

Bölüm 1

AYRIK-ZAMANLI İşARETLER VE SİSTEMLER

1.1 GİRİŞ

Sayısal işaret işleme, işaretlerin sayısal bilgisayar yada özel amaçlı sayısal donanımda bir sayılar dizisi olarak gösterilmesi ve bu işaret dizisi üzerinde çeşitli işlemler yaparak istenen bir bilgi yada büyüklüğün bu diziden çıkarılmasına dayanmaktadır.

Sayısal işaret işleme 1960'lı yıllardan bu yana hızla gelişme gösteren bir bilim ve mühendislik alanıdır. Bu hızlı gelişme sayısal bilgisayar teknolojisi ve tümleşik devre tasarımındaki önemli ilerlemelerin bir sonucu olmuştur.

Başlangıçta sayısal bilgisayarlar ve diğer sayısal donanım analog donanıma göre çok yer tutuyordu ve pahalıydı. Bu yüzden sayısal işaret işlemenin kullanımı gerçek-zaman olmayan bilimsel çalışmalar ve endüstri uygulamalarıyla sınırlıydı (örneğin petrol yada diğer yeraltı kaynaklarının araştırılması). Ancak sayısal devrelerin gittikçe hızlanması, küçülmesi ve ucuzlaması, sayısal işaret işleyicileri birçok ticari ürün ve uygulamanın ayrılmaz parçası haline getirdi. Bu uygulamalar için algoritma ve tasarımları gerçekleştiren sayısal işaret işleme de elektrik mühendisliğinin önemli dallarından biri oldu.

Çok yüksek bant genişlikli işaretlerin, örneğin radyo frekansı (RF) işaretlerin işlenmesinde analog ve optik işaret işleme yöntemleri kullanılmaktadır.

Bu işaretlerin örneklenmesi ve sayısallaştırılması sorun olmaktadır.

Ancak genel olarak, eğer sayısal yöntemlerle işaret işleme mümkünse tercih edilmektedir.

Bunda sayısal işaret işlemenin bazı avantajları rol oynamaktadır.

- Sayısal işlemciler, sayısal kelime uzunluğu gerekli doğruluğa uygun seçilerek istenen seviyede kesinlik sağlayabilirler.

- Analog devrelerin ise kullanılan devre elemanlarının çalışma toleranslarına bağlı olan bir kesinliği vardır.
- Sayısal işlemciler yazılım yada donanım hatasıyla devre dışı kalmadıkları sürece doğru ve kesin olarak çalışırlar.
- Analog devrelerde ise farklı ortam şartlarına (sıcaklık, basınç, nem vb.) bağlı olarak çalışma karakteristiği değişebilir.

ısal işlemcilerin elektriksel gürültüye duyarlılıkları yok denecek seviyede düşüktür.

Sayısal dizinin kayan-nokta (floating point) biçiminde gösterilmesi kelime uzunluğu sabit kalsa bile işaret dizisinin

dinamik aralığının isteğe bağlı olarak sınırsız şekilde değiştirilebilmesini sağlar.

- Sayısal işlemcilerde yazılım değişikliği ile, donanıma el değmeden yapılan işlemlerde değişiklik ve güncelleme yapmak mümkündür. Sayısal bilginin saklanması maliyeti çok daha düşük ve güvenilirliği daha yüksektir.
- Sayısal işaretler güvenlik için şifrelenebilir, hatalara karşı hata sezici ve düzeltici bir kodla kodlanabilir ve bilgi kaybolmamak şartıyla işaretin boyutunu küçültecek şekilde sıkıştırılabilirler.

Bütün bunların sonucunda, sayısal işaret işleme güncel elektronik sistemlerde önemli bir rol oynamaktadır. Bunların arasında ses, görüntü, veri ve video iletim ve saklama sistemleri; tıbbi görüntüleme ve teşhis sistemleri; radar, sonar ve uydu uzaktan görüntüleme sistemleri; sayısal kontrol sistemleri yer almaktadır.

1.2 İŞARETLERİN SINIFLANDIRILMASI

Fiziksel bir sistemin davranışına yada durumuna ilişkin bilgi taşıyan ve bir yada daha fazla bağımsız değişkene bağlı olarak değişen her türlü büyüklüğe işaret diyoruz.

Buna göre

- konuşma,
- radyo dalgaları
- elektrokardiyografi
- bir ülkedeki işsizlik oranı

- bankaların faiz oranları
 - uzay araçlarından yeryüzüne gönderilen görüntüler d
- işaret olarak kabul edilebilir.

İşaretin Boyutu

İşaret bir, iki veya N bağımsız değişkenin fonksiyonu olabilir.

Örneğin, konuşma işareti yada bankaların faiz oranları bir bağımsız değişkenin, yani zamanın fonksiyonudur. Bu tür işaretler bir-boyutlu işaretler olarak adlandırılacaktır.

Görüntü işaretinde ise her iki bağımsız değişken de uzaysal boyutludur. Bu kitapta sadece zamana göre değişen bir boyutlu işaretler incelenecektir.

İşaretin Türleri

İşaretleri zamana göre değişimleri dikkate alınarak iki büyük grupta toplamak mümkündür:

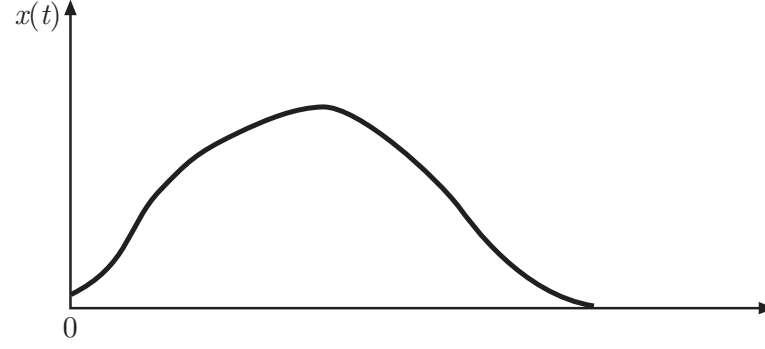
(a) Sürekli-zamanlı işaretler

(b) Ayrık-zamanlı işaretler

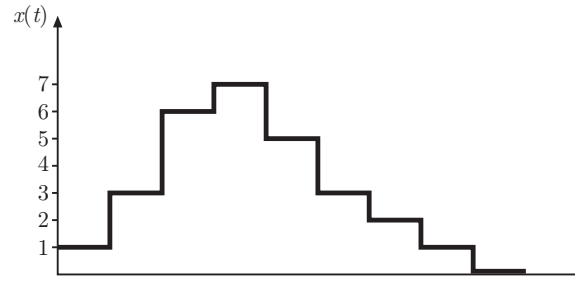
Eğer işaret, Şekil 1.1 ve 1.2’de verildiği gibi sürekli bir zaman aralığı içinde tanımlanırsa sürekli-zamanlı işaret olarak adlandırılır.

İşaretleri genliklerine göre de iki gruba ayırmak mümkündür.

(a) Sürekli-genlikli işaretler



Şekil 1.1 Genliği kuvantalanmamış sürekli-zamanlı işaret. İşaretin genliği sürekli değerler alır. “Analog işaret” adı verilen işaret bu türdendir.



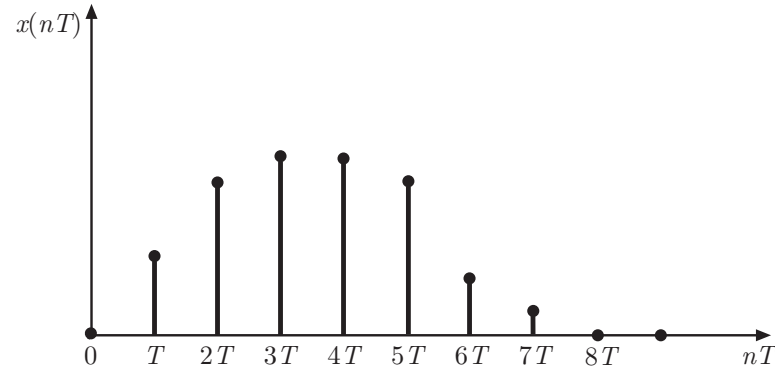
Şekil 1.2 Genliği kuvantalanmış sürekli zamanlı işaret. İşaretin genliği ayırık değerler alabilir.

(b) Ayırık-genlikli işaretler

Şekil 1.1 ve 1.3'teki gibi sürekli bir aralık içinde herhangi bir değeri alabilen işaret sürekli genliklidir. Isı fonksiyonları ve bir taşıtın hızı sürekli genliklidir. Ancak, Şekil 1.2 ve 1.4'te görüldüğü gibi bazı işaretler sadece ayırık değerler alabilmektedir. Örneğin, bankaların faiz oranları ayırık-genlikli işaretlerdir. Gerçekten faiz oranları %5, %13.5, %10.25 gibi ayırık değerlerle ifade edilir.

Analog İşaretler

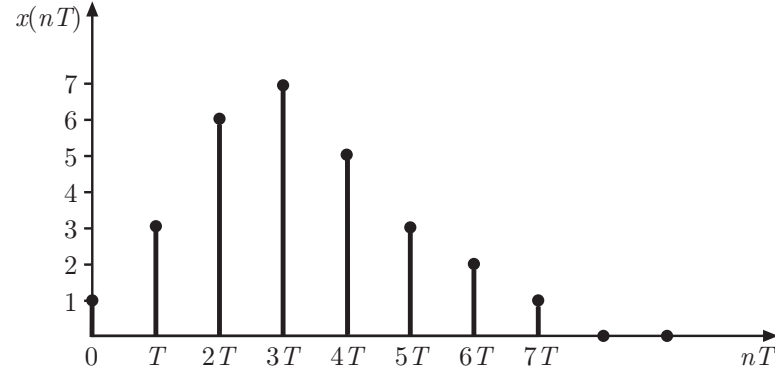
Hem zamana hem de genliğe göre sürekli olan işaretler analog işaret olarak adlandırılır. Klasik devreler ve sistemler teorisinde karşılaşılan akım ve gerilim türünden işaretler analog işaretlerdir. Yani, sürekli zamanlı işaret sürekli bir aralık içinde herhangi bir değeri alabilir.



Şekil 1.3 Genliği kuvantalanmamış ayırık-zamanlı işaret. Şekil 1.1'deki işaretin T anlarında örneklenmesiyle elde edilir.

Sayısal İşaretler

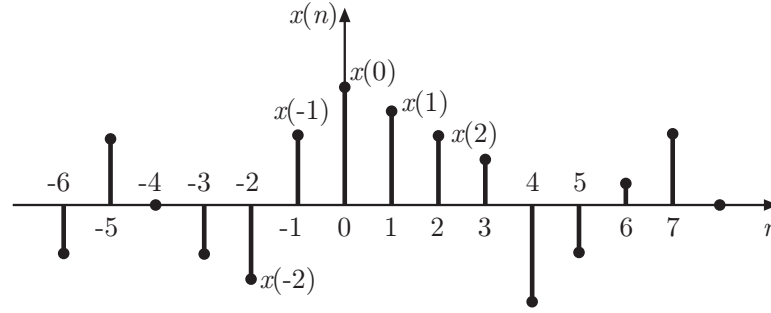
Ayrık zamanlı işaretin genliği sadece ayırık değerler alabiliyorsa bu işarete sayısal işaret adı verilir.



Şekil 1.4 Genliği kuvantalanmış ayrık-zamanlı işaret. “Sayısal işaret” (digital signal) bu türdendir.

Ayrık-zamanlı işareti bir sayısal işarete dönüştürmek için her ayrık andaki genliği bir kuvantalama seviyesine atamak gerekir.

Bu atama sırasındaki yuvarlatmadan dolayı ortaya çıkacak hata kuvantalama hatası olarak adlandırılır.



Şekil 1.5 Sabit bir örnekleme aralığı ile elde edilen sayısal işaretlerin grafiksel gösterilimi.

İşaretleri zamana ve genliğe göre sınıflandırılmalarından başka, rastgele ve deterministik işaret olarak da iki gruba ayırmak mümkündür.

Deterministik (Gerekirci) İşaretler

Bu çeşit işaret genellikle zamanın bir fonksiyonu olarak tanımlanır. Bu fonksiyon ya analitik bir ifade ya da bir diferansiyel denklemin çözümüdür. İşaretin her an aldığı değer kesin olarak bu fonksiyon tarafından belirtilmektedir.

$$s(t) = A \sin(\omega t + \phi) \quad (1.1)$$

Rastgele İşaretler

Bir işaretin herhangi bir anda aldığı kesin değer değil, alabileceği değerlerin olasılık dağılımı biliniyorsa bu işaretlere rastgele işaretler denir. Bu çeşit bir işaret $p_s(x, t)$ olasılık yoğunluk fonksiyonu ile tanımlanır.

$$p_s(x, t) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\text{olasılık}\{x < s(t) < x + \Delta x\}}{\Delta x} \quad (1.2)$$

Eğer rastgele işaretin istatistiksel özellikleri zamanla değişmiyorsa, olasılık yoğunluk fonksiyonu zamandan bağımsızdır. Yani,

$$p_s(x, t) = p_s(x) \quad (1.3)$$

olmaktadır. Bu kitapta karşılaşacağımız işaretler genellikle deterministik işaretlerdir.

Ancak, yuvarlatma ve kuvantalama hatalarının hesabında rastgele işaretler kullanılacaktır.

1.3 AYRIK-ZAMANLI İŞARETLER VEYA DİZİLER

Ayrık-zamanlı işaret x bir dizi sayıdan oluşur ve dizinin sayıları x_n , $x(n)$ veya $x(nT)$ biçiminde gösterilir.

$x(nT)$ gösteriliminde, n bir tam sayı olup dizinin sürekli-zamanlı $x(t)$ işaretinin $t = nT$ anlarında örneklenmesinden elde edildiğini göstermektedir.

Dizinin sürekli-zamanlı bir işaretten örnekleme yoluyla elde edilmediği durumlar dışında $x(n)$ gösterilimi kullanılacaktır.

Metametiksel olarak x dizisinin n . elemanı $x(n)$ biçiminde gösterilirken $\{x(n)\}$, sonlu veya sonsuz uzunluklu tüm diziyi gösterir.

$$\alpha\{x(n)\} = \{\alpha x(n)\} \quad (1.4)$$

$$\{x(n)\} + \{y(n)\} = \{x(n) + y(n)\} \quad (1.5)$$

Sayısal İşaretlere Örnekler

Sayısal işaret işlemede bazı önemli dizilere özel adlar ve notasyonlar verilir. Birim-örnek veya impuls dizisi şöyle tanımlanır:

$$\delta(n) = \begin{cases} 1 & n = 0 \text{ için} \\ 0 & n \neq 0 \text{ için} \end{cases} \quad (1.6)$$

$\delta(n)$ isminden de anlaşılacağı üzere analog sistem teorisinde kullanılan Dirac delta fonksiyonuna benzer. Ayırık-zamanlı sistem teorisinde önemli bir rol oynar. Birim-basamak dizisi

$$u(n) = \begin{cases} 1 & n \geq 0 \text{ için,} \\ 0 & n < 0 \text{ için} \end{cases} \quad (1.7)$$

biçiminde tanımlanır. $u(n)$ dizisi birim-örnek dizisiyle ilgilidir.

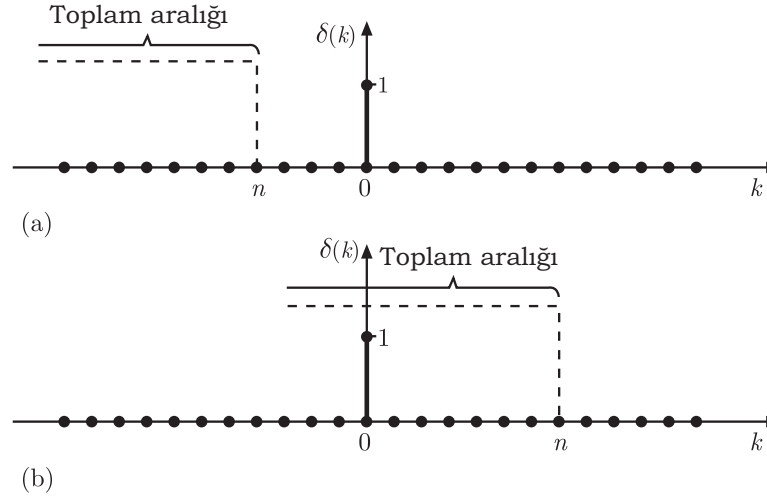
$$u(n) = \sum_{k=-\infty}^n \delta(k) \quad (1.8)$$

veya

$$u(n) = \sum_{k=0}^{\infty} \delta(n - k) \quad (1.9)$$

Benzer şekilde $\delta(n)$ dizisi de birim-basamak dizisinden elde edilebilir. Şekil 1.6'da toplam ilişkileri görülmektedir.

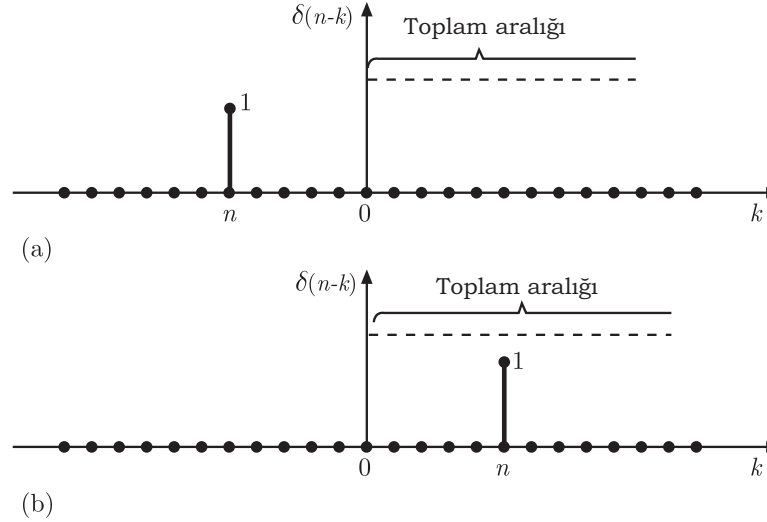
$$\delta(n) = u(n) - u(n - 1) \quad (1.10)$$



Şekil 1.6 (1.8) ifadesindeki toplamın grafiksel gösterilimi. a) $n < 0$ için; b) $n > 0$ için.

Birim-basamak dizisi, üstel dizi gibi diğer sayısal işaretlerin tanımında da kullanılabilir.

$$x(n) = a^n u(n) = \begin{cases} a^n & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases} \quad (1.11)$$

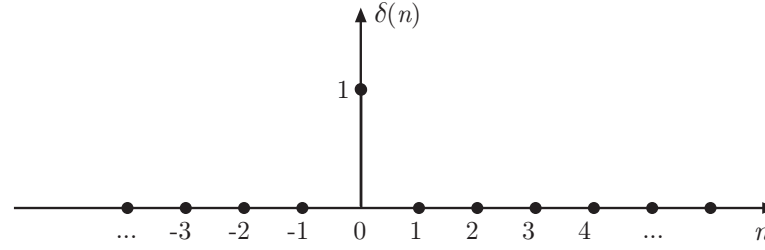


Şekil 1.7 (1.9) ifadesindeki toplamın grafiksel gösterilimi. a) $n < 0$ için; b) $n > 0$ için.

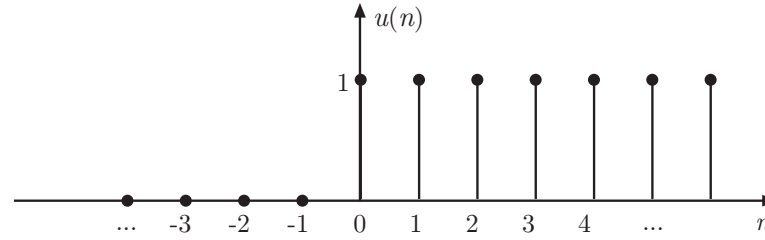
Birim impuls, birim-basamak ve üstel diziler Şekil 1.7’de gösterilmiştir. Benzer şekilde sinüzoid diziler ve kompleks üstel diziler tanımlanabilir.

$$x(n) = A \cos(w_o n + \Phi) \quad (1.12)$$

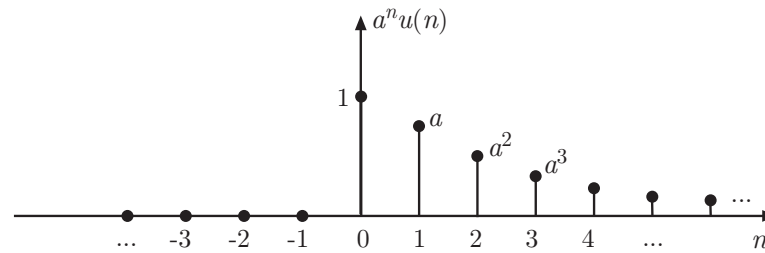
$$x(n) = e^{(\sigma + j\omega_0)n} \quad (1.13)$$



(a)



(b)



(c)

Şekil 1.8 Bazı önemli dizilerin grafiksel gösterilimi. a) Birim-darbe dizisi; b)

Dizinin Ötelenmesi

Diziler üzerindeki en önemli işlem, $x(n)$ dizisini öteleme operasyonudur.

$$y(n) = x(n - n_0) \quad (1.14)$$

n_0 kadar ötelenmiş $x(n)$ dizisi yeni bir dizi oluşturur. Öteleme n_0 'ın pozitif olması durumunda gecikme, negatif olması durumunda ise ilerleme olarak adlandırılır. Herhangi bir ayırık-zamanlı işaret çarpılmış ve ötelenmiş birim impuls dizilerinin toplamı biçiminde yazılabilir.

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(n - k) \quad (1.15)$$

Periyodik Diziler

Bir $x(n)$ işareti tüm n değerleri ve sabit bir N sayısı için

$$x(n) = x(n + N) \quad (1.16)$$

koşulunu sağlıyorsa periyodiktir. (1.16)'nın geçerli olduğu en küçük N değeri $x(n)$ 'nin periyodudur. Periyodik ve sürekli-zamanlı işaretin örneklenmesiyle oluşan ayırık-zamanlı dizinin periyodik olabilmesi için T örnekleme aralığı olmak üzere, NT 'nin sürekli zamanlı işaretin periyodunun tam katı olması gerekir. Örnek olarak,

$$x(n) = e^{jw_0 n} \quad (1.17)$$

işareti için $2\pi/\omega_0$ tam sayı olursa $x(n)$ 'nin periyodu vardır ve $N = 2\pi/\omega_0$ olur. Eğer $2\pi/\omega_0$ rasyonel bir sayı ise periyot $N = (2\pi/\omega_0)m, m > 1$ olarak verilir. $2\pi/\omega_0$ rasyonel değilse $x(n)$ periyodik değildir. Aşağıdaki örneklerde bu durumu görebiliriz.

(a) $x(n) = e^{j(\pi/6)n}$ periyodiktir, $N = 12$.

(b) $x(n) = e^{j(8\pi/31)n}$ periyodiktir, $N = 31$.

(c) $x(n) = e^{j(n/6)}$ periyodik değildir.

rnk 1.1 $x_1(n) = e^{j(\pi/6)n}$ işaretini MATLAB'de oluşturalım ve çizdirelim. Bu karmaşık (kompleks) değerli dizinin gerçel ve sanal bölümlerini ayrı ayrı çizdireceğiz.

```
n=[0:20*pi];x1=exp(j*pi/6.*n);% zaman vektörü n ve x1 oluşturuldu
subplot(2,1,1); stem(n,real(x1));
title('x1 işaretinin gerçel bölümü');xlabel('n')
subplot(2,1,2); stem(n,imag(x1));
title('x1 işaretinin sanal bölümü');xlabel('n')
```

Dizilerin Enerjisi ve Ortalama Gücü

Analog işaretlerde olduğu gibi bir $x(n)$ dizisinin de ortalama gücü tanımlanabilir.

$$P_x = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N+1} \sum_{n=-N/2}^{N/2} |x(n)|^2$$

Sayısal işaretin enerjisi ise

$$E_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2$$

olarak tanımlanır. Enerjisi sonlu olan diziler enerji işareti olarak adlandırılır.

örnek 1.2 $x(n) = e^{j(\pi/6)n}$, $0 \leq n \leq 100$ işaretinin enerjisini

MATLAB'de bulalım.

```
n=[0:100]; x=exp(j*pi/6.*n);% zaman vektörü n ve x(n) oluşturuldu
Ex=sum(x.conj(x)); %% bir metod
Ex2=sum(abs(x).^2); %% diğer bir metod
```

1.4 AYRIK-ZAMANLI SİSTEMLER VE ÖZELLİKLERİ

Ayrık-zamanlı sistem, Şekil 1.9'da görüldüğü gibi, $x(n)$ giriş işaretini (dizisini) bir çıkış işaretine (dizisine) dönüştüren bir dönüşüm kuralıdır. Eğer $x(n)$ ve $y(n)$ sonlu sayıda genlik değerleri alabiliyorsa bu ayırık zamanlı sistem sayısal sistem olarak adlandırılır. Giriş-çıkış ilişkisi sembolik olarak

$$\{x(n)\} \xrightarrow{\text{sistem}} \{y(n)\} \quad (1.18)$$

$$y(n) = \mathcal{T}[x(n)] \quad (1.19)$$

şeklinde gösterilebilir. $\mathcal{T}[\cdot]$ sisteme ilişkin dönüşüm kuralını gösteren matematiksel bir operatördür.



Şekil 1.9 $x(n)$ girişli ve $y(n)$ çıkışlı ayırık-zamanlı sistem.

Sayısal işaret işlemede karşılaşılan sistemlerin çoğunluğu doğrusal, zamanla-değişmeyen, nedensel ve kararlı olan sistemlerdir. Şimdi bu kavramları kısaca açıklayacağız.

Doğrusallık

Bir sistemin doğrusallığı, çarpımsallık ve toplamsallık ilkelerini sağlamasıyla tanımlanır. Buna göre, herhangi iki giriş dizisi $x_1(n)$ ve $x_2(n)$ sırasıyla $y_1(n)$ ve $y_2(n)$ çıkış dizilerini üretsinsin:

$$y_1(n) = \mathcal{T}[x_1(n)] \quad (1.20)$$

$$y_2(n) = \mathcal{T}[x_2(n)] \quad (1.21)$$

a ve b herhangi iki sabit sayı olduğuna göre $\mathcal{T}[\cdot]$ sisteminin doğrusal olabilmesi için gerek ve yeter koşul aşağıdadır.

$$\begin{aligned}\mathcal{T}[ax_1(n) + bx_2(n)] &= \mathcal{T}[ax_1(n)] + \mathcal{T}[bx_2(n)] \\ &= a\mathcal{T}[x_1(n)] + b\mathcal{T}[x_2(n)] \\ &= ay_1(n) + by_2(n)\end{aligned}\tag{1.22}$$

(1.22) koşulunu sağlamayan sistemler doğrusal olmayan (non-linear) sistemler olarak adlandırılır.

Örnek 1.3

$$y(n) = 8x^2(n - 2) \quad (1.23)$$

Sayısal bir süzgecin cevabı yukarıda verildiğine göre doğrusallığını belirleyiniz.

zm. (1.23) dönüşüm kuralından

$$\mathcal{T}[ax(n)] = 8a^2x^2(n - 2) \quad (1.24)$$

olarak bulunur. a sabit bir katsayı olup, birden farklıdır ($a \neq 1$).

Öte yandan

$$a\mathcal{T}[x(n)] = 8ax^2(n - 2) \quad (1.25)$$

Açık olarak,

$$\mathcal{T}[ax(n)] \neq a\mathcal{T}(x(n)) \quad (1.26)$$

Dolayısıyla süzgeç doğrusal değildir. \square

rnek 1.4 Eğer sayısal süzgecin $x(n)$ girişine cevabı

$$y(n) = \mathcal{T}[x(n)] = n^3 x(n+1) \quad (1.27)$$

olarak verilirse, sistemin doğrusal olduğunu gösteriniz.

zm. Bu durum için,

$$\begin{aligned} \mathcal{T}[ax_1(n) + bx_2(n)] &= n^3(ax_1(n+1) + bx_2(n+1)) \\ &= an^3x_1(n+1) + bn^3x_2(n+1) \\ &= a\mathcal{T}[x_1(n)] + b\mathcal{T}[x_2(n)] \end{aligned} \quad (1.28)$$

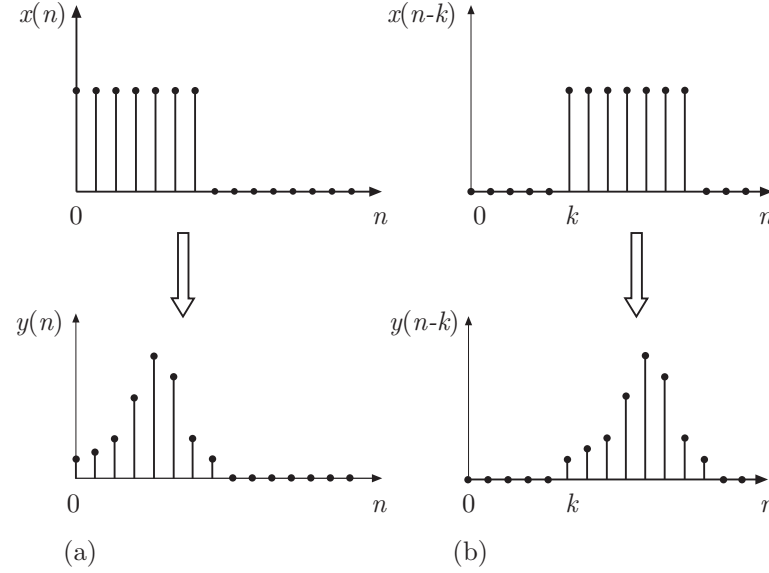
Öyleyse, (1.27)'deki sistem doğrusaldır. \square

Zamanla Değişmezlik

Eğer sayısal bir sistemin giriş-çıkış ilişkisi zamanla değişmiyorsa sistem zamanla-değişmeyen olarak adlandırılır. Bu sistem, uygulanan bir x giriş dizisine uygulama anından bağımsız olarak aynı y çıkış dizisini üretiyor demektir. Şekil 1.10'da gösterildiği gibi, bir sistemin zamanla değişmez olması için gerek ve yeter şart sistemin tüm ilk koşulları sıfır olmak üzere tüm giriş işaretleri için

$$\mathcal{T}[x(n - k)] = y(n - k) \quad (1.29)$$

olmasıdır.



Şekil 1.10 Zamanla değişmeme: a) Sistemin $x(n)$ girişine cevabı; b) Sistemin geciktirilmiş $x(n - k)$ girişine cevabı.

örnek 1.5 Sayısal bir sistem

$$y(n) = 4nx(n) \quad (1.30)$$

denklemleriyle karakterize edilsin. Zamanla-değişmezlik özelliğini inceleyiniz.

zm. (1.30)'daki sistemin ötelenmiş $x(n - k)$ giriş dizisine cevabı

$$\mathcal{T}[x(n - k)] = 4nx(n - k) \quad (1.31)$$

olarak bulunur. Oysa (1.29) uyarınca çıkış dizisi de ötelenmelidir. Yani,

$$y(n - k) = 4(n - k)x(n - k) \quad (1.32)$$

olmalıdır. (1.31) ve (1.32)'den

$$y(n - k) \neq \mathcal{T}[x(n - k)] \quad (1.33)$$

sonucu elde edilir ve sistem zamanla değişir. \square

rnk 1.6 Aşağıdaki fark denklemiyle ifade edilen sayısal sistemin zamanla değişmediğini gösteriniz.

$$y(n) = \mathcal{T}[x(n)] = x(n) + 2x(n-1) \quad (1.34)$$

zm. Bu sistem için

$$\mathcal{T}[x(n-k)] = x(n-k) + 2x((n-1)-k) = y(n-k) \quad (1.35)$$

olduğuna göre sistem zamanla değişmezdir. \square

Nedensellik

Eğer herhangi bir anda sistemin çıkışı sadece o andaki ve geçmişteki girişlerine bağlıysa o sisteme nedensel sistem denir. Daha açık bir anlatımla, nedensel sistemlerde sistemin çıkışının bulunmasında gelecekteki giriş değerlerine ihtiyaç duyulmaz.

Kararlılık

Sınırlı değerli bir giriş dizisinin sınırlı değerli bir çıkış dizisi ürettiği sistemlere kararlı sistemler denir. Bu tanım sınırlı-giriş sınırlı-çıkış (SGSÇ) anlamında kararlılığı ifade eder. Yani, M_1 ve M_2 sonlu sayılar olmak üzere

$$|x(n)| \leq M_1 \quad \text{tüm } n \text{ için}$$

olan herhangi bir giriş dizisine kararlı sistemin cevabı

$$|y(n)| \leq M_2 \quad \text{tüm } n \text{ için}$$

olan bir çıkış dizisi olacaktır. Bazı sistemler doğal olarak bu özelliğe sahiptir. Örneğin, pasif analog sistemler daima kararlıdır. Sayısal

sistemlerdeki kararlılık II. Bölümde impuls cevabı ve IV. Bölümde de transfer fonksiyonu yardımıyla incelenecektir.

REFERANSLAR

1. J. G. Proakis and D. G. Manolakis, *Digital Signal Processing, Principles, Algorithms and Applications*, Prentice-Hall, New Jersey, 1996.
2. B. Porat, *A Course in Digital Signal Processing*, John Wiley & Sons, 1997.
3. S. K. Mitra, *Digital Signal Processing, A Computer Based Approach*, Mc Graw-Hill, 2001.
4. S. Haykin, *Adaptive Filter Theory*, 4th edition, Prentice-Hall, 2002.

5.S. Ertürk, *Sayısal İşaret İşleme*, Birsen Yayınevi, 2003.

PROBLEMLER

1.1 Bu kitapta aşağıdaki özellikler çeşitli yerlerde kullanılacaktır.

(a) Aşağıdaki eşitliğin doğruluğunu gösteriniz.

$$\sum_{n=0}^{N-1} \alpha^n = \begin{cases} N & \alpha = 1 \text{ için,} \\ \frac{1 - \alpha^N}{1 - \alpha} & \alpha \neq 1 \text{ için} \end{cases}$$

(b) $|\alpha| < 1$ olduğuna göre

$$\sum_{n=0}^{\infty} n\alpha^n = \frac{\alpha}{(1 - \alpha)^2}$$

eşitliğinin doğruluğunu gösteriniz.

1.2 Şekil 1.11’de ayırık-zamanlı $x(n)$ işareti gösterilmektedir.

Aşağıdaki şıkların herbiri için bulunacak işareti çiziniz.

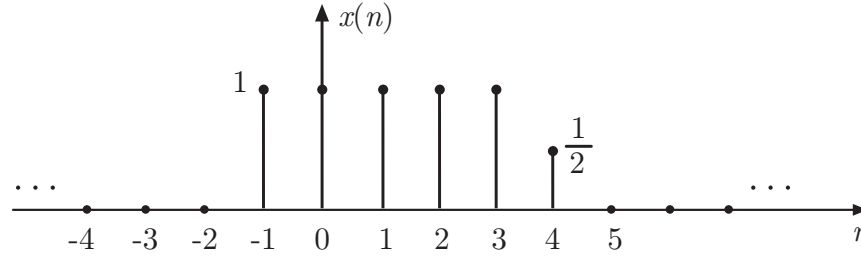
(a) $x(4 - n)$

(b) $x(2n + 1)$

(c) $x(n - 1)\delta(n - 3)$

(d) $x(n)u(2 - n)$

(e) $x(n^2)$



Şekil 1.11

1.3 Aşağıdaki diziler $x(n) = A \cos(\omega n + \phi)$ biçimindeki bir sinüzoidal dizinin bir periyodunu göstermektedir. A, ω_0 , ve ϕ değerlerini bulunuz.

(a) $\{0 \quad -\sqrt{2} \quad -2 \quad -\sqrt{2} \quad 0 \quad \sqrt{2} \quad 2 \quad \sqrt{2}\}$

(b) $\{2 \quad -2\}$

1.4 Aşağıdaki işaretlerin periyodik olup olmadıklarını gösteriniz.

Eğer işaret periyodik ise temel periyodunu bulunuz.

(a) $x(n) = e^{j(n/8 - \pi)}$

(b) $x(n) = \cos \frac{\pi n^2}{8}$

(c) $x(n) = \cos \left(\frac{n}{4}\right) \cos \left(\frac{\pi n}{4}\right)$

(d) $x(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} [\delta(n - 3m) - \delta(n - 1 - 3m)]$

1.5 $x(n)$ sistem girişi ve $y(n)$ sistem çıkışı olduğuna göre, aşağıdaki sistemlerin,

(i) Nedensel

(ii) Kararlı

(iii) Doğrusal

(iv) Zamanla-değişmeyen

olup olmadıklarını belirleyiniz. Cevabınızın gerekçesini açıklayınız.

(a) $y(n) = ax(n) + b$

(b) $y(n) = g(n)x(n)$

(c) $y(n) = nx(n)$

(d) $y(n) = x(n)x(n-1)$

1.6 Giriş-çıkış ilişkisi aşağıda verilen sistemi gözönüne alalım.

$$y(n) = \frac{1}{2} \left(y(n-1) + \frac{x(n)}{y(n-1)} \right)$$

Giriş $x(n) = \alpha u(n)$ (α pozitif bir sayı) ve başlangıç koşulu olarak $y(-1) = 1$ seçersek, çıkış $y(n)$ 'nin $\sqrt{\alpha}$ 'ya yakınsadığını gösteriniz. Bu sistem doğrusal mıdır? Zamanla değişmez midir? Cevaplarınızı açıklayınız.

MATLAB UYGULAMALARI

M1.1 Birim impuls dizisi $\delta(n)$ ve birim basamak dizisi $u(n)$ sıkça karşılaştığımız iki temel ayrık-zamanlı dizidir. L uzunluğunda bir birim impuls dizisini MATLAB¹ kullanarak şu şekilde oluşturabiliriz.

$$d = [1 \text{ zeros}(1, L-1)];$$

Benzer şekilde L uzunluğunda bir birim basamak dizisini yaratmak için

$$u = [\text{ones}(1, L)];$$

¹MATLAB, Mathworks Inc.'in tescilli markasıdır, www.mathworks.com.

yazarız. Bu diziyi n_0 kadar ötelemek için

```
d_gecikme=zeros(1,n0) ones(1,L);
```

yazmamız yeterlidir. Aşağıdaki programla bir birim impuls dizisi oluşturup çizdirebilirsiniz.

```
% Birim impuls dizisi oluşturma  
clear all; close all;  
% -20'den 20'ye bir vektör oluşturun  
n=-20:20;  
% Birim impuls dizisini oluşturun  
d=[zeros(1,20) 1 zeros(1,20)];  
% Birim impuls dizisini çizdirin  
stem(n,d);
```

```
xlabel('zaman indisi n');  
ylabel('genlik');  
title('Birim impuls dizisi');  
axis([-20 20 0 1.2])
```

Aşağıdaki dizileri oluşturunuz ve çizdiriniz. n -ekseni belirtilen aralığı kapsayacak şekilde olmalı ve doğru numaralandırılmalıdır.

$$x_1(n) = 0.75\delta(n - 7) \qquad 1 \leq n \leq 15$$

$$x_1(n) = 1.4\delta(n + 150) \qquad -200 \leq n \leq -100$$

M1.2 Aşağıdaki MATLAB programı periyodik bir işaret oluşturacaktır.

```
x=[0 1 0 1 0 0].'*ones(1,15);  
x=x(:);  
length(x)
```

x' i çizdirin ve bu işaret için kapalı form bir matematiksel formül bulmaya çalışın.

M1.3 MATLAB kullanarak aşağıda verilen dizileri oluşturunuz ve çizdiriniz (stem fonksiyonunu kullanınız).

(a) $x_1(n) = (0.5)^n \sin(0.4\pi n + \pi/4), \quad 0 \leq n \leq 25.$

(b) $x_2(n) = \sum_{m=0}^{10} m(\delta(n-m) - \delta(n-m-1)), \quad 0 \leq n \leq 20.$

(c) $\tilde{x}_3(n) = \{\dots, 0, 1, 2, \underset{\uparrow}{1}, 0, \dots\}_{\text{PERİYODİK}}$. Bu periyodik işareti 4 tam periyot için çizdiriniz.

M1.4 Basit bir *sayısal türev alıcı* sistem aşağıdaki giriş-çıkış ilişkisiyle verilebilir.

$$y(n) = x(n) - x(n - 1)$$

Bu sistem, giriş dizisi için birinci dereceden farkı hesaplamaktadır. Sistem doğrusal mıdır? Zamanla değişmez midir? Kararlı mıdır? Bu algoritmayı aşağıda verilen giriş dizileri için gerçekleyiniz ve çıkış dizilerini çizdiriniz. Türev alma işeminin başarısını inceleyiniz.

(a) $x(n) = 10[u(n) - u(n - 20)]$, bir dikdörtgen işaret

(b) $x(n) = 2n[u(n) - u(n - 5)] + (10 - n)[u(n - 5) - u(n - 10)]$,
bir üçgen işaret

(c) $x(n) = \sin\left(\frac{\pi n}{6}\right)[u(n) - u(n - 54)]$, sinüzoidal bir işaret

M1.5 Sayısal işaret işlemenin tipik bir uygulama alanı toplamsal gürültüyle bozulmuş bir işaretin gürültüden arındırılmasıdır. $x(n)$ gürültü eklenerek bozulan bilgi işareti, $g(n)$ bozucu gürültü işareti, $b(n) = x(n) + g(n)$ ise bozulmuş işaret belirtsin. Amacımız gürültü bileşenini mümkün olduğunca yok edip, $x(n)$ için bir yaklaşık kestirim olan $y(n)$ işaretini

oluşturmaktadır. Bu amaçla kullanılabilecek basit bir yöntem, her n anı için yakın $b(m)$ değerlerinin bir ortalamasını alıp gürültü bileşenini yok etmeye çalışmaktır. Buna örnek olacak üç-noktalı bir kayan-ortalama algoritması şu şekilde verilir.

$$y(n) = \frac{1}{3} \left(b(n-1) + b(n) + b(n+1) \right)$$

Aşağıda verilen kod bu algoritmayı gerçeklemektedir.

```
% Kayan Ortalama ile Gürültü Giderme
```

```
clear all; close all;
```

```
R = 101;
```

```
g = (rand(R,1)-0.5); % gürültü işaretini oluşturalım
```

```
m = 0:R-1;
```

```
x = 2*sin(0.2*m); % bilgi işaretini oluşturalım
```

```
b = x + g'; % toplamsal gürültüyle bozulmuş bilgi işareti
subplot(2,1,1);
plot(m,g', 'r-',m,x, 'g-',m,b, 'b-');
xlabel('zaman  n');ylabel('İşaret Genliği');
legend('g[n] ', 'x[n] ', 'b[n] ');
y(1)=(g(1)+g(2))/3;
for n=2:1:100
y(n)=(b(n-1)+b(n)+b(n+1))/3;
end
y(101)=(g(100)+g(101))/3;
subplot(2,1,2);
plot(m,y, 'r-',m,x, 'g-');
legend( 'y[n] ', 'x[n] ');
```

```
xlabel('zaman  n');ylabel('İşaret Genliği');
```

- (a) Bu programı çalıştırarak çıkışları gözleyiniz.
- (b) Kayan ortalama işlemi öncesi ve sonrasında istenmeyen gürültü bileşeni enerjisini hesaplayınız. Algoritma gürültüyü gidermede başarılı oldu mu?
- (c) Burada kullanılan rand komutu 0-1 aralığında düzgün dağılımlı değerlerden oluşan rastgele işaret üretmektedir. Bu üretilen dizi gürültüyü modellemekte kullanılmaktadır. Toplamsal gürültününü-rül-tü-nün enerjisini artırmak istersek nasıl bir işlem yapmamız gerekir?