科学计算作业 6

张文涛 517030910425

2018 年 11 月 10 日

1. 已知 $f \in C[a,b]$，且对任一函数 $g \in C_0^2[a,b]$ 成立

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = 0,$$

证明：在 [a, b] 上 $f \equiv 0$。这里 $C_0^2[a,b] = \{g \in C^2[a,b]: \quad g(a) = g(b) = 0\}$

证：由题意得

$$\forall g \in C_0^2[a,b], \int_a^b f(x)g(x)dx = 0 \quad \Rightarrow \quad f \equiv 0$$

证明其逆否命题：

$$f \not\equiv 0 \quad \Rightarrow \quad \exists g \in C_0^2[a,b], \int_a^b f(x)g(x)dx \neq 0$$

不失一般性地假设 $f(x)$ 在非边界处 x_p 处大于零。由连续函数的连续性可知：

$$\exists\, \delta > 0, \forall x \in (x_p - \delta, x_p + \delta),\, f(x) > 0$$

记 $x_p - \delta = x_1$，$x_p + \delta = x_2$，构造出一个 $g(x)$：

$$g(x) = \begin{cases} 0 & x \in [a, x_1] \cup [x_2, b] \\ (x - x_1)^2(x - x_2)^2 & x \in [x_1, x_2] \end{cases}$$

代入原式，则有：

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \int_{x_1}^{x_2} f(x)g(x)dx > 0$$

对于边界情况，也可以找到合适的 δ，使得在 $[a, a+\delta]$ 或 $[b-\delta, b]$ 上 $f(x) > 0$。

对于 $f(x) < 0$ 的情况也可以同理讨论。

所以逆否命题成立，得证。

2. 证明以下变分问题无解：

$$\min_{y \in K} \int_{-1}^{1} x^2 (y'(x))^2\, dx$$

式中

$$K = \{y \in C^1[-1,1]: \quad y(-1) = -1, y(1) = 1\}.$$

证：利用反证法，假设最优解存在且为 y^*，

记 $F(x,y'(x))=x^2(y'(x))^2$，

则由泛函极值存在必要条件：

任取 $v(x)\in C^1[-1,1]$ 满足 $v(-1)=0,v(1)=0$, 任取 ϵ 作为参数，都有：

$$\frac{d}{d\epsilon}\int_{-1}^{1}F(x,(y^*(x))'+\epsilon v'(x))\,dx\bigg|_{\epsilon=0}=0$$

交换微分积分顺序并计算得到：

$$\int_{-1}^{1}2x^2(y^*(x))'v'(x)=0$$

现取一个 $v_s(x)\in C^3[-1,1]\subset C^1[-1,1]$，使得 $v(-1)=v(1)=v'(-1)=v'(1)=0$

则此时可以利用第一题的结论推出：

$$2x^2(y^*(x))'\equiv 0,x\in[-1,1]$$

则有 $(y^*(x))'\equiv 0$，即 $y^*(x)$ 为常数，与 $y^*(-1)=-1\,,y^*(1)=1$ 矛盾，故最优解不存在。

3. 对于求解最速降线问题导出的非线性常微分方程的定解问题：$y(1+(y')^2)=c=constant$，$y(0)=0$，$y(x_1)=y_1$，求出其解。

解：利用参数 t 假设 $\frac{dy}{dx}=\cot t$，则代入方程得到 $y=c\sin^2 t$，于是：

$$\frac{dx}{dt}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dy}{dx}}=\frac{2c\sin t\cos t}{\cot t}=2c\sin^2=c(1-\cos 2t)$$

两端对 t 积分，得到：

$$x=c(t-\frac{1}{2}\sin 2t)+C$$

根据初值可以得到 $C=0$，于是原微分方程的解为：

$$\begin{cases} x=c(t-\frac{1}{2}\sin 2t) \\ y=csin^2t \end{cases}$$

4.（渡江问题）：设一条河为带状，$y=0,y=1$ 为河的两岸，河水的流动沿 x 轴的正向，速度为 y 的函数：$v=v(y)=6y(1-y)$. 现有人以匀速 v_0 从 $(0,0)$ 点出发到达对岸 $(L,1)$ 点，$L\geq 0$. 问游泳者在游泳中如何让调整游泳方向 $\theta(y)$，使得到达 $(L,1)$ 点的时间最短？利用变分法写出该问题的数学模型，并导出相应的 Euler-Lagrange 方程。

答：记渡江时间为 t，则可以列出表达式：

$$t=\int_0^L\sqrt{\frac{1+(y'(x))^2}{v_0^2+36y^2(1-y)^2-12v_0y(1-y)cos(\theta(y))}}\,dx$$

由必要条件：

$$F_y-\frac{d}{dx}F_{y'}=0$$

导出 Euler-Lagrange 方程：

$$-\frac{1}{2}(1+(y')^2)^{\frac{1}{2}}(v_0^2+36y^2(1-y)^2-12v_0y(1-y)\cos(\theta(y)))^{-\frac{3}{2}}$$

$$*(72y(1-y)(1-2y)-12v_0(1-2y)\cos(\theta(y))-y(1-y)\sin(\theta(y))\theta'(y))$$

$$+y''(1+(y')^2)^{-\frac{1}{2}}(v_0+36y^2(1-y)^2-12v_0y(1-y)\cos(\theta(y)))^{-\frac{1}{2}}$$

$$-(y')^2(1+(y')^2)^{-\frac{3}{2}}y''(v_0^2+36y^2(1-y)^2-12v_0y(1-y)\cos(\theta(y)))^{-\frac{1}{2}}$$

$$+y'(1+(y')^2)^{-\frac{1}{2}}(72y(1-y)(1-2y)-12v_0(1-2y)\cos(\theta(y))-y(1-y)\sin(\theta(y))\theta'(y))$$

$$*[72y'(6y^2-6y+1)+24v_0y'\cos(\theta(y))+12v_0(1-2y)\sin(\theta(y))\theta'(y)y'$$

$$-(y'(1-y)\sin(\theta(y))\theta'(y))-yy'\sin(\theta(y))\theta'(y)+y'y(1-y)\cos(\theta(y))(\theta'(y))^2+yy'(1-y)\cos(\theta(y))\theta''(y)]=0$$

5. 将变分问题中的容许集 K 修改为

$$K=\{y\in C^1[x_0,x_1]:\ y(x_0)=y_0,y(x_1)=y_1\}$$

分两步研究其解 y^* 应满足的条件。

(1) 设 $f(x)\in C[x_0,x_1]$，如果

$$\int_{x_0}^{x_1}f(x)\phi'(x)\,dx=0\quad\forall\phi\in C_0^1[x_0,x_1],$$

则 $f(x)=$ 常数，$x\in[x_0,x_1]$. 这里 $C_0^1[x_0,x_1]=\{g\in C^1[x_0,x_1]:\ g(x_0)=g(x_1)=0\}$

(2) 解 y^* 满足

$$\int_{x_0}^{x}F_y(x,y(x),y'(x))dx-F_{y'}(x,y(x),y'(x))=\text{常数},\quad x\in[x_0,x_1]$$

证：(1) 原题要证：

$$f(x)\in C[x_0,x_1]\quad\forall\phi\in C_0^1[x_0,x_1]\quad\int_{x_0}^{x_1}f(x)\phi'(x)\,dx=0\Rightarrow f(x)=\text{常数}$$

我们可以证明其逆否命题：

$$f(x)\neq\text{常数}\Rightarrow f(x)\in C[x_0,x_1]\quad\exists\phi\in C_0^1[x_0,x_1]\quad\int_{x_0}^{x_1}f(x)\phi'(x)\,dx\neq 0$$

则可以不失一般性的假设 $f(x)$ 在 x_p,x_q 两点上函数值不同且 $x_p<x_q$，由函数的连续性有：

$$\forall\epsilon_1,\exists\,\delta_1\forall x\in[x_p-\delta_1,x_p+\delta_1]\,s.t.\,|f(x_p)-f(x)|<\epsilon_1$$

$$\forall\epsilon_2,\exists\,\delta_2\forall x\in[x_q-\delta_2,x_q+\delta_2]\,s.t.\,|f(x_q)-f(x)|<\epsilon_2$$

记 $x_p-\delta_1=a_1$, $x_p+\delta_1=b_1\quad x_q-\delta_1=a_2$, $x_q+\delta_1=b_2$ 构造一个满足条件的 $\phi(x)$：

$$\phi(x)=\begin{cases}0 & x\in[x_0,a_1]\cup[b_2,x_1]\\ 1 & x\in[b_1,a_2]\\ \frac{1}{(b_1-a_1)^4}(x-a_1)^2(x-(2b_1-a_1))^2 & x\in[a_1,b_1]\\ \frac{1}{(b_2-a_2)^4}(x-b_2)^2(x-(2a_2-b_2))^2 & x\in[a_2,b_2]\end{cases}$$

则有：

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\phi'(x)\,dx = \int_{a_1}^{b_1} f(x)\phi'(x)\,dx + \int_{a_2}^{b_2} f(x)\phi'(x)\,dx$$

又可以验证 $\phi(x)$ 在 $[a_1,b_1]$ 及 $[a_2,b_2]$ 上保号，则利用积分第一中值定理：

$$\exists \xi_1 \in [a_1,b_1]\,, \xi_2 \in [a_2,b_2] \quad \int_{a_1}^{b_1} f(x)\phi'(x)\,dx + \int_{a_2}^{b_2} f(x)\phi'(x)\,dx = f(\xi_1) - f(\xi_2)$$

由于 $\epsilon_1\,,\epsilon_2$ 的任意性，可以将 $\epsilon_1\,,\epsilon_2$ 取到足够小，可以认为 $f(\xi_1) - f(\xi_2) \neq 0$。

故逆否命题得证，于是原命题成立。

(2) 则由泛函极值存在必要条件：

任取 $v(x) \in C^1[x_0,x_1]$ 满足 $v(x_0)=0, v(x_1)=0,$ 任取 ϵ 作为参数，都有：

$$\frac{d}{d\epsilon}\int_{x_0}^{x_1} F(x, y(x)+\epsilon v(x), (y^*(x))' + \epsilon v'(x))\,dx\bigg|_{\epsilon=0} = 0$$

交换微分积分顺序并计算得到：

$$\frac{d}{d\epsilon}\int_{x_0}^{x_1} F(x, y(x)+\epsilon v(x), (y^*(x))' + \epsilon v'(x))\,dx\bigg|_{\epsilon=0}$$

$$= \int_{x_0}^{x_1} F_y(x, y(x), (y^*(x))')v(x)\,dx + F_{y'}(x, y(x), (y^*(x))')v'(x)$$

记 $\int_{x_0}^{x} F_y(t, y(t), (y*(t))')\,dt = P(x)$，则有：

$$\int_{x_0}^{x_1} P'(x)v(x) + F_{y'}(x, y(x), (y^*(x))')v'(x)\,dx$$

利用分部积分公式，有：

$$\int_{x_0}^{x_1} P'(x)v(x) + F_{y'}(x, y(x), (y^*(x))')v'(x)\,dx = -\int_{x_0}^{x_1} P(x)v'(x)\,dx + \int_{x_0}^{x_1} F_{y'}(x, y(x), (y^*(x))')v'(x)\,dx$$

$$= \int_{x_0}^{x_1} (F_{y'}(x, y(x), (y^*(x))') - P(x))v'(x)\,dx$$

由 (1) 中的结论：

$$F_{y'}(x, y(x), (y^*(x))') - \int_{x_0}^{x} F_y(t, y(t), (y*(t))')\,dt = const$$

由此得证。