k|\le 2N-1$ 时，求积公式是精确的.

证：计算左边积分：

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{ikx}\,\mathrm{d}x=\left.\frac{1}{2\pi ik}e^{ikx}\right|_0^{2\pi}=0$$

右边求和：

$$\frac{1}{2N}\sum_{j=0}^{2N-1}e^{ikx_j}=\frac{1}{2N}\sum_{j=0}^{2N-1}e^{\frac{ik\pi}{N}j}=\frac{1-(e^{\frac{ik\pi}{N}})^{2N}}{1-e^{\frac{ik\pi}{N}}}$$

由于 $|k|\le 2N-1$，所以 $|\frac{k\pi}{N}|<2\pi$，则有：

$$\frac{1-(e^{\frac{ik\pi}{N}})^{2N}}{1-e^{\frac{ik\pi}{N}}}=0$$

故积分值是精确的。

3. 证明等式

$$n\sin\frac{\pi}{n}=\pi-\frac{\pi^3}{3!n^2}+\frac{\pi^5}{5!n^4}-\cdots,$$

并根据 $n\sin\frac{\pi}{n}(n=3,6,12)$，用 Richardson 外推法求 π 的近似值.

证：利用 $sin(x)$ 在 0 处的 Taylor 展开：

$$sin(x)=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots$$

将 $x=\frac{\pi}{n}$ 代入，并在两边同乘以 n，得到：

$$n\sin\frac{\pi}{n}=\pi-\frac{\pi^3}{3!n^2}+\frac{\pi^5}{5!n^4}-\cdots$$

得证。

我们可以精确计算得到：

$$3\sin\frac{\pi}{3}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$$
$$6\sin\frac{\pi}{6}=3$$
$$12\sin\frac{\pi}{12}=3\sqrt{6}-3\sqrt{2}$$

利用 Richardson 外推法，先利用 $n=3,n=6$ 进行一次外推，再利用 $n=6,n=12$ 进行外推，再利用两次外推的结果再进行一次外推。

利用 $n=3,6$ 的情况进行外推：

$$\pi-3\sin\frac{\pi}{3}-4\pi+24\sin\frac{\pi}{6}=(\frac{1}{5!3^4}-\frac{4}{5!6^4})\pi^5+(\frac{4}{7!6^6}-\frac{1}{7!3^6})\pi^7+\cdots$$

再利用 $n=6,12$ 的情况进行外推：

$$\pi-6\sin\frac{\pi}{6}-4\pi+48\sin\frac{\pi}{12}=(\frac{1}{5!6^4}-\frac{4}{5!12^4})\pi^5+(\frac{4}{7!12^6}-\frac{1}{7!6^6})\pi^7+\cdots$$

再利用这两个结果进行外推近似计算：

$$\pi-3\sin\frac{\pi}{3}-4\pi+24\sin\frac{\pi}{6}-16\left(\pi-6\sin\frac{\pi}{6}-4\pi+48\sin\frac{\pi}{12}\right)=0$$

计算得到：

$$\pi\approx\frac{3\sin\frac{\pi}{3}-120\sin\frac{\pi}{6}+768\sin\frac{\pi}{12}}{45}=3.141580063$$

4. 假设 $f(x)\in C^5[a,b]$, 对于求积公式

$$\int_a^b f(x)\approx\frac{b-a}{30}\left[7f(a)+16f\left(\frac{a+b}{2}\right)+7f(b)\right]+\frac{(b-a)^2}{60}\left[f'(a)-f'(b)\right],$$

(1) 试确定其代数精度

(2) 给出该求积公式的误差估计.

(1) 经过检验，当 $f(x)$ 取 c, x, x^2, x^3, x^4, x^5 时，原式精确成立，而将 $f(x)=x^6$ 代入检验后原式不成立，因此求积公式有五次代数精度。

(2) 由于求积公式含有导数，因此考虑为满足如下条件的 Hermite 插值求积, 公式：

$$\begin{cases}P_4(a)=f(a)\\P_4'(a)=f'(a)\\P_4(b)=f(b)\\P_4'(b)=f'(b)\\P_4(\frac{a+b}{2})=f(\frac{a+b}{2})\end{cases}$$

构造得到 Hermite 多项式，可以验证：

$$\int_a^b P_4(x)=\frac{b-a}{30}\left[7f(a)+16f\left(\frac{a+b}{2}\right)+7f(b)\right]$$

则 Hermite 插值的余项可以写为：

$$R_n(x)=\frac{f^{(5)}(\xi(x))}{5!}(x-a)^2(x-b)^2(x-\frac{a+b}{2})$$

所以余项为：

$$\int_a^b\frac{f^{(5)}(\xi(x))}{5!}(x-a)^2(x-b)^2(x-\frac{a+b}{2})$$

5. 基于梯形求积公式，导出相应的自适应数值积分方法.

已经推导出区间 $[a,b]$ 梯形求积公式的余项公式

$$I-S_1=-\frac{(b-a)^3}{12}f''(\eta)$$

对区间二分利用梯形公式求积，则有

$$I - S_2 = -\frac{(b-a)^3}{48} f''(\xi)$$

需要假设在积分区间内 $f(x)$ 的二阶导数值变化不大，因此有 $f''(\xi) = f''(\eta)$，利用这一点：

$$|S_2 - S_1| = \frac{3}{4}\left|\frac{(b-a)^3}{12} f''(\eta)\right| = 3\,|I - S_2|$$

若规定误差为 ϵ，则当在区间 $[a,b]$ 上 $|S_2 - S_1| < 3\epsilon$ 时，可以利用 S_2 作为该区间上的近似。

6. 已知

$$I = \int_0^1 \frac{4}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \pi$$

利用 MATLAB 编程实现 Romberg 算法, 数值计算 $\int_0^1 \frac{4}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$ 并完成下列表格.

利用推到得到的公式计算，编写程序得：

```
function arr = Romberg()
arr = zeros(6, 6);
for i = 1:6
pos = 0:1/(2.^(i-1)):1;
res = zeros(1, length(pos) - 1);
for j = 1:length(pos) - 1
res(j) = ((pos(j+1) - pos(j)) / 2 ).* (4/(1+pos(j).^2 ) + 4/(1 + pos(j+1).^2));
end
arr(i, 1) = sum(res);
end
for i=1:6
for k = 2:i
arr(i, k) = (4.^(k-1)).*arr(i, k - 1)/(4.^(k - 1) - 1) - arr(i - 1, k - 1)/(4.^(k - 1) - 1);
end
end
```

得到结果：

k	$T_0^{(k)}$	$T_1^{(k)}$	$T_2^{(k)}$	$T_3^{(k)}$	$T_4^{(k)}$	$T_5^{(k)}$
0	3.000000000000000	-	-	-	-	-
1	3.100000000000000	3.133333333333334	-	-	-	-
2	3.131176470588236	3.141568627450981	3.142117647058824	-	-	-
3	3.138988494491089	3.141592502458707	3.141594094125889	3.141585783761874	-	-
4	3.140941612041389	3.141592651224823	3.141592661142564	3.141592638396796	3.141592665277718	-
5	3.141429893174974	3.141592653552835	3.141592653708036	3.141592653590028	3.141592653649609	3.141592653638242