Bölüm 4:

Evrişim (Convolution)
Sürekli Zamanlı Sinyallerin Evrişimi

$$h(t) = f(t) \underset{\uparrow}{*} g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(z)g(t-z)dz$$

Evrişim işlemi

Sürekli zamanlı sinyallerin evrişimini işlemeyeceğiz.

Ayrık Zamanlı Sinyallerin Evrişimi

$$h(n) = f(n) * g(n) = \sum_{-\infty}^{\infty} f(k)g(n-k)$$

Örnek: $f(n) = \{3, \underset{\substack{\uparrow \\ n=0}}{-2}, 4\}$ ve $g(n) = \{\underset{\substack{\uparrow \\ n=0}}{4}, 2, -1\}$

Fonksiyonlarının matematiksel olarak evrişimini bulunuz.

Çözüm:

$$h(n) = \sum_{-\infty}^{\infty} f(k)g(n-k)$$

$\underline{n = -1\ \ için}$:

$$h(-1) = f(-1)g(0) + f(0)g(-1) + f(1)g(-2) \\ + f(2)g(-3) =$$

$$(3).4 + \ (-2).0 + \ (4).0 \ + (0).0 = \ 12$$

$\underline{n = 0\ \ için}$:

$$h(0) = f(-1)g(1) + f(0)g(0) + f(1)g(-1) \\ + f(2)g(-2) =$$

$$(3).2 + \ (-2).4 \ + \ (4).0 \ + (0).0 \ = \ -2$$

$\underline{n = 1\ \ için}$:

$$h(1) = f(-1)g(2) + f(0)g(1) + f(1)g(0) \\ + f(2)g(-1) =$$

$$(3).(-1) + (-2).2 \ + \ (4).4 \ + \ 0 \ = \ 9$$

$\underline{n = 2\ \ \textit{için}:}$

$$h(2) = f(-1)g(3) + f(0)g(2) + f(1)g(1) \\ + f(2)g(0) =$$

$$(3).0 + (-2).(-1) + \ (4).2 + \ 0 \ = 10$$

$\underline{n = 3\ \ \textit{için}:}$

$$h(3) = f(-1)g(4) + f(0)g(3) + f(1)g(2) \\ + f(2)g(1) =$$

$$0 + 0 + \ (4).(-1) + \ 0 \ = -4$$

$\underline{n = 4\ \ \textit{için}:}$

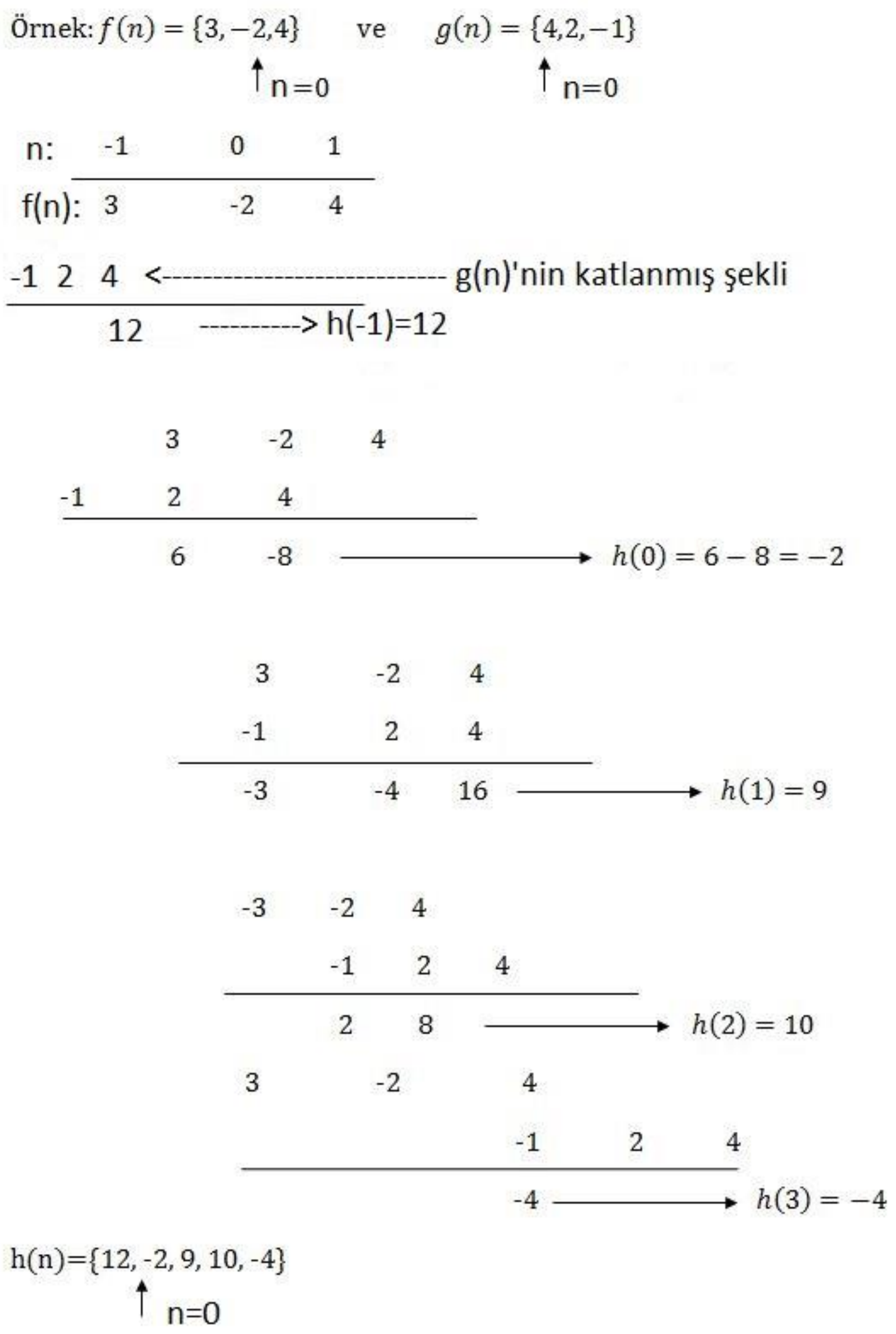
$$h(4) = f(-1)g(5) + f(0)g(4) + f(1)g(3) \\ + f(2)g(2) + f(3)g(1) =$$

$$0 + 0 + \ 0 + \ 0 + 0 = 0$$

➡

$$h(n) = \{12, \qquad \underset{\substack{\uparrow \\ \text{n=0}}}{-2}, \qquad 9, \qquad 10, \qquad -4\}$$

Method 2: Kaydırma Yöntemi



Örnek: $f(n) = \{3, -2, 4\}$ ve $g(n) = \{4, 2, -1\}$

$\uparrow$ n=0 $\uparrow$ n=0

n:	-1	0	1
f(n):	3	-2	4

-1 2 4 <---------------------------- g(n)'nin katlanmış şekli

12 ----------> h(-1)=12

3 -2 4

-1 2 4

6 -8 $\longrightarrow h(0) = 6 - 8 = -2$

3 -2 4

-1 2 4

-3 -4 16 $\longrightarrow h(1) = 9$

-3 -2 4

-1 2 4

2 8 $\longrightarrow h(2) = 10$

3 -2 4

-1 2 4

-4 $\longrightarrow h(3) = -4$

h(n)={12, -2, 9, 10, -4}

$\uparrow$ n=0

Özellik:

f(n) ve g(n) fonksiyonlarının vektörel uzunlukları (fonksiyonların tanımlı olduğu zaman anlarının sayısı) sırasıyla N ve M olsun. Bu fonsiyonların evrişiminde elde edilen h(n) fonksiyonunun vektörel uzunluğu N+M-1 dir.

Örnek: $h(n) = f(n) * g(n)$ sayı dizisinin uzunluğu nedir?

$f(n)=\{\underset{\substack{\uparrow\\ n=0}}{3.5}, -2.1, 4.0, 2.4, 5.6, 1.2\}$

$g(n)= \{2, \underset{\substack{\uparrow\\ n=0}}{-1}, 3\}$

Çözüm:

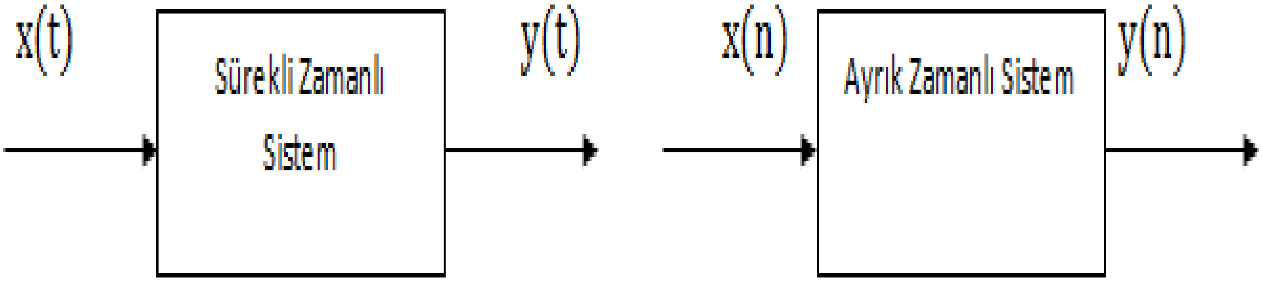
f(n)’in uzunluğu → 6

g(n)’in uzunluğu → 3

$\Rightarrow$ h(n)’in uzunluğu 6+3-1=8’dir

Sistemler ve Özellikleri

Girişindeki sinyal veya sinyalleri alan ve onları işleyerek çıkısında başka sinyal ve sinyaller üreten elektronik devre ya da herhangi bir üniteye **Sistem** denir.



Matematiksel Gösterimi

- x(t) giriş, y(t) çıkış sinyalini gösterdiğini kabul edelim.
- Çıkış ve giriş arasındaki ilişkiyi şu şekilde gösteririz.

$$y(t) = H\{x(t)\}$$

- Burada $H\{.\}$ sistem operatörünü temsil etmektedir.

Sistemlerin Özellikleri

1) Nedensellik, Gerçeklenebilirlik (Casuality)

Herhangi bir andaki çıkış sinyali, o andaki ya da geçmişteki giriş verilerine bağlı olan sistemler **nedenseldir**. Eğer sistem çıkışı gelecek zamandaki giriş değerlerine bağlı ise sistem **nedensel değildir**.

Örnek:

Aşağıdaki denklem bir sistemin çıktısıdır. Sistemin nedensel olup olmadığını bulunuz.

$$y(n) = x(n) + 0.5x(n-2) + x^2(n-3)$$

Çözüm:

Bu denklemden de görüldüğü gibi y(n), şimdiki giriş x(n) ve geçmiş zaman girişlerine $(x(n-2)\ ve\ x(n-3))$ bağlıdır. Dolaysıyla, bu sistem nedenseldir.

Örnek: Bir sürekli zamanlı sistemin çıkışı ile girişi arasındaki ilişki aşağıdaki gibi ifade edilmiştir.

$$y(t) = x(t + 0.5) + x(t - 2.3) - x^3(t - 3)$$

Sistemin nedensel olup olmadığını bulunuz.

Çözüm: Sistemin çıkışı y(t), gelecek zaman girişi x(t+0.5)'e ve geçmiş zaman girişlerine bağlıdır. Ancak, gelecek zamana bağımlılık, bu sistemin nedensel olmadığını gösterir.

2. Hafıza(Memory)

Bir sistemin çıkışı sadece o andaki girişe bağlı olarak değişiyorsa, sistemin **hafızası yoktur**. Fakat, sistemin çıkışı geçmiş ve gelecek girişlere bağlı olarak değişiyorsa, sistemin **hafızası vardır**.

Örnek: $y(n) = x(n) + x^3(n)$

Yukardaki denklem ile ifade edilen sistemin hafızası olup olmadığını bulunuz.

Çözüm: Sistemin n anındaki çıkışı y(n), sadece n anındaki girişe bağlıdır. Dolayısıyla, bu sistemin hafızası yoktur.

Örnek: $y(t) = x(t-1) + x^2(t)$

Sistemin hafızası olup olmadığını bulunuz.

Çözüm: y(t), hem t anındaki hem de t-1 anındaki girişlere bağlı olduğu için, bu sistemin hafızası vardır.

3. Doğrusallık (Linearity)

Bir sisteme iki değişik giriş uygulayalım ve bunları x_1 ve x_2 olarak gösterelim. Sistemin bu girişler için çıkışı y_1 ve y_2 olsun. Sistemin doğrusal olabilmesi için $k_1x_1 + k_2x_2$ girişi için çıkışının $k_1y_1 + k_2y_2$ olması gerekir.

Örnek: $y(n) = x^2(n-1)$ sistemi doğrusal mıdır?

Çözüm: Sistemin çıkışı girişin karesi ile bağlantılı olduğu için direk olarak doğrusal değildir diyebiliriz. Fakat yine de, doğrusallık tanımını uygulayarak matematiksel olarak doğrusal olmadığını göstermemiz gerekir.

$$y_1 = x_1^2(n-1) \qquad , \qquad y_2 = x_2^2(n-1)$$

Doğrusal olabilmesi için $(\mathrm{k}_1 = \mathrm{k}_2 = 1)$

$\mathrm{k}_1\mathrm{x}_1(\mathrm{n}) + \mathrm{k}_2\mathrm{x}_2(\mathrm{n})$ girişi için

$\Longrightarrow$ Çıkış $y_1(n) + y_2(n)$ olması gerekir.

$$\mathrm{x}_1(\mathrm{n}) + \mathrm{x}_2(\mathrm{n}) \Longrightarrow y(n) = [\mathrm{x}_1(\mathrm{n}-1) + \mathrm{x}_2(\mathrm{n}-1)]^2$$

$$= x_1^2(n-1) + 2x_1(n-1)x_2(n-1) + x_2^2(n-1)$$

$$\Longrightarrow$$

$$y_1(n) + y_2(n) = x_1^2(n-1) + x_2^2(n-1)$$

$$\neq x_1^2(n-1) + 2x_1(n-1)x_2(n-1) + x_2^2(n-1)$$

Dolayısıyla, bu sistem **doğrusal değildir**.

Örnek: $y(t) = x(t)x(t-1)$ sistemi doğrusal mıdır?

Çözüm:

$$y_1 = x_1(t)x_1(t-1) \quad , \quad y_2 = x_2(t)x_2(t-1)$$

$$x_1(t) + x_2(t)$$

$$\Longrightarrow \quad y(t) = [x_1(t) + x_2(t)][x_1(t-1) + x_2(t-1)]$$

$$= x_1(t)x_1(t-1) + x_1(t)x_2(t-1)$$
$$+ x_2(t)x_1(t-1) + x_2(t)x_2(t-1)$$

⟹

$$y(t) \neq y_1(t) + y_2(t) =$$
$$x_1(t)x_1(t-1)+x_2(t)x_2(t-1)$$

Dolayısıyla, bu sistem **doğrusal değildir**.

4. Zaman Değişimsiz(Time Invariance)

Bir sistemin zaman ekseninde kaydırılan girişleri ayni miktarda zaman ekseninde kaymış çıkış oluşturuyorsa, bu sistem **zaman değişimsiz bir sistemdir**.

Örnek: $y(t) = \frac{x(t)}{R(t)}$ sistemi zaman değişimsiz midir?

Çözüm: Zaman değişimsiz sistem olabilmesi için $x(t-t_0)$'nin üreltiği çıkış $y(t-t_0) = \frac{x(t-t_0)}{R(t-t_0)}$ olmalıdır. Halbuki,

$\frac{x(t-t_0)}{R(t)} \neq y(t-t_0)$ ⟹ Bu sistem **zamana bağımlıdır**.

$t - t_0$ olmaz çünkü R giriş değildir

Örnek: $y(n) = x(n) - x(n-1)$ sistemi zaman değişimsiz midir?

Girişten dolayı

⇨ $y(n-n_0) = x(n-n_0) - x(n-1-n_0)$

⇨ $y(n-n_0) = x(n-n_0) - x(n-1-n_0)$

Çıkışın n_0 kadar kaydırılmasından dolayı

⇨

Heriki çıkış birbirine eşit olduğu için bu sistem **zaman değişimsizdir**.

Örnek: Aşağıdaki sistemin zaman değişimsiz olup olmadığını bulunuz.

$$y(n) = nx(n)$$

Çözüm:

$y(n-n_0)$=n $x(n-n_0)$

$y(n-n_0)$=$(n-n_0)x(n-n_0)$

⇨ Çıkışlar eşit olmadığı için bu sistem **zamana bağımlıdır.**

Örnek: $y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau$ sisteminin zaman değişimsiz olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $x(t - t_0)$ girişi için sistem çıkışı

$$\Rightarrow \qquad y_1(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau - t_0)\, d\tau$$

Sistemin zaman değişimsiz olması için

$$y_1(t) = y_1(t - t_0)$$

⇨ Çıkışı t_0 kadar kaydıralım

$$\Rightarrow \qquad y(t - t_0) = \int_{-\infty}^{t-t_0} x(\tau)d\tau$$

$\tau' = \tau + t_0$ yaparsak ⇨ $y(t - t_0)=\int_{-\infty}^{t_0} x(\tau')d\tau'$

⇨ $y_1(t) = y(t - t_0)$ sağlandığı için sistem **zaman değişimsizdir**.

Örnek: $y(n) = x(n)\cos(w_0 n)$ sisteminin zaman değişimsiz olup olmadığını bulunuz.

Çözüm:

$x(n - n_0)$ girişi için cıkış:

$$\Longrightarrow \quad y_1(n) = x(n - n_0)\cos(w_0 n)$$

⇨ Şimdi bize verilen çıkışı n_0 kadar kaydıralım

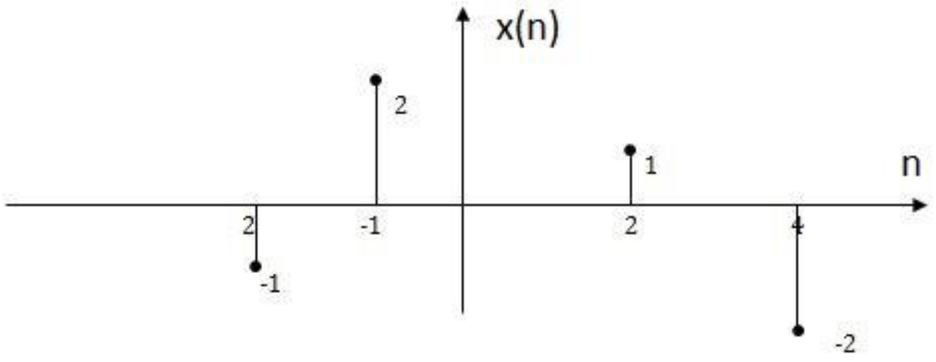
$$y_2(n) = x(n - n_0)\cos(w_0 n - n_0)$$

⇨ $y_1(n) \neq y_2(n)$'dan dolayı bu sistem zamana bağımlıdır.

NOT: Evrişim özelliği $[y(n) = x(n) * h(n)]$ zaman değişimsiz ve doğrusal olan sistemler için geçerlidir.

Doğrusal ve zaman Değişimsiz Sistemlerin Zaman Alanında Gösterimi

Aşağıdaki sinyali ele alalım



x(n) sinyali dürtü fonksiyonları türünden şöyle yazılır:

$$x(n) = -\delta(n+2) + 2\delta(n+1) + \delta(n-2)$$

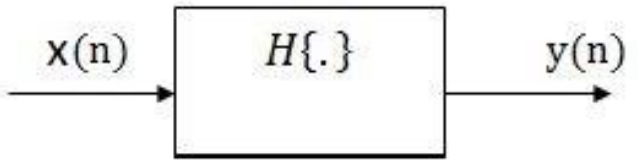
$$-2\delta(n-4)$$

Yukarıdaki denklemi genellersek

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(n-k)$$

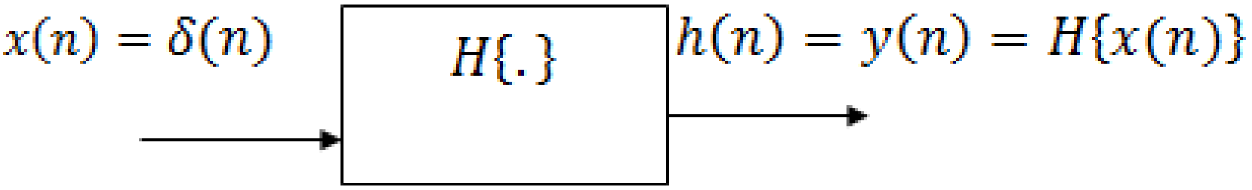
Yani $x(n) = x(n) * \delta(n)$ olur.

Şimdi doğrusal ve zaman değişimsiz bir sistemi ele alalım.



Çıkış ile giriş arasındaki ilişki $y(n) = H\{x(n)\}$ şeklinde gösterilir.

⇨ $x(n) = \delta(n)$ olsun. Bu özel giriş için, sistem çıkısını *h(n)* ile gösterelim.



x(n) yerine $x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\,\delta(n-k)$ yazarsak

$\Longrightarrow$ $y(n) = H\{\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\,\delta(n-k)\}$ elde ederiz.

Burada $H\{.\}$ operatörünü toplam ifadesinin içine çekersek

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) H\{\delta(n-k)\} \text{ olur.}$$

Sistemimiz zaman değişimsiz olduğu için
$x(n) = \delta(n) \Longrightarrow y(n) = h(n)$

$x(n) = \delta(n-k)$ için çıkış $y(n) = h(n-k)$ olmalıdır.

Yani, $h(n) = H\{\delta(n)\}$ ise

$$h(n-k) = H\{\delta(n-k)\} \text{ dir.}$$

$\Longrightarrow$

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k)$$

Eğer sistemimizin dürtü girişi için çıkışını biliyorsak, herhangi rastgele bir giriş için çıkışı bu eşitliği kullanarak bulabiliriz.

Örnek: Sistem girişi ve çıkışı arasındaki bağlantı $y(n) = x(n) + 0.5x(n-2)$ ile verilen bir sistemin dürtü yanıtını bulunuz.

Çözüm: Bir sistemin dürtü yanıtı, giriş verisi dürtü iken sistemin verdiği çıkıştır. Yani, $x(n) = \delta(n)$ için sistemin çıkışını bulacağız. Buna göre sistemin dürtü yanıtı aşağıdaki gibi olur.

$$h(n) = \delta(n) + 0.5\,\delta(n-2)$$

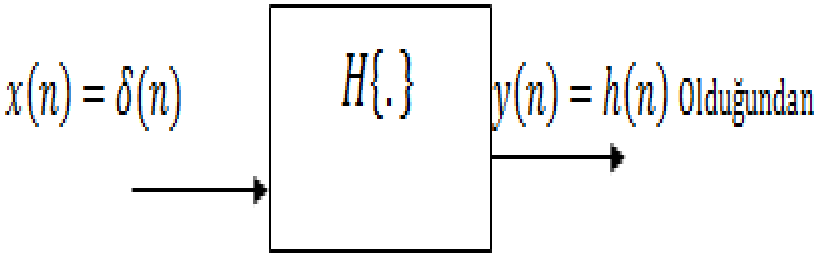
veya

$$h(n) = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0.5, & n = 2 \\ 0\,, & diğer \end{cases}$$

Örnek: Doğrusal ve zaman değişimsiz bir sistemin aşağıdaki giriş için ürettiği çıkışı *h(n)* türünden yazınız.

$$x(n) = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 2, & n = 3 \\ -0.5, & n = 4 \end{cases}$$

Çözüm:



$x(n) = \delta(n) + 2\delta(n-3) - 0.5\delta(n-4)$ için sırasıyla:

$$\left.\begin{array}{lcl} \delta(n) & \longrightarrow & h(n) \\ \delta(n-3) & \longrightarrow & h(n-3) \\ \delta(n-4) & \longrightarrow & h(n-4) \end{array}\right\}$$

$$\Downarrow$$

$$y(n) = h(n) + 2h(n-3) - 0.5h(n-4)$$

Örnek: Doğrusal ve zaman değişimsiz bir sistemin dürtü yanıtı $h(n) = \delta(n) - \delta(n-4)$ olsun. Sistemin $x(n) = u(n)$ girişi için sistemin çıkışını bulunuz.

Çözüm: Sistemin çıkışı $\Longrightarrow$ $y(n) = h(h) * x(n)$

$y(n) = [\delta(n) + \delta(n-4)\ ] * u(n)$

$= \delta(n) * u(n) - \delta(n-4) * u(n)$

$= u(n) - u(n-4)$

$\delta(n) * x(n) = x(n)$

$x(n) * \delta(n - n_0)$
$= x(n - n_0)$

Örnek: Doğrusal ve zaman değişimsiz bir sistemin dürtü yanıtı $h(n) = \delta(n) + 0.5\delta(n-1)$ ise, sistemin

$x(n) = \begin{cases} 2, & n = 0 \\ 4, & n = 1 \\ 0, & diğer \end{cases}$ için çıkışını bulunuz.

Çözüm 1: $y(n) = h(h) * x(n)$

$x(n) = 2\delta(n) + 4\delta(n-1)$

$y(n) = [\delta(n) + 0.5\delta(n-1)]$*$[2\delta(n) + 4\delta(n-1)]$

$$= \delta(n) * 2\delta(n) + 4\delta(n) * \delta(n-1) +$$

$$\delta(n-1) * \delta(n) + 2\delta(n-1) * \delta(n-1)$$

$$= 2\delta(n) + 4\delta(n-1) + \delta(n-1) + 2\delta(n-2)$$

$$= 2\delta(n) + 5\delta(n-1) + 2\delta(n-2)$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \delta(n) * \delta(n) = \delta(n) \\ \delta(n) * \delta(n-1) = \delta(n-1) \\ \delta(n-1) * \delta(n-2) = \delta(n-2) \end{array}}$$

<u>Çözüm2</u>: Verilen giriş için sistemin çıkışı

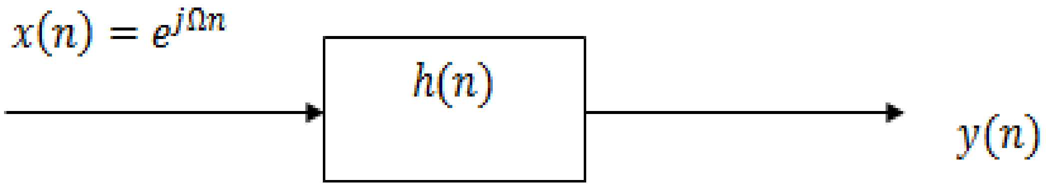
$$y(n) = 2h(n) + 4h(n-1) \text{ dir.}$$

$$y(n) = 2[\delta(n) + 0.5\delta(n-1)] \\ \qquad + 4[\delta(n-1) + 0.5\delta(n-2)]$$

$$= 2\delta(n) + \delta(n-1) + 4\delta(n-1) + 2\delta(n-2)$$

$$= 2\delta(n) + 5\delta(n-1) + 2\delta(n-2)$$

Doğrusal ve Zaman Değişimsiz Bir Sistemin Üstsel Fonksiyona Yanıtı, Dönüşüm Fonksiyonu



Bu durumda sistemin çıkışı

$$y(n) = x(n) * h(n)$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k)$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)e^{-j\Omega n} = e^{j\Omega n} \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)\, e^{-j\Omega k}$$

Burada $\sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)e^{-j\Omega k}$, $h(n)$ dürtü yanıtının Fourier dönüşümüdür ve $H(\Omega)$ ile gösterilir.

$$\Longrightarrow \quad y(n) = \underset{\uparrow\, x(n)}{e^{j\Omega n}} H(\Omega)$$

Eğer $x(n) = \cos(\Omega n + \Psi)$ ise $y(n)$ ne olur?

$$x(n) = \cos(\Omega n + \Psi) = \frac{e^{j(\Omega n+\Psi)} + e^{-j(\Omega n+\Psi)}}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\left[e^{j\Omega n}.e^{j\Psi} + e^{-j\Omega n}.e^{-j\Omega}\right]$$

$$y(n) = \frac{1}{2}\left[H(\Omega)e^{j\Omega n}.e^{j\Psi} + H^{*}(\Omega)e^{-j\Omega n}.e^{-j\Omega}\right]$$

$H^{*}(\Omega), H(\Omega)$ ‘nin karmaşık eşleniğidir (Complex Conjugate)

$$H(\Omega) = |H(\mathit{\Omega})|\lfloor H(\Omega) = |H(\Omega)|e^{\lfloor H(\Omega)}$$

$$y(n) = \frac{1}{2}\Big[|H(\Omega)|e^{\lfloor H(\Omega)}.e^{j\Omega n}.e^{j\Psi} \\ + |H(\Omega)|e^{-\lfloor H(\Omega)}.e^{-j\Omega n}.e^{-j\Psi}\Big]$$

Bu sonucu yeniden düzenlersek

$$y(n) = |H(\Omega)|\cos(\lfloor H(\Omega) + \Omega n + \Psi)$$

Örnek: Dürtü yanıtı $h(n) = \delta(n-1) + \delta(n+1)$ olan sistemin $x(n) = \cos(\Omega n + \frac{\pi}{3})$ girişi için çıkışını bulunuz.

Çözüm: $y(n) = |H(\Omega)|\cos(\lfloor H(\Omega) + \Omega n + \Psi)$ ifadesini bu probleme uygulayacak olursak:

$$H(\Omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)e^{-j\Omega k}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} [\delta(k-1) + \delta(k+1)]\, e^{-j\Omega k}$$

$$= e^{-j\Omega} + e^{j\Omega} = 2\cos(\Omega)$$

Burada $\lfloor H(\Omega) = 0 \quad \xrightarrow{\qquad} \quad tan^{-1}\left(\frac{Sanal}{Gerçek}\right)$

Sanal kısım sıfır olduğu için

$$y(n) = 2\cos(\Omega)\cos(\Omega n + \frac{\pi}{3})$$