

科学计算作业 11

张文涛 517030910425

2018 年 12 月 16 日

1. 矩阵第一行乘以一数 λ , 成为

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2\lambda & \lambda \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

证明当 $\lambda = \pm \frac{2}{3}$ 时, $\text{cond}_\infty(\mathbf{A})$ 有最小值.

证: 可以容易求得:

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\lambda} & -1 \\ -\frac{1}{\lambda} & 2 \end{bmatrix}$$

所以有:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{A}\|_\infty &= \max\{2, 3|\lambda|\} \\ \|\mathbf{A}^{-1}\|_\infty &= \max\{|\frac{1}{\lambda}| + 1, |\frac{1}{\lambda}| + 2\} \end{aligned}$$

则有:

$$\text{cond}_\infty(\mathbf{A}) = \|\mathbf{A}\|_\infty \|\mathbf{A}^{-1}\|_\infty = \begin{cases} -3\lambda(2 - \frac{1}{\lambda}) & \lambda \leq -\frac{2}{3} \\ 2(2 - \frac{1}{\lambda}) & -\frac{2}{3} < \lambda < 0 \\ 2(\frac{1}{\lambda} + 2) & 0 < \lambda \leq \frac{2}{3} \\ 3\lambda(\frac{1}{\lambda} + 2) & \lambda > \frac{2}{3} \end{cases}$$

经过检验, 求得最小值为 7, 在 $x = \pm \frac{2}{3}$ 时取到。

2. 设 $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{n \times n}$ 是对称正定矩阵, 经过 Gauss 消去法一步后, \mathbf{A} 约化为

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \mathbf{a}_1^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_2 \end{bmatrix}$$

其中 $\mathbf{A}_2 = [a_{ij}^{(2)}]_{n-1}$. 证明:

(1) \mathbf{A} 的对角元 $a_{ii} > 0, i = 1, 2, \dots, n$;

(2) \mathbf{A}_2 是对称正定矩阵

证:

(1) 由于 \mathbf{A} 是对称正定矩阵, 则对于任意 $\mathbf{a} \in \mathbb{C}^n$, 都有:

$$\mathbf{a}^* \mathbf{A} \mathbf{a} > 0$$

则可以构造一系列 $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, 满足 $a_i = 1, a_j = 0 (j \neq i), i = 1, 2, 3, \dots, n$ 使得:

$$\mathbf{a}^* \mathbf{A} \mathbf{a} = a_{ii} > 0 \quad i = 1, 2, \dots, n$$

所以其对角元大于零。

(2) 记题目中的矩阵为 \mathbf{B} , 则可以找到一系列初等矩阵 $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \mathbf{P}_3, \dots, \mathbf{P}_{n-1}$ 使得:

$$\mathbf{B} = (\mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \mathbf{P}_3 \dots \mathbf{P}_{n-1}) \mathbf{A}$$

记 $\mathbf{P} = \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \mathbf{P}_3 \dots \mathbf{P}_{n-1}$, 则有:

$$\mathbf{C} = \mathbf{P} \mathbf{A} \mathbf{P}^T = \begin{bmatrix} a_{11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_2 \end{bmatrix}$$

显然 $\mathbf{C}^T = \mathbf{C}$, 所以 $\mathbf{A}_2 = \mathbf{A}_2^T$

所以 \mathbf{A}_2 为对称矩阵。

由于 \mathbf{A} 是正定的, 所以有:

$$\forall \mathbf{b} \in \mathbb{C}^n \quad \mathbf{b} \mathbf{A} \mathbf{b}^* > 0$$

$$\mathbf{b} \mathbf{P} \mathbf{A} \mathbf{P}^T \mathbf{b}^* > 0 \Rightarrow \mathbf{b} \mathbf{C} \mathbf{b}^* > 0$$

于是证明 \mathbf{C} 为正定矩阵, 所以 \mathbf{A} 的各阶主子式均大于零, 所以 \mathbf{A}_2 的各阶主子式大于零, 于是 \mathbf{A}_2 为正定矩阵。

所以 \mathbf{A}_2 为对称正定矩阵。

3. 证明以下矩阵不等式

$$(1) \|\mathbf{A} \mathbf{B}\|_F \leq \|\mathbf{A}\|_2 \|\mathbf{B}\|_F$$

$$(2) \|\mathbf{A}\|_2^2 \leq \|\mathbf{A}\|_1 \|\mathbf{A}\|_\infty$$

证:

(1) 记 $\mathbf{B} = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3, \dots, \mathbf{b}_n)$, 则有:

$$\mathbf{A} \mathbf{B} = \sum_{i=1}^n \mathbf{A} \mathbf{b}_i$$

$$\left\| \sum_{i=1}^n \mathbf{A} \mathbf{b}_i \right\|_2 \leq \|\mathbf{A}\|_2 \left\| \sum_{i=1}^n \mathbf{b}_i \right\|_2 \leq \|\mathbf{A}\|_2 \left(\sum_{i=1}^n \|\mathbf{b}_i\|_2 \right) = \|\mathbf{A}\|_2 \|\mathbf{B}\|_F$$

(2) 已知 $\|\mathbf{A}\|_2^2 = \lambda_{\max}(\mathbf{A}^T \mathbf{A})$, 令 \mathbf{u} 为属于 $\lambda_{\max}(\mathbf{A}^T \mathbf{A})$ 的特征向量, 则有:

$$\mathbf{A}^T \mathbf{A} \mathbf{u} = \lambda_{\max}(\mathbf{A}^T \mathbf{A}) \mathbf{u} = \|\mathbf{A}\|_2^2 \mathbf{u}$$

两边取 1-范数, 则有:

$$\|\mathbf{A}^T \mathbf{A} \mathbf{u}\|_1 = \|\mathbf{A}\|_2^2 \|\mathbf{u}\|_1$$

所以有：

$$\|\mathbf{A}\|_2^2 \|\mathbf{u}\|_1 \leq \|\mathbf{A}^T \mathbf{A}\|_1 \|\mathbf{u}\|_1 \Leftrightarrow \|\mathbf{A}\|_2^2 \leq \|\mathbf{A}\|_1^T \|\mathbf{A}\|_1 = \|\mathbf{A}\|_\infty \|\mathbf{A}\|_1$$

得证。

4. 设 $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\det \mathbf{A} \neq 0$. 假设 \mathbf{x} 和 $\mathbf{x} + \delta \mathbf{x}$ 分别满足方程组

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

$$(\mathbf{A} + \delta \mathbf{A})(\mathbf{x} + \delta \mathbf{x}) = \mathbf{b} + \delta \mathbf{b}$$

式中 $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ 而且 $\|\delta \mathbf{A}\|$ 适当小，使得

$$\|\mathbf{A}^{-1}\| \|\delta \mathbf{A}\| < 1$$

则有

$$\frac{\|\delta \mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \leq \frac{\|\mathbf{A}\| \|\mathbf{A}^{-1}\|}{1 - \|\mathbf{A}^{-1}\| \|\delta \mathbf{A}\|} \left(\frac{\|\delta \mathbf{A}\|}{\|\mathbf{A}\|} + \frac{\|\delta \mathbf{b}\|}{\|\mathbf{b}\|} \right)$$

证：先证 $\mathbf{I} + \mathbf{A}^{-1} \delta \mathbf{A}$ 可逆，假设其不可逆，则有：

$$\exists \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \quad (\mathbf{I} + \mathbf{A}^{-1} \delta \mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

则 -1 为 $\mathbf{A}^{-1} \delta \mathbf{A}$ 的特征值，我们推出：

$$\|\mathbf{A}^{-1}\| \|\delta \mathbf{A}\| \geq \|\mathbf{A}^{-1} \delta \mathbf{A}\| \geq \rho(\mathbf{A}^{-1} \delta \mathbf{A}) \geq 1$$

与题设矛盾，故 $\mathbf{A}^{-1} \delta \mathbf{A}$ 可逆。

我们还容易看出：

$$\|(\mathbf{A} + \delta \mathbf{A})(\mathbf{A} + \delta \mathbf{A})^{-1}\| = \|(\mathbf{I} + \mathbf{A}^{-1} \delta \mathbf{A})(\mathbf{I} + \mathbf{A}^{-1} \delta \mathbf{A})^{-1}\| = 1$$

记 $\mathbf{B} = (\mathbf{I} + \mathbf{A}^{-1} \delta \mathbf{A})^{-1}$ ，则有：

$$1 = \|\mathbf{B} + \mathbf{A}^{-1} \delta \mathbf{A} \mathbf{B}\| \geq \|\mathbf{B}\| (1 - \|\mathbf{A}^{-1} \delta \mathbf{A}\|)$$

所以：

$$\|(\mathbf{I} + \mathbf{A}^{-1} \delta \mathbf{A})^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|\mathbf{A}^{-1} \delta \mathbf{A}\|} \leq \frac{1}{1 - \|\mathbf{A}^{-1}\| \|\delta \mathbf{A}\|}$$

对于原方程，我们有：

$$\delta \mathbf{x} = (\mathbf{A} + \delta \mathbf{A})^{-1} (\mathbf{b} + \delta \mathbf{b} - (\mathbf{A} + \delta \mathbf{A})\mathbf{x}) = (\mathbf{A} + \delta \mathbf{A})^{-1} (\delta \mathbf{b} - \delta \mathbf{A} \mathbf{x})$$

两边取范数：

$$\begin{aligned} \|\delta \mathbf{x}\| &= \|\mathbf{A}^{-1}\| \|(\mathbf{A} + \delta \mathbf{A})^{-1}\| \|\delta \mathbf{b} - \delta \mathbf{A} \mathbf{x}\| \leq \|\mathbf{A}^{-1}\| \|(\mathbf{A} + \delta \mathbf{A})^{-1}\| (\|\delta \mathbf{b}\| + \|\delta \mathbf{A} \mathbf{x}\|) \\ &= \|\mathbf{A}^{-1}\| \|(\mathbf{A} + \delta \mathbf{A})^{-1}\| \left(\frac{\|\delta \mathbf{b}\| \|\mathbf{A} \mathbf{x}\|}{\|\mathbf{b}\|} + \|\delta \mathbf{A} \mathbf{x}\| \frac{\|\mathbf{A}\|}{\|\mathbf{A}\|} \right) \leq \frac{\|\mathbf{A}^{-1}\| \|\mathbf{A}\|}{1 - \|\mathbf{A}^{-1}\| \|\delta \mathbf{A}\|} \left(\frac{\|\delta \mathbf{b}\|}{\|\mathbf{b}\|} + \frac{\|\delta \mathbf{A}\|}{\|\mathbf{A}\|} \right) \|\mathbf{x}\| \end{aligned}$$

得证。

5. MATLAB 中命令 `lu` 可以给出矩阵的 LU 分解. 假设 n 阶非奇异方阵 A 存在 LU 分解, 请基于命令 `lu` 设计一个算法求 A^{-1} , 并根据你的算法编写一个序求下列矩阵的逆.

$$H_4 = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} \end{bmatrix}$$

利用 `lu` 命令编写程序, 分别计算 L, U 的逆并相乘:

```

1      function res = myinv(A)
2      [l, u, p] = lu(A);
3      resl = diag(ones(1, length(A)));
4      resu = resl;
5      for i = 1:length(l)
6          resl(i, :) = resl(i, :) ./ l(i,i);
7          for j = (i + 1):length(l)
8              resl(j, :) = resl(j, :) - l(j, i).*resl(i, :);
9          end
10         end
11         for i = length(u):-1:1
12             resu(i, :) = resu(i, :) ./ u(i,i);
13             for j = (i - 1):-1:1
14                 resu(j, :) = resu(j, :) - u(j, i).*resu(i, :);
15             end
16         end
17         res = resu * resl * p;
18     end

```

得到结果:

$$1.0e + 03 * \begin{bmatrix} 0.0160 & -0.1200 & 0.2400 & -0.1400 \\ -0.1200 & 1.2000 & -2.7000 & 1.6800 \\ 0.2400 & -2.7000 & 6.4800 & -4.2000 \\ -0.1400 & 1.6800 & -4.2000 & 2.8000 \end{bmatrix}$$

与使用 MATLAB 直接求逆结果相差很小。5