科学计算作业 2

张文涛 517030910425

2018 年 9 月 29 日

1. 给定离散点 $x_i, i=0,1,\cdots,n+1$，及 $y_i, i=40,1,\cdots,n+1$，记 $q(x)$ 为相应于点集 $\{(x_i,y_i):i=0,1,\cdots,n\}$ 的 n 次 Langrange 插值多项式，而 $r(x)$ 为相应于点 $\{(x_i,y_i):i=1,2,\cdots,n+1\}$ 的 n 次 Langrange 插值多项式，定义

$$p(x)=\frac{(x-x_0)r(x)-(x-x_{n+1})q(x)}{x_{n+1}-x_0}$$

试证明：$p(x)$ 为相应于点集 $\{(x_i,y_i):i=0,1,\cdots,n+1\}$ 的 $n+1$ 次 Lagrange 插值多项式。

证明：首先易得 $r(x)$ 与 $q(x)$ 为 n 次多项式，由此可推出 $p(x)$ 为 $n+1$ 次多项式。
另对于式

$$p(x)=\frac{(x-x_0)r(x)-(x-x_{n+1})q(x)}{x_{n+1}-x_0}$$

$\forall x_i, i=1,2,3\cdots,n$，代入得到

$$p(x_i)=\frac{(x_i-x_0)y_i-(x_i-x_{n+1})y_i}{x_{n+1}-x_0}=y_i$$

对于 x_{n+1},x_0，：

$$p(x_0)=\frac{-(x_0-x_{n+1})y_0}{x_{n+1}-x_0}=y_0$$

$$p(x_{n+1})=\frac{(x_{n+1}-x_0)y_{n+1}}{x_{n+1}-x_0}=y_{n+1}$$

由此可证 $p(x)$ 为相应于点集 $\{(x_i,y_i):i=0,1,\cdots,n+1\}$ 的 $n+1$ 次插值多项式。
再证 $p(x)$ 为 Lagrange 插值多项式，设 $l_{k_{p(x)}}(x)$ 为 $p(x)$ 的插值基函数，$l_{k_{q(x)}}(x), l_{k_{r(x)}}(x)$ 为 $q(x)$ 与 $r(x)$ 的插值基函数
由题意得：

$$l_{k_{q(x)}}(x)=\frac{\prod_{i=0,i\neq k}^{n}(x-x_i)}{\prod_{i=0,i\neq k}^{n}(x_k-x_i)}$$

$$l_{k_{r(x)}}(x)=\frac{\prod_{i=1,i\neq k}^{n+1}(x-x_i)}{\prod_{i=1,i\neq k}^{n+1}(x_k-x_i)}$$

可以展开通分计算:

$$\frac{(x-x_0)l_{k_{r(x)}}(x)y_k-(x-x_{n+1})l_{k_{q(x)}}(x)y_k}{x_{n+1}-x_0}$$

$$=\frac{\frac{\prod_{i=0,i\neq k}^{n+1}(x-x_i)}{\prod_{i=0,i\neq k}^{n+1}(x_k-x_i)}(x_{n+1}-x_0)}{x_{n+1}-x_0}y_k=l_{k_{p(x)}}(x)y_k$$

最后两边求和即得证。

2. 设 $f(x)\in\mathbb{P}_n$，且对 $k=0,1,2\cdots,n$ 成立 $f(k)=\frac{k}{k+1}$，试求多项式 $f(x)$

由题意可知 $f(x)$ 为 n 次多项式，因为 $f(k)=\frac{k}{k+1}$，所以可知方程 $(x+1)f(x)=x$ 有 n 个根，分别为 $x=0,1,2\cdots,n$，由代数学基本定理，方程 $(x+1)f(x)-x=0$ 可以表示为

$$A\prod_{k=0}^{n}(x-k)=0$$

从而得到

$$(x+1)f(x) = A\prod_{k=0}^{n}(x-k)+x$$

记 $q(x) = A\prod_{k=0}^{n}(x-k)+x$ 又已知 $f(x)$ 为 n 次多项式，所以 $q(x)$ 中必有因子 $x+1$，即 $q(-1)=0$，将 -1 代入得：

$$q(-1) = A(-1)^{n+1}(n+1)!-1=0$$

从而解得:

$$A = \frac{1}{(-1)^{n+1}(n+1)!}$$

所以：

$$p(x) = \frac{\frac{\prod_{k=0}^{n}(x-k)}{(-1)^{n+1}(n+1)!}+x}{x+1}$$

3. 设 $l_0, l_1\cdots l_n$ 是以 $x_0, x_1\cdots x_n$ 为节点的 n 次 Lagrange 插值基函数，试证明：

$$\sum_{k=0}^{n} l_k(0)x_k^j = \begin{cases} 0, & j=1,2\cdots n \\ (-1)^n x_0x_1\cdots x_n & j=n+1 \end{cases}$$

证明：考虑 $f(x)=x^j$ 的 Lagrange 的插值余项，由 Lagrange 插值预想相关知识可得 $f(x)=x^j$ 的 $p(p\le j-1)$ 次插值余项为：

$$R_n(x) = x^j - L_n(x) = \frac{j!x^{j-p-1}}{(n+1)!(j-p-1)!}\prod_{i=0}^{p}(x-x_i)$$

当 $j=1,2\cdots n, p=n$ 时，$p>j-1$，所以等式右边为 0(因为多次求导使得 $f(x)=x^j$ 变为 0)，考虑 $L_n(x)$：

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} l_k(x)x_k^j = x^j$$

令 $x=0$，即得 $\sum_{k=0}^{n} l_k(0)x_k^j = 0$
当 $j=n+1, p=n$ 时，代入得：

$$x^j - \sum_{k=0}^{n} l_k(0)x_k^j = \frac{(n+1)!x^0}{(n+1)!1!}\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)$$

令 $x=0$，计算得到：

$$\sum_{k=0}^{n} l_k(0)x_k^j = -(-1)^{n+1}x_0x_1\cdots x_n$$

4. 假设 $n\ge 1, x_j$ 是区间 $[-1,1]$ 上的等距节点，即 $x_j = \frac{2j-n}{n}, j=0,1,\cdots n$，记 $\omega_{n+1}(x) = (x-x_0)\cdots(x-x_n)$，试证明：
(1)$\omega_{n+1}(1-\frac{1}{n}) = \frac{(2n)!}{2^n n^{n+1} n!}$.
(2) 当 n 较大时，$\omega_{n+1}(1-\frac{1}{n}) \sim -\frac{2^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}}{n}$.

由题：

$$\omega_{n+1}(1-\frac{1}{n}) = \prod_{i=0}^{n}(x-x_i)$$

将 $x=1-\frac{1}{n}, x_i=\frac{2i-n}{n}$ 代入得

$$\omega_{n+1}(1-\frac{1}{n}) = \prod_{i=0}^{n}\frac{2(n-i)-1}{n} = \frac{-(2n-1)!!}{n^{n+1}} = -\frac{(2n)!}{(2n)!!n^{n+1}} = -\frac{(2n)!}{n!2^n n^{n+1}}$$

再利用 Stirling 公式，代入得

$$\omega_{n+1}(1-\frac{1}{n}) = -\frac{2\sqrt{\pi n}(\frac{2n}{e})^{2n}}{\sqrt{2\pi n}(\frac{n}{e})^n 2^n n^{n+1}} = -\frac{2^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}}{n}$$

5. 根据 $f(x)=3^x$，取插值节点 $-1,0,1$，利用 MATLAB 编程实现 Lagrange 插值，并计算 $\sqrt[3]{3}$.

编写程序如下：

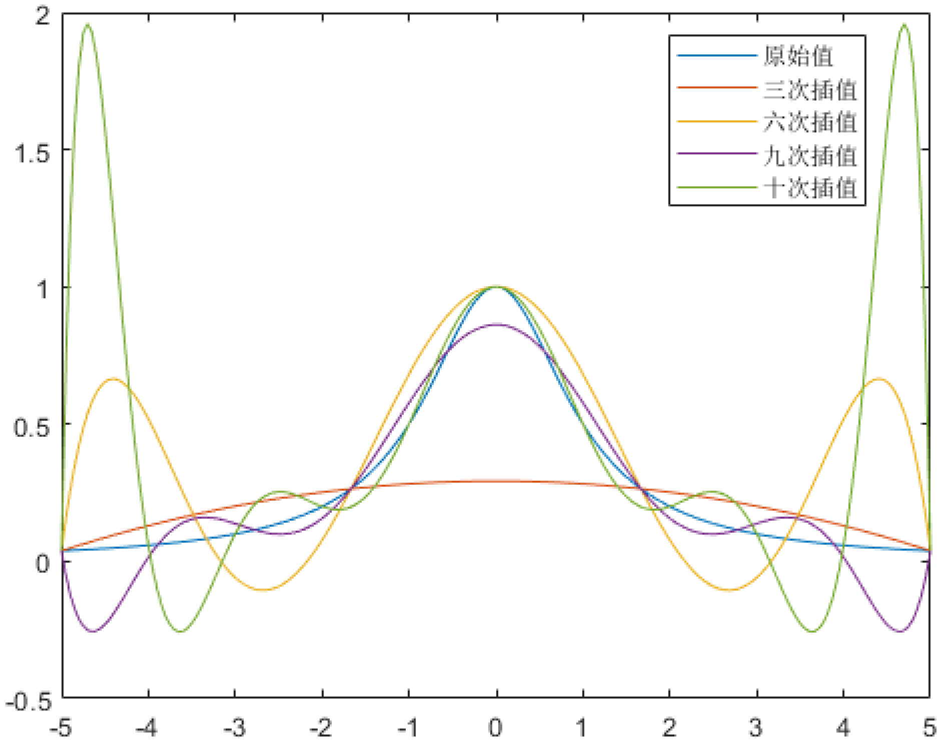
```
function ret=lagrange(x,y,xi)
m=length(x);
n=length(y);
res = length(xi);
 if m ~= n , error('len(x)!=len(y)'); end;
s=0;
for i=1 : n
        z=ones(1,res);
        for j=1 : n
                if j ~= i
                        z=z.*(xi-x(j))./(x(i)-x(j));
                end
        end
        s=s+z.*y(i);
end
ret=s;
```

将 $x=[-1,0,1], y=3.^x, t=1/3$ 分别作为 x,y,xi 参数输入程序得到插值计算结果 $\sqrt[3]{3}=1.5185$

6. 设 $f(x)=\frac{1}{1+x^2}, x\in[-5,5]$，在区间中给出等距节点，利用 MATLAB 分别作出 3 次 Lagrange 插值多项式，6 次 Lagrange 插值多项式，9 次 Lagrange 插值多项式，10 次 Lagrange 插值多项式，并将它们与 $f(x)$ 的图像比较。

利用上题编写的插值函数，并再次编写作图程序，得到图象：

```
function ret = lagrangePic()
xo = [-5:0.01:5];
x3 = [-5:10/3:5];
x6 = [-5:10/6:5];
x9 = [-5:10/9:5];
x10 = [-5:10/10:5];
yo = 1./(1 + xo.^2);
y3 = 1./(1 + x3.^2);
y6 = 1./(1 + x6.^2);
y9 = 1./(1 + x9.^2);
y10 =1./(1 + x10.^2);
plot(xo, yo, 'DisplayName', '原始图像');
hold on;
plot(xo, lagrange(x3, y3, xo), 'DisplayName', '三次插值');
plot(xo, lagrange(x6, y6, xo), 'DisplayName', '六次插值');
plot(xo, lagrange(x9, y9, xo), 'DisplayName', '九次插值');
plot(xo, lagrange(x10, y10, xo), 'DisplayName', '十次插值');
hold off;
```



可以观察到在插值次数增加后图象中间部分近似得较好，而两边偏差较大。