

第二章 使用说明

微分几何是研究所有参数曲线曲面共性的学科。本章以平面参数多项式插值曲线、空间参数多项式插值曲线和参数多项式插值曲面这些特殊的曲面形式，作为平面参数曲线、空间参数曲线与参数曲面的载体，将经典微分几何中涉及 CAGD 的曲线曲面基本理论，用实时生成可视化动态图形和数值输出演示出来，不涉及有关这些特殊曲线曲面形式所具有的个性。后者内容将从第三章起介绍。

2.0 基本功能号

- 1: 平面参数多项式插值曲线;
- 10: 空间参数多项式插值曲线;
- 11: 参数多项式插值曲面。

2.1 曲线曲面类型选择

2.1.1 平面参数多项式插值曲线

单击“曲线曲面类型选择→平面参数多项式插值曲线→鼠标输入数据点”，在图形区移动鼠标至希望的位置，然后单击松开，即在该处画出一个正方形表示已输入一点。按照以上操作，再输入后续各点，至输入完毕，右击松开，即生成一条缺省条件（数据点参数化法取规范积累弦长参数化）下的平面参数多项式插值曲线。

单击“曲线曲面类型选择→平面参数多项式插值曲线→键盘输入数据点”，在弹出的“输入数据点”对话框中，按说明在两编辑框中输入点的坐标，按“结束”按钮退出，即生成一条缺省条件（数据点参数化法取规范积累弦长参数化）下的平面参数多项式插值曲线。一般地，曲线的次数等于数据点数减 1。

2.1.2 空间参数多项式插值曲线

单击“曲线曲面类型选择→空间参数多项式插值曲线→鼠标输入数据点”，图形区被一分为四，左上、左下、右上三部分构成三视图区。每个视图区只含两个坐标，因此，一个空间点需要在正视图（含 x 、 z 坐标）与俯视图（含 x 、 y 坐标）各输入一点，以获得三个坐标。若先在正视图输入一点，后在俯视图输入一点，则在俯视图中的 x 坐标自动取成正视图的 x 坐标，俯视图仅提供 y 坐标。若先在俯视图输入一点，后在正视图输入一点，则在正视图中的 x 坐标自动取成俯视图的 x 坐标，正视图仅提供 z 坐标。输入完毕，右击退出，即生成一条缺省条件（数据点参数化法取规范积累弦长参数化）下的空间参数多项式插值曲线，以三视图形式显示。一般地，曲线的次数等于数据点数减 1。如果输入的最后数据点仅在一个视图输入，就右击退出，则以前一数据点为末数据点。

单击“曲线曲面类型选择→空间参数多项式插值曲线→键盘输入数据点”，则将弹出“输入数据点”对话框，按其中说明在三编辑框中输入点的坐标，至输入完毕，按“结束”按钮退出，即生成一条缺省条件（数据点参数化法取规范积累弦长参数化）下的空间参数多项式插值曲线，以三视图形式显示。一般地，曲线的次数等于数据点数减 1。

2.1.3 参数多项式插值曲面

单击“曲线曲面类型选择→参数多项式插值曲面→鼠标输入数据点”，将弹出“输入曲面两参数方向数据点数”对话框，输入两个点数按“确定”按钮退出后，再按其中说明用鼠标输入数据点，输完 $m \times n$ 个数据点后，即生成一张缺省条件（两个参数方向数据点都取平均规范弦长参数化）下的参数多项式插值曲面，以三视图形式显示。一般地，曲面两参数的

次数分别等于两个参数方向数据点数减 1。

单击“曲线曲面类型选择—>参数多项式插值曲面—>键盘输入数据点”，将弹出“输入曲面两参数方向数据点数”对话框，输入两个点数按“确定”按钮退出，则将弹出“输入数据点”对话框，按其中说明在三编辑框中输入点的坐标，至输入完毕，按结束按钮退出，即生成一张缺省条件（两个参数方向数据点都取平均规范弦长参数化）下的参数多项式插值曲面，以三视图形式显示。一般地，曲面两参数的次数分别等于两个参数方向数据点数减 1。

2.2 平面曲线属性操作

指平面参数多项式插值曲线的属性操作。

2.2.1 改变数据点参数化方法

有关数据点参数化方法内容介绍参见 3.1.3 节。不熟悉的读者可暂跳过。

单击菜单项，弹出“数据点参数化方法”对话框，4 个单选钮可任选其一，然后按“确定”按钮退出，即生成所选参数化方法形状发生改变的平面参数多项式插值曲线。

倘若数据点按弦长分布出现相邻数据点弦长相差悬殊的情况，选择规范均匀参数化，将导致曲线出现畸形，甚至在弦长很短的那部分出现重点和奇点。本章的复习思考与练习第(15)题给出了生成尖点的键盘输入数据。

2.2.2 显示定义域与参数分割

单击菜单项，将在图形区下方显示曲线参数 u 的定义域，简称曲线定义域，都统一取 $u \in [0,1]$ ，而定义域的参数分割由所选数据点参数化方法决定，参数分割中的节点与数据点一一对应。

2.2.3 计算显示/隐藏曲线上点和导矢

单击菜单项，在弹出的“输入参数值与导矢阶数”对话框中。输入参数值与导矢阶数，按“确定”按钮退出，将在图形区下方显示定义域与参数分割，并用红色小正方形画出该参数值在参数轴上的位置，且在下方显示该参数值。如果导矢阶数为 0，将在曲线上显示该点及其两坐标值。如果导矢阶数大于 0 和小于次数，还将在该点处画出导矢，并在矢端附近数值显示导矢的两个坐标分量。若矢端落在图形区外，则将在该导矢与图形区边界交点附近显示导矢的两个坐标分量。再次单击该菜单项，则隐藏显示。如再一次单击，则重新弹出输入参数值与导矢阶数对话框，按“取消”按钮，可恢复原来的导矢显示，也可输入新参数值和导矢阶数，给出新的导矢显示。若输入的导矢阶数高于次数，则导矢为 $\mathbf{0}$ 矢量，无导矢显示。

2.2.4 几何不变性

单击菜单项，当前显示的曲线图形消失，但生成这消失曲线的数据点和参数化数据仍保留。在原曲线图形消失后，另在图形区左上区域给出原曲线图形缩小比例后的显示，右上区域给出同样数据点生成的函数曲线图形。在弹出的“输入旋转角度”对话框中输入角度，按“确定”按钮退出，即在左下区域和右下区域分别用与原曲线不同线色显示数据点经旋转后生成的参数曲线与函数曲线图形。可见与上部旋转前的图形相比，参数曲线的形状保持不变，而函数曲线图形则发生了改变，若旋转后数据点的 x 坐标不再保持严格递增，则将不能生成旋转后的函数曲线图形。坐标系固定而数据点绕坐标旋转这个相对运动也可看成数据点不动而坐标系绕数据点的反向旋转。这表明参数曲线具有与坐标系选择无关的几何不变性，而函数曲线图形则依赖于坐标系的选择。这是 CAGD 选择参数曲线曲面用于工业产品形状描述的最主要原因或理由。

2.2.5 参数变换

单击菜单项，当前显示的曲线图形消失，弹出“选择变换函数”对话框。其中给出 5 个单选钮提供了 5 种不同类型的变换函数。任选其一，按“确定”按钮退出，原曲线图形消失，另在左上区域显示缩小比例的原曲线图形，右半区域给出了变换函数的图形，左下区域给出了原参数 u 定义域及其分割与新参数 t 定义域及其分割，从中可见两分割中节点分布不同及其对应关系。参数变换不改变曲线形状，仅改变了曲线上点与定义域内点的对应关系。

在参数变换中，参数曲线 $p=p(u)$ 将原参数 u 通过某个函数关系 $u=u(t)$ 所表示的参数变换而使原参数曲线改用新参数 t 表示时，即有 $p=p(u(t))$ ，这时曲线形状不发生改变，但参数值与所生成的曲线之间的对应关系发生了改变。如果选择了不合适的参数变换，例如教材 2.6 节给出的变换函数 $u(t)=10t^3-15t^2+6t$ 是用于特殊形状的直线 $p(u)=(1-u)p_0+u p_1$, $u \in (0, 1)$ 。而软件演示该变换函数用于一般形状的正则参数曲线 $p=p(u)$ 更能说明问题。原来正则的参数曲线 $p=p(u)$ 就成为非正则的参数曲线 $p=p(u(t))$ ，当新参数 t 从定义域 $[0,1]$ 起点变化到终点时，用新参数 t 表示的曲线 $p=p(u(t))$ 在 $t \in [0,ta]=[0, 0.0528]$ 与 $t \in [tb,1]=[0.7236,1]$ 内分别与 $u \in [0,ua]=[0, 0.2764]$ 与 $u \in [ub,1]=[0.7236,1]$ 内一一对应，但 $p=p(u(t))$ 上点从 $p=p(ua)=p(u(ta))$ 沿曲线到 $p=p(ub)=p(u(tb))$ 后又沿原曲线返回到 $p=p(ua)=p(u(ta))$ ，再从 $p=p(ua)=p(u(ta))$ 沿原曲线前行到 $p=p(ub)=p(u(tb))$ 。尽管经过该参数变换后曲线形状未变，但曲线上点从 $p=p(ua)=p(u(ta))$ 到 $p=p(ub)=p(u(tb))$ 往返遍历三个单程。在区间 $t \in [ta,tb]=[0.0528,0.9472]$ 内引起原参数 u 在区间 $u \in [ua,ub]=[0.2764,0.7236]$ 内的往-复-往的变化，致使在该区间内一个原参数 u 对应三个新参数 t 。在曲线段 $p=p(u(t))$, $t \in [ta,tb]=[0.0528,0.9472]$ 上一个点 $p(u(t))$ 对应三个参数 t 。且可以看到位于左侧下方的 t 参数轴，当参数 t 在区间 $[ta,tb]=[0.0528,0.9472]$ 内变化时，从右侧 $u(t)$ 函数曲线可见，引起参数 u 在区间 $u \in [ua,ub]=[0.2764,0.7236]$ 内的往复变化，致使在该区间内一个参数 u 对应三个参数 t 。相应那段函数曲线、左侧 u 参数轴那个区间 $[ua,ub]$ 及左上角的经过变换后的参数曲线上那段，都用红色标记。那红色曲线段就是奇异曲线段。该曲线段上任意一点实际都是一个三重点，即在 $[0.0528,0.9472]$ 内的一个新参数 t 对应该曲线段上一个三重点。

2.2.6 显示相对曲率

单击菜单项，将在图形区右下部显示当前曲线的相对曲率随参数改变的曲线。以水平直线表示相对曲率为零，直线上下分别表示相对曲率为正和负，曲线的相对曲率以红色的曲线显示。

2.2.7 返回原参数曲线

单击菜单项，将使因其他各项属性操作而改变了形状或显示的当前曲线显示返回到原生成的曲线显示。

2.2.8 鼠标拖动修改数据点改变曲线形状

移动鼠标到所要修改的数据点，单击选择该数据点，该数据点显示颜色改变成红色表示点中，然后按住鼠标左键不放，移动鼠标，数据点的位置随之移动，曲线形状随之实时动态变化，直至松开左键为止。

2.3 空间曲线属性操作

2.3.1 修改数据点

单击菜单项，在弹出的“输入待修改数据点的序号”对话框中输入序号，按“确定”按钮退出，弹出“修改曲面数据”对话框，其中显示的是该序号点的当前坐标值，用户可修改输入新坐标值，按“确定”按钮退出，即生成该数据点改变后的空间参数多项式插值曲线。

2.3.2 改变数据点参数化方法

单击菜单项，弹出“数据点参数化方法”对话框，4 个单选钮可任选其一，然后按“确

定”按钮退出，即生成所选参数化方法、形状发生改变的空间参数多项式插值曲线。

2.3.3 显示/隐藏定义域与参数分割

单击菜单项，将在第四视区即图形区右下视区下部显示曲线定义域与当前的参数分割。再次单击菜单项，则隐藏显示。

2.3.4 显示/隐藏曲线上点和导矢

单击菜单项，在弹出的“参数值与导矢阶数”对话框中输入参数值与导矢阶数，按“确定”按钮退出，如果导矢阶数为 0，将在曲线上显示该点及其三坐标值，并在第四视区下部给出文字显示。如果导矢阶数大于 0 并小于次数，还将在该点处画出导矢，并在第四视区下部给出文字显示。再次单击该菜单项，则隐藏显示。如又点击，则重新弹出“输入参数值与导矢阶数”对话框，按“取消”按钮，可恢复原来的导矢显示，也可输入新参数值和导矢阶数，给出新的导矢显示。若输入的导矢阶数高于次数，则导矢为 $\mathbf{0}$ 矢量，无导矢显示。

2.3.5 显示/隐藏弗朗内特标架

单击菜单项，在弹出的“输入 U 参数值”对话框中输入参数值，按“确定”按钮退出，即在曲线上显示由该参数值确定的点及弗朗内特标架。再次单击菜单项，则隐藏显示。

2.3.6 显示曲率图与挠率图

单击菜单项，将在第四视区显示分别用红色与黄色曲线显示的绝对曲率和挠率随参数值变化的曲线。 u 参数轴上为正，下为负。绝对曲率恒为正。再次单击菜单项，则隐藏显示。

2.3.7 显示投影图

若当前显示的是三视图，单单击菜单项，将切换为显示投影图。这时视图菜单与顶层菜单下一行的工具栏里将显示原被禁用的三个带“+”、“-”和空白分别表示放大，缩小和复原的放大镜按钮及带左、右、上、下四个箭头分别表示左旋、右旋、上旋、下旋的按钮均被启用。进行左旋、右旋、上旋、下旋变换操作时，尽管投影图形发生改变，这空间曲线形状是不变的，只是从不同方向看到的形状不同而已。图形区左上角有一个小坐标系，它表示当前三坐标轴的取向，当点按任一箭头按钮时，曲线投影图发生改变，坐标系也随之进行转动。如果三坐标轴取向恰好符合三视图之一的坐标轴取向时，则相应得到和该视图中形状相同的曲线。当点按视图菜单的放大，缩小和还原菜单项或点按带“+”、“-”和空白的三个放大镜按钮时，图形相应放大、缩小和恢复原状。

除显示/隐藏定义域与参数分割、显示曲率与挠率两项限制在显示三视图时可用，在显示投影图时被禁用外，其他属性操作皆在显示投影图可用，可在三视图与投影图间进行切换。

2.3.8 返回三视图

若当前显示的是投影图，单击菜单项，将返回到三视图显示。

2.3.9 鼠标拖动数据点修改曲线形状

在三视图显示时，可用鼠标拖动主、俯视图上任一个数据点，曲线的三视图相应发生改变。切换到投影图后，也可见数据点与曲线相应发生改变。显示投影图时不可鼠标拖动。

2.4 曲面属性操作

2.4.1 改变数据点参数化方法

单击菜单项，将弹出“曲面数据点参数化”对话框， U 向与 V 向参数化都只提供平均规范弦长参数化与平均规范均匀参数化两种选择。缺省是平均规范弦长参数化。用户可以保持原有参数化不变，也可将某一方向或两个方向参数化改取为平均规范均匀参数化，然后按确定按钮退出，即生成所选参数化方法下的参数多项式曲面。如果参数化方法有所改变，曲面形状也将发生改变，否则保持不变。

2.4.2 修改曲面数据点

单击菜单项，在弹出的“输入待修改数据点的 U 、 V 向序号”对话框中输入序号，按“确定”按钮退出，将再弹出修改曲面数据点对话框，其中三个编辑框中显示的是所选序号数据

点当前的三坐标，用户可不予修改或修改其中一个、两个甚至三个，然后按“确定”按钮退出，即生成相应的参数多项式曲面。如果数据点有所改变，曲面形状也将发生改变，否则保持不变。。

2.4.3 显示/隐藏定义域与参数分割

单击菜单项，将在第四视区显示曲面的定义域，是 U 、 V 坐标都等于 1 的单位正方形域。并在 U 、 V 参数轴上显示其参数分割。再次单击菜单项，则隐藏显示。

2.4.4 显示/隐藏曲面上点和偏导矢

单击菜单项，在弹出的“输入两参数值及偏导矢阶数”对话框中输入参数值与阶数，按“确定”按钮退出，若输入的两个偏导矢阶数都等于 0，如果定义域与参数分割正在显示中，则在定义域内显示由输入的两参数值决定的一点，并在曲面上显示对应的点，在显示点附近并给出了该点的三坐标值，且同时在第四视区下方给出文字与数值输出。若输入的两个偏导矢阶数之一或两大于 0，则还将在曲面上显示该偏导矢，同时在第四视区下方给出文字数值输出。再次单击菜单项，则隐藏显示。

2.4.5 显示投影图

若当前显示的是三视图，单击菜单项，将切换为显示投影图。这时视图菜单与顶层菜单下一行的工具栏里将显示原被禁用的三个带“+”、“-”和空白分别表示放大，缩小和复原的放大镜按钮及带左、右、上、下四个箭头分别表示左旋、右旋、上旋、下旋的按钮均被启用。进行左旋、右旋、上旋、下旋变换操作时，尽管投影图形发生改变，这空间曲面形状是不变的，只是从不同方向看到的形状不同而已。图形区左上角有一个小坐标系，它表示当前三坐标轴的取向，当点按任一箭头按钮时，曲面投影图发生改变，坐标系也随之进行转动。如果三坐标轴取向恰好符合三视图之一的坐标轴取向时，则相应得到和该视图中形状相同的曲面。当点按视图菜单的放大，缩小和还原菜单项或点按带“+”、“-”和空白的三个放大镜按钮时，图形相应放大、缩小和恢复原状。

2.4.6 返回三视图

若当前显示的是投影图，单击菜单项，将返回到三视图显示。

2.4.7 显示单位 U 、 V 向切矢与法矢

单击菜单项，在弹出的“输入 U 、 V 参数值”对话框中输入 U 、 V 参数值，按“确定”按钮退出，即在曲面上单位 U 向切矢、单位 V 向切矢与单位法矢。因一个单位长度在屏幕上看不见，实际显示时，取成 50 个单位模长。

2.4.8 法矢反向

如果当前正在显示单位 U 、 V 向切矢与法矢，单击菜单项，将使法矢反向。再次单击菜单项，又取一次反向，相当于恢复原方向。

2.4.9 计算显示主方向主曲率高斯曲率

单击菜单项，在弹出的“输入 U 、 V 参数值”对话框中输入 U 、 V 参数值，按“确定”按钮退出，即在曲面上显示由输入 U 、 V 参数值决定的一点及该点的两个主方向 m_1 与 m_2 。该点的最大主曲率 k_1 、最小主曲率 k_2 、高斯曲率、最大主曲率 k_1 所在的主方向 m_1 与 U 向切矢夹角、该点的类型等数据都在第四视区给出文字与数值显示。再次单击菜单项，则隐藏显示。

2.4.10 计算给定切向的法曲率

如果当前正在显示主方向主曲率高斯曲率，则单击菜单项，在弹出的“输入角度”对话框中输入与最大主曲率所在主方向的夹角，按“确定”按钮退出，则在曲面上显示由输入角度确定的一个方向 ft ，并在第四视区用文字和数值显示沿该方向的法曲率。

2.4.11 鼠标拖动数据点修改曲面形状

在三视图显示时，可用鼠标拖动任一视图上任一个数据点，曲面的三视图相应发生改变。

切换到投影图后，也可见数据点与曲面相应发生改变。显示投影图时不可鼠标拖动。

2.5 右键菜单操作

对于生成的曲线曲面图形，除可直接用鼠标左键拖动数据点修改曲线曲面外，还可以移动鼠标指到某个数据点，单击左键，所指数据点改变颜色或略微颤动，表示选中，再右击鼠标，弹出右键菜单对所指的数据点进行添加、删除、修改操作，相应地曲线曲面发生改变。具体如下：

2.5.1 添加顶点或数据点

单击菜单项，在所选数据点之后，添加一个点。若选择鼠标添加，则单点左键直接输入需添加的点；若选择键盘输入，则在弹出的“输入点的坐标值”对话框中直接用键盘输入点的坐标值。添加结束，即生成添加该数据点后的曲线。如果“鼠标添加”或“键盘添加”输入的数据点与前所指点选择的数据点完全相同，使添加的数据点与前个数据点重合，对于选择“规范均匀参数化”仍可生成参数多项式插值曲线，这时两数据点虽重合，但具有不同的参数值而成为曲线的二重点。但如果选择其他数据点参数化方法，就是不允许的，将不能生成插值曲线。因为那时两重合数据点将具有相同的参数值，不满足参数序列严格递增的要求。

该选项对曲面禁用。

2.5.2 删除顶点或数据点

单击菜单项，即可删除鼠标左键所指的那个数据点。删除结束，即生成删除该数据点后的曲线。该选项对曲面禁用。

2.5.3 修改顶点或数据点

单击该菜单项，弹出“输入点的坐标值”对话框内，其中显示的是点的当前坐标，用键盘输入修改后点的坐标值。按“确定”按钮退出，即显示修改后数据点的新位置及生成的新曲线或新曲面。