Modele liniowe. Lista 1. Teoria.

Liudmyla Zaitseva

Niech
$X = (X_1, \ldots, X_p)^T$ – wektor losowy,

$\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_p)^T = (\mathbf{E}X_1, \ldots, \mathbf{E}X_p)^T$ – wektor wartości oczekiwanych,

$\Sigma(i,j) = \operatorname{cov}(X_i, X_j) = \mathbf{E}X_iX_j - \mathbf{E}X_i\mathbf{E}X_j$ – kowariancja zmiennych losowych X_i i X_j.

Własności kowariancji:

1. $\text{cov}(X_i, X_j) = cov(X_j, X_i)$
   $(\Sigma(i,j) = \Sigma(j,i))$;
2. $\text{cov}(\alpha X_i + \beta X_j, X_k) = \alpha\text{cov}(X_i, X_k) + \beta\text{cov}(X_j, X_k)$;
3. $\Sigma(i,i) = \text{cov}(X_i, X_i) = \mathbf{E}X_i^2 - (\mathbf{E}X_i)^2 = \text{var}X_i \geq 0.$

Macierz

$$\Sigma = (\Sigma(i,j))_{i,j=1}^{p}$$

nazywa się macierzą kowariancji.

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \mathrm{var} X_1 & \Sigma(1,2) & \dots & \Sigma(1,p) \\ \Sigma(1,2) & \mathrm{var} X_2 & \dots & \Sigma(2,p) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Sigma(1,p) & \Sigma(2,p) & \dots & \mathrm{var} X_p \end{pmatrix}$$

Własności macierzy kowariancji:

1. Macierz kowariancji jest symetryczna.
2. Wartości na głównej przekątnej są nieujemne.
3. Macierz kowariancji jest diagonalna $\Leftrightarrow X_1, \ldots, X_p$ są nieskoreliowane.
   Uwaga Jeśli X ma rozkład normalny wielowymiarowy, to macierz kowariancji jest diagonalna $\Leftrightarrow X_1, \ldots, X_p$ są niezależne.
4. Macierz kowariancji jest określona nieujemnie.

Przekształcenie liniowe wektora losowego:

Niech
$X = (X_1, \ldots, X_p)^T$ – wektor losowy,
μ^X – wektor wartości oczekiwanych, $\Sigma^X = \Sigma^X_{p\times p}$ – macierz kowariancji wektora X.
Dla macierzy $A = A_{k\times p}$ i wektora $B \in \mathbb{R}^k$ definiujemy liniową przekształcenie wektora losowego X:

$$Y = AX + B, \qquad Y = (Y_1, \ldots, Y_k)^T .$$

Wtedy

$$\mu^Y = A\mu^X + B, \qquad \Sigma^Y = A\Sigma^X A^T.$$

Wektor losowy $X = (X_1, \ldots, X_p)^T$ ma wielowymiarowy rozkład normalny $X \sim \mathcal{N}(\mu, \Sigma)$, jeśli X ma gęstość daną wzorem

$$f(x) = \det\left(2\pi\Sigma\right)^{-1/2} \exp\left\{-\frac{1}{2}(x-\mu)^T\Sigma^{-1}(x-\mu)\right\}$$

Wielowymiarowy rozkład normalny standardowy:

Niech zmienne losowe $X_1, \ldots, X_p$ są niezależne, o tym samym rozkładzie $\mathcal{N}(0, 1)$. Wtedy

$$\mu = (0, \ldots, 0), \qquad \Sigma = I,$$

$$(x - \mu)^T \Sigma^{-1} (x - \mu) = x^T x = x_1^2 + \ldots + x_p^2.$$

Wektor losowy $X = (X_1, \ldots, X_p)^T$ ma wielowymiarowy rozkład normalny standardowy $X \sim \mathcal{N}(0, I)$, jeśli X ma gęstość daną wzorem

$$f(x) = (2\pi)^{-p/2} \exp\left\{ -\frac{1}{2} \left(x_1^2 + \ldots + x_p^2 \right) \right\}.$$

Przekształcenie liniowe wektora losowego o wielowymiarowym rozkładzie normalnym:

Niech $X = (X_1, \ldots, X_p)^T \sim \mathcal{N}(\mu, \Sigma)$ – wektor losowy o wielowymiarowym rozkładzie normalnym.
Dla macierzy $A = A_{k \times p}$ i wektora $B \in \mathbb{R}^k$ definiujemy liniową przekształcenie wektora losowego X:

$$Y = AX + B, \qquad Y = (Y_1, \ldots, Y_k)^T.$$

Wtedy

$$Y \sim \mathcal{N}(A\mu + B, A\Sigma A^T).$$

Jak wygenerować wektor losowy o wielowymiarowym rozkładzie normalnym:

Jak wygenerować wektor losowy o wielowymiarowym rozkładzie normalnym $Y = (Y_1, \ldots, Y_p)^T \sim \mathcal{N}(\mu, \Sigma)$?

Krok 1 Generujemy wektor losowy $X = (X_1, \ldots, X_p)^T$ o wielowymiarowym rozkładzie normalnym standardowym $X \sim \mathcal{N}(0, I)$ przy pomocy, np, polecenia $rnorm(p)$.

Krok 2 Szukamy Y jako przekształcenie liniowe wektora X:

$$Y = AX + B.$$

Wtedy $Y \sim \mathcal{N}(B, AA^T)$.
Wybieramy macierz $A = A_{p\times p}$ i wektor $B \in \mathbb{R}^p$ tak, żeby

$$B = \mu, \qquad AA^T = \Sigma.$$

Jak wygenerować wektor losowy o wielowymiarowym rozkładzie normalnym:

Uwaga 1: Macierz A taka, że $AA^T = \Sigma$ nie jest zdefiniowana jednoznacznie.

Uwaga 2: Problem będzie miał jedno rozwiązanie, jeśli dodamy warunek, że A jest macierzą dolno-trójkątną (lub górno-trójkątną).

Uwaga 3: Procedurą rozkładu symetrycznej, dodatnio określonej macierzy Σ na iloczyn postaci $\Sigma = AA^T$, gdzie macierz A jest dolno-trójkątną nazywa się rozkładem Choleskiego.

Rozkład Choleskiego:

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \dots & \sigma_{1p} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \dots & \sigma_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{1p} & \sigma_{2p} & \dots & \sigma_{pp} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{12} & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1p} & a_{2p} & \dots & a_{pp} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{pp} \end{pmatrix}$$

Rozkład Choleskiego:

$$\sigma_{11} = a_{11}^2 \quad \Rightarrow \quad a_{11} = \sqrt{\sigma_{11}},$$

$$\sigma_{12} = a_{12}a_{11} \quad \Rightarrow \quad a_{12} = \frac{\sigma_{12}}{\sqrt{\sigma_{11}}},$$

$$\sigma_{22} = a_{12}^2 + a_{22}^2 \quad \Rightarrow \quad a_{22} = \sqrt{\sigma_{22} - a_{12}^2},$$

$$\ldots$$

$$a_{ii} = \sqrt{\sigma_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} a_{ik}^2},$$

$$a_{ij} = \frac{\sigma_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} a_{jk}a_{ik}}{a_{ii}}.$$

Rozkład Choleskiego:

Uwaga 1: Implementacja algorytmu rozkładu Choleskiego w R: polecenie *chol()*.

Uwaga 2: Polecenie *chol()* zwraca macierz $\tilde{A}$ taką, że $\tilde{A}^T\tilde{A} = \Sigma$, tj zwraca macierz A^T.

Uwaga 3: Wygenerować wektor losowy o wielowymiarowym rozkładzie normalnym $\mathcal{N}(\mu, \Sigma)$ można przy pomocy polecenia
rmvnorm(rozmiar próby, mean $= \mu$*, sigma* $= \Sigma$*)*
z pakietu *library("mvtnorm")*.