Laplace Dönüşümü-I

Laplace dönüşümü

$$L\{f(t)\} = F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$$

- f(t) = 0 t < 0

Ters Laplace dönüşümü

$$L^{-1}\{F(s)\} = f(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma - j\infty}^{\sigma + j\infty} F(s)e^{st}ds$$

Ters Laplace dönüşümü için pratikte yandaki ifade yerine dönüşüm tablolarına başvurulur

Temel fonksiyonların Laplace Dönüşümü

Örnek:

$$f(t) = u(\mathrm{t})$$

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st}dt = -\frac{1}{s}(0-1) = \frac{1}{s}$$

Örnek:

$$f(t) = e^{-at}u(\mathrm{t})$$

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-at}e^{-st}dt = \int_0^\infty e^{-(s+a)t}dt = \frac{1}{s+a}$$

Temel fonksiyonların Laplace Dönüşümü

Örnek:

$$f(t) = \sin t\, u(\mathrm{t})$$

$$F(s) = \int_0^{\infty} \sin t\, e^{-st} dt$$

$$u = \sin t \quad du = \cos t dt$$

$$dv = e^{-st} dt \quad v = -\frac{1}{s} e^{-st}$$

$$= \left(-\sin t \frac{1}{s} e^{-st} \right) \Bigg|_0^{\infty} - \frac{1}{s} \int_0^{\infty} \cos t e^{-st} dt$$

$$= -\frac{1}{s} \int_0^{\infty} \cos t\, e^{-st} dt$$

$$= -\frac{1}{s} \left(\left(-\cos t \frac{1}{s} e^{-st} \right) \Bigg|_0^{\infty} + \frac{1}{s} \int_0^{\infty} \sin t e^{-st} dt \right)$$

$$u = \cos t \quad du = -\sin t dt$$

$$dv = e^{-st} dt \quad v = -\frac{1}{s} e^{-st}$$

$$F(s) = -\frac{1}{s} \left(-\frac{1}{s} + \frac{1}{s} F(\mathrm{s}) \right)$$

$$F(s) = \frac{1}{s^2 + 1}$$

Temel fonksiyonların Laplace Dönüşümü

Örnek:

$$f(t) = \cos(\omega t)u(t)$$

$$F(s) = \int_0^{\infty} \frac{(e^{j\omega t} + e^{-j\omega t})}{2} e^{-st}\,dt$$

$$= \frac{1}{2}\left(\int_0^{\infty} e^{j\omega t} e^{-st}\,dt + \int_0^{\infty} e^{-j\omega t} e^{-st}\,dt \right)$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{s - j\omega} - \frac{1}{s + j\omega} \right]$$

$$= \frac{s}{s^2 + \omega^2}$$

Laplace Dönüşümünün Özelikleri

- Doğrusallık
- Zamanda ölçekleme
- Zamanda kaydırma
- S düzleminde kaydırma
- t ile çarpma
- İntegral
- Türev

Doğrusallık

$$L\left\{\, 5\cos(4t)+5e^{-t} \right\} = F(\mathrm{s})$$

$$= 3L\left\{\, \cos(4t) \right\} + 5L\left\{\, e^{-t} \right\}$$

$$= \frac{5s}{s^2+16} + \frac{5}{s+1}$$

$$= \frac{10s^2+5s+80}{s^3+s^2+16s+16}$$

Zamanda Ölçekleme

$$L\{f(at)\} \Leftrightarrow \frac{1}{a} F(\frac{s}{a})$$

$$L\{f(at)\} = \int_0^\infty f(at) e^{-st} dt \qquad u = at, t = \frac{1}{a}\mathrm{u}, dt = \frac{1}{a} du$$

$$L\{f(at)\} = \frac{1}{a} \int_0^{\frac{\infty}{a}} f(u) e^{-(\frac{s}{a})u} du = \frac{1}{a} F(\frac{s}{a})$$

Zamanda Ölçekleme

Örnek:

$$L\{\sin(t)\} \Leftrightarrow \frac{1}{s^2+1}$$

$$L\{\sin(\omega t)\} = \frac{1}{\omega}\left(\frac{1}{(s/\omega)^2+1}\right) = \frac{1}{\omega}\left(\frac{\omega^2}{s^2+\omega^2}\right) = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$$

Örnek:

$$L\{e^{-t}\} \Leftrightarrow \frac{1}{s+1}$$

$$L\{e^{-at}\} = \frac{1}{a}\frac{1}{\frac{s}{a}+1} = \frac{1}{s+a}$$

Zamanda kaydırma

$$L\{f(t-a)u(t-a)\} = e^{-as}F(s)$$

$$L\{f(t-a)u(t-a)\} = \int_0^\infty f(t-a)u(t-a)e^{-st}dt = \int_a^\infty f(t-a)e^{-st}dt$$

$$u = t-a, \quad t = u+a \Rightarrow dt = du$$

$$\int_0^{\infty-a} f(u)e^{-s(u+a)}du = e^{-as}\int_0^\infty f(u)e^{-su}du = e^{-as}F(s)$$

Zamanda kaydırma

Örnek:

$$L\{e^{-2t}u(t)\} = \frac{1}{s+2}$$

$$L\{e^{-2(t-5)}u(t-5)\} = \frac{e^{-5s}}{s+2}$$

Örnek:

$$L\{tu(t)\} = \frac{1}{s^2}$$

$$L\{(t-1)u(t-1)\} = \frac{e^{-s}}{s^2}$$

S düzleminde kaydırma

$$L\{e^{-at}f(t)\} = F(s+a)$$

$$L\{e^{-at}f(t)\} =$$

$$= \int_0^\infty e^{-at}f(t)e^{-st}dt$$

$$= \int_0^\infty f(t)e^{-(s+a)t}dt$$

$$= F(s+a)$$

S düzleminde kaydırma

Örnek:

$$\sin(\omega t) \Leftrightarrow \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

$$e^{-at}\sin(\omega t) = \frac{\omega}{(s+a)^2 + \omega^2}$$

Örnek:

$$t^2 u(\mathrm{t}) \Leftrightarrow \frac{2}{s^3}$$

$$t^2 e^{-at} u(\mathrm{t}) \Leftrightarrow \frac{2}{(s+a)^3}$$

t ile çarpma

$$L\{t^n f(t)\} = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} F(s)$$

$$L\{tf(t)\} = -\frac{d}{ds} F(s)$$

$$L\{t^2 f(t)\} = \frac{d^2}{ds^2} F(s)$$

$$L\{t^3 f(t)\} = -\frac{d^3}{ds^3} F(s)$$

t ile çarpma

Örnek:

$$L\{tu(t)\} = -1\frac{d}{ds}(\frac{1}{s}) = \frac{1}{s^2}$$

Örnek:

$$L\{t^2 e^{-t} u(t)\} = \frac{d^2}{ds^2}\left(\frac{1}{s+1}\right)$$

$$= \frac{d}{ds}\left(-\frac{1}{(s+1)^2}\right) = \frac{2(s+1)}{(s+1)^4} = \frac{2}{(s+1)^3}$$

İntegral

$$g(\mathrm{t}) = \int f(t)dt \qquad L[g(\mathrm{t})] = \int_0^\infty g(\mathrm{t})e^{-st}dt$$

$$u = g(\mathrm{t}), \qquad du = f(t)dt$$

$$dv = e^{-st}dt, \qquad v = -\frac{1}{s}e^{-st}$$

$$g(\infty) < \infty$$

$$L[g(\mathrm{t})] = -g(t)\frac{1}{s}e^{-st}\Big|_0^\infty + \frac{1}{s}\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$$

$$= \frac{F(s)}{s} + \frac{g(0)}{s}$$

$$= \frac{F(s)}{s}$$

g(0)=0 ise

Örnek:

$$f(t)=\cos(t) \quad g(\mathrm{t})=\int \cos(t)dt=\sin(t)$$

$$L\{\int \cos(t)dt\}=\frac{F(\mathrm{s})}{s}+\frac{g(0)}{s}=\frac{1}{s}\frac{s}{s^2+1}=\frac{1}{s^2+1} \qquad g(0)=0$$

Örnek:

$$f(t)=\sin(t) \quad g(\mathrm{t})=\int \sin(t)dt=-\cos(t) \qquad g(0)=-1$$

$$L\{\int \sin(t)dt\}=\frac{F(\mathrm{s})}{s}+\frac{g(0)}{s}=\frac{1}{s}\frac{1}{s^2+1}+\frac{1}{s}=\frac{1}{s}\frac{1}{s^2+1}-\frac{1}{s}=-\frac{s}{s^2+1}$$

Örnek:

$$f(\mathrm{t})=te^{-t}, \quad g(\mathrm{t})=\int f(\mathrm{t})\,\mathrm{dt}, \quad \mathrm{g}(0)=0$$

$$G(\mathrm{s})=\frac{F(\mathrm{s})}{s}=\frac{1}{s}\frac{1}{(s+1)^2}$$

Türev

$$L[\frac{df(t)}{dt}] = sF(s) - f(0)$$

$$u = e^{-st}, \; du = -se^{-st}dt$$

$$dv = \frac{df(t)}{dt}dt = df(t), \; v = f(t)$$

$$L\left[\frac{df}{dt}\right] = f(t)e^{-st}\Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} f(t)\left[-se^{-st}\right]dt$$

$$= 0 - f(0) + s\underbrace{\int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt}_{F(\mathrm{s})}$$

$$= sF(\mathrm{s}) - f(0)$$

Türev

$$g(t) = \frac{df(t)}{dt} = sF(s) - f(0)$$

$$L\left[\frac{dg}{dt}\right] = sG(s) - g(0) \qquad g(0) = f'(0)$$

$$L\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{df}{dt}\right)\right] = s\left(sF(s) - f(0)\right) - f'(0)$$

$$L\left[\frac{d^2 f}{dt^2}\right] = s^2 F(s) - s\,f(0) - f'(0)$$

Türev

$$L\left[\frac{df(t)^2}{dt^2}\right]=s^2F(s)-sf(0)-f'(0)$$

$$L\left[\frac{df(t)^3}{dt^3}\right]=s^3F(s)-s^2f(0)-sf'(0)-f''(0)$$

$$L\left[\frac{df(t)^n}{dt^n}\right]=s^nF(s)-s^{n-1}f(0)-s^{n-2}f'(0)-\ldots-f^{(n-1)}(0)$$

Diferansiyel Denklemler

Örnek:

Tek girişli tek çıkışlı doğrusal zamanla değişmeyen bir sistemi tanımlayan diferansiyel denklem aşağıdaki gibi verilmiştir.

$$y(0)=0,\; y'(0)=0 \qquad \frac{d^2y(t)}{dt^2}+2\frac{dy(t)}{dt}+2y(t)=x(t)+0.5\frac{dx(t)}{dt}$$

Sıfır başlangıç değerleri için sistemin Laplace dönüşümü

$$s^2Y(s)+2sY(s)+2Y(s)=X(s)+0.5sX(s)$$

$$Y(s)\left(s^2+2s+2\right)=\left(s+0.5\right)X(s)$$

$$\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{s+0.5}{s^2+2s+2}$$

Örnek:

Tek girişli tek çıkışlı doğrusal zamanla değişmeyen bir sistemi tanımlayan diferansiyel denklem aşağıdaki gibi verilmiştir.

Sıfır başlangıç değerleri için sistemin Laplace dönüşümü

$y(0) = 1,\ y'(0) = -1, x(0) = 2$

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 2\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = x(t) + 0.5\frac{dx(t)}{dt}$$

$$\left(s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0)\right) + 2\left(sY(s) - y(0)\right) + 2Y(s) = X(s) + 0.5\left(sX(s) - x(0)\right)$$

$$Y(s) = \frac{s+0.5}{s^2+2s+2}X(s) + \frac{s-4}{s^2+2s+2}$$

Temel Fonksiyonlar

$$\delta(t) \Leftrightarrow 1$$

$$u(t) \Leftrightarrow \frac{1}{s}$$

$$e^{-at} \Leftrightarrow \frac{1}{s+a}$$

$$t \Leftrightarrow \frac{1}{s^2}$$

$$t^n \Leftrightarrow \frac{n!}{s^{n+1}}$$

$$\cos(\omega t)u(t) \Leftrightarrow \frac{s}{s^2+\omega^2}$$

$$\sin(\omega t)u(t) \Leftrightarrow \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$$

$$e^{-at}\sin(\omega t) \Leftrightarrow \frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$$

$$e^{-at}\cos(\omega t) \Leftrightarrow \frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$$

$$\sin(\omega t+\theta) \Leftrightarrow \frac{s\sin\theta+\omega\cos\theta}{s^2+\omega^2}$$

$$\cos(\omega t+\theta) \Leftrightarrow \frac{s\cos\theta-\omega\sin\theta}{s^2+\omega^2}$$