Отчет по лабораторной работе №8

Задача на собственные значения

Ким Илья Владиславович

Содержание

Список иллюстраций

Цель работы

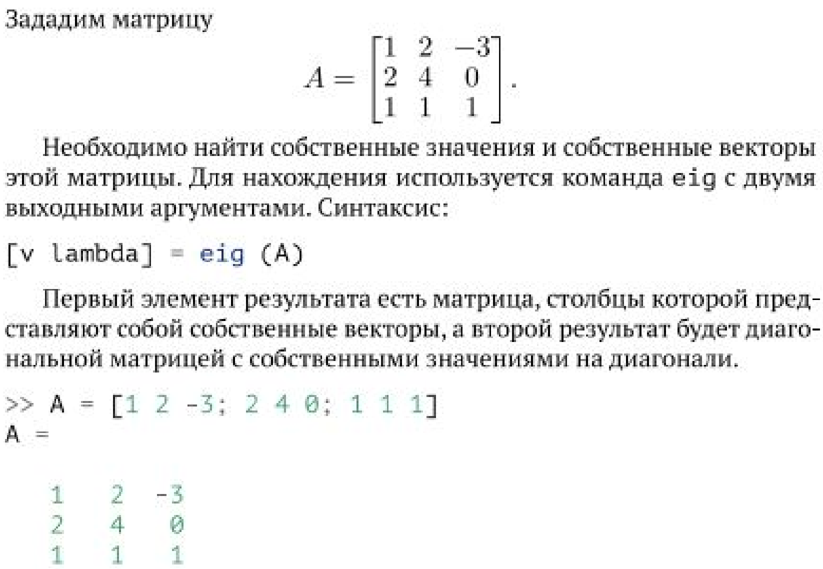
Научиться находить собственные значения с помощью Octave.

Задание

1. Сделайте отчет по лабораторной работе в формате Markdown.
2. В качестве отчета просьба предоставить отчеты в 3 форматах: pdf,docx и md(в архиве, поскольку он должен содержать скриншоты, Markfile и т.д)

Выполнение лабораторной работы

1. Собственные значения и собственные векторы



Зададим матрицу

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Необходимо найти собственные значения и собственные векторы этой матрицы. Для нахождения используется команда `eig` с двумя выходными аргументами. Синтаксис:

```
[v lambda] = eig (A)
```

Первый элемент результата есть матрица, столбцы которой представляют собой собственные векторы, а второй результат будет диагональной матрицей с собственными значениями на диагонали.

```
>> A = [1 2 -3; 2 4 0; 1 1 1]
A =

   1   2  -3
   2   4   0
   1   1   1
```

Рис. 0.1: Рис.1

```
>> A=[1 2 -3; 2 4 0; 1 1 1]
A =

   1   2  -3
   2   4   0
   1   1   1

>> [v lambda]
error: 'v' undefined near line 1, column 1
>> [v lambda] = eig(A)
v =

 Columns 1 and 2:

  -0.2400 +      0i  -0.7920 +      0i
  -0.9139 +      0i   0.4523 + 0.1226i
  -0.3273 +      0i   0.2322 + 0.3152i

 Column 3:

  -0.7920 -      0i
   0.4523 - 0.1226i
   0.2322 - 0.3152i

lambda =

Diagonal Matrix

 Columns 1 and 2:

   4.5251 +      0i                   0
                  0   0.7374 + 0.8844i
                  0                   0

 Column 3:
```

Рис. 0.2: Рис.2

```
Column 3:

                 0
                 0
   0.7374 - 0.8844i
```

Рис. 0.3: Рис.3

Для того, чтобы получить матрицу с действительными собственными значениями, мы можем создать симметричную матрицу (имеющую действительные собственные значения) путём умножения матрицы и на транспонированную матрицу:

Рис. 0.4: Рис.4

```
>> C=A' *A
C =

    6   11   -2
   11   21   -5
   -2   -5   10

>> [v lambda] =eig(C)
v =

   0.876137   0.188733  -0.443581
  -0.477715   0.216620  -0.851390
  -0.064597   0.957839   0.279949

lambda =

Diagonal Matrix

    0.1497         0         0
         0    8.4751         0
         0         0   28.3752
```

Рис. 0.5: Рис.5

Здесь диагональные элементы матрицы Λ являются собственными значениями, а соответствующие столбцы матрицы Vявляются соответствующими собственными векторами. Каждому собственному значению соответствует бесконечное семейство собственных векторов. Типичные собственные векторы, полученные в Octave, нормированы на единицу.

Рис. 0.6: Рис.6

2. Марковские цепи

Рассмотрим последовательность случайных событий при соблюдении следующих условий:

- возможно конечное число состояний;
- через определённые промежутки времени проводится наблюдение и регистрируется состояние системы;
- для каждого состояния мы задаём вероятность перехода в каждое из остальных состояний или вероятность остаться в том же самом состоянии. Существенным предположением является то, что эти вероятности зависят только от текущего состояния.

Такая система называется цепью Маркова. Наша задача – предсказать вероятности состояний системы.

Рис. 0.7: Рис.7

3. Случайное блуждание

Предположим, что мы случайным образом передвигаемся следующим образом. В состояниях 2, 3 или 4 мы перемещаемся влево или вправо наугад. По достижении конца дороги (состояния 1 или 5) мы останавливаемся.

Наша цель – предсказать, где мы окажемся. Начнем с вектора вероятности.

- Предположим, что мы можем начать в любой точке с равной вероятностью. Тогда начальный вектор будет $(0.2, 0.2, 0.2, 0.2, 0.2)$.

Рис. 0.8: Рис.8

- С другой стороны, мы можем знать начальное состояние. Предположим, мы начинаем с состояния 3. Тогда начальный вектор будет $(0, 0, 1, 0, 0)$.

Мы хотим предсказать наше местоположение после k ходов. Это делается путём записи переходной матрицы. Сформируем массив $n \times n$, элемент ij которого является вероятностью перехода из состояния i в j. Пусть T есть транспонированная матрица переходов. Матричное произведение Tx даёт новое распределение вероятностей после одного периода времени. Продолжение умножения на T даёт вероятности для будущих состояний. Таким образом, для любого начального вектора вероятности x и любого положительного целого числа k вектор вероятности после k периодов времени равен

$$\vec{y} = T^k \vec{x}.$$

Для примера случайного блуждания найдём вектор вероятности после 5 шагов для каждого из следующих начальных векторов вероятности:

$$a = [0.2 \quad 0.2 \quad 0.2 \quad 0.2 \quad 0.2]^T,$$
$$b = [0.5 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0.5]^T,$$
$$c = [0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T,$$
$$d = [0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0]^T.$$

Сформируем матрицу переходов:

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & 1 \end{bmatrix}.$$

Рис. 0.9: Рис.9

```
>> T = [1 0.5 0 0 0; 0 0 0.5 0 0;0 0.5 0 0.5 0; 0 0 0
>> a=[0.2;0.2;0.2;0.2;0.2];
>> b[0.5;0;0;0;0.5];
error: parse error:

  syntax error

>>> b[0.5;0;0;0;0.5];
     ^
>> b=[0.5;0;0;0;0.5];
>> c=[0;1;0;0;0];
>> d=[0;0;1;0;0];
>> |
```

Рис. 0.10: Рис.10

Вероятности будущего состояния легко вычисляются как $T^k \vec{x}$, где $\vec{x}$ – начальный вектор вероятностей.

Рис. 0.11: Рис.11

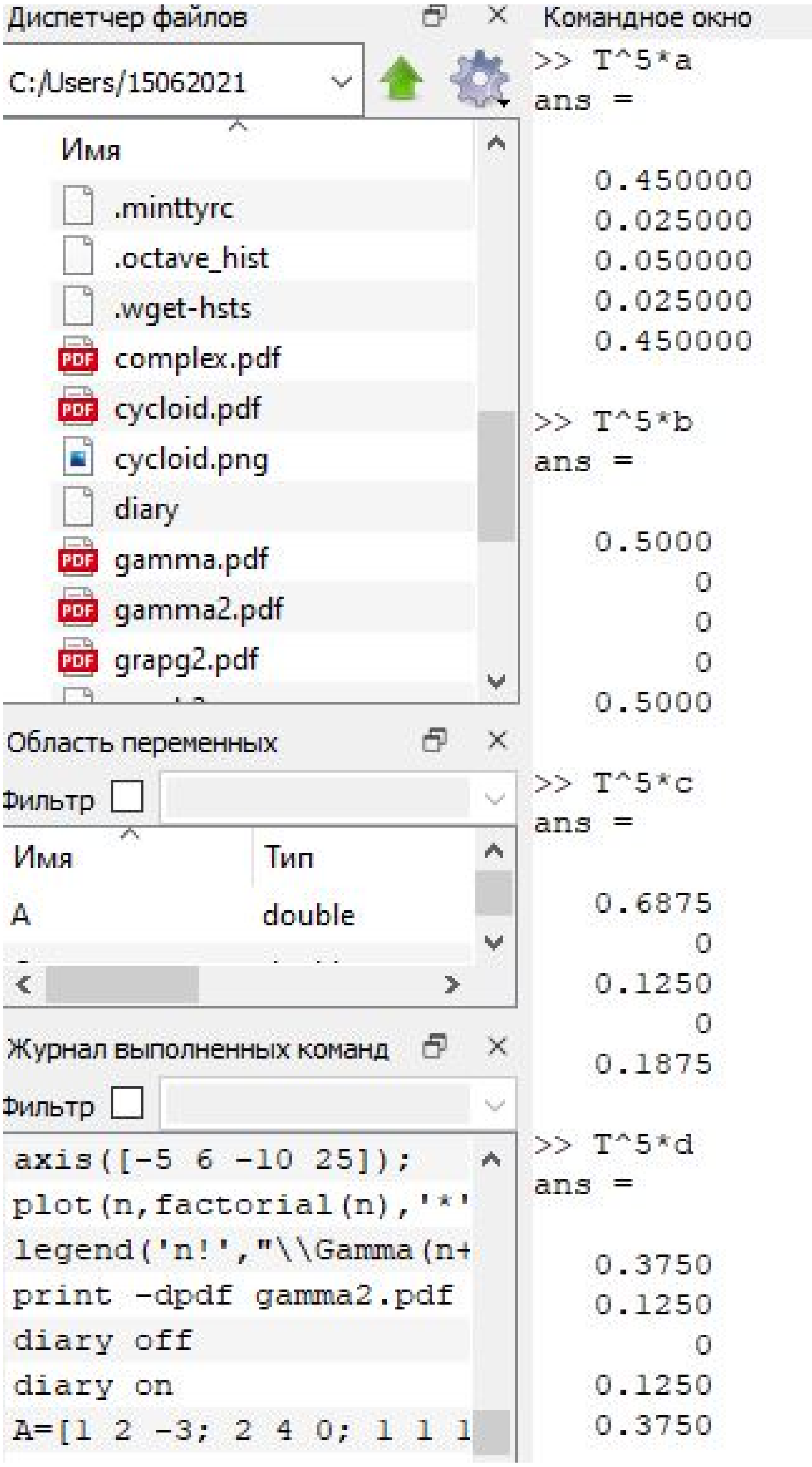


Рис. 0.12: Рис.12

Состояние x является равновесным, если $\vec{x} = T\vec{x}$, где T – матрица перехода для цепи Маркова. Равновесное состояние не приводит к изменению состояния в будущем. Каждая цепь Маркова имеет хотя бы одно равновесное состояние.

Пусть T – матрица переходов для цепи Маркова. Тогда $\lambda = 1$ является собственным значением T. Если x является собственным вектором для $\lambda = 1$ с неотрицательными компонентами, сумма которых равна 1, то x является равновесным состоянием для T.

Найдём вектор равновесного состояния для цепи Маркова с переходной матрицей

$$T = \begin{bmatrix} 0.48 & 0.51 & 0.14 \\ 0.29 & 0.04 & 0.52 \\ 0.23 & 0.45 & 0.34 \end{bmatrix}.$$

Рис. 0.13: Рис.13

```
>> T=[0.48 0.51 0.14; 0.29 0.02 0.52; 0.23 0.45 0.34]
T =

   0.480000   0.510000   0.140000
   0.290000   0.020000   0.520000
   0.230000   0.450000   0.340000

>> [v lambda]=eig(T)
v =

  -0.6508  -0.7977   0.4283
  -0.4991   0.2603  -0.8200
  -0.5721   0.5440   0.3797

lambda =

Diagonal Matrix

   0.9942        0        0
        0   0.2181        0
        0        0  -0.3723

>> x=v(:,1)/sum(v(:,1))
x =

   0.3779
   0.2898
   0.3322

>> |
```

Рис. 0.14: Рис.14

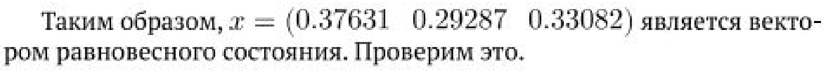

Таким образом, $x = (0.37631 \quad 0.29287 \quad 0.33082)$ является вектором равновесного состояния. Проверим это.

Рис. 0.15: Рис.15

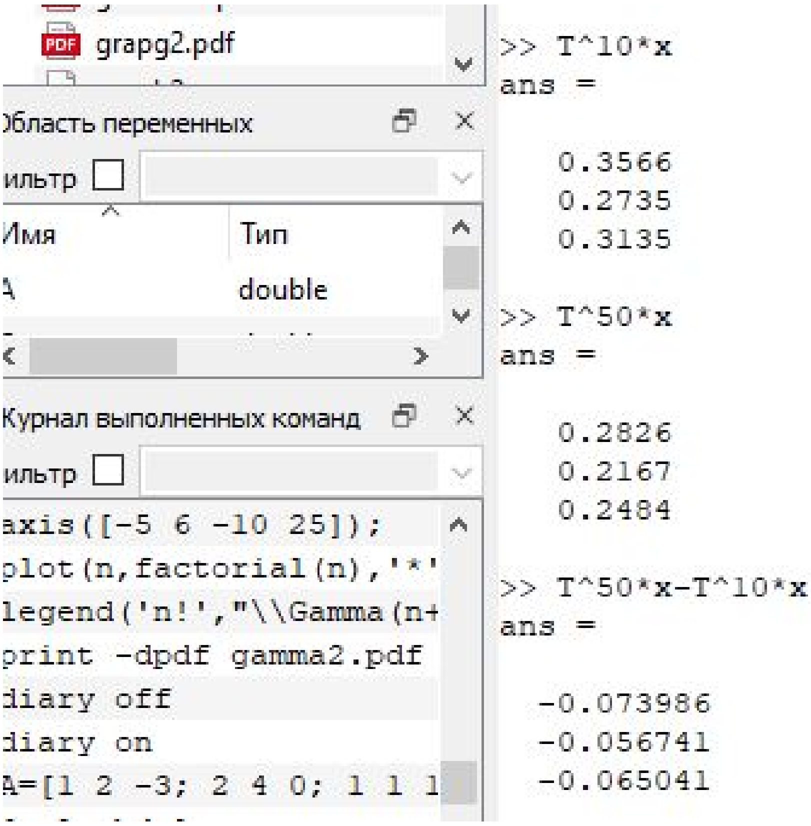


Рис. 0.16: Рис.16

Выводы

Научился находить собственные значения с помощью Octave.