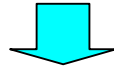


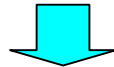
# 功與能(Work and Engery)

## 7~8章探究的主要問題架構

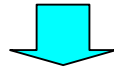
為何需考慮能量處理動力學問題？



功與力的關係為何？



功與力學能的關係為何？



力學能(或機械能)如何應用於動力學？

# 功與能 (Work and Energy)

- 一般古典力學問題皆可用牛頓定律解決，但如果對質點的作用力所知有限，則可採用功與能的觀念來解決。
- 能量可表示作功的能力，但能量不一定可完全轉換為功。

## 功的定義

### ✦ 定力作功(work done by a constant force)

- 物體在定力  $\vec{F}$  作用下產生位移  $\vec{s}$ ，  
定力作功的定義如下：

$$W = F s \cos \theta = \vec{F} \cdot \vec{s}$$

$$= (F_x \hat{i} + F_y \hat{j} + F_z \hat{k}) \cdot (\Delta x \hat{i} + \Delta y \hat{j} + \Delta z \hat{k}) = F_x \Delta x + F_y \Delta y + F_z \Delta z$$

- 僅沿位移  $\vec{s}$  方向的力或分力 ( $F \cos \theta$ ) 才會作功。

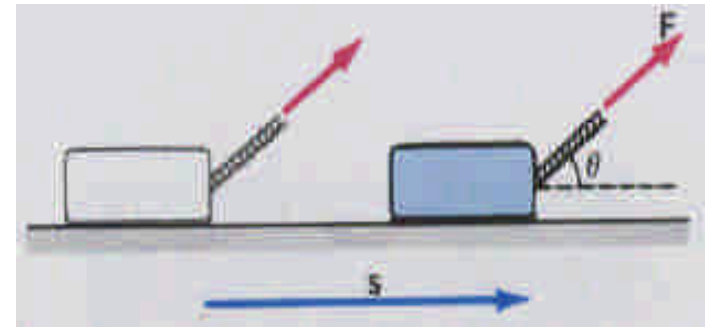
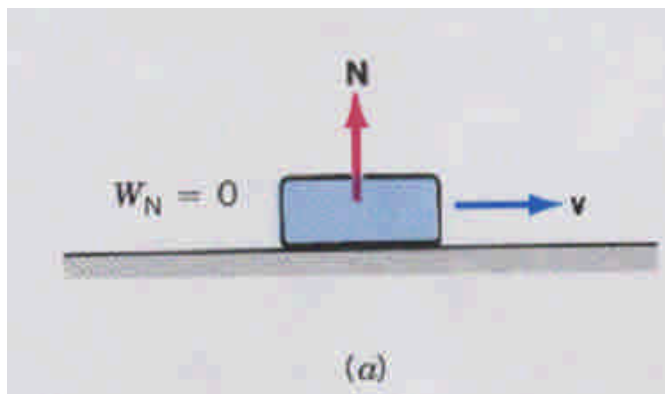


Fig.7.1

➤垂直於位移方向的力或分力( $F \sin \theta$ )不會作功，如：正向力、向心力。



正向力N

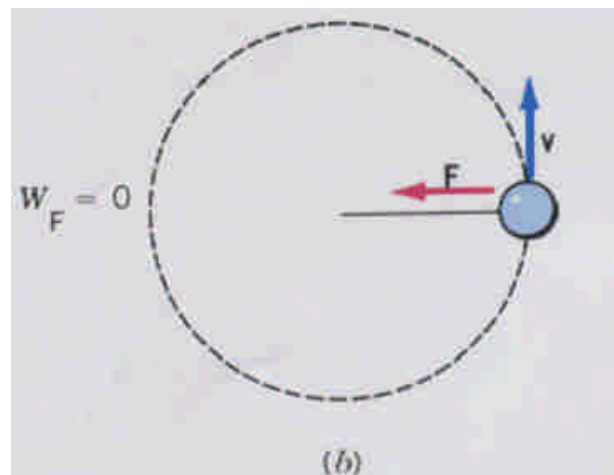


Fig.7.2

向心力F

●淨功(net work)—考慮多力作功。

$$\begin{aligned} W_{net} &= \vec{F}_1 \cdot \vec{s}_1 + \vec{F}_2 \cdot \vec{s}_2 + \cdots + \vec{F}_N \cdot \vec{s}_N \\ &= W_1 + W_2 + \cdots + W_N \quad (\text{因考慮多力作用在同一質點上，位移應相同。}) \\ &= \vec{F}_1 \cdot \vec{s} + \vec{F}_2 \cdot \vec{s} + \cdots + \vec{F}_N \cdot \vec{s} \\ &= \vec{F}_{net} \cdot \vec{s} \quad (\text{其中 } \vec{F}_{net} = \sum \vec{F}_i) \end{aligned}$$

- 正功(position work)與負功(negative work)

—作用力與位移方向同向為作正功，而反向則為作負功。

- 作用力與反作用力

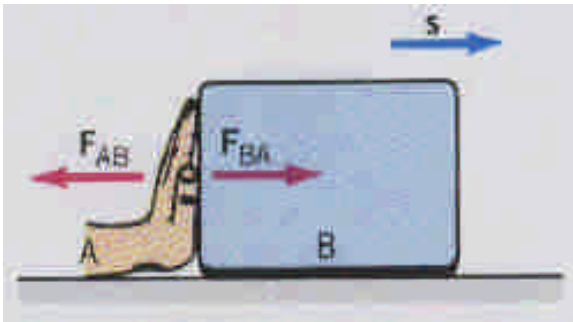


Fig.7.4

- 摩擦力

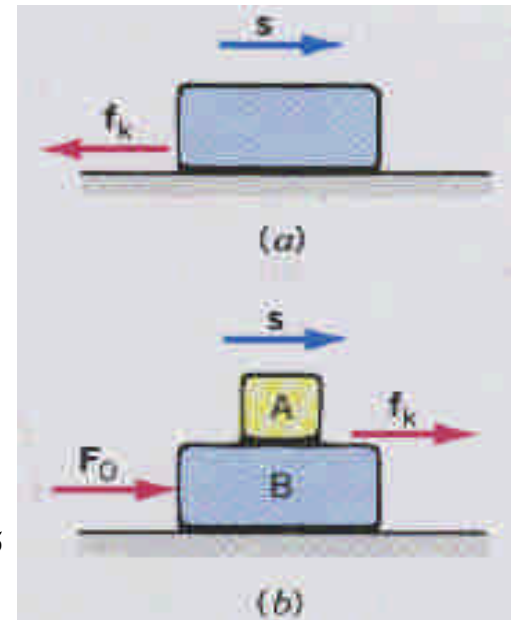


Fig.7.5

- 重力作功(work done by gravity)

$$W_g = -m\vec{g} \cdot \vec{s} = (-mg\hat{j}) \cdot (\Delta x\hat{i} + \Delta y\hat{j}) \\ = -mg\Delta y$$

僅與垂直座標(初始、最終位置)有關，  
但與路徑無關。

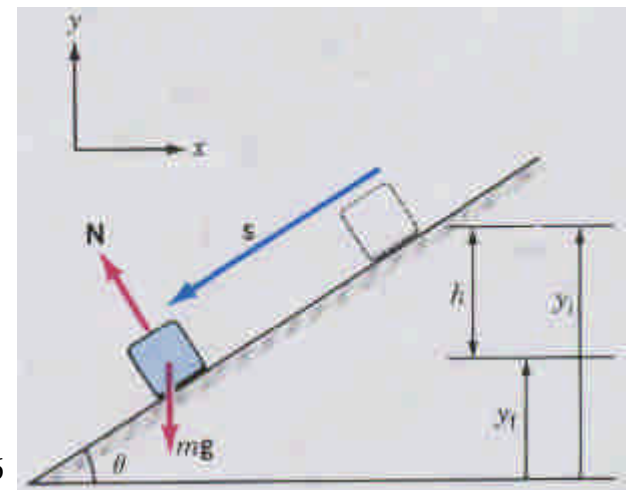


Fig.7.6

## ✦ 變力作功(work done by a variable force)

● 一維空間：

$$\begin{aligned} \text{➤ 定力作功} &\Rightarrow W = \vec{F} \cdot \vec{s} \\ &= (F_x \hat{i}) \cdot (\Delta x \hat{i}) = F_x \Delta x \end{aligned}$$

➤ 變力作功：

$$\begin{aligned} \Delta W_n &= F_n \Delta x_n \Rightarrow W \approx \sum F_n \Delta x_n \Rightarrow \lim_{\Delta x_n \rightarrow 0} \left( \sum F_n \Delta x_n \right) = \int F_x dx \\ \Rightarrow W_{A \rightarrow B} &= \int_{x_A}^{x_B} F_x dx \Rightarrow W_{A \rightarrow B} = -W_{B \rightarrow A} \end{aligned}$$

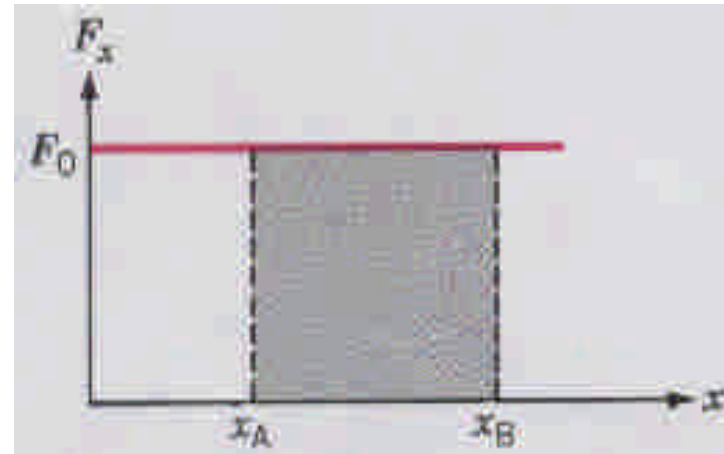


Fig.7.8

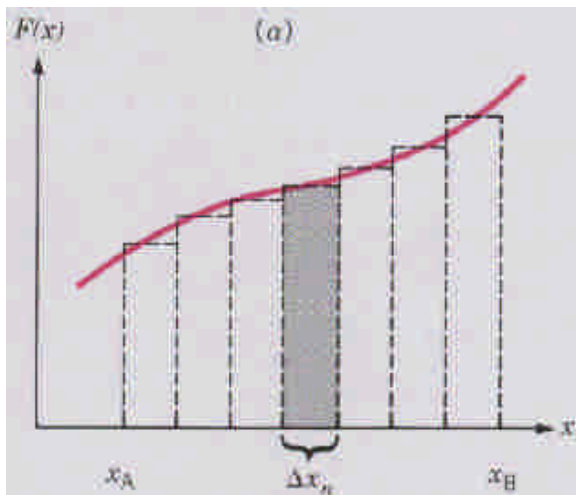


Fig.7.11a

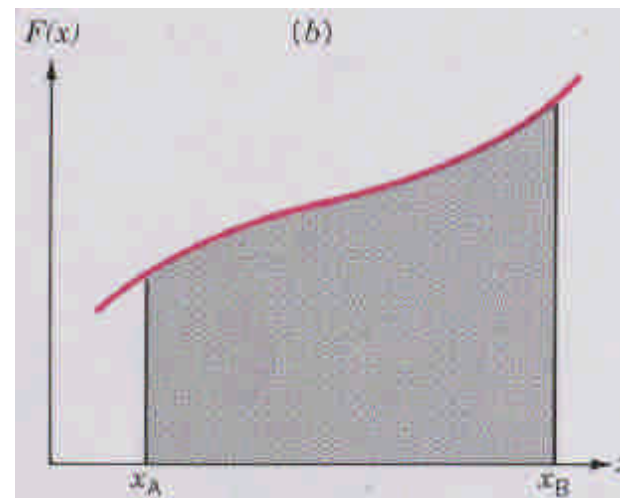


Fig.7.11b

➤彈力作功(work done by a spring)

$$F_{sp} = -kx \quad (\text{負號表彈力一直抗拒彈簧的伸長或壓縮。})$$

$$W_{sp} = \int_{x_i}^{x_f} F_{sp} dx = \int_{x_i}^{x_f} -kx dx = -\frac{1}{2}k(x_f^2 - x_i^2)$$

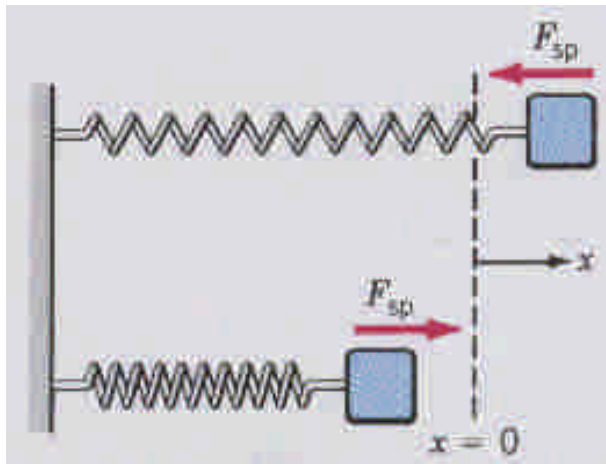


Fig.7.9

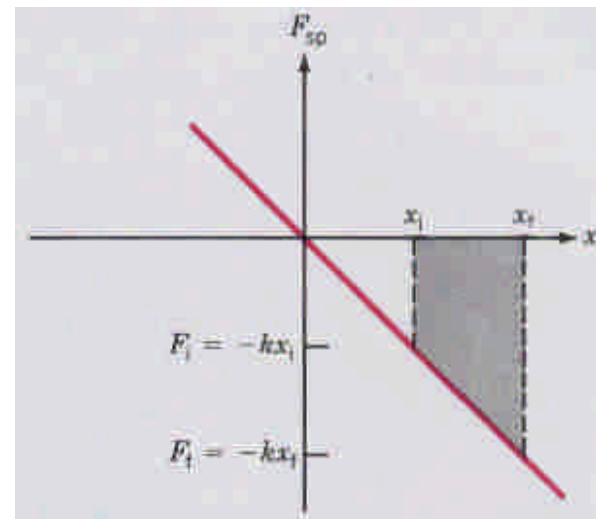


Fig.7.10

● 一維 $\Rightarrow$ 多維

$$\begin{aligned} W_{A \rightarrow B} &= \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_A^B (F_x \hat{i} + F_y \hat{j} + F_z \hat{k}) \cdot (dx \hat{i} + dy \hat{j} + dz \hat{k}) \\ &= \int_{x_A}^{x_B} F_x dx + \int_{y_A}^{y_B} F_y dy + \int_{z_A}^{z_B} F_z dz \end{aligned}$$

## ✦ 功-能定理 (Work-Energy Theorem)

$$W_{net} = \Delta k \quad , \quad \text{其中 } \Delta k = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2$$

(即動能變化量)

證明：

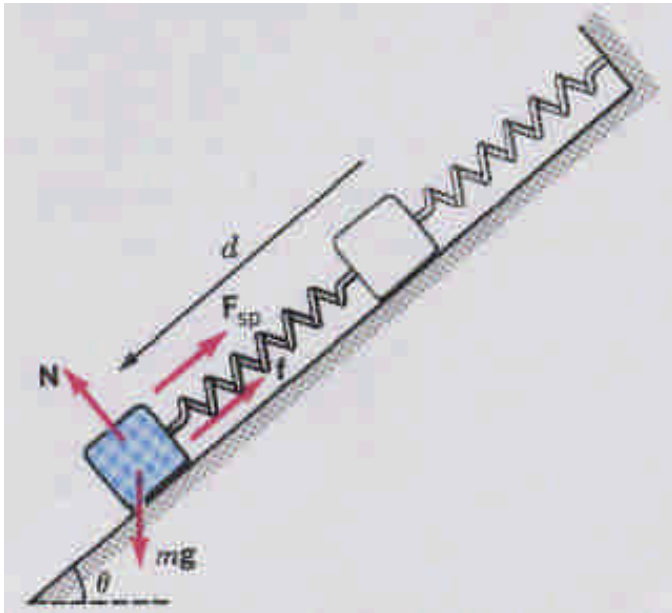
$$\text{定力作功} \Rightarrow W = F\Delta x = ma\Delta x \quad (\because 2a\Delta x = v_f^2 - v_i^2)$$

$$= m \left[ \frac{1}{2} (v_f^2 - v_i^2) \right] = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2$$

$$\text{變力作功} \Rightarrow W = \int F dx = \int m a dx = m \int \left( \frac{dv}{dt} \right) dx = m \int dv \left( \frac{dx}{dt} \right) = m \int_{v_i}^{v_f} v dv$$

$$= \frac{1}{2}mv^2 \Big|_{v_i}^{v_f} = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2$$

### Example 7.4      求 block 滑下速率 $v$ ?



$$W_g = m\vec{g} \cdot \vec{s} = mgd \sin \theta$$

$$W_f = \vec{f} \cdot \vec{s} = -\mu_k (mg \cos \theta) d$$

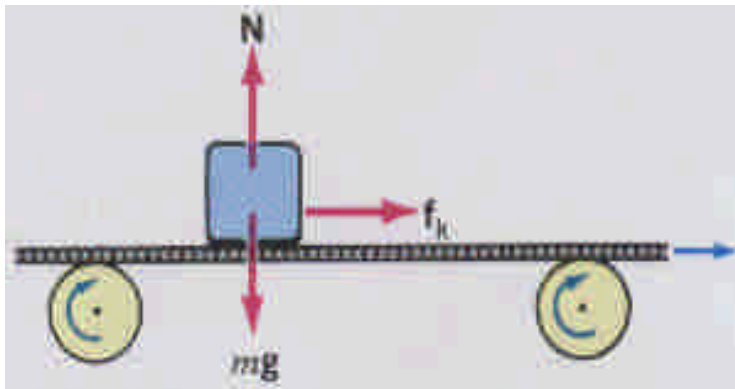
$$W_{sp} = -\frac{1}{2} kd^2$$

$$W_N = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} W_g = mgd \sin \theta \\ W_f = -\mu_k (mg \cos \theta) d \\ W_{sp} = -\frac{1}{2} kd^2 \\ W_N = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} W_{net} = W_g + W_f + \\ \quad W_{sp} + W_N \\ \quad = \Delta K \end{array}$$

$$\Rightarrow mgd \sin \theta - \mu_k (mg \cos \theta) d - \frac{1}{2} kd^2 = \frac{1}{2} mv^2$$

### Example 7.5      $W_f = ?$ , $d(\text{crate}) = ?$ , $d(\text{belt}) = ?$



$$W_{net} = W_f = \Delta K = \frac{1}{2} mv^2 - 0 = \frac{1}{2} mv^2$$

$$W_f = \mu_k mgd = \frac{1}{2} mv^2 \Rightarrow d(\text{crate}) = \frac{v^2}{2\mu_k g}$$

$$d(\text{crate}) = \frac{1}{2} at^2 = \frac{1}{2} vt \Rightarrow d(\text{belt}) = vt = 2d(\text{crate})$$



## ✦ 功率 (Power)

- 平均功率(average power)  $\Rightarrow P_{av} = \frac{\Delta W}{\Delta t}$

- 瞬間功率(instantaneous power)  $\Rightarrow P = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{dW}{dt}$

(若定力作功  $\Rightarrow dW = \vec{F} \cdot d\vec{s}$ )  $= \vec{F} \cdot \frac{d\vec{s}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}$

- 功率單位(unit)  $\Rightarrow 1 \text{ W(瓦特)} = 1 \text{ J/s}$  ;  $1 \text{ hp(馬力)} = 746 \text{ W}$

( Note: W  $\Rightarrow$  Watt ; hp  $\Rightarrow$  horsepower )

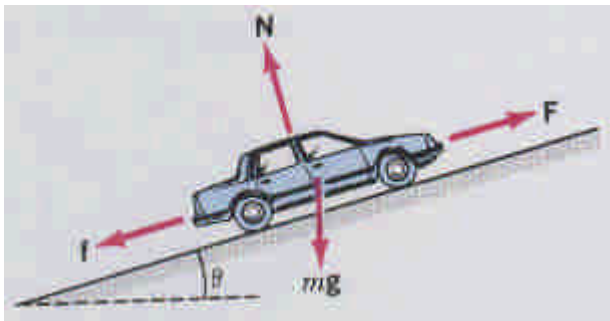
- 功率廣義的定義  $\Rightarrow P = \frac{dE}{dt}$  (其中E為任何形式能量)

Example 7.6 : A pump raises water from a well of depth 20m at a rate 10 kg/s and discharges it at 6 m/s. What is the power of the motor?

$$W_{net} = \Delta K \Rightarrow W_p + W_g = \frac{1}{2}mv^2 - 0 \Rightarrow W_p - mgh = \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow W_p = mgh + \frac{1}{2}mv^2$$

$$\Rightarrow P = \frac{dW_p}{dt} = \frac{dm}{dt} \left( gh + \frac{v^2}{2} \right) = (10 \text{ kg/s}) (200 \text{ m}^2/\text{s}^2 + 18 \text{ m}^2/\text{s}^2) = 2180 \text{ W}$$

Example 7.7 : A  $10^3$ -kg requires 12 hp to cruise at a steady 80 km/h on a level road. What would be the power required to move up to a  $10^\circ$  incline at the same speed?



$$v = 80 \text{ km/h} = 22.2 \text{ m/s}, P = 12 \text{ hp} = 8.95 \times 10^3 \text{ W}$$

等速表合力為零，  
即  $F = f$  (水平分量)

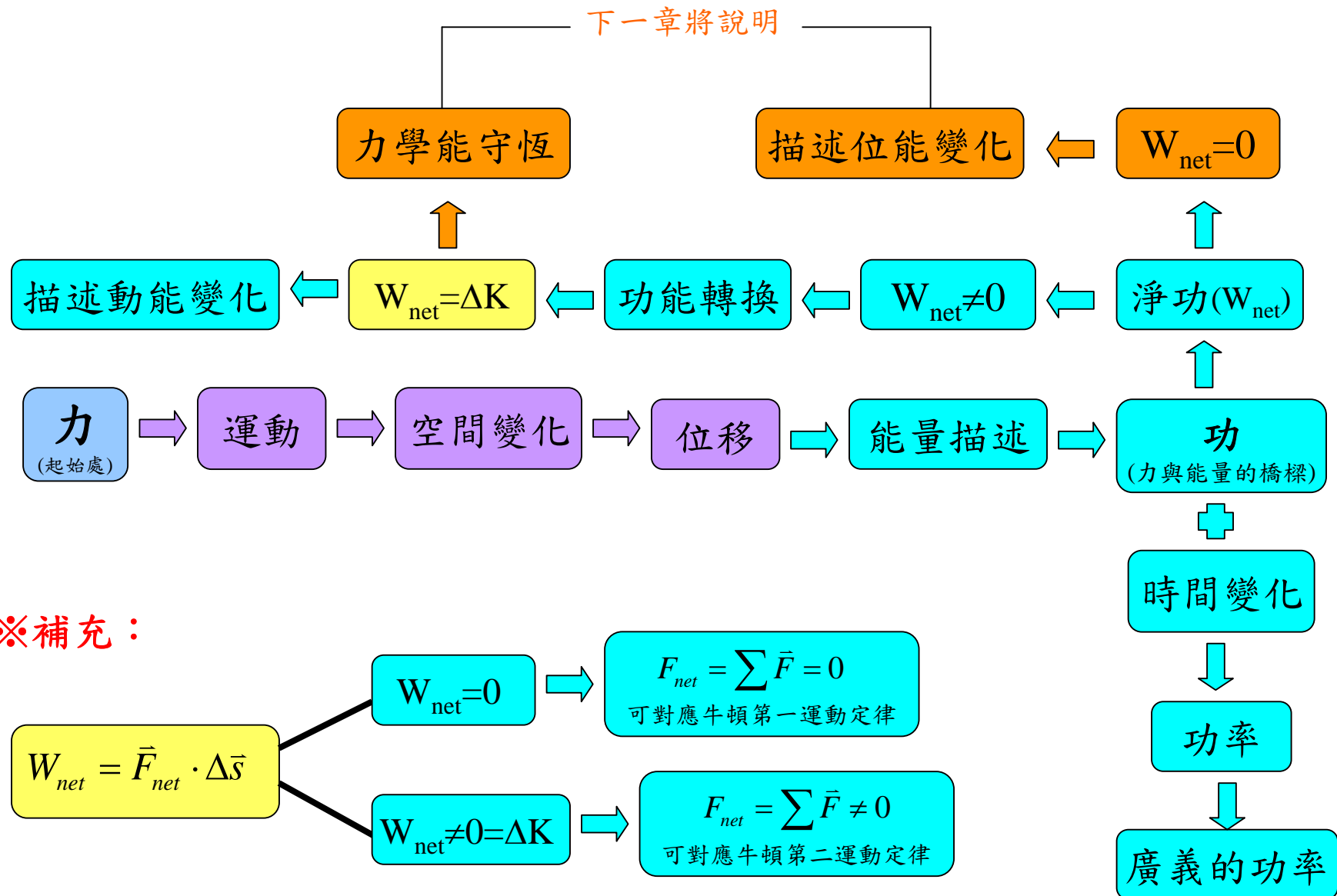
$$P(\text{功率}) = Fv = fv$$

$$\Rightarrow f = \frac{P}{v} = \frac{8.95 \times 10^3 \text{ W}}{22.2 \text{ m/s}} = 403 \text{ N}$$

同理，沿斜面分量

$$\Rightarrow P(\text{incline}) = (f + mg \sin 10^\circ) v = 46.6 \times 10^3 \text{ (W)} = 62.7 \text{ (hp)}$$

# 本章重要觀念發展脈絡彙整



## 習題

- 教科書習題 (p.138~p.143)

Exercise: 5, 6, 7, 13, 25, 27, 29, 31, 39, 41, 45, 53, 59, 65, 71, 75

Problem: 5, 7, 9, 11

Exercise 6 Ans. (a) 7.06J; (b) -7.06J; (c) 0

- 基本觀念習題：

1.(a)請說明功的物理定義？

(b)何謂正功與負功？並進一步說明其物理意義。

2.請分別考慮定力(the constant force)與變力(the variable force)作功情形進行功-能定理 (work-energy theorem) 之推導，即

$$W = \Delta K = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2$$

其中 $W$ 表功， $\Delta K$ 表動能變化量， $m$ 表質量， $v_i$ 表初速， $v_f$ 表末速

## 習 題

●延伸思考習題：(※不列入考試，僅列入加分題)

- 1.請問如何得到平移運動的動能式(即  $K = \frac{1}{2}mv^2$  )？請申述之。
- 2.請舉例說明哪些能量不能完全轉換為功？

## ✦ 位能(Potential Energy)

- 擺錘爬升高度不受釘子阻斷影響(即不受運動路徑影響)且  $v^2 \propto h$ 。
- 位能與位置有關，它是由兩個或更多個交互作用的粒子因彼此相對位置而具有的能量，換言之，若位置發生變化，則必須有外力作功(外功)。
- 位能與外功(external work)

$$W_{EXT} = +\Delta U = U_f - U_i$$

若設定零位面(即  $U=0$ )，則可定義位能。

(重力位能  $\xrightarrow{U=0}$  任意；彈力位能  $\xrightarrow{U=0}$  原長)

伽利略單擺實驗

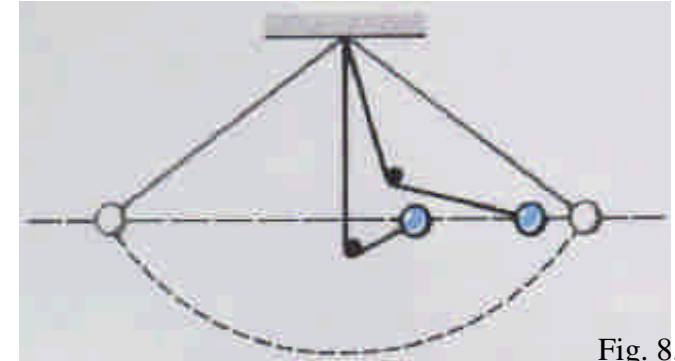


Fig. 8.1

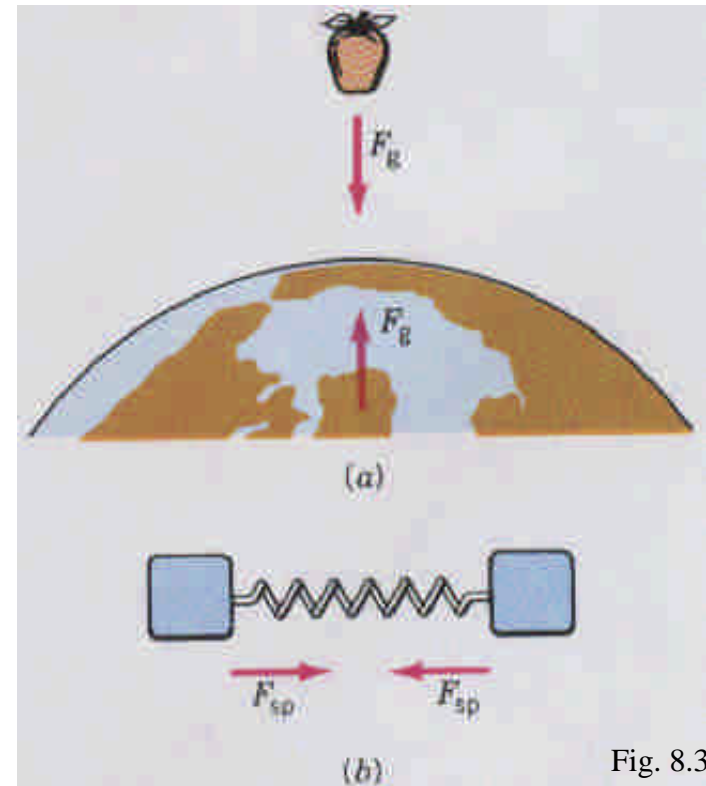


Fig. 8.3

➤ 某一位置的位能乃是將質點從零位面 (即 $U=0$ ) 的位置以等速移至該位置時所需的外功(即外力所作的功)。

上述位能觀念有兩項缺點：

1. 無法確定作外功的外力。

2. 等速率移動質點，則質點上的作用力必須保持平衡，即可能有一內力與外力作用，但什麼是內力？

## ✦ 保守力 (Conservative Force)

● 保守力作功與路徑無關，即： $W_{A \rightarrow B}^{(1)} = W_{A \rightarrow B}^{(2)}$ 。

如：保守力 $\Rightarrow$ 重力、彈力；非保守力 $\Rightarrow$ 摩擦力

● 保守力為位置的函數，而與速率或時間無關。

如：非保守力 $\Rightarrow$ 磁力、流體阻尼力

● 保守力沿任意封閉路徑所作的功為零，即： $W_{A \rightarrow B}^{(1)} + W_{B \rightarrow A}^{(2)} = 0$

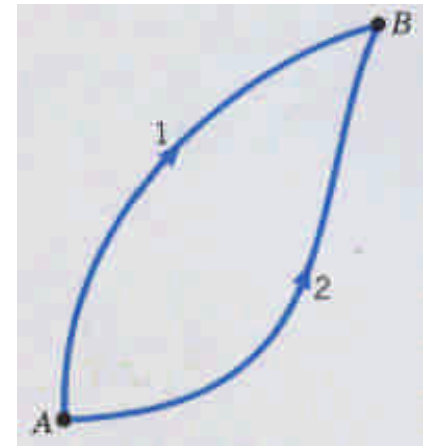


Fig.8.5

Example :

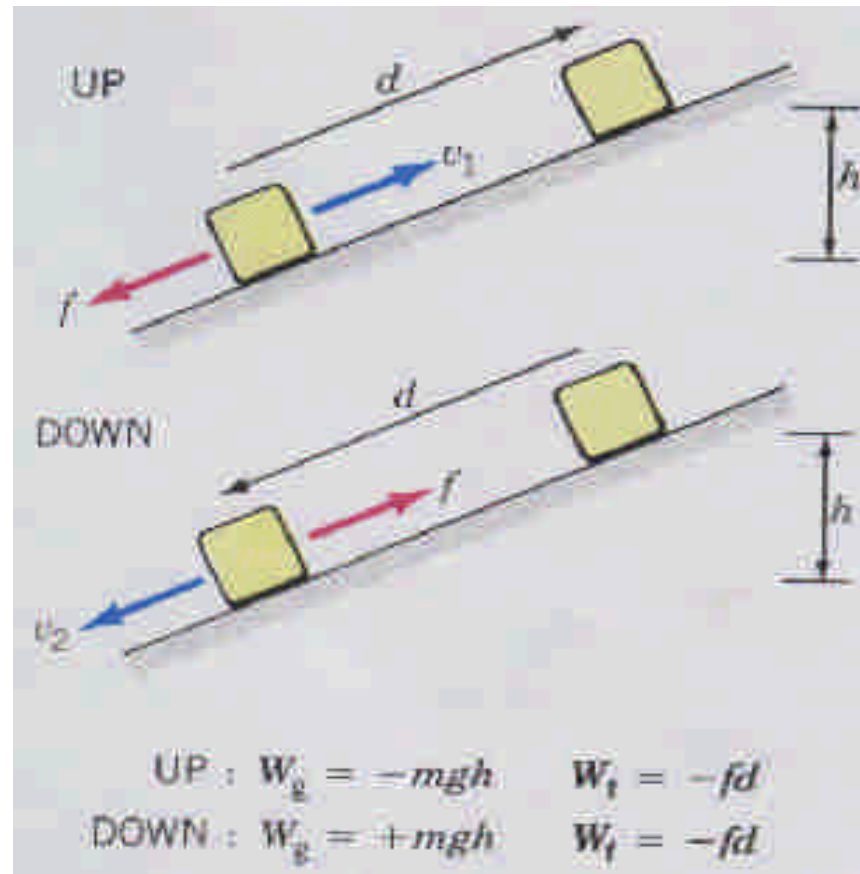


Fig. 8.4

For the force of gravity  $\Rightarrow W_{up} + W_{down} = 0$

For the force of friction  $\Rightarrow W_{up} + W_{down} = -2fd$



## ✦ 位能與保守力 (potential energy and conservative force)

- $W_{net} = \Delta k = 0$  (考慮質點等速率改變位置)

$$\because W_{net} = W_{ext} + W_c = 0$$

$$\therefore W_c = -W_{ext} = -\Delta U = -(U_f - U_i)$$

- 保守力作正功將導致位能減少，意味可促使任何系統內的位能降至最低值(即趨於自然界的穩定態)。
- 考慮可變的保守力大小與方向，可利用無限小的微積分概念表示：

$$dU = -dW_c = -\vec{F}_c \cdot d\vec{s} \Rightarrow \Delta U = U_B - U_A = -\int_A^B \vec{F}_c \cdot d\vec{s}$$

- 保守力可具有相關的純量位能函數(scalar potential energy)，而非保守力則否。

## ✦ 位能函數(potential energy functions)

- 位能是位置的函數。

➤ 重力位能 (gravitational potential energy)

$$W_g = -\Delta U_g = -(U_f - U_i) = -mg\Delta y = -mg(y_f - y_i)$$

$$\Rightarrow U_f - U_i = mg(y_f - y_i) \xrightarrow{\text{Let } U_i=0 \text{ at } y_i=0} U_f = mgy_f$$

$$\Rightarrow U_g = mgy \quad (\text{Note: 僅指地表附近})$$

➤ 彈力位能 (spring potential energy)

$$W_{sp} = -\Delta U_{sp} = -(U_f - U_i) = -\frac{1}{2}k(x_f^2 - x_i^2)$$

$$\Rightarrow U_f - U_i = \frac{1}{2}k(x_f^2 - x_i^2)$$

$$\xrightarrow{\text{Let } U_i=0 \text{ at } x_i=0 \text{ (即彈簧原長處)}} U_f = \frac{1}{2}kx_f^2 \Rightarrow U_{sp} = \frac{1}{2}kx^2 \geq 0$$

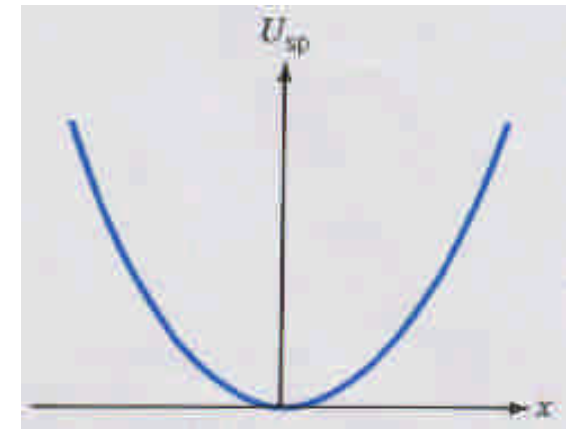
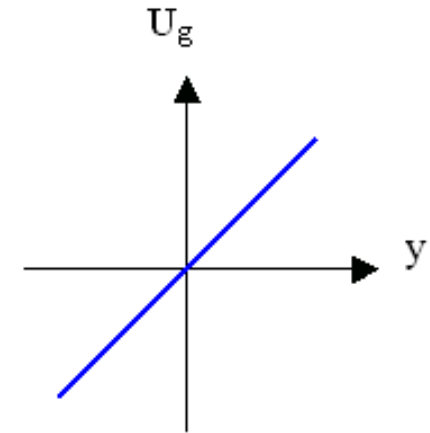


Fig. 8.6

## ✦ 保守力與位能函數(Conservative force and potential energy function)

- 保守力可由純量位能函數導出。

$$dU = -\vec{F}_c \cdot d\vec{s} \xrightarrow{\text{考慮}\vec{F}_c\text{沿位移}ds\text{方向的分量爲}F_s} dU = -F_s ds \Rightarrow F_s = -\frac{dU}{ds}$$

$$dU = -(F_x \hat{i} + F_y \hat{j} + F_z \hat{k}) \cdot (dx \hat{i} + dy \hat{j} + dz \hat{k}) \Rightarrow \vec{F}_c = -\left(\frac{\partial U}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial U}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial U}{\partial z} \hat{k}\right)$$

$$\xrightarrow[\text{直角座標}]{\text{考慮一維分量}} F_x = -\frac{dU}{dx}$$

$$\xrightarrow[\text{極座標}]{\text{考慮徑向分量}} F_r = -\frac{dU}{dr}$$

Example :

$$U_g = mgy \Rightarrow F_y = -\frac{dU_g}{dy} = -mg$$

$$U_{sp} = \frac{1}{2}kx^2 \Rightarrow F_x = -\frac{dU_{sp}}{dx} = -kx$$

Example :

$$(r < r_0): F_r > 0 \Rightarrow$$

受斥力作用， $r$ 愈小，  
斥力愈大

$$(r = r_0): F_r = 0 \Rightarrow$$

穩定平衡點  
(stable equilibrium)

$$(r_0 < r < r_2): F_r < 0 \Rightarrow$$

受引力作用，  
 $r_1$ 處引力最大

$$(r = r_2): F_r = 0 \Rightarrow$$

不穩定平衡點  
(unstable equilibrium)

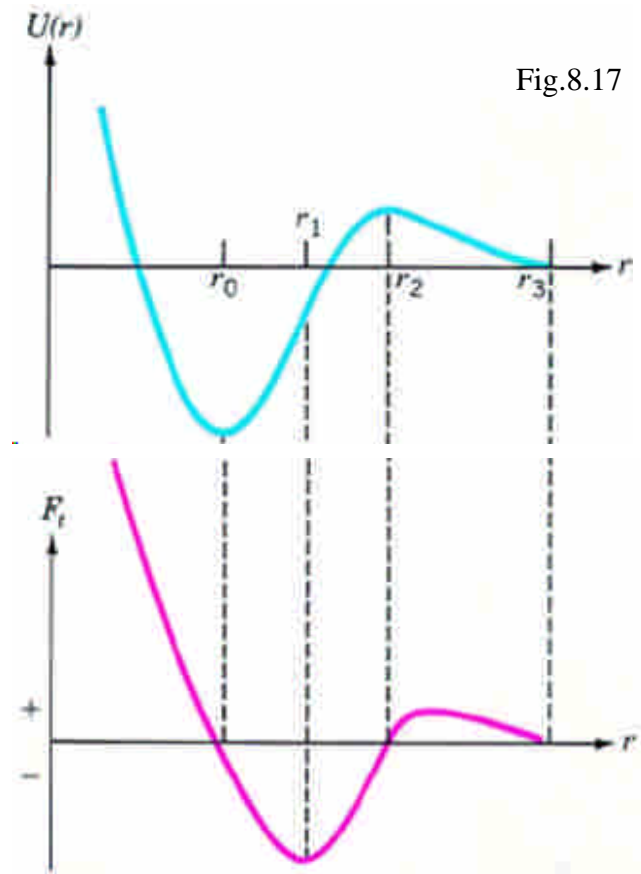
$$(r_3 > r > r_2): F_r > 0 \Rightarrow$$

弱斥力作用

$$(r \geq r_3): F_r = 0 \Rightarrow$$

隨遇平衡區(neutral  
equilibrium)

(右圖未標示)



➤穩定平衡：質點稍偏離穩定點，仍會回復，如：不倒翁。  
(stable equilibrium)

➤不穩定平衡：質點稍偏離穩定點，無法回復且會一直偏離，如：雞蛋倒立。  
(unstable equilibrium)

➤隨遇平衡：質點稍偏離穩定點，即會停留在新的穩定點。  
(neutral equilibrium)

## ✦ 力學能守恆(Conservation of Mechanical Energy) (或機械能守恆)

- 力學能( $E$ )  $\Rightarrow E = K + U$ ，其中 $K$ 表動能， $U$ 表位能。
- $E_f = E_i \Rightarrow K_f + U_f = K_i + U_i$  或  $\Delta E = \Delta K + \Delta U = 0$ 
  - 證明 $\Rightarrow$  若僅考慮保守力作功，則： $W_{net} = W_c$  ( $\because W_{ext} = 0$ )  
又  $W_{net} = \Delta K$ ，故  $W_c = \Delta K = -\Delta U$   
 $\Rightarrow \Delta K + \Delta U = 0$  或  $\Delta E = 0$
- 適用條件：
  1. 必須在保守力的條件下。
  2. 能量的量測必須在同一個慣性座標系中。

Example :

重力  $\Rightarrow E = \frac{1}{2}mv^2 + mgy = \frac{1}{2}mv_{\max}^2 = mgH$

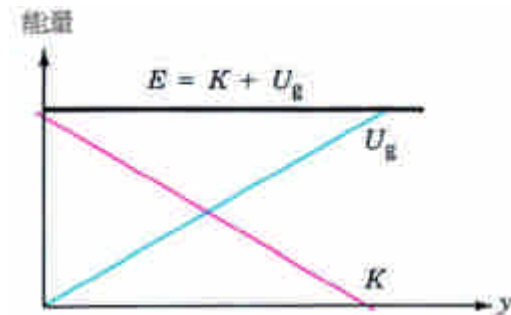
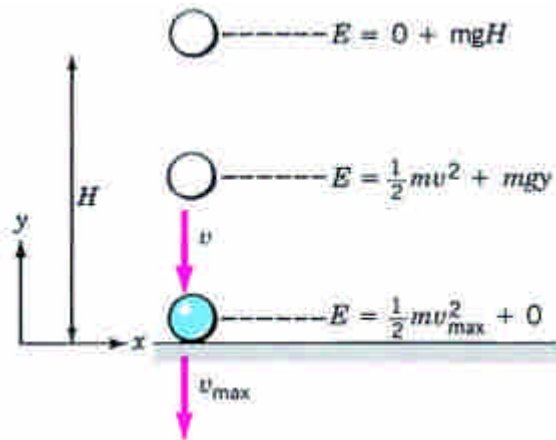


Fig.8.7

彈力  $\Rightarrow E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}mv_{\max}^2 = \frac{1}{2}kA^2$

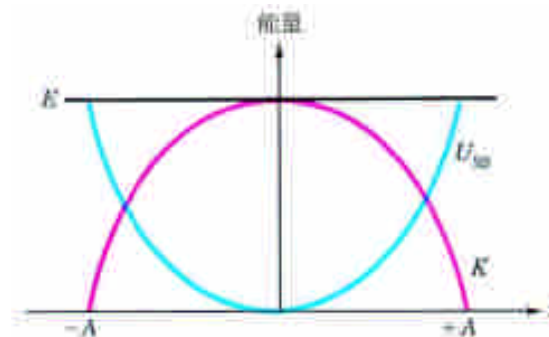
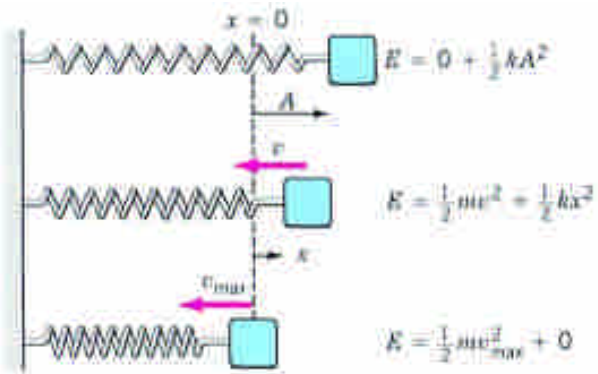


Fig.8.9

- 力學能守恆求解力學問題指引：

1. 在力學系統中，可能不只一個質點具有動能，而位能類型也可能不只一種。  $E = K + U_g + U_{sp}$

2. 力學守恆定律式有兩種類型：

- (a)  $K_f + U_f = K_i + U_i \Leftrightarrow$  必須設定零位面( $U=0$ )。

- (b)  $\Delta K + \Delta U = 0 \Leftrightarrow$  不必設零位面，但須小心正負號。

- 處理力學問題的優點(advantages)：

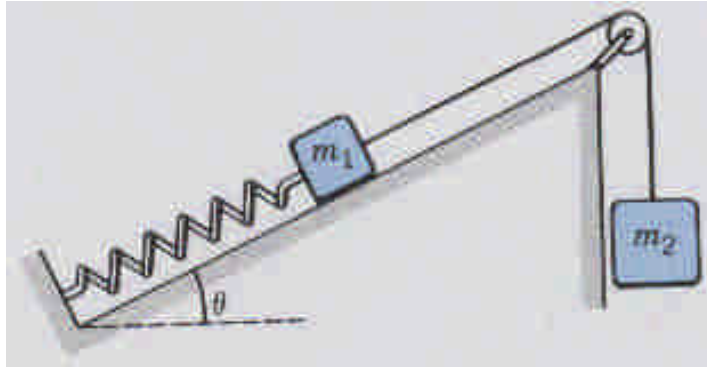
1. 不需考慮力的向量，因功與能為純量。

2. 只需考慮系統最初與最終的狀態。

3. 當無法量測作用力時(即牛頓第二定律不適用)，能量的觀念仍可適用。



Example 8.6 : (a) the maximum extension of the spring ? (b) the speed of  $m_2$  when the extension is 0.5 m?



$$\Delta K + \Delta U_g + \Delta U_{sp} = 0$$

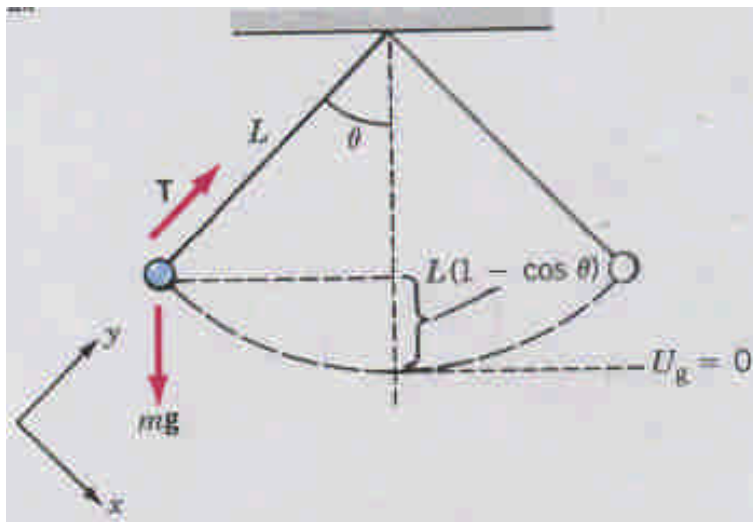
$$0 + (-m_2 g D + m_1 g D \sin \theta) + \frac{1}{2} k D^2 = 0$$

$$D = \frac{2g}{k} (m_2 - m_1 \sin \theta) = 0.98 \text{ m} \quad \text{Ans(a)}$$

$$\frac{1}{2} (m_1 + m_2) v^2 + (-m_2 g d + m_1 g d \sin \theta) + \frac{1}{2} k d^2 = 0 \Rightarrow v = 1.39 (\text{m/s})$$

Ans(b)

**Example 8.7 :** The bob of a simple pendulum of length  $L=2$  m has a mass  $m = 2$  kg and a speed  $v=1.2$  m/s when the string is at  $35^\circ$  to the vertical. Find the tension in the string at: (a) the lowest point in its swing; (b) the highest point.



$$\vec{T} + m\vec{g} = m\vec{a} \Rightarrow \begin{cases} \sum F_x = mg \sin \theta = ma_t \\ \sum F_y = T - mg \cos \theta = \frac{mv^2}{L} \end{cases}$$

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + mgL(1 - \cos \theta) = 8.5 \quad (\text{where } \theta = 35^\circ)$$

$$\text{At the lowest point } \theta = 0 \Rightarrow E = \frac{1}{2}mv_{\max}^2 + 0 = 8.5$$

$$\Rightarrow T - mg = \frac{mv_{\max}^2}{L} \Rightarrow T = mg + \frac{mv_{\max}^2}{L} = 28.1 \text{ N}$$

Ans(a)

$$\text{At the highest point } v = 0 \Rightarrow E = 0 + mgL(1 - \cos \theta_{\max}) = 8.5 \text{ J} \Rightarrow \cos \theta_{\max} = 0.783$$

$$\Rightarrow T = mg \cos \theta_{\max} = 15.3 \text{ N} \quad (\because v = 0) \quad \text{Ans(b)}$$

## ✦ 能量圖(energy diagram)

### —考慮位能阱(potential well)

- $E < 0$ ，處於束縛態(bound state)，  
如： $E_1, E_2$ 。
- $E > 0$ ，處於非束縛(unbound)，  
如： $E_3$ 。 ( $r \rightarrow \infty, U = 0$ )
- 束縛能(binding energy)—使束縛態質點成為不受束縛的質點所需的最小能量。

例如：原子中的電子最低能態束縛能，就是游離能(ionization energy)；對分子而言，就是解離能(dissociation energy)。

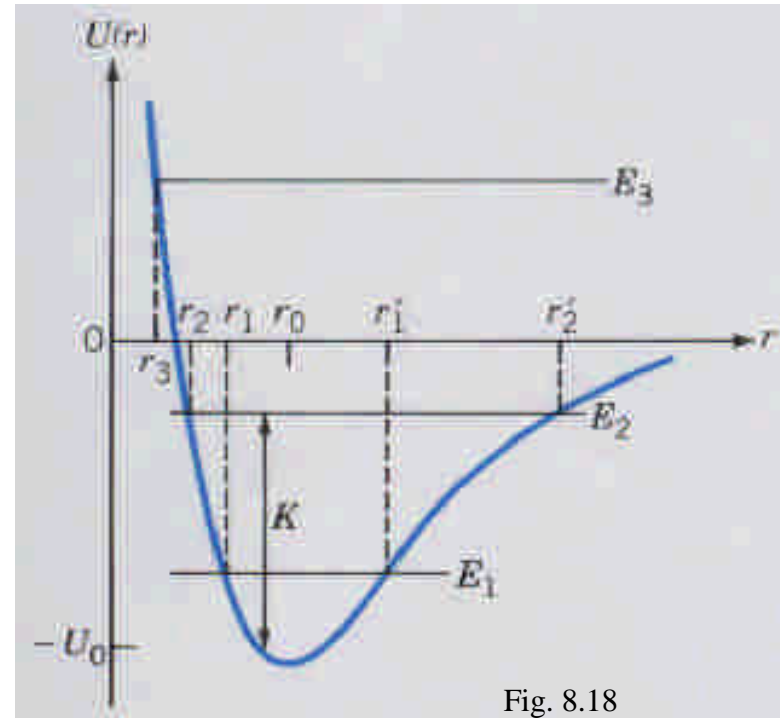


Fig. 8.18

## ✦ 力學能與非保守力(nonconservative force)

- 力學能的變化量(  $\Delta E \neq 0$  )即為非保守力作的功。

➤ 證明：

$$W_{net} = W_c + W_{nc} = \Delta K \quad , \text{ 其中 } W_c = -\Delta U$$

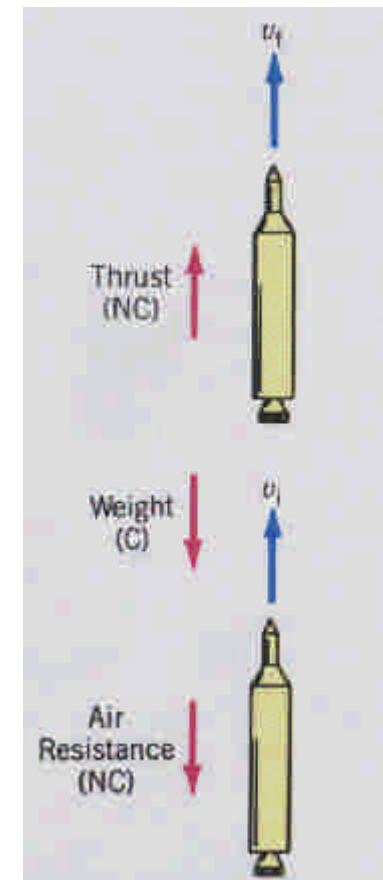
$$\Rightarrow -\Delta U + W_{nc} = \Delta K$$

$$\Rightarrow \underline{W_{nc} = \Delta K + \Delta U = \Delta E}$$

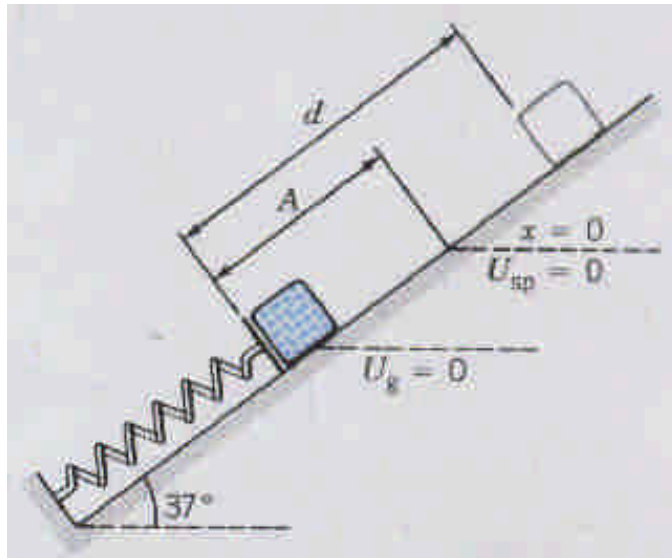
➤ 例如：火箭垂直向上發射的各種作用力

包括：保守力 $\Rightarrow$ 重力(weight)

非保守力 $\Rightarrow$ 空氣阻力(air resistance)及  
引擎推進力(thrust)。



Example 8.9 : Find (a) the force of friction; (b) the speed of the block just as it leaves the spring.



$$E = K + U_g + U_{sp} \Rightarrow \begin{cases} E_i = \frac{1}{2} KA^2 \\ E_f = mgd \sin \theta \end{cases}$$

$$\Rightarrow E_f - E_i = -fd$$

$$\Rightarrow mgd \sin \theta - \frac{1}{2} KA^2 = -fd$$

$$\Rightarrow f = 0.82N \quad \text{Ans (a)}$$

$$\begin{cases} E_i = \frac{1}{2} KA^2 \\ E_f = \frac{1}{2} mv^2 + mgA \sin \theta \end{cases}$$

$$\Rightarrow E_f - E_i = -fA \Rightarrow v = 2.45 \text{ (m/s)} \quad \text{Ans(b)}$$

## ✦ 重力位能 (gravitational potential energy)

- $U_g = mgh$  適用於地表附近 (因  $h \ll R_e$ ，重力場  $g \approx \frac{GM_e}{R_e^2}$ ，重力 ( $mg$ ) 可視為定值)，實際上重力場 ( $g$ ) 隨距離改變，重力應為一變力。

- 萬有引力定律： $\vec{F}_r = -\frac{GmM}{r^2} \hat{r}$

$$W_c = W_g = \int_{r_A}^{r_B} \vec{F}_r \cdot d\vec{r} = -\int_{r_A}^{r_B} F_r dr \quad , \text{ 其中 } r_B > r_A \quad \circ$$

$$\Delta U = U_B - U_A = -W_g = \int_{r_A}^{r_B} F_r dr = \int_{r_A}^{r_B} \left( \frac{GmM}{r^2} \right) dr = \frac{GmM}{r_A} - \frac{GmM}{r_B}$$

$$\text{Assume } U_B = 0 \text{ at } r_B = \infty \Rightarrow U_A = -\frac{GmM}{r_A} \Rightarrow \underline{U(r) = -\frac{GmM}{r}}$$

Example 8.10 : What is the connection  $U(r) = -\frac{GmM}{r}$  between and the equation  $U_g = mgh$  ?

$$\begin{cases} U(R_E) = -\frac{GmM_E}{R_E} \\ U(R_E + h) = -\frac{GmM_E}{R_E + h} \end{cases} \Rightarrow \Delta U = U(R_E + h) - U(R_E) = \frac{GmM_E h}{R_E(R_E + h)}$$

$$\Rightarrow \Delta U \approx \frac{GmM_E h}{R_E^2} = mgh \quad (\because h \ll R_E \Rightarrow (R_E + h) \approx R_E)$$

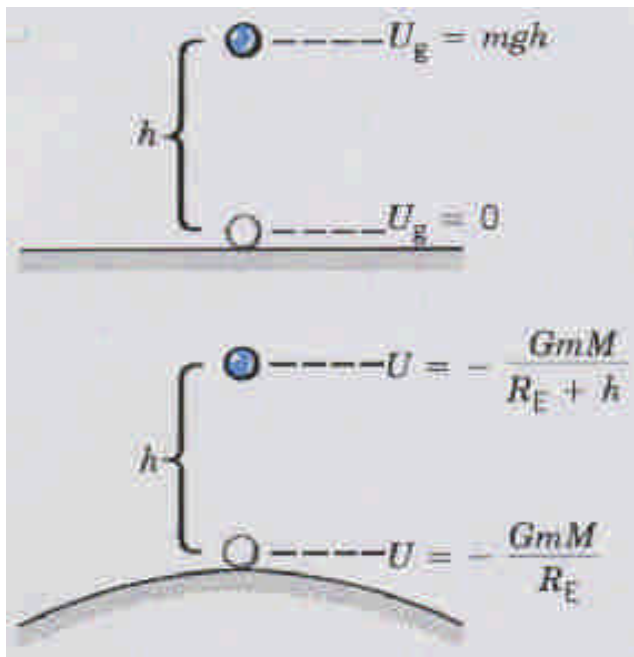


Fig. 8.19

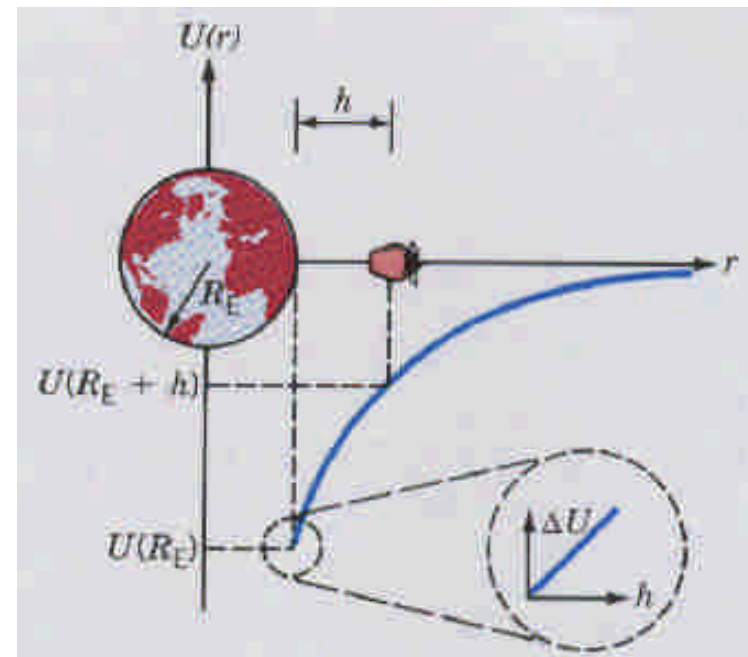


Fig. 8.20

- 衛星軌道運動的力學能  $E < 0$ ，衛星處於束縛態。

證明  $\Rightarrow$  假設衛星軌道運動為圓周運動，向心力 = 重力

$$\Rightarrow \frac{mv_{\text{orb}}^2}{r} = \frac{GmM_E}{r^2} \Rightarrow \frac{1}{2}mv_{\text{orb}}^2 = \frac{GmM_E}{2r}$$

$$\therefore E = K + U = \frac{1}{2}mv_{\text{orb}}^2 - \frac{GmM_E}{r} = -\frac{GmM_E}{2r} < 0$$

- 地表脫離速率 (escape speed) —  $v_{\text{esc}} = \sqrt{2GM_E / R_E}$

➤ 質點脫離束縛的力學能  $E \geq 0$ 。

➤ 火箭脫離地球至無窮遠時， $v \rightarrow 0$  and  $U \rightarrow 0$  at  $r \rightarrow \infty$

$$\left. \begin{aligned} E_f &= K_f + U_f = 0 \quad \text{at } r \rightarrow \infty \\ E_i &= \frac{1}{2}mv_{\text{esc}}^2 - \frac{GmM_E}{R_E} \quad \text{at } r = R_E \end{aligned} \right\} \Rightarrow E_f = E_i \Rightarrow v_{\text{esc}} = \sqrt{\frac{2GM_E}{R_E}}$$



Example 8.12 : A rocket is fired vertically with half the escape speed. What is its maximum altitude in terms of the radius of the earth  $R_E$ ? Ignore the earth's rotation.

$$\left. \begin{aligned} E_i &= \frac{1}{2} m \left( \frac{v_{\text{esc}}}{2} \right)^2 - \frac{GmM_E}{R_E} = \frac{GmM_E}{4R_E} - \frac{GmM_E}{R_E} = -\frac{3GmM_E}{4R_E} \\ E_f &= 0 - \frac{GmM}{R_E + h} \end{aligned} \right\} \Rightarrow E_i = E_f \Rightarrow h = \frac{R_E}{3}$$

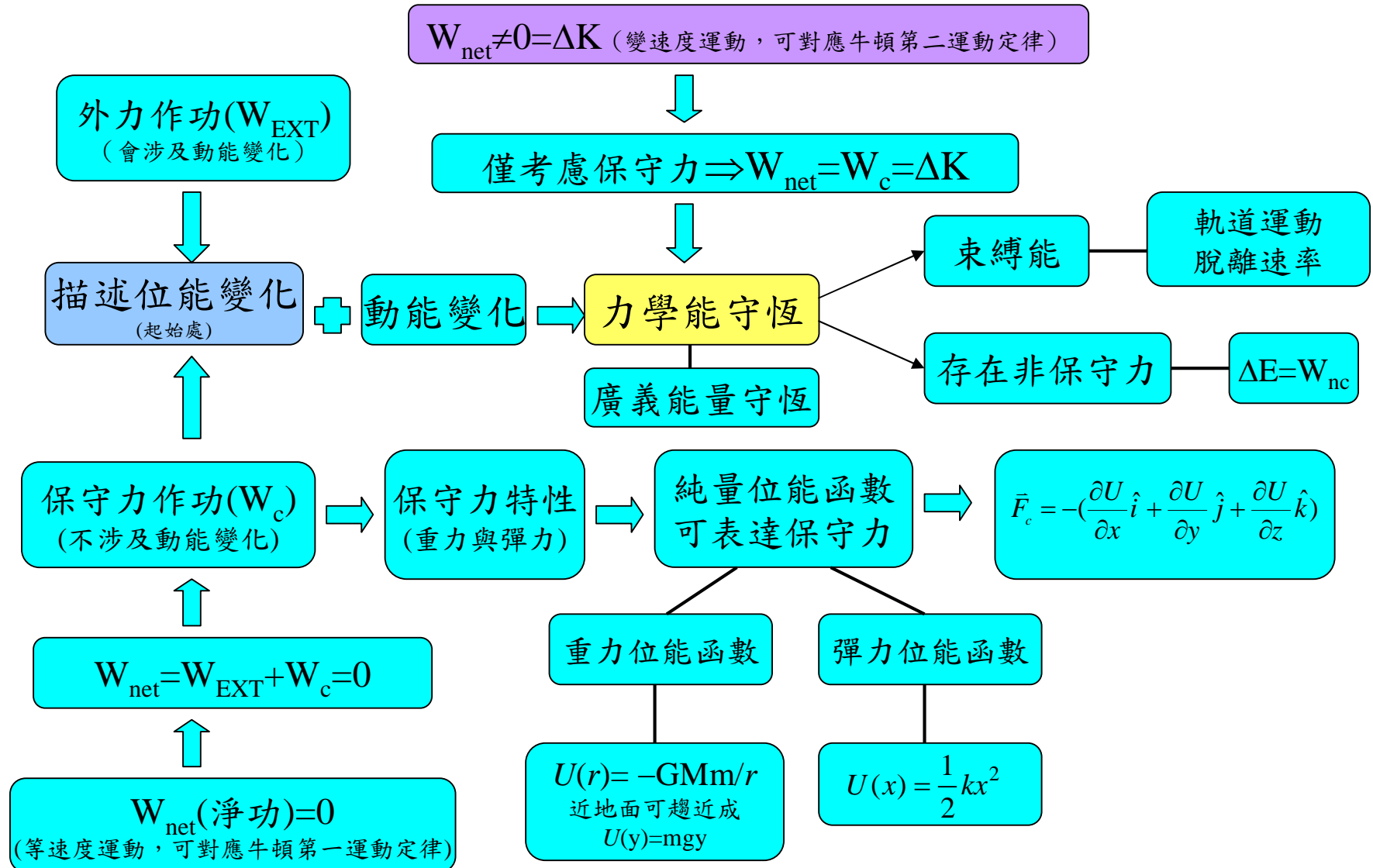
## ✦ 廣義的能量守恆 (Generalized conservation of energy)

— 能量可轉換成各種形式，但無法創造(create)或毀滅(destroy)。

範例：

- 系統的內能可因做功或熱傳遞而改變，此為熱力學第一定律。
- 能量轉移未作巨觀功的情形，如：太陽能電池—光能→電能 或 燈泡—熱能→光能。

# 本章重要觀念發展脈絡彙整



## 習題

- 教科書習題(p.164~p.170)

Exercise: 1,3,11,13,15,19,21,31,33,39,47,57,61,63,73,75

Problem: 1,5,11

- 基本觀念習題：

- 1.利用”外力作功”定義位能變化會有何缺失？
- 2.保守力的特性有哪些？
- 3.何謂穩定平衡、不穩定平衡與隨遇平衡？
- 4.請推導力學能守恆(Conservation of mechanical energy)原理(即  $\Delta E = \Delta K + \Delta U = 0$ )，並說明力學能守恆必須在什麼條件下才成立。
- 5.若考慮重力為一變力，則請推導質量 $m$ 物體的重力位能函數為

$$U(r) = -\frac{GmM_E}{r}$$

其中假設零位面在無窮遠、 $G$ 重力常數、 $M_E$ 為地球質量、 $r$ 為距地心的距離。

## 習題

6.請證明繞行地球軌道的衛星被地球束縛。(提示：證明衛星的總力學能 $E=K+U<0$ )

7.請推導地表的最小脫離速率為  $v_{esc} = \sqrt{\frac{2GM_E}{R_E}}$

其中 $M_E$ 表地球質量， $R_E$ 表地球半徑， $G$ 為重力。

●延伸思考習題：(※不列入考試，僅列入加分題)

1.請問力學能的特性為何？而力學能守恆與廣義能量守恆有何異同？