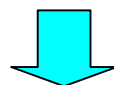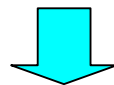# 線動量與多質點系統

9~10章探究的主要問題架構
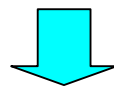
為何需加入線動量的描述？

線動量與動力學的關係為何？

如何描述多質點系統運動？

線動量與動能如何應用於多質點運動？

線動量 (Linear momentum)

➤描述物質本體之運動量 (實際碰撞才能感受到, 一般運用於多質點的描述)

運動量(quantity of motion) $m\mathrm{v}$ ⇒ 線動量 $\vec{p} = m\vec{\mathrm{v}}$

(其中 m 為質量, $\vec{\mathrm{v}}$ 為速度。)

● **若淨外力為零，則線動量維持不變。**

➤ $\sum \vec{F}_{ie} = \vec{F}_{ext} = 0$ ⇒ $\sum \vec{p}_i = $ 定值

➤ 單一質點(single particle) ⇒ $\vec{p} = $ 定值 or $\Delta\vec{p} = 0$

（相當於牛頓第一定律）

➤ 兩質點碰撞(collisions) ⇒ $\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = $ 定值 or $\Delta\vec{p}_1 + \Delta\vec{p}_2 = 0$

● **作用於質點的淨力相當於質點線動量隨時間的變化量。**

➤ $\vec{F} = \dfrac{\Delta\vec{p}}{\Delta t}$ $(\vec{F}$ 為定力$)$ ⇒ $\vec{F} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta\vec{p}}{\Delta t} = \dfrac{d\vec{p}}{dt}$

➢ 若質量 m 不變，則： $\quad \vec{F} = \dfrac{d\vec{p}}{dt} = \dfrac{dm\vec{v}}{dt} = m\dfrac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a}$

（ 相當於牛頓第二定律 ）

● **兩質點碰撞**

$\because \vec{F} = \dfrac{\Delta\vec{p}}{\Delta t} \Rightarrow \Delta\vec{p} = \vec{F}\Delta t \qquad$ 考慮 $\begin{cases} \vec{F}_{12} 為質點 2 作用於質點 1 的作用力 \\ \vec{F}_{21} 為質點 1 作用於質點 2 的作用力 \\ \vec{F}_{12}, \vec{F}_{21} 為碰撞系統的內力。 \end{cases}$

$\therefore \Delta\vec{p}_1 = \vec{F}_{12}\Delta t \quad ; \quad \Delta\vec{p}_2 = \vec{F}_{21}\Delta t$

If $\quad \sum \vec{F}_{ie} = 0 \quad$ during collision ，then

$$\Delta\vec{p}_1 + \Delta\vec{p}_2 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$

（線動量守恆） （作用力與反作用）

（相當於牛頓第三定律）

✦ 線動量守恆(Conservation of Linear Momentum)

- 線動量守恆條件 $\Rightarrow$ 淨外力為零(即 $\sum \vec{F}_{ie} = 0$)

$$\sum \vec{F}_{ie} = \vec{F}_{ext} = 0 \Rightarrow \frac{d\vec{P}}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{P} = \sum \vec{p}_i = 定值$$

- 若淨外力不為零（即 $\sum \vec{F}_{ie} \neq 0$ ），則： $\sum \vec{F}_{ie} = \vec{F}_{ext} = \frac{d\vec{P}}{dt}$

$$\vec{F}_{1e} + \vec{F}_{12} = \frac{d\vec{p}_1}{dt} \quad (1) \quad ; \quad \vec{F}_{2e} + \vec{F}_{21} = \frac{d\vec{p}_2}{dt} \quad (2)$$

$$(1) + (2) \Rightarrow (\vec{F}_{1e} + \vec{F}_{2e}) = \frac{d(\vec{p}_1 + \vec{p}_2)}{dt} \quad (\because \vec{F}_{12} + \vec{F}_{21} = 0)$$

$$\Rightarrow \quad \vec{F}_{ext} = \sum \vec{F}_{ie} = \frac{d\vec{P}}{dt} \quad (其中 \ \vec{P} = \sum \vec{p}_i)$$

(Note: 若淨外力作用時間甚短，則仍可趨近線動量守恆。)

✦ 碰撞型式：

● 彈性碰撞 ⇒ 總線動量守恆，總動能守恆，碰撞後分開運動。
  (elastic collision)

● 非彈性碰撞⇒總線動量守恆，總動能不守恆（會減小），碰撞後
  (inelastic collision)
  分開運動。

● 完全非彈性碰撞 ⇒ 總線動量守恆，總動能不守恆（會減小），
(completely inelastic collision)
  碰撞後黏在一起運動。

● 超彈性碰撞 ⇒ 總線動量守恆，總動能不守恆（會增加），碰撞
(superelastic collision)
  後分開運動。

➢ 例如：

考慮兩質點碰撞
$\begin{cases} 總線動量守恆 \Rightarrow m_1\vec{u}_1 + m_2\vec{u}_2 = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 \\[2ex] 總動能守恆 \Rightarrow \dfrac{1}{2}m_1u_1^2 + \dfrac{1}{2}m_2u_2^2 = \dfrac{1}{2}m_1v_1^2 + \dfrac{1}{2}m_2v_2^2 \end{cases}$

Example 9.4   Was either car exceeding the 15 m/s speed limit?
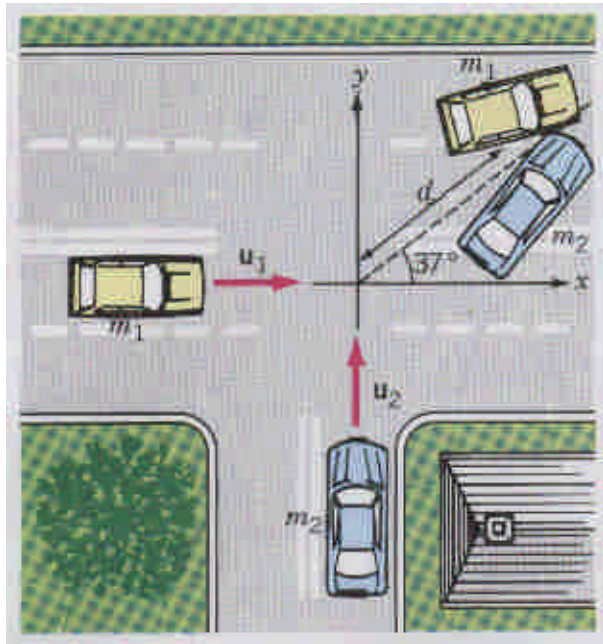
From Newton's second law :

$$f_k = ma \implies \mu_k(m_1 + m_2)g = (m_1 + m_2)a$$

$$\implies a = \mu_k g$$
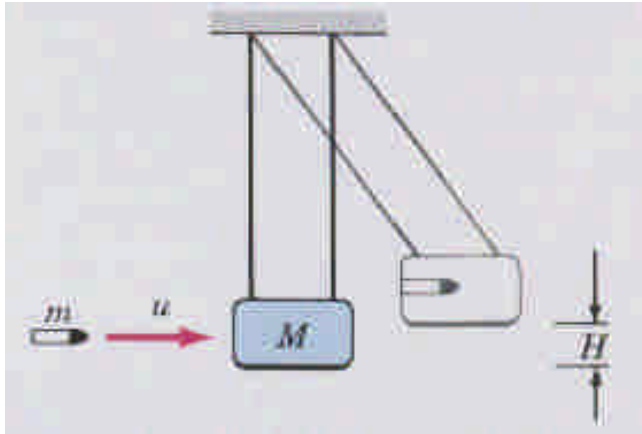
$$v^2 = v_0^2 + 2a\Delta x \implies 0 = v_0^2 + 2(-\mu_k g)d$$

$$\implies v_0 = (2\mu_k gd)^{1/2} = 8.5 m/s$$

From the conservation of linear momentum :

$$\sum \vec{p} \implies m_1\vec{u}_1 + m_2\vec{u}_2 = (m_1 + m_2)\vec{v}_0 \implies \begin{cases} \sum p_x \implies m_1 u_1 + 0 = (m_1 + m_2)v_0 \cos\theta \\ \sum p_y \implies 0 + m_2 u_2 = (m_1 + m_2)v_0 \sin\theta \end{cases}$$

$$\implies \begin{cases} u_1 = \dfrac{(m_1 + m_2)v_0 \cos\theta}{m_1} = 16.4 \text{ m/s} > 15 \text{ m/s} \\ u_2 = \dfrac{(m_1 + m_2)v_0 \sin\theta}{m_2} = 8.7 \text{ m/s} < 15 \text{ m/s} \end{cases}$$

Example 9.5 (a) How can one determine u from H? (b) What is the thermal energy generated?

From the conservation of linear momentum :

$$\Rightarrow mu = (m + M)V \Rightarrow V = \frac{mu}{m + M}$$

From the conservation of mechanical energy :

$$\Rightarrow \frac{1}{2}(m + M)V^2 = (m + M)gH$$

$$\Rightarrow u = \frac{(m + M)\sqrt{2gH}}{m} \quad \text{Ans(a)}$$

$$\begin{cases} K_i = \frac{1}{2}mu^2 = 200J \\ K_f = \frac{1}{2}(m + M)V^2 = 1J \end{cases}$$

$\Rightarrow$ thermal energy $= K_i - K_f = 199$ J   Ans(b)

✦ 一維彈性碰撞(Elastic collision in one dimension)

●質點碰撞前後的相對速度大小維持不變，但方向相反。

證明： 假設 $\vec{u} = u\hat{i}$; $\vec{v} = v\hat{i}$

由總線動量守恆式可得

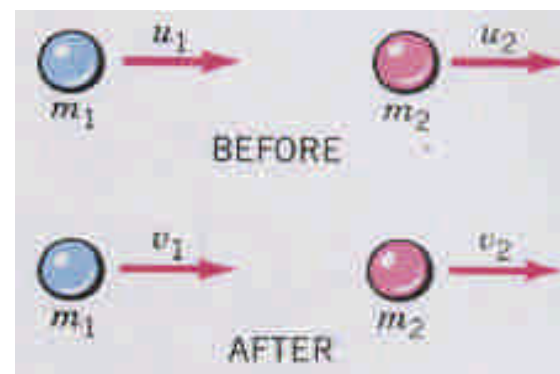$\Rightarrow m_1(u_1 - v_1) = m_2(v_2 - u_2)$ (1)

由總動能守恆式可得

$\Rightarrow m_1(u_1^2 - v_1^2) = m_2(v_2^2 - u_2^2)$

$\Rightarrow m_1(u_1 - v_1)(u_1 + v_1) = m_2(v_2 - u_2)(v_2 + u_2)$ (2)

$(2)/(1) \Rightarrow (u_1 + v_1) = (u_2 + v_2) \Rightarrow (v_2 - v_1) = -(u_2 - u_1)$ (3)

●質量相等（ $m_1 = m_2$ ），線動量可完全交換，即：

$v_1 = u_2$, $v_2 = u_1$ （由(1), (3)式可推得）

● 質量不等（$m_1 \neq m_2$），可推得末速與初速關係如下：

$$v_1 = \frac{(m_1 - m_2)}{m_1 + m_2}u_1 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2}u_2 \quad ; \quad v_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}u_1 + \frac{(m_2 - m_1)}{m_1 + m_2}u_2$$

證明：

From (3) $\Rightarrow$ $v_2 = u_1 - u_2 + v_1$ 代入(1)式

$$v_1 = u_1 - \frac{m_2}{m_1}(v_2 - u_2) = u_1 - \frac{m_2}{m_1}(u_1 - u_2 + v_1 - u_2)$$

$$= (\frac{m_1 - m_2}{m_1})u_1 + (\frac{2m_2}{m_1})u_2 - \frac{m_2}{m_1}v_1$$

$$\Rightarrow (\frac{m_1 + m_2}{m_1})v_1 = (\frac{m_1 - m_2}{m_1})u_1 + (\frac{2m_2}{m_1})u_2 \Rightarrow v_1 = \frac{(m_1 - m_2)}{m_1 + m_2}u_1 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2}u_2$$

同理將 $v_1 = u_2 - u_1 + v_2$ 代入(1)式 $\Rightarrow v_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}u_1 + \frac{(m_2 - m_1)}{m_1 + m_2}u_2$

➤ 令 $u_2 = 0$ $\Rightarrow v_1 = \dfrac{(m_1 - m_2)}{m_1 + m_2} u_1$; $v_2 = \dfrac{2m_1}{m_1 + m_2} u_1$

(a) If $m_1 > m_2$, then $v_1 > 0$, $v_2 > 0$.

(b) If $m_1 < m_2$, then $v_1 < 0$, $v_2 > 0$.

(c) If $m_1 >> m_2$, then $v_1 \approx u_1$, $v_2 \approx 2u_1$.

(d) If $m_1 << m_2$, then $v_1 \approx -u_1$, $v_2 \approx 0$.

✦ 衝量(Impulse)

● 定義為線動量的改變，即：

$$\vec{I} = \Delta\vec{p} = \vec{p}_f - \vec{p}_i$$

$$= \int \vec{F}dt = \vec{F}_{av}\Delta t$$

$(\because \vec{F} = d\vec{p}/dt \ \text{and} \ \Delta\vec{p} = \int d\vec{p} = \int \vec{F}dt)$
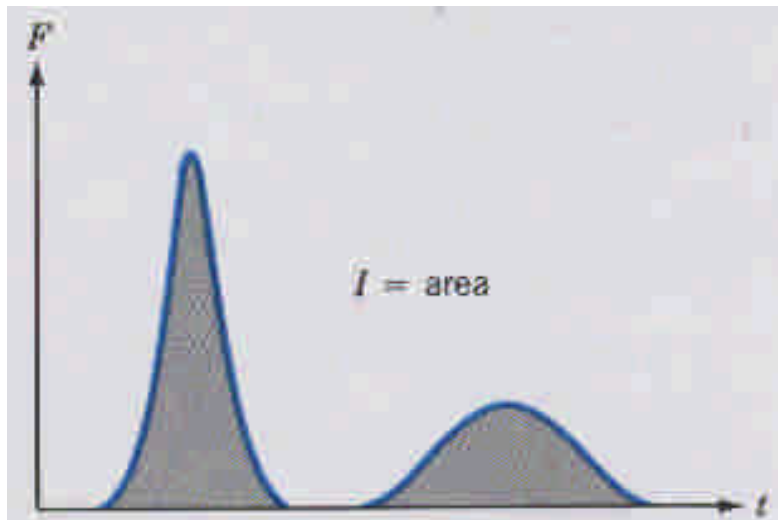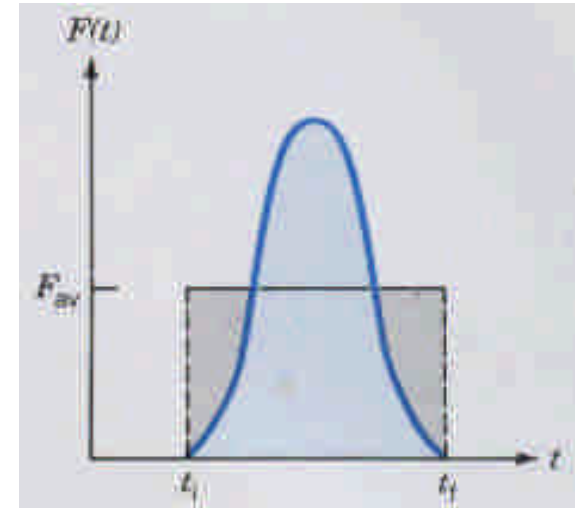

$I = $ area

Fig. 9.13

Fig. 9.12

✦ 線動量與動能的比較

(1)線動量守恆在任何形式的碰撞過程中皆成立，而動能守恆僅在彈性碰撞才成立。

(2)線動量是一個向量，而動能是純量。

(3) $F = \dfrac{\Delta p}{\Delta t}$ （力相當於線動量對時間的改變率，若力非定值，則為對時間的平均力。）

$F = \dfrac{\Delta K}{\Delta x}$ （力相當於動能對位置的改變率，若力非定值，則為對空間的平均力。）

火箭推進力(Rocket Propulsion)－選擇性(不列入考試範圍)

線動量守恆$\Rightarrow (M+\Delta m)v = M(v+\Delta v) + \Delta m(-v_{ex}+v+\Delta v)$

(氣體未排放)   (氣體排放時)

$$\Rightarrow 0 = M\Delta v + \Delta m(-v_{ex}+\Delta v) \xrightarrow{\text{忽略}\Delta m\Delta v} M\Delta v = \Delta m v_{ex}$$

$$\Rightarrow \Delta v = v_{ex}\frac{\Delta m}{M} \xrightarrow{\text{考慮微量變化}} \mathrm{d}v = -v_{ex}\frac{dM}{M}$$

$$\int_{v_i}^{v_f} dv = -\int_{M_i}^{M_f} v_{ex}\frac{dM}{M} \Rightarrow v_f - v_i = v_{ex}\ln\frac{M_i}{M_f} \quad (\text{火箭方程式})$$

M_i(火箭+燃料質量)，M_f(火箭質量)

➤當火箭快速推進時，可從燃料獲得較多動能。

●考慮變質量的線動量分析

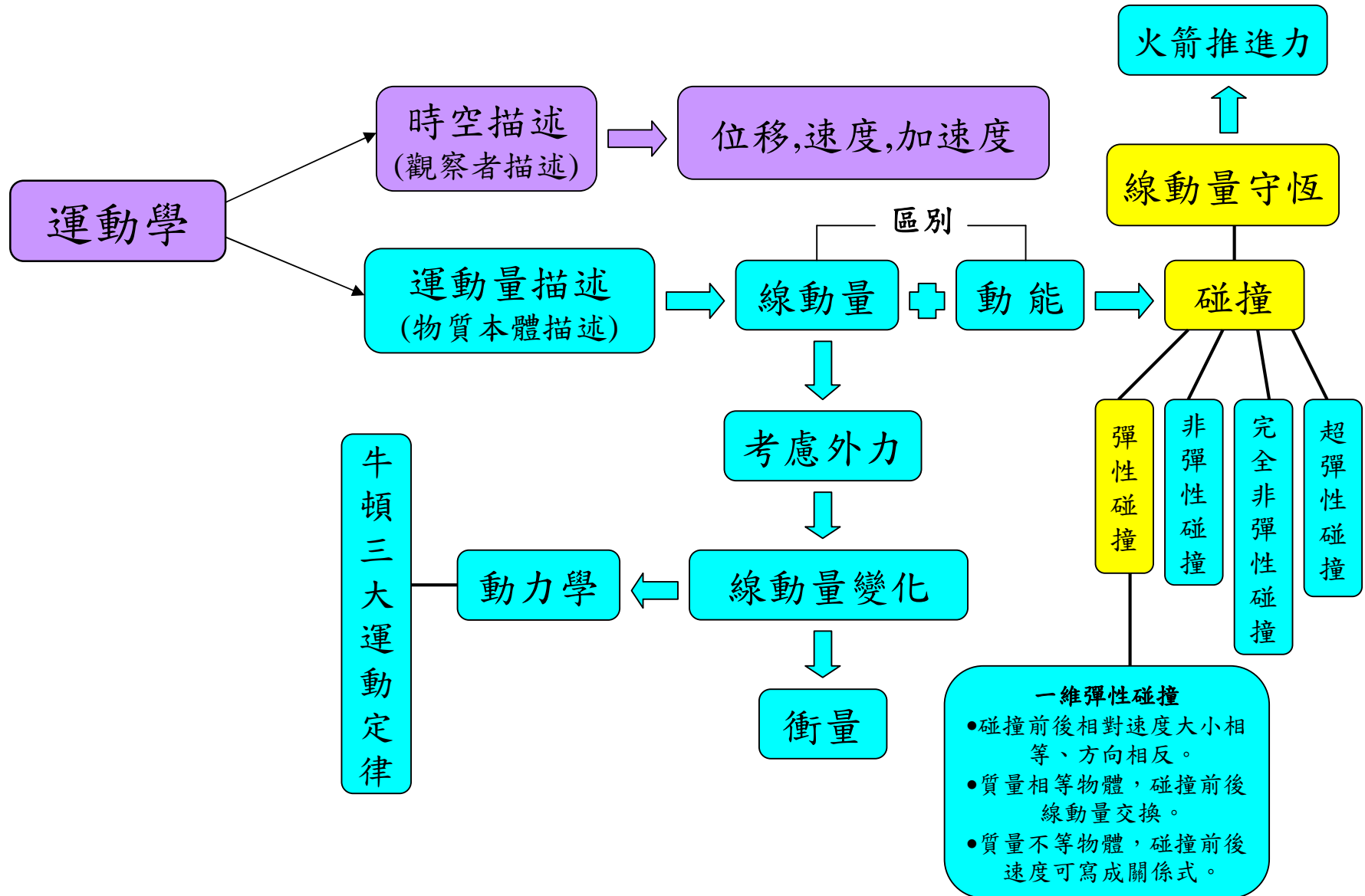$$\frac{dP}{dt} = M\frac{dv}{dt} + v\frac{dM}{dt} \quad \xrightarrow{\text{考慮線動量守恆}} \quad M\frac{dv}{dt} + v\frac{dM}{dt} = 0$$

$$\Rightarrow M\frac{dv}{dt} = -v\frac{dM}{dt} \quad , \text{其中 } M\frac{dv}{dt} = Ma = F$$

若將火箭與廢氣視為不同物體，則 F 相當於火箭推進力。

$$\Rightarrow dv = -v\frac{dM}{M} \quad \text{(同樣可得到火箭方程式)}$$

本章重要觀念發展脈絡彙整

運動學

時空描述
(觀察者描述) ⟹ 位移,速度,加速度

運動量描述
(物質本體描述) ⟹ 線動量 + 動 能 ⟹ 碰撞

區別

火箭推進力

線動量守恆

碰撞
- 彈性碰撞
- 非彈性碰撞
- 完全非彈性碰撞
- 超彈性碰撞

線動量 ⟶ 考慮外力 ⟶ 線動量變化 ⟶ 動力學 — 牛頓三大運動定律

線動量變化 ⟶ 衝量

一維彈性碰撞
- 碰撞前後相對速度大小相等、方向相反。
- 質量相等物體，碰撞前後線動量交換。
- 質量不等物體，碰撞前後速度可寫成關係式。

習　題

●教科書習題 (p.187~p.193)

Exercise: 13,17,25,29,33,41,51,75

Problem: 3,7,9,13,15

●基本觀念習題：

1.請以線動量說明牛頓三大運動定律。

2.請問碰撞的類型有哪幾種？並說明其中的不同處。

3.請簡述線動量(Linear Momentum)與動能(Kinetic energy)的區別。

●延伸思考習題：(※不列入考試，僅列入加分題)

1.若物體運動速度接近光速，則線動量是否會增加？請申述其中原理。

多質點系統 (systems of particles)

- 平移運動(translation motion)雖可適用於單質點模型，但若考慮轉動(rotation)與振動(vibration)，則必須應用多質點系統處理。

✦ 質心 (center of mass)

- 作用於質心的力僅會產生平移，而質心的平移可代表整個系統平移。

- 質心位置的估算方程式：

Fig.10.1

$$\vec{r}_{CM} = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{M} \quad (\ \vec{r}\ 為位置向量)$$

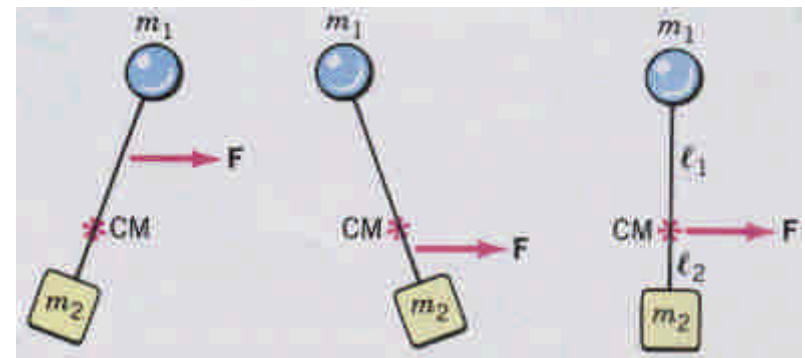$$\Rightarrow x_{CM} = \frac{\sum m_i x_i}{M} ; y_{CM} = \frac{\sum m_i y_i}{M} ; z_{CM} = \frac{\sum m_i z_i}{M}$$

- 推導：

  ➤質點質量與質心距離的關係

  $\Rightarrow m_1 l_1 = m_2 l_2$

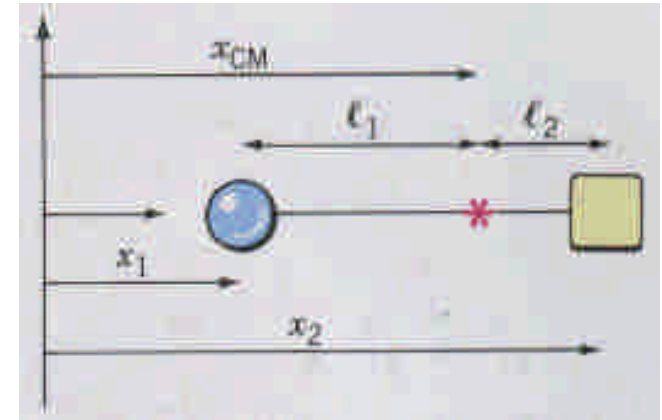 ➤考慮座標系統 $\Rightarrow \begin{cases} l_1 = x_{CM} - x_1 \\ l_2 = x_2 - x_{CM} \end{cases}$

Fig.10.2

$\therefore m_1(x_{CM} - x_1) = m_2(x_2 - x_{CM})$

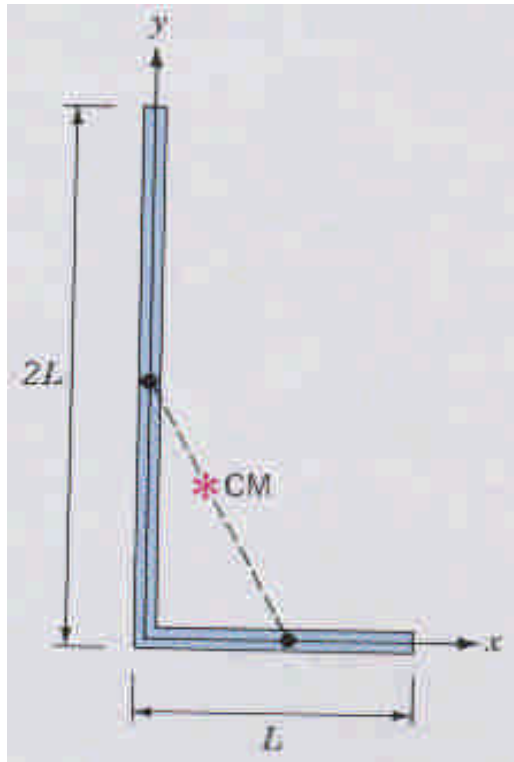$$x_{CM} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} \xrightarrow{\text{考慮}N\text{個質點}}$$

$$x_{CM} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \cdots + m_N x_N}{m_1 + m_2 + \cdots + m_N} \Rightarrow x_{CM} = \frac{\sum m_i x_i}{M}$$

考慮三維分量，以此類推 $\Rightarrow y_{CM} = \frac{\sum m_i y_i}{M}, \ z_{CM} = \frac{\sum m_i z_i}{M}$

Example 10.2： A thin rod of length 3L is bent at right angles at a distance L from one end. Locate the CM with respect to the corner.

Sol：

Assume that the linear mass density of a thin rod is λ (kg/m)

and the corner position is (0,0)

$$m_1 = \lambda L \xrightarrow{CM} (\frac{L}{2}, 0)$$

$$m_2 = \lambda 2L \xrightarrow{CM} (0, L)$$

$$M = \lambda 3L \xrightarrow{CM} (x_{CM}, y_{CM})$$

$$x_{CM} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{M} = \frac{\lambda L \times \frac{L}{2} + \lambda 2L \times 0}{\lambda 3L} = \frac{L}{6}$$

$$y_{CM} = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2}{M} = \frac{\lambda L \times 0 + \lambda 2L \times L}{\lambda 3L} = \frac{2L}{3}$$

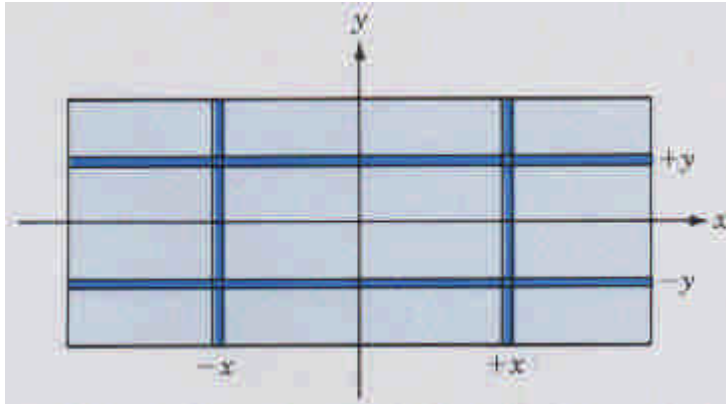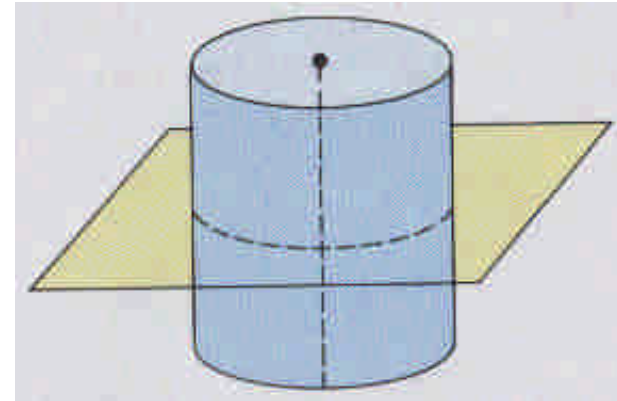● <u>質心位於對稱軸或對稱面上。</u>

➤ 可應用於對稱物體。

Fig.10.3

Fig.10.4

● <u>質心位於任一懸點的垂線上。</u>

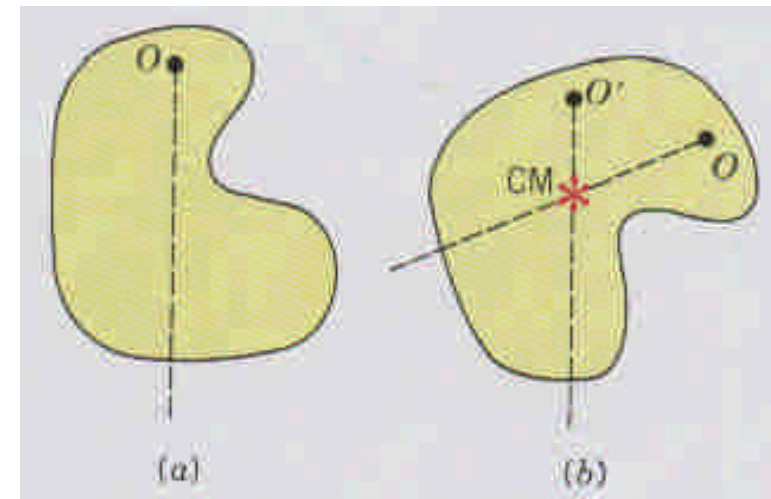➤可應用於非對稱物體。

➤利用兩不共線的懸點可決定平面物的質心。

➤利用三個不共面懸點可決定非平面物的質心。

Fig.10.5

● 連續體的質心 (center of mass of continuous bodies)

$$\vec{r}_{CM} = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{M} = \frac{1}{M}\int \vec{r}\,dm$$

Fig.10.8

$$\Rightarrow x_{CM} = \frac{1}{M}\int x\,dm \;;\; y_{CM} = \frac{1}{M}\int y\,dm \;;$$

$$z_{CM} = \frac{1}{M}\int z\,dm$$
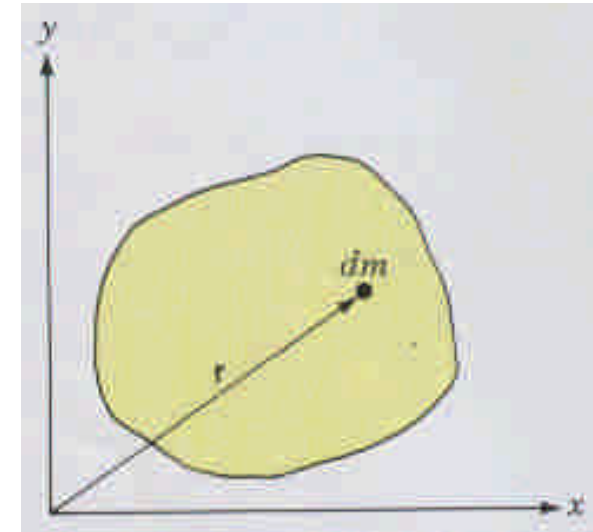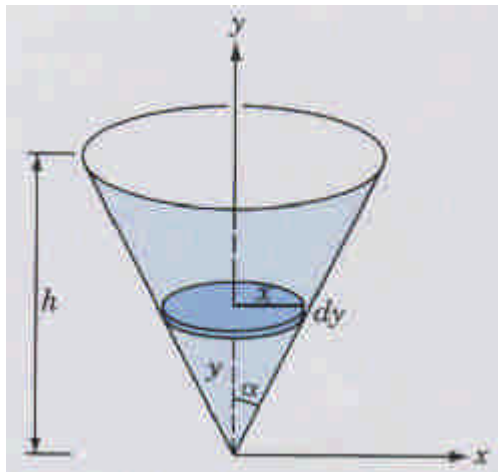
Example 10.4：Find the CM of a uniform solid cone of height h and semiangle α .

$$dV = \pi x^2 dy = \pi(y\tan\alpha)^2 dy$$

$$M = \int dm = \int \rho\,dV = \pi\rho\tan^2\alpha\int_0^h y^2 dy = \pi\rho(\tan^2\alpha)(\frac{h^3}{3})$$

$$y_{CM} = \frac{\int y\,dm}{M} = \frac{1}{M}\pi\rho\tan^2\alpha\int_0^h y^3 dy = \frac{\pi\rho\tan^2\alpha}{M}(\frac{h^4}{4}) = \frac{3h}{4}$$

✦ 質心運動 (motion of the center of mass)

- 質心速度$\Rightarrow$ $\vec{\mathrm{v}}_{CM} = \dfrac{\sum m_i \vec{\mathrm{v}}_i}{M}$

$$\because \vec{\mathrm{v}} = \frac{d\vec{r}}{dt} \Rightarrow \vec{\mathrm{v}}_{CM} = \frac{d\vec{r}_{CM}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\sum m_i \vec{r}_i}{M}\right) = \frac{\sum m_i}{M}\left(\frac{d\vec{r}_i}{dt}\right) = \frac{\sum m_i \vec{\mathrm{v}}_i}{M}$$

- 質心動量等於多質點系統的總動量，即：

$$\vec{P} = M\vec{\mathrm{v}}_{CM} = m_1 \vec{\mathrm{v}}_1 + m_2 \vec{\mathrm{v}}_2 + \cdots + m_N \vec{\mathrm{v}}_N$$

$$\left(\because \vec{\mathrm{v}}_{CM} = \frac{\sum m_i \vec{\mathrm{v}}_i}{M} \Rightarrow M\vec{\mathrm{v}}_{CM} = \sum m_i \vec{\mathrm{v}}_i \right)$$

- 多質點系統的總動量變化率等於淨外力，即：

$$\vec{F}_{EXT} = \frac{d\vec{P}}{dt} = \sum m_i \vec{a}_i = M\vec{a}_{CM} \qquad \left(\because \vec{a} = \frac{d\vec{\mathrm{v}}}{dt} \right)$$

- 質點間的內力(internal forces) $\vec{F}_{INT}$ 會成對消去 $\Rightarrow \sum m_i \vec{a}_i = \sum \vec{F}_i = \vec{F}_{EXT} + \vec{F}_{INT} = \vec{F}_{EXT}$

  If $\vec{F}_{EXT} = 0$, then $\vec{v}_{CM} = \text{constant}$.

Fig.10.13

Fig.10.14

Example 10.5：
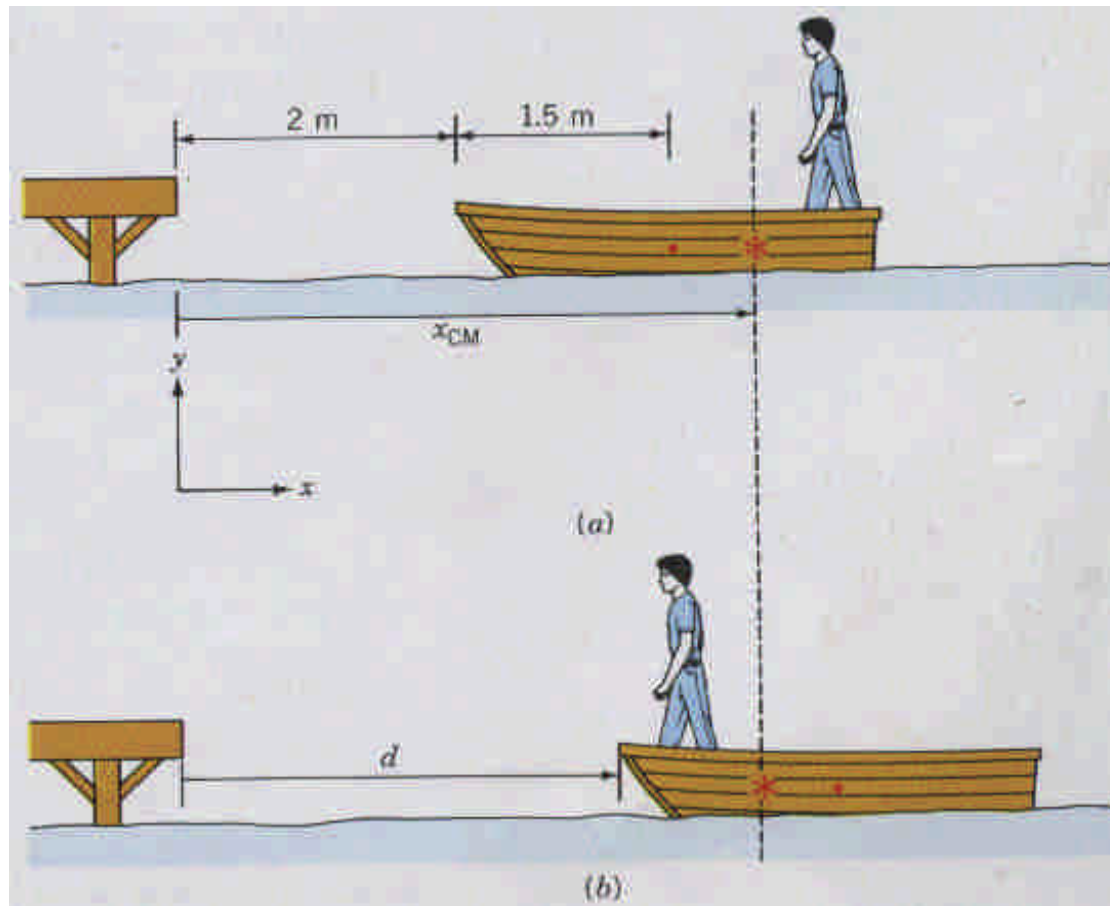

Fig.10.15

$$x_{CM} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{M} = \frac{60kg \times 5m + 40kg \times 3.5m}{100kg} = 4.4\text{m}$$

$$x_{CM} = \frac{m_1 d + m_2(d+1.5)}{100} \Rightarrow d = 3.8\text{m} \ (\text{船後退}1.8\text{m})$$

Example 10.6： Find the displacement of (a) the platform; (b) the man; (c) the center of mass.

Fig.10.17

已知：

1.the length of platform=4 m

2.man walks at 2m/s relative to the platform

3.the platform moves initally at 4 m/s relative to ground

$$100 \times 4 = 75(2 + v_P) + 25v_P$$
(CM)   (man)   (platform)

$$\Rightarrow v_P = 2.5 \text{ m/s}, \ v_m = 4.5 \text{ m/s}$$
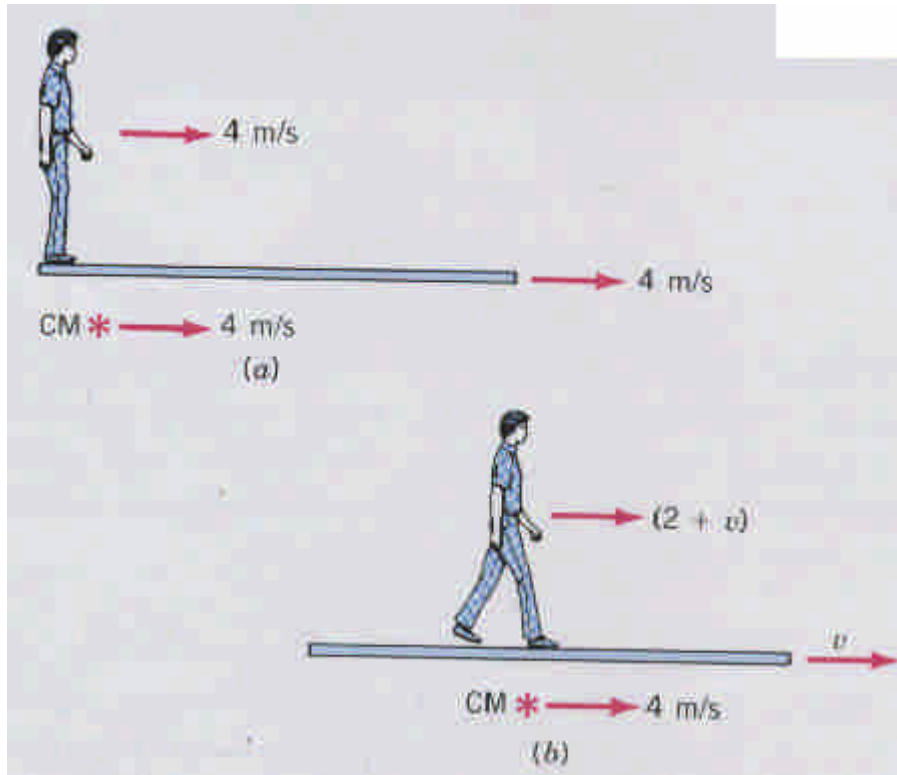
$$\Delta t = 4\text{m}/2(\text{m/s}) = 2 \text{ (s)} \Rightarrow \begin{cases} \Delta x_p = 2.5 \times 2 = 5 \text{ m} \\ \Delta x_m = 4.5 \times 2 = 9 \text{ m} \\ \Delta x_{CM} = 4 \times 2 = 8 \text{ m} \end{cases}$$
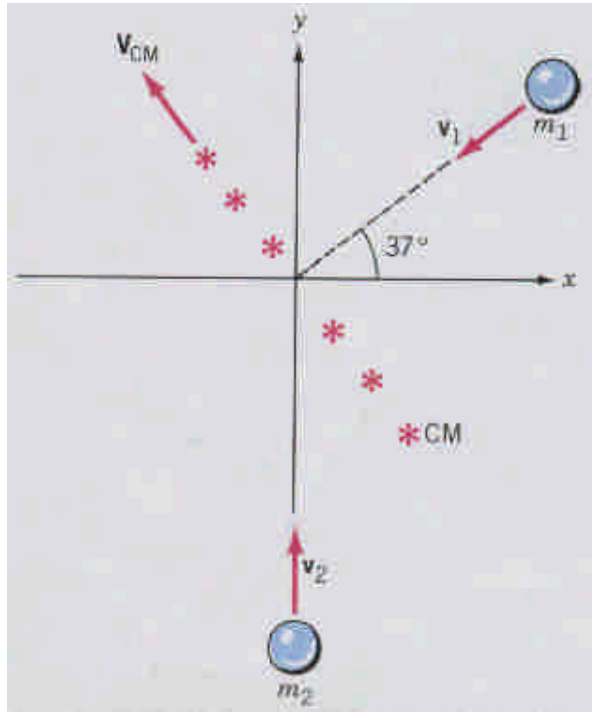
Fig.10.16

Example 10.6： Find the velocity of CM.

$$v_{CMx} = \frac{m_1 v_{1x} + m_2 v_{2x}}{M} \quad ; \quad v_{CMy} = \frac{m_1 v_{1y} + m_2 v_{2y}}{M}$$

$$\vec{v}_{CM} = v_{CMx}\hat{i} + v_{CMy}\hat{j}$$

$$= \frac{1}{M}(m_1 v_{1x}\hat{i} + m_1 v_{1y}\hat{j}) + \frac{1}{M}(m_2 v_{2x}\hat{i} + m_2 v_{2y}\hat{j})$$

$$= \frac{1}{M}(m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2) \quad \Leftarrow 碰撞前$$

$$= \frac{1}{M}(m_1 \vec{v}_1' + m_2 \vec{v}_2') \quad \Leftarrow 碰撞後$$

➢碰撞前後若線動量維持不變，則質心速度不變。

✦多質點系統的動能(kinetic energy of a system of particles)

$$\Rightarrow \quad K = K_{CM} + K_{rel} \begin{cases} K_{CM} = \dfrac{1}{2}M\mathrm{v}_{CM}^2 \quad \text{(相對於原點 } O \text{ 的質心動能)} \\[3mm] K_{rel} = \sum \dfrac{1}{2}m_i\mathrm{v}_i'^2 \quad \text{(相對於質心的質點總動能)} \end{cases}$$

推導：

如圖 $\Rightarrow \vec{r}_i = \vec{r}_{CM} + \vec{r}_i' \quad \Rightarrow \vec{\mathrm{v}}_i = \vec{\mathrm{v}}_{CM} + \vec{\mathrm{v}}_i'$

$$K_i = \frac{1}{2}m_i(\vec{\mathrm{v}}_i \cdot \vec{\mathrm{v}}_i) = \frac{1}{2}m_i(\mathrm{v}_{CM}^2 + \mathrm{v}_i'^2 + 2\vec{\mathrm{v}}_{CM} \cdot \vec{\mathrm{v}}_i')$$

$$K = \sum K_i = \frac{1}{2}(\sum m_i)\mathrm{v}_{CM}^2 + \sum \frac{1}{2}m_i\mathrm{v}_i'^2 + \vec{\mathrm{v}}_{CM} \cdot \sum m_i\vec{\mathrm{v}}_i')$$

$$= \frac{1}{2}M\mathrm{v}_{CM}^2 + \sum \frac{1}{2}m_i\mathrm{v}_i'^2 \quad (\because \sum m_i\vec{\mathrm{v}}_i' = 0)$$

Fig.10.18

p.s. $\displaystyle\sum m_i\vec{\mathrm{v}}_i' = \sum m_i(\vec{\mathrm{v}}_i - \vec{\mathrm{v}}_{CM}) = \sum m_i\vec{\mathrm{v}}_i - \vec{\mathrm{v}}_{CM}\sum m_i$

$$= M\vec{\mathrm{v}}_{CM} - \vec{\mathrm{v}}_{CM}M = 0$$
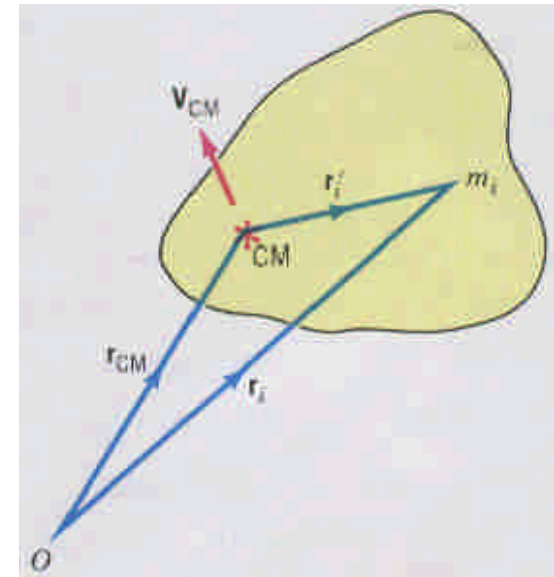
Example 10.8   A particle of mass $m_1 = 4$ kg moves at $5\hat{i}$ m/s, while m_2 $= 2$ kg moves at $2\hat{i}$ m/s. Find K_{CM} and K_{rel} .
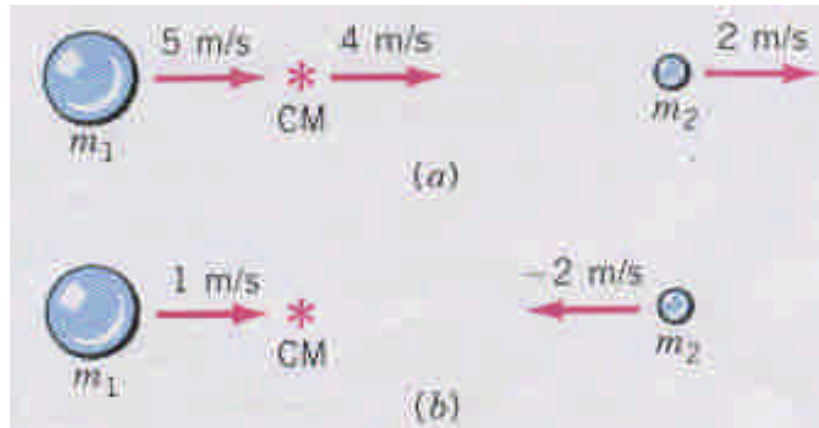
$$V_{CM} = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} = 4 \text{ m/s}$$

the velocities relative to the CM :

$$v_1' = v_1 - v_{CM} = +1 \text{ m/s}$$

$$v_2' = v_2 - v_{CM} = -2 \text{ m/s}$$

$$K_{CM} = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v_{CM}^2 = 48 \text{ J}$$

$$K_{rel} = \frac{1}{2}m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2'^2 = 6 \text{ J}$$

$\Rightarrow$ prove : $K_{CM} + K_{rel} = K = \dfrac{1}{2}m_1 v_1^2 + \dfrac{1}{2}m_2 v_2^2$

多質點系統的功-能轉換定理－選擇性(不列入考試範圍)
(work-energy theorem for a system of particles)

$$W_{net} = \Delta K \xrightarrow{\text{考慮多質點系統}} W_{net} = \Delta K_{CM} + \Delta K_{rel} \Rightarrow W_{EXT} = \Delta K_{CM} + \Delta E_{INT}$$

➢說明：多質點系統的淨功W_{net}包含外力與內力所作的功，其中內力所作淨功不一定為零。

$$\Rightarrow W_{net} = W_{EXT} + W_{INT} = \Delta K_{CM} + \Delta K_{rel} \quad (多質點系統功能轉換定理)$$
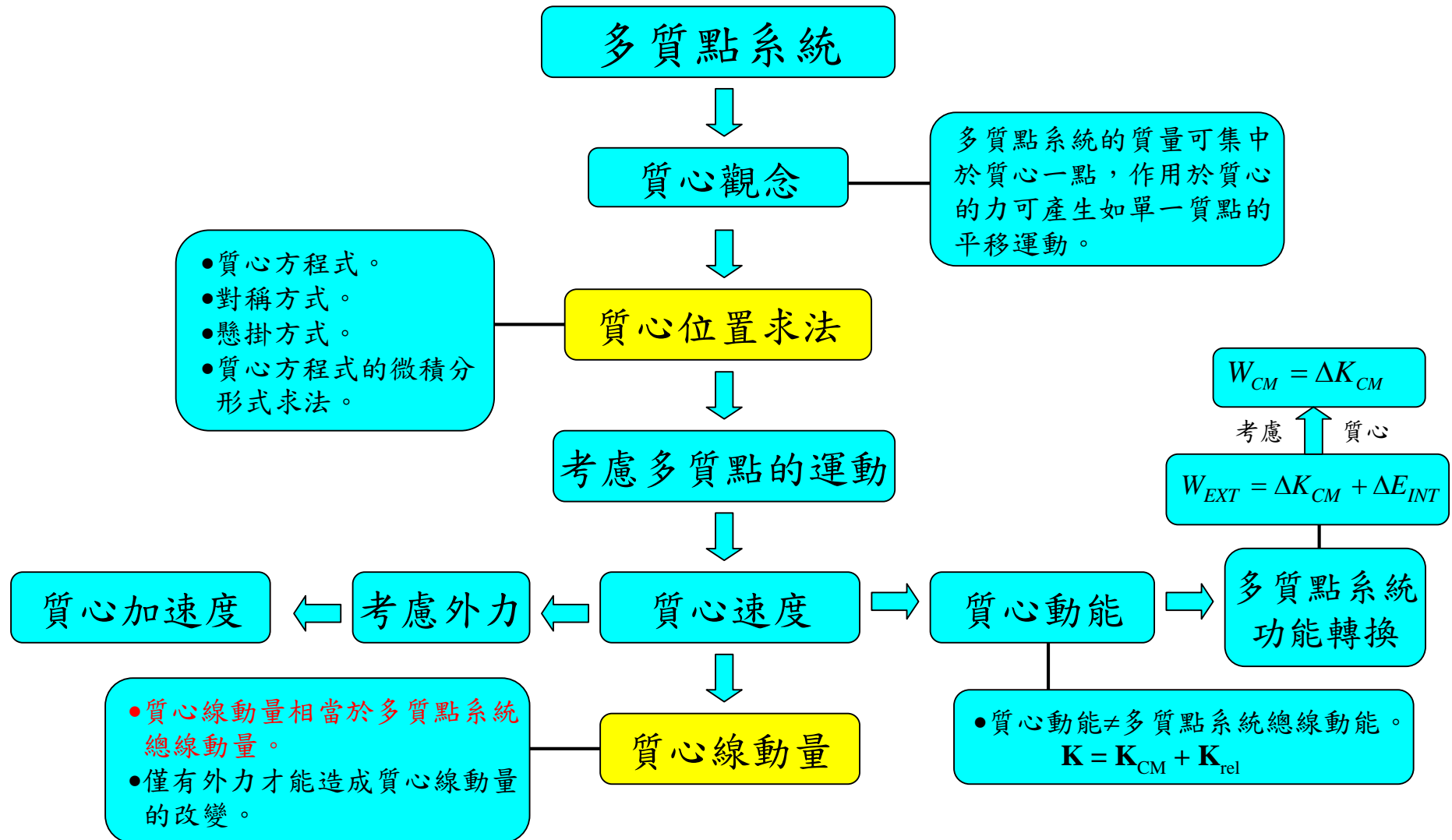
➢考慮 $W_{INT} = -\Delta U_{INT}$且令 $E_{INT} = K_{rel} + U_{INT}$

可改寫為： $W_{EXT} = \Delta K_{CM} + \Delta E_{INT}$

●質心功能轉換定理：

$$W_{EXT} = W_{CM} + W_{rel} \xrightarrow{\text{僅考慮質心運動}} W_{CM} = \Delta K_{CM}$$

本章重要觀念發展脈絡彙整

多質點系統

↓

質心觀念 ── 多質點系統的質量可集中於質心一點，作用於質心的力可產生如單一質點的平移運動。

↓

●質心方程式。
●對稱方式。
●懸掛方式。
●質心方程式的微積分形式求法。
── **質心位置求法**

↓

考慮多質點的運動

↓

質心加速度 ← **考慮外力** ← **質心速度** ⇒ **質心動能** ⇒ **多質點系統功能轉換**

質心速度 ↓

質心線動量 ── ●質心線動量相當於多質點系統總線動量。
●僅有外力才能造成質心線動量的改變。

質心動能 ── ●質心動能≠多質點系統總線動能。
$\mathbf{K} = \mathbf{K}_{CM} + \mathbf{K}_{rel}$

$$W_{CM} = \Delta K_{CM}$$

考慮　質心

$$W_{EXT} = \Delta K_{CM} + \Delta E_{INT}$$

習　題

●教科書習題 (p.206~p.210)

Exercise: 5,11,19,21,23,25,27,31

Problem: 7

●延伸思考習題：(※不列入考試，僅列入加分題)

1.為何兩不共線的懸點可決定不規則平面體的質心？請申述之。