LINJALEN

2021-05-19 - Grupp 18

MAX ISRAELSSON (MAXISR@KTH.SE 20010205-2677)
TOMAS WELDETINSAE (TYWE@KTH.SE 19980831-0156)

Linjalen – Grupp 18
Max Israelsson, Tomas Weldetinsae
2021-05-19

Linjalen

Vi började med att bestämma startgissningen på q vilket var: 9.869604401. Vi fick fram q-värdet genom att lösa det förenklade problemet då y'-termen försummades. Vi löste i stället den förenklade andra ordningens ODE: $y'' + qy = 0$ med samma randvillkor som gavs i instruktionen.

Vi visar först att lösningen kan skrivas som: $y(s) = y_0 \cos(\sqrt{q}s)$:

$$y_0 = 0.3\ m$$
$$y'' + qy = 0$$
$$y = y_0 \cos(\sqrt{q}s)$$
$$y' = -y_0\sqrt{q}\sin(\sqrt{q}s)$$
$$y'' = -y_0 q\cos(\sqrt{q}s)$$
$$-y_0 q\cos(\sqrt{q}s) + y_0\,\mathrm{q}\cos(\sqrt{q}s) = 0$$
$$HL = VL\ \blacksquare$$

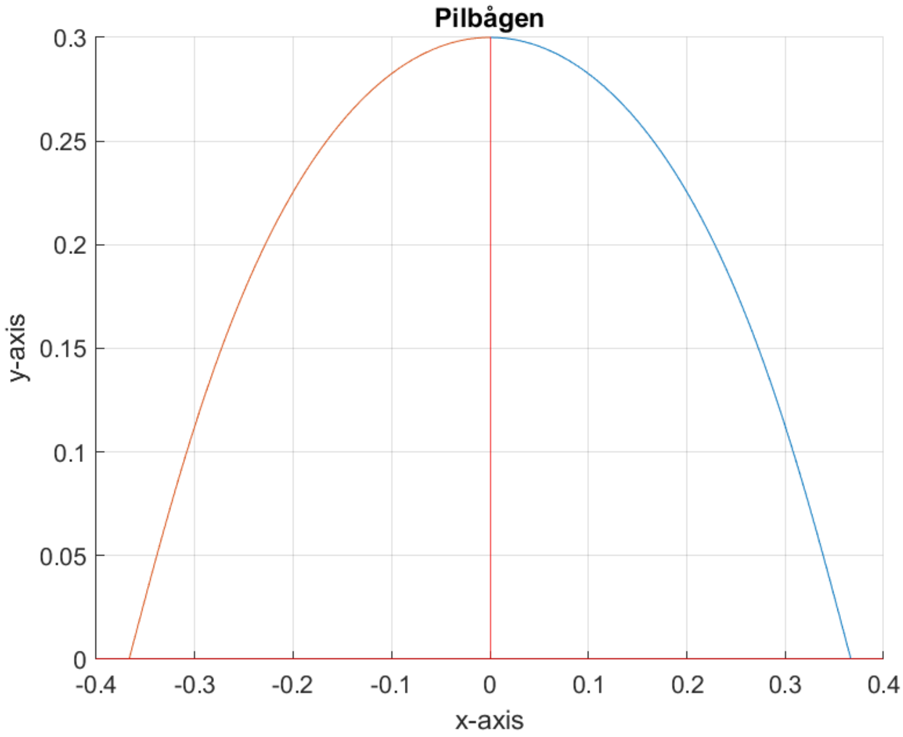
Vi beräknar sedan fram q-värdet:

$$L = 1\ m, \qquad y_0 = 0.3\ m$$
$$y\left(\frac{L}{2}\right) = 0$$
$$y0 * \cos(\sqrt{q} \times 0.5) = 0$$
$$\cos\left(\sqrt{q \times} 0.5\right) = 0$$
$$(1)\quad \sqrt{q} \times 0.5 = \frac{\pi}{2} + 2\pi n\ (n \geq -\frac{1}{4})$$
$$q = \pi^2 + 8\pi^2 n + 16\pi^2 n^2$$
$$(2)\quad \sqrt{q} \times 0.5 = \frac{3\pi}{2} + 2\pi n\ (n \geq -\frac{3}{4})$$
$$q = 9\pi^2 + 24\pi^2 n + 16\pi^2 n^2$$
$$Svar\ q_1 = 9.869604401\ \ldots$$

Vi använde oss enbart av första lösningen till ekvationen, eftersom vi vill att x-axeln ska vara stabil tog vi enbart första q-värdet när n = 0.

För att få ett mer korrekt q implementerade vi sedan in en funktion som med hjälp av Runge-Kutta 4 som löser begynnelsevärdesproblemet med de tre villkoren vid s = 0, (Se MATLAB-kod) med startvärde för q = 9.869604401. Vi skapade en funktion med differentialekvationerna och gjorde om de till första ordningens ODE. Vi använde oss av sekantmetoden för att ta fram vårt q-värde där y(L/2) = 0. Detta gav oss q = 11.4177360042421 med y-värdet: -6.96464370550376e-17.

Vi beräknade sedan fram kraften **S** i bågsträngen med formeln: S = q*E*I. Vi fick kraften: 5.85729857014511 N. Därefter tog vi även fram bågsträngens längd (ℓ) med hjälp av Pythagoras sats. Vi fick längden: 0.733576947720634 m.



Figur 1: Bilden på den skapade pilbågen i MATLAB.

Vi gjorde sedan en experimentell störningsanalys och fick osäkerheten E_y = 0.231209154084675 på S och E_y = 0.036981250255832 på båglängden (ℓ).

Algoritmerna som användes för problemet var: Sekantmetoden och Runge-Kutta 4.

Vi använde sekantmetoden för att hitta ett värde på q som ger oss $y(L/2) = 0$. Vi använde startvärdena q_0 = 9.869604401 och q_1 = 12. Vi kunde beräkna fram ett bättre värde på q genom att skapa en funktion som heter “kollafel” där vi tar in vår gissning på q och beräknar med den i Runge-Kutta 4. Värdena vi fick från varje funktionsanrop med de olika q-värdena användes i sekantmetoden. Sekantmetoden har konvergensordning ≈ 1.62.

Vi använde också av Runge-Kutta 4 för att approximera lösningarna till våra ordinära differentialekvationer. För att kunna använda metoden var vi tvungna att skriva om differentialekvationerna till första ordningen, så att det blev ett system av tre ODE. Vi använde randvillkoren som byggnadsvärden till systemet av ODE:

$$\frac{dy}{ds} = z$$

$$\frac{d^2y}{ds^2} = -qy\sqrt{1-z^2}$$

$$\frac{dx}{ds} = \sqrt{1-z^2}$$

I det första ordningens system ***y’=f(t,y)*** är y den vektorvärda funktionen med följande utseende:

$$y'$$

$$f = -qy\sqrt{1-y'^2}$$

$$\sqrt{1-y'^2}$$

där $\boldsymbol{y}$ är en vektor med de angivna randvillkoren:

$$y = \begin{pmatrix} 0.3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Vi kontrollerade även längden på linjalen med hjälp av Pythagoras sats som gav oss ett värde nära 1, vilket tyder på att båglängden är rimlig. Värdet på q vi beräknade fram är rimligt då det är nära vår startgissning som togs fram med den förenklade andra ordningens ODE med samma randvillkor.

Numerisk tillförlitlighetsbedömning:

Tabell 1 Empirisk bestämning av noggrannhetsordningen för q.

	h	$\tilde{q}_h$	$\tilde{q}_h - \tilde{q}_{h/2}$	$\frac{\tilde{q}_h - \tilde{q}_{h/2}}{\tilde{q}_{h/2} - \tilde{q}_{h/4}}$	$log2\,\frac{\tilde{q}_h - \tilde{q}_{h/2}}{\tilde{q}_{h/2} - \tilde{q}_{h/4}}$
h	1/100	11.4177362535787	2.33855899978153e-07	16.0489656854732	4.00440841724916
h/2	1/200	11.4177360197228	1.45714000865382e-08	16.0248353653414	4.00223762996379
h/4	1/400	11.4177360051514	9.09301078877434e-10		
h/8	1/800	11.4177360042421			

Vi fick fram att noggrannhetsordningen för Runge-Kuttan är 4, se tabell 1. Detta tyder på att vårt resultat är pålitligt.

Tabell 2 Empirisk bestämning av noggrannhetsordningen för S.

	h	$\tilde{S}_h$	$\tilde{S}_h - \tilde{S}_{h/2}$	$\frac{\tilde{S}_h - \tilde{S}_{h/2}}{\tilde{S}_{h/2} - \tilde{S}_{h/4}}$	$log2\,\frac{\tilde{S}_h - \tilde{S}_{h/2}}{\tilde{S}_{h/2} - \tilde{S}_{h/4}}$
h	1/100	5.85729869808587	1.1996810034276e-07	16.0490512170393	4.00441610594636
h/2	1/200	5.85729857811777	7.47508988041545e-09	16.0251548496059	4.00226639242899
h/4	1/400	5.85729857064268	4.6645975970705e-10		
h/8	1/800	5.85729857017622			

Vi fick även fram här att noggrannhetsordningen för Runge-Kuttan är 4, se tabell 2.

Ändra toleransen – sekantmetoden:

Vi använder steglängden h = 1/800.

Tabell 3 Sambanden mellan toleransparamter τ och uppskattning av felet i lösningen.

τ	q	S	ℓ
1e-12	11.4177360042421	5.85729857017622	1.18978998201801
1e-6	11.4177360042421	5.85729857017621	1.18978998201801
1e-3	11.4177360043286	5.85729857022056	1.18978998201948
1e-3/2	11.4166920275901	5.85676301015374	1.18977218024614

Vi kontrollade även feluppskattningen för sekantmetoden med tolerans 1e-12 och steglängd 1/800, se tabell 4. Vi tog fram konstanten genom att beräkna:

$$P \approx 1.62$$

$$\frac{e_{n+1}}{e_n^P} = K$$

Tabell 4 Feluppskattning av sekantmetoden med toleransen 1e-12 och steglängd 1/800.

Iteration	Konstant (K)
0	0.204554135645396
1	0.219698774984926
2	0.220986022172215
3	0.220953195942916
4	0.220953253935284
5	0.220953253937994

Experimentell störningsanalys:

Störningsanalys på S och ℓ med de angivna felgränserna i olika parametrar är följande:

De angivna felgränserna:

$$y_0 = 0.30 \pm 0.01, \;\; \mathrm{L} = 1.00 \pm 0.01, \;\; \mathrm{E} = 7.6 \times 10^9 \pm 0.3 \times 10^9$$

Osäkerheten i S:

$\tilde{y}_1$ är de värde vi får på kraften i bågsträngen när vi stör y_0 med 0.01. $\tilde{y}_2$ är de värde vi får på kraften i bågsträngen när vi stör L med 0.01. $\tilde{y}_3$ är de värde vi får på kraften i bågsträngen när vi stör E med 0.3 $\times$ 10^9. $\tilde{y}$ är ursprungliga värdet på kraften i bågsträngen.

$$E(S)_y \approx |\tilde{y}_1 - \tilde{y}| + |\tilde{y}_2 - \tilde{y}| + |\tilde{y}_3 - \tilde{y}| = |5.93960162475374 - 5.85729857017622| + |5.71953002123524 - 5.85729857017622| + |6.08850772426212 - 5.85729857017622| = 0.4512807576044$$

Osäkerheten i ℓ:

$\tilde{y}_1$ är de värde vi får på bågländens längd när vi stör y_0 med 0.01. $\tilde{y}_2$ är de värde vi får på båglängdens längd när vi stör L med 0.01. $\tilde{y}$ är ursprungliga värdet på bågländens längd.

$$E(\ell)_y \approx |\tilde{y}_1 - \tilde{y}| + |\tilde{y}_2 - \tilde{y}| = \\ = |0.710516254011614 - 0.733576947720634| \\ + |0.747497504267446 - 0.733576947720634| = 0.036981250255832$$

Egen arbetsinsats:

Vi har skrivit MATLAB-koden och rapporten självständigt och inte kopierat. De gånger vi har fastnat har vi använt oss av handledningstiderna för att få hjälp. De hjälpte oss tyda uppgiften. Vi hade problem med att implementera algoritmen inskjutningsmetoden för att lösa problemet. Vi hittade ett gammalt föreläsningsmaterial - DN1240, Numeriska Metoder av Ninni Carlsund Levin från VT2012 där hon går igenom ett liknande problem med finita differensmetoden.