向量 (Vectors)

本章探究的主要問題架構

什麼是向量？

↓

優點特性？

↓

表達或定義？

↓

運算與應用？

向量(Vectors)

Advantage :

1. 可以簡潔表達物理定律。
2. 使用向量表示的方程式不會因座標系改變而改變(即向量大小與方向永不變)。

純量與向量(Scalars & Vectors)

純量

1. 僅有大小(量值)。
2. 符合純代數運算。

向量

1.大小與方向。
2.符合向量代數運算。

純量與向量的關係

1. $\vec{A}=\vec{B}\Rightarrow A=B,\ \ \theta_A=\theta_B$，

但不表示位置相同。

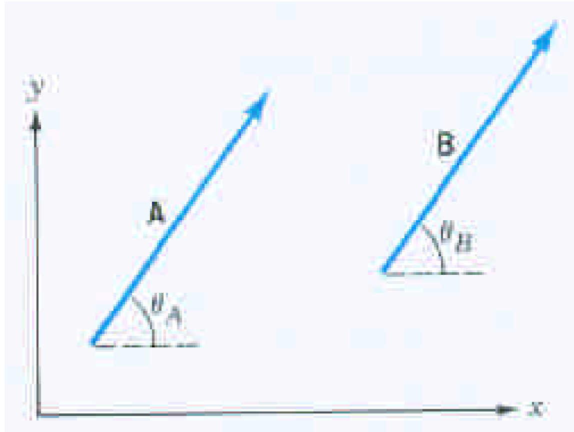


Fig.2.3

2. $A=\vec{B}\ \&\ A+\vec{B}\Rightarrow$ 皆不成立。

$A\cdot\vec{B}=\vec{B}\cdot A\Rightarrow$ 皆成立。

向量加減法

✦ 向量加法(Vector Addition)

1. $\left|\vec{A}+\vec{B}\right| \neq A+B \Rightarrow \left|A-B\right| \leq \left|\vec{A}+\vec{B}\right| \leq A+B$

2. $\vec{A}+\vec{B}=\vec{B}+\vec{A}$ (commutative)

3. $(\vec{A}+\vec{B})+\vec{C}=\vec{A}+(\vec{B}+\vec{C})$ (associative)

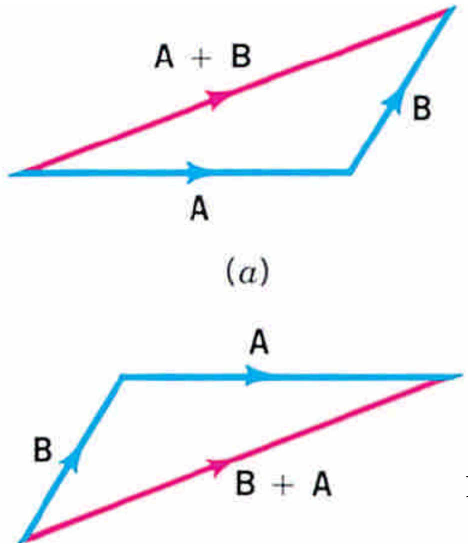


Fig.2.6

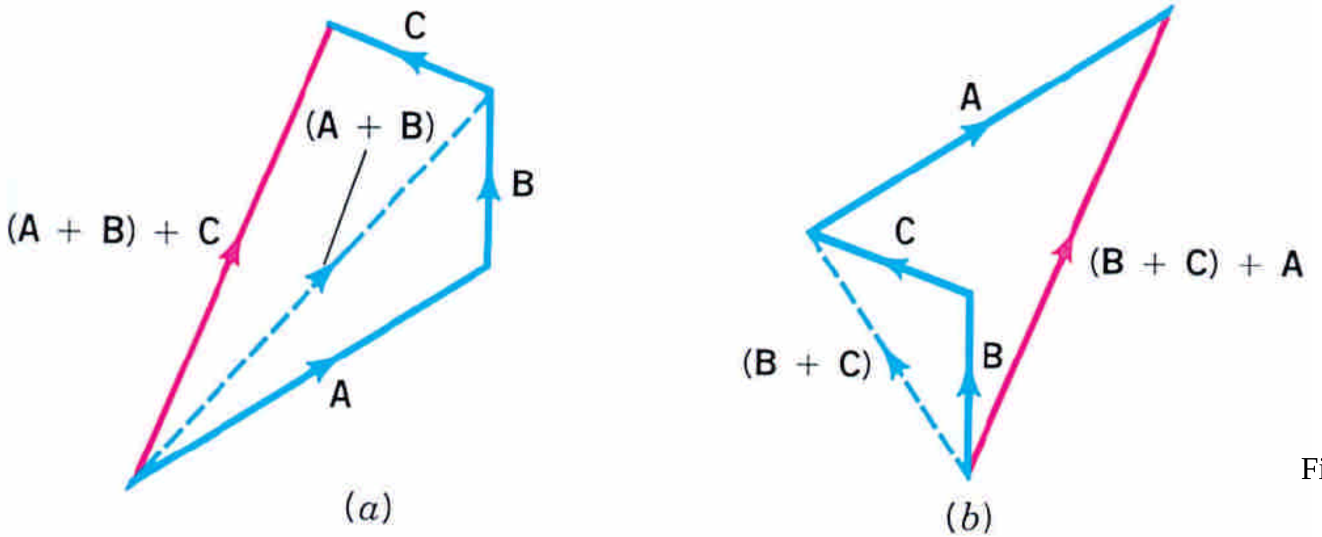
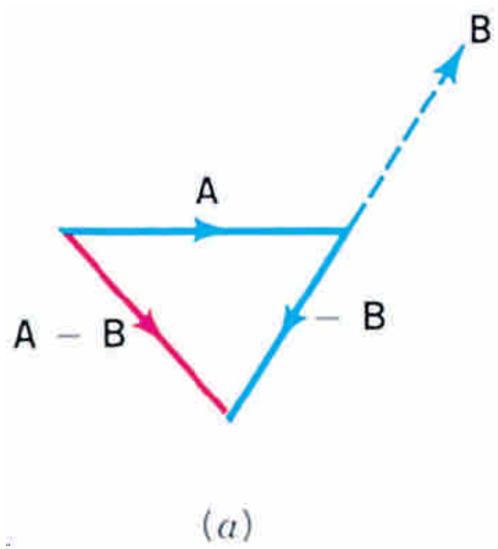


Fig.2.7

向量減法 (Vector Subtraction)

1. $\vec{A}-\vec{B}=\vec{A}+(-\vec{B})$

2. $\vec{A}=\vec{B}+(\vec{A}-\vec{B})$



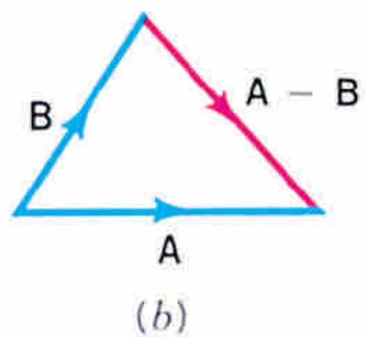


Fig.2.8

分量

1. $A_x = A\cos\theta,\ \ A_y = A\sin\theta$

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2},\quad \tan\theta = \frac{A_y}{A_x}$$

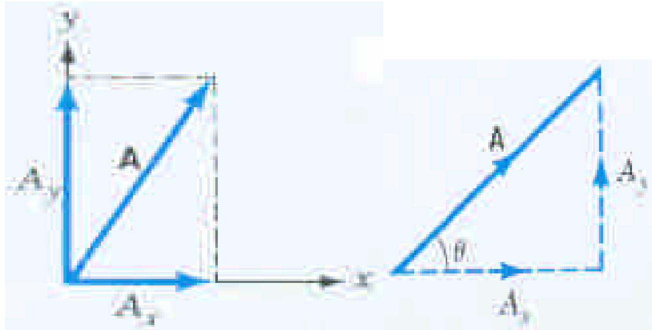


Fig.2.11

☆分量不可能大於原向量的大小。

☆若座標系不同(如轉動一角度)，則分量亦不同。

2. $\vec{R} = \vec{A} + \vec{B} \Rightarrow \begin{Bmatrix} R_x = A_x + B_x \\ R_y = A_y + B_y \end{Bmatrix}$

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}\ \ ,\ \ \tan\theta = \frac{R_y}{R_x}$$

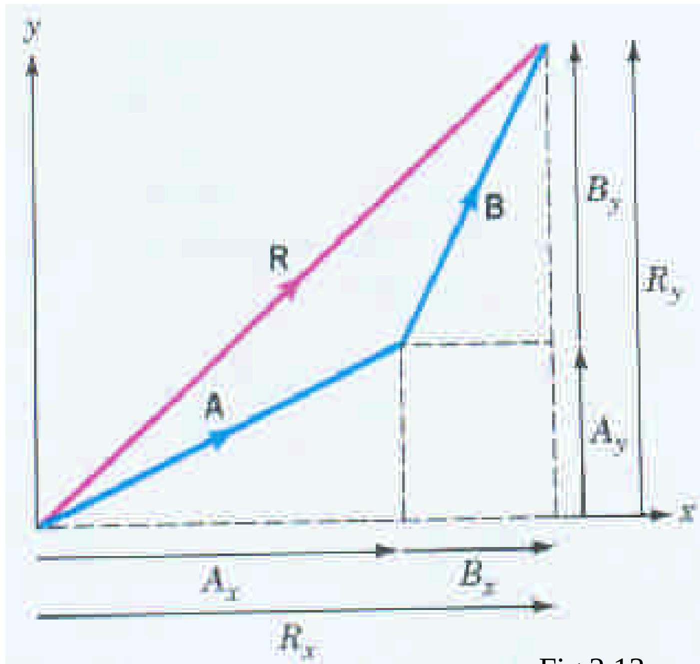


Fig.2.13

單位向量

1.單位向量 $\hat{i},\ \hat{j},\ \hat{k}$ 分別沿 x, y, z

且 $\left|\hat{i}\right| = \left|\hat{j}\right| = \left|\hat{k}\right| = 1$ 。

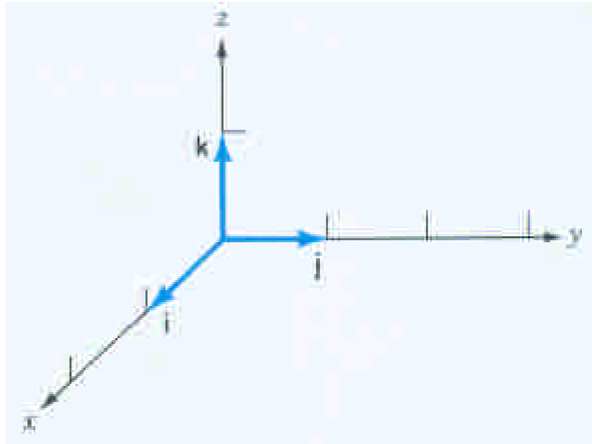


Fig.2.15

2. $\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}$

$\vec{B} = B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k}$

3. $\vec{R} = \vec{A} \pm \vec{B} \Rightarrow \begin{Bmatrix} R_x = A_x \pm B_x \\ R_y = A_y \pm B_y \\ R_z = A_z \pm B_z \end{Bmatrix}$

$\vec{R} = \left(A_x \pm B_x\right)\hat{i} + \left(A_y \pm B_y\right)\hat{j}$

$+\left(A_z \pm B_z\right)\hat{k}$

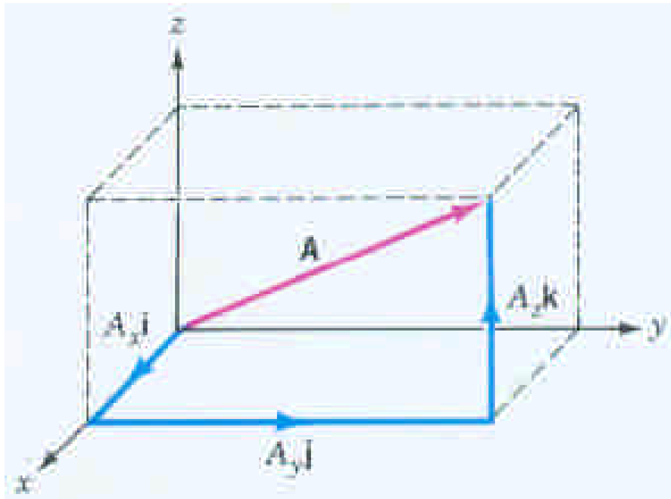


Fig.2.16

※注意：欲求已知向量的單位向量，則僅須除以向量大小，如：$\hat{A} = \dfrac{\vec{A}}{A}$

向量乘法

純量積或內積(Scalar product, Dot product)

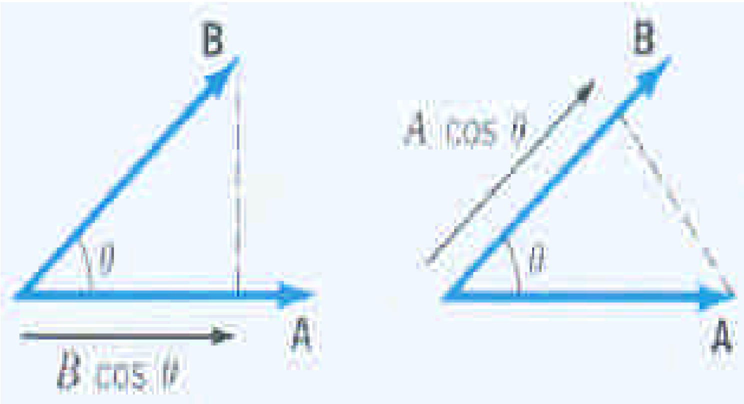


Fig.2.18

$$\vec{A}\cdot\vec{B}=AB\cos\theta$$

$$=(A_x\hat{i}+A_y\hat{j}+A_z\hat{k})\cdot(B_x\hat{i}+B_y\hat{j}+B_z\hat{k})$$

$$=A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z$$

$$(\because \hat{i}\cdot\hat{i}=\hat{j}\cdot\hat{j}=\hat{k}\cdot\hat{k}=1,\ \ \hat{i}\cdot\hat{j}=\hat{i}\cdot\hat{k}=\hat{j}\cdot\hat{k}=0)$$

運算

1. $\vec{A}\cdot\vec{B}=\vec{B}\cdot\vec{A}$ (commutative)

2. $\vec{A}\cdot(\vec{B}+\vec{C})=\vec{A}\cdot\vec{B}+\vec{A}\cdot\vec{C}$ (distributive)

向量積或外積(Vector product, Cross product)

$$\vec{A}\times\vec{B} = AB\sin\theta\,\hat{n}$$

$$= (A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k})\times(B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k})$$

$$= (A_xB_y\hat{k} - A_xB_z\hat{j}) + (-A_yB_x\hat{k} + A_yB_z\hat{i})$$

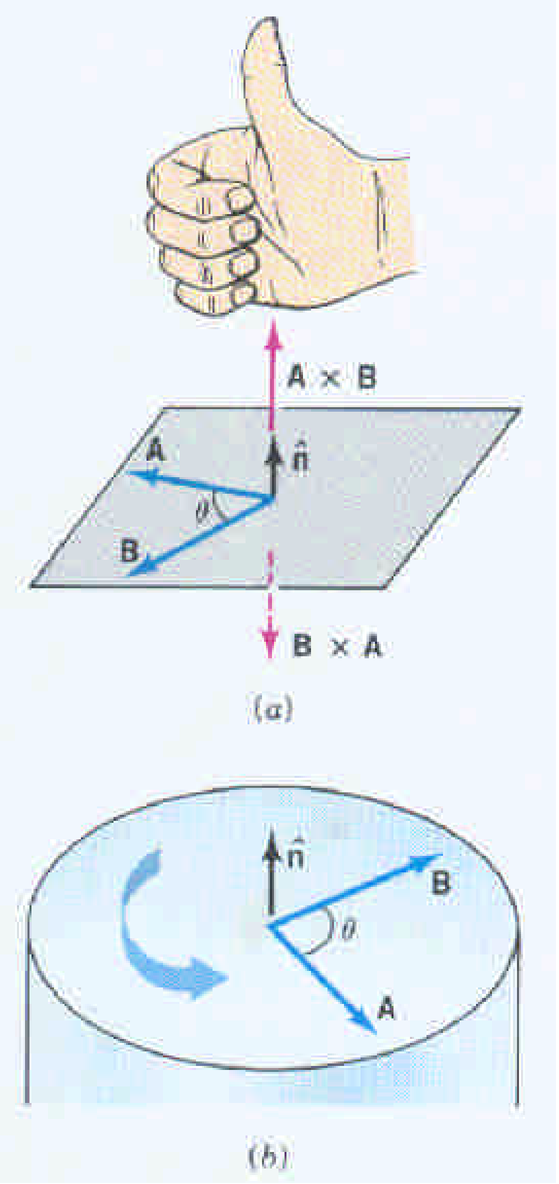
$$+ (A_zB_x\hat{j} - A_zB_y\hat{i})$$

$$\{\because \hat{i}\times\hat{i}=0, \hat{j}\times\hat{j}=0, \hat{k}\times\hat{k}=0 \;\; ; \;\; \hat{i}\times\hat{j}=\hat{k}, \hat{j}\times\hat{i}=-\hat{k}, \hat{k}\times\hat{i}=\hat{j}$$

$$\hat{i}\times\hat{k}=-\hat{j}, \hat{j}\times\hat{k}=\hat{i}, \hat{k}\times\hat{j}=-\hat{i}\}$$

$$= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

Fig.2.20



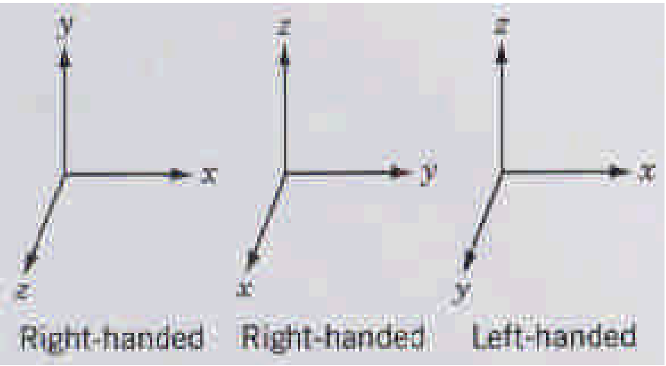


Fig.2.21

運算

1. $\vec{B}\times\vec{A}=-\vec{A}\times\vec{B}$ (noncommutative)

2. $\vec{A}\times(\vec{B}+\vec{C})=\vec{A}\times\vec{B}+\vec{A}\times\vec{C}$ (distributive)

Example 2.6 Derive the law of cosines.

$$\vec{C}=\vec{A}-\vec{B}$$

$$\vec{C}\cdot\vec{C}=(\vec{A}-\vec{B})\cdot(\vec{A}-\vec{B})=A^2+B^2-2\vec{A}\cdot\vec{B}$$

$$C^2=A^2+B^2-2AB\cos\theta$$

$$\cos\theta=\frac{A^2+B^2-C^2}{2AB}$$

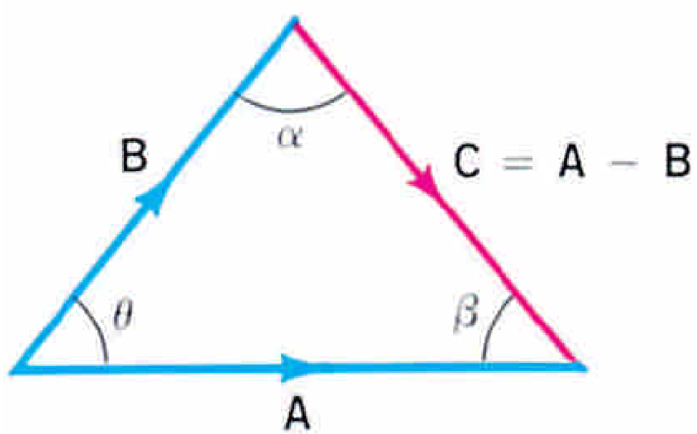


Fig.2.19

Example 2.8 Derive the law of sines.

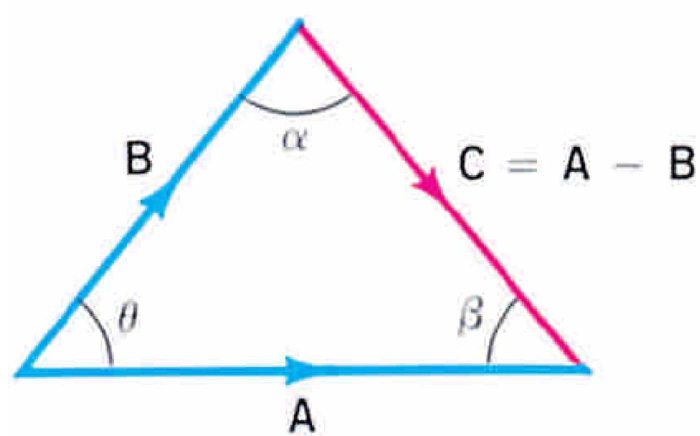
$$\vec{C} = \vec{A} - \vec{B}$$

$$\vec{C} \times \vec{C} = (\vec{A} - \vec{B}) \times \vec{C} = \vec{A} \times \vec{C} - \vec{B} \times \vec{C}$$

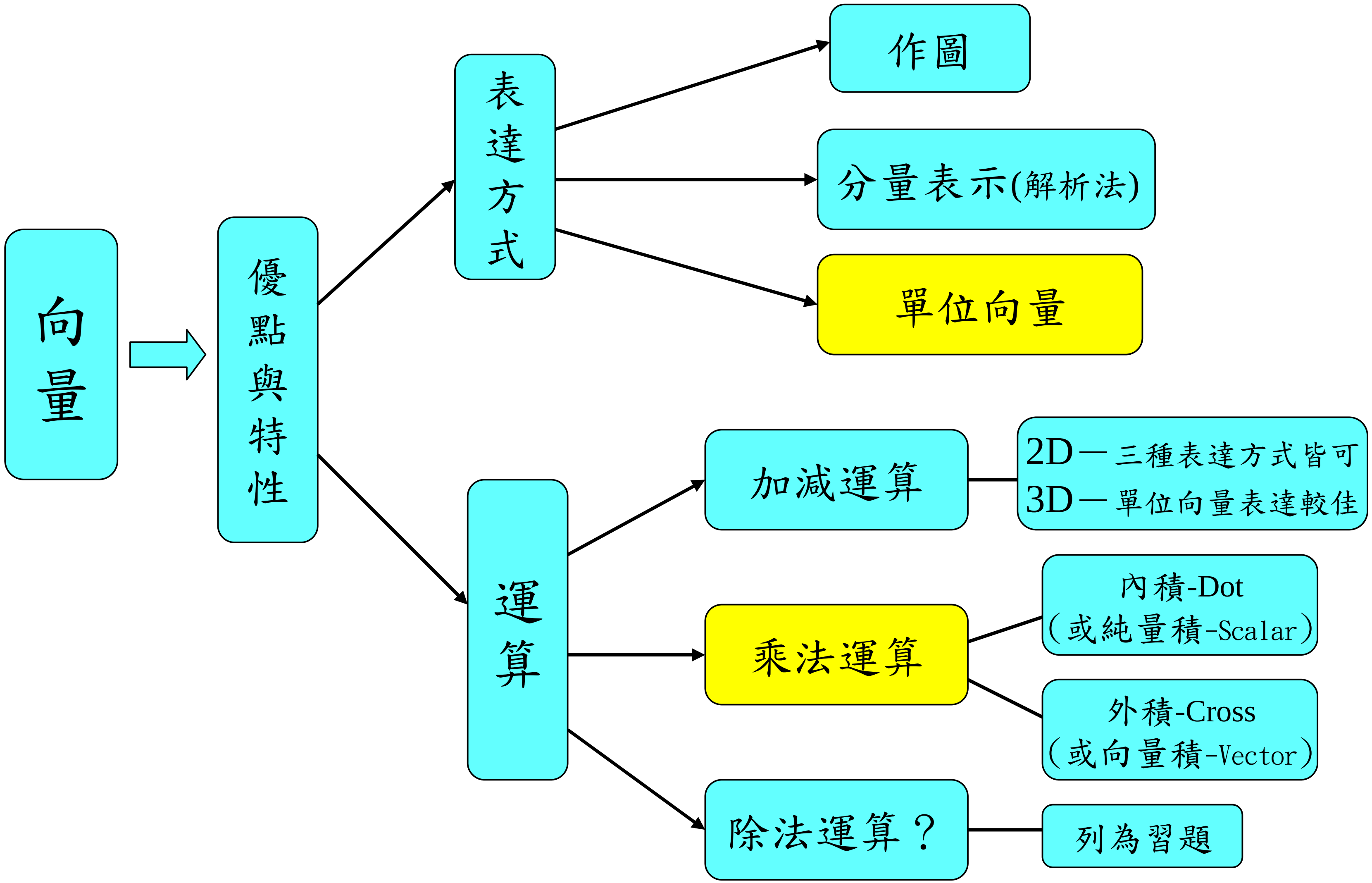
$$= AC \sin\beta\,\hat{n} - BC \sin\alpha\,\hat{n} = 0$$

$$A\cancel{C} \sin\beta = B\cancel{C} \sin\alpha$$

$$\frac{\sin\alpha}{A} = \frac{\sin\beta}{B}$$



本章重要觀念發展脈絡彙整



習　題

●教科書習題(p.26~p.30)

Exercise:　15, 28, 39, 47, 49, 51, 61, 69

Problem:　1, 7

★提示: Ex.28 Ans. $\vec{C} = -30\hat{i} + 15\hat{j} - 33\hat{k}$ ；

Ex.61訂正Ans. $\vec{B} = -4\hat{i} + 0.464\hat{j}$ m

●基本觀念習題

1.若考慮兩向量 $\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}$ ； $\vec{B} = B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k}$

則請證明： $\vec{A}\times\vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$

●延伸思考習題：（※不列入考試，僅列入加分題）

1.請問”向量的除法”是否存在，請說明之！