Pracownia z Analizy Numerycznej
Sprawozdanie do zadania 12

Katarzyna Stasińska
Prowadzący: Filip Chudy

Wrocław, grudzień 2022

1 Wstęp

Moim celem jest przedstawienie algorytmu, który rozwiązuje układy n równań liniowych dla *macierzy wstęgowych*. Jednym z algorytmów, który poradziłby sobie z takim układem, jest *Metoda eliminacji Gaussa*, jednak nie wykorzystuje ona właściwości *macierzy wstęgowych*, przez co wykonuje pewne kroki niepotrzebnie. Algorytm oparty na *Metodzie LU*, zdecydowanie lepiej poradzi sobie z tym zadaniem.

2 O *Metodzie LU*

Metoda ta polega na rozłożeniu macierzy na dwie macierze trójkątne, macierz L – dolnotrójkątną (*lower*) i macierz U – górnotrójkątną (*upper*). Rozważmy macierz A i macierze L i U, takie że $A = LU$. Rozważmy też dwa wektory x – wektor niewiadomych i y – wektor danych. Wtedy:

$$\begin{aligned} Ax &= y \\ LUx &= y \end{aligned}$$

Aby znaleźć rozwiązanie tego układu, wystarczy rozwiązać dwa układy równań z macierzami trójkątnymi.

$$\begin{cases} Lz = y \\ Ux = z \end{cases}$$

Warto dodać, że zaletą tej metody jest łatwość wyliczania wyznacznika, jest on bowiem równy iloczynowi elementów na przekątnych macierzy L i U. Jednak najpierw potrzebujemy wyznaczyć macierze L i U, zrobimy to za pomocą *Metody Doolittle'a*.

2.1 *Metoda Doolittle'a*

Szukamy takich macierzy, dolno i górnotrójkątnej, L i U, o wymiarach n x n, że $A = LU$, przy założeniu, że na diagonalnej macierzy L znajdują się 1.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & u_{nn} \end{bmatrix}$$

Elementy macierzy L i U będziemy wyznaczać naprzemiennie (raz wiersz macierzy U, raz kolumnę L). Korzystając z poniższych wzorów dla każdego $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$:

$$u_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} u_{kj} \qquad\qquad j \in \{i,\ i+1, \ldots,\ n\}$$

$$l_{ji} = \frac{1}{u_{ii}} \left(a_{ji} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{jk} u_{ki} \right) \qquad\qquad j \in \{i+1,\ i+2, \ldots,\ n\}$$

Zwróćmy uwagę, że metoda ta działa tylko wtedy, gdy na diagonalnej macierzy U nie znajdują się wyrazy zerowe.
Dla macierzy wstęgowych można uprościć te wzory. Zauważmy, że elementy macierzy A równe 0 (i leżące poza wstęgą) też muszą być zerowe w macierzach L i U.

3 Algorytm rozwiązywania układów równań liniowych

Mając macierze L i U i dany wektor y bez problemu możemy wyliczyć najpierw wektor z, a później x z poniższego układu.

$$\begin{cases} Lz = y \\ Ux = z \end{cases}$$

Mamy wtedy n równań i n niewiadomych, gdzie liczba niewiadomych w równaniach przyrasta liniowo. Obliczenia te również można znacząco uprościć ograniczając maksymalną liczbę niewiadomych w równaniu do m, korzystając z tego, że elementy poza wstęgą w macierzach L i U są zerowe. Cały algorytm zależny od n (rozmiar macierzy) i m (rozmiar wstęgi) został zawarty w Notatniku Jupyter.

4 Sprawdźmy poprawność algorytmu na przykładach macierzy losowych

4.1 Przykład 1

Rozważmy $m = 1$ i macierz A rozmiaru 5 x 5 oraz wektor y o wymiarach 5 x 1

$$A = \begin{bmatrix} 0.152222 & 0.0311122 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.857633 & 0.791831 & 0.125419 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.309599 & 0.873232 & 0.12528 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.50278 & 0.604592 & 0.71726 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.131797 & 0.609025 \end{bmatrix} y = \begin{bmatrix} 0.46176947384159894 \\ 0.10645270797305106 \\ 0.45409854579289566 \\ 0.25899777169268057 \\ 0.24876850479512247 \end{bmatrix}$$

Wyliczmy macierze L i U oraz sprawdźmy, ile wynosi ich iloczyn.

$$LU = \begin{bmatrix} 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 5.63411 & 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.502155 & 1.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.620523 & 1.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.25016 & 1.0 \end{bmatrix}$$
$$* \begin{bmatrix} 0.152222 & 0.0311122 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.616541 & 0.125419 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.810252 & 0.12528 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.526852 & 0.71726 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.429596 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 0.152222 & 0.0311122 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.857633 & 0.791831 & 0.125419 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.309599 & 0.873232 & 0.12528 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.50278 & 0.604592 & 0.71726 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.131797 & 0.609025 \end{bmatrix}$$

Zwróćmy uwagę, że jest on równy macierzy A.
Teraz wyznaczmy wektory z i x.

$$z = \begin{bmatrix} 0.46176947384159894 \\ -2.495205274423867 \\ 1.7070779610503242 \\ -0.8002840520916308 \\ 0.4489674637662143 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 3.9672204986688744 \\ -4.568214797264082 \\ 2.5617046228296 \\ -2.9417863442792282 \\ 1.0450925541403437 \end{bmatrix}$$

Niech $x0$ będzie wektorem wyliczonym przez funkcję LinearProblem z pakietu LinearSolve dla parametrów - macierzy A i wektora y.

$$x0 = \begin{bmatrix} 3.967220498668875 \\ -4.568214797264083 \\ 2.5617046228296005 \\ -2.9417863442792287 \\ 1.0450925541403437 \end{bmatrix}$$

Rozważmy wektor błędów względnych wyliczanych ze wzoru $|(x0_i - x_i)/x0_i|$.

$$e = \begin{bmatrix} 1.1193963380635592e-16 \\ 3.888514262648323e-16 \\ 1.733569147248256e-16 \\ 1.5095902892936623e-16 \\ 0.0 \end{bmatrix}$$

Zwróćmy uwagę, że wartości wektora błędów są bliskie lub równe 0.

4.2 Przykład 2

Rozważmy $m = 2$ i macierz A rozmiaru 6 x 6 oraz wektor y o wymiarach 6 x 1

$$A = \begin{bmatrix} 0.118639 & 0.733921 & 0.229394 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.77188 & 0.118564 & 0.428055 & 0.527882 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0290173 & 0.385209 & 0.0989464 & 0.795632 & 0.392471 & 0.0 \\ 0.0 & 0.00698759 & 0.230136 & 0.446969 & 0.441913 & 0.36564 \\ 0.0 & 0.0 & 0.365721 & 0.0595441 & 0.78464 & 0.14476 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.816541 & 0.296497 & 0.791333 \end{bmatrix}$$

$$y = \begin{bmatrix} 0.837525866279719 \\ 0.5974016536116269 \\ 0.944134069519419 \\ 0.6627335603450982 \\ 0.9735944100525614 \\ 0.7015102116738294 \end{bmatrix}$$

Wyliczmy macierze L i U oraz sprawdźmy, ile wynosi ich iloczyn.

$$LU = \begin{bmatrix} 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 6.50612 & 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.244585 & -0.0441763 & 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & -0.00150064 & -54.6552 & 1.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & -87.4626 & 1.58573 & 1.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.018062 & -0.250049 & 1.0 \end{bmatrix}$$

$$* \begin{bmatrix} 0.118639 & 0.733921 & 0.229394 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & -4.65641 & -1.06441 & 0.527882 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & -0.00418146 & 0.818952 & 0.392471 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 45.2077 & 21.8925 & 0.36564 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.395621 & -0.435047 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.675946 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.118639 & 0.733921 & 0.229394 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.77188 & 0.118564 & 0.428055 & 0.527882 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0290173 & 0.385209 & 0.0989464 & 0.795632 & 0.392471 & 0.0 \\ 0.0 & 0.00698759 & 0.230136 & 0.446969 & 0.441913 & 0.36564 \\ 0.0 & 0.0 & 0.365721 & 0.0595441 & 0.78464 & 0.14476 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.816541 & 0.296497 & 0.791333 \end{bmatrix}$$

Zwróćmy uwagę, że jest on ponownie równy macierzy A.
Teraz wyznaczmy wektory z i x.

$$z = \begin{bmatrix} 0.837525866279719 \\ -4.851639787503399 \\ 0.5249605645152121 \\ 29.347271501868526 \\ 0.3511936738188254 \\ 0.2592559270191459 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 0.7619233097062613 \\ 1.112095974109948 \\ -0.3010499351502949 \\ 0.011933819864030273 \\ 1.3094701956573505 \\ 0.38354549445684166 \end{bmatrix}$$

Niech $x0$ będzie wektorem wyliczonym przez funkcję LinearProblem z pakietu LinearSolve dla parametrów - macierzy A i wektora y.

$$x0 = \begin{bmatrix} 0.7619233097062897 \\ 1.1120959741099576 \\ -0.3010499351503393 \\ 0.011933819864022081 \\ 1.3094701956573676 \\ 0.38354549445684366 \end{bmatrix}$$

Rozważmy wektor błędów względnych wyliczanych ze wzoru $|(x0_i - x_i)/x0_i|$.

$$e = \begin{bmatrix} 3.7302585533365451e-14 \\ 8.585516209082421e-15 \\ 1.4751347135427613e-13 \\ 6.863991870916116e-13 \\ 1.3056757332796201e-14 \\ 5.210337425955973e-15 \end{bmatrix}$$

Zwróćmy uwagę, że wartości wektora błędów są trochę większe niż w Przykładzie 1,
ale wciąż bardzo bliskie zeru.

5 Podsumowanie

Do wyznaczenia wektora x w układzie $Ax = y$ potrzebujemy miejsca w pamięci na 3 macierze n x n (A i pomocnicze L i U) oraz 3 wektory o wymiarach n x 1 (y, pomocniczego z i szukanego x). Zaimplementowany algorytm ma wysoką dokładność, błędy względne przyjmują niewielkie wartości.

Literatura

[1] Wikipedia.pl
[2] *Rozwiązywanie układów równań CD* Robert Jakubowski