Компьютерный практикум по статистическому анализу данных лабораторная работа №4

Линейная алгебра

Ким Илья Владиславович НФИбд-01-21

Содержание

Цель работы

Основной целью работы является изучение возможностей специализированных пакетов Julia для выполнения и оценки эффективности операций над объектами линейной алгебры.

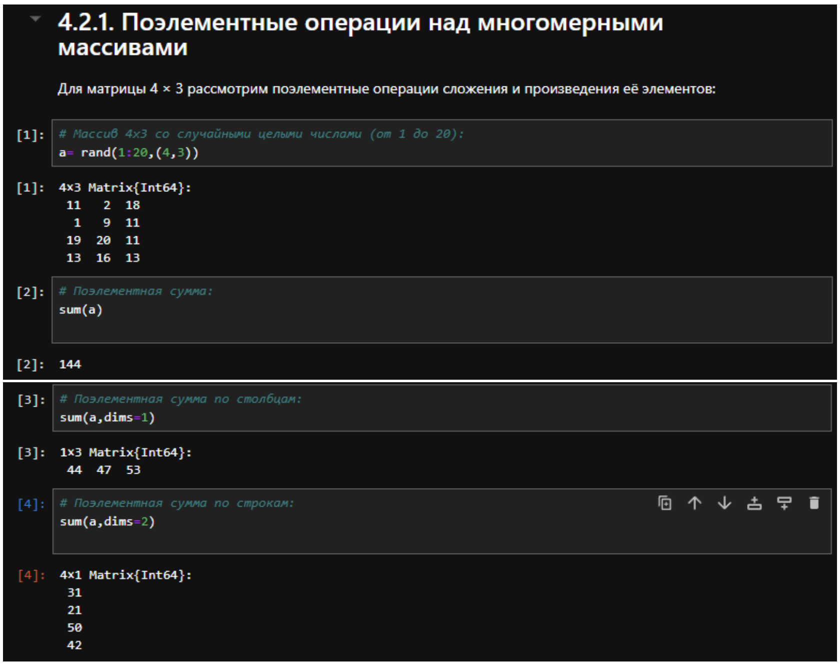
Задание

1. Используя Jupyter Lab, повторите примеры из раздела 4.2.

2. Выполните задания для самостоятельной работы (раздел 4.4).

Выполнение работы. Повтор примеров из раздела 4.2

4.2.1. Поэлементные операции над многомерными массивами


4.2.1. Поэлементные операции над многомерными массивами

Для матрицы 4 × 3 рассмотрим поэлементные операции сложения и произведения её элементов:

```
[1]: # Массив 4x3 со случайными целыми числами (от 1 до 20):
     a= rand(1:20,(4,3))

[1]: 4×3 Matrix{Int64}:
      11   2  18
       1   9  11
      19  20  11
      13  16  13

[2]: # Поэлементная сумма:
     sum(a)

[2]: 144

[3]: # Поэлементная сумма по столбцам:
     sum(a,dims=1)

[3]: 1×3 Matrix{Int64}:
      44  47  53

[4]: # Поэлементная сумма по строкам:
     sum(a,dims=2)

[4]: 4×1 Matrix{Int64}:
      31
      21
      50
      42
```

```
[5]: # Поэлементное произведение:
     prod(a)

[5]: 443111834880

[6]: # Поэлементное произведение по столбцам:
     prod(a,dims=1)

[6]: 1×3 Matrix{Int64}:
      2717  5760  28314

[7]: # Поэлементное произведение по строкам:
     prod(a,dims=2)

[7]: 4×1 Matrix{Int64}:
        396
         99
       4180
       2704

[8]: # Подключение пакета Statistics:
     import Pkg

[9]: Pkg.add("Statistics")
     using Statistics

        Updating registry at `C:\Users\ksudz\.julia\registries\General.toml`
       Resolving package versions...
        Updating `C:\Users\ksudz\.julia\environments\v1.10\Project.toml`
      [10745b16] + Statistics v1.10.0
      No Changes to `C:\Users\ksudz\.julia\environments\v1.10\Manifest.toml`

[10]: # Вычисление среднего значения массива:
      mean(a)

[10]: 12.0

[11]: # Среднее по столбцам:
      mean(a,dims=1)

[11]: 1×3 Matrix{Float64}:
       11.0  11.75  13.25

[12]: # Среднее по строкам:
      mean(a,dims=2)

[12]: 4×1 Matrix{Float64}:
       10.333333333333334
        7.0
       16.666666666666668
       14.0
```

4.2.2. Транспонирование, след, ранг, определитель и инверсия матрицы

4.2.2. Транспонирование, след, ранг, определитель и инверсия матрицы

Для выполнения таких операций над матрицами, как транспонирование, диагонализация, определение следа, ранга, определителя матрицы и т.п. можно воспользоваться библиотекой (пакетом) LinearAlgebra:

```
[13]: # Подключение пакета LinearAlgebra:
      import Pkg

[14]: Pkg.add("LinearAlgebra")
      using LinearAlgebra

       Resolving package versions...
        Updating `C:\Users\ksudz\.julia\environments\v1.10\Project.toml`
      [37e2e46d] + LinearAlgebra
      No Changes to `C:\Users\ksudz\.julia\environments\v1.10\Manifest.toml`
```

```
[15]: # Массив 4x4 со случайными целыми числами (от 1 до 20):
b = rand(1:20,(4,4))

[15]: 4×4 Matrix{Int64}:
  7  14  11  11
  2  14  11  12
 14  12  14  20
  2  16  15   4

[17]: # Транспонирование:
transpose(b)

[17]: 4×4 transpose(::Matrix{Int64}) with eltype Int64:
  7   2  14   2
 14  14  12  16
 11  11  14  15
 11  12  20   4

[18]: # След матрицы (сумма диагональных элементов):
tr(b)

[18]: 39

[19]: # Извлечение диагональных элементов как массив:
diag(b)

[19]: 4-element Vector{Int64}:
  7
 14
 14
  4

[20]: # Ранг матрицы:
rank(b)

[20]: 4
```

```
[21]: # Инверсия матрицы (определение обратной матрицы):
      inv(b)

[21]: 4×4 Matrix{Float64}:
        0.183218   -0.17475     0.00654349  -0.0123172
        0.292533   -0.0227098  -0.13241     -0.0742879
       -0.314088    0.0138568   0.13164      0.163972
       -0.0839107   0.126251    0.0327175   -0.0615858

[22]: # Определитель матрицы:
      det(b)

[22]: -5195.999999999999

[23]: # Псевдобратная функция для прямоугольных матриц:
      pinv(a)

[23]: 3×4 Matrix{Float64}:
        0.0338864  -0.0894004   0.0429001  -0.00757323
       -0.0565843   0.0507362   0.0139091   0.0236476
        0.0407696   0.0475014  -0.0299499   0.00562164
```

4.2.3. Вычисление нормы векторов и матриц, повороты, вращения

4.2.3. Вычисление нормы векторов и матриц, повороты, вращения

Для вычисления нормы используется `LinearAlgebra.norm(x)`.
Евклидова норма:

$$\|\vec{X}\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2};$$

p-норма:

$$\|\vec{A}\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^p\right)^{1/p}.$$

```
[24]: # Создание вектора X:
      X = [2, 4, -5]

[24]: 3-element Vector{Int64}:
        2
        4
       -5
```

```
[25]: # Вычисление евклидовой нормы:
      norm(X)

[25]: 6.708203932499369

[26]: # Вычисление p-нормы:
      p = 1
      norm(X,p)

[26]: 11.0
```

Евклидово расстояние между двумя векторами $\vec{X}$ и $\vec{Y}$ определяется как $||\vec{X}-\vec{Y}||_2$.

```
[27]: # Расстояние между двумя векторами X и Y:
      X = [2, 4, -5];
      Y = [1,-1,3];
      norm(X-Y)

[27]: 9.486832980505138

[28]: # Проверка по базовому определению:
      sqrt(sum((X-Y).^2))

[28]: 9.486832980505138
```

Угол между двумя векторами $\vec{X}$ и $\vec{Y}$ определяется как $\cos^{-1}\dfrac{\vec{X}^T\vec{Y}}{||\vec{X}||_2||\vec{Y}||_2}$.

```
[30]: # Угол между двумя векторами:
      acos((transpose(X)*Y)/(norm(X)*norm(Y)))

[30]: 2.4404307889469252
```

Вычисление нормы для двумерной матрицы:

```
[31]: # Создание матрицы:
      d = [5 -4 2 ; -1 2 3; -2 1 0]

[31]: 3×3 Matrix{Int64}:
        5  -4  2
       -1   2  3
       -2   1  0

[32]: # Вычисление Евклидовой нормы:
      opnorm(d)

[32]: 7.147682841795258

[33]: # Вычисление p-нормы:
      p=1
      opnorm(d,p)

[33]: 8.0
```

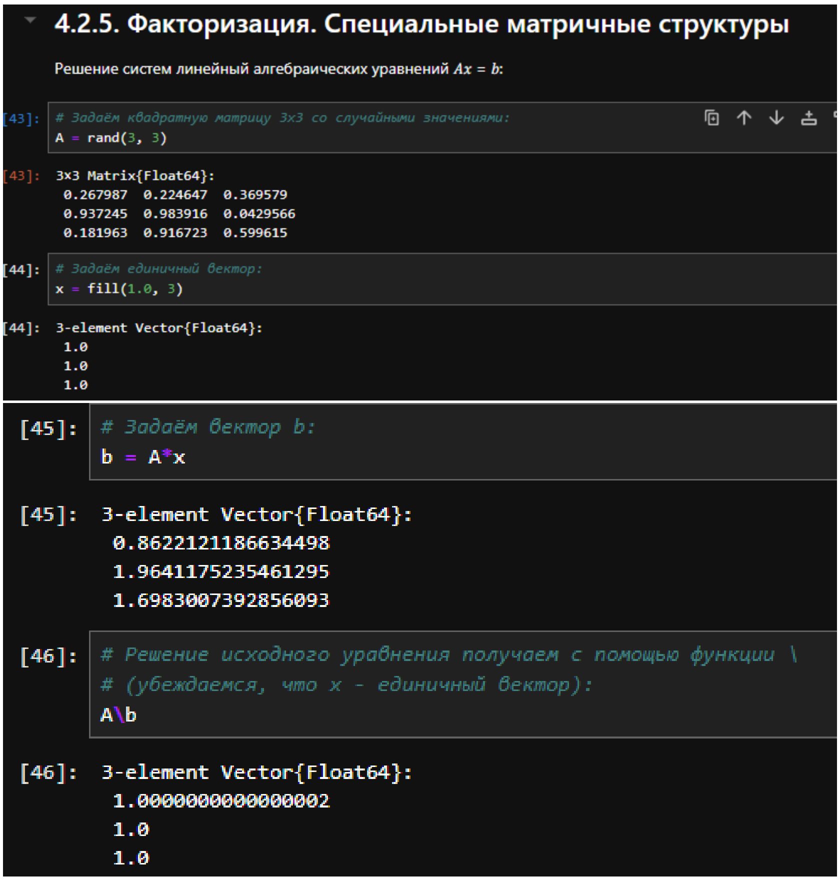
```
[34]: # Поворот на 180 градусов:
      rot180(d)

[34]: 3x3 Matrix{Int64}:
       0   1  -2
       3   2  -1
       2  -4   5

[35]: # Переворачивание строк:
      reverse(d,dims=1)

[35]: 3x3 Matrix{Int64}:
       -2   1  0
       -1   2  3
        5  -4  2

[36]: # Переворачивание столбцов
      reverse(d,dims=2)

[36]: 3x3 Matrix{Int64}:
       2  -4   5
       3   2  -1
       0   1  -2
```

4.2.4. Матричное умножение, единичная матрица, скалярное произведение

4.2.4. Матричное умножение, единичная матрица, скалярное произведение ¶

```
[37]: # Матрица 2x3 со случайными целыми значениями от 1 до 10:
      A = rand(1:10,(2,3))

[37]: 2×3 Matrix{Int64}:
       10  5  10
        5  5   1

[38]: # Матрица 3x4 со случайными целыми значениями от 1 до 10:
      B = rand(1:10,(3,4))

[38]: 3×4 Matrix{Int64}:
       8  8  2   8
       2  8  2   8
       9  8  6  10

[39]: # Произведение матриц A и B:
      A*B

[39]: 2×4 Matrix{Int64}:
       180  200  90  220
        59   88  26   90

[40]: # Единичная матрица 3x3:
      Matrix{Int}(I, 3, 3)

[40]: 3×3 Matrix{Int64}:
       1  0  0
       0  1  0
       0  0  1

[41]: # Скалярное произведение векторов X и Y:
      X = [2, 4, -5]
      Y = [1,-1,3]
      dot(X,Y)

[41]: -17

[42]: # тоже скалярное произведение:
      X'Y

[42]: -17
```

4.2.5. Факторизация. Специальные матричные структуры



```
[47]: # LU-факторизация:
      Alu = lu(A)

[47]: LU{Float64, Matrix{Float64}, Vector{Int64}}
      L factor:
      3×3 Matrix{Float64}:
       1.0        0.0        0.0
       0.194147   1.0        0.0
       0.28593   -0.0781108  1.0
      U factor:
      3×3 Matrix{Float64}:
       0.937245  0.983916  0.0429566
       0.0       0.725699  0.591275
       0.0       0.0       0.403481

[48]: # Матрица перестановок:
      Alu.P

[48]: 3×3 Matrix{Float64}:
       0.0  1.0  0.0
       0.0  0.0  1.0
       1.0  0.0  0.0
```

```
[50]: # Матрица L:
      Alu.L

[50]: 3×3 Matrix{Float64}:
       1.0        0.0        0.0
       0.194147   1.0        0.0
       0.28593   -0.0781108  1.0

[51]: # Матрица U:
      Alu.U

[51]: 3×3 Matrix{Float64}:
       0.937245  0.983916  0.0429566
       0.0       0.725699  0.591275
       0.0       0.0       0.403481
```

- Исходная система уравнений $Ax = b$ может быть решена или с использованием исходной матрицы, или с использованием объекта факторизации:

```
[52]: # Решение СЛАУ через матрицу A:
A\b

[52]: 3-element Vector{Float64}:
 1.0000000000000002
 1.0
 1.0

[53]: # Решение СЛАУ через объект факторизации:
Alu\b

[53]: 3-element Vector{Float64}:
 1.0000000000000002
 1.0
 1.0
```

- Аналогично можно найти детерминант матрицы:

```
[54]: # Детерминант матрицы A:
det(A)

[54]: 0.2744307662052006

[55]: # Детерминант матрицы A через объект факторизации:
det(Alu)

[55]: 0.2744307662052006
```

- Julia позволяет вычислять QR-факторизацию и определяет составной тип факторизации для его хранения:

```
[57]: # QR-факторизация:
Aqr = qr(A)

[57]: LinearAlgebra.QRCompactWY{Float64, Matrix{Float64}, Matrix{Float64}}
Q factor: 3×3 LinearAlgebra.QRCompactWYQ{Float64, Matrix{Float64}, Matrix{Float64}}
R factor:
3×3 Matrix{Float64}:
 -0.991643  -1.15887   -0.250504
  0.0        0.718307   0.535523
  0.0        0.0       -0.385272
```

- По аналогии с LU-факторизацией различные части QR-факторизации могут быть извлечены путём доступа к их специальным свойствам:

```
[58]: # Матрица Q:
Aqr.Q

[58]: 3×3 LinearAlgebra.QRCompactWYQ{Float64, Matrix{Float64}, Matrix{Float64}}

[59]: # Матрица R:
Aqr.R

[59]: 3×3 Matrix{Float64}:
 -0.991643  -1.15887   -0.250504
  0.0        0.718307   0.535523
  0.0        0.0       -0.385272
```

```
[60]: # Проверка, что матрица Q - ортогональная:
Aqr.Q'*Aqr.Q

[60]: 3×3 Matrix{Float64}:
 1.0         -4.16334e-17  2.22045e-16
 0.0          1.0          0.0
 2.498e-16    0.0          1.0
```

- Примеры собственной декомпозиции матрицы *A*:

```
[61]: # Симметризация матрицы A:
      Asym = A + A'

[61]: 3×3 Matrix{Float64}:
       0.535973  1.16189   0.551542
       1.16189   1.96783   0.959679
       0.551542  0.959679  1.19923

[62]: # Спектральное разложение симметризованной матрицы:
      AsymEig = eigen(Asym)

[62]: Eigen{Float64, Float64, Matrix{Float64}, Vector{Float64}}
      values:
      3-element Vector{Float64}:
       -0.11306455463587163
        0.593888560230713
        3.222211176987134
      vectors:
      3×3 Matrix{Float64}:
        0.876092   -0.219201  -0.429434
       -0.481884   -0.427297  -0.764987
       -0.0158098   0.877136  -0.479981

[63]: # Собственные значения:
      AsymEig.values

[63]: 3-element Vector{Float64}:
       -0.11306455463587163
        0.593888560230713
        3.222211176987134

[64]: #Собственные векторы:
      AsymEig.vectors

[64]: 3×3 Matrix{Float64}:
        0.876092   -0.219201  -0.429434
       -0.481884   -0.427297  -0.764987
       -0.0158098   0.877136  -0.479981

[65]: # Проверяем, что получится единичная матрица:
      inv(AsymEig)*Asym

[65]: 3×3 Matrix{Float64}:
        1.0          6.66134e-16  4.16334e-16
       -4.996e-16    1.0          2.22045e-16
        6.66134e-16  1.11022e-15  1.0
```

- Далее рассмотрим примеры работы с матрицами большой размерности и специальной структуры.

```
[66]: # Матрица 1000 x 1000:
      n = 1000
      A = randn(n,n)
```

```
[66]: 1000×1000 Matrix{Float64}:
        0.541853   1.17683    -0.102626    0.711308   …  -0.100048     1.40661
       -1.63016    0.192139   -0.640807    1.27749        0.341348    -0.334139
        0.868226   0.337315    2.07433     0.0740266      0.637573    -0.913898
        0.714988   0.725385   -0.131877    0.19432        0.00760246  -0.426979
       -0.181526  -1.25989     0.194939    0.699478      -0.596407    -0.536494
        0.669015   0.099575   -1.05191     0.0690244  …  -0.132029     0.0727038
        1.05694    0.0697213  -0.251643    0.612429       1.18582      0.456311
        0.560079  -0.198567    0.969559   -0.0749454     -1.98284     -0.310298
       -0.802105  -0.082776    1.07067    -0.43749        2.14436      0.395738
        1.97598   -1.20432    -0.344461    0.784787      -0.0365541   -1.1726
       -1.50265   -1.05075     0.0854441  -1.00694    …  -0.0247736   -0.0620557
        1.36112   -1.71758    -0.0819758   0.844557      -0.65691     -0.888152
        0.972742   0.696585   -0.196527    0.13378        0.205359     0.208161
        ⋮                                             ⋱
       -1.02966    0.507089    0.141884   -1.8208         0.262267     0.0554675
```

```
[67]: # Симметризация матрицы:
      Asym = A + A'
```

```
[67]: 1000×1000 Matrix{Float64}:
        1.08371   -0.453339    0.7656     …   1.67338    2.20554     0.307862
       -0.453339   0.384278   -0.303492       0.766215  -1.33895    -0.958399
        0.7656    -0.303492    4.14866       -1.84645   -0.298946    1.50845
        1.4263     2.00287    -0.0578506      0.969793  -0.387153   -0.635564
        0.850148   0.00813477 -0.0746053      2.81317   -0.0444381   0.121552
       -0.436239   0.409179   -1.33971    …   0.625248  -0.472241    0.302211
        0.202025  -3.16299    -0.479252      -1.15971    1.84215     0.400232
        0.436958   0.00660826  1.04619       -1.05527   -4.38537    -2.03937
       -0.387422   1.32338     1.95016       -1.16502    1.09687    -0.00387839
        2.26474   -1.7631     -2.57739        0.780182   0.952357   -1.93394
       -1.66728   -2.1635      1.27112    …   1.2145    -0.650064    0.222182
        0.570905  -2.4779     -2.43396        1.31673    0.0640703  -1.02218
        1.63754    2.0534     -0.859851      -0.694551   0.351228   -0.888802
        ⋮                                 ⋱
        1.15158    0.250859   -1.744         -0.396391  -0.0547553   0.0219166
        1.18717    0.738621   -0.33156       -0.098546   1.7489     -0.448583
```

```
[68]: # Проверка, является ли матрица симметричной:
      issymmetric(Asym)
```

```
[68]: true
```

- Пример добавления шума в симметричную матрицу (матрица уже не будет симметричной):

```
[69]: # Добавление шума:
      Asym_noisy = copy(Asym)
      Asym_noisy[1,2] += 5eps()
```

```
[69]: -0.4533389657531679
```

```
[70]: # Проверка, является ли матрица симметричной:
      issymmetric(Asym_noisy)
```

```
[70]: false
```

- В Julia можно объявить структуру матрица явно, например, используя Diagonal, Triangular, Symmetric, Hermitian, Tridiagonal и SymTridiagonal:

[71]:
```
# Явно указываем, что матрица является симметричной:
Asym_explicit = Symmetric(Asym_noisy)
```

[71]:
```
1000×1000 Symmetric{Float64, Matrix{Float64}}:
  1.08371   -0.453339    0.7656     …   1.67338    2.20554    0.307862
 -0.453339   0.384278   -0.303492       0.766215  -1.33895   -0.958399
  0.7656    -0.303492    4.14866       -1.84645   -0.298946   1.50845
  1.4263     2.00287    -0.0578506      0.969793  -0.387153  -0.635564
  0.850148   0.00813477 -0.0746053      2.81317   -0.0444381  0.121552
 -0.436239   0.409179   -1.33971    …   0.625248  -0.472241   0.302211
  0.202025  -3.16299    -0.479252      -1.15971    1.84215    0.400232
  0.436958   0.00660826  1.04619       -1.05527   -4.38537   -2.03937
 -0.387422   1.32338     1.95016       -1.16502    1.09687   -0.00387839
  2.26474   -1.7631     -2.57739        0.780182   0.952357  -1.93394
 -1.66728   -2.1635      1.27112    …   1.2145    -0.650064   0.222182
  0.570905  -2.4779     -2.43396        1.31673    0.0640703 -1.02218
  1.63754    2.0534     -0.859851      -0.694551   0.351228  -0.888802
  ⋮                                 ⋱
  1.15158    0.250859   -1.744         -0.396391  -0.0547553  0.0219166
```

- Далее для оценки эффективности выполнения операций над матрицами большой размерности и специальной структуры воспользуемся пакетом BenchmarkTools:

[72]:
```
import Pkg
Pkg.add("BenchmarkTools")
using BenchmarkTools
```

```
   Resolving package versions...
   Installed BenchmarkTools ─ v1.5.0
    Updating `C:\Users\ksudz\.julia\environments\v1.10\Project.toml`
             + BenchmarkTools v1.5.0
    Updating `C:\Users\ksudz\.julia\environments\v1.10\Manifest.toml`
             + BenchmarkTools v1.5.0
             + Profile
Precompiling project...
  ✓ BenchmarkTools
  1 dependency successfully precompiled in 3 seconds. 27 already precompiled.
```

[73]:
```
# Оценка эффективности выполнения операции по нахождению
# собственных значений симметризованной матрицы:
@btime eigvals(Asym);
```

```
  57.328 ms (11 allocations: 7.99 MiB)
```

[74]:
```
# Оценка эффективности выполнения операции по нахождению
# собственных значений зашумлённой матрицы:
@btime eigvals(Asym_noisy);
```

```
  653.783 ms (14 allocations: 7.93 MiB)
```

[75]:
```
# Оценка эффективности выполнения операции по нахождению
# собственных значений зашумлённой матрицы,
# для которой явно указано, что она симметричная:
@btime eigvals(Asym_explicit);
```

```
  57.082 ms (11 allocations: 7.99 MiB)
```

- Далее рассмотрим примеры работы с разряженными матрицами большой размерности. Использование типов Tridiagonal и SymTridiagonal для хранения трёхдиагональных матриц позволяет работать с потенциально очень большими трёхдиагональными матрицами:

[76]:
```
# Трёхдиагональная матрица 1000000 x 1000000:
n = 1000000;
A = SymTridiagonal(randn(n), randn(n-1))
```

[76]:
```
1000000×1000000 SymTridiagonal{Float64, Vector{Float64}}:
  0.299772  -1.63496     ⋅        …   ⋅          ⋅          ⋅
 -1.63496   -0.531184   0.611759      ⋅          ⋅          ⋅
   ⋅         0.611759   1.60504       ⋅          ⋅          ⋅
   ⋅          ⋅        -0.747954      ⋅          ⋅          ⋅
   ⋅          ⋅          ⋅            ⋅          ⋅          ⋅
   ⋅          ⋅          ⋅        …   ⋅          ⋅          ⋅
   ⋅          ⋅          ⋅            ⋅          ⋅          ⋅
   ⋅          ⋅          ⋅            ⋅          ⋅          ⋅
```

```
 .         .         .            .          .          .
 .         .         .      …     .          .          .
 .         .         .         1.07941       .          .
 .         .         .         0.170096   -0.52283      .
 .         .         .        -0.52283     0.587034  -0.376894
 .         .         .            .       -0.376894   2.02015
```

```
[77]: # Оценка эффективности выполнения операции по нахождению
      # собственных значений:
      @btime eigmax(A)
```

```
  371.107 ms (17 allocations: 183.11 MiB)
```

```
[77]: 6.076883425838304
```

4.2.6. Общая линейная алгебра

4.2.6. Общая линейная алгебра

```
[78]: # Матрица с рациональными элементами:
      Arational = Matrix{Rational{BigInt}}(rand(1:10, 3, 3))/10
```

```
[78]: 3×3 Matrix{Rational{BigInt}}:
       4//5   1//2   1
       7//10  1      3//10
       7//10  7//10  9//10
```

```
[79]: # Единичный вектор:
      x = fill(1, 3)
```

```
[79]: 3-element Vector{Int64}:
       1
       1
       1
```

```
[80]: # Задаём вектор b:
      b = Arational*x
```

```
[80]: 3-element Vector{Rational{BigInt}}:
       23//10
         2
       23//10
```

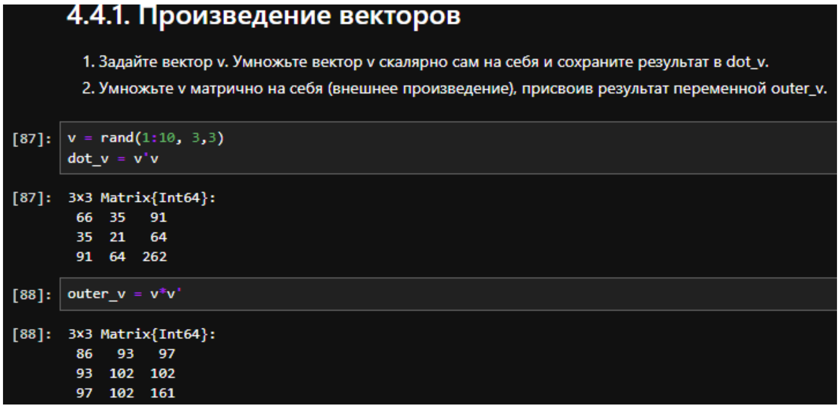
```
[81]: # Решение исходного уравнения получаем с помощью функции \
      # (убеждаемся, что x - единичный вектор):
      Arational\b
```

```
[81]: 3-element Vector{Rational{BigInt}}:
       1
       1
       1
```

```
[82]: # LU-разложение:
      lu(Arational)

[82]: LU{Rational{BigInt}, Matrix{Rational{BigInt}}, Vector{Int64}}
      L factor:
      3x3 Matrix{Rational{BigInt}}:
        1     0     0
       7//8   1     0
       7//8  7//15  1
      U factor:
      3x3 Matrix{Rational{BigInt}}:
       4//5  1//2      1
        0    9//16  -23//40
        0     0      22//75
```

4.4 Задания для самостоятельного выполнения

4.4.1. Произведение векторов



4.4.1. Произведение векторов

1. Задайте вектор v. Умножьте вектор v скалярно сам на себя и сохраните результат в dot_v.
2. Умножьте v матрично на себя (внешнее произведение), присвоив результат переменной outer_v.

```
[87]: v = rand(1:10, 3,3)
      dot_v = v'v

[87]: 3×3 Matrix{Int64}:
       66  35   91
       35  21   64
       91  64  262

[88]: outer_v = v*v'

[88]: 3×3 Matrix{Int64}:
       86   93   97
       93  102  102
       97  102  161
```

4.4.2. Системы линейных уравнений

4.4.2. Системы линейных уравнений

1. Решить СЛАУ с двумя неизвестными.

a) $\begin{cases} x + y = 2, \\ x - y = 3. \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + y = 2, \\ 2x + 2y = 4. \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + y = 2, \\ 2x + 2y = 5. \end{cases}$

d) $\begin{cases} x + y = 1, \\ 2x + 2y = 2, \\ 3x + 3y = 3. \end{cases}$

e) $\begin{cases} x + y = 2, \\ 2x + y = 1, \\ x - y = 3. \end{cases}$

f) $\begin{cases} x + y = 2, \\ 2x + y = 1, \\ 3x + 2y = 3. \end{cases}$

[114]:
```
## a)
a = [1 1; 1 -1]
b = [2; 3]
a\b
```

[114]:
```
2-element Vector{Float64}:
  2.5
 -0.5
```

•[116]:
```
## b)
a = [1 1; 2 2]
b = [2; 4]
a\b
## бесконечное число решений, вся система линейно зависима
```

[116]:
```
2-element Vector{Int64}:
 2
 4
```

•[118]:
```
## c)
a = [1 1; 2 2]
b = [2; 5]
a\b
## Нет решений, т.к матрица коэффициентов линейно зависима, а векторы нет
```

[118]:
```
2-element Vector{Int64}:
 2
 5
```

```
[120]: ## d)
a = [2 2; 3 3]
b = [2; 3]
a\b
## бесконечное число решений

[120]: 2-element Vector{Int64}:
 2
 3

[121]: ## e)
a = [1 1; 2 1; 1 -1]
b = [2; 1; 3]
a\b

[121]: 2-element Vector{Float64}:
  1.5000000000000002
 -0.9999999999999999

[122]: ## f)
a = [1 1; 2 1; 3 2]
b = [2; 1; 3]
a\b

[122]: 2-element Vector{Float64}:
 -0.9999999999999989
  2.9999999999999982
```

2. Решить СЛАУ с тремя неизвестными.

a) $\begin{cases} x+y+z=2, \\ x-y-2z=3. \end{cases}$

b) $\begin{cases} x+y+z=2, \\ 2x+2y-3z=4, \\ 3x+y+z=1. \end{cases}$

c) $\begin{cases} x+y+z=1, \\ x+y+2z=0, \\ 2x+2y+3z=1. \end{cases}$

d) $\begin{cases} x+y+z=1, \\ x+y+2z=0, \\ 2x+2y+3z=0. \end{cases}$

[123]:
```
## a)
a = [1 1 1; 1 -1 -2]
b = [2; 3]
a\b
```

[123]:
```
3-element Vector{Float64}:
  2.2142857142857144
  0.35714285714285704
 -0.5714285714285712
```

```
[124]: ## b)
       a = [1 1 1; 2 2 -3; 3 1 1]
       b = [2; 4; 1]
       a\b

[124]: 3-element Vector{Float64}:
        -0.5
         2.5
         0.0

[126]: ## c)
       a = [1 1 1; 1 1 2; 2 2 3]
       b = [1; 0; 1]
       a\b
       ## Бесконечное число решени

[126]: 3-element Vector{Int64}:
        1
        0
        1

[128]: ## d)
       a = [1 1 1; 1 1 2; 2 2 3]
       b = [1; 0; 0]
       a\b
       ## Нет решений

[128]: 3-element Vector{Int64}:
        1
        0
        0
```

4.4.3. Операции с матрицами

4.4.3. Операции с матрицами ¶

1. Приведите приведённые ниже матрицы к диагональному виду

a) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

```
32]: ## a)
a = [1 -2; -2 1]
Matrix(Diagonal(eigen(a).values))
```

```
32]: 2x2 Matrix{Float64}:
 -1.0  0.0
  0.0  3.0
```

```
33]: ## b)
a = [1 -2; -2 3]
Matrix(Diagonal(eigen(a).values))
```

```
33]: 2x2 Matrix{Float64}:
 -0.236068  0.0
  0.0       4.23607
```

```
[134]: ## c)
a = [1 -2 0; -2 1 2; 0 2 0]
Matrix(Diagonal(eigen(a).values))
```

```
[134]: 3x3 Matrix{Float64}:
 -2.14134  0.0       0.0
  0.0      0.515138  0.0
  0.0      0.0       3.6262
```

2. Вычислите

a) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}^{10}$

b) $\sqrt{\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}}$

c) $\sqrt[3]{\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}}$

d) $\sqrt{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}}$

```
[136]: ## a)
       a = [1 -2; -2 3]
       a^10

[136]: 2×2 Matrix{Int64}:
         514229  -832040
        -832040  1346269

[138]: ## b)
       b = [5 -2; -2 5]
       b^(1/2)

[138]: 2×2 Symmetric{Float64, Matrix{Float64}}:
         2.1889    -0.45685
        -0.45685    2.1889

[139]: ## c)
       c = [1 -2; -2 1]
       c^(1/3)

[139]: 2×2 Symmetric{ComplexF64, Matrix{ComplexF64}}:
         0.971125+0.433013im  -0.471125+0.433013im
        -0.471125+0.433013im   0.971125+0.433013im

[140]: ## d)
       d = [1 2; 2 3]
       d^(1/2)

[140]: 2×2 Symmetric{ComplexF64, Matrix{ComplexF64}}:
        0.568864+0.351578im  0.920442-0.217287im
        0.920442-0.217287im   1.48931+0.134291im
```

3. Найдите собственные значения матрицы A, если

$$A = \begin{pmatrix} 140 & 97 & 74 & 168 & 131 \\ 97 & 106 & 89 & 131 & 36 \\ 74 & 89 & 152 & 144 & 71 \\ 168 & 131 & 144 & 54 & 142 \\ 131 & 36 & 71 & 142 & 36 \end{pmatrix}$$

- Создайте диагональную матрицу из собственных значений матрицы A. Создайте нижнедиагональную матрицу из матрица A. Оцените эффективность выполняемых операций.

```
[141]: A = [140 97 74 168 131; 97 106 89 131 36; 74 89 152 144 71; 168 131 144 54 142; 131 36 71 142 36]

[141]: 5×5 Matrix{Int64}:
        140   97   74  168  131
         97  106   89  131   36
         74   89  152  144   71
        168  131  144   54  142
        131   36   71  142   36
```

```
[149]: @btime Matrix(Diagonal(eigvals(A)))

         1.470 μs (12 allocations: 2.86 KiB)

[149]: 5×5 Matrix{Float64}:
        -128.493    0.0       0.0      0.0       0.0
           0.0    -55.8878    0.0      0.0       0.0
           0.0      0.0      42.7522   0.0       0.0
           0.0      0.0       0.0     87.1611    0.0
           0.0      0.0       0.0      0.0     542.468
```

```
[151]: @btime Alu = lu(A).L

         246.734 ns (4 allocations: 640 bytes)

[151]: 5×5 Matrix{Float64}:
        1.0        0.0        0.0        0.0       0.0
        0.779762   1.0        0.0        0.0       0.0
        0.440476  -0.47314    1.0        0.0       0.0
        0.833333   0.183929  -0.556312   1.0       0.0
        0.577381  -0.459012  -0.189658   0.897068  1.0
```

4.4.4. Линейные модели экономики

4.4.4. Линейные модели экономики

Линейная модель экономики может быть записана как СЛАУ

$$x - Ax = y,$$

где элементы матрицы A и столбца y — неотрицательные числа. По своему смыслу в экономике элементы матрицы A и столбцов x, y не могут быть отрицательными числами.

1. Матрица A называется продуктивной, если решение x системы при любой неотрицательной правой части y имеет только неотрицательные элементы x_i. Используя это определение, проверьте, являются ли матрицы продуктивными.
   a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$
   b) $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$
   c) $\frac{1}{10}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

[ ]:
```
## a)
a = [1 2; 3 4]
y = rand(0:100000,2)
e = Matrix{Int}(I,2,2)
y\(e-a)
## значение отрицательные -> матрица не продуктивна
```

[ ]:
```
1x2 transpose(::Vector{Float64}) with eltype Float64:
 -2.48707e-5  -3.73589e-5
```

•[155]:
```
## b)
a = [1/2 1; 3/2 2]
y = rand(0:100000,2)
e = Matrix{Int}(I,2,2)
y\(e-a)
## значение отрицательные -> матрица не продуктивна
```

[155]:
```
1x2 transpose(::Vector{Float64}) with eltype Float64:
 -3.42817e-6  -1.91936e-5
```

[156]:
```
## c)
a = [1/10 2/10; 3/10 4/10]
y = rand(0:100000,2)
e = Matrix{Int}(I,2,2)
y\(e-a)
## значения положительные -> матрица продуктивна
```

[156]:
```
1x2 transpose(::Vector{Float64}) with eltype Float64:
 3.14849e-6  2.53702e-6
```

2. Критерий продуктивности: матрица A является продуктивной тогда и только тогда, когда все элементы матрица

$$(E-A)^{-1}$$

являются неотрицательными числами. Используя этот критерий, проверьте, являются ли матрицы продуктивными.

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

b) $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

c) $\frac{1}{10}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

```
]: ## a)
a = [1 2; 3 1]
e = Matrix{Int}(I,2,2)
inv(e-a)
## все элементы матрицы отрицательные -> матрица не продуктивна

]: 2x2 Matrix{Float64}:
 -0.0  -0.333333
 -0.5   0.0
```

```
•[159]: ## b)
a = [1/2 1; 3/2 1/2]
e = Matrix{Int}(I,2,2)
inv(e-a)
## все элементы матрицы отрицательные -> матрица не продуктивна

[159]: 2x2 Matrix{Float64}:
 -0.4  -0.8
 -1.2  -0.4
```

```
•[160]: ## c)
a = [1/10 2/10; 3/10 1/10]
e = Matrix{Int}(I,2,2)
inv(e-a)
## все элементы матрицы не отрицательные -> матрица продуктивна

[160]: 2x2 Matrix{Float64}:
 1.2  0.266667
 0.4  1.2
```

3. Спектральный критерий продуктивности: матрица A является продуктивной тогда и только тогда, когда все её собственные значения по модулю меньше 1. Используя этот критерий, проверьте, являются ли матрицы продуктивными.

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

b) $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

c) $\frac{1}{10}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 0.1 & 0.2 & 0.3 \\ 0 & 0.1 & 0.2 \\ 0 & 0.1 & 0.3 \end{pmatrix}$

```
•[164]: ## a)
a = [1 2; 3 1]
eigvals(a)
## Все собственные значения по модулю не меньше 1 -> матрица не продуктивна

[164]: 2-element Vector{Float64}:
 -1.4494897427831779
  3.4494897427831783
```

```
[166]: ## b)
       b = [1/2 1; 3/2 1/2]
       eigvals(b)
       ## Не все собственные значения по модулю меньше 1 -> матрица не продуктивна

[166]: 2-element Vector{Float64}:
        -0.7247448713915892
         1.724744871391589

[167]: ## c)
       c = [1/10 2/10; 3/10 1/10]
       eigvals(c)
       ## Все собственные значения по модулю меньше 1 -> матрица продуктивна

[167]: 2-element Vector{Float64}:
        -0.14494897427831785
         0.34494897427831783

[168]: ## d)
       d = [0.1 0.2 0.3; 0 0.1 0.2; 0 0.1 0.3]
       eigvals(d)
       ## Все собственные значения по модулю меньше 1 -> матрица продуктивна

[168]: 3-element Vector{Float64}:
        0.02679491924311228
        0.1
        0.3732050807568774
```

Выводы

Использую Jupyter lab повторил примеры из раздела 4.2 и выполнил задания для самостоятельной работы. Изучил возможности специальных пакетов Julia для выполнения и оценки эффективности операций над объектами линейной алгебры.