質點動力學(Particle Dynamics)

5~6章探究的主要問題架構

什麼是動力學？

力如何定義與分類？

力與運動的關係為何？

質點動力學 (Particle Dynamics)

- 解釋物體為何運動，利用力的觀點來說明物體的運動。

  (但靜力學(Statics)則是探討物體靜態平衡的力學)

- 力可分為接觸力(contact force)與超距力(action at a distance)

  例如：接觸力 ⇒ 摩擦力、正向力 、彈力…；超距力⇒ 重力、電磁力….

- 力具有大小及方向，可由彈簧秤加以度量及證明。

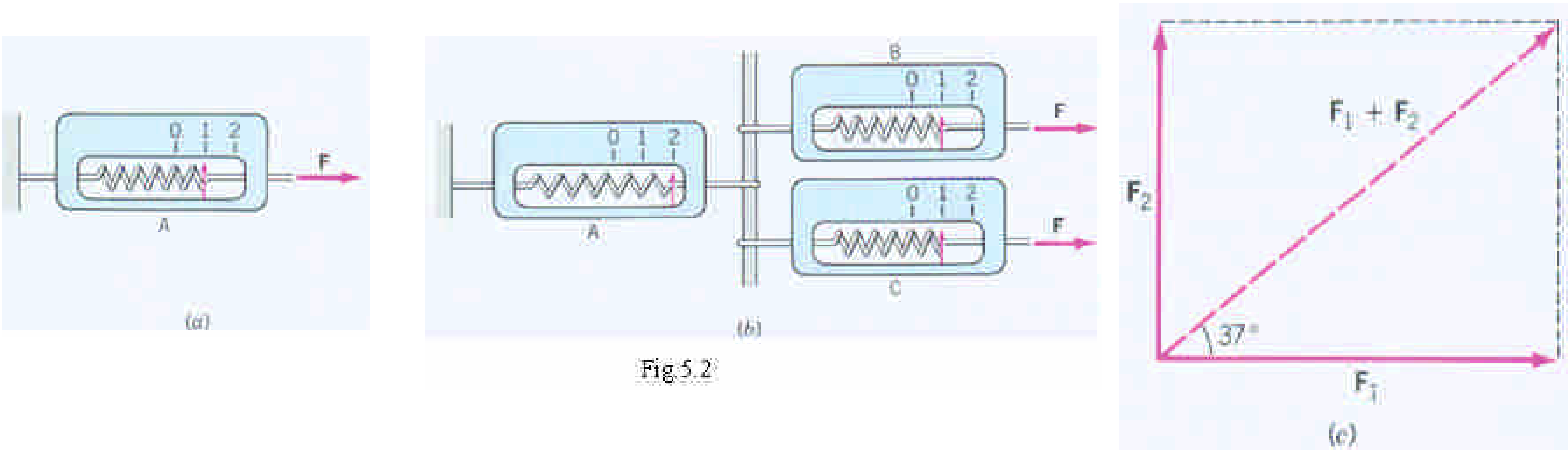


Fig.5.2

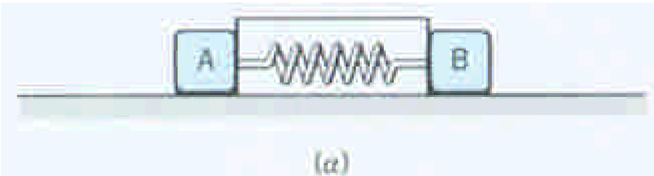
✦牛頓第一運動定律(Newton's first law) — $\sum \vec{F} = 0$

- 任何物體都會維持其靜止或等速直線運動的固有運動狀態，而運動狀態改變則必須有外力作用。

- 維持固有運動狀態(慣性運動)，不一定沒有外力作用，因淨外力(net force)可為零($\sum \vec{F} = 0$)，即處於力平衡狀態。

- 力平衡 $\Rightarrow \begin{cases} \text{靜力平衡(static equilibrium)} \Rightarrow \text{質點靜止不動。} \\ \text{動力平衡(dynamic equilibrium)} \Rightarrow \text{質點以等速運動。} \end{cases}$

- 質量(Mass)—抗拒速度的改變，因而能度量慣性大小。



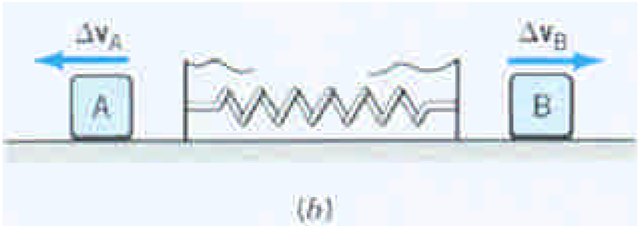


Fig.5.3

如左圖 m_A, m_B 的彈力可視為相同

(即 F=定值)

$$\frac{m_A}{m_B} = \frac{|\Delta \vec{v}_B|}{|\Delta \vec{v}_A|} = \frac{a_B}{a_A} \Rightarrow a \propto \frac{1}{m}$$

牛頓第二運動定律(Newton's second law) — $\sum \vec{F} \neq 0$

$$a \propto F \quad (m=\text{定值})$$
$$a \propto \frac{1}{m} \quad (F=\text{定值})$$
$$\Rightarrow F = kma$$

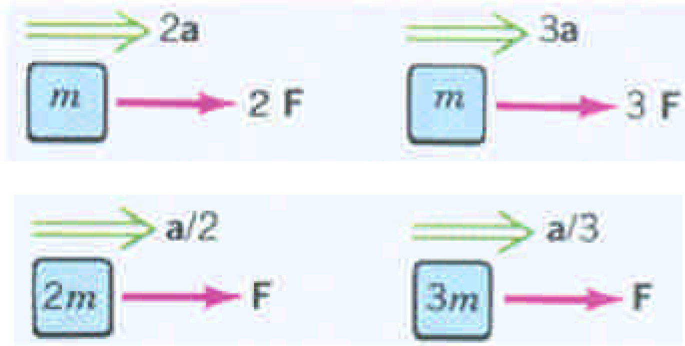


Fig.5.4

- 定義SI units(公制單位)，令 k=1

即：F=ma $\Rightarrow 1N = 1kg \cdot m/s^2$

- $\sum \vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow \begin{cases} \sum F_x = ma_x \\ \sum F_y = ma_y \\ \sum F_z = ma_z \end{cases}$

質量 m 的質點若受淨力(net force)作用，則會在淨力方向產生加速度 a，此為牛頓第二運動定律。

- 質點運動方向(由速度決定)與受力方向(即加速度方向)不一定相同。

- 加速度在慣性座標系中才維持不變，即牛頓運動定律需考慮在慣性座標系中。

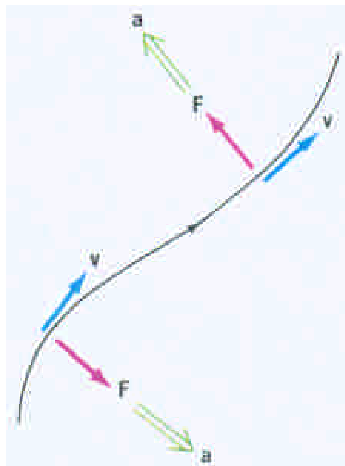


Fig.5.5

牛頓第三運動定律(Newton’s third law)－考慮力交互作用性質及外力的定義

- B 對 A 的作用力 $\vec{F}_{AB}$ 與 A 對 B 的作用力 $\vec{F}_{BA}$，大小相等且方向相反，即 $\vec{F}_{AB}=-\vec{F}_{BA}$。

Fig.5.10

- 作用力成對產生且作用在不同物體(即非一起運動的物體)。

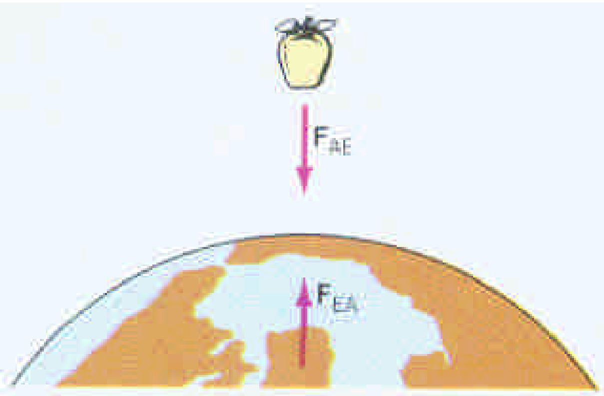


Fig.5.11

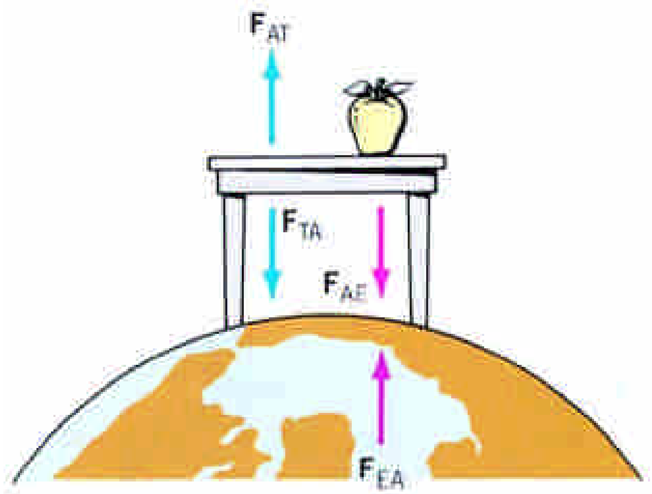
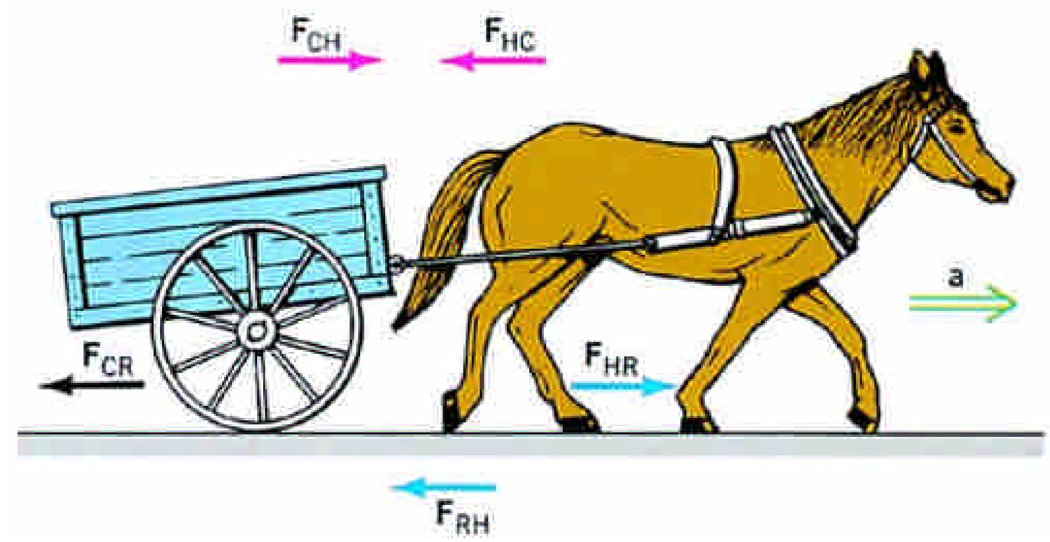


Fig.5.12

Example 5.8：

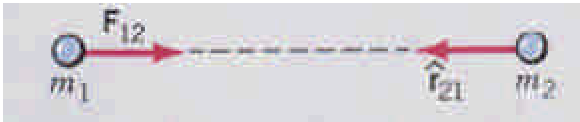


在車一馬系統中，車與馬互相作用的力屬於內力，不會影響整個系統的運動。系統會向前運動是因為路面對馬的作用力 F_{HR} 大於路面對車的作用力F_{CR}。

$$F_{HR} - F_{CR} = (m_H + m_C)a$$

✦牛頓萬有引力定律(Newton's Law of Gravitation)－解釋重力 (CH13)

- 相距 r的兩質點m_1、 m_2，其間的萬有引力(即重力)F 與距離平方成反比，即：$F \propto 1/r^2$。



- 萬有引力與兩質點的質量有關，即：$F \propto m_1 m_2$。

  ➢推導：

  $F_{12} \propto m_1$ (作用於m_1 的萬有引力) ；$F_{21} \propto m_2$ (作用於m_2 的萬有引力)

  牛頓第三運動定律 $\Rightarrow$ $F_{12} = F_{21} = F$ (表示兩質點所受萬有引力相同)

  $$\Rightarrow F \propto m_1 m_2$$

- 總結上述關係$\Rightarrow$ $F = \dfrac{Gm_1m_2}{r^2}$ $(G = 6.67 \times 10^{-11}\,\mathrm{N \cdot m^2/kg^2})$

  向量式$\Rightarrow$ $\vec{F} = -\dfrac{Gm_1m_2}{r^2}\hat{r}$ $\Rightarrow \begin{cases} \vec{F}_{12} = -\dfrac{Gm_1m_2}{r^2}\hat{r}_{21} \\ \vec{F}_{21} = -\dfrac{Gm_1m_2}{r^2}\hat{r}_{12} \end{cases}$

• 疊加原理(principle of superposition)

$$\vec{F}_1 = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{13} + \cdots\cdots + \vec{F}_{1N}$$

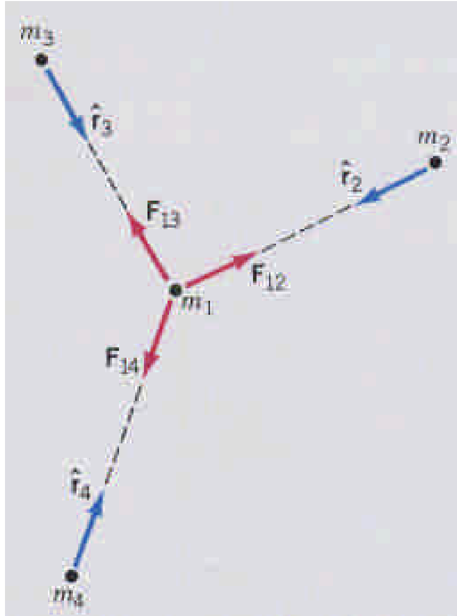


Fig.13.3

• m_1 與 m_2 間的重力不受它們之間存在物體的影響。

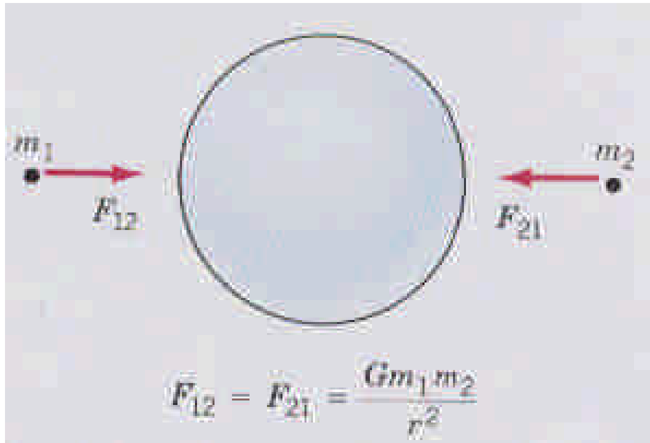


Fig.13.4

• 重力為超距力，可用「場」來描述。

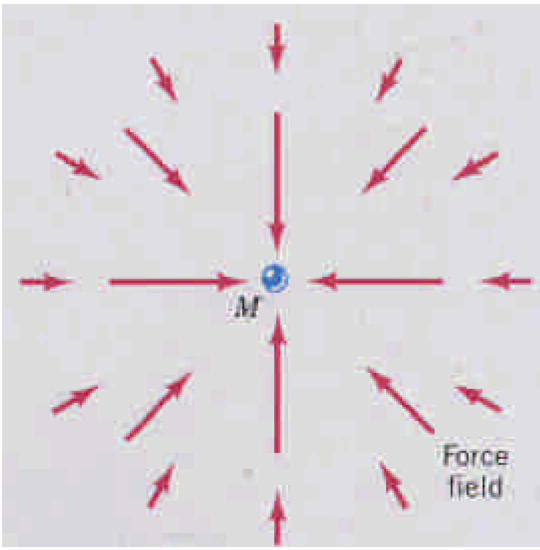


Fig.13.8

$$\vec{g} = \frac{\vec{F}}{m} = -\frac{GM}{r^2}\hat{r}$$

- 若物質非單一質點，則距離如何定義？

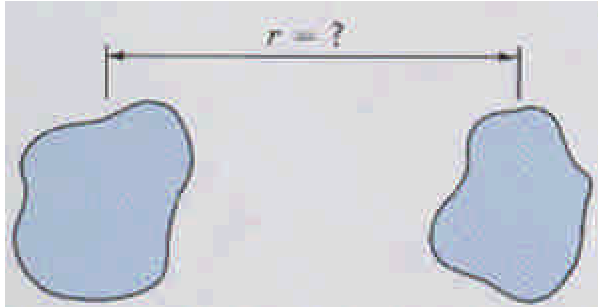
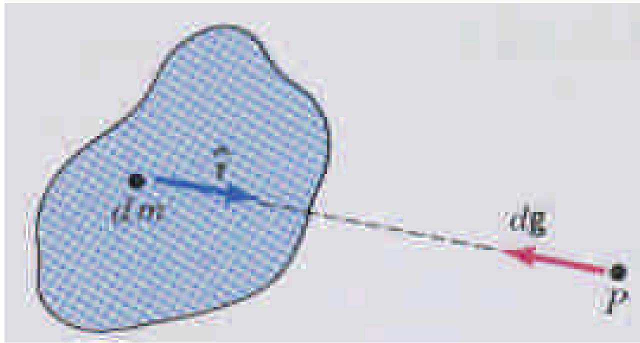


Fig.13.2

- 連續型質量分佈 (Continuous Distributions of Mass) (※參考，不考！)

$$dg = \frac{Gdm}{r^2}$$



➢Example 13.4可證實點質點定理(point mass theorem)－參閱教科書p.273

- **重量(weight)**

➢ 萬有引力定律 $\Rightarrow F = \dfrac{GmM}{r^2}$

質量為 m 的物體真實重量 $\Rightarrow W = \dfrac{GmM_E}{R_E^2}$

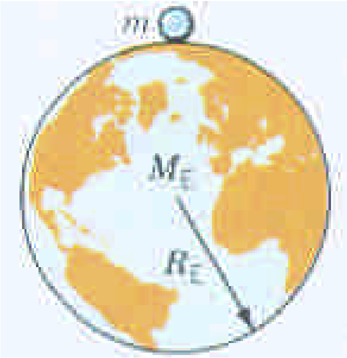


Fig.5.8

➢ 一般表示 $W = mg$ ，其中 $g = GM_E / R_E^2$
g表每單位質量所受到的重力，即
重力場強度(gravitational field strength)

➢ g 亦可視為重力加速度，但會有以下缺失：

1.物體自由下落與靜置於地面的重量都相同。

2.地球自轉，各地的重力加速度大小不同。

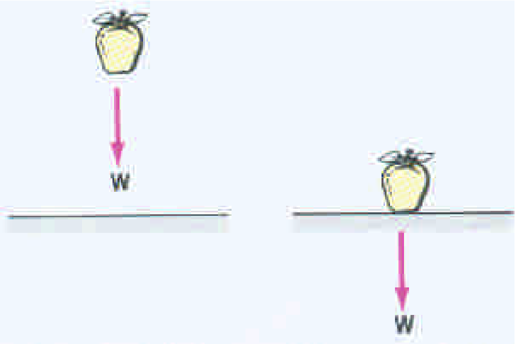


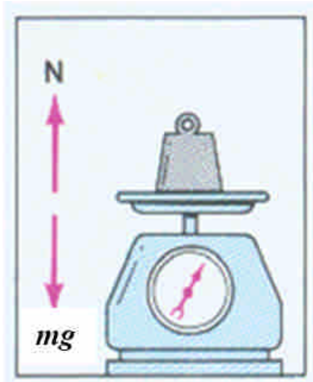
Fig.5.9

➢一般物體的重量並非真實重量，而為視重(apparent weight)。

視重一般可視為正向力(normal force) ，即支撐面的作用力。

Example：

視重 W = 正向力N = mg
(或支撐力)



考慮以下幾種情形：

(1)若電梯等速運動，則：W=N=mg

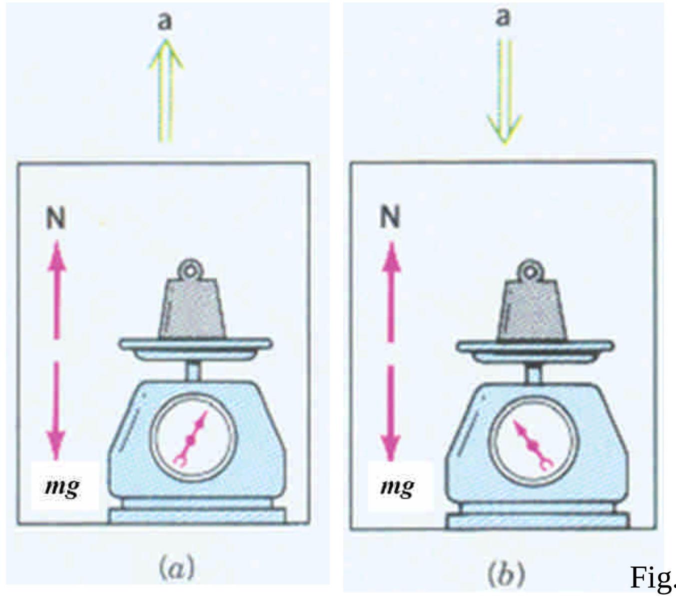


Fig.5.21

(2)若電梯加速度 a 朝上(如圖a)，則：$N - mg = ma \Rightarrow W = N = m(g+a)$

$\Rightarrow$ 增重

(3)若電梯加速度 a 朝下(如圖b)，則：$mg - N = ma \Rightarrow W = N = m(g-a)$

$\Rightarrow$ 減輕

(4)若纜繩斷掉，電梯自由下墜，則：$a=g$，$W=N=0$，視重為零。

➢質量與重量的區別：

質量(mass)	重量(weight)
純量(scalar)	向量(vector)
千克(kg)	牛頓(N)或千克重(kgw)
慣性質量或重力質量	物體所受總重力
不隨位置改變	隨位置改變
在失重下仍可估測	只能估測視重(apparent weight)

※補充說明：

慣性質量—物體慣性大小的量度。

重力質量—物體萬有引力的定義。

➢ 重力質量m_G與慣性質量m_I(Gravitational and Inertial Mass)比較

$$\begin{cases} F = m_I a & (\text{牛頓第二運動定律}) \\ F = \dfrac{G m_G M_G}{r^2} = m_G g & (\text{萬有引力定律}) \end{cases} \Rightarrow a = \frac{m_G}{m_I} g$$

沒有任何實驗可以區別重力與慣性力的效應有何不同。

等效原理(principle of equivalence) $\Rightarrow \dfrac{m_G}{m_I} = 1$

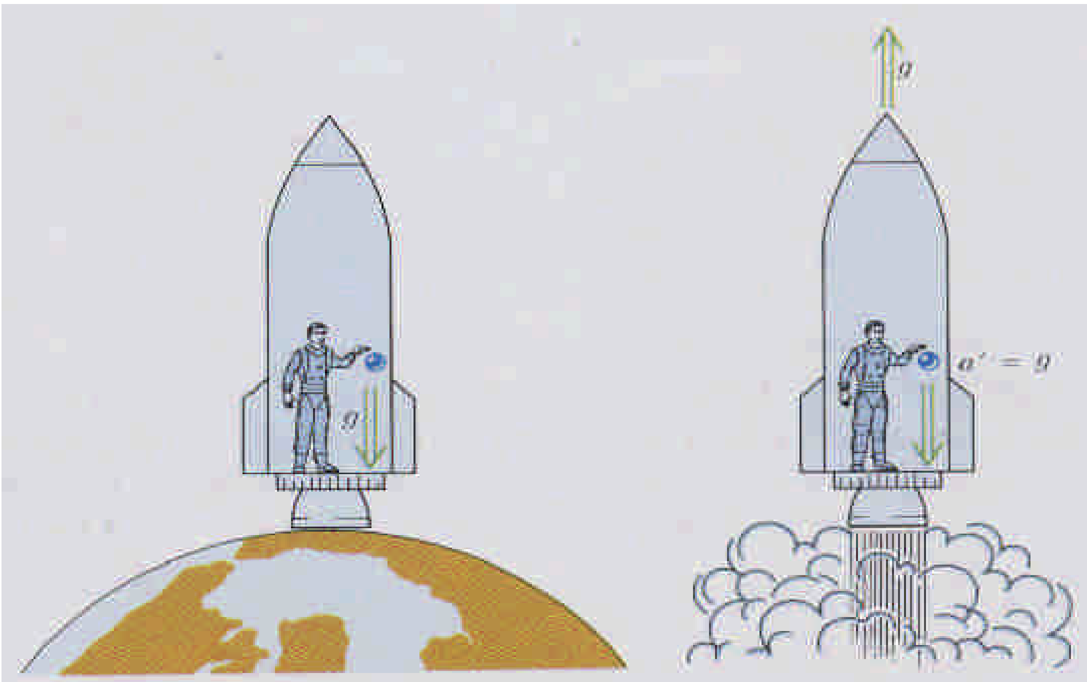
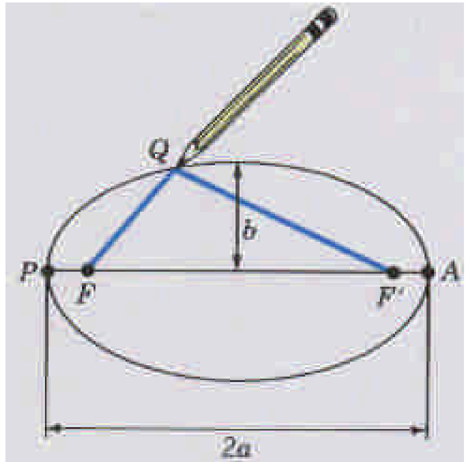


Fig.13.6

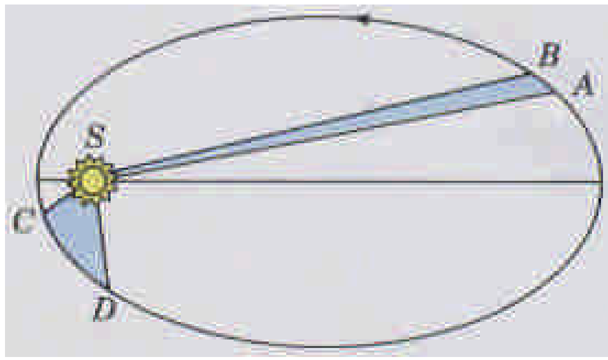
✦克卜勒行星運動定律 (Kepler's Law of Planetary Motion)



- 第一定律：行星以橢圓軌道繞行太陽，而太陽位於其一焦點上。

- 第二定律：太陽與行星的連線在等時間內掃過相同的面積。

$$\Rightarrow \frac{\Delta A}{\Delta t} = \text{定值}$$



- 第三定律：行星運動週期的平方正比於行星至太陽平均距離的三次方。

$$\Rightarrow T^2 = \kappa a^3$$

張力(tension)

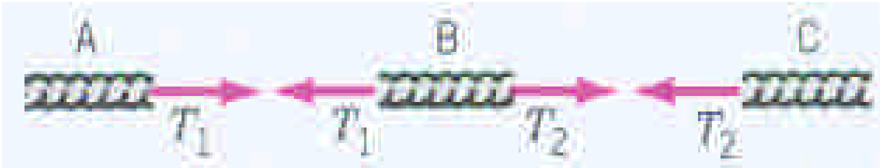


Fig.5.13

- 繩子張力係指繩子某一段對相鄰一端或對繫於繩端的拉力。

- 若繩子有質量且處於加速或垂直懸掛，則繩子中段兩端所受的張力 $\vec{T}_1$ 、 $\vec{T}_2$ 將不同。

- 若不考慮繩子質量，則同一條繩子的張力皆相同。

動力學解題指引

1.畫出簡單裝置圖。

2.標出裝置圖中每一物體的所有外力。

3.選定適當的慣性座標。

4.畫出自由個體圖(free-body diagram)，將裝置圖中的每個物體視為質點(或座標原點)，而作用於質點的外力則沿座標軸分解，分別繪出每個質點的作用外力。

5.依據 free-body diagram 列出牛頓第二定律的分量式求解：

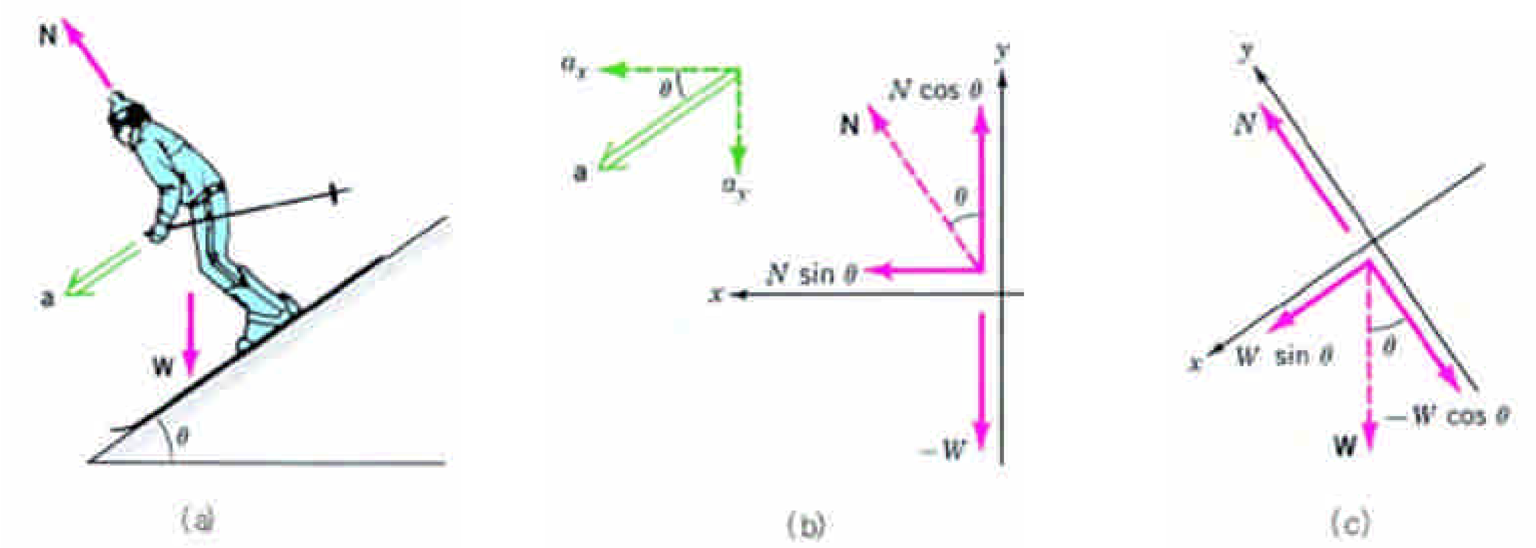
$$\sum F_x = ma_x \quad ; \quad \sum F_y = ma_y$$

6.檢查第5項的分量式：

(a)查核式子兩邊的正負號是否合理？

(b)核對其因次式。

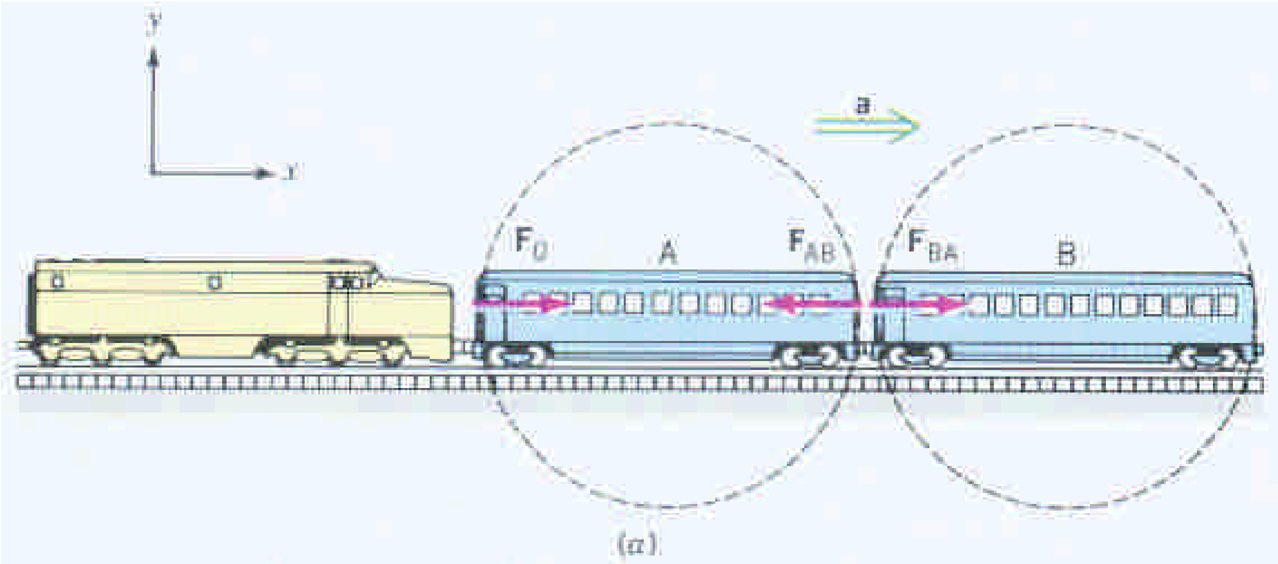
Example 5.5



$$\sum \vec{F} = \vec{N} + \vec{W} = m\vec{a} \xrightarrow{for\ \text{(b)}} \begin{cases} \sum F_x = N\sin\theta = ma\cos\theta \\ \sum F_y = N\cos\theta - W = -ma\sin\theta \end{cases}$$

$$\xrightarrow{for\ \text{(c)}} \begin{cases} \sum F_x = mg\sin\theta = ma \\ \sum F_y = N - mgcos\theta = 0 \end{cases}$$

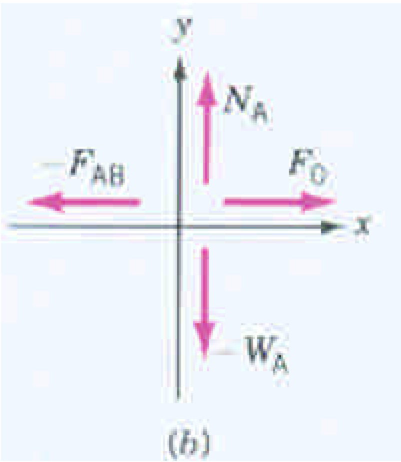
Example 5.7：

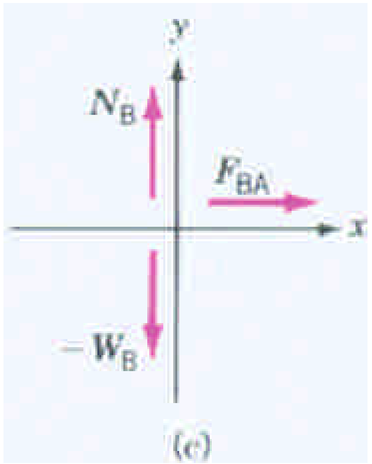


已知 $m_A,\ m_B,\ a$

$$F_0 = ?$$

$$F_{AB} = ?$$



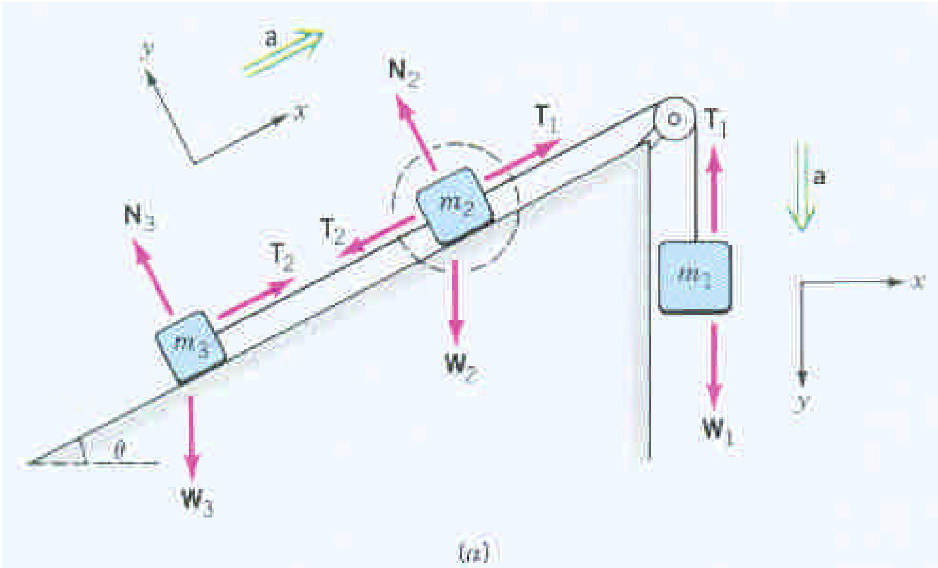


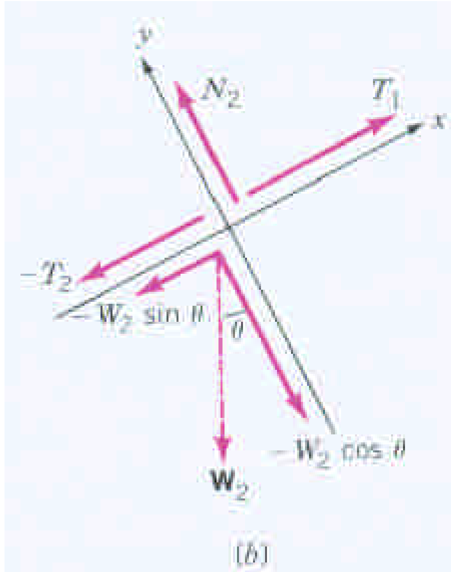
$$railcar\ \text{A} \Rightarrow F_0 - F_{AB} = m_A a$$

$$railcar\ \text{B} \Rightarrow F_{AB} = m_B a$$

其中 $F_{AB} = F_{BA}$

Example 5.9：





$$a = ?$$
$$T_1 = ?$$
$$T_2 = ?$$

$$Block\ 1 \Rightarrow \sum F_y = W_1 - T_1 = m_1 a \qquad (1)$$

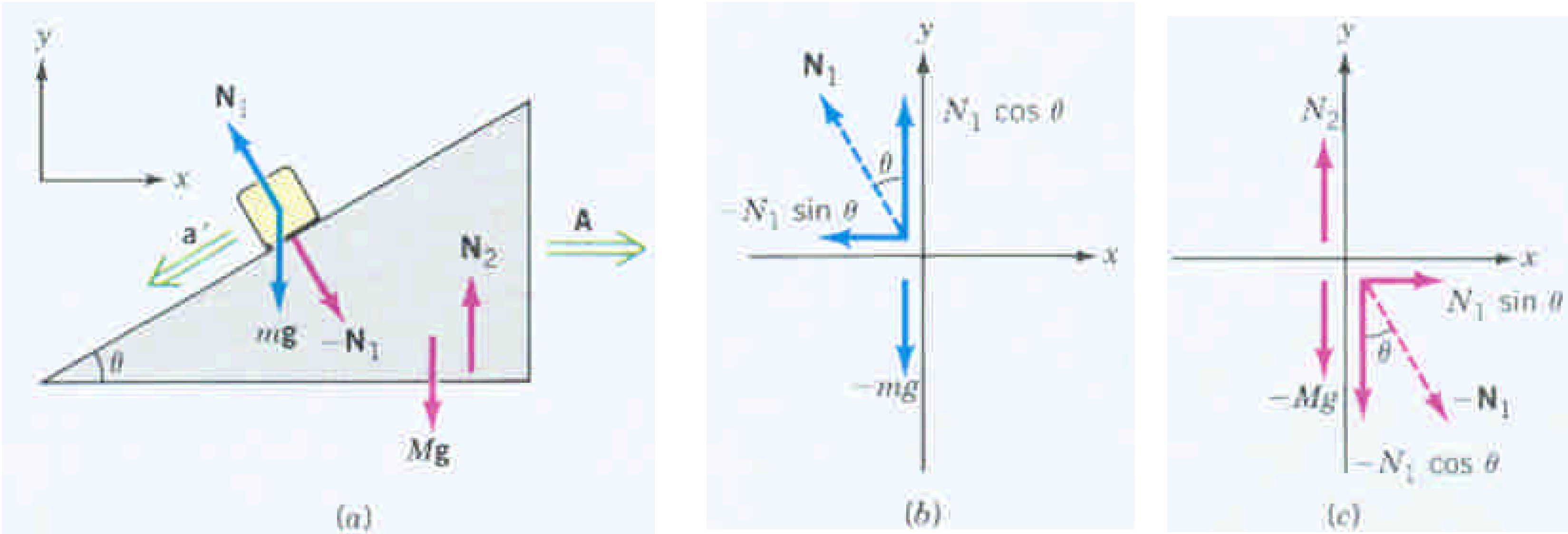
$$Block\ 2 \Rightarrow \sum F_x = T_1 - T_2 - W_2 \sin\theta = m_2 a \qquad (2)$$

$$Block\ 3 \Rightarrow \sum F_x = T_2 - W_3 \sin\theta = m_3 a \qquad (3)$$

$$(1)+(2)+(3) \Rightarrow W_1 - (W_2 + W_3)\sin\theta = (m_1 + m_2 + m_3)a$$

求出 a ，即可代入(1), (3)求取 T_1, T_2

Example 5.10： Find A=?



$$Wedge \Rightarrow \sum F_x = N_1 \sin\theta = MA \qquad (1)$$

$$Block \Rightarrow \begin{cases} \sum F_x = -N_1 \sin\theta = m(A - a'\cos\theta) & (2) \\ \sum F_y = N_1 \cos\theta - mg = -ma'\sin\theta & (3) \end{cases}$$

其中 a' 爲*Block*相對於*Wedge*的加速度

$$(1)+(2) \Rightarrow (m+M)A = ma'\cos\theta \qquad (4)$$

$$(2)\times\cos\theta + (3)\times\sin\theta \Rightarrow mg\sin\theta = ma' - mA\cos\theta \qquad (5)$$

$$(5)\times\cos\theta \Rightarrow mg\sin\theta\cos\theta = ma'\cos\theta - mA\cos^2\theta \qquad (6)$$

$$(4)-(6) \Rightarrow (m+M)A - mg\sin\theta\cos\theta = mA\cos^2\theta$$

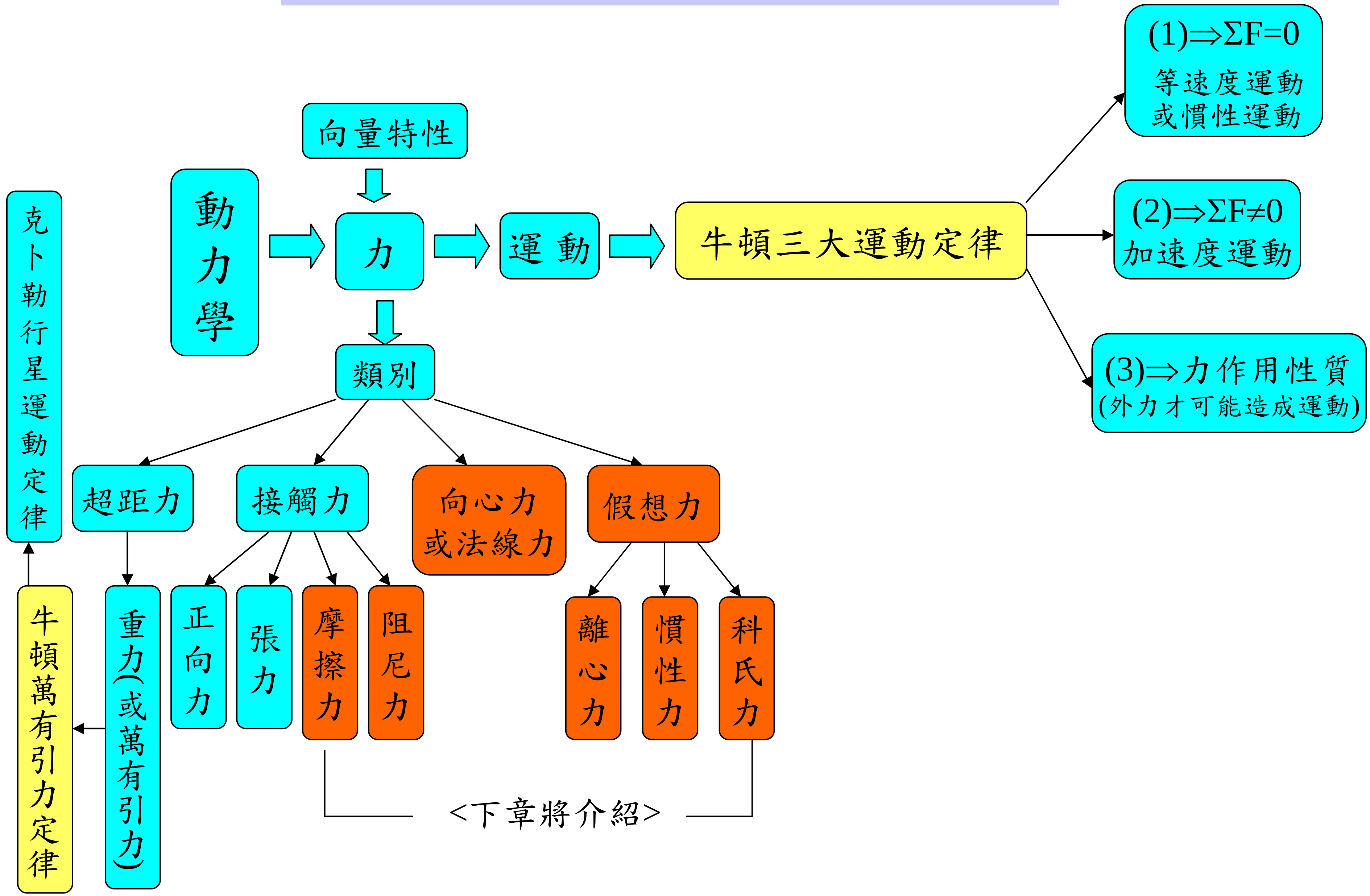
$$\left[M + m(1-\cos^2\theta)\right]A = mg\sin\theta\cos\theta$$

$$\Rightarrow A = \frac{mg\sin\theta\cos\theta}{M + m\sin^2\theta}$$

代入(1)可得： $N_1 = \dfrac{MA}{\sin\theta} = \dfrac{mMg\cos\theta}{M + m\sin^2\theta}$

代入(4)可得： $a' = \dfrac{(m+M)A}{m\cos\theta} = \dfrac{(m+M)g\sin\theta}{M + m\sin^2\theta}$

本章重要觀念發展脈絡彙整



習　題

- 教科書習題(p.95~p.101)

  Exercise: 1,7,21,31,34,37,39,41,43,45,55,61,67,69

  Problem: 1,4,6

  ★提示：Ex.34 Ans. (a) 7.2×10^{5} N; (b) 8×10^{4} N; (c) 1.24×10^{6} N
  Problem 4 Ans. 5m　,　Problem 6 Ans. 1.9 m/s^{2}

- 基本觀念習題：

  1.請說明牛頓三大運動定律。

  2.請說明牛頓萬有引力定律。

  3.請說明克卜勒行星運動三大定律。

  4.請說明質量與重量的區別。

  5.何謂慣性質量與重力質量 。

  6.若將重力場強度視為重力加速度，則將有何缺失？

習　題

- 延伸思考習題：(※不列入考試，僅列入加分題)

  1.牛頓運動定律可否適用於非慣性座標系？請申述之。

  2.利用牛頓運動定律分析動力學問題，必須假設座標系，請問座標系假設的位置或對象是否有規範？請申述之。

✦摩擦力(Friction)

- 特性 ➡
  1. 摩擦力與負載成正比。
  2. 摩擦力與接觸面積無關。(有爭議！)
  3. 摩擦力與速率無關。(有爭議！)

- 摩擦力與實接觸面積 (the actual area of contact)有關，但與虛接觸面積(the apparent area of contact)無關。

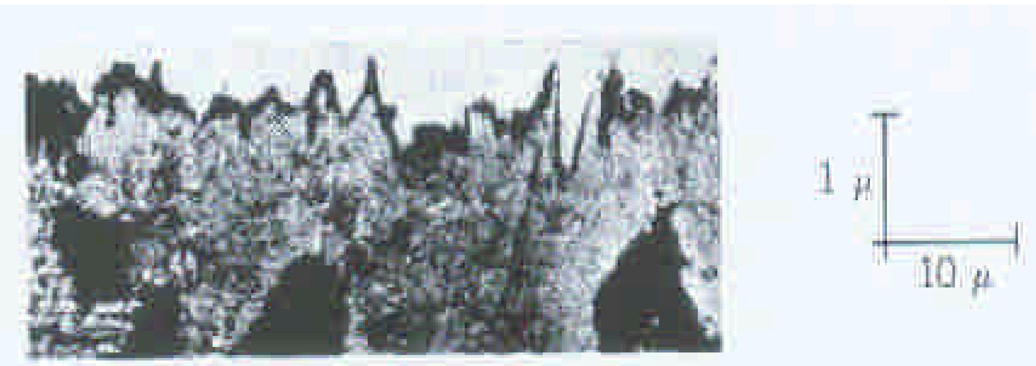


Fig.6.1

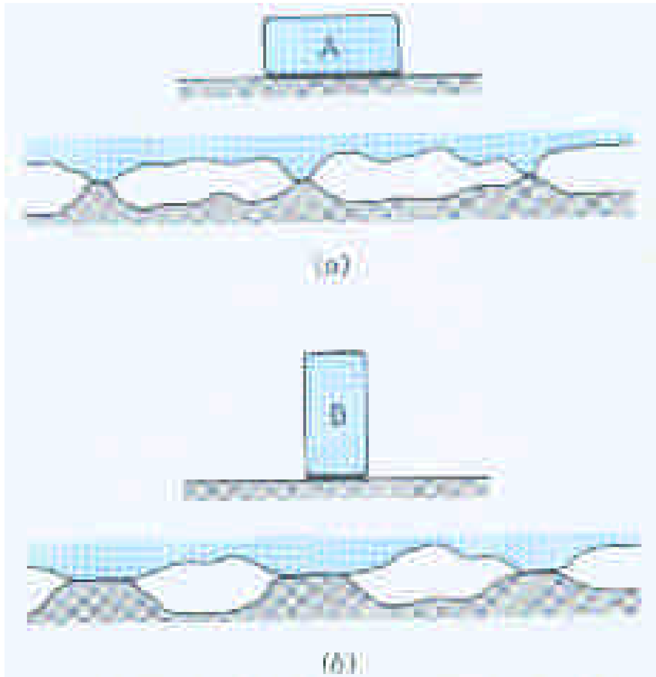


Fig.6.2

●靜摩擦與動摩擦(static and kinetic friction)

➢抗拒木塊在桌面移動的傾向，若木塊不動，則靜摩擦力 f_s 必與外力F_{app} 相等。當F_{app} 增大， f_s 也跟著增大且與F_{app} 相等，直到臨界值(critical value) $f_{s(max)}$ 為止，此時若F_{app} 再增大，則木塊就開始滑動，便感受到所謂的動摩擦力 f_k。
(其中$f_{s(max)}$ 即所謂的最大靜摩擦力。)

➢木塊開始滑動，在低速下摩擦力迅速降低，而在較高速下，動摩擦力才會趨於定值，但速度愈高，也有逐漸減小的趨勢。許多低速摩擦有靜摩擦與動摩擦混雜在一起，形成抖　動的「黏附-滑脫(stick-slip)」運動。

Fig.6.3

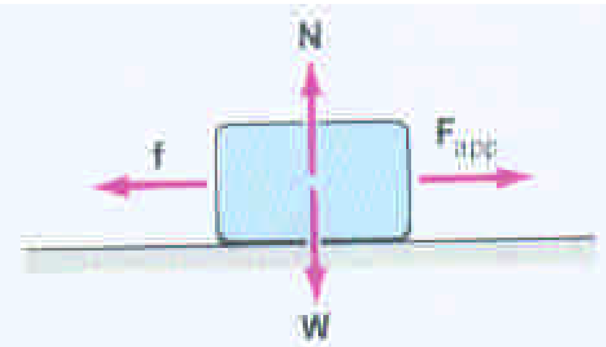
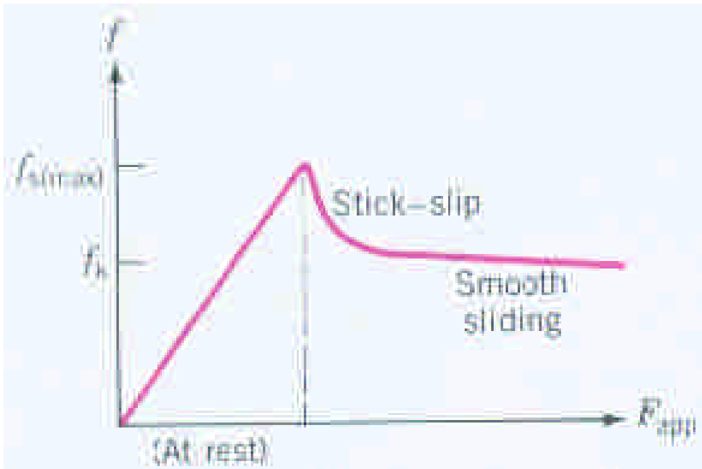


Fig.6.4



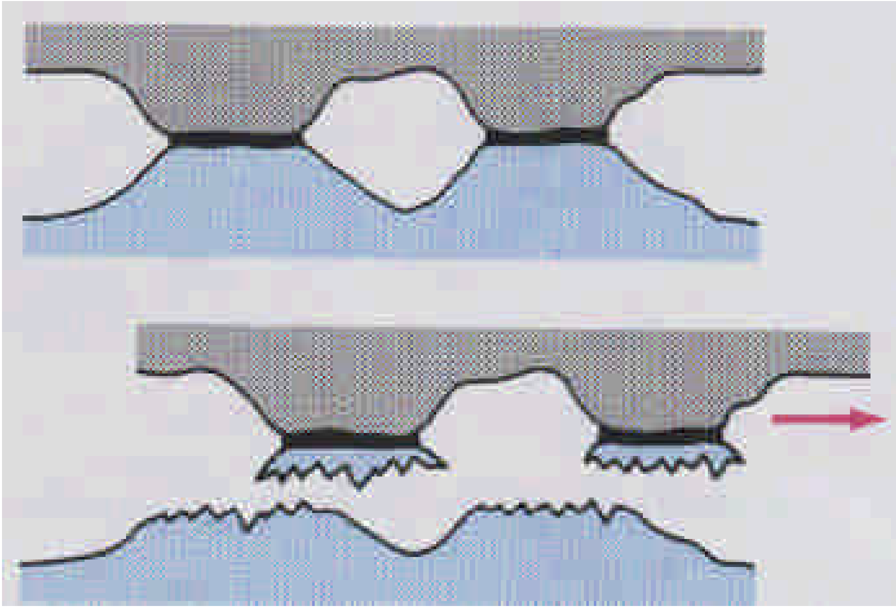


Fig.6.31

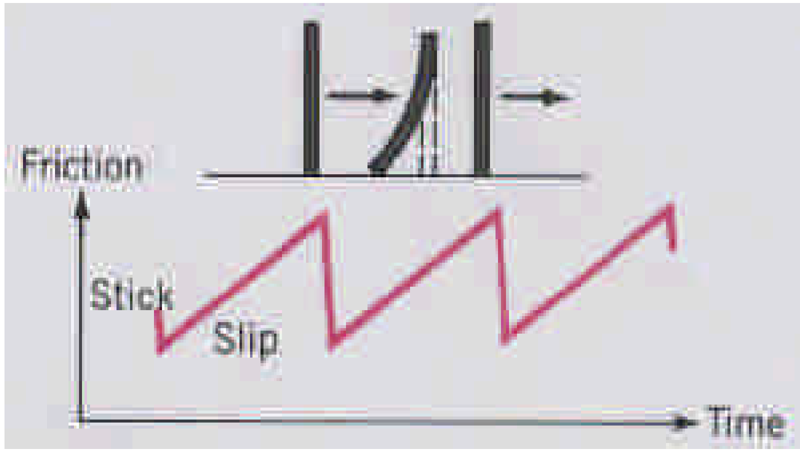


Fig.6.32

●摩擦力與負載成正比，負載即正向力(N)。

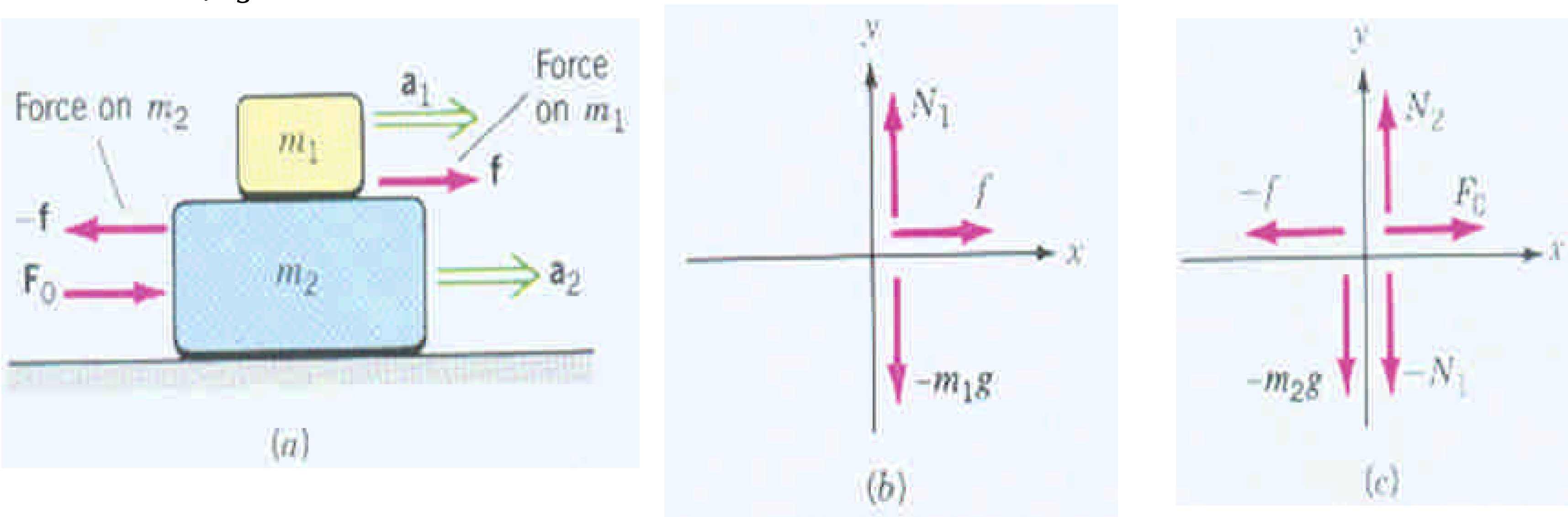
➢動摩擦力⇒ $f_k = \mu_k N$ ，其中μ_k為動摩擦係數(coefficient of kinetic friction)

➢最大靜摩擦力⇒ $f_{s(\max)} = \mu_s N$ 或 靜摩擦力⇒ $f_s \le \mu_s N$

其中μ_s為靜摩擦係數(coefficient of static friction)

Example 6.2：

求 μ_s ?



$$\left.\begin{array}{l} \text{Block 1} \Rightarrow \quad f = m_1 a_1 \\ \\ \text{Block 2} \Rightarrow \quad F_0 - f = m_2 a_2 \end{array}\right\} \Longrightarrow \quad F_0 = (m_1 + m_2) a$$

$$f_{s(\max)} = \mu_s N_1 = \mu_s (m_1 g) \Rightarrow \quad \mu_s (m_1 g) = m_1 a \Rightarrow \mu_s = \frac{a}{g} = \frac{F_0}{(m_1 + m_2) g}$$

✦阻尼介質中的運動 ⇒阻尼力(Drag Force) F_D

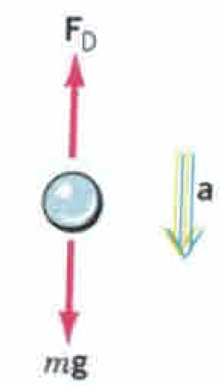


Fig. 6.16

➢層流(laminar) ⇒ 黏滯性或小顆粒下沉

$$\Rightarrow F_D = \gamma v$$

➢亂流(turbulent) ⇒ 大物體下落

$$\Rightarrow F_D = kv^2 = \frac{1}{2} C_D \rho A v^2$$

$$mg - F_D = ma = m\frac{dv}{dt}$$ ⇒當抵達終端速度(terminal speed)v_T ⇒ $a = 0$

層流(laminar) $\Rightarrow mg - \gamma v_T = 0 \Rightarrow v_T = \dfrac{mg}{\gamma}$

亂流(turbulent) $\Rightarrow mg - k v_T^2 = 0 \Rightarrow v_T = \sqrt{\dfrac{mg}{k}}$

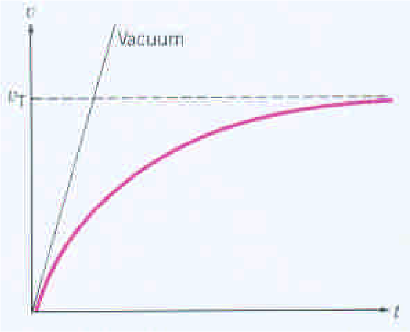


Fig. 6.17

✦圓周運動的動力學(Dynamics of circular motion)

- 向心力(centripetal force)

－指向圓心(向心)的力，無法指出其本質或來源，可能來自繩子張力、彈力、重力或摩擦力，因不是一種新的外力，故不需在free-body 圖中標示出來。

$$\vec{F} = m\vec{a} \;\Rightarrow\; \because\; \vec{a} = -\frac{\mathrm{v}^2}{r}\hat{r}$$

$$\Rightarrow\; \vec{F} = -\frac{m\mathrm{v}^2}{r}\hat{r}\;,\;\; \therefore\; F = \frac{m\mathrm{v}^2}{r}$$

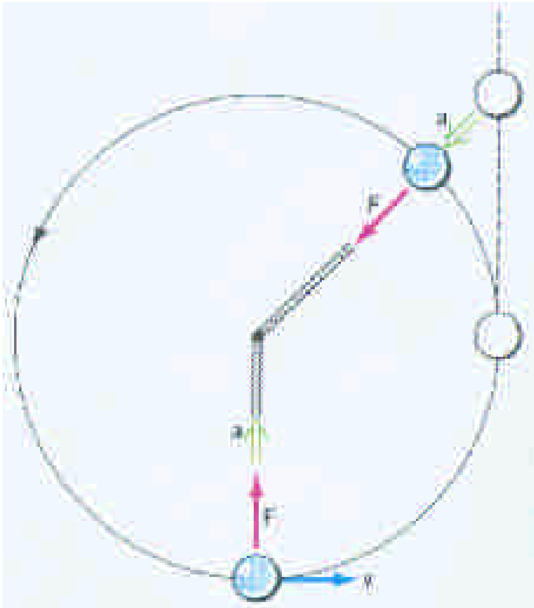


Fig.6.8

- 離心力(centrifugal force)

－大小與向心力相等，但方向相反，並非真實的力，係由非慣性座標系所觀測到的一種假想力。

● **非慣性座標系**(noninertial frames) $\Rightarrow$ 假想力 $\begin{cases}\text{慣性力}\\ \text{離心力}\\ \text{科氏力}\end{cases}$

- **慣性力**(The inertial force)

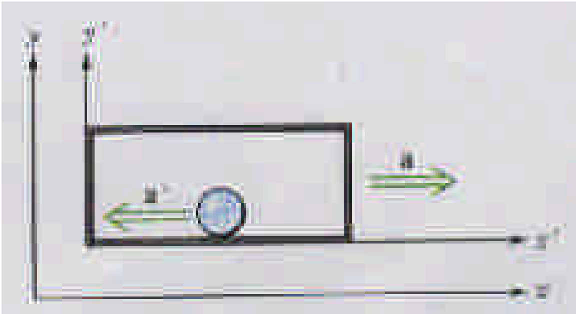


Fig.6.18

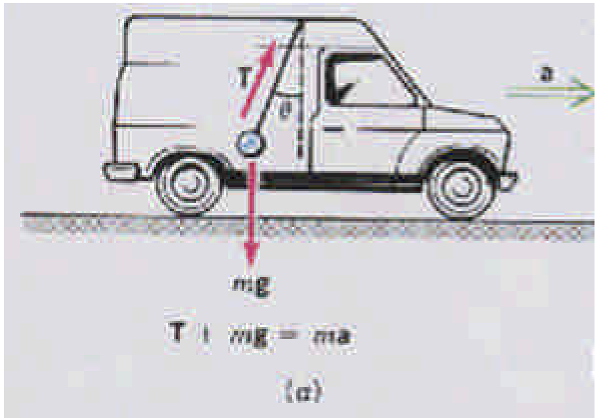
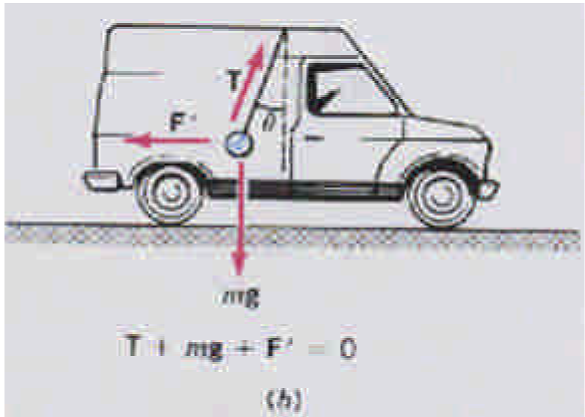


Fig.6.19



$$\vec{F}'(\text{假想力}) = m\vec{a}'$$
$$= -m\vec{a}$$

(如Fig. 6.18的假想力
即所謂的「慣性力」)

➢ 離心力(The Centrifugal Force)

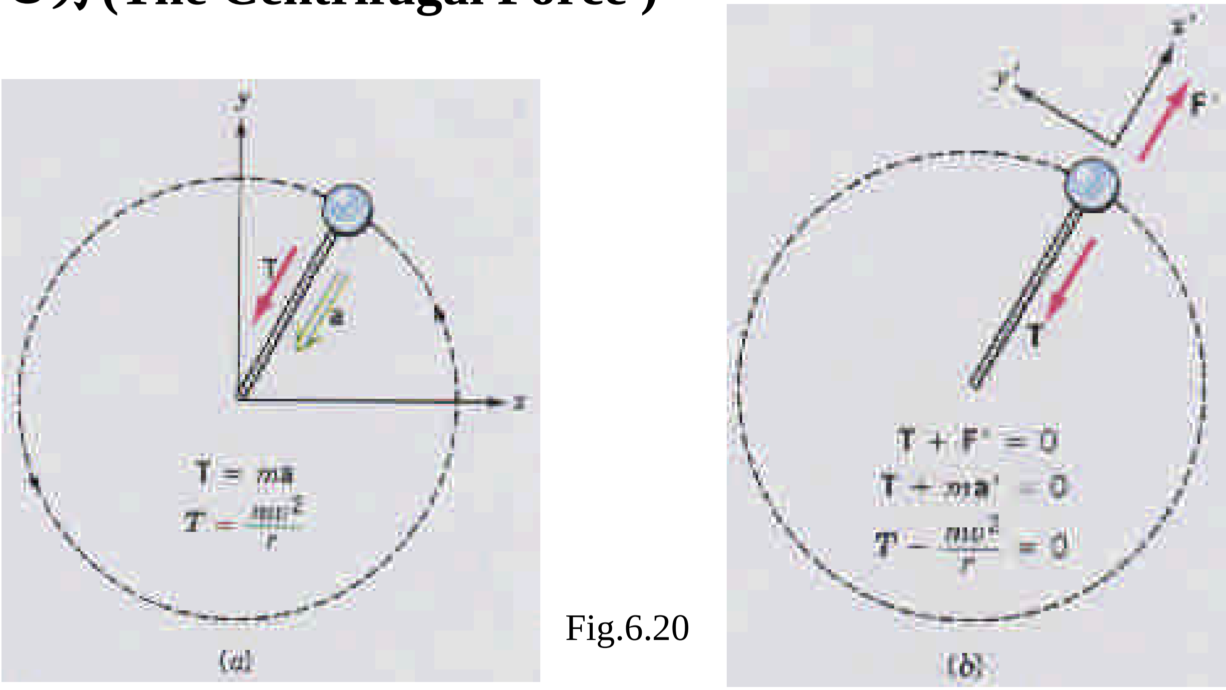


Fig.6.20

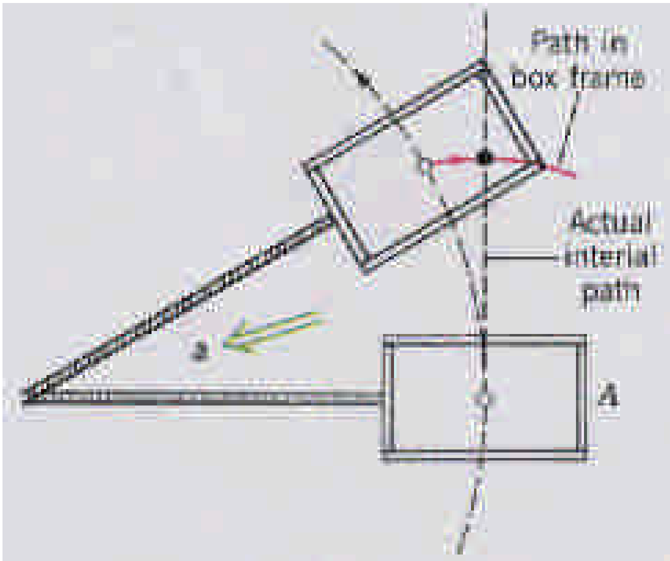


Fig.6.21

➢ 科氏力(The Coriolis Force)

(考慮轉動非慣性座標系統)

平台逆時針旋轉⇒質點運動向右偏

平台順時針旋轉⇒質點運動向左偏

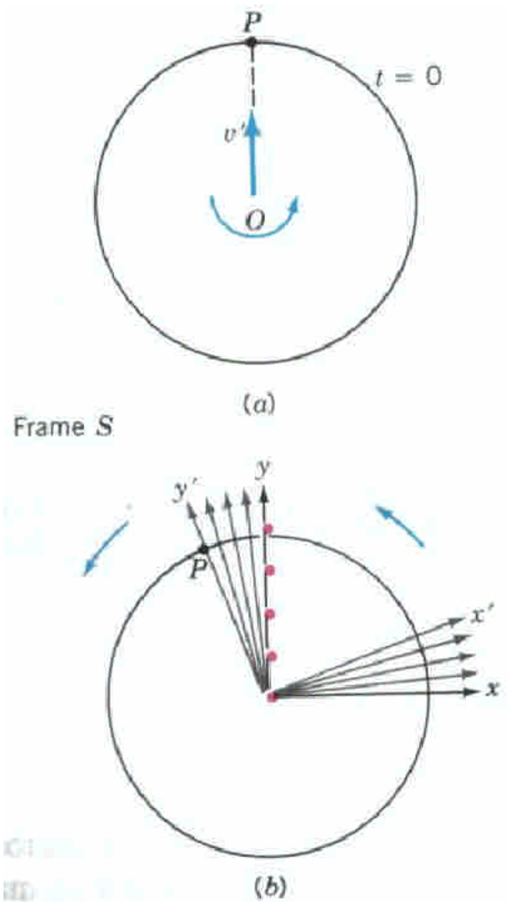


Fig.6.23

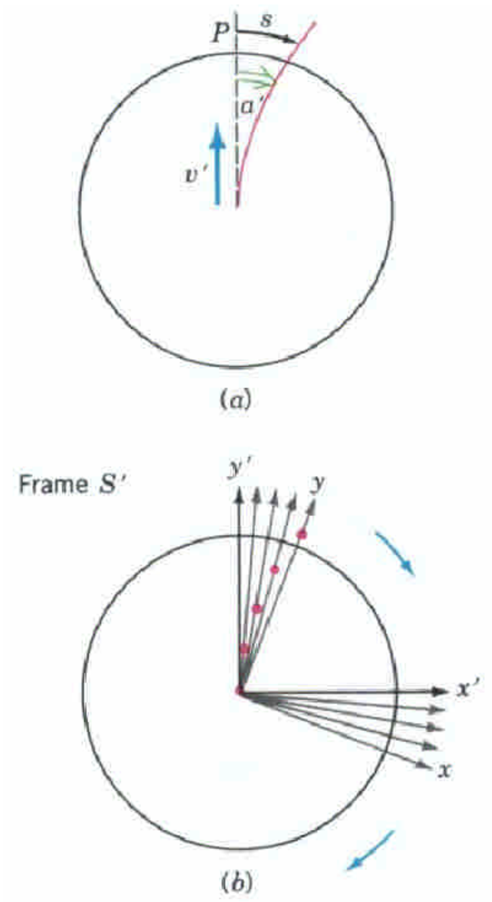


Fig.6.24

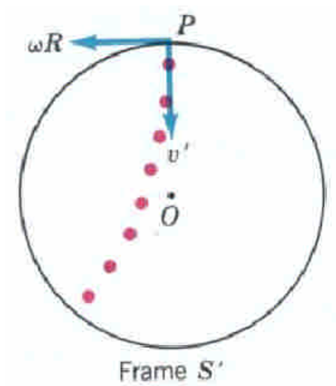


Fig.6.25

Example:

富可擺(Focault Pendulum)

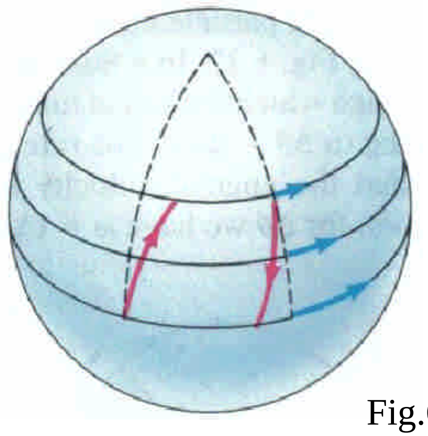


Fig.6.27

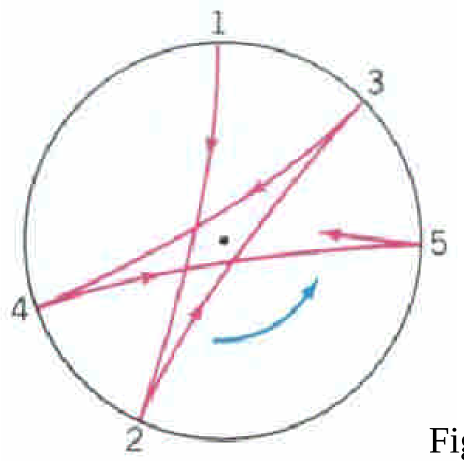


Fig.6.28

氣旋(cyclone)

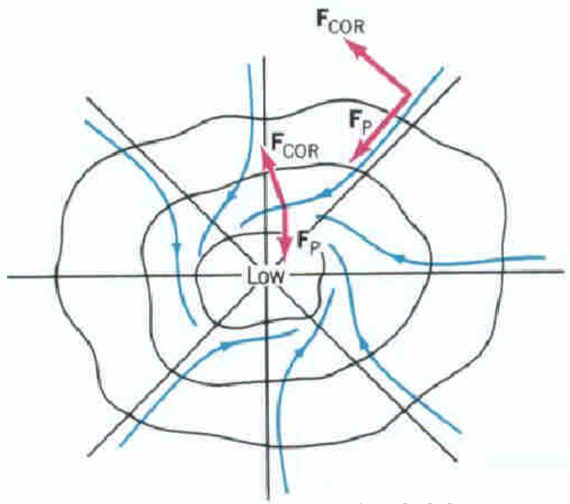
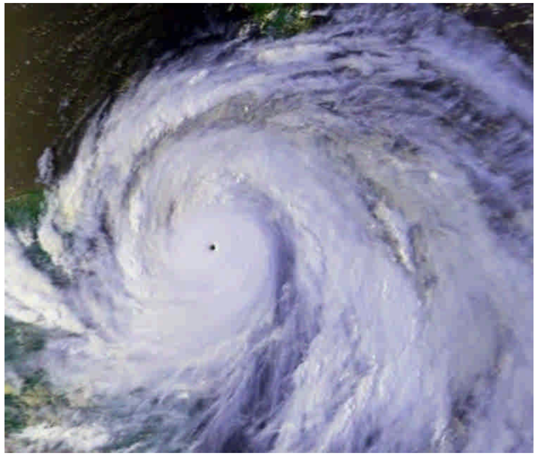


Fig.6.29



熱帶氣旋

木星紅斑 Fig.6.30

•衛星軌道(satellite orbits)

- 短距離拋體運動與軌道運動間的關係。(Newton提出)

- 假設衛星軌道為圓形，則衛星係進行圓周運動，而重力為向心力，則：

$$\frac{GmM}{r^2}=\frac{m\mathrm{v}_{orb}^2}{r} \Rightarrow \mathrm{v}_{orb}=\sqrt{\frac{GM}{r}}$$

$$T=\frac{2\pi r}{\mathrm{v}_{orb}}=\frac{2\pi}{\sqrt{GM}}\sqrt{r^3}$$

$$\Rightarrow T^2=\frac{4\pi^2}{GM}r^3=\kappa r^3$$

上式關係即稱克卜勒第三定律(Keper’s third law)，可求出質量或衛星軌道。

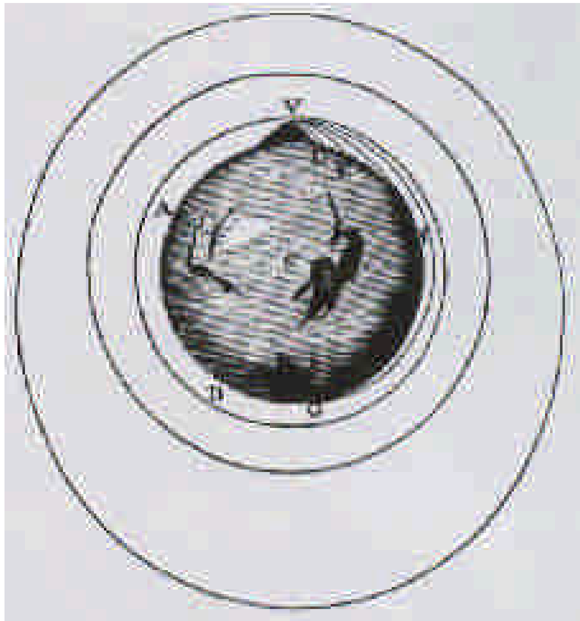


Fig.6.14

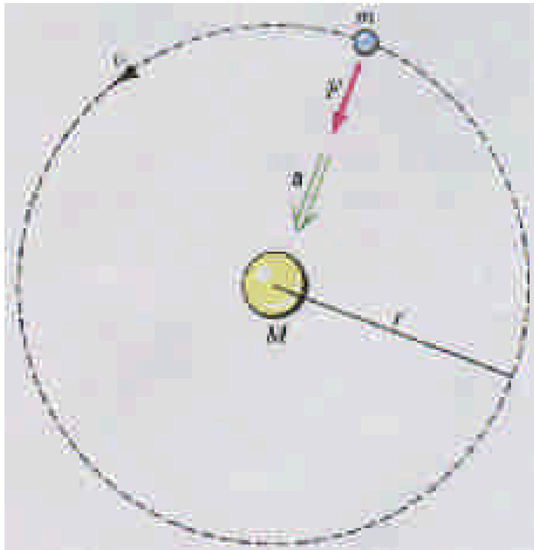


Fig.6.15

➢軌道中的失重狀態(weightlessness in orbit)

－穩定軌道運動的太空船內，太空人呈現失重現象(如同自由下落的電梯內)，即視重量為零，而真實重量其實作為向心力。不過，移動物體仍須克服其慣性質量。

Example 6.5： 求最小摩擦係數？

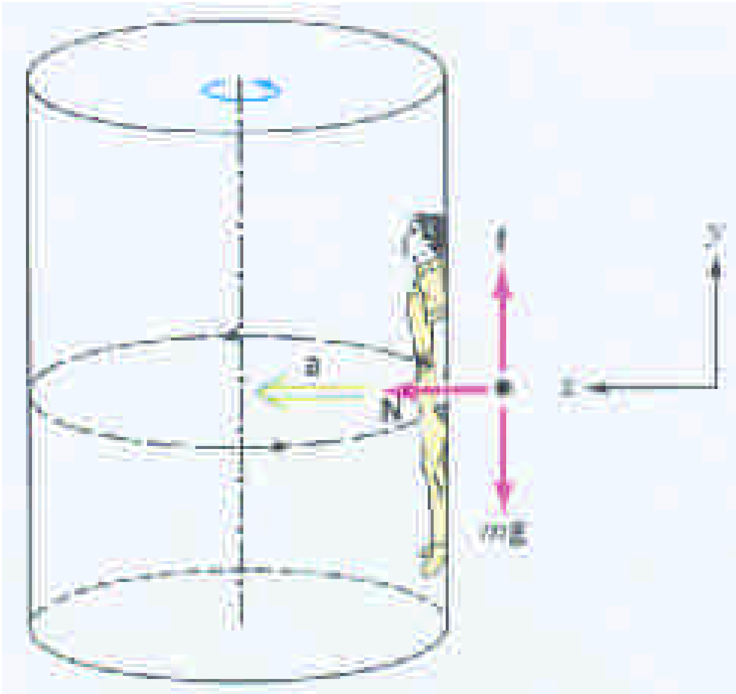


Fig.6.10

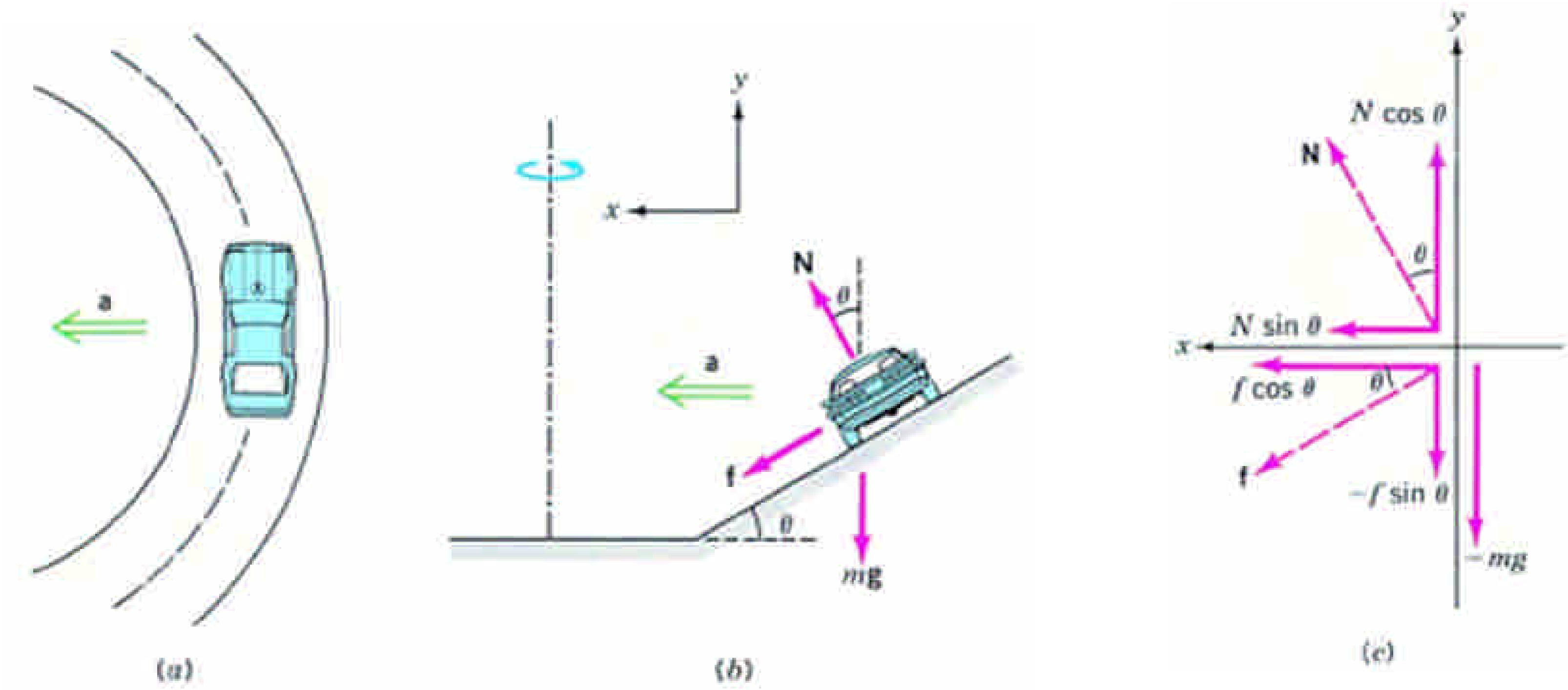
$$\sum \vec{F} = \vec{N} + \vec{f} + \vec{W} = m\vec{a}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sum F_x = N = \dfrac{mv^2}{r} \\ \sum F_y = f - mg = 0 \end{cases}$$

$$\because f = \mu N = \mu \frac{m\mathrm{v}^2}{r}$$

$$\therefore \mu \frac{m\mathrm{v}^2}{r} = mg \Rightarrow \mu = \frac{rg}{\mathrm{v}^2}$$

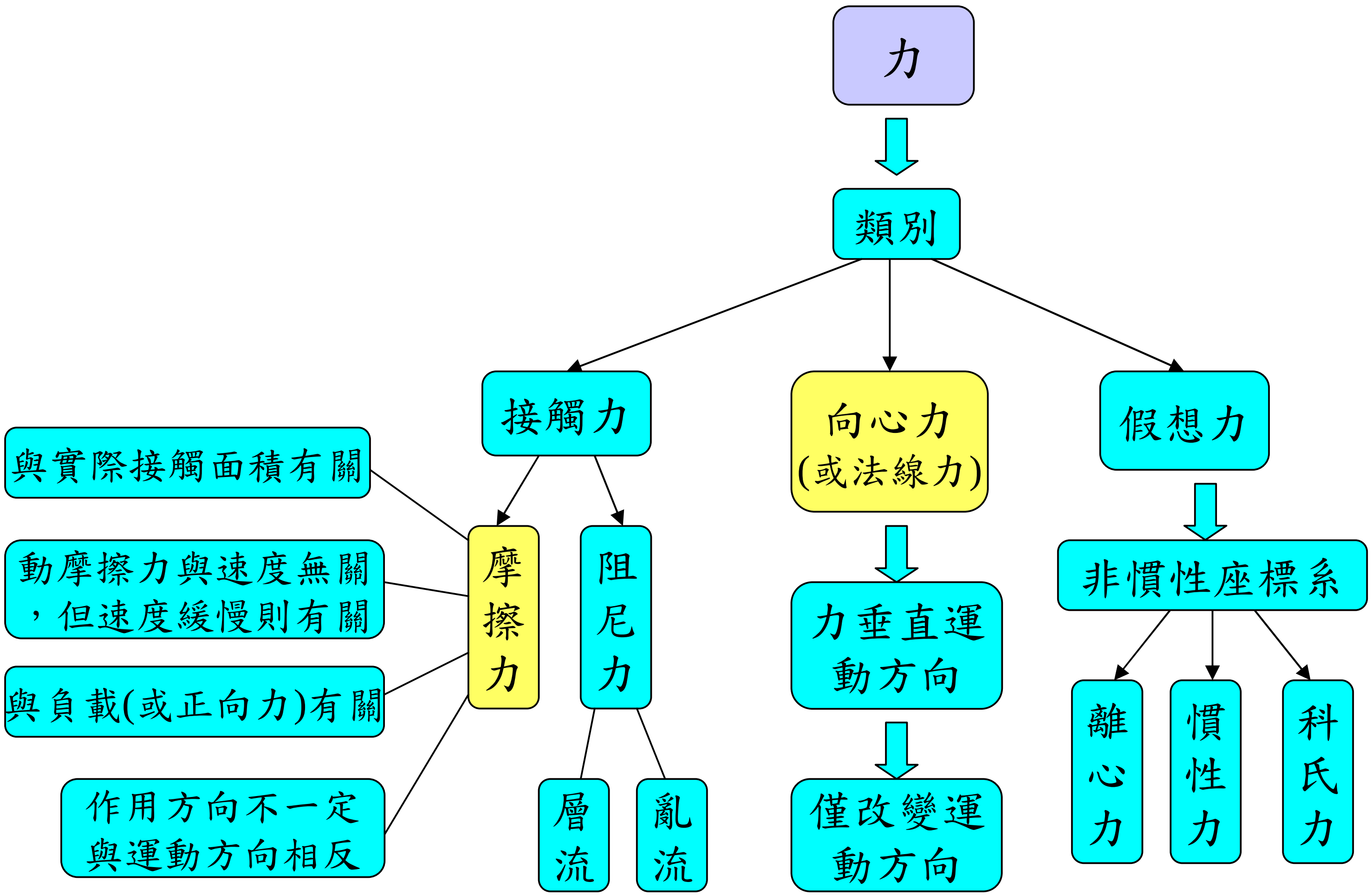
Example 6.7： 求車的最大速率？



$$\sum \vec{F} = \vec{N} + \vec{f} + \vec{W} = m\vec{a} \Rightarrow \begin{cases} \sum F_x = N\sin\theta + f\cos\theta = \dfrac{m\mathrm{v}^2}{r} \\ \sum F_y = N\cos\theta - f\sin\theta - mg = 0 \end{cases} \because \begin{pmatrix} f = \mu N = 0.1N \\ \cos 37^0 = 0.8 \\ \sin 37^0 = 0.6 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 0.6N + 0.08N = 10^2 \mathrm{v}^2_{\max} \\ 0.8N - 0.06N - 10^4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} N = 10^4/(0.74) = 1.35\times 10^4 N. \\ \mathrm{v}_{\max} = 9.6 m/s. \end{cases}$$

本章重要觀念發展脈絡彙整



習 題

- 教科書習題(p.119~p.125)

  Exercise: 3,9,15,19,21,23,24,29,31,41,47,65,71,73,75

  Problem: 7,9,10,13

  ★提示： Ex.24 Ans.0.061

- 基本觀念問題：

  1.摩擦力的特性有哪些？請說明之。

  2.假想力有哪些？請分別說明其形成原因。

- 延伸思考問題： (※不列入考試，僅列入加分題)

  1.請申述摩擦力與阻尼力的產生機制與特性有何異同之處？

  2.請根據非慣性座標系之相對運動闡述假想力的現象。

  3.繞行地球作軌道運動的太空船內，為何會產生失重狀態？請闡釋之。