Решение алгебраической проблемы собственных значений итерационными методами

Метод обратных итераций со сдвигом

Шерухин Кирилл

5030102/30001
СПБПУ
2024

Содержание

1 Формулировка задачи и ее формализация

Дано:

- Невырожденная произвольная матрица с различными собственными числами $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.
- Приближенное значение одного из собственных чисел $\tilde{\lambda}$
- Число $\epsilon > 0$, означающее допустимую ошибку собственного числа.

.

Цель: Уточнить значение $\tilde{\lambda}$ до значения соответствующего ему собственного числа с максимальной ошибкой ϵ

План выполнения: Используя метод обратных итераций со сдвигом уточнить собственное число до необходимой погрешности.

2 Алгоритм и условия его применимости

2.1 МОИ со сдвигом

Используемые формулы:

$$(A - \tilde{\lambda}E)y^{(k)} = \bar{y}^{(k-1)}$$

$$\bar{y}^{(k)} = \frac{y^{(k)}}{||y^{(k)}||_\infty}$$

$$\lambda^{(k)} = \tilde{\lambda} + \left\langle \frac{\bar{y}^{(k-1)}}{y^{(k)}} \right\rangle$$

Условие остановки:

$$x^{(k)} \neq \mathbb{O}$$

$$|\lambda^* - \lambda^{(k)}| \leq \frac{||Ax^{(k)} - \lambda^{(k)}x^{(k)}||_2}{||x^{(k)}||_2}$$

2.2 Условия применимости

Если $\tilde{\lambda}$ точно совпадает с собственным числом, то перед применением метода его надо огрубить. Матрица A должна быть матрицей простой структуры.

3 Предварительный анализ задачи

Несмотря на то, что для сходимости метода A достаточно быть матрицей простой структуры, для удобства исследования предпочтём генерировать матрицы, все собственные числа которых различны. Это можно сделать по формуле:

$$A \coloneqq Q * \mathrm{diag}(\lambda_0, \cdots, \lambda_n) * Q^T$$

Где Q — ортогональная матрица полученная из произвольной матрицы $n \times n$ QR разложением. Зная собственные числа матрицы, можно легко запускать итерационный процесс, огрубляя любое из них.

4 Тестовый пример

$$\sqsupset A \coloneqq \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix};\ X^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \tilde{\lambda} = 0.7; \epsilon = 0.05$$

$$(A - \tilde{\lambda}E) = \begin{bmatrix} 1.3 & 1 \\ 1 & 1.3 \end{bmatrix} = LU = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ l & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ 0 & u_{22} \end{bmatrix};\ \begin{cases} u_{11} = 1.3 \\ u_{11}l = 1 \\ u_{12} = 1 \\ lu_{12} + u_{22} = 1.3 \end{cases}$$

$$\implies L = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0.769 & 1 \end{bmatrix};\ U = \begin{bmatrix} 1.300 & 1 \\ 0 & 0.531 \end{bmatrix}$$

1: $(A - \tilde{\lambda}E)X^{(1)} = X^{(0)} \implies LT^{(1)} = X^{(0)} \implies T^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ -0.769 \end{bmatrix};$

$$UX^{(1)} = T^{(1)} \implies X^{(1)} = \begin{bmatrix} 1.883 \\ -1.448 \end{bmatrix};\ \bar{X}^{(1)} = \frac{1}{1.883} \begin{bmatrix} 1.883 \\ -1.448 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -0.769 \end{bmatrix};$$

$$\lambda^{(1)} = \tilde{\lambda} + \left\langle \frac{\bar{X}_i^{(0)}}{X_i^{(1)}} \right\rangle = 0.7 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1.883}\right) = 0.966$$

$$\frac{||AX^{(1)} - \lambda^{(1)}X^{(1)}||_2}{||X^{(1)}||_2} = \frac{\left|\left|\begin{bmatrix} 2.3183 - 0.966 * 1.883 \\ -1.0132 + 0.966 * 1.448 \end{bmatrix}\right|\right|}{2.376} = \frac{0.631}{2.376} = 0.265 > \epsilon \implies iterate$$

2: $(A - \tilde{\lambda}E)X^{(2)} = \bar{X}^{(1)} \implies LT^{(2)} = \bar{X}^{(1)} \implies T^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1.538 \end{bmatrix};$

$$UX^{(2)} = T^{(2)} \implies X^{(2)} = \begin{bmatrix} 2.997 \\ -2.896 \end{bmatrix};\ \bar{X}^{(2)} = \frac{1}{2.997} \begin{bmatrix} 2.997 \\ -2.896 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -0.966 \end{bmatrix};$$

$$\lambda^{(2)} = \tilde{\lambda} + \left\langle \frac{\bar{X}_i^{(1)}}{X_i^{(2)}} \right\rangle = 0.7 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2.997} + \frac{0.769}{2.896}\right) = 1.000$$

$$\frac{||AX^{(2)} - \lambda^{(2)}X^{(2)}||_2}{||X^{(2)}||_2} = \frac{\left|\left|\begin{bmatrix} 3.098 - 2.997 \\ -2.796 + 0.966 \end{bmatrix}\right|\right|}{4.1681} = \frac{0.0757}{2.2133} = 0.034 < \epsilon \implies return$$

5 Подготовка контрольных тестов

Исследовать алгоритм будем по следующим характеристикам:

1. Зависимость относительной погрешности решения от числа итераций для матриц с разной разделимостью собственных чисел.
   Аналог разделимости собственных чисел для МОИ со сдвигом введём как $\mu := \left|\frac{\tilde{\lambda}_i - \lambda_i}{\tilde{\lambda}_i - \lambda_{i_0}}\right|$, где λ_{i_0} такое что $i_0 \neq i \ \& \ min(|\tilde{\lambda}_i - \lambda_{i_0}|)$
   Тестируется на 6 случайных матрицах 10×10 с разделимостями 0.6, 0.5, 0.4, 0.3, 0.2, 0.1 до точности $\epsilon = 10^{-13}$.
   Ожидается, что матрицам с меньшими μ потребуется меньше итераций для достижения ошибки ϵ.

2. Зависимость фактической ошибки решения от заданного ϵ.
   Тестируем для $\epsilon = 10^{-i}, i = 0..12$ на матрице с $\mu = 0.5$.
   Ожидается достижимость заданной точности.

6 Модульная структура программы

Программный код оформим на языке C, он будет состоять из:

Самого алгоритма МОИ со сдвигом, принимающего матрицу коэффициентов, первое приближение X, первое приближение λ, заданную погрешность ϵ, параметры для логирования и как выходные параметры — собственное число:

```
double IIM(Matrix_t eq, double* X0, double lambda, double eps, FILE* f, char to_log);
```

Метода решаюшего задачу для матрицы записанной в бинарном файле filename и логируюшего процесс решения в csv файл resName:

```
void Sol(char* filename, char* resName, double eps);
```

Метода, тестирующего достижимость заданной погрешности и логирующего результаты в csv файл resName:

```
void Conv(char* filename, char* resName);
```

7 Исследование метода

Из рис. 1 видно, что для всех матриц итерационный метод уточняет $\tilde{\lambda}$ до необходимой погрешности. Как и ожидалось матрицы с большим μ сходятся дольше, это стоило ожидать из теоретической ассимптотики приближений:

$$x^{(k)} = \alpha_i w^{(i)} \left[1 + \mathcal{O}\left(\left| \frac{\tilde{\lambda}_i - \lambda_i}{\tilde{\lambda}_i - \lambda_{i_0}} \right|^k \right) \right]$$

Из рис. 2 видим, что заданная точность достигается для всех ϵ. Это необходимое условие для того, чтобы метод был применим в практичеких задачах

8 Визуальные приложения

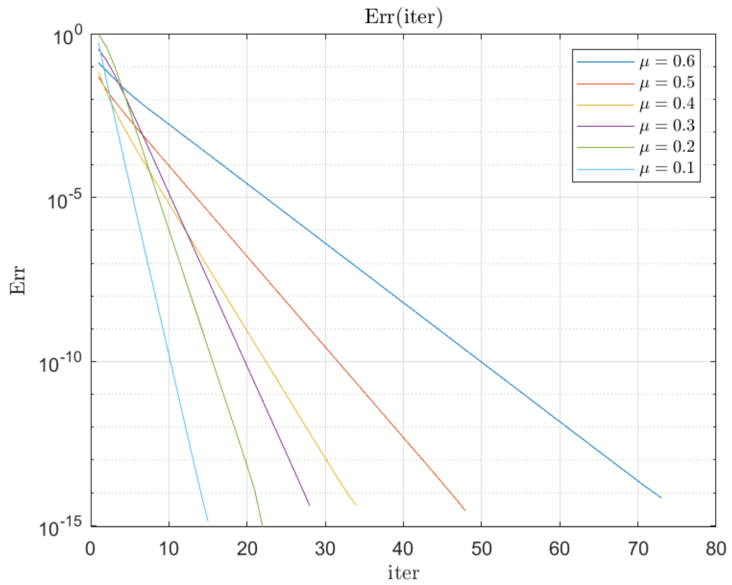

Рис. 1: Зависимость ошибки от итерации для различных μ

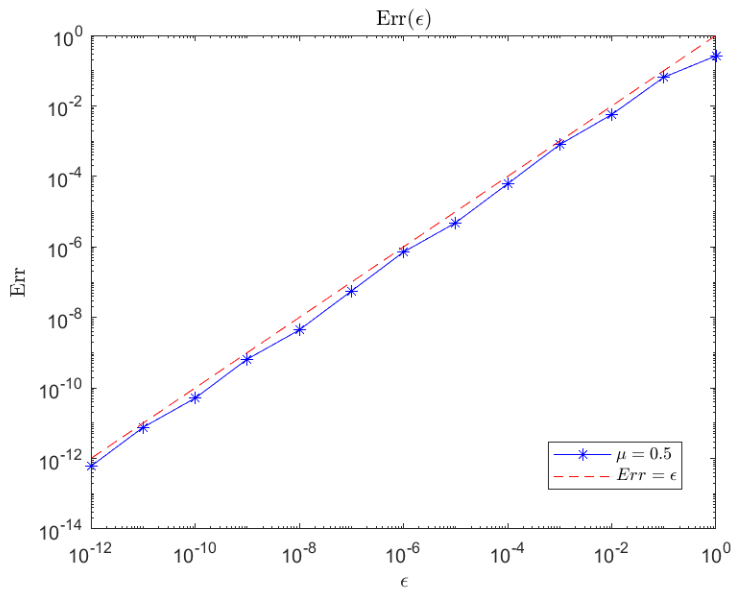

Рис. 2: Достижимость заданной ошибки ϵ

9 Выводы

Метод обратных итераций со сдвигом — хороший метод для решения частичной АПСЧ, он позволяет не только найти собственный вектор, но и соответствующее ему собственное значение. Скорость его сходимости превосходит скорость степенного метода, а так же зависит от близости $\tilde{\lambda}$ к точному значению. Стоит заметить, что плохое первое приближение собственного вектора может замедлить алгоритм.
Разделимость корней влияет на скорость сходимости только в том плане, что $\tilde{\lambda}$ должно находиться ближе к искомому собственному числу, чем к какому-либо другому, иначе метод сойдётся не туда. Оценивать стоит не разделимостью, а значением μ, которое мы ввели. Благодаря LU разложению, применяемому в алгоритме, МОИ со сдвигом идеально подходит для АПСЧ треугольных матриц.