

Bölüm 2

AYRIK-ZAMANLI DOĞRUSAL ZAMANLA-DEĞİŞMEYEN SİSTEMLER

Pek çok fiziksel sistem

doğrusal zamanla-değişmeyen

(Linear Time Invariant - DZD)

sistem biçiminde modellenabilir.

Bu bölümde, ayırık-zamanlı bir sistemin giriş ve çıkış ilişkisini belirleyen birbirinden farklı fakat eşdeğer yöntemler tanıtılacaktır.

Sistemlerin davranışları

- birim impuls cevabı,
- fark denklemleri ve
- durum denklemleriyle

karakterize edilecektir [1-4].

2.1 DZD SİSTEMLERİN BİRİM İMPULS CEVABI YÖNTEMİYLE MODELLENMESİ

Eğer giriş birim impuls dizisi $\delta(n)$ ise,

buna karşı düşen sistem çıkışı

impuls cevabı

olarak adlandırılır ve

$h(n)$ ile gösterilir.

Ayrık-zamanlı DZD sistemin giriş ve çıkış bağıntısı birim impuls cevabı yardımıyla şöyle belirlenir.

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(n-k) \quad (2.1)$$

DZD sistemin ötelenmiş birim impuls girişi $\delta(n-k)$ için olan çıkış dizisinin $h(n-k)$ olduğu Şekil 2.2’de gösterilmiştir.

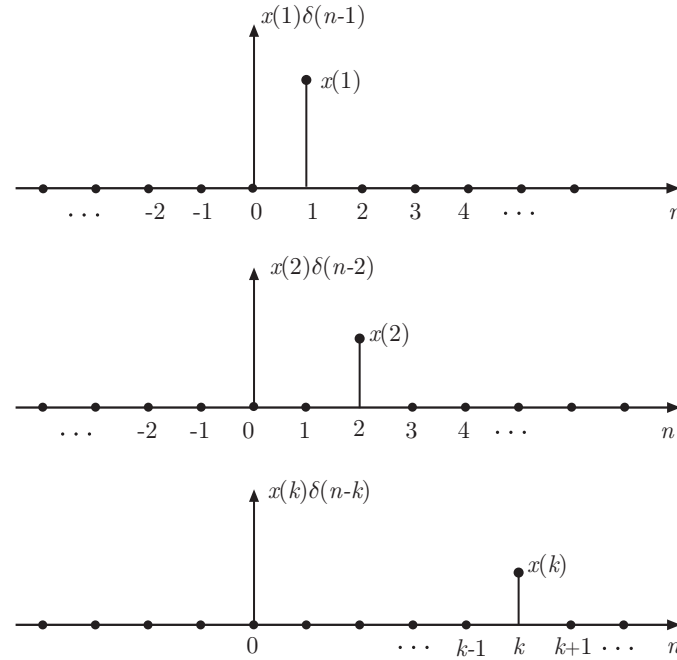
Bu durum, sistemin zamanla değişmeme özelliğinin bir sonucudur.

Ayrıca, sistemin doğrusallık özelliğinin ve (2.1)'in kullanılmasıyla $x(n)$ 'nin cevabı $y(n)$ aşağıdaki gibi yazılır.

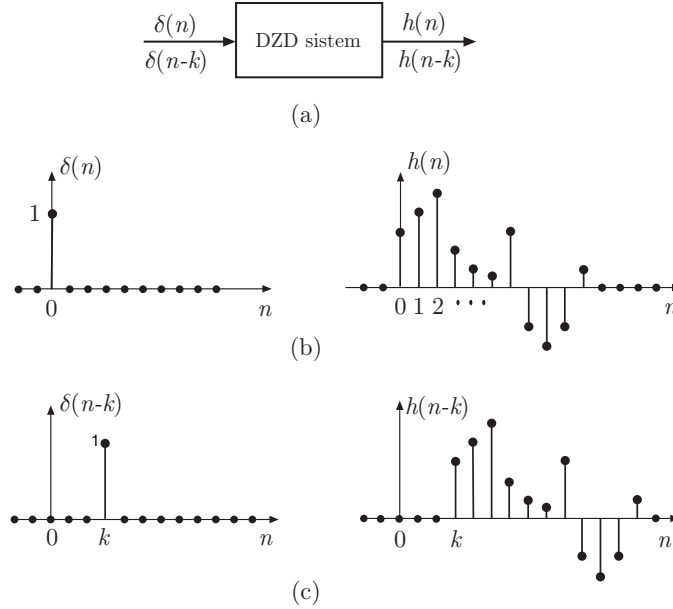
$$\begin{aligned} y(n) &= \mathcal{T}[x(n)] = \mathcal{T}\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(n-k)\right] \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\mathcal{T}[\delta(n-k)] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k) \end{aligned} \quad (2.2)$$

(2.2) bağıntısı ayırık-zamanlı DZD sistemin giriş ve çıkış ilişkisine ait konvolüsyon toplamıdır.

Buna göre, impuls cevabı $h(n)$ 'nin sistemin giriş çıkış ilişkisini tamamen karakterize ettiğini görmekteyiz.



Şekil 2.1 İmpuls bileşenleri ile $x(n)$ dizisinin gösterilimi.



Şekil 2.2 Zamanla değişmeme kriteri: a) DZD sistemin ötelenmiş birim impuls cevabı; b) $\delta(n)$ için DZD sistemin cevabı; c) $\delta(n - k)$ için aynı sistemin cevabı.

2.1.1 Konvolüsyon Toplamı ve Özellikleri

$x(n)$ sistemin girişi ve $h(n)$ impuls cevabı olduğuna göre, çıkış dizisi $y(n)$ (2.2) bağıntısı ile hesaplanır. $y(n)$ dizisine “ $x(n)$ ve $h(n)$ ’nin

konvolüsyonu" denir ve

$$y(n) = x(n) * h(n) \quad (2.3)$$

notasyonu ile gösterilir. Konvolüsyon toplamı için aşağıdaki ilişkilerin doğruluğu kolayca gösterilebilir.

Değişme Özelliği

$$x(n) * h(n) = h(n) * x(n) \quad (2.4)$$

bağıntısı ile gösterilen bu özellik (2.2) denkleminde değişken dönüşümüyle gösterilebilir. O halde, çıkış dizisi aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k) \quad (2.5)$$

Dağılma Özelliği

$$x(n) * \{h_1(n) + h_2(n)\} = x(n) * h_1(n) + x(n) * h_2(n) \quad (2.6)$$

Konvolüsyon toplamı tanımıyla kolayca gösterilebilen (2.6)'daki dağılma özelliği, paralel bağlı DZD iki sistemin birim impuls cevabının bulunmasında yararlıdır. Şekil 2.3'te gösterildiği gibi, paralel iki sistemde toplam çıkış, sistemlerin çıkışlarının

toplamından oluşmaktadır. Öyleyse,

$$\begin{aligned}y(n) &= y_1(n) + y_2(n) \\&= \{x(n) * h_1(n)\} + \{x(n) * h_2(n)\} \\&= x(n) * \{h_1(n) + h_2(n)\}\end{aligned}\tag{2.7}$$

ve sistemlerin paralel bağlanmasından oluşan eşdeğer tek bir sistemin birim impuls cevabı aşağıdaki şekilde verilecektir.

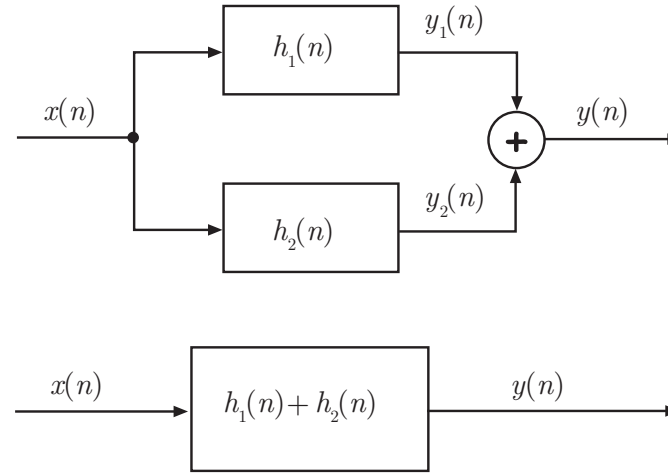
$$h(n) = h_1(n) + h_2(n)\tag{2.8}$$

Birleşme Özelliği

$$x(n) * \{h_1(n) * h_2(n)\} = \{x(n) * h_1(n)\} * h_2(n) \quad (2.9)$$

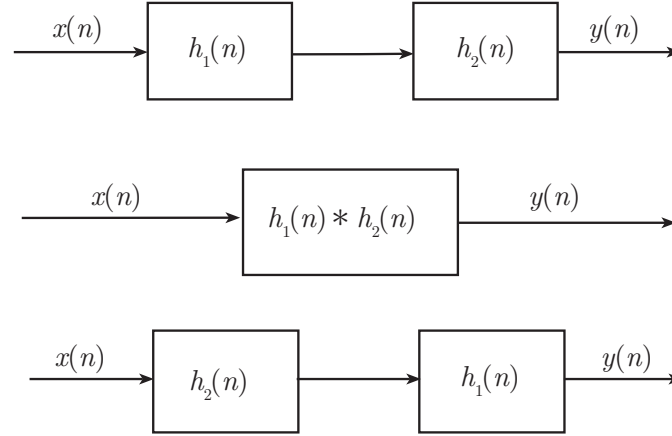
Konvolüsyonun tanımını ve toplam sıralarının değiştirilmesiyle gösterilebilen bu özellik, seri bağlı DZD sistemlerin birim impuls cevabının bulunmasında kullanılır. Eğer birinci sistemin çıkışı ikincinin girişi ise bu iki sisteme seri yada kaskat bağlı denir. Şekil 2.4'te gösterilen seri bağlı sistemler için

$$y_1(n) = x(n) * h_1(n) \quad (2.10)$$



Şekil 2.3 Paralel bağlantılı iki DZD sistemin eşdeğeri.

$$y(n) = y_1(n) * h_2(n) \quad (2.11)$$



Şekil 2.4 Seri bağlantılı iki DZD sistemin eşdeğeri.

yazılabilir. Buna göre, (2.10) ve (2.11) bağıntılarından ve dağılma özelliğinden

$$\begin{aligned}
 y(n) &= \{x(n) * h_1(n)\} * h_2(n) \\
 &= x(n) * \{h_1(n) * h_2(n)\}
 \end{aligned}
 \tag{2.12}$$

bulunur. O halde, seri bağlı sisteme eşdeğer tek bir sistemin birim impuls cevabı aşağıdaki şekilde bulunacaktır.

$$h(n) = h_1(n) * h_2(n) \quad (2.13)$$

Değişim özelliği nedeniyle,

$$h_1(n) * h_2(n) = h_2(n) * h_1(n) \quad (2.14)$$

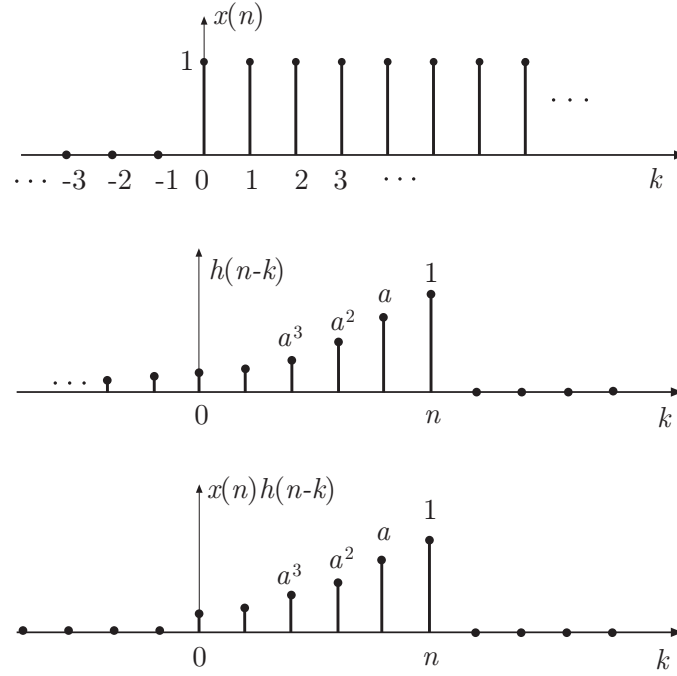
olduğundan seri bağlı sistemlerin sırasının değiştirilmesinin çıkış dizisi $y(n)$ 'yi değiştirmedeği görülmektedir.

rnek 2.1 Konvolüsyon toplamına örnek olarak, DZD bir sistemin çıkışını hesaplayalım. Şekil 2.5'te gösterildiği gibi giriş işareti birim basamak dizisi ve sistemin birim impuls cevabı sağ taraflı üstel bir dizidir. Yani,

$$x(n) = u(n)$$

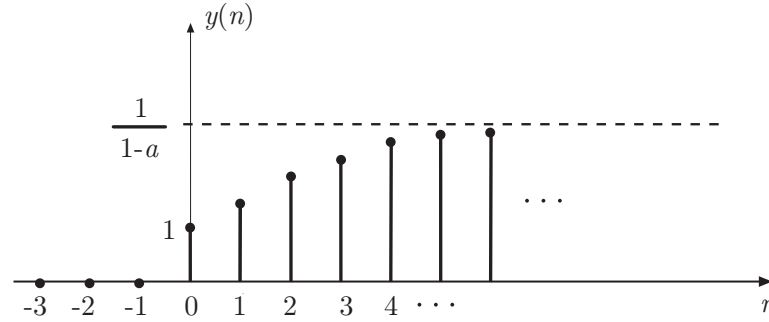
$$h(n) = a^n u(n)$$

Sistem çıkışı $y(n)$ konvolüsyon toplamı yardımıyla bulunabilir.



Şekil 2.5 Örnek 2.1'deki konvolüsyon toplamının grafiksel gösterilimi.

$$\begin{aligned}
 y(n) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k) \\
 &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} u(k)a^{n-k}u(n-k) = \left\{ \sum_{k=0}^n a^{n-k} \right\} u(n)
 \end{aligned}$$



Şekil 2.6 Örnek 2.1’de $0 < a < 1$ için sistem çıkışı, $y(n) = u(n) * (a^n u(n))$.

$0 < a < 1$ için $y(n)$ çıkışı Şekil 2.6’da görülebilir.

örnek 2.2 $x(n) = u(n) - u(n - 5)$ olarak verilen dikdörtgen impuls şeklinde bir dizi birim impuls cevabı $h(n) = 0.4^n u(n)$ olarak verilen DZD bir sisteme giriş olarak uygulanmaktadır. Çıkış dizisini bulunuz.

zm. Giriş dizisi $x(n)$ ve birim impuls cevabı $h(n)$ Şekil 2.7’de gösterilmektedir. (2.2) kullanılarak

$$y(n) = \sum_{k=0}^4 (1)(0.4)^{(n-k)} u(n-k) = (0.4)^n \sum_{k=0}^4 (0.4)^{-k} u(n-k) \quad (2.15)$$

(2.15)’te verilen toplam, $u(n-k)$ terimi dışında bir geometrik seri toplamına benzemektedir. $u(n-k)$ ’nın değerlendirilmesi gereken üç farklı bölge vardır.

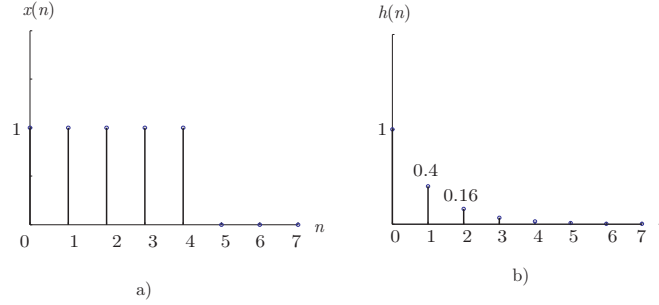
(i) $n < 0$: Bu durumda $0 \leq k \leq 4$ için $u(n - k) = 0$ olmaktadır. Bu şekilde (2.15)'ten $y(n) = 0$ bulunur. Bu aralık için $x(k)$ ve $h(n - k)$ 'nin sıfırdan farklı değerler aldığı bölgeler örtüşmemektedir.

(ii) $0 \leq n < 4$: Bu durumda $0 \leq k \leq n$ için $u(n - k) = 1$ olmaktadır.

(2.15)'ten,

$$\begin{aligned} y(n) &= (0.4)^n \sum_{k=0}^n (0.4)^{-k} = (0.4)^n \sum_{k=0}^n \left[(0.4)^{-1} \right]^k \\ &= (0.4)^n \frac{1 - (0.4)^{-(n+1)}}{1 - 1/0.4} = 10 \left[1 - (0.4)^{n+1} \right] \end{aligned}$$

$x(k)$ ve $h(n - k)$ 'nin sıfırdan farklı değerler aldığı bölgeler kısmi olarak örtüşmektedirler.



Şekil 2.7 Örnek 2.2 için: a) sistem girişi; b) sistem impuls cevabı.

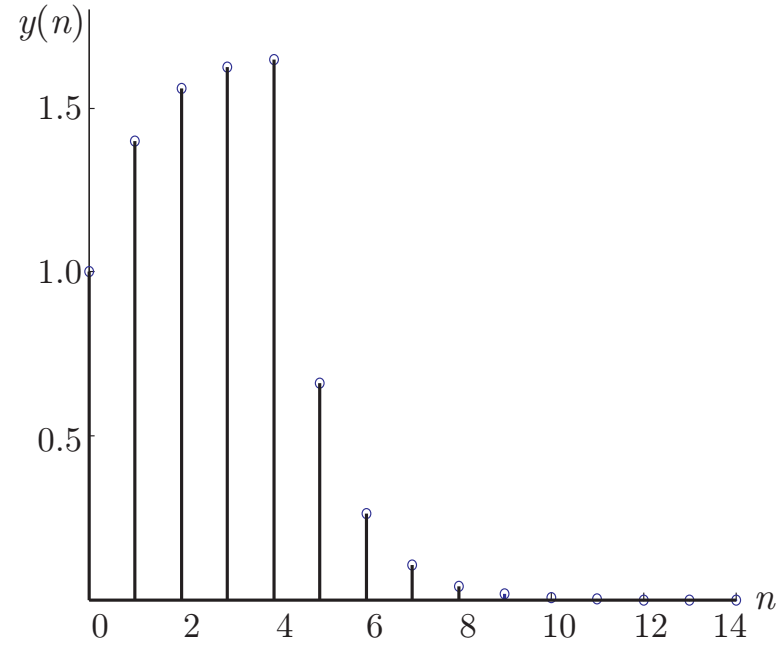
(iii) $n \geq 5$: Bu durumda $0 \leq k \leq 5$ için $u(n - k) = 1$ olmaktadır.

Böylece

$$\begin{aligned}
 y(n) &= (0.4)^n \sum_{k=0}^4 (0.4)^{-k} = (0.4)^n \frac{1 - (0.4)^{(-5)}}{1 - 1/0.4} \\
 &= 10(0.4)^{n-4} [1 - (0.4)^5]
 \end{aligned}$$

$x(k)$ ve $h(n - k)$ 'nin sıfırdan farklı değerler aldığı bölgeler sürekli olarak örtüşmektedirler.

Yukarıda gösterildiği üzere bulunan toplam çıkış Şekil 2.8'de çizdirilmiştir. \square



Şekil 2.8 Örnek 2.2 için sistem çıkışı.

2.1.2 Birim İmpuls Cevabı ve Kararlılık

Tanım uyarınca her sınırlı giriş işareti yine sınırlı bir çıkış sağlıyorsa, DZD sistem kararlıdır. Buna göre sonlu bir M için

$$|x(n)| < M, \quad \text{tüm } n \text{ için} \quad (2.16)$$

olan bir giriş dizisi birim impuls cevabı $h(n)$ olarak verilen sisteme uygulanırsa, çıkışın genliği

$$|y(n)| = \left| \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k) \right| \quad (2.17)$$

olarak bulunur. Sayıların toplamının mutlak değeri tek tek mutlak değerleri toplamından büyük olamaz. O halde,

$$|y(n)| \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)| \cdot |x(n-k)| \quad (2.18)$$

ve giriş dizisi sonlu olduğundan

$$|x(n-k)| < M \quad \text{tüm } k \text{ ve } n \text{ için} \quad (2.19)$$

olur. Bunu (2.18) bağıntısında yerine koyarsak,

$$|y(n)| \leq M \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)| \quad \text{tüm } n \text{ için} \quad (2.20)$$

elde edilir. Bu son bağıntıda $h(n)$ mutlak değerleri toplamı sonlu, yani

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)| < \infty \quad (2.21)$$

olursa, sistem çıkışı $y(n)$ 'nin genliği de sonlu olacaktır. (2.20) ve (2.21) bağıntılarından

$$|y(n)| < \infty \quad \text{tüm } n \text{ için} \quad (2.22)$$

olur. Demek ki, bir DZD sistemin kararlı olabilmesi için gerek ve yeter şart olarak (2.21)'deki koşulun sağlanması gerekmektedir. Bu şartı sağlamayan DZD sistemler kararsızdır. Bu şartın kararlılık testinde uygulanabilmesi için ilk önce sistemin DZD

olduğunun gösterilmesi ve impuls cevabının bulunması gerektiğini unutmayınız.

rnek 2.3 DZD sistemin impuls cevabı aşağıdaki şekilde verilsin.

$$h(n) = a^n u(n) \quad (2.23)$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)| = \sum_{k=0}^{\infty} |a|^k \quad (2.24)$$

elde edilir. Eğer $|a| < 1$ ise, (2.24) toplamı yakınsar. Buradan,

$$\sum_{k=0}^{\infty} |h(k)| = \frac{1}{1 - |a|} \quad (2.25)$$

olarak bulunur ve sistem kararlıdır. Ancak, $|a| \geq 1$ olursa bu toplam yakınsamaz ve sistem kararsız olacaktır.

örnek 2.4 Sadece zamanda öteleme sağlayan bir ayırık-zamanlı sistemi ele alalım.

$$h(n) = \delta(n - n_0) \quad (2.26)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\delta(n - n_0)| = 1 \quad (2.27)$$

Birim impuls cevabı (2.27) ile verilen DZD sistem kararlıdır.

örnek 2.5 Bu örnekte, birim impuls cevabı birim basamak dizisi olan DZD bir sistemi ele alalım.

$$h(n) = u(n) \quad (2.28)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |u(n)| = \sum_{n=0}^{\infty} 1 \rightarrow \infty \quad (2.29)$$

Sözkonusu sistem kararsızdır.

2.1.3 Birim İmpuls Cevabı ve Nedensellik

Daha önce belirtildiği gibi, nedensel bir sistemin çıkışı o andaki ve geçmişteki giriş işaretlerine bağlıdır. (2.2) konvolüsyon toplamı kullanılırsa, DZD bir sistemin birim impuls cevabı ile nedensellik arasındaki ilişki kolayca görülebilir. Burada nedenselliğin geçerli olabilmesi için, $y(n)$ çıkış işaretinin hesaplanmasında $x(k)$ $k > n$ terimlerinin yer almaması gerekmektedir. Bu koşul aşağıda verilen özelliğe indirgenebilir.

$$h(n) = 0 \quad \forall n < 0 \quad (2.30)$$

(2.30) koşulu altında, konvolüsyon toplamı aşağıda verilen şekilde basitleşecektir.

$$y(n) = \sum_{\ell=0}^{\infty} h(\ell)x(n - \ell) \quad (2.31)$$

Aıklama 2.1 Fiziksel olarak gerçekleştirilen sayısal süzgeçlerin daima nedensel olmasına karşılık, nedensel olmayan sistemler de tasarlanabilir. Bellekte saklanan sayısal işaret bilgisayar yazılımı yardımıyla nedensel olmayan bir sistemin gerçekleştirilmesinde kullanılabilir. Sayısal süzgeçlerle ilgili bölümde bu konu ayrıca tartışılacaktır.

2.1.4 Sonlu ve Sonsuz Uzunluklu İmpuls Cevaplı Sistemler

DZD sistemler birim impuls cevaplarının sonlu yada sonsuz uzunluklu olmasına göre sınıflandırılabilirler. Sonlu uzunluklu impuls cevabına sahip olan sistemler sonlu impuls cevaplı (Finite Impulse Response, FIR), sonsuz uzunluklu impuls cevabına sahip olan sistemler sonsuz impuls cevaplı (Infinite Impulse Response, IIR) sistemler olarak adlandırılır. Bir FIR sistem, belirli sonlu bir zaman aralığı dışında sıfır olan bir impuls cevabına sahiptir ve giriş-çıkış ilişkisini belirten konvolüsyon toplamı aşağıdaki şekilde

verilir.

$$h(n) = 0, \quad n < -N_2 \text{ ve } n > N_1$$

$$y(n) = \sum_{k=-N_2}^{N_1} h(k)x(n-k)$$

Eğer sistemin nedensel olduğu bilgisi de verilirse,

$$h(n) = 0, \quad n < 0 \text{ ve } n > N_1 \quad (2.32)$$

$$y(n) = \sum_{k=0}^{N_1} h(k)x(n-k) \quad (2.33)$$

IIR DZD sistem için ise impuls cevabı sonsuz uzunluklu olacaktır ve giriş çıkış ilişkisi (2.2)'de verilen genel sonsuz uzunluklu konvolüsyon toplamı ile ifade edilecektir.

2.2 FARK DENKLEMLERİYLE BELİRLENEN SİSTEMLER

Bir DZD sistemin giriş-çıkış ilişkisinin birim impuls cevabı $h(n)$ ile tamamen belirlendiğini gördük. Böylece konvolüsyon toplamı birim impuls cevabı bilinen bir sistemin gerçekleştirilmesi için bir yöntem olacaktır. (2.32)'den görüldüğü gibi, FIR sistemler için bu çeşit bir gerçekleştirme sınırlı sayıda toplama, çarpma ve hafıza elemanları gerektirecektir. Böylece, FIR bir sistem doğrudan konvolüsyon toplamı ile gerçekleştirilebilir. Ancak sistem IIR ise, sistemin konvolüsyon toplamı kullanılarak gerçekleştirilmesi pratik olarak imkansızdır. Böyle bir gerçekleştirme sonsuz

sayıda toplama, çarpma ve hafıza elemanları gerektirecektir. IIR sistemleri gerçekleştirmek için doğrudan konvolüsyon toplamını kullanmanın dışında pratik bir yöntem geliştirmek zorunlu olacaktır. Böyle bir gerçekleştirme yöntemi fark denklemleriyle ifade edilebilen ayırık-zamanlı sistemler için mümkündür. DZD sistemlerin bir alt sınıfı olan bu sistemlerin giriş-çıkış ilişkisi, sabit katsayılı bir fark denklemi ile ifade edilir.

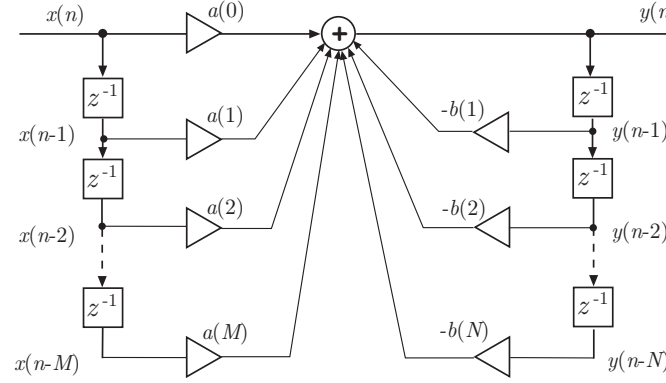
$$\sum_{k=0}^N b_k y(n-k) = \sum_{k=0}^M a_k x(n-k) \quad (2.34)$$

Burada, $x(n)$ ve $y(n)$ sistemin giriş ve çıkış dizilerini, a_k ve b_k ise sabit katsayıları belirtmektedir. $\text{maksimum}(N, M)$

bu ayrık-zamanlı sistemin ve fark denkleminin derecesi olarak adlandırılmaktadır. Bu denklemi kullanarak çıkış dizisi $y(n)$ özyineli (recursive) bir şekilde hesaplanabilir. Bunun için sistemin nedensel olduğunu ve katsayıların $b_0 = 1$ olacak şekilde normalize edildiğini varsayalım. (2.34) yeniden yazılabilir.

$$y(n) = \sum_{k=0}^M a_k x(n-k) - \sum_{k=1}^N b_k y(n-k) \quad (2.35)$$

Böylece eğer $x(n)$ ve başlangıç koşulları $y(n_0 - 1), y(n_0 - 2), \dots, y(n_0 - N)$ biliniyorsa, her $n \geq n_0$ için çıkış $y(n)$ hesaplanabilir. (2.35)'deki fark denklemini Şekil 2.9'da gösterildiği gibi gerçekleştirilebilir. Burada toplama, çarpma ve z^{-1} ile gösterilen birim gecikme elemanları



Şekil 2.9 (2.35)'deki fark denkleminin gerçekleştirilmesi. Birim gecikme z -dönüşümünde karşılığı olan z^{-1} operatörü ile gösterilmiştir.

fark denklemiyle belirlenen sistemin gerçekleştirilmesinde kullanılmaktadır.

2.2.1 Sistem Cevabının Hesaplanması

Bu bölümdeki amacımız, $n \geq 0$ için belirli bir giriş işareti $x(n)$ ve bir dizi başlangıç koşulları verildiğinde, $n \geq 0$ için $y(n)$ çıkış dizisini bulmak olacaktır. Sabit katsayılı fark denklemlerinin çözümünün hesaplanmasında sabit katsayılı diferansiyel denklemlerin çözümüne benzer bir yöntem izleyeceğiz. (2.34) ile belirtilen ayrık-zamanlı sistemin çıkışı, birbirinden bağımsız olarak hesaplanıp toplam cevabı oluşturmak üzere bir araya getirilen iki çıkıştan oluşacaktır. Bu çıkışlardan biri sadece ilk koşullara, diğeri ise sadece giriş işaretine bağlı olacaktır. İlk koşullara

bağlı olan cevap sistemin *doğal cevabı* olarak adlandırılacak ve y_d ile gösterilecektir. Giriş nedeniyle oluşan çıkış ise sistemin *zorlanmış cevabı* olarak adlandırılacak ve y_z olarak gösterilecektir. Doğal cevap sıfır giriş için sistemin çıkışı, zorlanmış cevap ise sıfır başlangıç koşulları için sistem çıkışı olacaktır. Sıfır başlangıç koşullarına sahip olan bir sistem, sistemin depolanmış herhangi bir enerjisi yada belleği olmadığı için durgun olarak nitelendirilir. Doğal cevap, sistemin sıfırdan farklı ilk koşullarla nitelenen bir depolanmış enerjiyi yada geçmişe yönelik bilgiyi nasıl kullandığını

gösterir. Zorlanmış cevap ise durgun sistem için giriş işaretinin zorladığı çıkışı belirtir.

2.2.2 Doğal Cevap

$y_d(n)$, (2.34) denkleminin, $x(n) = 0$ için çözümüdür. Böylece $y_d(n)$ aşağıda verilen homojen fark denkleminin çözümü olmaktadır:

$$\sum_{k=0}^N b_k y(n-k) = 0 \quad (2.36)$$

Doğal çözümü bulmak için bu çözümün λ^n biçiminde olduğu varsayılır. Bu biçimin (2.34) denkleminde yerine koyulmasıyla

aşağıdaki koşul elde edilir:

$$\sum_{k=0}^N b_k \lambda^{n-k} = \lambda^{n-N} (b_0 \lambda^N + b_1 \lambda^{N-1} + \dots + b_{N-1} \lambda + b_N) = 0 \quad (2.37)$$

$\sum_{k=0}^N b_k \lambda^{n-k}$ polinomu ayırık-zamanlı sistemimizin karakteristik polinomu olarak adlandırılır. Bu polinomun köklerini $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N$

olarak adlandıralım. Eğer bu köklerin herbiri ayrı ise doğal çözüm şu şekilde oluşacaktır.

$$y_d(n) = c_1\lambda_1^n + c_2\lambda_2^n + \cdots + c_N\lambda_N^n \quad (2.38)$$

Buradaki c_1, c_2, \dots, c_N katsayıları başlangıç koşulları kullanılarak bulunacaktır. Doğal cevaptaki her terim, karşılık gelen kökün gerçel, sanal yada karmaşık değerli olmasına göre farklılık gösterecektir. Gerçel kökler gerçel üstel cavaplara, sanal kökler sinüzoidal cevaplara ve karmaşık değerli kökler üstel sönümlü sinüzoidal cevaplara neden olacaktır.

Eğer karakteristik denklem katlı köklere sahipse, doğal çözüm değişikliğe uğrayacaktır. λ_j kökü p katlı ise, doğal çözümde bu köke ilişkin p ayrı terim olacaktır. Bunlar $\lambda_j^n, n\lambda_j^n, \dots, n^{p-1}\lambda_j^n$ fonksiyonlarıdır.

rnek 2.6 Aşağıda fark denklemi verilen sistem için doğal çözümü $(y_d(n), n \geq 0)$ bulunuz. Başlangıç koşulları $y(-1) = 2$ ve $y(-2) = 3$ olarak verilmektedir.

$$y(n) - 3y(n-1) - 4y(n-2) = x(n) \quad (2.39)$$

zm. Doğal çözümü bulmak için $y_d(n) = \lambda^n$ olarak alıp, bu çözümü $x(n) = 0$ için fark denklemine yerleştiriyoruz.

$$\begin{aligned} \lambda^n - 3\lambda^{n-1} - 4\lambda^{n-2} &= \lambda^{n-2}(\lambda^2 - 3\lambda - 4) \\ &= \lambda^{n-2}(\lambda + 1)(\lambda - 4) = 0. \end{aligned}$$

Böylece karakteristik polinomun kökleri $\lambda = -1$ ve $\lambda = 4$ olur. Doğal çözüm aşağıdaki şekilde yazılır.

$$y_d(n) = c_1(-1)^n + c_2(4)^n \quad (2.40)$$

Burada c_1, c_2 katsayıları $y(-1), y(-2)$ ön koşullarını sağlayacak şekilde seçilir. (2.39) $n = 0$ ve $n = 1$ için değerlendirilerek aşağıdaki değerler elde edilir.

$$y(0) = 3y(-1) + 4y(-2) = 6 + 12 = 18$$

$$y(1) = 3y(0) + 4y(-1) = 54 + 8 = 62$$

Öte yandan (2.40) kullanılarak aşağıdaki eşitlikler elde edilir.

$$y(0) = c_1 + c_2 = 18$$

$$y(1) = -c_1 + 4c_2 = 62$$

Buradan çözüm olarak $c_1 = 2$ ve $c_2 = 16$ bulunur. Bulunan katsayıları (2.40) denkleminde yerine koyarsak doğal çözüm

$$y_d(n) = 2(-1)^n + 16(4)^n, \quad n \geq 0$$

şeklinde oluşur. \square

2.2.3 Zorlanmış Cevap

Şimdi (2.34) için zorlanmış cevabı bulmaya çalışalım. Zorlanmış çözüm sıfır ilk koşullar varsayarak verilen giriş işareti için bulunacak çözümdür. Zorlanmış cevapta iki bölümden oluşacaktır: doğal cevapla aynı biçimde bir bölüm, ve bir özel çözüm.

Özel çözüm ($y_o(n)$) verilen giriş işareti için fark denkleminin herhangi bir çözümünü göstermektedir. Özel çözümün bulunmasında uygulanacak yöntem, özel çözümün giriş işaretiyle aynı genel biçimde olacağı varsayımdır. Böylece, eğer $x(n)$ sabit

ise $y_ö(n)$ 'de sabit, eğer $x(n)$ bir sinüzoid ise $y_ö(n)$ 'de aynı frekanslı bir sinüzoid olacaktır.

Eğer giriş işareti doğal cevapta yer alan terimlerle aynı biçime sahipse özel çözüm farklı bir yol izlenerek bulunur. Bunun için doğal çözümde yer alan terimlerden bağımsız bir özel çözüm bulmamız gerekir. Karakteristik denklemde katlı kökler olduğunda doğal çözümde yapılan değişikliğe benzer bir yol izlenir. Özel çözümün genel biçimi, n^m gibi bir fonksiyonla çarpılır. m doğal cevapta yer almayan bir terimi sağlayacak en küçük değer olarak seçilir.

Zorlanmış çözüm, özel çözüm ve doğal çözüm genel formunun toplanmasıyla oluşur. Doğal çözümdeki katsayılar bu kez zorlanmış çözümün sıfır ilk koşulları sağlayacağı şekilde seçilir.

örnek 2.7 Örnek 2.6'da verilen sistem için zorlanmış çözümü $(y_z(n), n \geq 0)$ belirleyiniz. Giriş $x(n) = 9u(n)$ olarak verilmektedir.

zm. Zorlanmış çözüm $y_z(n) = y_d(n) + y_{\text{ö}}(n)$ biçiminde bulunacaktır. Doğal çözüm $y_d(n)$ 'nin genel formu, Örnek 2.6'da $y_d(n) = c_1(-1)^n + c_2(4)^n$ olarak bulunmuştu. Şimdi bir özel çözüm bulmaya çalışalım. Giriş dizisi sabit bir dizi olduğu için, özel çözümün de benzer şekilde sabit bir dizi olacağı varsayılır. K bir sabit olmak üzere $y_{\text{ö}}(n) = Ku(n)$ olarak alınıp sistem fark denklemine yerleştirilir. Elde edilen denklem aşağıda

verilmektedir.

$$Ku(n) - 3Ku(n-1) - 4Ku(n-2) = 9u(n)$$

Bu denklemi herhangi bir $n \geq 2$ için değerlendirirsek $K'yı$ bulabiliriz.

$$K - 7K = 9 \Rightarrow K = -1.5$$

Böylece $y_ö(n) = -1.5u(n)$ olarak bulunur. Zorlanmış çözüm ise

$$y_z(n) = c_1(-1)^n + c_2(4)^n - 1.5u(n), \quad n \geq 0 \quad (2.41)$$

olur. Burada c_1, c_2 katsayıları $y(-1), y(-2)$ için sıfır ilk koşulları sağlayacak şekilde seçilir. (2.39), $n = 0$ ve $n = 1$ için

değerlendirilerek aşağıdaki değerler elde edilir.

$$y(0) = 3y(-1) + 4y(-2) + 9 = 0 + 0 + 9 = 9$$

$$y(1) = 3y(0) + 4y(-1) + 9 = 27 + 0 + 9 = 36$$

Öte yandan (2.41) kullanılarak aşağıdaki eşitlikler elde edilir.

$$y(0) = c_1 + c_2 - 1.5 = 9$$

$$y(1) = -c_1 + 4c_2 - 1.5 = 36$$

Buradan çözüm olarak $c_1 = 0.9$ ve $c_2 = 9.6$ bulunur. Bulunan

katsayıları (2.41) denkleminde yerine koyarsak zorlanmış çözüm

$$y_z(n) = 0.9(-1)^n + 9.6(4)^n - 1.5u(n), \quad n \geq 0$$

şeklinde oluşur. \square

2.2.4 Toplam Cevap

Sistemin toplam cevabı, doğal cevap ve zorlanmış cevabın toplamı olarak bulunur.

rnek 2.8 Aşağıda fark denklemi verilen sistem için toplam çözümü $(y(n), n \geq 0)$ bulunuz. Giriş birim basamak dizisi ve $y(-1)$ başlangıç koşuludur.

$$y(n) + b_1 y(n-1) = x(n), \quad |b_1| < 1 \quad (2.42)$$

$$x(n) = u(n) \quad (2.43)$$

zm. Doğal çözümü bulmak için $y_d(n) = \lambda^n$ olarak alıp, bu çözümü $x(n) = 0$ için fark denkleminde yerleştiriyoruz.

$$\lambda^n + b_1 \lambda^{n-1} = \lambda^{n-1}(\lambda + b_1) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda = -b_1$$

Böylece doğal çözüm $y_d(n) = c_1(-b_1)^n$ şeklinde bulunur. Sıfır giriş için c_1 katsayısını bulalım. $y_d(n)$ 'yi $x(n) = 0$ ve $n = 0$ için fark denkleminde yerleştirirsek

$$\begin{aligned}y_d(0) + b_1 y(-1) &= 0 \\ \Rightarrow c_1 + b_1 y(-1) &= 0 \\ \Rightarrow c_1 &= -b_1 y(-1)\end{aligned}$$

elde ederiz. Böylece $y_d(n) = y(-1)(-b_1)^{n+1}$ olur.

Şimdi zorlanmış çözümü bulalım. Giriş dizisi sabit bir dizi olduğu için, özel çözümün de benzer şekilde sabit bir dizi olacağı varsayılır. K bir sabit olmak üzere $y_o(n) = Ku(n)$ olarak alınıp

sistem fark denklemine yerleştirilir. Elde edilen denklem aşağıda verilmektedir.

$$Ku(n) + b_1Ku(n-1) = u(n)$$

Bu denklemi herhangi bir $n \geq 1$ için değerlendirirsek K' 'yı bulabiliriz.

$$K + b_1K = 1 \Rightarrow K = \frac{1}{1 + b_1}$$

Böylece $y_{\text{ö}}(n) = \frac{1}{1 + b_1}u(n)$ olarak bulunur. Zorlanmış çözüm ise

$$y_z(n) = c_2(-b_1)^n + \frac{1}{1 + b_1}u(n)$$

olur. Burada c_2 katsayısı, sıfır ilk koşulu sağlayacak şekilde seçilir. Sıfır ilk koşul için $n = 0$ 'da fark denklemini yazarsak

$$y_z(0) + b_1 0 = x(0) \Rightarrow y_z(0) = 1$$

$y_z(0) = 1$ yerine koyarsak c_2 'yi elde ederiz.

$$y_z(0) = c_2 + \frac{1}{1 + b_1} = 1 \Rightarrow c_2 = \frac{b_1}{1 + b_1}$$

Böylece zorlanmış cevabı

$$y_z(n) = \frac{b_1}{1 + b_1}(-b_1)^n + \frac{1}{1 + b_1}u(n) = \frac{1 - (-b_1)^{n+1}}{1 + b_1}$$

olarak buluruz. Böylece toplam çözüm, doğal çözüm ve zorlanmış çözümün toplamı

$$\begin{aligned} y(n) &= y_d(n) + y_z(n) \\ &= (-b_1)^{n+1}y(-1) + \frac{1 - (-b_1)^{n+1}}{1 + b_1} \end{aligned}$$

olarak bulunur. \square

2.2.5 Birim İmpuls Cevabının Hesaplanması

Fark denklemi ile belirtilen bir ayırık-zamanlı sistemin birim impuls cevabı, sistemin girişine $x(n) = \delta(n)$ girişi verilerek elde edilen zorlanmış cevaptır. Birim impuls giriş işareti için $x(n) = 0, n > 0$ olacağından, özel çözüm sıfır ($y_o(n) = 0$) olacaktır. Böylece, birim impuls cevabı sadece $y_d(n)$ doğal çözümü ve sıfır başlangıç koşulları kullanılarak bulunabilir.

Örnek 2.9 Aşağıda fark denklemi verilen sistem için birim impuls cevabını bulunuz.

$$y(n) + b_1 y(n-1) = x(n), \quad |b_1| < 1 \quad (2.44)$$

Çözüm. Bu sistem için doğal çözümü Örnek 2.8'de bulmuştuk.

$$h(n) = y_d(n) = c(-b_1)^n u(n)$$

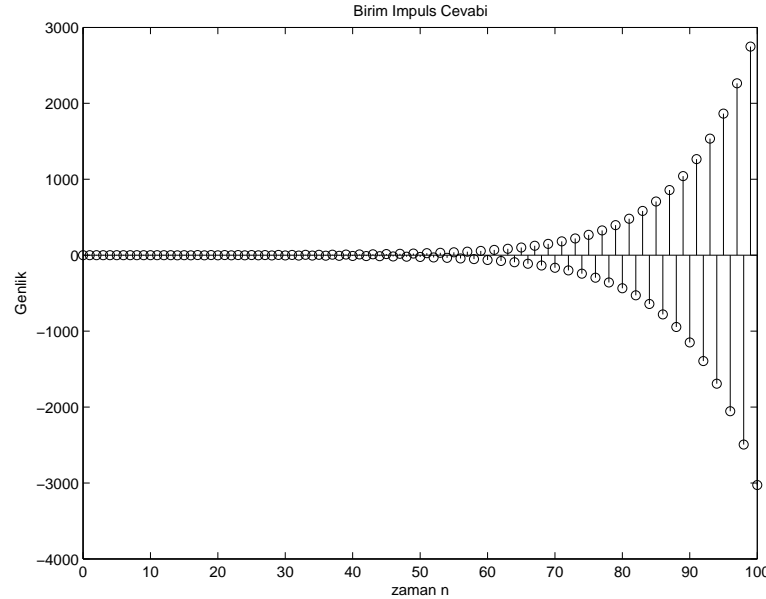
Sistemin birim impuls cevabını bulmak için $h(-1) = 0$ seçeriz. Bu durumda $n = 0$ için fark denklemini yazarsak

$$h(0) + b_1 h(-1) = 1 \Rightarrow h(0) = 1$$

$n = 0$ için birim impuls cevabını yazarsak c 'yi elde ederiz ve

$$h(0) = c = 1 \implies h(n) = (-b_1)^n u(n)$$

sonucuna ulaşırız. \square



Şekil 2.10 Örnek 2.10'daki sayısal süzgecin impuls cevabının MATLAB ile çizdirilmiş şekli.

Örnek 2.10 Fark denklemi aşağıda verilen nedensel DZD bir sistemin birim impuls cevabını MATLAB ile çizdirelim.

$$y(n) + 0.5y(n-1) - 0.3y(n-2) + 0.4y(n-3) = 0.2x(n) + 0.6x(n-1)$$

```
% Birim Impuls Cevabı Hesaplanması
clear all; close all;
N = input('birim impuls cevabının hesaplanacağı uzunluk= ');
a = input('a_k katsayılarını girin a= ');
b = input('b_k katsayılarını girin b= ');
x = [1 zeros(1,N-1)];
y = filter(a,b,x);
k = 0:N-1; stem(k,y); xlabel('zaman n');
ylabel('Genlik'); title('Birim Impuls Cevabı');
```

Giriş yaptığımız değerler

```
N=101; a=[0.2 0.6]; b=[1 0.5 -0.3 0.4];
```

Bu programla hesaplanan birim impuls cevabı Şekil 2.10'da çizilmiştir. Burada kullanılan filter komutu yerine kendimiz doğrudan fark denklemini yazarak da bu sistemi gerçekleyebilirdik. Ancak, filter komutu genel bir giriş işareti ve genel fark denklemi derecesi için bu işlemi kolaylaştırmaktadır. İmpuls cevabının genliği üstel olarak arttığı için mutlak değer toplanabilir olmadığını söyleyebiliriz. Böylece bu sistemin kararlı olmadığı anlaşılmaktadır.

2.3 DURUM DEĞİŞKENLERİ YÖNTEMİ

Fark denklemiyle modellenen nedensel süzgeçlerin iç değişkenlerinin durumunu belirlemek için durum değişkenleri yaklaşımı kullanılır. Sistemin tüm durum değişkenleri durum vektörü adı verilen bir vektörle gösterilir. Durum değişkenleri N . dereceden bir fark denklemini N adet birinci dereceden sisteme dönüştürerek elde edilir. Bu amaçla, aşağıdaki N . dereceden fark denklemini ele alalım.

$$y(n) = \sum_{k=0}^N a_k x(n-k) - \sum_{k=1}^N b_k y(n-k) \quad (2.46)$$

Bu süzgeci birbirine seri bağlanmış iki süzgeçe ayırabiliriz.

$$w(n) = x(n) - \sum_{k=1}^N b_k w(n-k) \quad (2.47)$$

$$y(n) = \sum_{k=0}^N a_k w(n-k) \quad (2.48)$$

Gerçekten de (2.47)'deki ifade (2.48) denkleminde yerine konularak (2.46)'da gösterilen fark denklemi elde edilir. $q_1(n), q_2(n), \dots, q_N(n)$

durum değişkenleri

$$\begin{aligned} q_1(n) &= w(n - N) \\ q_2(n) &= w(n - N + 1) \\ &\vdots \\ q_N(n) &= w(n - 1) \end{aligned} \tag{2.49}$$

olarak tanımlanır. (2.47) ve (2.49) denklemlerinden durum değişkenleri arasındaki ilişki yazılabilir.

$$\begin{aligned}
 q_1(n+1) &= w(n-N+1) = q_2(n) \\
 q_2(n+1) &= w(n-N+2) = q_3(n) \\
 &\vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \\
 q_{N-1}(n+1) &= w(n-1) = q_N(n) \\
 q_N(n+1) &= w(n) = x(n) - b_1w(n-1) - b_2w(n-2) - \dots - b_Nw(n-N) \\
 &= x(n) - b_1q_N(n) - b_2q_{N-1}(n) - \dots - b_Nq_1(n)
 \end{aligned}
 \tag{2.50}$$

Bu denklemleri matris formunda gösterebiliriz.

$$\begin{bmatrix} q_1(n+1) \\ q_2(n+1) \\ \vdots \\ q_{N-1}(n+1) \\ q_N(n+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -b_N & -b_{N-1} & -b_{N-2} & \cdots & -b_2 & -b_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1(n) \\ q_2(n) \\ \vdots \\ q_N(n) \\ q_{N-1}(n) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} x(n)$$

(2.51)

(2.47) kullanılarak $w(n)$ değişkeni (2.48)'de yok edilebilir.

$$\begin{aligned}
 y(n) &= a_0 \left[x(n) - \sum_{k=1}^N b_k w(n-k) \right] + \sum_{k=1}^N a_k w(n-k) \\
 &= a_0 x(n) + \sum_{k=1}^N [a_k - a_0 b_k] \cdot w(n-k)
 \end{aligned} \tag{2.52}$$

Aşağıdaki katsayıları tanımlayalım.

$$\begin{aligned}
 c_1 &= a_N - a_0 b_N \\
 c_2 &= a_{N-1} - a_0 b_{N-1} \\
 &\vdots \\
 c_N &= a_1 - a_0 b_1
 \end{aligned} \tag{2.53}$$

(2.50) ve (2.53)'teki tanımları kullanarak, çıkış

$$y(n) = a_0 x(n) + c_1 q_1(n) + c_2 q_2(n) \dots + c_N q_N(n) \tag{2.54}$$

veya

$$y(n) = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \dots & c_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1(n) \\ q_2(n) \\ \vdots \\ q_N(n) \end{bmatrix} + [a_0]x(n) \quad (2.55)$$

olarak yazılabilir. Girişine $x(n)$ işareti uygulanan doğrusal bir sistemin çıkışı $y(n)$ olduğuna göre, durum denklemleri (2.51) ve (2.55)'den aşağıdaki gibi yazılabilir.

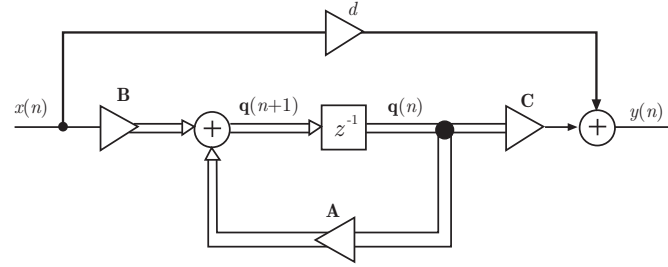
$$\mathbf{q}(n+1) = \mathbf{A}\mathbf{q}(n) + \mathbf{B}x(n) \quad (2.56)$$

$$y(n) = \mathbf{C}\mathbf{q}(n) + dx(n) \quad (2.57)$$

A sistem matrisi, **B** kontrol vektörü, **C** gözlem vektörü ve d geçiş katsayısı olarak adlandırılır. **A** matrisi N . dereceden bir kare matrisidir. **B** ve **C** vektörleri N -boyutludur. $\mathbf{q}(n)$ ise durum değişkenlerini içeren durum vektörüdür.

$$\mathbf{q}(n) = \begin{bmatrix} q_1(n) & q_2(n) & \dots & q_N(n) \end{bmatrix}^T \quad (2.58)$$

Şekil 2.11'de durum-değişkenlerine ilişkin blok diyagramı gösterilimi verilmiştir. Burada çift çizgiler vektör işaretleri göstermektedir.



Şekil 2.11 Durum değişkenleri yöntemiyle modellenen süzgecin blok diyagramı.

Örnek 2.11 Sayısal bir süzgeç aşağıdaki fark denklemiyle tanımlansın:

$$y(n) = x(n) + 2x(n-1) + x(n-2) - y(n-1) + 2y(n-2) \quad (2.59)$$

Süzgeç durum değişkenleri yardımıyla şöyle gösterilir. (2.51)

denklemden,

$$\begin{bmatrix} q_1(n+1) \\ q_2(n+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1(n) \\ q_2(n) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} x(n) \quad (2.60)$$

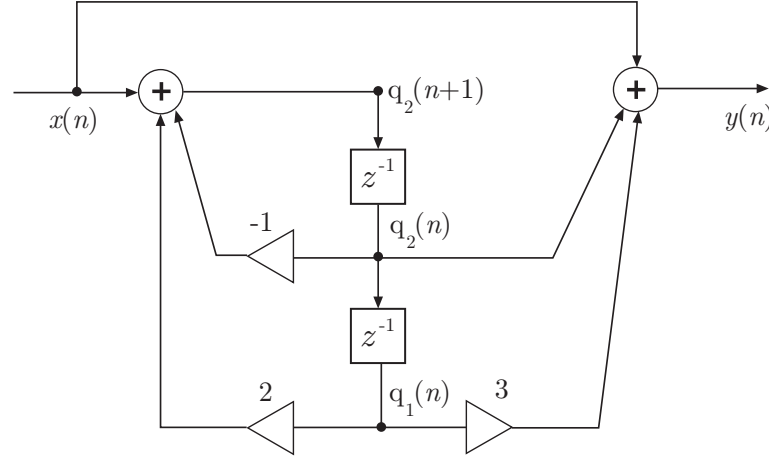
elde edilir. (2.53)'den

$$c_1 = a_2 - a_0 b_2 = 1 - 1(-2) = 3$$

$$c_2 = a_1 - a_0 b_1 = 2 - 1.1 = 1$$

bulunur. O halde,

$$y(n) = [3 \ 1] \begin{bmatrix} q_1(n) \\ q_2(n) \end{bmatrix} + x(n) \quad (2.61)$$



Şekil 2.12 Örnek 2.11'deki sayısal süzgecin durum değişkenleri cinsinden blok diyagramı.

(2.60) ve (2.61) birlikte sayısal süzgecin durum denklemlerini göstermektedir. Durum değişkenleri cinsinden blok-diyagram Şekil 2.12'de gösterilmiştir.

2.3.1 Durum Vektörünün Doğrusal Dönüşümü

Durum değişkenleri gösterilimi, verilen bir sistem için tek değildir. Aynı sayısal süzgeç için farklı yapıların varlığı kuvantalama hatalarının etkisinin azaltılması ve işlem karmaşıklığının azaltılması gibi konularda yararlıdır. T boyutu N olan ve tersi alınabilen bir kare matris olduğuna göre, $\mathbf{q}(n)$ durum vektörünün doğrusal dönüşümü

$$\mathbf{q}'(n) = \mathbf{T} \mathbf{q}(n) \quad (2.62)$$

olur. (2.56) ve (2.62)'nin tersinden

$$\begin{aligned}\mathbf{q}'(n+1) &= \mathbf{T}\mathbf{A}\mathbf{q}(n) + \mathbf{T}\mathbf{B}x(n) \\ &= \mathbf{T}\mathbf{A}\mathbf{T}^{-1}\mathbf{q}'(n) + \mathbf{T}\mathbf{B}x(n)\end{aligned}\tag{2.63}$$

ve

$$y(n) = \mathbf{C}\mathbf{T}^{-1}\mathbf{q}'(n) + dx(n)\tag{2.64}$$

yazılır.

$$\mathbf{A}' = \mathbf{T}\mathbf{A}\mathbf{T}^{-1}, \mathbf{B}' = \mathbf{T}\mathbf{B}, \mathbf{C}' = \mathbf{C}\mathbf{T}^{-1}, d' = d$$

olarak tanımlanırsa yeni durum denklemleri

$$\begin{aligned}\mathbf{q}'(n+1) &= \mathbf{A}'\mathbf{q}'(n) + \mathbf{B}'x(n) \\ y(n) &= \mathbf{C}'\mathbf{q}'(n) + d'x(n)\end{aligned}\tag{2.65}$$

olur. Burada çıkış $y(n)$ 'nin değişmediği görülmektedir.

örnek 2.12 Dönüşüm matrisi \mathbf{T} 'nin bir diyagonal matris olması durumunda \mathbf{A}' , \mathbf{B}' ve \mathbf{C}' matrislerini bulalım.

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} t_{11} & 0 \\ 0 & t_{22} \end{bmatrix} \quad (2.66)$$

olduğuna göre ölçeklenmiş durum vektörü $\mathbf{q}'(n)$

$$\mathbf{q}'(n) = \begin{bmatrix} t_{11}q_1(n) \\ t_{22}q_2(n) \end{bmatrix} \quad (2.67)$$

olarak bulunur. Ayrıca ölçeklenmiş durum matrisleri de

$$\mathbf{A}' = \mathbf{T} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} a_{11} & \frac{t_{11}}{t_{22}} a_{12} \\ \frac{t_{22}}{t_{11}} a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad (2.68)$$

$$\mathbf{B}' = \mathbf{T} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{11}b_1 \\ t_{22}b_2 \end{bmatrix} \quad (2.69)$$

$$\mathbf{C}' = [c_1 \ c_2] \mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{c_1}{t_{11}} & \frac{c_2}{t_{22}} \end{bmatrix} \quad (2.70)$$

olarak bulunur.

2.3.2 Zaman Domeni Analizi

Sayısal süzgeçlerin zaman domen analizi durum denklemleri yardımıyla da gerçekleştirilir. İlk koşulların bilinmesi durumunda giriş ve çıkış ilişkisi \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} ve d cinsinden ifade edilebilir. $n = 0, 1, 2, \dots$ için

$$\begin{aligned}\mathbf{q}(1) &= \mathbf{A}\mathbf{q}(0) + \mathbf{B}x(0) \\ \mathbf{q}(2) &= \mathbf{A}\mathbf{q}(1) + \mathbf{B}x(1) \\ \mathbf{q}(3) &= \mathbf{A}\mathbf{q}(2) + \mathbf{B}x(2) \\ &\vdots\end{aligned}\tag{2.71}$$

olduğu ve

$$\mathbf{q}(2) = \mathbf{A}^2\mathbf{q}(0) + \mathbf{A}\mathbf{B}x(0) + \mathbf{B}x(1)$$

$$\mathbf{q}(3) = \mathbf{A}^3\mathbf{q}(0) + \mathbf{A}^2\mathbf{B}x(0) + \mathbf{A}\mathbf{B}x(1) + \mathbf{B}x(2)$$

yazılabileceği açıktır. Buradan genel bağıntı olarak

$$\mathbf{q}(n) = \mathbf{A}^n\mathbf{q}(0) + \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{A}^{(n-1-k)}\mathbf{B}x(k) \quad (2.72)$$

bulunur. (2.72) bağıntısında $\mathbf{A}^0 = \mathbf{I}$ boyutları $(N \times N)$ olan birim matristir. O halde,

$$y(n) = \mathbf{C}\mathbf{q}(n) + dx(n)$$

$$y(n) = \mathbf{C}\mathbf{A}^n\mathbf{q}(0) + \mathbf{C} \sum_{k=0}^{N-1} \mathbf{A}^{(n-1-k)}\mathbf{B}x(k) + dx(n) \quad (2.73)$$

olur. $\mathbf{q}(0)$ başlangıç koşullarını taşıyan durum vektörü olup (2.49)'dan

$$\mathbf{q}(0) = \begin{bmatrix} q_1(0) \\ \vdots \\ q_N(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w(-N) \\ \vdots \\ w(0) \end{bmatrix} \quad (2.74)$$

olarak bulunur. Giriş işaretinin $n < 0$ için $x(n) = 0$ ve $\mathbf{q}(0) = \mathbf{0}$ olması durumunda (2.73)'den

$$y(n) = \mathbf{C} \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{A}^{(n-1-k)} \mathbf{B} x(k) + dx(n) \quad (2.75)$$

bulunur. (2.75) başlangıç koşulları sıfır olan sayısal süzgecin çıkışını gösterir. Benzer şekilde, \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} ve d cinsinden sayısal süzgecin

impuls cevabı (2.75)'den yazılabilir.

$$h(n) = \mathbf{C} \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{A}^{(n-1-k)} \mathbf{B} \delta(k) + d \delta(n) \quad (2.76)$$

Böylece,

$$h(n) = \begin{cases} a(0), & n = 0 \text{ için} \\ \mathbf{C} \mathbf{A}^{(n-1)} \mathbf{B}, & n \neq 0 \text{ için} \end{cases} \quad (2.77)$$

REFERANSLAR

1. L. B. Jackson, *Digital Filters and Signal Processing*, Kluwer Academic Publishers, 1996.
2. T. Kailath, *Linear Systems*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1980.
3. B. Porat, *A Course in Digital Signal Processing*, John Wiley & Sons, 1997.
4. S. K. Mitra, *Digital Signal Processing, A Computer Based Approach*, Mc Graw-Hill, 2001.

PROBLEMLER

2.1 M uzunluğunda bir dizi ile N uzunluğunda bir dizinin konvolüsyonunun $M + N - 1$ uzunluğunda bir dizi olacağını gösteriniz.

2.2 $x(n) = u(n) - u(n - N)$ dizisi verilmiş olsun. $y(n) = x(n) * x(n)$ dizisini bulunuz ve en yüksek değeri N olan üçgen bir işaret olduğunu gösteriniz. $y(n)$ dizisinde $N/4, N/2, N$ değerli örneklerin hangi noktalarda oluştuğunu bulunuz.

2.3 Aşağıdaki işaret çiftleri için $y(n) = x(n) * h(n)$ konvolüsyonunu hesaplayınız ve $y(n)$ 'yi çizdiriniz.

(a) $x(n) = u(n) - u(n - 6)$

$$h(n) = 0.8^n u(n)$$

(b) $x(n) = u(n) - u(n - 6)$

$$h(n) = (-0.8)^n u(n)$$

(c) $x(n) = a^n u(n)$

$$h(n) = b^n u(n), a \neq b$$

2.4 $h_1(n)$ ve $h_2(n)$ birbirine seri bağlı iki doğrusal zamanla-değişmeyen sistemin impuls cevapları olsun.

Aşağıdaki $x(n)$ girişi için sistemin $y(n)$ çıkışını bulunuz.

$$h_1(n) = \sin(8n)$$

$$h_2(n) = a^n u(n), |a| < 1$$

$$\text{ve } x(n) = \delta(n) - \delta(n - 1)$$

(İpucu: Konvolüsyonun birleşme ve değişme özelliklerini kullanınız).

2.5 Aşağıdakiler DZD sistemlerin impuls cevaplarıdır. Sistemlerin kararlılığı için gerekli koşulları belirleyiniz.

$$(a) \ h(n) = a^n[u(n) - u(n - 100)]$$

$$(b) \ h(n) = a^n u(-n)$$

$$(c) \ h(n) = a^{|n|}$$

$$(d) \ h(n) = r^n \sin(n\omega_0 T)u(n)$$

$$(e) \ h(n) = K(-1)^n u(n)$$

2.6 Aşağıdakiler DZD sistemlerin impuls cevaplarıdır. Sistemlerin nedensel olup olmadığını belirleyiniz.

$$(a) \ h(n) = (-1/2)^n u(n) + (1.01)^n u(n - 1)$$

$$(b) \ h(n) = (0.99)^n u(-n)$$

$$(c) \ h(n) = (4)^n u(2 - n)$$

$$(d) \ h(n) = n(1/2)^n u(n)$$

$$(e) \ h(n) = (0.9)^n u(n+3)$$

2.7 Aşağıdaki ifade ve denklemlerin doğru olup olmadıklarını belirleyiniz. Doğru ise ispat ediniz. Yanlış ise bir örnek ile gösteriniz.

$$(a) \ x(n) * \{h(n)g(n)\} = \{x(n) + h(n)\}g(n)$$

$$(b) \ \alpha^n x(n) * \alpha^n h(n) = \alpha^n \{x(n) * h(n)\}$$

$$(c) \ \text{Eğer } y(n) = x(n) * h(n) \text{ ise, } y(2n) = x(2n) * h(2n)$$

2.8 Bir DZD sistemin impuls cevabı aşağıda verilmiştir.

$$h(n) = \begin{cases} a^n, & n \geq 0 \\ b^n, & n < 0 \end{cases}$$

Bu sistemi kararlı yapan a ve b değer aralıklarını bulunuz.

2.9 İlk koşulları sıfır olan ve aşağıdaki fark denklemi ile belirlenen DZD sistemi inceleyelim.

$$y(n) - (5/2)y(n-1) + y(n-2) = 6x(n) - 7x(n-1) + 5x(n-2)$$

(a) $x(n) = u(n)$ birim basamak işaretine olan cevabını kapalı formda bulunuz.

(b) $x(n) = (-1/2)^n$ girişine cevabını bulunuz.

(c) $x(n) = (-1/2)^n u(n-2) + 3u(n-4)$ girişine cevabını bulunuz.

2.10 İmpuls cevabı $h(n) = e^{-0.1n} u(n)$ olan DZD sayısal süzgecin fark denklemi gösterilimini bulunuz.

2.11 Başlangıç koşulları sıfır olan bir sistem aşağıdaki matrisler ile karakterize edilsin.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{-5}{16} & -1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} \frac{11}{8} & 2 \end{bmatrix} \quad d = [2]$$

(a) Durum-uzayı yöntemini kullanarak $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ ve $n = 17$ için impuls cevabını bulunuz.

(b) Bu sistemin fark-denklemini bulunuz.

(c) (a)'da istenilenleri fark-denklemini kullanarak bulunuz.

2.12 Fibonacci dizisi $\{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots\}$ şeklinde verilen dizidir. Bu dizi aşağıda durum gösterilimi verilen sistemin impuls cevabıdır.

$$\mathbf{q}(n+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{q}(n) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} x(n)$$

$$y(n) = [1 \ 1] \mathbf{q}(n) + x(n)$$

Bu sistemin impuls cevabını ve fark denklemini bulunuz.

MATLAB UYGULAMALARI

M2.1 MATLAB de konvolüsyon `conv` komutu kullanılarak gerçekleştirilmektedir. Aşağıda verilen programda impuls cevabı verilen FIR bir sistem için çıkış dizisinin nasıl bulunacağı gösterilmektedir.

```
clear all; close all;  
h = [4 3 2 1 -2 1 0 -2 0 2]; % impuls cevabı  
x = [1 -2 3 -4 3 2 1];      % giriş dizisi  
y = conv(h,x); n = 0:14; stem(n,y);  
xlabel('zaman indisi n'); ylabel('Genlik');  
title('Konvolüsyon kullanılarak çıkış');
```


Kendiniz konvolüsyon toplamı tanımını kullanarak konvolüsyon alan bir program yazınız. Yukarıda hesaplanan konvolüsyonu kendi programınızla hesaplayın ve conv ile bulunan sonuçla karşılaştırınız.

M2.2 Bir DZD sistem için fark denklemi aşağıda verilmektedir.

$$y(n) - 0.2y(n - 1) + 0.3y(n - 2) = x(n) + 2x(n - 1) + x(n - 4)$$

impz komutunu kullanarak bu sistemin impuls cevabını $0 \leq n \leq 200$ için bulunuz ve çizdiriniz. İmpuls cevabına bakarak sistemin kararlılığı hakkında ne söyleyebilirsiniz?

M2.3 Aşağıda verilen MATLAB fonksiyonu fark denklemi katsayılarından durum değişkenleri gösterilimine geçişi sağlamaktadır.

```
function [A,B,C,d] = fd2dd(b,a);  
% Fonksiyon: [A,B,C,d] = fd2dd(b,a).  
% Amaç: Fark denklemi gösterilimiyle gösterilen bir  
% sistemin durum değişkenleri gösterilimini bulmak.  
% Giriş: b, a: fark denklemi gösterilimi katsayıları.  
% Çıkış: A, B, C, d: durum değişkenleri gösterilimi matrisleri  
a=a./b(1);%   fark denklemi katsayıları b(0)=1  
b=b./b(1);%   olacak şekilde normalize ediliyor.  
p = length(a)-1; q = length(b)-1;
```

```
N = max(p,q);  
if (N > p), a =[a,zeros(1,N-p)]; end  
if (N > q), b = [b,zeros(1,N-q)]; end  
A = [[zeros(N-1,1), eye(N-1)]; -b(N+1:-1:2)];  
B = [zeros(N-1,1);1];  
C= a(N+1:-1:2) - a(1)*b(N+1:-1:2);  
d = a(1);
```

- (a) $a = [2 \ 3 \ 4]$, $b = [1 \ -2 \ -3 \ -4]$ fark denklemi katsayılarıyla belirtilen sistemin impuls cevabı $h(n)$ 'i $0 \leq n \leq 100$ için `filter` komutunu kullanarak bulunuz ve çizdiriniz.
- (b) Bu sistemin durum değişkenleri gösterilimini bulunuz.

- (c) (2.56) durum denklemlerini ve (b)'de bulduğunuz durum değişkenlerini kullanarak bu sistemin durum denklemlerini yazınız. Durum denklemlerini kullanarak impuls cevabı $h(n)$ 'i $0 \leq n \leq 100$ için bulan bir MATLAB programı yazınız. (a)'da bulduğunuz sonuçla karşılaştırınız.

M2.4 Aşağıda verilen MATLAB fonksiyonu durum değişkenleri gösteriliminden fark denklemleri katsayılarına geçişi sağlamaktadır. Bu programdan faydalanarak Problem 2.12'yi MATLAB kullanarak tekrarlayınız.

```
function [b,a] = dd2fd(A,B,C,d);  
% Fonksiyon: [b,a] = dd2fd(A,B,C,d) .
```

```
% Amaç: Durum değişkenleri gösterilimiyle gösterilen  
% bir sistemin fark denklemi gösterilimini bulmak.  
% Giriş: A, B, C, d: durum değişkenleri gösterilimi matrisleri  
% Çıkış: b, a: fark denklemi gösterilimi katsayıları.  
b = poly(A); N = length(b)-1;  
h = zeros(1,N+1); h(1) = d; tmp = B;  
for i = 1:N, h(i+1) = C*tmp; tmp = A*tmp; end  
a=b*toeplitz([h(1);zeros(N,1)],h);
```