Решение алгебраических и трансцендентных уравнений

Метод половинных делений и метод хорд

Шерухин Кирилл

5030102/30001
СПБПУ
2024

Содержание

1 Формулировка задачи и ее формализация

Дано:

- Функции $f(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 4$ и $\psi(x) = 2xsin(x) - cos(x)$, непрерывная в окрестности искомого корня
- Первые производные $f'(x); \psi'(x)$ и $f''(x); \psi''(x)$ непрерывные в окрестности искомого корня
- Относительная погрешность ϵ, с которой мы хотим получить значение корня

Цель: Получить значение корня уравнения $f(x); \psi(x)$ с допустимой погрешностью $\Delta y < \epsilon$

План выполнения:

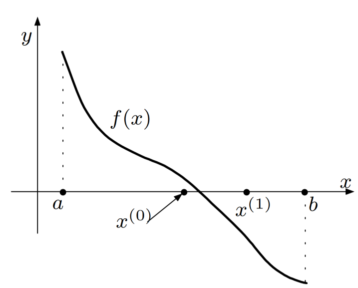
1. Определение границ корня графически или аналитически (в случае алгебраического уравнения)
2. Уточнение корня методом половинного деления или методом хорд

2 Алгоритмы и условия их применимости

Каждый метод требует перед началом установить отрезок $[a; b]$ в котором будет происходить уточнения корня. Данный отрезок должен удовлетворять условиям, которые различны для наших методов.

2.1 Метод половинных делений

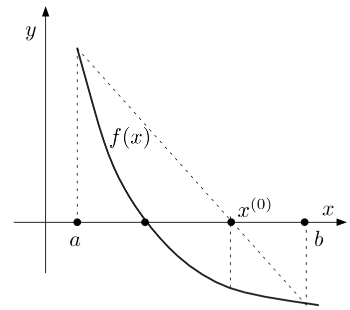
while($|b - a| > 2\epsilon$)
    c := $\frac{a+b}{2}$
    if $f(c)f(a) < 0$
        b := c
    else
        a := c
x := $\frac{a+b}{2}$



Условия применимости:

- $f(x) \in C([a; b])$
- $f(a)f(b) < 0$

2.2 Метод хорд



$x^{(k+1)} = x^{(k)} - f(x^{(k)})\frac{x^{(k)}-\bar{x}}{f(x^{(k)})-f(\bar{x})}$

Оценка: $|x^* - x^{(k+1)}| < \frac{M_1-m_1}{m_1}|x^{(k+1)} - x^{(k)}|$

$M_1 := \max\limits_{x\in[a;b]} f'(x)$
$m_1 := \min\limits_{x\in[a;b]} f'(x)$

Условия применимости:

- $f(x) \in C^{(2)}([a;b])$
- $f(a)f(b) < 0$
- $f'(x)$ и $f''(x)$ знакопостоянны
- стартовая точка $x^{(0)} \in [a;b]$ такая, что $f(x^{(0)})f''(x^{(0)}) < 0$
- неподвижный конец $\bar{x} \in [a;b]$ такой, что $f(\bar{x})f''(\bar{x}) > 0$

3 Предварительный анализ задачи

Перед применением численных методов стоит для начала определиться с промежутками $[a;b]$, на которых будет производиться уточнение корней. Данные промежутки должны строго удовлетворять условиям применимости методов.

3.1 Алгебраическое уравнение

Известно неравенство, ограничивающее область существования корней полинома $P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n$ (корни должны находиться правее единицы):

$$x^* \leq 1 + \sqrt[m]{\frac{|a'|}{a_0}} \tag{1}$$

Где a' - минимальный отрицательный коэффициент a_i, а m — номер первого отрицательного коэффициента из $a_1, a_2, \dots, a_n$.

Рассмотрим многочлен $f(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 4$. Аналитически оценим границы его корней:
Надём верхнюю границу положительных корней $f(x)$:

$m = 1$
$|a'| = 4$
$x_+^* \leq 1 + \sqrt[1]{\frac{4}{1}} = 5$

Надём нижнюю границу положительных корней $f(x)$:
Применим подстановку $x = \frac{1}{x}$ и умножим результат на -1:

$$x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 4 \sim -4x^4 + 4x^2 - 4x + 1 \sim \underline{4x^4 - 4x^2 + 4x - 1}$$

$m = 2$
$|a'| = 4$
$x_+^* \geq 1 + \sqrt[2]{\frac{4}{4}} = 2$

Надём нижнюю границу отрицательных корней $f(x)$:
Применим подстановку $x = -x$:

$$x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 4 \sim \underline{x^4 + 4x^3 + 4x^2 - 4}$$

$m = 4$
$|a'| = 4$
$x_-^* \geq -1 - \sqrt[4]{\frac{4}{1}} \approx -2.4142$

Надём верхнюю границу отрицательных корней $f(x)$:
Применим подстановку $x = -\frac{1}{x}$ и домножим на -1:

$$x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 4 \sim -4x^4 + 4x^2 + 4x + 1 \sim \underline{4x^4 - 4x^3 - 4x^2 - 1}$$

$m = 2$
$|a'| = 4$
$x_-^* \leq -1 + \sqrt[2]{\frac{4}{4}} = 0$

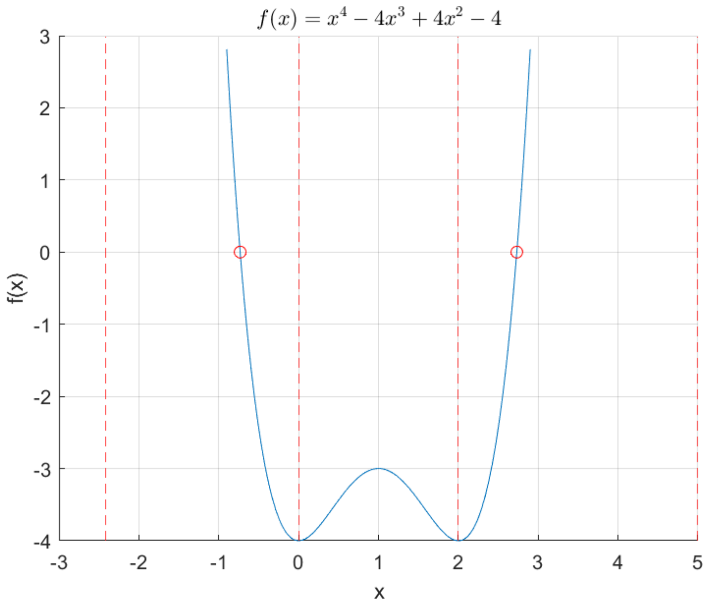


Рис. 1: График алгебраической функции и аналитические окресности её корней

Из Рис. 1 видно, что аналитически полученные окрестности корней $f(x)$ можно значительно улучшить (а для отрицательных корней диапазон вообще не верен, так как корень находится после -1 и не удовлетворяет условиям теоремы (1), это можно исправить переносом графика лево на единицу $x = x + 1$, но графический метод значительно легче определил корень)
Проанализировав график функции, для изучения выберем положительный корень уравнения, а его окрестностью установим $[2; 3]$

3.1.1 Проверка условий пременимости для метода половинных делений

- $f(x)$ — полином 4 степени $\implies$ $f(x) \in C^{(4)}([2; 3])$
- $f(2)f(3) = -4 * 5 = -20 < 0$

Вывод: отрезок $[2; 3]$ удволетворяет условиям применимости метода половинных делений.

3.1.2 Проверка условий пременимости для метода хорд

- $f(x)$ — полином 4 степени $\implies f(x) \in C^{(4)}([2;3])$
- $f(2)f(3) = -4 * 5 = -20 < 0$
- $f'(x) = 4x^3 + 12x^2 + 8x$ и $f''(x) = 12x^2 + 24x + 8$ знакопостоянны (см. Рис. 2)
- стартовая точка $x^{(0)} = 2 \in [a;b]$ такая, что $f(2)f''(2) = -4 * 104 = -416 < 0$
- неподвижный конец $\bar{x} = 3 \in [a;b]$ такой, что $f(3)f''(3) = 5 * 188 = 940 > 0$

Вывод: отрезок [2; 3] удволетворяет условиям применимости метода хорд.

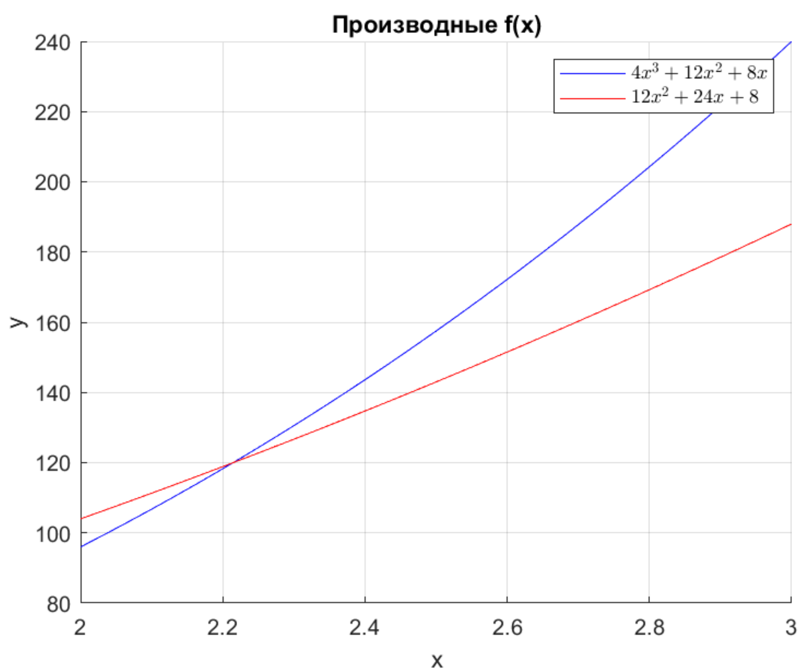


Рис. 2: Графики производных $f(x)$

Оценим максимум и минимум первой производной:

$$M_1 := 240 \tag{2}$$
$$m_1 := 96 \tag{3}$$

3.2 Трансцендентное уравнение

Построим график функции $\psi(x) = 2xsin(x) - cos(x)$:

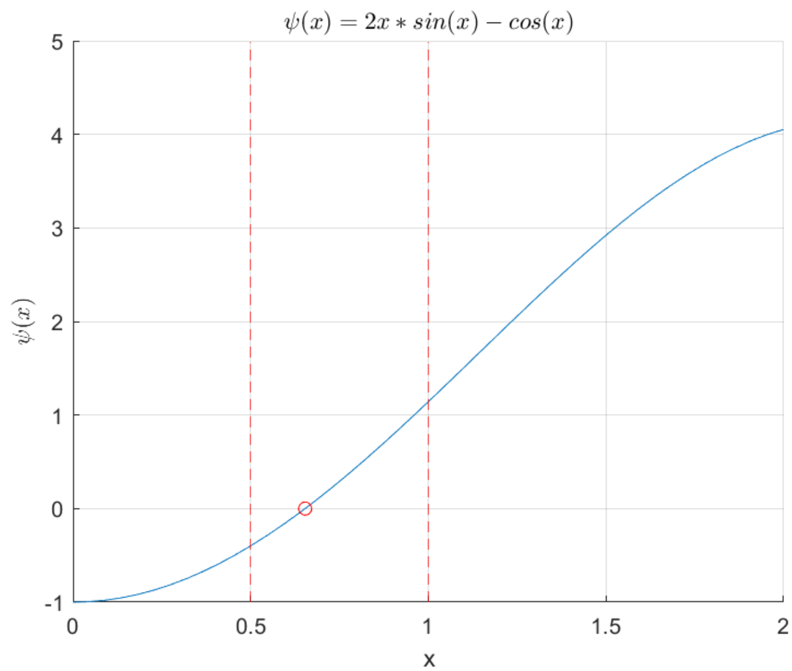


Рис. 3: График трансцендентной функции и промежуток уточнения корня

Графическим методом выберем промежуток $[0.5; 1]$

3.2.1 Проверка условий пременимости для метода половинных делений

- $\psi(x)$ содержит $sin(x)$ и $cos(x) \implies \psi(x) \in C^{(\infty)}([0.5; 1])$
- $\psi(0.5)\psi(1) = -0.39815 * 1.14263 = -0.45495 < 0$

Вывод: отрезок $[0.5; 1]$ удволетворяет условиям применимости метода хорд.

3.2.2 Проверка условий пременимости для метода хорд

- $\psi(x)$ содержит $sin(x)$ и $cos(x) \implies \psi(x) \in C^{(\infty)}([0.5; 1])$
- $\psi(0.5)\psi(1) = -0.39815 * 1.14263 = -0.45495 < 0$
- $\psi'(x) = 3sin(x) + 2xcos(x)$ и $\psi''(x) = 5cos(x) - 2xsin(x)$ знакопостоянны (см. Рис. 4)
- стартовая точка $x^{(0)} = 0.5 \in [0.5; 1]$ такая, что $\psi(0.5)\psi''(0.5) = -0.39815 * 3.90848 = -1.55619 < 0$
- неподвижный конец $\bar{x} = 1 \in [0.5; 1]$ такой, что $\psi(1)\psi''(1) = 1.14263 * 1.01856 = 1.16385 > 0$

Вывод: отрезок $[0.5; 1]$ удволетворяет условиям применимости метода половинных делений.

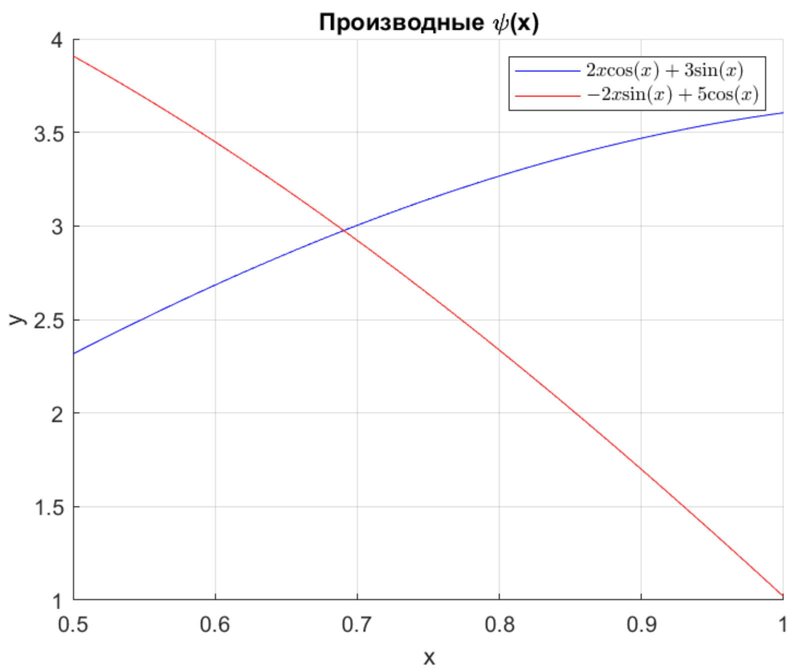


Рис. 4: Графики производных $\psi(x)$

Оценим максимум и минимум первой производной:

$$M_1 := 2.315859177702982 \tag{4}$$
$$m_1 := 3.605017566159969 \tag{5}$$

4 Тестовые примеры

В качестве примеров посчитаем приблизительные значения корней на полученных нами отрезках для $\epsilon = 0.05$

4.1 Метод половинных делений

(1): $[a;b] = [2;3]; \quad |3-2| = 1 > 0.02 \implies iterate$

$c = \frac{1}{2}(2+3) = 2.5$

$f(2.5) = 2.5^4 - 4 * 2.5^3 + 4 * 2.5^2 - 4 = -2.4375 \implies a := 2.5$

(2): $[a;b] = [2.5;3]; \quad |3-2.5| = 0.5 > 0.02 \implies iterate$

$c = \frac{1}{2}(2.5+3) = 2.75$

$f(1.5) = 2.75^4 - 4 * 2.75^3 + 4 * 2.75^2 - 4 = 0.2539 \implies b := 2.75$

(3): $[a;b] = [2.5;2.75]; \quad |2.75-2.5| = 0.25 > 0.02 \implies iterate$

$c = \frac{1}{2}(2.75+2.5) = 2.625$

$f(2.625) = 2.625^4 - 4 * 2.625^3 + 4 * 2.625^2 - 4 = -1.3083 \implies a := 2.625$

(4): $[a;b] = [2.625;2.75]; \quad |2.75-2.625| = 0.125 > 0.02 \implies iterate$

$c = \frac{1}{2}(2.75+2.625) = 2.6875$

$f(2.6875) = 2.6875^4 - 4 * 2.6875^3 + 4 * 2.6875^2 - 4 = -0.5861 \implies a := 2.6875$

(5): $[a;b] = [2.6875;2.75]; \quad |2.75-2.6875| = 0.06275 > 0.10 \implies result$

$c = \frac{1}{2}(2.75+2.6875) = 2.718625$

$$x = 2.72 \pm 0.05$$

4.2 Метод хорд

(1): $x^{(0)} = 2;\ \bar{x} = 3;$

$$x^{(1)} := x^{(0)} - f(x^{(0)}) * \frac{x^{(0)} - \bar{x}}{f(x^{(0)}) - f(\bar{x})} = 2 - (-4) * \frac{2-3}{-4-5} \approx 2.4444$$

$$\frac{M_1 - m_1}{m_1}|x^{(1)} - x^{(0)}| = \frac{240-96}{96} * |2.4444 - 2| = 1.5 * 0.4444 = 0.6666 > 0.05$$

$\implies iterate$

(2): $x^{(1)} = 2.4444;\ \bar{x} = 3;$

$$x^{(2)} := x^{(1)} - f(x^{(1)}) * \frac{x^{(1)} - \bar{x}}{f(x^{(1)}) - f(\bar{x})} \approx$$

$$\approx 2.4444 - (-2.8199) * \frac{2.4444 - 3}{-2.8199 - 5} \approx 2.6447$$

$$\frac{M_1 - m_1}{m_1}|x^{(2)} - x^{(1)}| = 1.5 * |2.6447 - 2.4444| \approx 0.3001 > 0.05$$

$\implies iterate$

(3): $x^{(2)} = 2.4444;\ \bar{x} = 3;$

$$x^{(3)} := x^{(2)} - f(x^{(2)}) * \frac{x^{(2)} - \bar{x}}{f(x^{(2)}) - f(\bar{x})} \approx$$

$$\approx 2.6447 - (-1.0928) * \frac{2.6447 - 3}{-1.0928 - 5} \approx 2.7084$$

$$\frac{M_1 - m_1}{m_1}|x^{(3)} - x^{(2)}| = 1.5 * |2.7084 - 2.6447| \approx 0.03185 < 0.05$$

$\implies result$

$$x = 2.71 \pm 0.05$$

5 Подготовка контрольных тестов

Тестировать приведенные выше методы будем по 3 характеристикам:

1. Зависимость ошибки от колличества итераций — $Err(K)$
2. Количество итераций для достижения заданного ϵ — $K(\epsilon)$
3. Достижимость фактической точности решения для заданного ϵ — $Err(\epsilon)$

Дополнительно визуализируем первые 3 итерации метода хорд.

Для построения соответствующих графиков необходимо задать "точные значения"для искомых корней. С большой точностью это можно сделать функцией Matlab ‘fzero‘.

Значение для алгебраического уравнения:

$$x := 2.732050807568877$$

Значение для трансцендентного уравнения:

$$x := 0.653271187094403$$

6 Модульная структура программы

Программный код оформим на языке C, он будет состоять из:

Метода половинного деления, принимающего интервал поиска, функцию, ϵ, и логгер дополнительной информации (K, Err, ϵ):

```
double half(range_t range, double (*f)(double),
            double eps, log_conf_t logger)
```

Метода хорд, принимающего неподвижный конец, подвижный конец, функцию, ϵ, максимум и минимум первой производной и логгер дополнительной информации (K, Err, ϵ):

```
double hord(double x_fix, double x0, double (*f)(double),
            double eps, double M1, double m1, log_conf_t logger)
```

Тесты для алгебраического уравнения оформим в две процедуры:

```
void half_test();
void hord_test();
```

Тесты для трансцендентного уравнения оформим в две процедуры:

```
void t_half_test();
void t_hord_test();
```

7 Исследования методов

Из графиков 6, 9 можно примерно оценить ассимптотики двух методов:

$K_{half}(\epsilon) \approx e^{(-0.620 \pm 0.009) * \epsilon} + C_1$
$K_{hord}(\epsilon) \approx e^{(-1.442 \pm 0.008) * \epsilon} + C_2$

Разница в основаниях экспоненты: $e^{0.822 \pm 0.017}$, ассимптотика метода хорд значительно лучше.

Из графиков 5, 8, можно сказать, что ошибка при методе хорд убывает быстрее (не так удивительно после оценкки ассимптотик), так же метод хорд даёт более стабильное уменьшение погрешности, чем метод половинных делений (отстутствие резких падений фактической погрешности с последующим позвращением к ассимптотической кривой).

Из графиков 7, 11 можно сказать, что оба метода достигают погрешности ϵ, что критически важно, без выполнения этого критерия смысла использовать их нету. При одинаковых ϵ — особенно при относительно больших — метод хорд стабильно даёт фактическую погрешность меньше чем метод половинных делений (зелёный график ниже красного)

7.1 Визуальные приложения для алгебраического уравнения

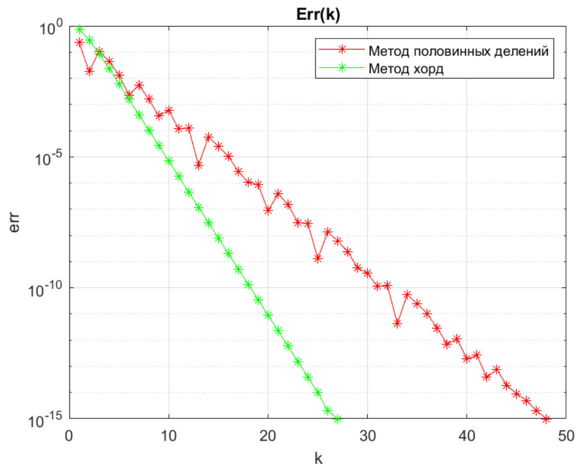


Рис. 5: Зависимость ошибки от количества итераций

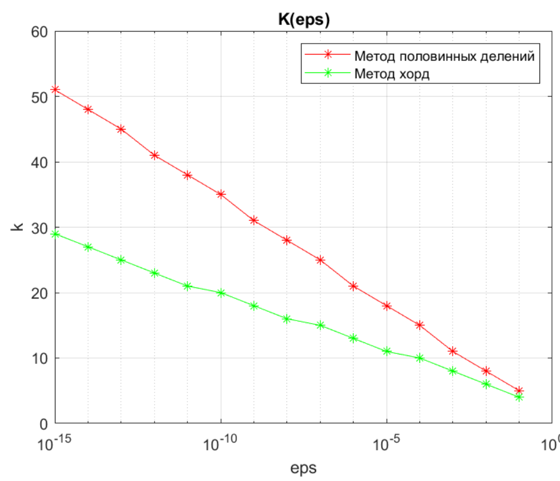


Рис. 6: Зависимость количества итераций от ϵ

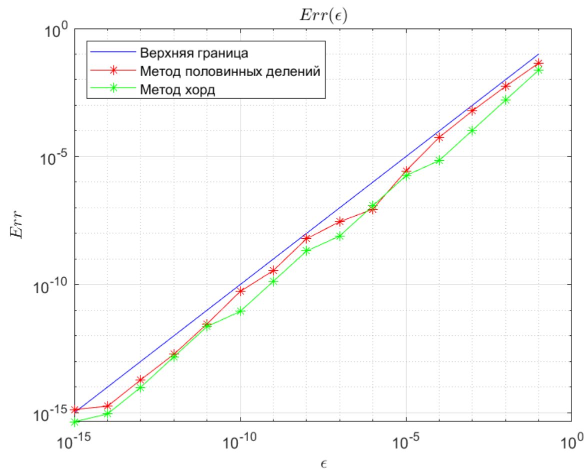


Рис. 7: Зависимость ошибки от ϵ

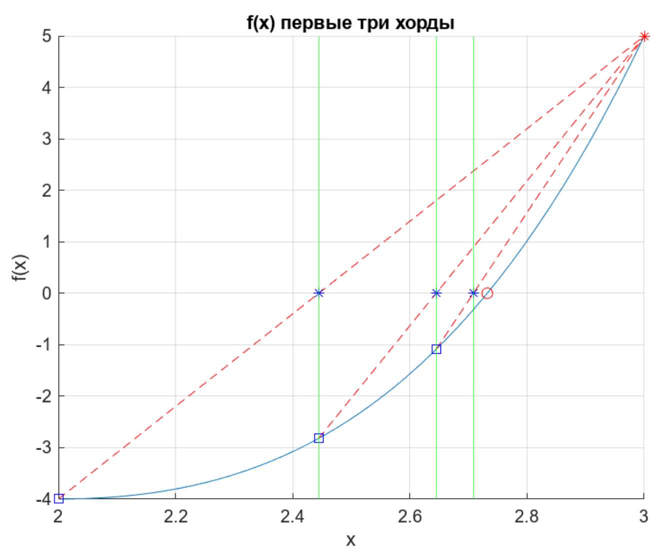


Рис. 8: Визуализация метода хорд

7.2 Визуальные приложения для трансцендентного уравнения

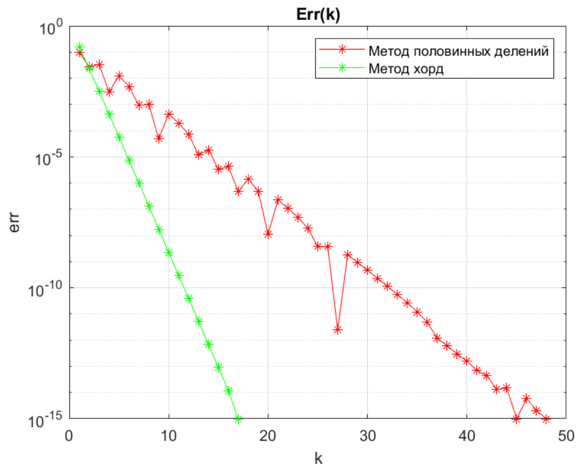


Рис. 9: Зависимость ошибки от количества итераций

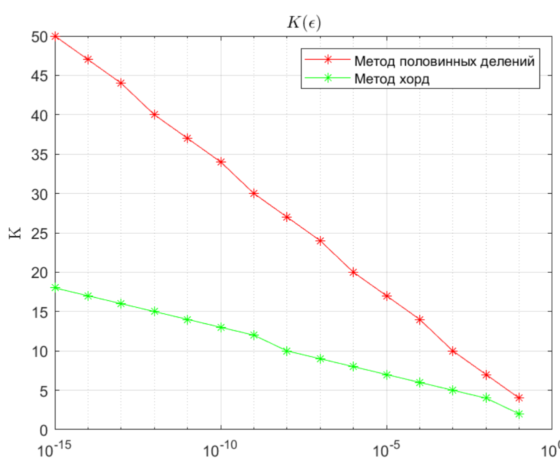


Рис. 10: Зависимость количества итераций от ϵ

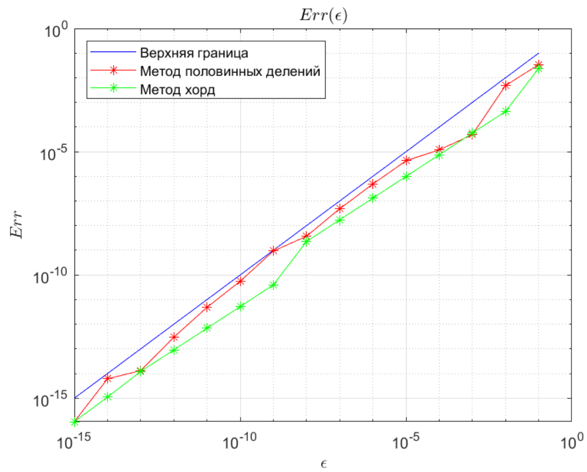


Рис. 11: Зависимость ошибки от ϵ

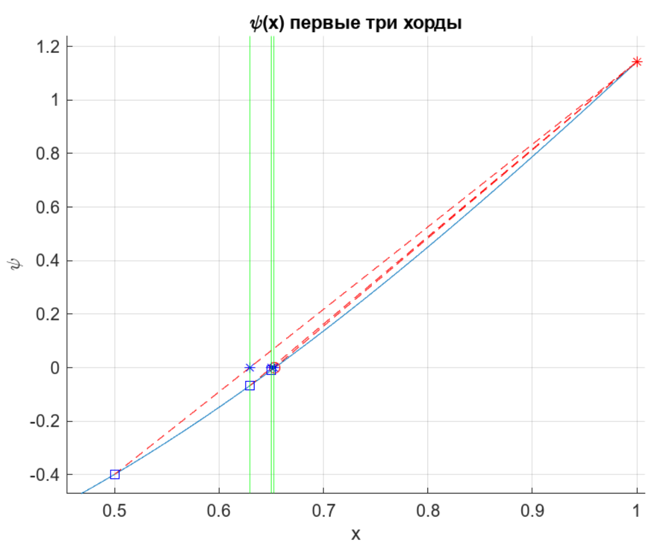


Рис. 12: Визуализация метода хорд

8 Выводы

Метод хорд обладает ассимптотикой значительно превосходящей метод половинных делений, но условия его применимости довольно сильные.
Замеченная особенность метода половинных делений в виде резкого падения ошибки, а потом её возвращения к той же прямой, при некоторых итерациях, происходит в случаях, когда отдаление правой и левой границы от искомого корня приблизительно равно. Метот хорд лишен этого, так как приближается к корню с одной стороны. Этот факт не дает преимущества ни одному из методов, так как в прикладных вопросах абсолютно не важен.
По итогу, можно сказать, что если условия выполнимости метода хорд уволетворены, то стоит всегда предпочитать его методу половинных делений.