Pewna firma transportowa opatentowała niesamowity napęd samochodowy. Dzięki temu napędowi pojazdy mogą poruszać się z tak dużą prędkością, że czas przejazdu między dwoma punktami przestał być dla firmy problemem. Niestety takie pojazdy mają jedną znaczącą wadę, są okropnie szerokie. Spowodowało to, iż znane do tej pory, najkrótsze ścieżki na trasach obsługiwanych przez firmę zaczęły być bardzo uciążliwe, gdyż nowe samochody nie mieściły się na niektórych drogach.

Część I: najszersze ścieżki (1p)

Dyrektorzy firmy postanowili zatrudnić grupę studentów, aby Ci pomogli im zaprojektować nowe połączenia w taki sposób, który znajduje najszersze możliwe ścieżki. Najszerszą ścieżką jest taka ścieżka, dla której najwęższa część trasy jest największa; innymi słowy, chcemy zmaksymalizować najwęższe miejsce na trasie. Jako wejście, studentom został przekazany graf skierowany, w którym wagi krawędzi oznaczają szerokość trasy (trasa z punktu a do punktu b może mieć inną szerokość, niż z punktu b do punktu a), punkt początkowy i punkt końcowy. Jako wynik powinna zostać zwrócona trasa między punktem początkowym a końcowym, która maksymalizuje szerokość najwęższego połączenia. Jeśli taka ścieżka nie istnieje, należy zwrócić pustą listę.

Część II: epidemiczne najszersze ścieżki (1.5p)

Niestety po jakimś czasie z powodu epidemii, której nie udało się opanować mimo doskonałych algorytmów identyfikujących potencjalne jej źródła, władze krajowe zaczęły ustawiać bramki na wjazdach do miast. Na bramkach tych każdy pojazd musi odczekać pewien czas. Dyrektorzy, mimo początkowego zadowolenia z pierwszej części, zaczęli dostrzegać, że w nowej rzeczywistości znalezione wcześniej ścieżki są dalekie od optymalnych. Wyznaczyli więc nowe zadanie, polegające na znalezieniu kompromisu między szerokością a czasem oczekiwania: należy zmaksymalizować różnicę między najwęższą krawędzią znalezionej ścieżki, a sumą czasów oczekiwania na bramkach, przez które przechodzi ta ścieżka. Jako wejście został przekazany, podobnie jak poprzednio, graf skierowany, w którym wagi krawędzi oznaczają szerokość trasy, punkt początkowy, punkt końcowy, lista wag wierzchołków, które oznaczają długość stania na bramce w danym wierzchołku oraz wartość najszerszej krawędzi w całym grafie. Jako wynik powinna zostać zwrócona trasa między punktem początkowym a końcowym, dla której zmaksymalizowana będzie różnica między najwęższą krawędzią w ścieżce a sumą wag wierzchołków, przez które przechodzi ta ścieżka.

Uwagi i wskazówki

- W obu częściach możemy przyjąć, że wagi są nieujemnymi liczbami całkowitymi.
- W części I oczekiwana złożoność to $O(m + n \log m)$, gdzie m jest liczbą wierzchołków, a n liczbą krawędzi grafu zadanego na wejściu.
- W części II oczekujemy złożoności $O(k * (m + n \log m))$, gdzie m i n są analogiczne jak w pierwszej części, a k jest liczbą różnych szerokości krawędzi w grafie.
- Kara za niedotrzymanie wymagań odnośnie złożoności to 0.5p za każdą z części.
- Jednym z pomysłów na rozwiązanie drugiej części jest sprawdzanie odpowiednio zdefiniowanych najkrótszych ścieżek dla podgrafów wejściowego grafu, które zawierają odpowiednie krawędzie.