

BÖLÜM 3.1

SİSTEMLER

Sistem teori, bir abstract ve fenomen deyim olarak, disiplinler arası ilişkilerin bilimsel yaklaşımlarla incelendiği bir teoridir. Bunun için ilişkinin varlığı veya derecesi, ilgili olduğu sosyal ve fen alanlarına uygun matematiksel veya sosyal tabanlı modeller ve çerçeveler geliştirilerek araştırılmakta ve sonuçları üretilmektedir. Bu teori 1936 da biolog Ludwig von Bertalanffy tarafından ilk olarak geliştirilmiştir. Bertalanffy teoriyi disiplinler arasında var olan ilişkinin araştırılması ihtiyacından geliştirmiştir. Bilgi sistemi, haberleşme sistemi, enerji sistemi, elektrik sistemi, eko (çevre) sistemi, kontrol sistemi, açık ve kapalı sistemler, sağlık sistemi, aile sistemi, vücut sistemi, banka sistemi ve politik sistemler en genel sistemler olup, aralarındaki ilişkiler sistem araçları tarafından araştırılabilmekte ve ortaya konulabilmektedir.

Sistem Teorinin Sınıflandırılması

1. Lineer sistem teori
2. Lineer olmayan sistem teori

1.Lineer sistem teori

Lineer sistem teori toplamsallık (additivity), çarpımsallık (scaling) ve süperpozisyon özellikleri üzerine kurulu bir teoridir. Bu özelliği göstermek üzere bir sistem $x(t)$ giriş ve $y(t)$ çıkış olmak üzere

$$x_1(t) \text{ için } y_1(t)$$

$$x_2(t) \text{ için } y_2(t)$$

$$x_1(t) + x_2(t) = y_1(t) + y_2(t) \quad \text{toplamsallık}$$

$$c_1 x_1(t) \text{ için } c_1 y_1(t) \quad \text{çarpımsallık}$$

$$c_2 x_2(t) \text{ için } c_2 y_2(t)$$

$$c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) \quad \text{süperpozisyon}$$

bağıntılarını sağlıyorsa sistem lineerdir. Aşağıdaki denklem sistemleri, lineer sistemlere örnektir.

$$1. \quad y(t) = x(t)$$

$$2. \quad y(t) = ax(t-1)$$

$$3. \quad y(t) = x(t) + x(t-1)$$

$$4. \quad \frac{d^4 y}{dt^4} + 5 \frac{d^3 y}{dt^3} + 2 \frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} + 4y(t) = \frac{d^2 x}{dt^2} + 3 \frac{dx}{dt} + 2x(t)$$

2. Lineer olmayan sistem teori

Lineer olmayan sistem teori toplamsallık, çarpımsallık ve süperpozisyon gibi prensipleri içermeyen, aynı zamanda deterministik veya matematiksel olarak modellenemeyen, çözüm ve sonuçları önceden kestirilemeyen kaotik, bulanık ve müphem teoriler üzerine kurulmuştur. Lineer olmayan bir sistemi ait örneklerden bazıları aşağıdaki gösterilmiştir.

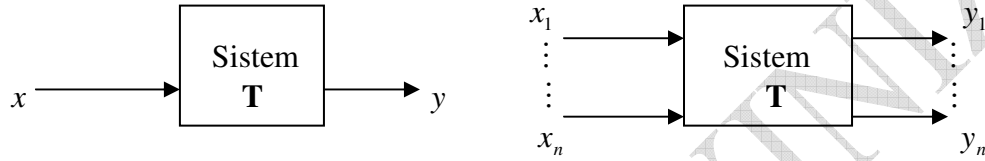
$$1. \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + \sqrt{\frac{dx(t)}{dt}} + x(t) = A \cos \omega t$$

$$2. \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + [x^2(t) - 1] \frac{dx(t)}{dt} + x(t) = 0$$

$$3. \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + \frac{dx(t)}{dt} + x^3(t)x(t) = 0$$

SİSTEMLER

Sistem teoriden yararlanarak sistem pratik olarak, aynı amacı gerçekleştirmek üzere birlikte hareket eden parçaların kombinasyonu olarak tanımlanabilir. Ancak bu daha çok genel bir çerçeveye daha uygun düşen bir tanımdır. Genel tanımlamayı işaret işleme ve sistem kavramlarını kapsayacak şekilde daha bir özel hali olacak şekilde de tanımlamak mümkündür. Buna göre sistem, girişindeki işareti alarak bunu realize edilebilir bir ortamda işleyerek çıkışında yeni bir işaret üretebilen bir matematiksel modeldir. Giriş işareti çıkışta başka bir işarete dönüştürüldüğü için böyle bir işlem bazen “dönüştürme (mapping)”, “transformasyon”, ve “cevap (response)” olarakda anılır. Genel şema aşağıda gösterilmiştir.



Şekil 1 Tek giriş-çıkışlı ve çok giriş-çok çıkışlı sistemler

Verilen tanıma ve şekillere dayanarak matematiksel model ;

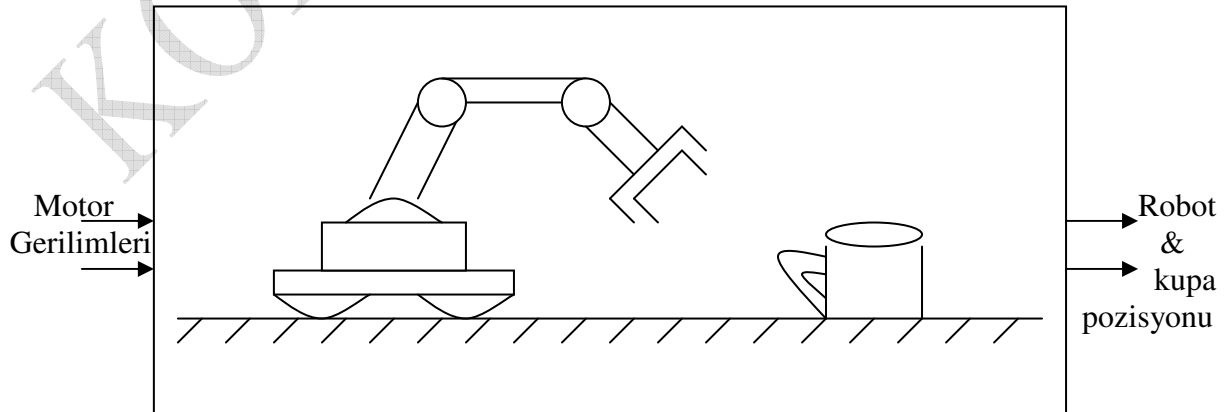
$$y = \mathbf{T}x$$

x = fiziksel sisteme giriş işareti

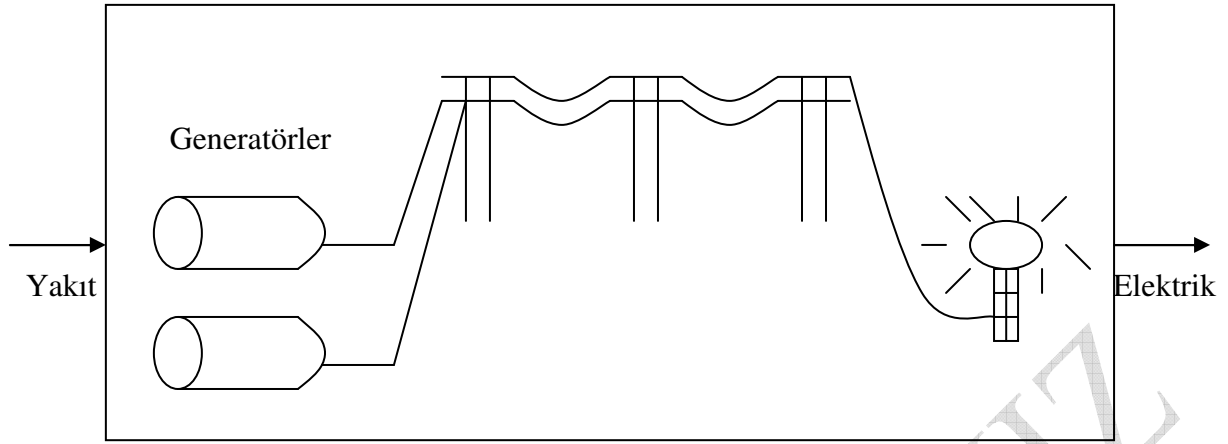
y = fiziksel sistemin ürettiği çıkış işareti

\mathbf{T} = Sistemin amacına uygun olarak dönüşüm, transformasyon veya cevabını sağlayan fonksiyonel operatör.

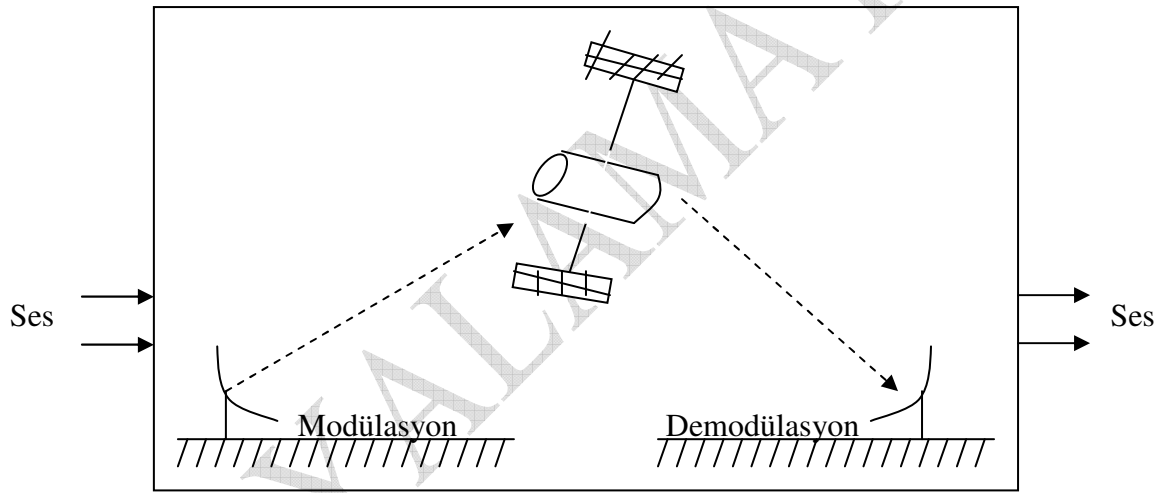
Bu anlamda kontrol, haberleşme, enerji (power), elektronik, filtre ve örnekleme mekanizmalarının her biri tipik sistemlerdir.



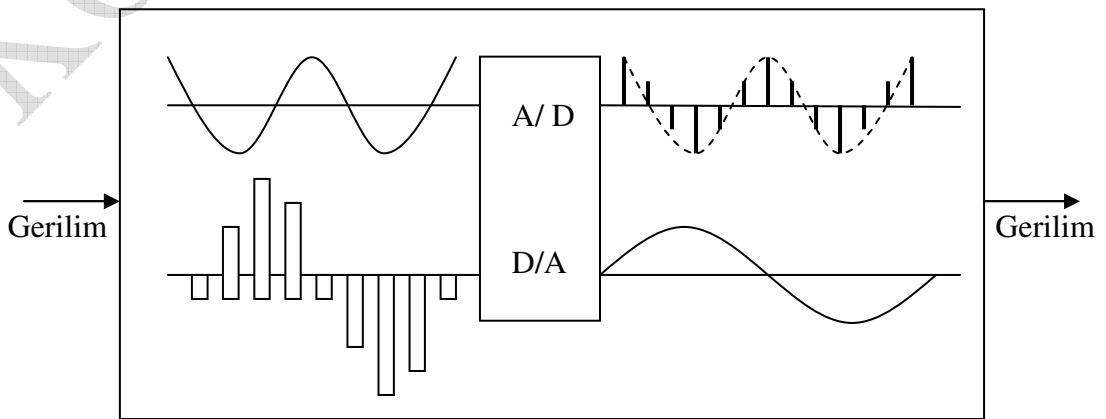
(a) : Kontrol sistemi



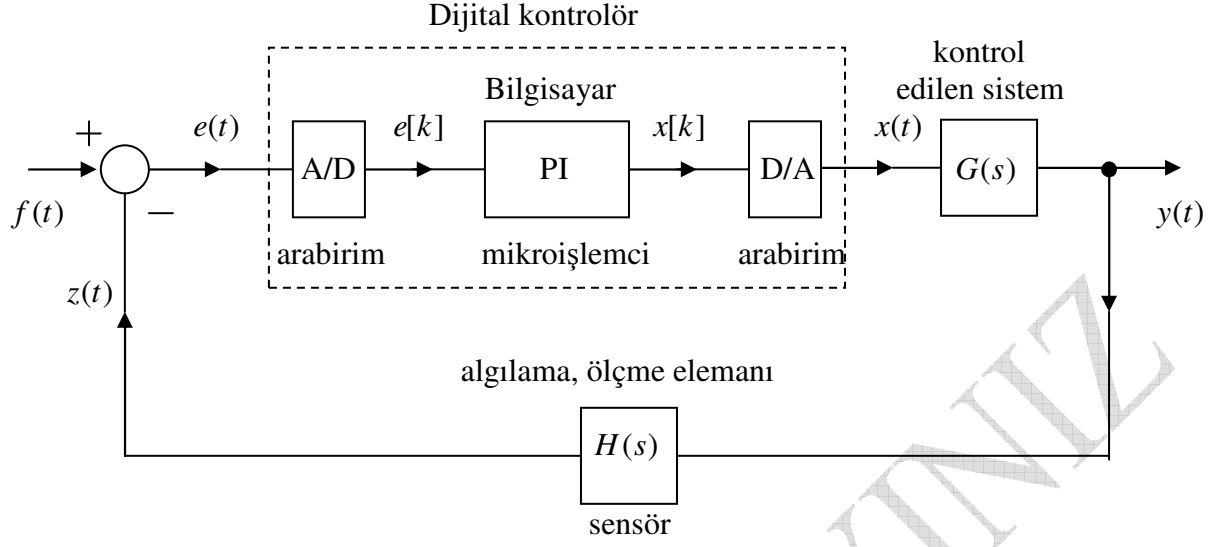
(b) : Güç (power) sistem



(c) : Haberleşme sistemi



(d) : A/D – D/A Dönüştürücü sistem

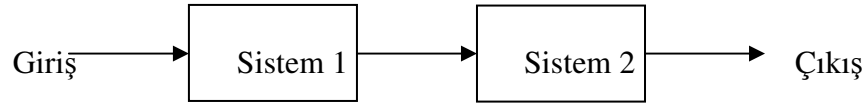


(e) : Modern kontrol sistemi

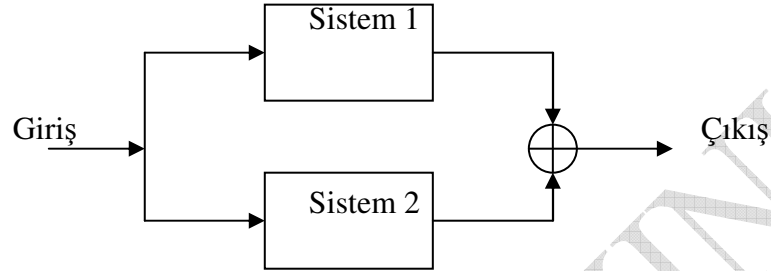
Şekil 2 Sistem Örnekleri

Yukarıdaki örnek sistemlerdeki tüm giriş ve çıkışlar sistemin işaretlerini göstermektedir. Verilen örnek sistemlerde T bir lineer operatör olup türev, integral, modulator, filtre ve örnekleyici olarak işaret işlemedeki işlemler üzerine olan kuralları içerir.

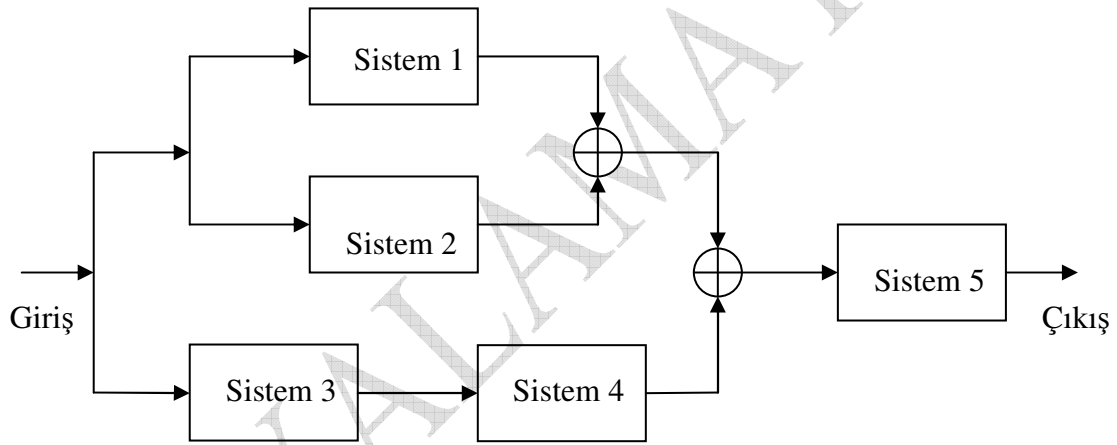
Sistem Bağlantıları



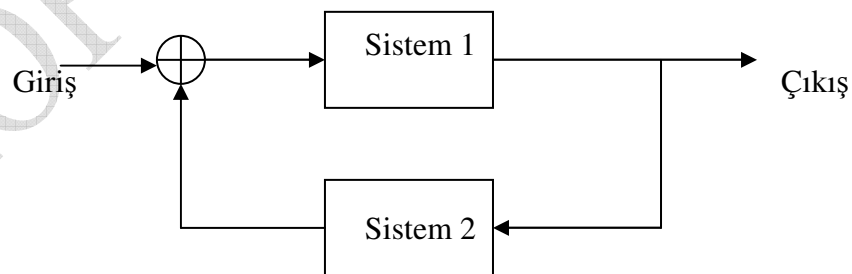
(a) : Seri (cascade) bağlantı



(b) : Paralel bağlantı



(c) : Seri - paralel bağlantı



(d) : Geri beslemeli bağlantı

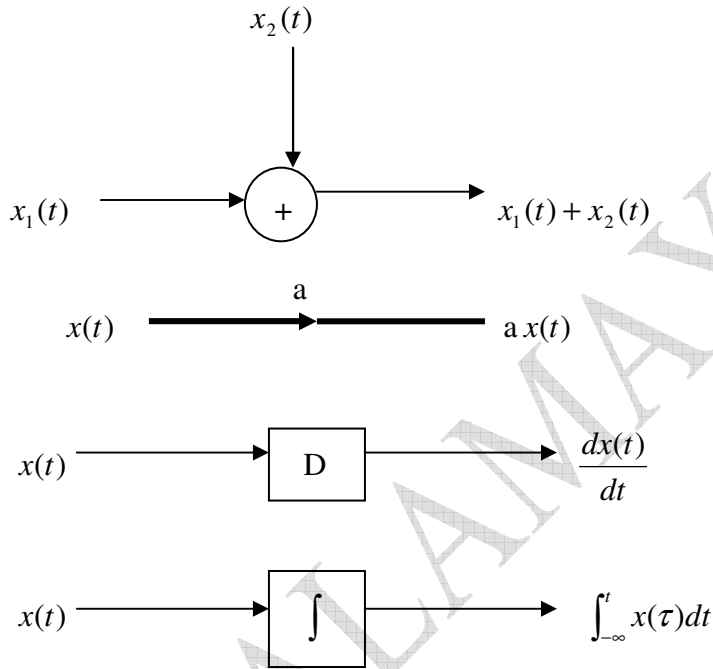
Şekil 3 Sistem bağlantı biçimleri

Sistemlerin Grafik Gösterimleri

Sürekli ve ayrık sistemlerin grafik gösterimleri, blok ve işaret akış diagramlarıyla mümkündür. Bunun öncesinde her iki sistemin gösteriminde kullanılan bazı özel şekiller yardımıyla matematiksel formda gösterimleri özetlenecektir.

Sürekli İşaretlerin Operatörlerle Gösterimleri

Diferansiyel denklem sistemlerinin gösterimlerinde kullanılan başlıca blok diagramlar :



Şekil 4 Sürekli işaret ve sistem blok gösterimleri

Örnek

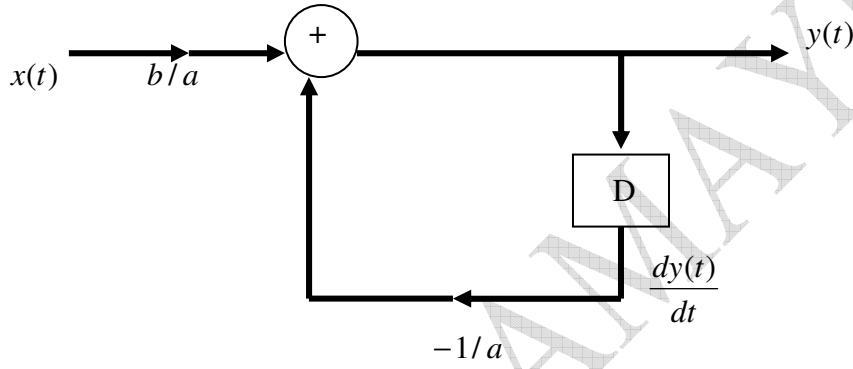
$\frac{dy(t)}{dt} + ay(t) = bx(t)$ Diferansiyel denklem ile verilen sistemin matematiksel operatörlerle gösterimini yapın.

Çözüm

Verilen sürekli sistemin iki türlü gösterimini yapmak mümkündür.

1.

$$y(t) = -\frac{1}{a} \frac{dy(t)}{dt} + \frac{b}{a} x(t)$$



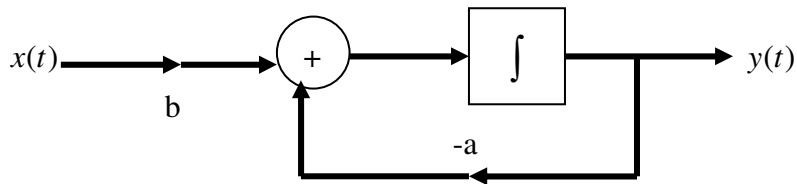
Şekil 5 Diferansiyel denklem gösterimi

2.

$$\frac{dy(t)}{dt} + ay(t) = bx(t)$$

$$\frac{dy(t)}{dt} = bx(t) - ay(t)$$

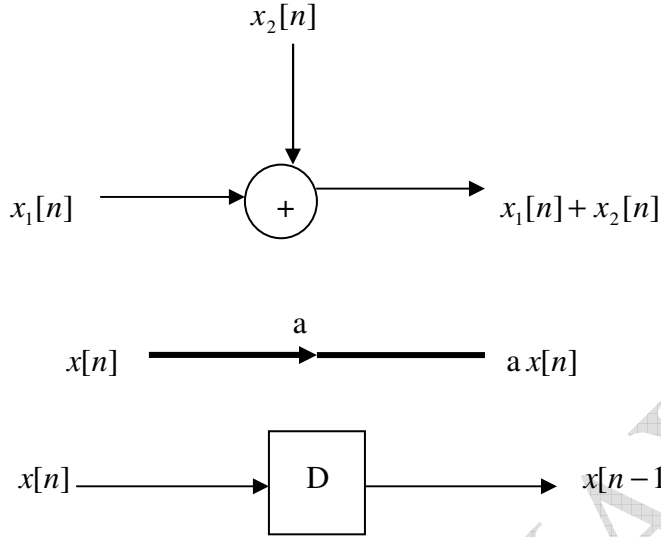
$$y(t) = \int_{-\infty}^t [bx(\tau) - ay(\tau)] d\tau$$



Şekil 6 Integrasyon denklem gösterimi

Ayrık İşaretlerin Operatörlerle Gösterimleri

Fark denklem sistemlerinin gösterimlerinde kullanılan başlıca blok diagramlar :



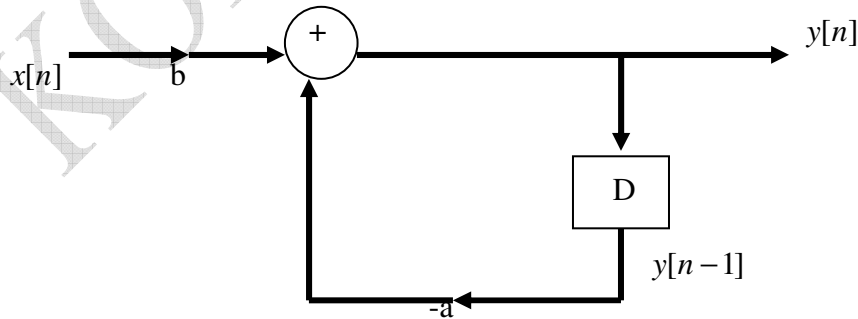
Şekil 7 Fark denklem operatör blok diagramları

Örnek

$$y[n] + ay[n-1] = bx[n]$$

$$y[n] + ay[n-1] = bx[n]$$

$$y[n] = -ay[n-1] + bx[n]$$



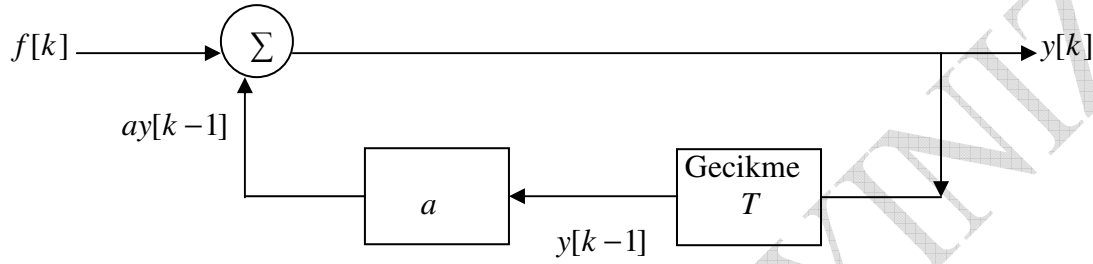
Şekil 8 Fark denklem gösterimi

Örnek

$$y[k] - ay[k-1] = f[k]$$

Ayrık sistemini oluşturalım.

$$y[k] = ay[k-1] + f[k]$$



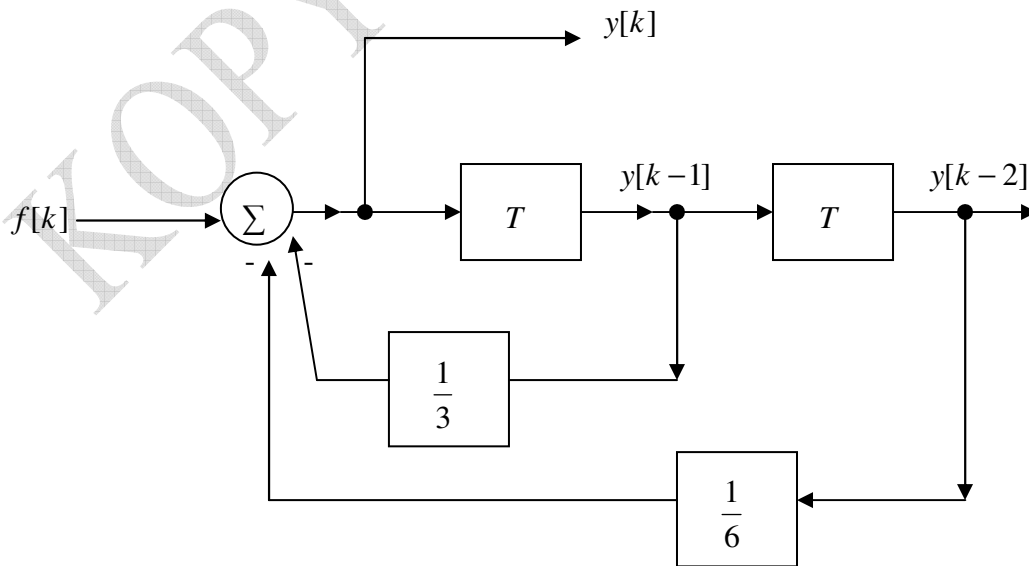
Şekil 9 Ayrık sistem

Örnek

$$y[k] + \frac{1}{3}y[k-1] + \frac{1}{6}y[k-2] = f[k]$$

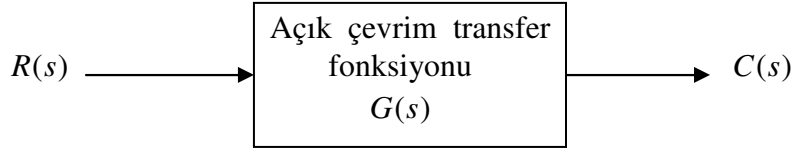
Ayrık sistemini oluşturalım.

$$y[k] = -\frac{1}{3}y[k-1] - \frac{1}{6}y[k-2] + f[k]$$

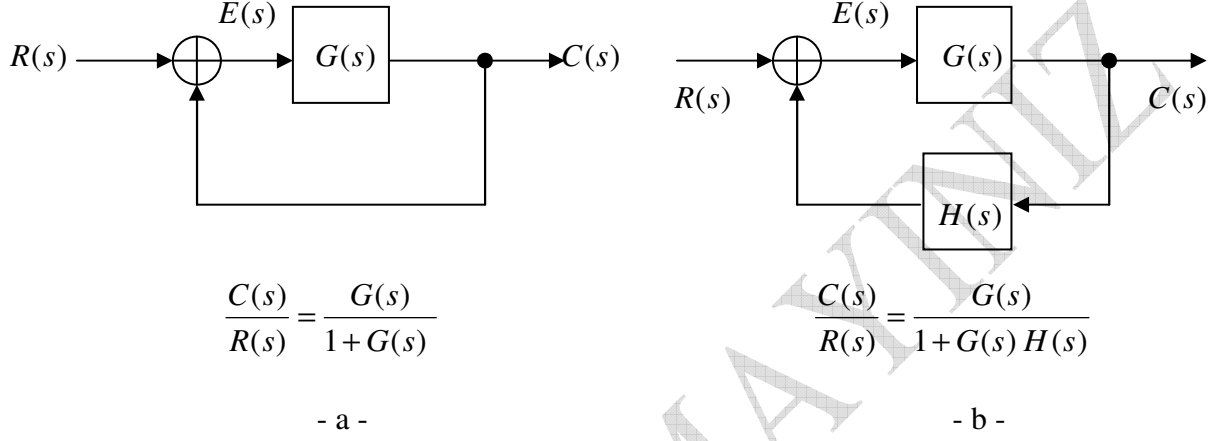


Şekil 10 Ayrık sistem

Sistemlerin Blok diagramlarla gösterimi



Şekil 11 Açık çevrim kontrol sistemi : $C(s) = R(s)G(s)$

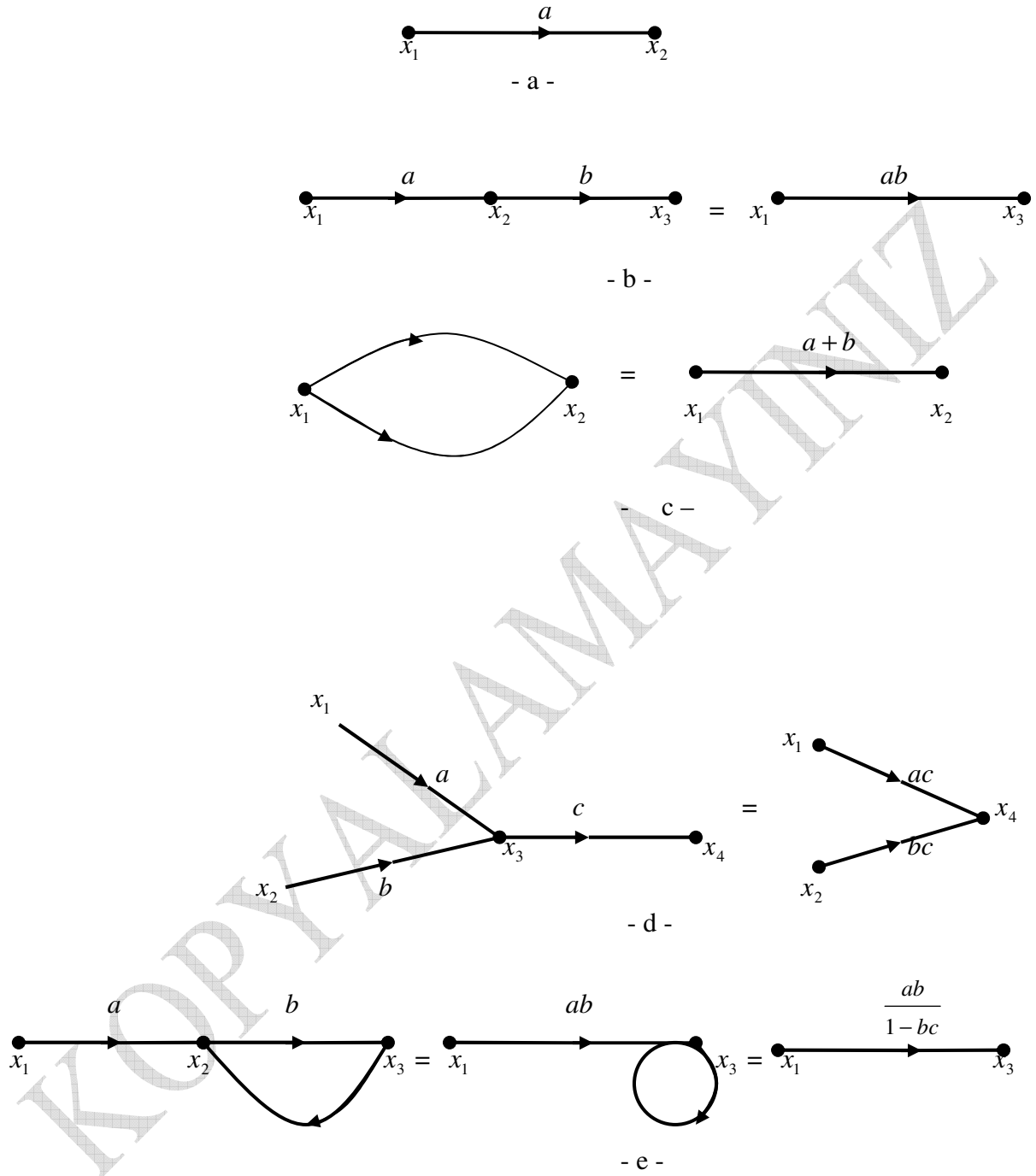


$G(s)H(s)$ = açık çevrim transfer fonksiyonu

$$\begin{aligned}
 C(s) &= G(s)E(s) \xrightarrow{1} E(s) = R(s) - E(s)G(s) \\
 &= R(s) - H(s)C(s) \xrightarrow{2} C(s) = G(s)[R(s) - H(s)C(s)] \xrightarrow{3} \\
 &\xrightarrow{3} C(s)[1 + G(s)H(s)] = G(s)R(s) \xrightarrow{4} \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}
 \end{aligned}$$

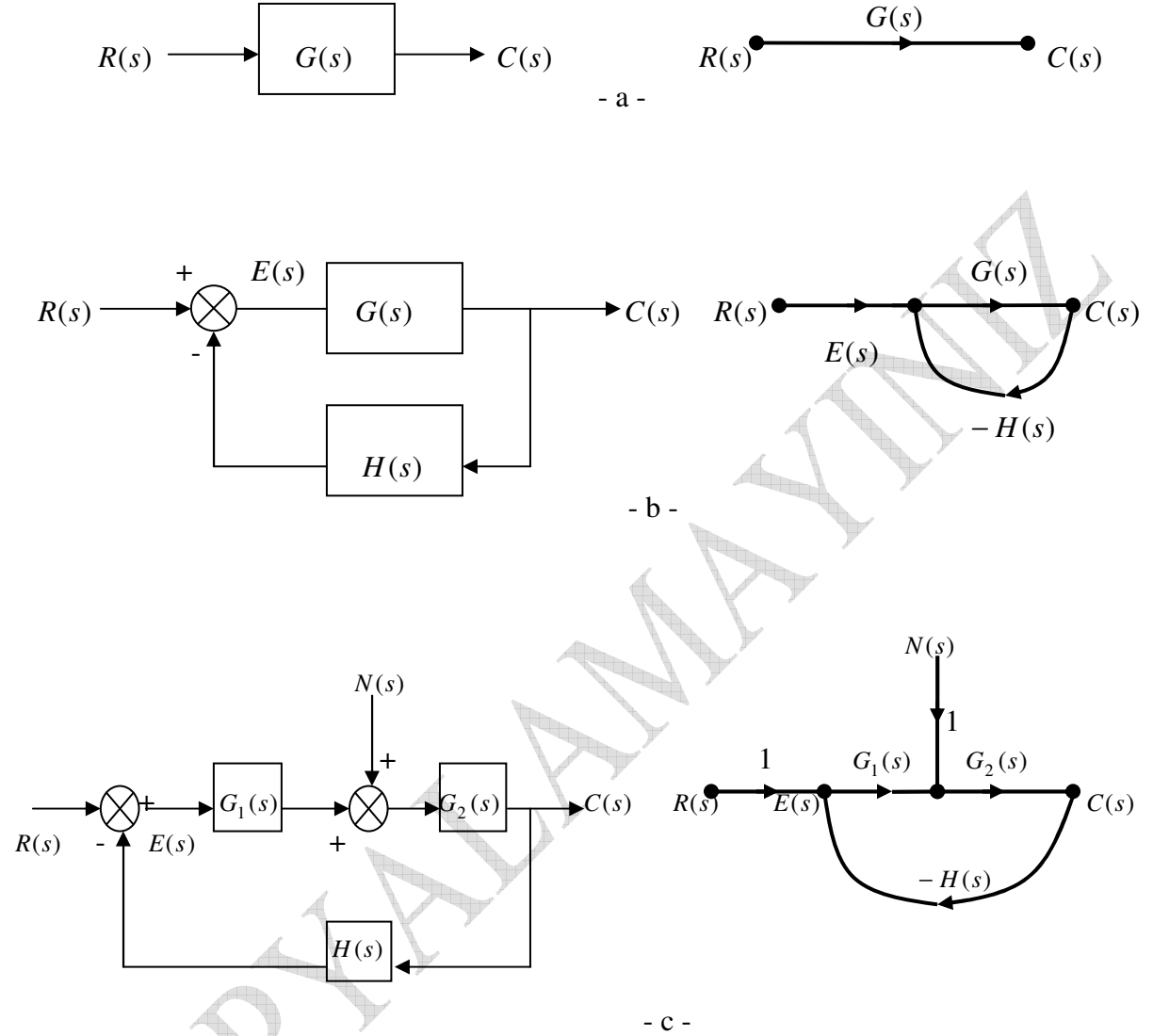
Şekil 12 Kapalı çevrim kontrol sistemi

Sistemlerin İşaret akış diagramlarıyla gösterim



Şekil 13 Sistemlerin işaret akış diagramlarıyla gösterimi

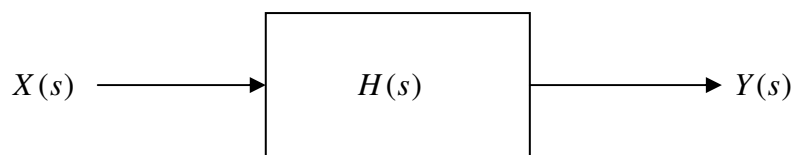
Blok diagramların işaret akış karşılıkları



Şekil 14 Sistem blok diagramları ve karşılık gelen işaret akış diagramları

Transfer fonksiyonu

Transfer fonksiyonu, bir sistemde çıkışın girişe oranı olarak ifade edilen önemli bir kavramdır.



Şekil 15 Transfer fonksiyonu

Şekilden de görülebileceği gibi, giriş $X(s)$ ve çıkış $Y(s)$ bilgisinden farklı olarak, sistem transfer fonksiyonu

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$$

biçiminde, çıkışın girişe oranı olarak elde edilmektedir. Bu şekildeki oransal ifade, başlangıç koşullarının sıfır alınmasıyla yazılmaktadır. Bunun anlamı, bir $t = 0$ başlangıç anında sisteme, çalışılan işaret domenine bağlı olarak bir $x(t)$, $X(s)$, $X(j\omega)$ veya $X(z)$ gibi bir girişin olduğu anda ancak sistem transfer fonksiyonunun söz konusu olabileceğidir. Bu haliyle sistem transfer fonksiyonu, tek başına giriş ve çıkışın sağlayabileceği bilgiden daha fazlasını sağlamaktadır. Çünkü sistemin gerek girişi gerekse de çıkışı hakkında bilgi içermektedir. Girişi, çıkışa aktaran fonksiyon olarak da düşünülebilir. “s” domenine ek olarak, “t, $j\omega$ ve z” domenlerine göre,

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}, \quad H(\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)}, \quad H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$$

biçimlerinden biriyle de gösterilebilir. Zaman domeninde $h(t) = y(t)/x(t)$ yazımı doğru değildir. Bunun için konvülasyon (convolution) işlemi $y(t) = x(t) * h(t)$ gerekir. Lineer zamandan bağımsız (LTI) sistemler için uygulandığında, eğer sistem cevabı aşağıdaki gibi yazılırsa,

$$Y(s) = H(s)X(s)$$

Burada $H(s)$ bir sabit gibi düşünülürse, örneğin

$$\lambda = H(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-s\tau} d\tau$$

λ gibi bir sabit olarak, alınabilir. Bu durumda sistem cevabı

$$Y(s) = \lambda X(s)$$

veya

$$\lambda = \frac{Y(s)}{X(s)}$$

olarak elde edilebilir. Görüldüğü gibi bu durumda transfer fonksiyonu, çıkış ile giriş arasındaki λ gibi bir sabit katsayıdır. Bundan dolayı $Y(s) = \lambda X(s)$ sistemi, zamandan bağımsız bir fonksiyonu ifade etmektedir. Buna benzer olarak $y(t) = x(t) * h(t)$ yazımındaki gibi, impuls cevabı olarak kullanılabilecek sistem transfer fonksiyonu rolündeki “h” ın, $h(t)$ gibi zamana bağlı fonksiyon olarak elde edileceğini görmekteyiz. Bu durumda sistem transfer fonksiyonu, sabit olmayıp, zamana göre değişen bir fonksiyondur. Bunların ışığında, transfer fonksiyonunun aslında sistemin tipinde belirleyen bir fonksiyon olduğunu görmekteyiz. Eğer sabit ise, zamandan bağımsız sistem (time-invariant), değilse, zamanla değişen (time-varying) sistem tipinin söz konusu olacağını görmekteyiz.

$$Y(s) = \lambda X(s) \quad \text{zamandan bağımsız sistem}$$
$$y(t) = h(t) * x(t) \quad \text{zamanla değişen sistem}$$

Pratikte karşımıza

$$y(t) = ax(t) \quad \text{zamandan bağımsız sistem}$$
$$y(t) = b(t)x(t) \quad \text{zamanla değişen sistem}$$

İfadeleriyle çıkmaktadır. İlk ifadede transfer fonksiyonu giriş ile çarpım durumundaki terim “a” olarak bir sabit olduğu için sistem, zamandan bağımsız, ikincisinde ise, transfer fonksiyonu $b(t)$ gibi, zamanla değişen bir fonksiyon olarak çıktığından, zamanla değişen sistem örneği söz konusudur. Karşımıza, çıkışın girişe oranı olarak çıkması özelliğiyle her sistemde kullanılabilme özelliği vardır. Elektrik devrelerinde ve motorlarında gerilimler açısından düşünüldüğünde, çıkış gerilimlerinin giriş gerilimlerine oranı olarak, elektrik mühendisliğinde yoğun kullanılan bir kavram olduğu görülecektir. Bununla beraber kontrol sistemlerinin analizinde de yine açık-çevrim ve kapalı-çevrim transfer fonksiyonu olarak kullanımını da bilmekteyiz.

Transfer fonksiyonu, sistem açısından çok önemli bir kavramdır. İsmindeki *transfer* kelimesi, anlamlıdır. Girişi çıkışa transfer ederken (aktarıken), amaca bağlı olarak bazen aynen bazende değiştirerek aktarır. Genellikle sinusoidal işaretlerle filtre transfer fonksiyonu olarak kullanıldığında, bir filtre fonksiyonu olarak, girişteki işareti çıkışa genliği ve fazı değiştirilmiş ama aynı frekansta aktardığını görmekteyiz. Bununla beraber, sistem transfer fonksiyonu, sistemin temel özelliklerini, göstermesinin yanında, sistemlerin kararlılıklarının incelenmesinde de önemli bir parametredir. Transfer fonksiyonu yardımıyla, sistemin kararlılığı en azından, başlangıç değerleri sıfır alınması koşuluyla incelenebilir.

Örnek

Aşağıdaki devre çıkışının girişine oranı olan transfer fonksiyonunu bulun.

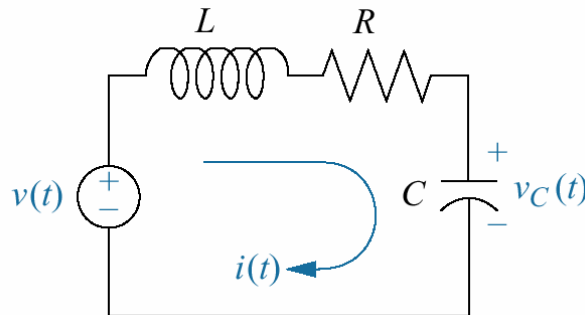


Figure 16 RLC Devresi

Çözüm

Klasik bir RLC devresinde, transfer fonksiyonu olarak $\frac{v_C(t)}{v(t)}$ oranı hesaplanacaktır. Bunu elde etmek için, ilgili seri devrenin gerilim denklemini yazalım.

$$v_L(t) + v_R(t) + v_C(t) = v(t)$$

Denklemdaki her bir kaynağın karşılığını yazalım.

$$L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t) + \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau = v(t)$$

Buna göre tüm denklem, akıma bağlı olarak elde edilebilir. Bunun için $v_C(t)$ kaynağını integrasyondan kurtarmak için eşitliğin her iki tarafının bir kez daha diferansiyeli alınırsa, aşağıdaki ifade elde edilir.

$$L \frac{d^2 i(t)}{dt^2} + R \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} v_C(t) = v(t)$$

$$i(t) = \frac{dq}{dt} \quad (q : \text{yük})$$

$$L \frac{d^2 q(t)}{dt^2} + R \frac{dq(t)}{dt} + \frac{1}{C} v_C(t) = v(t)$$

$$q(t) = Cv_C(t)$$

$$LC \frac{d^2 v_C(t)}{dt^2} + RC \frac{dv_C(t)}{dt} + v_C(t) = v(t)$$

Laplace göre düzenlenirse $(\frac{dv_C(t)}{dt} = sV(s), \frac{d^2 v_C(t)}{dt^2} = s^2 V(s))$,

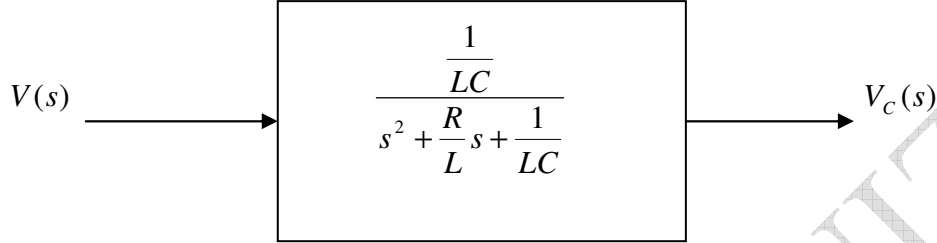
$$LCs^2 V_C(s) + RCs V_C(s) + V_C(s) = V(s)$$

$$(LCs^2 + RCs + 1)V_C(s) = V(s)$$

$$\frac{V_C(s)}{V(s)} = \frac{1}{LCs^2 + RCs + 1}$$

$$H(s) = \frac{V_C(s)}{V(s)} = \frac{1}{LC(\frac{s^2}{LC} + \frac{RC}{LC}s + \frac{1}{LC})} = \frac{\frac{1}{LC}}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}}$$

$$H(s) = \frac{\frac{1}{LC}}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}}$$



Şekil 17 RLC Transfer fonksiyonu

Sonuç : Başlangıçta tek başlarına sahip olduğumuz, giriş $v(t)$ ve çıkış $v_C(t)$ bilgilerinden farklı olarak, şimdi hem giriş hem çıkışı birlikte bulunduran, $H(s) = \frac{V_C(s)}{V(s)}$ sistem transfer fonksiyonuyla, sistem hakkında daha fazla bilgi elde edilmiştir. Eğer lineer zamanla değişmeyen (LTI) sistem söz konusuysa, elde edilen bilgi, girişin çıkışa göre farklı genlik ve fazlı ama aynı frekanslı biçimi gibidir.

Sistemlerin Denklemlerle gösterim

Tek giriş ve tek çıkışlı sistemler sürekli-zaman (analog) veya ayrık-zaman (dijital) özelliklerine göre diferansiyel denklemlerle gösterilebilirler. Eğer sürekli sistem gösterilecekse, diferansiyel denklem sistemleri, eğer ayrık sistemler gösterilecekse de diferans yani ayrık denklem sistemleri söz konusu olacaktır.

Sürekli Sistemlerin Diferansiyel denklemlerle gösterim

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = b_m \frac{d^m x(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} x(t)}{dt^{m-1}} + \dots + b_1 \frac{dx(t)}{dt} + b_0 x(t)$$

$$\sum_{k=0}^n a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^m b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}$$

Görüldüğü gibi, $x(t)$ giriş ve $y(t)$ çıkış olmak üzere, tek giriş ve tek çıkışlı zaman analizinden ziyade frekansa dayalı çözümleri içeren sistemlerin diferansiyel denklemlerle gösteriminin mümkün olduğu belirtilmişti. Bu tarz diferansiyel denklemler, integro diferansiyel denklemlerin cebirsel çözümlerini mümkün kılarsa da, burada daha çok sistem özellikleriyle ele alınmışlardır. Tek giriş – tek çıkışlı diferansiyel denklem üzerine kurulu bu tarz gösterim klasik bir sistem analiz yaklaşımı olup, sistemlerin daha ziyade frekans domenindeki çözümlerini araştırmaktadır. Frekans özellikli böyle bir yaklaşım için mevcut denklem sisteminde frekans terimini oluşturmak için “s-düzlemi” (kompleks frekans düzlemi, Laplace) aşağıdaki gibi oluşturulur.

$s \equiv d^k / dt^k$ türev operatörü kullanılırsa mevcut denklem

$$[a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0] Y(s) = [b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0] X(s)$$

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}$$

$H(s)$ operasyonel transfer fonksiyonudur. Bununla ilgili üç durum söz konusudur :

1. $m < n$ ise $H(s)$ “proper causal” $\frac{s^m}{s^n} = \frac{1}{s^{n-m}} = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{s^{n-m}} \rightarrow 0$ tam sönümlü sistem

2. $m \leq n$ ise $H(s)$ “causal” $\frac{s^m}{s^n} = \frac{s^m}{s^m} = a \rightarrow \approx 0$ sönümlü sistem

3. $m > n$ ise $H(s)$ “causal değil (noncausal)” $\frac{s^m}{s^n} = s^{m-n} = \lim_{s \rightarrow \infty} s^{m-n} \rightarrow \infty$ sönümsüz (kararsız) sistem.

Ayrık Sistemlerin Diferans (fark) denklemlerle gösterim

Yukarıda ele alınan tek giriş ve tek çıkışlı sistem bu kez ayrık-zaman (dijital) özelliğinde ise bu kez diferans yani ayrık denklem sistemleriyle gösterilecektir.

$$y[k+n] + a_{n-1} y[k+n-1] + a_{n-2} y[k+n-2] + \dots + a_1 y[k+1] + a_0 y[k] = b_m x[k+m] + b_{m-1} x[k+m-1] + b_{m-2} x[k+m-2] + \dots + b_1 x[k+1] + b_0 x[k]$$

$$\sum_{r=0}^n a_r y[k+n-r] = \sum_{r=0}^m b_r x[k+m-r]$$

Görüldüğü gibi, $x[n]$ giriş ve $y[n]$ çıkış olmak üzere, tek giriş ve tek çıkışlı sistemlerin diferans denklemlerle gösterimi mümkündür. Bu tarz fark (diferans) denklemler, sürekli haldekine benzer integro diferansiyel denklemlerin cebirsel çözümlerini mümkün kılarsa da, burada daha çok sistem özellikleriyle ele alınmışlardır. Mevcut denklem sisteminin causal olabilmesi için yukarıda verilen sistemin en azından aşağıdaki ilk iki koşulu sağlaması gerekir :

1. $m < n$ ise $H(s)$ “tam nedensel (proper causal)”

2. $m \leq n$ ise $H(s)$ “nedensel (causal)”

3. $m > n$ ise $H(s)$ “nedensel değil (noncausal)”

Bu durumda $m = n$ için $k = k - n$ alınırsa fark denklemi aşağıdaki gibi olur :

$$y[k - n + n] + a_{n-1}y[k - n + n - 1] + a_{n-2}y[k - n + n - 2] + \dots + a_1y[k - n + 1] + a_0y[k - n] = \\ b_mx[k - n + \underbrace{m}_n] + b_{m-1}x[k - n + \underbrace{m}_n - 1] + b_{m-2}x[k - n + \underbrace{m}_n - 2] + \dots + b_1x[k - n + 1] + b_0x[k - n]$$

$$y[k] + a_{n-1}y[k - 1] + a_{n-2}y[k - 2] + \dots + a_1y[k - n + 1] + a_0y[k - n] = \\ b_nx[k] + b_{n-1}x[k - 1] + b_{n-2}x[k - 2] + \dots + b_1x[k - n + 1] + b_0x[k - n]$$

Sürekli- ayırık zaman sistemlerinin denklemlerle Gösterim örnekleri

Bazı lineer olmayan sistemlere dair örnekler aşağıda ele alınmıştır.

Örnek

Sürekli-zaman sistemleri için

$$a_3 \frac{dy^3}{dt^3} + a_2 \frac{dy^2}{dt^2} + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = b_3 \frac{dx^3}{dt^3} + b_2 \frac{dx^2}{dt^2} + b_1 \frac{dx}{dt} + b_0 x$$

olan sistem denkleminin aynı sistemin ayırık olması durumunda ise aşağıdaki gibi olacaktır.

$$a_3 y[k - 3] + a_2 y[k - 2] + a_1 y[k - 1] + a_0 y[k] = b_3 x[k - 3] + b_2 x[k - 2] + b_1 x[k - 1] + b_0 x[k]$$

$$a_0 y[k] + a_1 y[k - 1] + a_2 y[k - 2] + a_3 y[k - 3] = b_0 x[k] + b_1 x[k - 1] + b_2 x[k - 2] + b_3 x[k - 3]$$

Eğer kompakt (kısa) yazım için n domeninden z domenine (Z transformasyonu)

$$y[k \pm r] = z^{\pm r} Y(z)$$

olarak düşünülürse

$$(a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + a_3 z^{-3}) Y(z) = (b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + b_3 z^{-3}) X(z)$$

Veya

$$a_0 y[k] + a_1 y[k + 1] + a_2 y[k + 2] + a_3 y[k + 3] = b_0 x[k] + b_1 x[k + 1] + b_2 x[k + 2] + b_3 x[k + 3]$$

$$(a_3 z^3 + a_2 z^2 + a_1 z + a_0) Y(z) = (b_3 z^3 + b_2 z^2 + b_1 z + b_0) X(z)$$

Örnek

$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 3\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = x(t)$ diferansiyel denklemiyle verilen sistemi çözün.

1.yol

Başlangıç koşullarını kullanarak diferansiyel denklemi çözebiliriz. Çözüm olarak $h(t)$ sistem impuls fonksiyonu elde edilmeye çalışılacaktır.

$$\frac{d}{dt} = D$$

$$(D^2 + 3D + 2)y(t) = x(t)$$

$$h(t) = \frac{y(t)}{x(t)} = \frac{1}{D^2 + 3D + 2}$$

eğer başlangıç koşulları örneğin

$$y(0) = 0 \text{ ve } \dot{y}(0) = -3 \text{ ise}$$

$$D^2 + 3D + 2 = 0 = \lambda^2 + 3\lambda + 2$$

$$\lambda_1 = -2 \text{ ve } \lambda_2 = -1$$

bulunan özdeğerlerin (eigenvalues) ardından aranan çözüm

$$y(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-t}$$

Şimdi çözümü $y(0) = 0$ ve $\dot{y}(0) = -3$ başlangıç koşullarına göre araştırırsak,

$$y(0) = c_1 + c_2 = 0$$

ve

$$\dot{y}(0) = -2c_1 e^{-2t} - c_2 e^{-t} = -2c_1 - c_2 = -3$$

$$c_1 + c_2 = 0$$

$$-2c_1 - c_2 = -3$$

denklem sistemi çözülürse,

$$c_1 = 3 \text{ ve } c_2 = -3$$

bulunarak çıkış $y(t)$ de yerine yazılırsa,

$$y(t) = 3e^{-2t} - 3e^{-t} \quad t \geq 0$$

bulunur.

2.yol

Laplace dönüşümünden yararlanarak denklemi çözmek

$$s = d / dt$$

$$(s^2 + 3s + 2)X(s) = X(s)$$

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{s^2 + 3s + 2} = \frac{1}{(s+1)(s+2)}$$

Buradan basit kesirlere ayırma yöntemiyle

$$\frac{1}{s^2 + 3s + 2} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+2} = \frac{s(A+B) + 2A+B}{(s+1)(s+2)}$$

$$A + B = 0$$

$$2A + B = 1$$

$$A = 1$$

$$B = -1$$

$$H(s) = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2}$$

$$h(t) = e^{-t}u(t) - e^{-2t}u(t) = (e^{-t} - e^{-2t})u(t)$$

Örnek

$y[n+2] + 3y[n+1] + 2y[n] = 2x[n+1] + 3x[n]$ Denklemiyle verilen ayrık sistemi çözün.

Çözüm

Çözüm olarak verilen ayrık sistemin transfer fonksiyonu, dolayısıyla impuls cevabı elde edilmeye çalışılacaktır. Bunun için

$$y[n \pm r] = z^{\pm r} Y(z)$$

ayrık (n) domeninden z domenine olan dönüşüm bağıntısından yararlanılacaktır.

$$(z^2 + 3z + 2)Y(z) = (2z + 3)X(z)$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{2z + 3}{z^2 + 3z + 2} = \frac{2z + 3}{(z+1)(z+2)}$$

$$\frac{H(z)}{z} = \frac{2z + 3}{z(z^2 + 3z + 2)} = \frac{2z + 3}{z(z+1)(z+2)}$$

Buradan basit kesirlere ayırma yöntemiyle

$$\begin{aligned}\frac{2z+3}{z(z+1)(z+2)} &= \frac{A}{z} + \frac{B}{z+1} + \frac{C}{z+2} = \frac{(z^2+3z+2)A + (z^2+2z)B + (z^2+z)C}{z(z+1)(z+2)} \\ &= \frac{z^2(A+B+C) + z(3A+2B+C) + 2A}{z(z+1)(z+2)}\end{aligned}$$

$$A+B+C=0$$

$$3A+2B+C=3$$

$$2A=3$$

$$A=\frac{3}{2}, B=\frac{3}{2}, C=3$$

$$\frac{H(z)}{z} = \frac{2z+3}{z(z+1)(z+2)} = \frac{3}{2z} + \frac{3}{2(z+1)} + \frac{3}{z+2}$$

$$H(z) = \frac{3}{2} + \frac{3z}{2(z+1)} + \frac{3z}{z+2}$$

$$h(n) = \frac{3}{2}\delta(n) + 1.5(-1)^n u(n) + 3(-2)^n u(n)$$

Örnek

$$y[n] + \frac{1}{4}y[n-1] - \frac{1}{8}y[n-2] = x[n]$$

Çözüm

Yine aynı dönüşüm bağıntısını kullanarak ayrık sistem impuls cevabını elde etmeye çalışalım.

$$y[n-r] = z^{-r} Y(z)$$

$$(1 - \frac{1}{4}z^{-1} - \frac{1}{8}z^{-2})Y(z) = X(z)$$

$$(1 - \frac{1}{4z} - \frac{1}{8z^2})Y(z) = X(z)$$

$$(8z^2 - 2z - 1)Y(z) = 8z^2 X(z)$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{8z^2}{8z^2 - 2z - 1}$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{8z^2}{8z^2 - 2z - 1}$$

$$\frac{H(z)}{z} = \frac{8z^2}{z(8z^2 - 2z - 1)}$$

Buradan kesirlere ayırma yöntemi uygulanırsa

$$\begin{aligned} \frac{H(z)}{z} &= \frac{8z^2}{z(z + \frac{1}{4})(z - \frac{1}{2})} = \frac{A}{z} + \frac{B}{z + \frac{1}{4}} + \frac{C}{z - \frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{8}(8z^2 - 2z - 1)A + \frac{1}{2}(2z^2 - z)B + \frac{1}{4}(4z^2 + z)C}{z(z + \frac{1}{4})(z - \frac{1}{2})} \\ &= \frac{z^2(A + B + C) + z(-\frac{A}{4} - \frac{B}{2} + \frac{C}{4}) - \frac{A}{8}}{z(z + \frac{1}{4})(z - \frac{1}{2})} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A + B + C &= 8 & B + C &= 8 & , & B = -8 & , & C = 16 \\ -\frac{A}{4} - \frac{B}{2} + \frac{C}{4} &= 0 & 2B + C &= 0 \\ A &= 0 \end{aligned}$$

$$\frac{H(z)}{z} = \frac{8z^2}{z(z + \frac{1}{4})(z - \frac{1}{2})} = -\frac{8}{z + \frac{1}{4}} + \frac{16}{z - \frac{1}{2}}$$

$$H(z) = -\frac{8z}{z + \frac{1}{4}} + \frac{16z}{z - \frac{1}{2}} = -\frac{8z}{z + 0.25} + \frac{16z}{z - 0.5}$$

$$h[n] = -8(-0.25)^n u[n] + 16(0.5)^n u[n]$$

Örnek

$$y[n+3] + 0.3y[n+2] + 0.1y[n+1] = x[n+2] + 0.4x[n+1]$$

$$y[n \pm r] = z^{\pm r} Y(z)$$

$$(z^3 + 0.3z^2 + 0.1z)Y(z) = (z^2 + 0.4z)X(z)$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{z^2 + 0.4z}{z^3 + 0.3z^2 + 0.1z} = \frac{z(z + 0.4)}{z(z - 0.2)(z - 0.5)}$$

Basit kesirlere ayırma yoluyla çözümü araştıralım.

$$\frac{H(z)}{z} = \frac{(z+0.4)}{z(z-0.2)(z-0.5)} = \frac{A}{z} + \frac{B}{z-0.2} + \frac{C}{z-0.5}$$

$$A = 4, B = -10, C = 6$$

$$\frac{H(z)}{z} = \frac{z(z+0.4)}{z(z-0.2)(z-0.5)} = \frac{4}{z} - \frac{10}{z-0.2} + \frac{6}{z-0.5}$$

$$H(z) = z \left(\frac{4}{z} - \frac{10}{z-0.2} + \frac{6}{z-0.5} \right) = 4 - \frac{10z}{z-0.2} + \frac{6z}{z-0.5}$$

$$h[n] = 4\delta[n] - 10(0.2)^n u[n] + 6(0.5)^n u[n]$$

$$n = 0 \text{ için}$$

$$h[0] = 4\delta[0] - 10(0.2)^0 u[0] + 6(0.5)^0 u[0] = 0$$

$$n = 1 \text{ için}$$

$$h[1] = 4\underbrace{\delta[1]}_0 - 10(0.2)^1 u[1] + 6(0.5)^1 u[1] = 1$$

$$n = 2 \text{ için}$$

$$h[2] = 4\underbrace{\delta[2]}_0 - 10(0.2)^2 u[2] + 6(0.5)^2 u[2] = 1.1$$

$$n = 3 \text{ için}$$

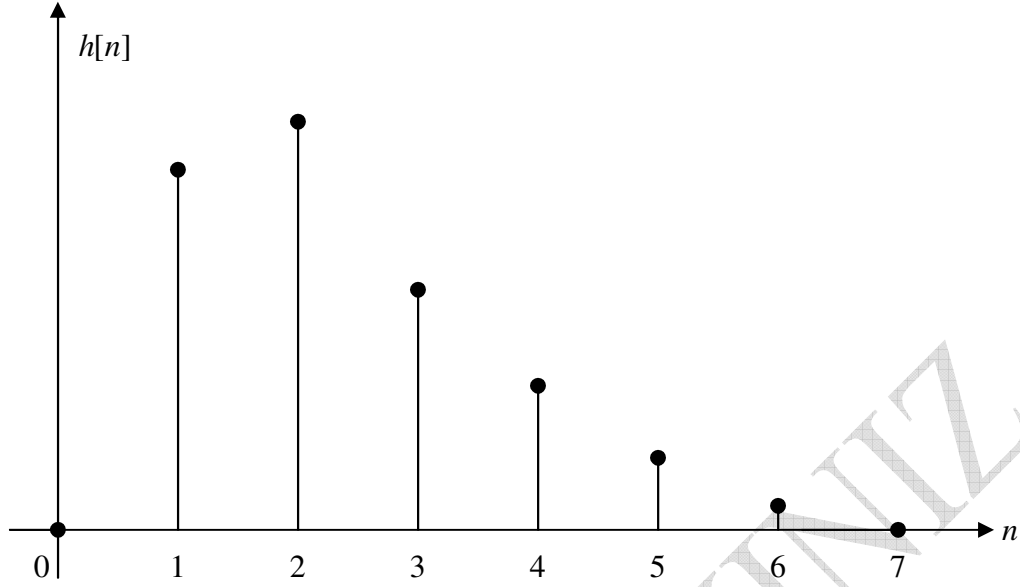
$$h[3] = 4\underbrace{\delta[3]}_0 - 10(0.2)^3 u[3] + 6(0.5)^3 u[3] = 0.67$$

$$n = 4 \text{ için}$$

$$h[4] = 4\underbrace{\delta[4]}_0 - 10(0.2)^4 u[4] + 6(0.5)^4 u[4] = 0.359$$

$$n = 5 \text{ için}$$

$$h[5] = 4\underbrace{\delta[5]}_0 - 10(0.2)^5 u[5] + 6(0.5)^5 u[5] = 0.184$$



Şekil 18 Ayırık sistem : $H(z) = \frac{z(z+0.4)}{z(z-0.2)(z-0.5)} = 4\delta[n] - 10(0.2)^n u[n] + 6(0.5)^n u[n] = h[n]$

Sistemlerin Sınıflandırılması

Sistemler genellikle giriş-çıkışlarında kullandıkları işaret türlerine göre sınıflandırılırlar. Bu anlamda işaretlere uygun olarak sürekli ve ayırık olarak iki sınıfa ayrılırlar.



Şekil 19 Sürekli ve ayırık sistemler

Bu özelliklere sahip sistemlerden en çok bilinenleri aşağıda sıralanmıştır.

1. Deterministik sistemler
2. Stokastik sistemler
3. Sürekli-zaman ve ayırık-zaman sistemler
4. Analog ve dijital sistemler
5. Invertible sistemler
6. Lineer ve Lineer olmayan sistemler
7. Bellekli (dinamik) ve belleksiz (anlık, instantaneous) sistemler
8. Causal (nedensel) ve causal olmayan (noncausal) sistemler
9. Zamandan bağımsız ve bağımlı sistemler
10. Kontrol Sistemleri : kontrol edilebilir – Gözlenebilir Sistemler

1. Deterministik Sistemler

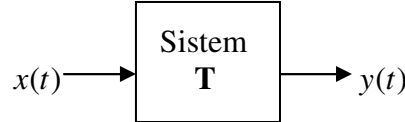
Verilen bir girişi için, daima aynı çıkışı üreten sistemlere deterministik sistemler denilir. Genellikle kesin matematiksel modele sahip oldukları için, hep aynı giriş için model veya denklemde hep aynı çıkış değerini üretirler.

2. Stokastik Sistemler

Rassal olarak da anılan bu sistemlerin tanımında, verilen bir girişi için, daima farklı çıkış üreten sistemlere stokastik sistemler denilmektedir. Kesin matematiksel modele sahip olmadıkları için, aynı girişi değeri için farklı çıkışlardaki rastlantısal değerler üretirler.

3. Sürekli – Zaman Sistemleri

Eğer bir sistemin giriş ve çıkış işaretleri sürekli ise, sürekli sistemler söz konusudur.



Şekil 20 Sürekli sistem

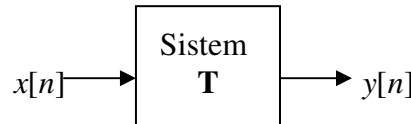
Zaman Domeninde Sistem Gösterimi

Yukarıda verilen bir sürekli-zaman sistemi

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + a_{n-2} \frac{d^{n-2} y(t)}{dt^{n-2}} + \dots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = b_m \frac{d^m x(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} x(t)}{dt^{m-1}} + b_{m-2} \frac{d^{m-2} x(t)}{dt^{m-2}} + \dots + b_1 \frac{dx(t)}{dt} + b_0 x(t)$$

diferansiyel denklem sistemi ile gösterilebilmektedir. Diferansiyel denklemler her ne kadar integro diferansiyel denklemlerin cebirsel çözümleri üzerine kurulsun da, burada sistemi temsil etme özelliğiyle ele alınacaktır. Bu tip sistemler tek girişli $x(t)$ ve tek çıkışlı $y(t)$ fonksiyonların üzerine kurulu frekans düzlemindeki klasik çözüm yaklaşımını benimseyen sistem olup, sistemdeki a_k ve b_k katsayılarının da $x(t)$ ve $y(t)$ nin fonksiyonları olabileceği gibi, “ t ” ye bağlı fonksiyon da olabileceğini biliyoruz. Denklemdaki “ n ” aynı zamanda diferansiyel denklemin derecesini gösterir.

Ayrık-Zaman Domeninde Sistem Gösterimi



Şekil 21 Ayrık sistem

Şekilde verilen ayrık-zaman sistemleri diferans (difference) yani fark denklemleriyle gösterilir. Sürekli zamandaki gösterim ayrık zamana aşağıdaki gibi uyarlanır:

$$y[k+n] + a_{n-1}y[k+n-1] + a_{n-2}y[k+n-2] + \dots + a_1y[k+1] + a_0y[k] = \\ b_mx[k+m] + b_{m-1}x[k+m-1] + b_{m-2}x[k+m-2] + \dots + b_1x[k+1] + b_0x[k]$$

$$\sum_{r=0}^n a_{n-r}y[k+n-r] = \sum_{r=0}^m a_{m-r}x[k+m-r]$$

Verilen denklemlerden sistemin causal olması için $m = n$ olması gerektiğini biliyoruz. Bu durum göz önüne alınarak yukarıdaki denklemler $m = n$ causal koşuluna göre tekrar düzenlenirlerse

$$y[k+n] + a_{n-1}y[k+n-1] + a_{n-2}y[k+n-2] + \dots + a_1y[k+1] + a_0y[k] = \\ b_nx[k+n] + b_{n-1}x[k+n-1] + b_{n-2}x[k+n-2] + \dots + b_1x[k+1] + b_0x[k]$$

elde edilecektir. Burada daha kompakt gösterim için bir adım daha düzenleme yapılabilir. Eğer son denklemde $k = k - n$ alınırsa

$$y[k] + a_{n-1}y[k-1] + a_{n-2}y[k-2] + \dots + a_1y[k-n+1] + a_0y[k-n] = \\ b_nx[k] + b_{n-1}x[k-1] + b_{n-2}x[k-2] + \dots + b_1x[k-n+1] + b_0x[k-n]$$

olarak gösterilen ve “*fark denklemi*” olarak anılan ayrık-zaman sistem denklem sistemi elde edilir. Ayrık-zaman sistem çözümleri için kullanılan bu denklem, sürekli-zaman sistemdeki “diferansiyel denklem sisteminin” karşılığıdır. Sistemde yer alan a_k ve b_k katsayılarıdır. Bunlar x ve y nin fonksiyonları olabileceği gibi, “ k ” ya bağlı fonksiyon da olabilir. Denklemdeki “ n ” aynı zamanda diferansiyel denklemin derecesini gösterir. “ Z ” lineer operator dönüşümü yapılırsa

$$[a_0 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2} + \dots + a_nz^{-n}]Y[z] = [b_0 + b_1z^{-1} + b_2z^{-2} + \dots + b_mz^{-m}]X[z]$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{b_0 + b_1z^{-1} + b_2z^{-2} + \dots + b_mz^{-m}}{a_0 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2} + \dots + a_nz^{-n}}$$

4. Analog ve Dijital Sistemler

Bir sistemin giriş ve çıkış işaretleri analog ise, sisteme analog sistem denir. Öte yandan bir sistemin giriş ve çıkışı dijital ise, sisteme dijital sistem denir. Analog sistemler oldukça fazla sayıda ve çeşitte iken, bilgisayarlar tipik dijital sistem örneğidir.

5. Invertible Sistemler

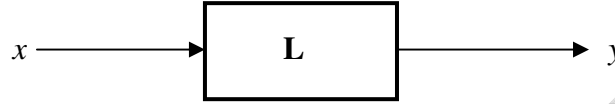
Eğer bir sistemin $x(t)$ girişi, $y(t)$ çıkışından elde ediliyorsa sistemin “terslenebilir, tersden elde edilebilir (invertible)” özellikte olduğu kabul edilir. Bu önemli bir özellik olup, genellikle çeşitli transformasyonlarla bir işaretin iki farklı uzayda çıkışından, girişinin elde edilmesi mümkün olur.

6.1. Lineer Sistemler

Lineer bir sistem basit anlamda, çıkışın girişle orantılı olması durumu olarak değerlendirilebilir. Eğer $x(t)$ sistem girişi ve $y(t)$ sistem çıkışı ise, basit bir sistemdeki

$$y(t) = \lambda x(t)$$

bağıntısı, sistemin lineer olmasına yetmektedir. Sistem çıkışı, girişin λ kadar katı, olarak değişmektedir. Ancak gerçekte bir sistemin lineerliği bu kadar basit olarak değerlendirilemez. Bir sistemde



Şekil 22 Sistem

$x(t)$ giriş ve $y(t)$ çıkış ve L lineer operatör olmak üzere sistem giriş ve çıkışları

$x(t)$ giriş ve $y(t)$ çıkış olmak üzere sistem giriş ve çıkışları

$x_1(t)$ için $y_1(t)$

$x_2(t)$ için $y_2(t)$

olmak üzere, aralarında $L\{x_1 + x_2\} = L\{x_1\} + L\{x_2\}$ benzeri (homomorfik fonksiyonlar)

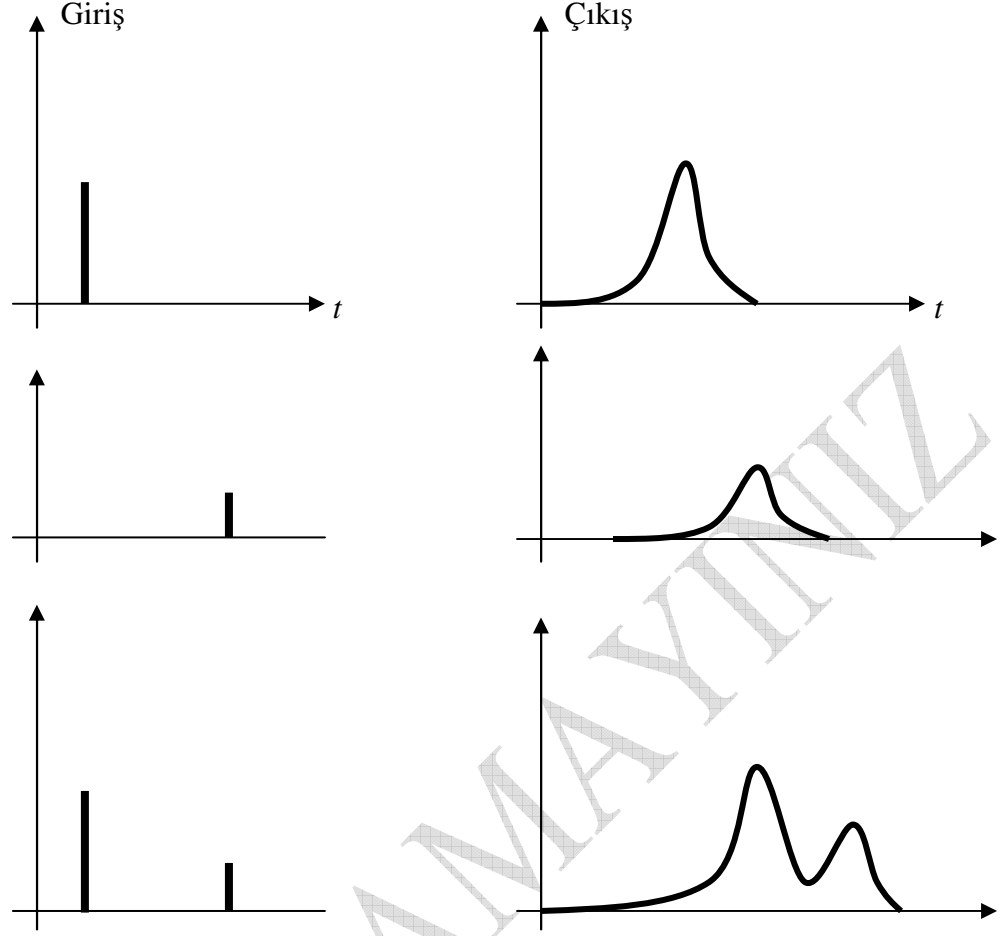
$$x_1(t) + x_2(t) = y_1(t) + y_2(t)$$

toplamsallık

bağıntısının kullanılması halinde sistemi oluşturan toplam girişin, aslında tek tek girişlerin toplamı yani süperpozisyonu olarak da ifade edilebilir şeklindedir. Bu durumda sistem çıkışı da, toplam girişe cevap verecek biçimde toplam çıkış oluşturacaktır. Bu lineer sistemlerin en önemli yanıdır. Daha genel anlamda eğer sistem girişini $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ ve sistem çıkışını $y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)$ ile gösteriyorsak toplamsallık ifadesi aşağıdaki gibi düşünülebilir..

$$x_1(t) + x_2(t) + \dots + x_n(t) \rightarrow y_1(t) + y_2(t) + \dots + y_n(t)$$

Toplama özelliği aşağıda şekil yoluyla şematize edilmiştir.



Şekil 23 Toplama özelliği

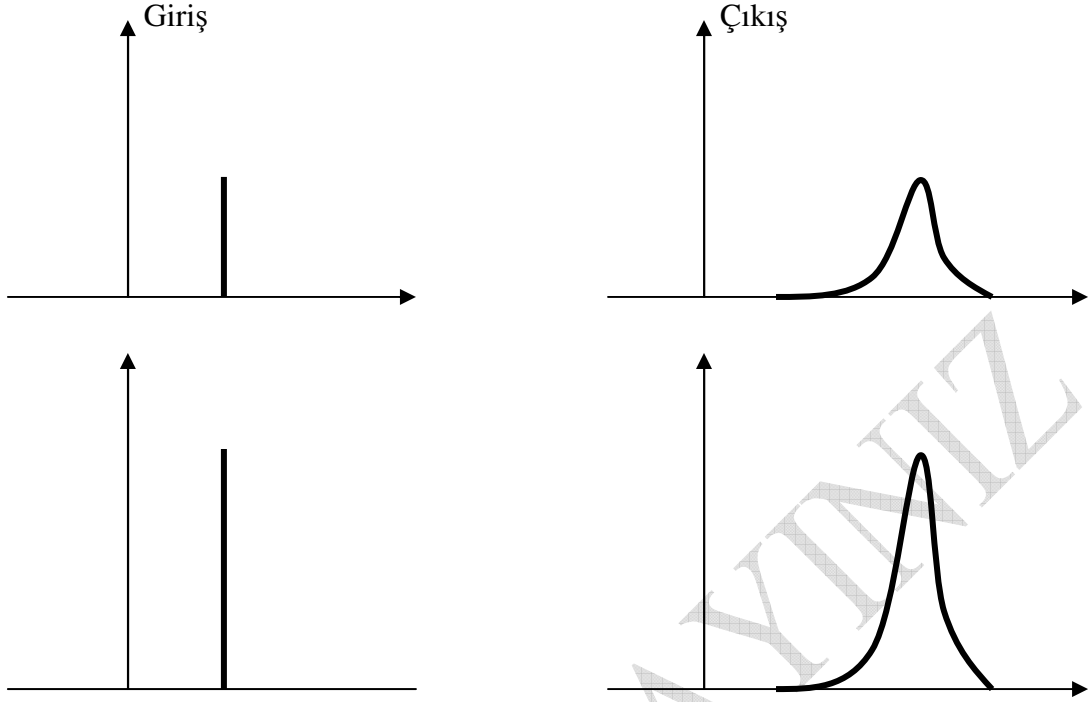
Bununla beraber yalnızca iki giriş üzerinden analize devam edersek, bu kez $x_1(t)$ ve $x_2(t)$ girişlerinin c_1 ve c_2 katsayılarıyla çıkışa orantılandıklarını göz önüne aldığımızda bu kez aralarında $L\{\alpha x\} = \alpha L\{x\}$ benzeri (homogeneous, scaling)

$$c_1 x_1(t) \text{ için } c_1 y_1(t)$$

$$c_2 x_2(t) \text{ için } c_2 y_2(t)$$

çarpımsallık

biçimindeki çarpımsallık bağıntısının söz konusu olacağını görmekteyiz. Buna göre her bir çıkış girişlerin belli bir katı olarak oluşturulmaktadır. Bu durum aşağıda şematize edilmiştir.

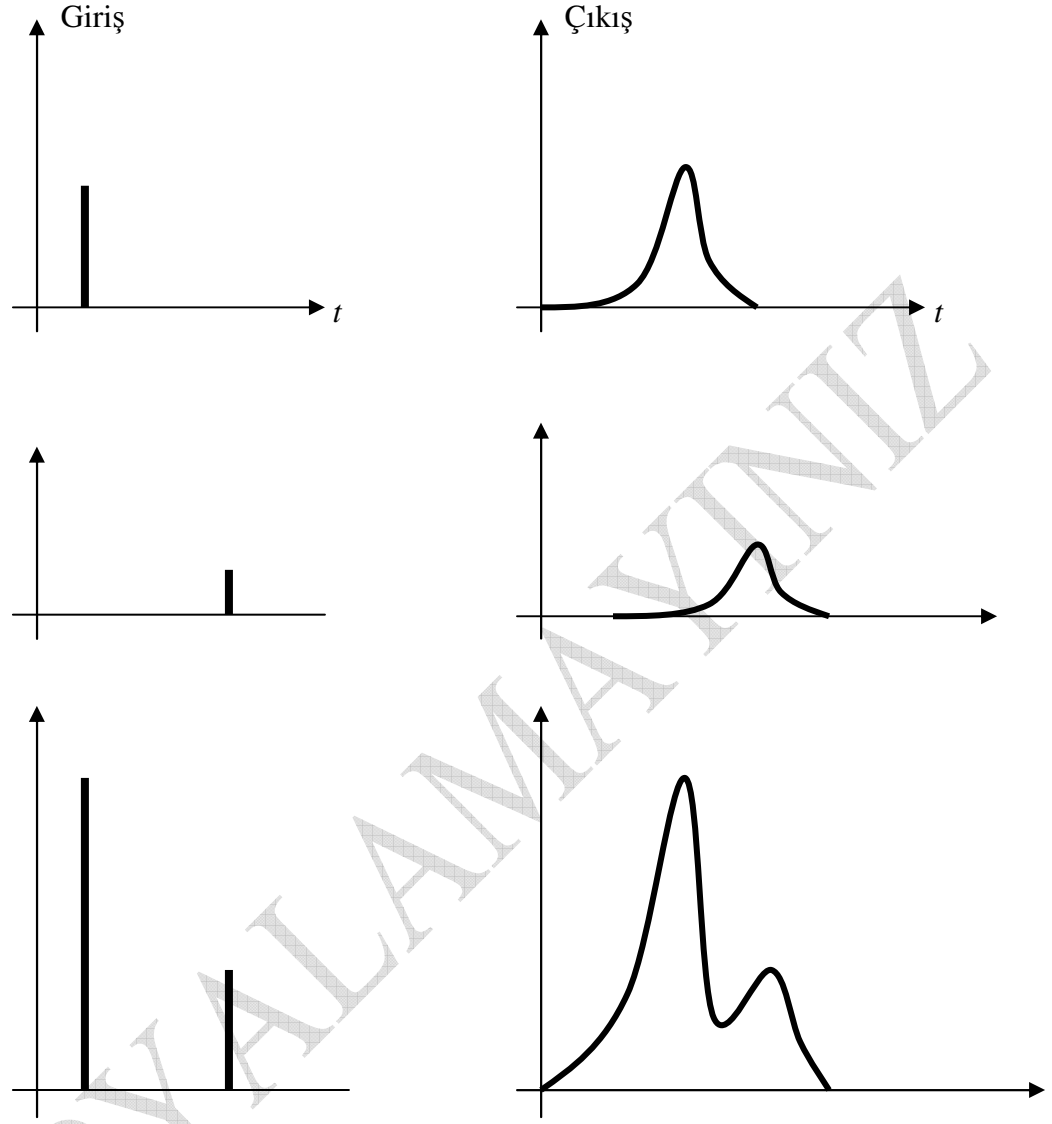


Şekil 24 Çarpma (ağırlıklandırma, homejenleştirme, scaling) özelliği

Bu yeni durumda, yani girişlerin belli oranlarda alınması durumunda, ilk anda değindiğimiz toplamsallık durumunun aşağıdaki gibi oluşacağını görmekteyiz. Bu kez süperpozisyon $L\{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2\} = \alpha_1 L\{x_1\} + \alpha_2 L\{x_2\}$ biçiminde

$$c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) \quad \text{**süperpozisyon**}$$

böyle bir bağıntının söz konusu olduğu sisteme lineer sistem denilmektedir. Buna göre bir sistemin hem toplamsallık hemde çarpımsallık özelliği sağlaması, lineer olduğu anlamına gelmektedir. Bu durumda aşağıda şematize edilmiştir.



Şekil 25 Süperpozisyon özelliği : çarpma + toplama

Görüldüğü gibi $y(t) = \lambda x(t)$ yaklaşımının dışında bir lineerlik tanımı söz konusudur. Lineer bir sistem son bağıntıdaki tüm $x_1(t)$ ve $x_2(t)$ için sağlanmalıdır. Burada sistemin lineerliği $x_1(t)$ ve $x_2(t)$ gibi iki girişle sağlanıyorsa, böyle bir sistemde bu girişler ne olursa olsun lineerlik sağlanacaktır. Ancak lineerlik $x_1(t)$ ve $x_3(t)$ olarak alınırsa, bu durumda

$$c_1 \mathbf{x}_1(t) + c_2 \mathbf{x}_3(t) \stackrel{?}{=} c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t)$$

olması garanti edilemeyebilir. Lineer sistem hep aynı $x_1(t)$ ve $x_2(t)$ girişleriyle $y_1(t)$ ve $y_2(t)$ çıkışlarını oluşturmaktadır. $x_3(t)$ gibi bir üçüncü giriş için aynı çıkışların oluşması

beklenemez veya bu lineer sistemin özelliği değildir. Çünkü $x_3(t)$ girişi için sistem çıkışının yine $y_2(t)$ olması beklenemez. Buna göre

$c_1x_1(t)$ için $c_1y_1(t)$ doğru

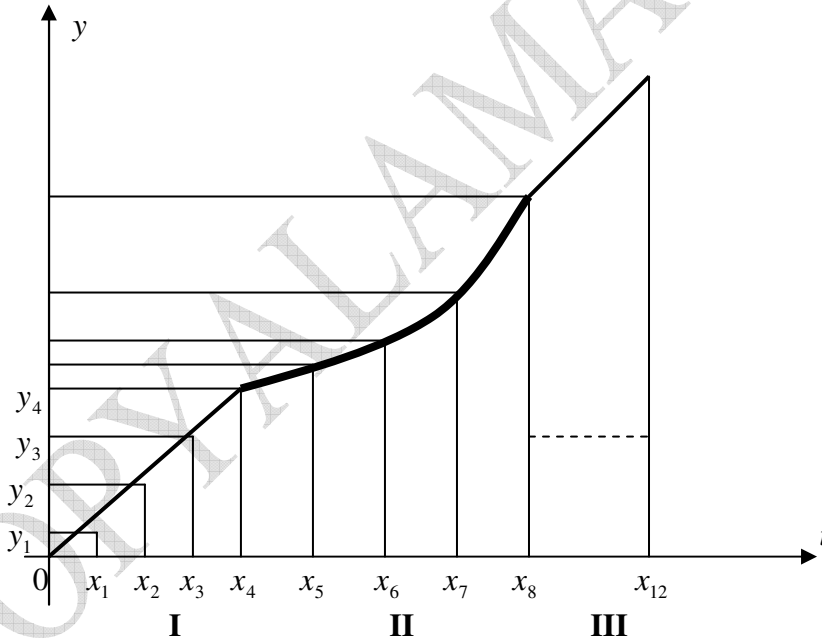
$c_2x_3(t)$ için $c_2y_2(t) \rightarrow ?$

Aşağıda buna ilişkin bir örnek ele alınmıştır. Bunun yerine daha genel $x(t) = x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ giriş ve $y(t) = y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)$ çıkışları için sistemin lineerliği daha geniş değerler için

$$c_1x_1(t) + c_2x_2(t) + c_3x_3(t) + \dots + c_nx_n(t) = c_1y_1(t) + c_2y_2(t) + c_3y_3(t) + \dots + c_ny_n(t)$$

ÖRNEK

Aşağıdaki sistemin lineerliğini inceleyin.



Şekil 26 Sistem lineer – nonlinear çalışma bölgeleri

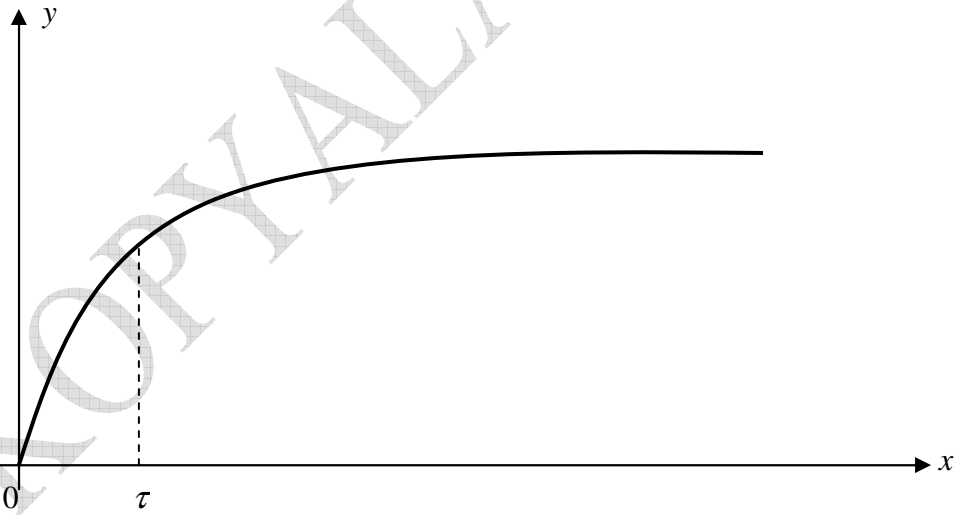
ÇÖZÜM

Girişler x , çıkışlar y olarak düşünüldüğünde sistemin farklı giriş aralıkları için farklı çıkış aralıkları söz konusudur. Örneğin birinci çalışma bölgesi olan $(0, x_1, x_2, x_3, x_4)$ aralığındaki girişlerle bunlara karşılık gelen çıkışların lineerlikleri karşılaştırıldığında, bu çalışma bölgesinin lineer olduğu görülmektedir, çünkü rampa tipli bir fonksiyon söz konusudur ($y(t) = t$). Ancak bu bölgede $(0, x_1, x_2, x_3, x_4)$ girişleriyle gözlemlenen lineerliğe karşılık

Bir başkasının (x_4, x_5, x_6, x_7, x_8) girişleriyle II.bölgede test ettiği aynı sistemin bu aralık için çıkışlarına bakıldığında lineer olmadığı görülmektedir. Çünkü bu bölgedeki çıkışlar lineerliğe uymayan ($y(t) = t^2$) gibi olduğu görülmektedir.

Sonuçta totat sistem lineer değildir. Dolayısıyla aynı sistemin farklı aralıklardaki çıkışlarının lineer olmaması dolayısıyla sistem lineer değildir. III.Bölge de I.bölge gibi lineer bir bölgedir. Bunların ışığında I. Ve III.bölge lineer, yalnızca II.bölge lineer olmayan bölgedir. Sonuçta sistemin bir bölgesi bile lineerliği bozduğundan, sistem lineer değildir. Bu açıdan bakıldığında, iki kişi farklı odalarda sistemin lineerliğini farklı girişlerle test ediyor olsun. Birinci odadaki kişi aynı sistemi lineer buluyorsa, diğer odadaki kişinin farklı girişlerle aynı sistemi test etmesiyle sistemin lineer olduğunu söylemek zordur. Çünkü her odada aynı sistem ama farklı girişlerle dolayısıyla sistemin farklı zamanlardaki davranışları incelenmektedir. Dolayısıyla farklı çalışma (giriş) bölgelerinde sistem lineerde çıkabilir, lineer olmayabilirde. Bu durumu yukarıdaki şekilden de teyit etmemiz mümkündür. Ancak farklı oda veya mekanlarda aynı çalışma bölgesi (girişleri) için sistemin aynı özellikte lineer/nonlineer olması gerekir. Aynı sistemin aynı giriş veya çalışma aralığı veya bölgesi dahilinde farklı sonuçlar üretmesi mümkün değildir.

Sistem cevabı açısından bakıldığında uygulanan bir girişe karşılık çıkışın üretilmesi hemen mümkün olmaz. Sistem çıkışının tamamlanması beklenir, ardından giriş-çıkış değerlendirilmesi yapılır. Lineerliği test betmek için sisteme giriş uygulandıktan sonra sistemin gecici cevap süresinin bitimindeki çıkışı göz lemlenerek giriş-çıkış testi yapılır. Sistemin kararlı hale gelmesiyle giriş ve çıkış testi yapılır. Örneğin aşağıdaki şekil göz önüne alındığında



Şekil 27 Sistem cevabı ve lineerlik

Geçici rejimin sona erdiği ($0 - \tau$) aralığında sistem lineer, (τ, ∞) aralığında ise lineer değildir. Sonuçta sistem topyekun değerlendirildiğinde, kararlı değildir.

6.2. Lineer Olmayan Sistemler

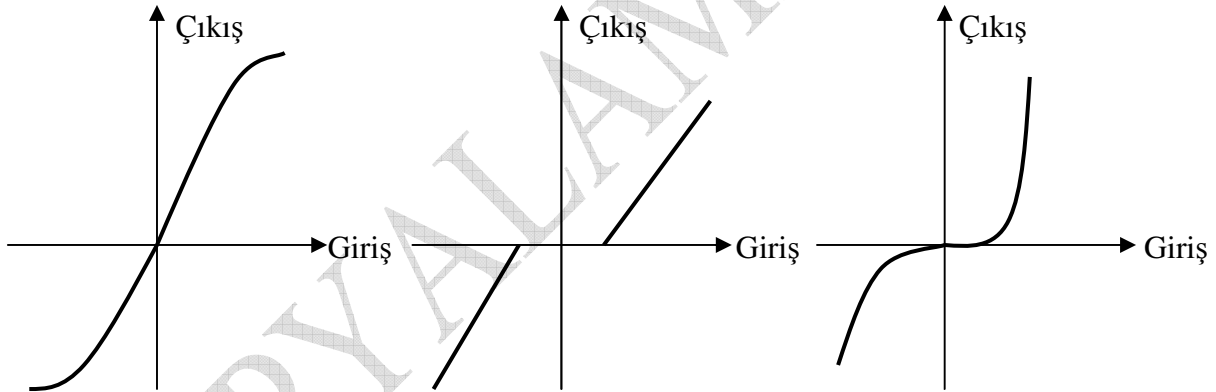
Yukarıda (a), (b) ve (c) de verilen toplama (additive), ağırlıklandırma (weighining, scaling) veya homejenite ve süperpozisyon koşullarını sağlayamayan sistemlere *lineer olmayan sistemler* denir.

Nonlineer sistemlerin diferansiyel denklemlerle gösterimi :

1. $\frac{d^2 x(t)}{dt^2} + y(t) \left(\frac{dx(t)}{dt} \right)^2 + x(t) = y(t)$, herhangi bir giriş veya çıkış teriminin karesi/karekökü alınamaz

2. $x^3(t) \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + \frac{dx(t)}{dt} + x(t) = \sin 5t$, diferansiyel ifade giriş ve çıkışın herhangi bir derecesi ile çarpım/işlem halinde olamaz

3. $\frac{d^2 x(t)}{dt^2} + \frac{dx(t)}{dt} + \sqrt{x(t)} = 0$, herhangi bir giriş veya çıkış teriminin karesi/karekökü alınamaz



Şekil 28 Nonliner sistemlere ait örnek eğriler

Örnek

Girişi $x(t)$, çıkışı $y(t)$ olan

$$y(t) = \cos x(t)$$

sisteminin lineerliğini inceleyin

Çözüm

Lineerlik için $L\{x_1 + x_2\} = L\{x_1\} + L\{x_2\}$ ve $L\{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2\} = \alpha_1 L\{x_1\} + \alpha_2 L\{x_2\}$ özellikler araştırılacaktır. Burada giriş $x(t)$ ve çıkış ise $y(t)$ dir. Buna göre eğer sistemin lineerliği araştırılacaksa

$$c_1 x_1(t) \text{ girişi için sistem çıkışı } c_1 y_1(t) = \cos c_1 x_1(t)$$

$$c_2 x_2(t) \text{ girişi için sistem çıkışı } c_2 y_2(t) = \cos c_2 x_2(t)$$

Tek tek $c_1 y_1(t)$ ve $c_2 y_2(t)$ cevapları toplamı

$$c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) = \cos c_1 x_1(t) + \cos c_2 x_2(t) \quad (1)$$

Öte yandan sisteme tek tek girişler yerine $c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t)$ toplam girişi yapılması durumundaki $c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t)$ toplam sistem cevabı

$$c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) = \cos[c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t)] = \cos c_1 x_1(t) \cos c_2 x_2(t) - \sin c_1 x_1(t) \sin c_2 x_2(t) \quad (2)$$

(1) ve (2) cevapları karşılaştırıldığında $(\cos(a+b) \neq \cos a + \cos b)$

$$\cos c_1 x_1(t) + \cos c_2 x_2(t) \neq \cos[c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t)] = \cos c_1 x_1(t) \cos c_2 x_2(t) - \sin c_1 x_1(t) \sin c_2 x_2(t)$$

Görüldüğü gibi, sisteme tek tek girişler yapıldığında oluşan cevapların toplamı sisteme $c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t)$ toplam girişi yapıldığında oluşan cevaba eşit olmadığından verilen $y(t) = \cos x(t)$ sistemi lineer değildir.

Örnek

Girişi $x(t)$, çıkışı $y(t)$ olan $y(t) = x^2(t)$ sistemin lineerliğini inceleyiniz.

Çözüm

Lineerlik için yine $L\{x_1 + x_2\} = L\{x_1\} + L\{x_2\}$ $L\{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2\} = \alpha_1 L\{x_1\} + \alpha_2 L\{x_2\}$ özellikler araştırılacaktır.

$$x_1(t) \text{ giriş için } y_1(t) = (x_1(t))^2 = x_1^2(t)$$

$$x_2(t) \text{ giriş için } y_2(t) = (x_2(t))^2 = x_2^2(t)$$

$$c_1 x_1(t) \text{ giriş için } c_1 y_1(t) = (c_1 x_1(t))^2 = c_1^2 x_1^2(t) \\ c_2 x_2(t) \text{ giriş için } c_2 y_2(t) = (c_2 x_2(t))^2 = c_2^2 x_2^2(t)$$

Buradan oluşan toplam $c_1 y_1(t) + c_2 y_2$ sistem cevabı

$$c_1 y_1(t) = c_1^2 x_1^2(t) \text{ ve } c_2 y_2(t) = c_2^2 x_2^2(t) \text{ olduğundan}$$

$$c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) = c_1^2 x_1^2(t) + c_2^2 x_2^2(t) \quad (1)$$

elde edilir. Diğer yandan bu elde edilen çıkış, lineerlik için toplam $c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t)$ girişinin yapıldığı anda elde edilene eşit olması gerekir. Buna göre $c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t)$ toplam girişi için sistemin toplam $c_1 y_1(t) + c_2 y_2$ cevabını hesaplayalım.

$$c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) = [c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t)]^2 = c_1^2 x_1^2(t) + 2c_1 c_2 x_1(t) x_2(t) + c_2^2 x_2^2(t) \quad (2)$$

(1) ve (2) den görüldüğü gibi tek tek girişlerin cevabından elde edilen toplam $c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) = c_1^2 x_1^2(t) + c_2^2 x_2^2(t)$ cevabıyla, toplam $c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t)$ girişinin yapıldığı amdaki toplam $c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) = c_1^2 x_1^2(t) + 2c_1 c_2 x_1(t) x_2(t) + c_2^2 x_2^2(t)$ cevabı eşit değildir. Diğer bir deyişle,

$$c_1^2 x_1^2(t) + c_2^2 x_2^2(t) \neq c_1^2 x_1^2(t) + 2c_1 c_2 x_1(t) x_2(t) + c_2^2 x_2^2(t)$$

olduğundan sistem lineer değildir.

rnek

Girişi $x(t)$, çıkışı $y(t)$ olan $f(t) = x(t) \cos \omega_c t$ Sisteminin lineerliğini inceleyiniz.

zm

yine $L\{x_1 + x_2\} = L\{x_1\} + L\{x_2\}$ $L\{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2\} = \alpha_1 L\{x_1\} + \alpha_2 L\{x_2\}$ özellikler araştırılacaktır.

$$c_1 x_1(t) \text{ girişi için sistem cevabı } c_1 y_1(t) = c_1 x_1(t) \cos \omega_c t \\ c_2 x_2(t) \text{ girişi için sistem cevabı } c_2 y_2(t) = c_2 x_2(t) \cos \omega_c t$$

Tek tek $c_1 y_1(t)$ ve $c_2 y_2(t)$ cevapları toplamı

$$c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) = c_1 x_1(t) \cos \omega_c t + c_2 x_2(t) \cos \omega_c t \quad (1)$$

Öte yandan sisteme tek tek girişler yerine $c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t)$ toplam girişi yapılması durumundaki $y_1(t) + y_2(t)$ toplam sistem cevabı

$$c_1 y_1 + c_2 y_2 = [c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t)] \cos \omega_c t = c_1 x_1(t) \cos \omega_c t + c_2 x_2(t) \cos \omega_c t \quad (2)$$

Elde edilen bu çıkışın lineerlik için daha önce elde edilen tek tek $c_1 y_1(t)$ ve $c_2 y_2(t)$ cevapları toplamına eşit olması gerekiyor. (1) ve (2) den bunu görebiliriz.

$$c_1 x_1(t) \cos \omega_c t + c_2 x_2(t) \cos \omega_c t = c_1 x_1(t) \cos \omega_c t + c_2 x_2(t) \cos \omega_c t$$

olduğundan verilen sistem lineerdir.

Örnek

Girişi $x(t)$, çıkışı $y(t)$ olan $y(t) = tx(t)$ sistemini lineerlik açısından inceleyelim.

Çözüm

$L\{x_1 + x_2\} = L\{x_1\} + L\{x_2\}$ $L\{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2\} = \alpha_1 L\{x_1\} + \alpha_2 L\{x_2\}$ koşullarını araştıralım.

$c_1 x_1(t)$ giriş için $f[c_1 x_1(t)] = c_1 tx_1(t)$

$c_2 x_2(t)$ giriş için $f[c_2 x_2(t)] = c_2 tx_2(t)$

$c_1 x_1(t)$ ve $c_2 x_2(t)$ girişleriyle oluşan cevapların toplamı

$$f[c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t)] = t[c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t)] = c_1 tx_1(t) + c_2 tx_2(t) \quad (1)$$

Şimdi $c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t)$ toplam giriş için toplam çıkışı araştıralım.

$$f[c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t)] = t[c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t)] = c_1 tx_1(t) + c_2 tx_2(t)$$

$$\begin{aligned} f[c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t)] &= f[c_1 x_1(t)] + f[c_2 x_2(t)] = c_1 f[x_1(t)] + c_2 f[x_2(t)] \\ &= c_1 tx_1(t) + c_2 tx_2(t) \end{aligned} \quad (2)$$

(1) ve (2) karşılaştırıldıklarında eşit olduklarından sistem lineerdir.

Örnek

Girişi $x(t)$, çıkışı $y(t)$ olan $y(t) = 3x(t) - 2$ sisteminin lineerliğini inceleyiniz.

$x_1(t) = 2$ ve $x_2(t) = 6$ olsun.

Çözüm

Burada da $L\{x_1 + x_2\} = L\{x_1\} + L\{x_2\}$ $L\{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2\} = \alpha_1 L\{x_1\} + \alpha_2 L\{x_2\}$ lineerlik koşulları araştırılacaktır.

$$x_1(t) \rightarrow y_1(t) = 3x_1(t) - 2 = 4$$

$$x_2(t) \rightarrow y_2(t) = 3x_2(t) - 2 = 16$$

Eğer tek tek $x_1(t)$ ve $x_2(t)$ girişleri için elde edilen çıkışların toplamı olan $y_1(t) + y_2(t)$ aranıyorsa, yukarıdaki yazılanlardan

$$y_1(t) + y_2(t) = 4 + 16 = 20$$

elde edilir. Bunun yanında sisteme tek tek $x_1(t)$ ve $x_2(t)$ girişleri yerine toplam giriş olan $x_1(t) + x_2(t)$ durumundaki sistemin cevabını araştıralım.

$$y(t) = 3(x_1(t) + x_2(t)) - 2 = 3(2 + 6) - 2 = 3(8) - 2 = 22$$

Elde edilen bu toplam çıkışın daha önce tek tek $y_1(t)$ ve $y_2(t)$ cevaplarının toplamı olan 16 ya eşit olmadığı görülmektedir.

$$16 \neq 22$$

cevaplar eşit olmadığından verilen sistem lineer değildir.

Örnek

Girişi $u(t)$, çıkışı $y(t)$ olan $y(t) = \sin u(t)$ sistemin lineerliğini inceleyin.

Çözüm

$L\{x_1 + x_2\} = L\{x_1\} + L\{x_2\}$ $L\{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2\} = \alpha_1 L\{x_1\} + \alpha_2 L\{x_2\}$ lineerlik koşulları araştırılacaktır.

$$c_1 u_1(t) \text{ giriş için sistem çıkışı } y_1(t) = \sin c_1 u_1(t)$$

$$c_2 u_2(t) \text{ giriş için sistem çıkışı } y_2(t) = \sin c_2 u_2(t)$$

$$c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) = \sin c_1 u_1(t) + \sin c_2 u_2(t)$$

$c_1 u_1(t) + c_2 u_2(t)$ toplam girişle elde edilen bu çıkış,

$$c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) = \sin(c_1 u_1(t) + c_2 u_2(t)) = \sin c_1 u_1(t) \cos c_2 u_2(t) + \sin c_2 u_2(t) \cos c_1 u_1(t)$$

$c_1 u_1(t) + c_2 u_2(t)$ toplam girişiyle elde edilen bu çıkışın tek tek $c_1 y_1(t)$ ve $c_2 y_2(t)$ nin cevapları toplamı olan $c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) = \sin c_1 u_1(t) + \sin c_2 u_2(t)$ ifadesine eşit olması gerekiyor. Oysa ki,

$$\begin{aligned} \sin c_1 u_1(t) + \sin c_2 u_2(t) &\neq \sin c_1 u_1(t) \cos c_2 u_2(t) + \sin c_2 u_2(t) \cos c_1 u_1(t) \\ \sin a + \sin b &\neq \sin(a + b) \end{aligned}$$

olduğundan sistem lineer değildir.

Örnek

$y(t) = \sin(t) u(t)$ sistemin lineerliğini araştırın.

Çözüm

$L\{x_1 + x_2\} = L\{x_1\} + L\{x_2\}$ $L\{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2\} = \alpha_1 L\{x_1\} + \alpha_2 L\{x_2\}$ lineerlik koşulları araştırılacaktır.

$L\{x_1 + x_2\} = L\{x_1\} + L\{x_2\}$ $L\{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2\} = \alpha_1 L\{x_1\} + \alpha_2 L\{x_2\}$ lineerlik koşulları araştırılacaktır.

Daha önceki örneklerden iki tane fonksiyonun yan yana çarpımı halinde görünen sistemlerin lineer oldukları gösterilmişti. Burada verilen sistemde aynı özellikte olduğundan

$$\sin(t)[c_1 u_1(t) + c_2 u_2(t)] = \sin(t) c_1 u_1(t) + \sin(t) c_2 u_2(t)$$

eşitliği gerçekleşeceğinden sistem lineer olacaktır.

Örnek

Girişi $x(t)$, çıkışı $y(t)$ olan $y(t) = |x(t)|$ sisteminin lineerliğini araştırın.

Çözüm

$L\{x_1 + x_2\} = L\{x_1\} + L\{x_2\}$ $L\{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2\} = \alpha_1 L\{x_1\} + \alpha_2 L\{x_2\}$ lineerlik koşulları için eğer $x_1(t) = a_1(t) + jb_1(t)$ ve $x_2(t) = a_2(t) + jb_2(t)$ tipinde kompleks fonksiyonlar ise,

$$c_1 x_1(t) \text{ giriş için sistem çıkışı } c_1 y_1(t) = |c_1 x_1(t)| = |c_1(a_1(t) + jb_1(t))| = \sqrt{c_1^2 a_1^2(t) + c_1^2 b_1^2(t)}$$

$c_2 x_2(t)$ girişi için için sistem çıkışı

$$c_2 y_2(t) = |c_2 x_2(t)| = |c_2(a_2(t) + jb_2(t))| = \sqrt{c_2^2 a_2^2(t) + c_2^2 b_2^2(t)}$$

Eğer tek tek $c_1x_1(t)$ ve $c_2x_2(t)$ girişleri için elde edilen çıkışların toplamı olan $c_1y_1(t) + c_2y_2(t)$ aranıyorsa,

$$c_1y_1(t) + c_2y_2(t) = \sqrt{c_1^2a_1^2(t) + c_1^2b_1^2(t)} + \sqrt{c_2^2a_2^2(t) + c_2^2b_2^2(t)} \quad (1)$$

Şimdi $c_1x_1(t) + c_2x_2(t)$ toplam girişi için toplam sistem cevabına bakalım.

$$\begin{aligned} y(t) &= |c_1x_1(t) + c_2x_2(t)| = |c_1(a_1(t) + jb_1(t)) + c_2(a_2(t) + jb_2(t))| = |c_1a_1(t) + c_2(a_2(t) + j(c_1b_1(t) + c_2b_2(t)))| \\ &= \sqrt{(c_1a_1(t) + c_2(a_2(t)))^2 + (c_1b_1(t) + c_2b_2(t))^2} \end{aligned}$$

Buradan çok açıktır ki $c_1x_1(t) + c_2x_2(t)$ toplam girişinden elde edilen $y(t) = \sqrt{(c_1a_1(t) + c_2(a_2(t)))^2 + (c_1b_1(t) + c_2b_2(t))^2}$ cevabı tek tek $c_1x_1(t)$ ve $c_2x_2(t)$ girişleriyle elde edilen $\sqrt{c_1^2a_1^2(t) + c_1^2b_1^2(t)} + \sqrt{c_2^2a_2^2(t) + c_2^2b_2^2(t)}$ cevabıyla aynı olmayacaktır.

$$\sqrt{c_1^2a_1^2(t) + c_1^2b_1^2(t)} + \sqrt{c_2^2a_2^2(t) + c_2^2b_2^2(t)} \neq \sqrt{(c_1a_1(t) + c_2(a_2(t)))^2 + (c_1b_1(t) + c_2b_2(t))^2} \quad (2)$$

(1) ve (2) nin eşitsizliğinden dolayı verilen $y(t) = |x(t)|$ sistemi lineer değildir.

Örnek

Başlangıç koşulları sıfır, girişi $x(t)$ ve çıkışı $y(t)$ olan $y(t) = \frac{dx(t)}{dt}$ sisteminin lineerliğini araştırın.

Çözüm

$L\{x_1 + x_2\} = L\{x_1\} + L\{x_2\}$ $L\{\alpha_1x_1 + \alpha_2x_2\} = \alpha_1L\{x_1\} + \alpha_2L\{x_2\}$ lineerlik koşullarını araştıralım.

$$x_1(t) \text{ giriş için } y_1(t) = \frac{dx_1(t)}{dt}$$

$$c_1x_1(t) \text{ giriş için } c_1y_1(t) = \frac{dc_1x_1(t)}{dt} = c_1 \frac{dx_1(t)}{dt}$$

$$x_2(t) \text{ giriş için } y_2(t) = \frac{dx_2(t)}{dt}$$

$$c_2x_2(t) \text{ giriş için } c_2y_2(t) = \frac{dc_2x_2(t)}{dt} = c_2 \frac{dx_2(t)}{dt}$$

oluşan çıkışların toplamına bakalım.

$$c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) = c_1 \frac{dx_1(t)}{dt} + c_2 \frac{dx_2(t)}{dt} \quad (1)$$

$c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t)$ toplam giriş için

$$\begin{aligned} c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) &= \frac{d}{dt} (c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t)) = \frac{dc_1 x_1(t)}{dt} + \frac{dc_2 x_2(t)}{dt} \\ &= c_1 \frac{dx_1(t)}{dt} + c_2 \frac{dx_2(t)}{dt} \\ &= c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) \end{aligned} \quad (2)$$

(1) ve (2) toplamlarının eşit olduğu görülmektedir. Buradan toplam giriş durumundaki toplam cevap önceki cevapların tek tek toplamından oluştuğundan türev operatörü lineer bir sistemdir.

Örnek

Girişi $x(t)$, çıkışı $y(t)$ olan $y(t) = x'(t) + x(t)y(t)$ sisteminin lineerliğini inceleyin.

Çözüm

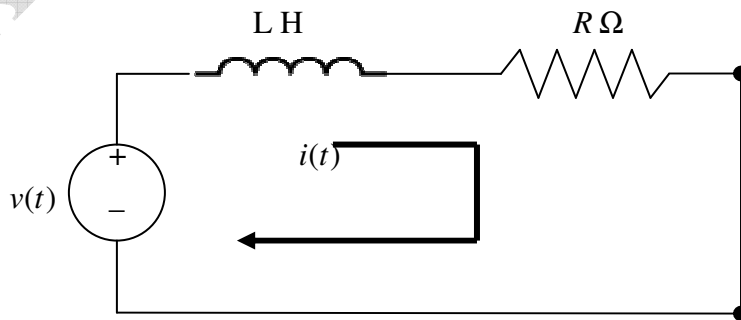
Verilen diferansiyel denklem

$$y(t) = \frac{dx}{dt} + x(t)y(t)$$

Diferansiyel denklemle verilen ifadenin lineer olabilmesi için x ve y terimlerinin yan yana veya çarpım halinde olmaması gerekiyor. Denklemdeki $x(t)y(t)$ teriminden dolayı lineer değildir.

Örnek

Aşağıda verilen elektrik devresinin lineerliğini araştırın.



Şekil 29 RL Elektrik devresi

$$v_L(t) + v_R(t) = v(t)$$

$$L \frac{di(t)}{dt} + R i(t) = v(t)$$

Böyle bir devre göz önüne alındığında, belirli bir süre sonra devreden geçecek $i(t)$ akımının $v(t)$ gerilimiyle lineer değişeceği görülecektir. Bunun yanısıra denklemde görülen $\frac{di(t)}{dt}$ türev operatörünün lineerliği daha öncek örnekte gösterilmişti. Bununla beraber denklemdeki $R i(t)$ ifadesi zaten $i(t)$ akımının (girişinin) R katı gibi başka bir lineer terim olduğundan, toplam denklemin lineerliği sağlayacağı kesindir. Bu nedenle verilen devreyi ihtiva eden sistem lineer bir sistemdir.

Örnek

Başlangıç koşulları sıfır, girişi $x(t)$ ve çıkışı $y(t)$ olan $y(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$ sisteminin lineerliğini araştırın.

Çözüm

$L\{x_1 + x_2\} = L\{x_1\} + L\{x_2\}$ $L\{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2\} = \alpha_1 L\{x_1\} + \alpha_2 L\{x_2\}$ lineerlik koşullarını araştıralım.

$$c_1 x_1(t) \text{ girişi için çıkış } y_3(t) = \int_{-\infty}^t c_1 x_1(\tau) d\tau$$

$$c_2 x_2(t) \text{ girişi için çıkış } y_4(t) = \int_{-\infty}^t c_2 x_2(\tau) d\tau$$

oluşan çıkışların toplamına bakalım.

$$c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) = c_1 \int_{-\infty}^t x_1(\tau) d\tau + c_2 \int_{-\infty}^t x_2(\tau) d\tau \quad (1)$$

$c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t)$ toplam girişi için sistem cevabını araştıralım.

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{-\infty}^t [c_1 x_1(\tau) + c_2 x_2(\tau)] d\tau = \int_{-\infty}^t c_1 x_1(\tau) d\tau + \int_{-\infty}^t c_2 x_2(\tau) d\tau \\ &= c_1 \int_{-\infty}^t x_1(\tau) d\tau + c_2 \int_{-\infty}^t x_2(\tau) d\tau \\ &= c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) \end{aligned}$$

(2)

(1) ve (2) toplamalarının eşit olduğu görülmektedir. Buradan toplam giriş durumundaki toplam cevap önceki cevapların tek tek toplamından oluştuğundan integral operatörü lineer bir sistemdir.

Örnek

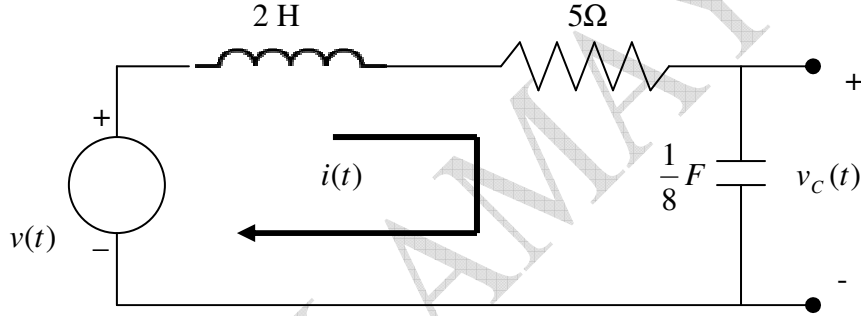
Girişi $x(t)$, çıkışı $y(t)$ olan $y(t) = 3\sin(t)x(t) + x'(t)$ olan sistemin lineerliğini araştırın.

Çözüm

Verilen denklemi $y(t) = \frac{dx}{dt} + 3\sin(t)x(t)$ gibi diferansiyel denklem formunda düzenlersek daha önceden $\frac{dx}{dt}$ gibi bir diferansiyel yani türev operatörünün lineer olduğu ispatlanmıştı. Buna ek olarak denklemde yer alan $3\sin(t)x(t)$ ifadesinin lineerliği de başka bir örnekte gösterilmişti (hatırlatma : $f(t) = x(t)\cos\omega_c t$ örneği). Dolayısıyla $y(t)$ sistem çıkışı iki lineer ifadenin süperpozisyonundan oluştuğu için toplam sistem lineerdir.

Örnek

Aşağıda verilen elektrik devresinin lineerliğini araştırın.



Şekil 30 RLC Elektrik devresi

Çözüm

Başlangıç koşullarının sıfır alındığı Kirchoff kuralı uygulandığında,

$$v_L(t) + v_R(t) + v_C(t) = v(t)$$

$$L \frac{di(t)}{dt} + R i(t) + \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i(\tau) d\tau = v(t)$$

$$2 \frac{di(t)}{dt} + 10 i(t) + \frac{1}{(1/8)} \int_{-\infty}^t i(\tau) d\tau = v(t)$$

$$2 \frac{di(t)}{dt} + 10 i(t) + 8 \int_{-\infty}^t i(\tau) d\tau = v(t)$$

$$\frac{di(t)}{dt} + 5 i(t) + 4 \int_{-\infty}^t i(\tau) d\tau = \frac{1}{2} v(t)$$

Her iki tarafın türevi alınırsa,

$$\frac{d^2 i(t)}{dt^2} + 5 \frac{di(t)}{dt} + 4i(t) = \frac{1}{2} \frac{dv(t)}{dt}$$

biçimindeki genel diferansiyel denklem sistemine dönüşür ki, diferansiyel denklemi oluşturan türev operatörlerinin lineer oldukları daha önce ispatlandığından, diferansiyel denklem ile gösterilen sistemlerin çeşitli dereceli lineer elemanların toplamından oluşan, genel bir lineer sistem olduğunu düşünebiliriz.

8. Sistem Özellikleri

Sistemlerin bellek (belleksiz), nedensel (causal), zamandasn bağımsız (veya bağımlı) ve stabilite özellikleri mevcuttur. Bu özellikteki sistemler aşağıda ele alınmışlardır.

1. Belleksiz sistemler

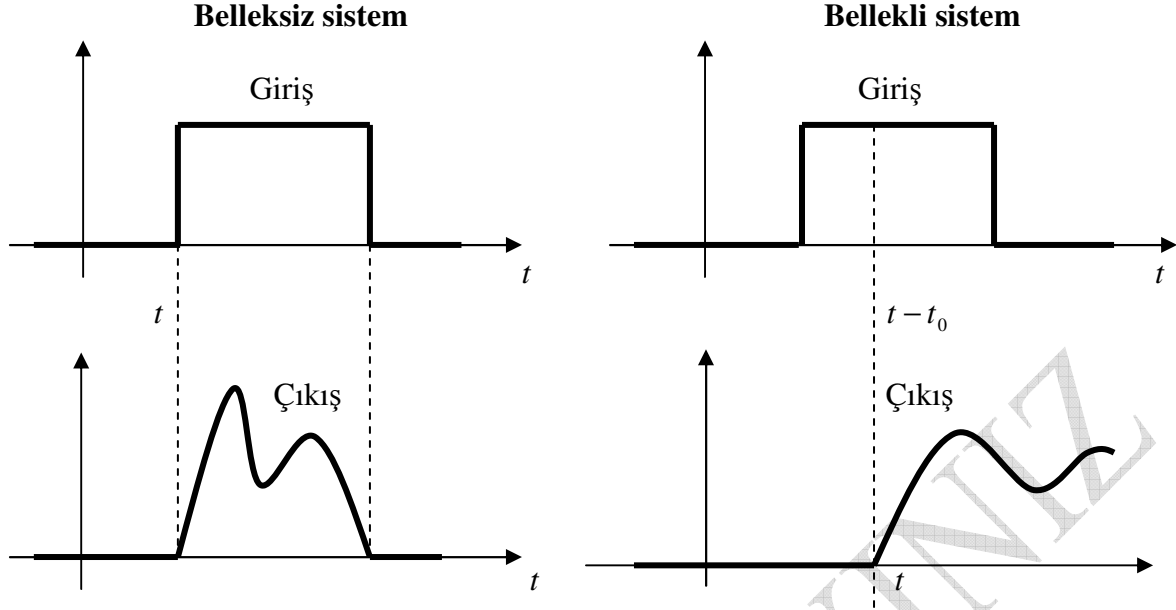
Eğer bir sistemin çıkışı yalnızca girişin yapıldığı andaki ($t = \tau$) değere göre oluşuyorsa, belleksiz (memoryless) sistem söz konusudur. Belleksiz sistemler, yalnızca mevcut andaki “anlık” değerlere göre çalıştığı için anlık anlamına gelen “*instantaneous*” sistemler olarak bilinir ve bu tür belleklerin “*statik*” olduğu kabul edilir.

2. Bellekli sistemler

Bunun tersi olarak sistem çıkışı girişin geçmiş değerlerine göre oluşuyorsa bu tip sistemlere bellekli (memory) sistemler denilmektedir. Belleğe sahip sistemler aynı zamanda *dinamik* olarak da anılmaktadır. Sistem çıkışının girişin yapıldığı andaki değere bağlı olduğu gibi, önceki girişlerde de bağlı olarak değişecek olması bu tip sistemlerin realizasyonu açısından da önemlidir. Çıkışın istisnai olarak girişin gelecekteki değerlere göre belirlenmesi bellekli olması anlamına gelmez. Böyle bir olay kestirim olarak düşünülebilir. Yani girişin belli olmayan gelecekteki değerlerine göre davranış belirlenmesi normal bir durum olmadığı için, bilinen veya deterministik modelden çok ancak kestirim yapılabilir ki, bu durum sistemin bellekli olduğunu göstermez. Bellek özelliğiyle geçmişin hatırlanması amaçlanmaktadır.

$$y(t) = \mathbf{T}x(t) = \begin{cases} \text{belleksiz sistem} & t = \tau \\ \text{bellekli sistem} & t < \tau \end{cases}$$

Mevcut anı gösteren t anındaki sistem çıkışı, bu anı gösterecek $t = \tau$ anındaki giriş değeriyle oluşmuşsa hafızasız (belleksiz, memoryless), eğer t anının geçmişteki değerlerine sahip $t < \tau$ giriş ile oluşuyorsa sistem bellekli (hafızalı, memory) kabul edilir. Bu prensip üzerine kurulu sistemlerin davranışı aşağıdaki şekil üzerinde şematize edilmiştir.



Şekil 31 Bellekli – Belleksiz Sistemler

Görüldüğü gibi ilk şekilde çıkış girişin anlık yani o anki değerlerine göre değiştiğinden belleksiz örneğini vermektedir. İkincide ise çıkış girişin yalnızca önceki yani geçmişteki değerlerine bağlı olarak değişerek bellekli örneğini vermektedir. Şekilden görüldüğü gibi zaman olarak “ t ” anındaki çıkış $y(t)$ iken, bu andaki giriş $x(t - t_0)$ durumundadır. Diğer bir deyişle giriş ve çıkış arasında

$$y(t) = x(t - t_0)$$

Bağıntısı olduğu için, sağ tarafta verilen sistem belleklidir. Çünkü bu sistemde çıkış, girişin t_0 önceki (t_0 kadar geçmişteki) değerlerine bağlı olacağından sistem dinamik, dolayısıyla belleklidir. Örneğin $t = 0$ anındaki sistem çıkışının $y(0) = x(-t_0)$ olması ($t_0 > 0$) sistem çıkışın, girişin t_0 kadar geçmişteki değerine bağlı olduğunu açıkça gösterir. Diğer bir deyişle girişteki herhangi bir olay, t_0 kadar sonra çıkışta görülecektir (bir tür faz kayması gibi). Bellekli sistemler enerji tutma ve depolama (storing) yeteneğindeki dinamik elemanlardan oluşmaktadır. Bu anlamda Endüktans (L) ve kapasitans (C) tipik bellekli elemanlardır. Bunların tersine direnç (R) bellek özelliği olmayan devre elemanıdır.

Örnek

Sistem olarak bir gerilim kaynağını düşünelim. Bir direnç üzerinden akan akımın oluşturduğu gerilim denklemini göz önüne alalım.

$$v(t) = R i(t)$$

Dirençin (R) iki ucu arasındaki gerilim (çıkış) $v(t)$, yalnızca o anki akımın (giriş) $i(t)$ değerine bağlı olarak değişeceğinden, *belleksiz sistem* söz konusudur.

Örnek

Sürekli durumdaki

$$y(t) = x(t)$$

ve ayrık formdaki

$$y[n] = x[n]$$

Fonksiyonlarının her ikisinde de çıkışlar $y(t)$ ve $y[n]$ girişlerin $x(t)$ ve $x[n]$ yalnızca o anki değerleri ile belirlendiğinden belleğe sahip değildirlir.

Örnek

$y(t) = x(t + 5)$ sisteminin bellek durumunu araştırın.

Çözüm

$y(t) = x(t + 5)$ denklemiyle verilen sistem ne bellekli ne de belleksizdir. Çünkü bellekli olması için girişin önceki değerlerine bağlı olması gerekirdi. Belleksiz olması içinse, girişin o anki değerine bağlı olması gerekirdi. Verilen modele bakıldığında, çıkış girişin gelecek değerlerine bağlı görünmektedir. Her ne kadar gelecekle ilgili bir değeri bilebilmek veya saklayabilmek önemli bir özellik ise de, bu tam anlamıyla belleğin fonksiyonuna karşılık gelmez. Bu tahmin veya kestirim denebilecek bir kategoriye girdiği için, “gelecek” bellekli veya belleksiz olarak düşünülemez. Sonuçta verilen sistem tam anlamıyla belleksiz olmasa da, standart anlamında bellek özelliğide göstermediğinden belleksiz sistem olarak kabul edilebilir.

Örnek

$$y[n] = (3x[n] + 2x^2[n])^2$$

Sistem karmaşık gibi görünmesine rağmen $y[n]$ çıkışının değeri yalnızca giriş $x[n]$ nin o anki değerine bağlı olacağından, sistem belleksizdir. Bunu $t = 0$ anındaki çıkıştan da gözlemleyebiliriz.

$$y[0] = (3x[0] + 2x^2[0])^2$$

Görüldüğü gibi, $t = 0$ anındaki çıkış yine $t = 0$ anındaki yani o anki (anlık) girişlerden oluşmaktadır. Bu yüzden sistem belleksizdir.

Örnek

Aynı gerilim kaynaklı sistemde bir kondansatörün iki ucu arasındaki gerilimin elde edilmesi işlemini göz önüne alalım.

$$v(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i(\tau) d\tau$$

Görüldüğü gibi, kondansatörün C uçları arasındaki gerilim değeri $v(t)$, hem o anki “ t ” hemde ondan önceki $t < 0$ ($-\infty$) değerlere bağlı olarak değiştiğinden *bellekli sistem* söz konusur. Bundan dolayı kapasitif elemanlar (aynı zamanda endüktif elemanlarda) enerji tutma özelliklerinden dolayı bellekli sistemlere örnektir. Tutulan enerji miktarı, veriye (data) karşılık geldiğinden, bellek özelliği söz konusudur.

Örnek

$y(t) = x(at)$ sistemini belleksiz/bellek (dinamik) açıdan araştırın.

Çözüm

$y(t) = x(at)$ denklemi yalnızca $a = 1$ için belleksizdir. $a \leq 1$ için bellekli (dinamik), $a > 1$ durumu içinse geleceğe yönelik değerleri tuttuğundan tam anlamıyla olmasa da bir tür bellekli gibi düşünülebilir.

Örnek

$$y(t) = \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} x(\tau)$$

$y(t)$ çıkışı görüldüğü gibi akümülatör özellikli olup, sistem çıkışı $x(\tau)$ giriş işaretinin geçmiş $(-\infty, 0)$ değerlerine göre değişeceğinden belleklidir.

Örnek

$$y[n] = x[n-1]$$

Sistemde çıkış $y[n]$ girişin $x[n]$ geçmiş değerlerine göre çalışabildiğinden, belleğe sahiptir. Bu şekildeki sistem çıkışı gecikmeli (delay) olarak adlandırılır. Çünkü çıkış, bir önceki giriş değeriyle çalışmaktadır.

Örnek

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n-1} x[k] - x[n]$$

Sistemde çıkış $y[n]$ giriş $x[n]$ in geçmiş ve o anki değerlerine göre çalıştığından belleğe sahip sistemler olup “akümülatörler” olarak adlandırılırlar.

Örnek

$$y(t) = y(t-1) + x(t)$$

Bu sistem, eğer giriş-çıkış açısından bakıldığında girişler olarak $y(t)$ ve $y(t-1)$, öte yandan giriş olarak da $x(t)$ düşünüldüğünde, sistemin bellekli olmadığı görülür. Çünkü $x(t)$ giriş elemanı yalnızca anlık bilgi sağlama özelliğindedir. Bundan dolayı çıkış, girişin yalnızca anlık değerlerine göre çalışacağından sistem belleksiz olur.

Ancak $y(t)$ sistem çıkışının verilen denklemde $x(t)$ girişinin yanısıra aynı zamanda $y(t-1)$ elemanı ile çıkışın önceki değerlerine bağlı olduğu durumda göz önüne alınabilir. Sistemin gerçek giriş ile çıkışın önceki değerlerinden oluşan diğer bir girişi düşünüldüğü vakit $y(t-1)$ elemanından dolayı sistem bellekli olur. Bu durumda $y(t-1)$ elemanının yalnızca çıkış veya bir tür giriş olması kabule bağlı olarak değişir. Çıkışın önceki değerlerinin mevcut çıkışa ilave edilmesi, bir tür giriş olarak düşünülebilir. Bu taktirde sistem bellekli kabul edilir. Ancak sistemdeki çıkış ile ilgili tüm elemanlar çıkışa ait düşünüldüğü vakit, verilen örneğe göre sistem belleksiz olur. Toparlarsak, $y(t-1)$ in bir tür giriş düşünülmesi yaklaşımının tutarlı olabileceği görüldüğünden sistem bellekli kabul edilebilir.

Örnek

$y(t) = u(t-1) + 2u(t) + 3u(t+2)$ Sisteminin bellek özelliğini araştırın.

Çözüm

Burada sistemdeki fonksiyonlara sıradan ve sıradışı/özel fonksiyonlar açısından bakılarak iki türlü değerlendirme yapılabilir. Birinci yoruma bakalım.

Verilen denklem geçmiş $u(t-1)$ ile bellek, mevcut an $2u(t)$ ile belleksiz özellik göstermektedir. Ancak denklemdeki üçüncü terim olan $3u(t+2)$ ifadesi, geleceğe dönük olduğundan, verilen $y(t)$ sisteminin bellek ve belleksizlik özelliğini etkilemektedir. Geleceğe dönük terimden dolayı, komple sistemin bellek/belleksizlik özelliğinden söz etmek mümkün değildir.

İkinci yorumda verilen sistemdeki fonksiyonların $u(t-1)$, $u(t)$ ve $u(t+2)$ olarak tamamının aslında $u(t)$ tipli birim basamak fonksiyonlarının çeşitli versiyonları olduğunu görmekteyiz. Birim basamak fonksiyonunun tanımını hatırlarsak,

$$u(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

Buna göre değerlendirme yapılırsa, örneğin $t = 0$ anındaki $y(0)$ sistem çıkışını hesaplamaya çalışalım.

$$y(0) = u(0-1) + 2u(0) + 3u(0+2) = u(-1) + 2u(0) + 3u(2) = 0 + 2 \times 1 + 3 \times 2$$

durumu ortaya çıkar. Her ne kadar $t = 0$ anındaki $y(0)$ çıkışı, girişin $u(-1) + 2u(0) + 3u(2)$ gibi basamak fonksiyonu yapısındaki hem o an ki (0), hem geçmiş (-1) hem de gelecek (2) değerlerine bağlı görünse de, bu fonksiyonlar aslında geçmiş ve o anki değerler olarak yalnızca (0 ve 1) üreteceğinden böyle bir sistem bellekli olur.

Örnek

$y(t) = \frac{dx(t)}{dt}$ sistemi bellek özelliğini araştırın.

Çözüm

Verilen diferansiyel denklemi değişimleri göstermek üzere,

$$y(t) = \frac{dx(t)}{dt} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$$

olarak gösterdiğimizde x_2 gibi anlık değer yanı sıra x_1 gibi de geçmişteki değerlere göre değişimin olması sebebiyle verilen türev alıcı sistem bellekli sistemdir. Öte yandan sistem bir diferansiyel denklem gibi görüldüğünden, bunu Laplace domenine uygun hazırladığımızda

$$\left(\frac{dx}{dt} = sX(s) - sX(0^-) \right) \text{ ve } y = Y(s),$$

$$Y(s) = sX(s) - sX(0^-)$$

yaklaşımından sistem çıkışının, girişin o anki ve sıfırdan önceki başlangıç koşullarına göre belirlenmesinin söz konusu olduğu belirtiliyor. Başlangıç koşulları geçmişteki değerler gibi düşünülebileceğinden, bu yolla da sistemin bellekli olduğu düşünülebilir.

Örnek

$y(t) = \int x(t) dt$ Sisteminin bellek özelliğini araştırın.

Çözüm

Türev operatörünün bellek özelliği olduğuna göre, aynı paraleldeki integral alıcı operatörün de bellek özelliğine sahip olması tutarlıdır. Daha önceki örneklerde, kondansatörlü bir devreyle ilgili olarak yazılan ifadenin

$$v(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i(\tau) d\tau$$

olduğunu biliyoruz. Görüldüğü gibi, $\tau = (-\infty, t)$ olarak $-\infty$ dan (geçmiş), t anına (mevcut an) kadarki bir süreci geçmişten mevcut ana kadar sahip olduğu verileri işleyebilme yeteneği olduğu görülmektedir. Diğer yandan yine integral denklemlerinde aşağıdaki yapıda görülen

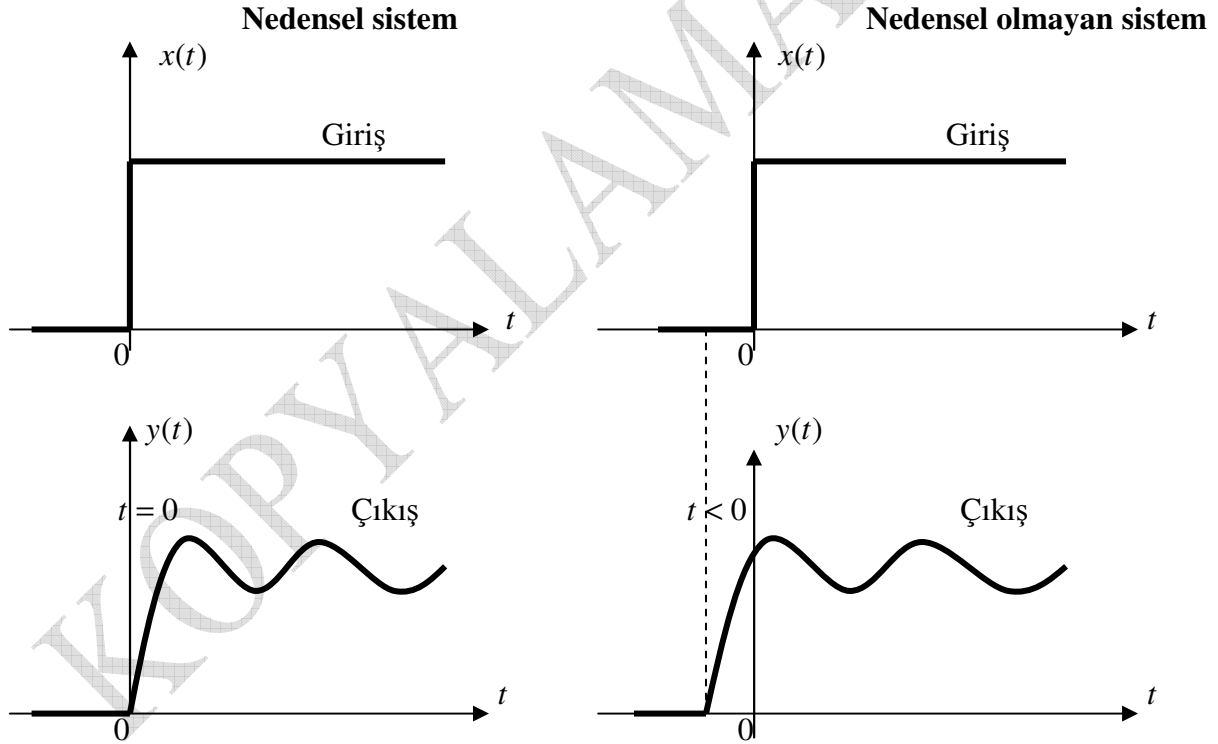
$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)dt + y(0)$$

gösterimde ise $y(0)$ başlangıç koşullarının dikkate alındığını görmekteyiz. Başlangıç koşullarının, bir tür geçmişe dair veriler olduğunu düşünürsek, integratörün bellek özellikli olduğu ortaya çıkar.

9. Nedensel (causal) ve Nedensel Olmayan (noncausal) Sistemler

Eğer bir sistemin herhangi bir andaki çıkışı $t = t_0$, yalnızca girişin o anki ve geçmişteki değerlerine $t \leq t_0$ bağlı olarak değişiyorsa, causal sistemler mevzu bahistir. Bu, zamandan bağımsız ve bağımsız olmayan tüm sistemleri içeren bir tanımdır. Causal olmayan sistemlere causal olmayan sistemler denir. Şimdi bu kısa bilgileri biraz açalım. Aşağıdaki şema üzerinde causal durum oldukça açık görülmektedir.

Örnek 1

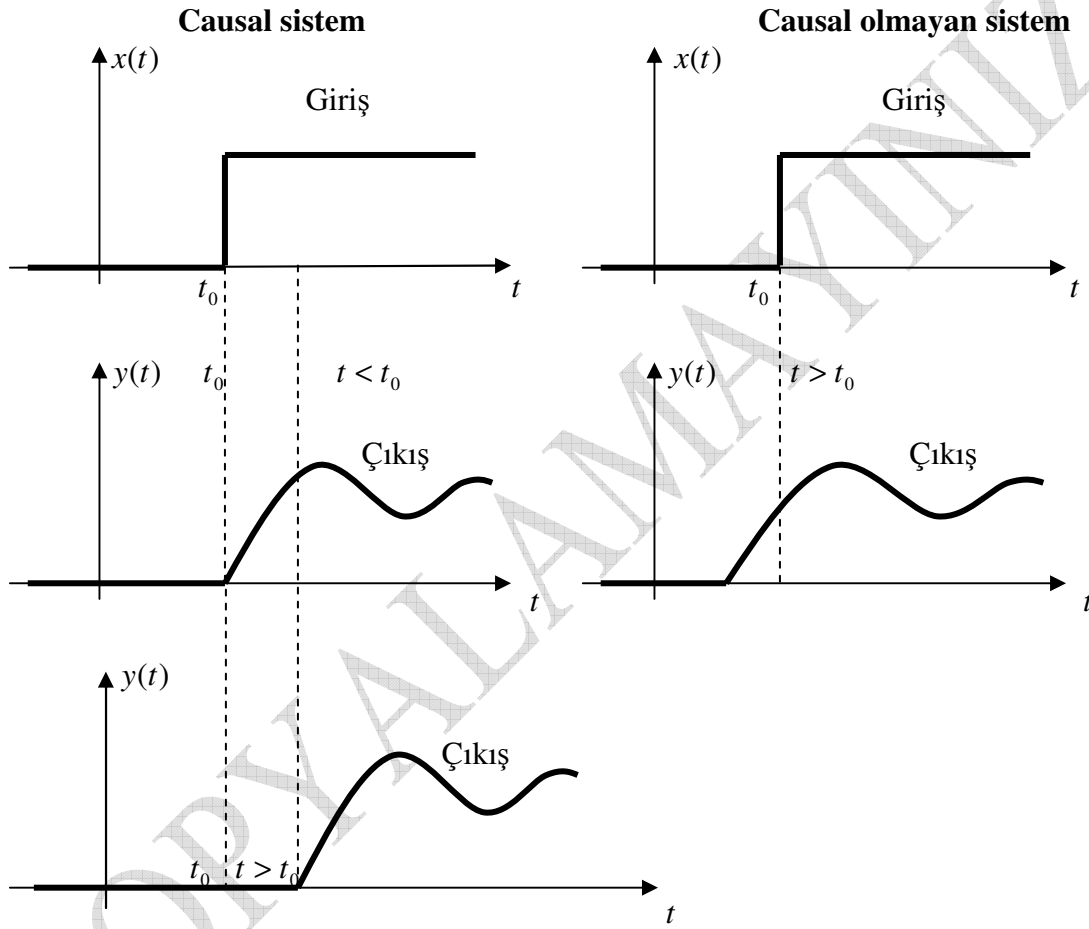


Şekil 32 Nedensel ve nedensel olmayan sistemler

Şekilden nedensel (causal) seçenekten görüldüğü gibi, $t < 0$ giriş yok ($x(t) = 0$, $t < 0$), bu nedensel işaretin gereğidir. Bunun anlamı sisteme girişler $t = 0$ anından itibaren yapılmaktadır. Diğer yandan, nedensel seçenekte çıkış olarak da bakıldığında, $y(t)$ sistem çıkışı da $t = 0$ veya $t > 0$ anından itibaren cevap üretmektedir. Nedensel durumda, sistem kendisine giriş yapıldığı andan itibaren, cevap üretmektedir ($y(t) = 0$, $t < 0$). Bu da, nedensel (causal) sistemin tanımıdır.

Öte yandan, nedensel olmayan (noncausal) seçeneğe bakıldığında sistem giriş işaretinin nedensel işaret olduğu ($x(t) = 0, t < 0$), ancak çıkışın farklı olduğu ($y(t) \neq 0, t < 0$) görülmektedir. Yani sisteme giriş olmadığı halde bile sistem cevap üretmektedir ki, bu durum lineer ve gerçekleştirilebilir bir sistem tanımından uzaktır. Dolayısıyla sağ taraftaki $x(t) - y(t)$ çıkışına göre sistem, nedensel değildir. Daha sonraki bölümlerde göreceğimiz gibi, nedensel bir durumda lineer zamandan bağımsız bir sistemin $h(t)$ sistem impuls cevabının sıfır anından önceki durumlar için sıfır olması gerekirdi ($h(t) = 0, t < 0$). Bu nedenle ikinci şekildeki $x(t) - y(t)$ sistemi nedensel değildir.

Örnek 2



Şekil 33 Causal ve causal olmayan sistemler

Şekilden de görüldüğü gibi causal bir sistemin, girişin o anki ve o andan önceki (geçmiş) değerleri ($t \leq t_0$) için çıkış üreten bir sistem olduğunu biliyoruz. Girişin gelecekteki değerleri için bir sonuç üretememektedir.

Yani sisteme giriş olmadan, sistemin çıkış üretmesi, casual yaklaşımla bağdaşmaz ve casual olmayan sistem olarak anılır. Buna göre sisteme giriş olmadan sistemin reaksiyonu beklenemez. Eğer böyle bir durum varsa zaten causal olmayan yani noncausal sistemler ($t \geq t_0$) söz konusu olur ve bunların gerçekleşmeleri mümkün değildir. Pratikteki sistemler causal dir. Causal sistem giriş uygulanmadan çalışmaya başlayamaz. Bunun anlamı eğer $h(t)$ sistem impuls cevabı ise, sisteme giriş olmadan sistemin çıkış üretmesini istemiyorsak, nedensellik (casualite) koşulu olarak bilinen

$$h(t) = 0, \quad t < 0$$

koşulunun sağlanması gerekiyor, yani sisteme giriş yoksa sistemin impuls cevabı sıfır olmalıdır.

NOT : Eğer bir sistem sukunet halindeyse, çıkışı sıfır olacaktır ($y(t) = 0$). Bu andaki sistem impuls cevabı da sıfır olacaktır ($h(t) = 0, t < 0$). Çünkü bu andaki sistem girişi $\delta(t)$ impulsu olacağından, $t < 0$ için $\delta(t) = 0$ olacağından, bu impuls girişine karşı gelen sistemin cevabı olan sistem impuls ($h(t) \leftarrow \delta(t)$) cevabı da sıfır olacaktır. Bu nedenle nedensel (causal) sistemler için daima $h(t) = 0, t < 0$ koşulu aranır. Bununla sisteme giriş olmadan sistemin cevap üretmesi beklenmez. Çünkü sistem girişi olan $\delta(t)$, $t < 0$ için daima $\delta(t) = 0$ dır.

Bunun gereğini aşağıdaki sistem cevabını sağlayan konvülyasyon denkleminde de teyit etmek mümkündür.

$$y(t) = f(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau$$

Sonradan göreceğimiz gibi bu koşul aynı zamanda **lineer ve zamandan bağımsız (LTI) sisteminde** gereğidir. Eğer giriş uygulanmadan sistem çalışmaya başlıyorsa bunun anlamı, sistem girişin gelecekteki değerlerini biliyordur ona göre çalışıyordur. Noncausal sistem $t = 0$ anındaki girişe rağmen gelecekteki veya geçmişteki değerleri göz önüne alarak onları yine $t = 0$ anında icra edebilir. **Örneğin** $f(t)$ girişi bir sisteme $t = 0$ anında uygulanırsa, sistem çıkışı $y(t)$

$$y(t) = f(t) + f(t-1) + f(t+1)$$

olarak çalışabilir. Burada $t = 0$ anındaki girişe karşın sistem girişin önceki değeri $f(t-1)$ ve sonraki (gelecekteki) $f(t+1)$ girişine göre çalışabilir görünmektedir. Bunun özellikle gerçek zamanlı (real time) sistemlerde uygulanması mümkün değildir. Çünkü bu sistemlerde sistem o anda girişin 1 saniye önceki değerini $f(t-1)$ bildiği gibi, girişin yine 1 sn sonraki $f(t+1)$ değerinin bilmesi mümkün olmadığından realize edilemezler, bu beklenebilir bir şey değildir. Ancak kesin olmayan tahmine dayalı bir takım istatistiksel veya kestirim teorileri ile belki mümkün olabilir ki, bu da lineer system teorisinin konusu dışındadır. Verilen örnek göz önüne alındığında $t = 0$ anındaki sistem çıkış denklemini düşünelim.

$$y(0) = f(0) + f(-1) + f(1)$$

Sistem çıkışını, girişin üç terimine bağlı olarak değerlendirelim. Buna göre ilk olarak $y(0)$ çıkışının $f(0)$ girişine bağlı olması normaldir. Bunun anlamı çıkış, girişin o anki (present time, current time) değerine bağlıdır. Yani çıkış, giriş yapıldığı andaki değere bağlı görülmektedir ki bu doğaldır.

Buna göre $y(0)$ çıkışının $f(-1)$ girişine bağlı olması normaldir. Bunun anlamı çıkış, girişin bir önceki (geçmiş) değerine bağlıdır. Yani girişin etkisi çıkışta bir birim zaman sonra görülmektedir ki, bu gecikme sistemlerin kendi cevaplarını üretmesi için gereklidir veya iletim ortamının mesafesinden kaynaklanan sebebe bağlı olarak doğaldır.

Ancak $y(0)$ çıkışının $f(1)$ girişine bağlı olması normal değildir. Çünkü bu durumda çıkış, girişin bir sonraki yani gelecekteki değerine bağlıdır ki, bu özellikle gerçek (lineer zamandan bağımsız, LTI) sistemler için mümkün değildir. Pratik açıdan şöyle düşünülebilir; ikinci saniyedeki sistem çıkışı $y(2)$, üçüncü saniyedeki sistem girişiyle $x(3)$ belirlenecektir.

Bunun mümkün olamayışı, nedensel olmama gereğiyle örtüşmektedir [$y(2) \neq x(3)$]. Sistem çıkışının, henüz mevcut olmayan girişe göre belirlenmesi mümkün değildir.

Bunların ışığında durumu şöyle toparlayabiliriz. Bir kişinin bir işteki yükselmesi veya ödüllendirilmesi, kişinin mevcut veya geçmişteki performansına bağlı olacaktır. Gelecekteki performansı göz önüne alarak bir ödüllendirme veya terfi ettirme düşünülemez. Bunların ışığında ortaya çıkan önemli bir tespit vardır.

Tespit 1 : Gerçek sistemler daima nedenseldir.

Buna ek olarak nedensel ve bellekli sistemlerle ilgili bir ikinci tespit daha bulunulabilir.

Tespit 2: Nedensel (causal) sistemler aynı zamanda bellekli sistemler olmakla beraber bunun tersi doğru değildir. Yani bellekli sistemler yalnızca geçmişe dair bilgiyle çalıştıkları için aynı zamanda nedensel (causal) değildirler.

LTI Sistemlerinin Nedenselliği (causality)

Causal sistemin çıkışının, girişin o anki ve geçmiş değerlerine bağlı sistemler olduğunu biliyoruz. Burada farklı olarak causality durumunu bu kez sistem impuls cevabı olan $h(t)$ veya $h[n]$ yi göz önüne alarak değerlendireceğiz. Eğer sistem impuls cevabı $h(t)$ veya $h[n]$ olan bir LTI sistemin girişinin $x(t)$ veya $x[n]$ olması durumunda $y(t)$ veya $y[n]$ çıkışının causal olabilmesi için ilgili convolution ($x(t)*h(t)$ veya $x[n]*h[n]$) işleminin sürekli ve ayrık-zaman formlarının sırasıyla

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau = x(t) * h(t)$$

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] h[n - k] = x[n] * h[n]$$

olduğunu biliyoruz. İlgili denklemlere göre sürekli LTI sistemlerin causal olabilmesi aşağıdaki koşuldan geçmektedir.

$$h(t) = 0 \quad t < 0$$

Bu koşulun dikkate alınabilmesi için girişin casual işaret olması yani giriş işaretinin başlangıç anı olarak $t = 0$ alınması gerektiğini görmekteyiz. Bunun lineer sisteminde bir gereği olduğu düşünülebilir. Çünkü lineer bir sistemde girişin sıfır ($x(t) = 0$) olduğu, yani sisteme giriş olmadığında çıkışında sıfır olması $y(t) = 0$ kabulü ve gereği vardır. Bunu sağlamak adına sistem girişi $t = 0$ anından itibaren düşünülür. Bu andan önceki $t < 0$ yani girişin olmadığı anlar için lineer sistemin cevap üretmesi istenmeyeceğinden, $t < 0$ durumundaki $x(t)$ girişininin sistem çıkışından bir cevaba sebebiyet vermemesi için $h(t)$ sistem impuls cevabı mutlaka sıfır olmalıdır ($h(t) = 0, t < 0$). Eğer sistem toplam cevabı

$$y(t) = \underbrace{[(D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \dots + a_1D + a_0)y(t) = 0]}_{\substack{\text{başlangic kosullari mevcut,} \\ x(t)=0}} + \underbrace{x(t) * h(t)}_{\substack{\text{başlangic kosullari } =0}}$$

olarak düşünülürse, $h(t) = 0$ $t < 0$ causalite koşulunun ikinci terim (başlangıç koşullarının sıfır alındığı) yani “sıfır-durum cevabı (zero-state response)” için geçerli olduğunu bilelim.

Birinci ifadede yer alan sistem cevabı, sistem başlangıç koşullarını göz önüne alan (sıfırdan önceki girişleri, $t < 0$), “sıfır-giriş cevabı (zero-input response)” durumdaki sistem çıkışıdır. Diğer bir deyişle bu cevap, $h(t)$ sistem impuls cevabının dikkate alınmadığı cevaptır. Eğer $h(t)$ sistem impuls cevabına göre değerlendirme yapılacaksa, örneğin lineerlik veya casualite araştırılacaksa, $y(t)$ toplam cevabında “sıfır-durum cevabı” olarak görülen $x(t) * h(t)$ konvülyasyon şeklinde görülen ikinci ifadenin dikkate alınması gerekecektir. Bu aynı zamanda $t = 0$ anından itibaren girişin olduğu (başlangıç koşullarının sıfır olduğu), zorlanmış cevap olarak da düşünülebilir.

Örnek

$y(t) = 5x(t) - 7$ sistemin nedenselliğini $x(t) = 0$ giriş koşuluyla inceleyin

Çözüm

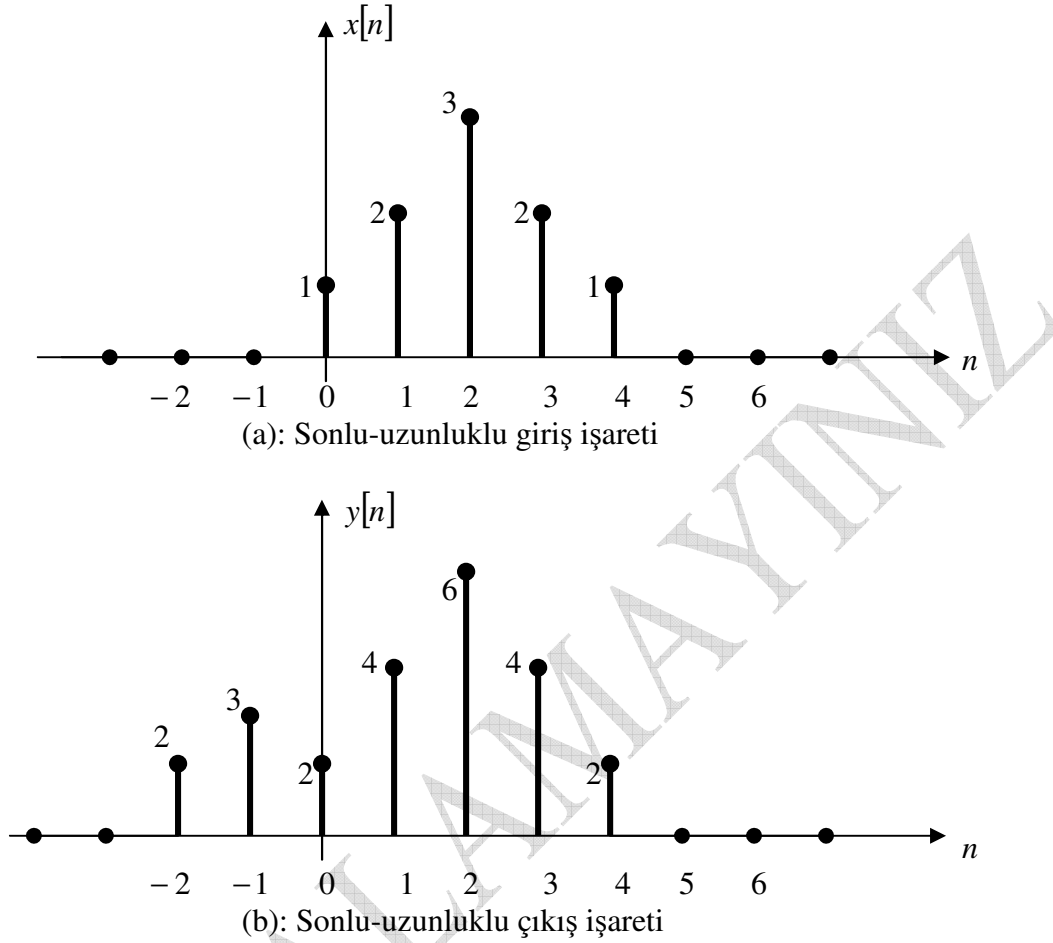
Eğer sistem girişi sıfır, $x(t) = 0$ ise sistem çıkışı

$$\begin{aligned} y(t) &= 5x(t) - 7 = 5 \cdot 0 - 7 \\ &= -7 \end{aligned}$$

olur. Normalde giriş $x(t) = 0$ için çıkışın $y(t) = 0$ olması gerekirdi. Ancak görüldüğü gibi sisteme giriş yapılmamasına rağmen çıkışta bir değer gözlemlenebilmektedir. Böyle bir sistemin causal olması beklenemez. Giriş olmamasına $[x(t) = 0]$ rağmen elde edilen $y(t) = -7$ çıkışının sebebi sistemdeki başlangıç koşullarının varlığıyla açıklanabilir.

Örnek

Aşağıda $x[n]$ giriş ve $y[n]$ çıkışlarına göre sistemin nedenselliğini araştırın.



Şekil 34 Sonlu uzunluklu sistem giriş – çıkış işareti

Çözüm

Karşımızda farklı olarak ayırık (discrete) bir örnek vardır. Eğer (a) daki $x[n]$ sistem girişi incelendiğinde, sistemin $x[n]=0$, $n < 0$ sağladığını, yani sistemin sıfır başlangıç noktasından önce girişinin olmadığı görülmektedir. Bu açıdan tipik nedensel (causal) işarettir. Ancak $y[n]$ sistem cevabı yani çıkışı incelendiğinde, $y[n] \neq 0$, $n < 0$ olduğu yani, sıfır başlangıç anından önce de sistemin bir cevabı olduğu görülmektedir ($y[-2]=2$ ve $y[-1]=3$). Üstelik $x[n]=0$, $n < 0$ olmasına yani, sisteme bir giriş olmamasına rağmen, sistem bir çıkış üretmektedir. Bu durum pratik açıdan, gerçekleştirilebilir bir sistemden uzak bir durumdur. Gerçekleştirilebilir sistemler, kendilerine giriş yapıldığı andan itibaren, cevap üreten sistemlerdir. Bu açıdan verilen sisteme ait giriş-çıkış $x[n]-y[n]$ dağılımına göre, sistem nedensel değildir (noncausal). Daha sonra da göreceğimiz gibi sistemin nedensel olması için lineer zamandan bağımsız (LTI) sistemlerin $h[n]$ impuls cevabının sıfır anından önce, sıfır olması ($h[n]=0$, $n < 0$) durumu, nedenselliği en iyi açıklayan kriterdir.

Örnek

$$y[n] = x[n-1] + x[n]$$

Çıkış $y[n]$ girişin $x[n]$ geçmiş ve o anki değerlerine göre çalışabildiğinden *causal*dir ve aynı zamanda belleğe sahiptir. Bu sistemin aynı zamanda akümülatör sistem olabileceğide görülmektedir.

Örnek Aşağıdaki sistemin nedenselliğini inceleyiniz.

$$y(t) = x(t+1)$$

Çıkış $y(t)$, girişin $x(t)$ gelecek değerlerine bağlı olduğundan sistem *causal değildir*.

Örnek

Aşağıdaki sistemi inceleyiniz

$$y(t) = x(-t)$$

Çıkış $y(t)$, girişin $x(-t)$ geçmiş değerlerine bağlı olduğundan sistem *causal değildir*. Çünkü her ne kadar girişin $t > 0$ değerleri için (nedensel) *causal* görünsede $t < 0$ için geleceğe dönük değerleri hesaba katacağından *causal olmayan* sistem söz konusu olacaktır.

Örnek

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^n x[k] \text{ sisteminde}$$

$y[n]$ çıkışı görüldüğü gibi giriş $x[k]$ işaretinin geçmiş $(-\infty, 0)$ ve o anki $(0, \infty)$ değerlerine bağlı olarak değiştiğinden nedensel (*causal*) ve aynı zamanda belleklidir.

Örnek

$$y(t) = x(t^2)$$

Sisteminde çıkış $y(t)$, girişin $x(t)$ gelecekteki $y(2) = x(4)$; $y(-3) = x(9)$, ... değerlerine bağlı değişeceğinden sistem nedensel (*causal*) değildir. Eğer sistem $y(t) = x^2(t)$ olsaydı nedensel olabilirdi.

Örnek

$$y(t) = x(t) \cos(t+1)$$

Sistemi iki fonksiyonun çarpımı durumundadır. Çıkış bu durumda yalnızca giriş $x(t)$ nin o anki değerine bağlı değişeceğinden *causal*dir. Fakat görüldüğü gibi yalnızca o anki giriş değerleriyle değiştiğinden aynı zamanda **bellekli değildir** (memoryless).

Örnek

$y(t) = \int_{-\infty}^t x(7\tau) d\tau$ Sistemin nedenselliğinin (causalitesini) araştırılalım

Çözüm

Sistemin geçmişten mevcut ana kadar ki süreci $\tau = (-\infty, t)$ olarak göstermesi her ne kadar causaliteyi gösterse de böyle bir aralık için integrasyonda yer alan $x(7\tau)$ girişindeki “7” faktörü, sistemin gelecekle ilgili değerleride göstermesinden dolayı sistem causal değildir.

Diferansiyel Denklem Sistemlerinin Nedenselliği

Nedensel bir sistem, çıkışın girişin önceki veya o anki değerlerine bağlı cevap üretmesi olarak tanımlanmıştır. Buna göre,

$$y(t) = x(t) + x(t-2)$$

sisteminde çıkış, girişin o anki ve bir önceki değerlerinin toplamıyla elde edilmektedir. Öte yandan,

$$y(t) = x(t) + x(t+2)$$

sisteminde $x(t+2)$ terimi, çıkışın 2 birim sonraki değerini gösterdiğinden, çıkışın gelecekteki bu durumunu değerlendirmek mümkün değildir, en azından realize edilebilir sistemler için bunun pratikte mümkün olmadığını bilmekteyiz. Bu nedenle son denklem ile verilen sistemin nedensel olmadığını (noncausal) söyleyebiliriz.

Şimdi diferansiyel denklem sistemleriyle gösterilen sistemlerin benzer nedensel durumunu ele almak istiyoruz. Bir sistem diferansiyel denklem ile gösterilebiliyorsa, böyle bir sistem lineer ve zamandan bağımsız olduğuna göre, aynı zamanda nedensel özelliğide ele alınabilir. Bu bölümde bu tür sistem örnekleri ele alınacaktır.

Şimdi diferansiyel denklem sistemleriyle gösterilen sistemlerin benzer nedensel durumunu ele almak istiyoruz. Bir sistem diferansiyel denklem ile gösterilebiliyorsa, böyle bir sistem lineer ve zamandan bağımsız olduğuna göre, aynı zamanda nedensel özelliğide ele alınabilir. Bu bölümde bu tür sistem örnekleri ele alınacaktır.

$f(t)$ sistem girişi ve $y(t)$ sistem çıkışı olmak üzere bir lineer zamandan bağımsız sistemin diferansiyel denklemle gösteriminin aşağıdaki gibi olduğunu düşünelim.

$$\begin{aligned} a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + a_{n-2} \frac{d^{n-2} y}{dt^{n-2}} + \dots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y(t) \\ = b_m \frac{d^m f}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} f}{dt^{m-1}} + b_{m-2} \frac{d^{m-2} f}{dt^{m-2}} + \dots + b_1 \frac{df}{dt} + b_0 f(t) \end{aligned}$$

Diferansiyel operatör

$$D = \frac{d}{dt}$$

olarak tanımlanırsa, sistem aşağıdaki gibi oluşur.

$$(a_n D^n + a_{n-1} D^{n-1} + a_{n-2} D^{n-2} + \dots + a_1 D + a_0) y(t) \\ = (b_m D^m + b_{m-1} D^{m-1} + b_{m-2} D^{m-2} + \dots + b_1 D + b_0) f(t)$$

Buradan gerekli düzenlemeler aşağıdaki gibi yapılır

$$Q(D) = a_n D^n + a_{n-1} D^{n-1} + a_{n-2} D^{n-2} + \dots + a_1 D + a_0$$

$$P(D) = b_m D^m + b_{m-1} D^{m-1} + b_{m-2} D^{m-2} + \dots + b_1 D + b_0$$

$$Q(D)y(t) = P(D)f(t)$$

$$Q(D)y(t) = (a_n D^n + a_{n-1} D^{n-1} + a_{n-2} D^{n-2} + \dots + a_1 D + a_0) y(t) \\ = a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + a_{n-2} \frac{d^{n-2} y}{dt^{n-2}} + \dots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y(t)$$

$$P(D)f(t) = (b_m D^m + b_{m-1} D^{m-1} + b_{m-2} D^{m-2} + \dots + b_1 D + b_0) f(t) \\ = b_m \frac{d^m f}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} f}{dt^{m-1}} + b_{m-2} \frac{d^{m-2} f}{dt^{m-2}} + \dots + b_1 \frac{df}{dt} + b_0 f(t)$$

$Q(D)y(t) = P(D)f(t)$ denklemine göre eğer

$$\frac{y(t)}{f(t)} = \frac{P(D)}{Q(D)}$$

düzenlenirse, LTI sistemde çıkışın giriş oranı olarak

$$\frac{y(t)}{f(t)} = \frac{P(D)}{Q(D)} = \frac{b_m D^m + b_{m-1} D^{m-1} + b_{m-2} D^{m-2} + \dots + b_1 D + b_0}{a_n D^n + a_{n-1} D^{n-1} + a_{n-2} D^{n-2} + \dots + a_1 D + a_0}$$

denklemini elde edilir. Burada önemli olan diferansiyel denklem sistemine ait m ve n derecelerinin belirlenmesidir. Bu konuda üç durum söz konusudur.

1) $n > m$ durumu : tam nedensel (strictly proper) sistem.

Bu genellikle $t < 0$ için $h(t) = 0$ nedensellik koşulunu sağlayan ideal LTI sistemler için beklenen hatta olması gereken bir durumdur. Böyle bir durumda $h(t)$ sistem impuls cevabı

$$h(t) = b_n \delta(t) + [P(D)y_n(t)]u(t)$$

olarak elde edilir. Dikkat edilirse böyle bir sistem impuls cevabına sahip sistem her durumda $t < 0$ için $h(t) = 0$ nedensellik koşulunu sağlar. Çünkü $t < 0$ için $u(t) = 0$ ve $\delta(t) = 0$ olacağından sonuçta $h(t) = 0$ olacaktır. Ayrıca bu durumda $n > m$ koşulundan dolayı $b_n = 0$ olacağı açıktır. Söz konusu b_n nin, diferansiyel denklem sisteminin sağ tarafındaki katsayı olup, sistemin sol tarafındaki n .ci katsayı pozisyonunda olduğu dikkatlerden kaçmamalıdır. Örneğin $n > m$ koşuluna uygun olarak ($n = 2, m = 1$) gibi olması durumunda $b_2 = 0$ olacağı açıktır. Çünkü sistemin sağ tarafında girişe ait ifadede b_2 katsayısını içeren terim mevcut değildir. Bu durumda sistem impuls cevabı aşağıdaki formda olacaktır.

$$h(t) = [P(D)y_n(t)]u(t)$$

2) $n = m$ durumu : nedensel (proper) sistem.

Bu durumda da ideal LTI sistemler için $t < 0$ için $h(t) = 0$ nedensellik koşulu sağlanmaktadır, k, bu da beklenen ve olması gereken bir durumdur. Böyle bir durumda $h(t)$ sistem impuls cevabı aynı biçimde

$$h(t) = b_n \delta(t) + [P(D)y_n(t)]u(t)$$

elde edilir. Çünkü bu durumda da $t < 0$ için $u(t) = 0$ ve $\delta(t) = 0$ olacağından sonuçta $h(t) = 0$ olacaktır. Tek fark dikkat edilirse böyle bir durumda yukarıdaki $n > m$ koşulundan farklı olarak $b_n \neq 0$ olacağından işin içine ideal $\delta(t)$ impuls fonksiyonu da dahil olacaktır.

3) $n < m$ durumu : nedensel olmayan (improper) sistem.

Bu durumda genellikle $t < 0$ için $h(t) = 0$ nedensellik koşulu sağlanamamaktadır. Böyle bir durumda $h(t)$ sistem impuls cevabı

$$h(t) = P(D)[y_n(t)u(t)]$$

olarak elde edilir. Dikkat edilirse böyle bir durumda parantez içersinde görülen $y_n(t)u(t)$ ifadesinin $P(D)$ gereği yüksek dereceli türevleri alınacağından $h(t)$ ifadesinin içinde $\delta(t)$ fonksiyonunun $\delta'(t)$, $\delta''(t)$ ve $\delta'''(t)$ gibi türevleri söz konusu olacaktır. $\delta(t)$ fonksiyonunun türevleri sıfır noktası hariç her yerde belirsiz olacağından,

$$\frac{d\delta}{dt} = \frac{d^2\delta}{dt^2} = \frac{d^3\delta}{dt^3} = \dots = \frac{d^{m-1}\delta}{dt^{m-1}} = \frac{d^m\delta}{dt^m} = \text{belirsiz}, \quad (t = 0) \text{ hariç}$$

$n < m$ durumunda $h(t) = P(D)[y_n(t)u(t)]$ de görülen $u(t)$ birim basamak fonksiyonunun türevi

$$\delta(t) = \frac{du}{dt}$$

olduğundan ve bu şekilde

$$\left[\frac{du}{dt} \right]^m = \frac{d^{m-1} \delta}{dt^{m-1}}, \quad (m \geq 2)$$

gibi yüksek dereceli türevler alınması gerekebileceğinden, $h(t)$ içinde $\delta'(t)$, $\delta''(t)$ ve $\delta'''(t)$ gibi terimleri içeren $h(t)$ fonksiyonu $h(t) \rightarrow$ belirsiz (sonsuz) olacağından ($t < 0$ için $h(t) = 0$) koşulu sağlanamayacaktır.

$$(m \leq 1) \text{ için } \frac{d^m \delta}{dt^m} = \text{belirsiz}, \quad (t = 0) \text{ hariç}$$

Bu nedenle diferansiyel denklem sistemlerinde $n < m$ koşulu sistemi belirsizliğe sürüklemesinden dolayı istenmeyen durum olarak kabul edildiğinden, uygulamalarda genellikle $n > m$ veya $n = m$ durumları tercih edilir.

Örnek-1 ($n > m$)

Aşağıdaki gibi lineer denklem sistemiyle tanımlanmış $f(t)$ sistem girişi ve $y(t)$ sistem çıkışı olan bir lineer zamandan bağımsız sistemin $h(t)$ impuls cevabını bulun.

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + 3 \frac{dy}{dt} + 2y(t) = \frac{df}{dt}$$

Çözüm-1

Diferansiyel denklem sistem incelendiğinde sistemin $n > m$ ($n = 2, m = 1$) koşuluna uygun olduğu görülmektedir. Denklem $D = d/dt$ diferansiyel operatörüne göre düzenlenirse,

$$(D^2 + 3D + 2)y(t) = Df(t)$$

Bu durumda kullanılacak sistem impuls cevabının ifadesi

$$h(t) = b_n \delta(t) + [P(D)y_n(t)]u(t)$$

gibi olacaktır. $n = 2$ olduğundan sağ taraftaki giriş ifadesine ilişkin b_2 terimi olmadığından yani $b_n = b_2 = 0$ olduğundan sistem impuls cevabı aşağıdaki gibi olacaktır.

$$h(t) = [P(D)y_n(t)]u(t)$$

Denklemdaki $P(D)$ diferansiyel denklem sisteminin sağ tarafını (df/dt) gösterirken, aynı denklemde yer alan $y_n(t)$ ise, sistemin başlangıç koşullarına göre yani sisteme dışarıdan girişin olmadığı ($f(t) = 0$) durumdaki sistem cevabıdır. Buna göre öncelikle $f(t) = 0$ için $y_n(t)$ cevabını bulmaya çalışalım. Bunun için $y_n(0) = 0$ ve $\dot{y}_n(0) = 1$ başlangıç koşullarının verildiğini kabul edelim. Bu durumda sistem cevabı

$$y_n(t) = c_1 e^{-\lambda_1 t} + c_2 e^{-\lambda_2 t}$$

olarak göz önüne alınacaktır. Buna uygun $(D^2 + 3D + 2)y(t) = Df(t)$ sistemi $f(t) = 0$ için $(D^2 + 3D + 2)y(t) = 0$ karakteristik denklemi $Q(\lambda)y(t) = 0$ gereği λ parametresine göre aşağıdaki gibi oluşturulup çözülecektir.

$$(\lambda^2 + 3\lambda + 2) = (\lambda + 1)(\lambda + 2) = 0$$

buradan karakteristik denklemin λ_1 ve λ_2 kökleri yani özdeğerleri (eigenvalues) çözülürse

$$\lambda_1 = -1 \text{ ve } \lambda_2 = -2$$

değerleri $y_n(t) = c_1 e^{-\lambda_1 t} + c_2 e^{-\lambda_2 t}$ denkleminde yerine konularak

$$y_n(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-2t}$$

elde edilir. Oluşan denklemdeki c_1 ve c_2 katsayıları ise $y_n(0) = 0$ ve $\dot{y}_n(0) = 1$ başlangıç koşullarına göre çözülür. $y_n(0) = 0$ için $y_n(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-2t}$ denklemi

$$0 = c_1 + c_2$$

ve $\dot{y}_n(0) = 1$ için $y_n(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-2t}$ denklemi önce $\dot{y}_n(t)$ olarak düzenlenecektir,

$$\dot{y}_n(t) = \frac{d}{dt} [c_1 e^{-t} + c_2 e^{-2t}] = -c_1 e^{-t} - 2c_2 e^{-2t}$$

ardından bu denklem $\dot{y}_n(0) = 1$ için $\dot{y}_n(t) = -c_1 e^{-t} - 2c_2 e^{-2t}$

$$1 = -c_1 - 2c_2$$

buna göre elde edilen denklemler

$$0 = c_1 + c_2$$

$$1 = -c_1 - 2c_2$$

gibi bilinen formda elde edilir. Bunun basit çözümü yapıldığında,

$$c_1 = 1 \text{ ve } c_2 = -1$$

olarak elde edilirler. Bunlar $y_n(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-2t}$ de yerlerine yazılırsa $f(t) = 0$ için sistem cevabı aşağıdaki gibi oluşur.

$$y_n(t) = e^{-t} - e^{-2t}$$

buradan aranan $h(t)$ sistem impuls cevabı

$$h(t) = [P(D)y_n(t)]u(t)$$

ifadesinden çözülür.

$$\begin{aligned} h(t) &= [D(e^{-t} - e^{-2t})]u(t) \\ &= [-e^{-t} + 2e^{-2t}]u(t) \end{aligned}$$

$D(e^{-t} - e^{-2t}) = \frac{d}{dt}[e^{-t} - e^{-2t}]$ olduğu düşünülecektir. Bunların sonucunda başlangıçta

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + 3\frac{dy}{dt} + 2y(t) = \frac{df}{dt} \text{ veya } (D^2 + 3D + 2)y(t) = Df(t) \text{ formlarında } n > m \text{ (} n = 2, m = 1 \text{)}$$

koşuluna uygun verilen sistemin impuls cevabı

$$h(t) = [-e^{-t} + 2e^{-2t}]u(t)$$

olarak elde edilmiştir. Elde edilen sistem $t < 0$ için $h(t) = 0$ koşulunu sağladığından aynı zamanda tam nedenseldir (causal).

Örnek-2 ($n = m$)

Aşağıdaki gibi lineer denklem sistemiyle tanımlanmış $f(t)$ sistem girişi ve $y(t)$ sistem çıkışı olan bir lineer zamandan bağımsız sistemin $h(t)$ impuls cevabını bulun.

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + 3\frac{dy}{dt} + 2y(t) = \frac{d^2 f}{dt^2} + 5\frac{df}{dt} + 6f(t)$$

Çözüm-2

Diferansiyel denklem sistem incelendiğinde sistemin $n = m$ ($n = 2, m = 2$) koşuluna uygun olduğu görülmektedir. Denklem $D = d/dt$ diferansiyel operatörüne göre düzenlenirse,

$$(D^2 + 3D + 2)y(t) = (D^2 + 5D + 6)f(t)$$

Bu durumda kullanılacak sistem impuls cevabının ifadesi

$$h(t) = b_n \delta(t) + [P(D)y_n(t)]u(t)$$

gibi olacaktır. $n = 2$ olduğundan sağ taraftaki giriş ifadesine ilişkin b_2 teriminin bu kez $b_n = b_2 = 1$ olarak mevcut olduğunu görmekteyiz. Bu durumda sistem impuls cevabı aşağıdaki gibi olacaktır.

$$h(t) = b_n \delta(t) + [P(D)y_n(t)]u(t) = b_2 \delta(t) + [P(D)y_n(t)]u(t) \\ = \delta(t) + [P(D)y_n(t)]u(t)$$

Burada da ilk örnekteki çözüm belli bir noktaya kadar aynen yapılacaktır. Tek farklı uygulama belirtildiği gibi $b_n = b_2 = 1$ dolayısıyla

$$h(t) = \delta(t) + [P(D)y_n(t)]u(t)$$

ve diferansiyel denklem sisteminin sağ tarafındaki girişe ait $P(D)$ ifadesinin

$$P(D) = D^2 + 5D + 6$$

olarak farklı bir ifadeyle verilmesidir. Girişin olmadığı $f(t) = 0$ durumu için yine aynı $y_n(0) = 0$ ve $\dot{y}_n(0) = 1$ başlangıç koşullarının verildiğini kabul edelim. Bu durumda

$$(D^2 + 3D + 2)y(t) = 0$$

çözümünün aynen örnek-1 deki gibi yapılacağını düşünürsek

$(D^2 + 3D + 2)y(t) = 0$ karakteristik denklemi $Q(\lambda)y(t) = 0$ gereği λ parametresine göre sistemin cevabı

$$y_n(t) = e^{-t} - e^{-2t}$$

olarak elde edilecektir. Buradan aranan $h(t)$ sistem impuls cevabı

$$h(t) = \delta(t) + [P(D)y_n(t)]u(t)$$

ifadesinden çözülür. Çözüm için ifadedeki $P(D)$ nin orijinal diferansiyel denkleminin girişle

ilgili sağ taraftaki $P(D) = D^2 + 5D + 6 = \frac{d^2}{dt^2} + 5\frac{d}{dt} + 6$ ifadesini hatırlayalım. Buna göre

$$h(t) = \delta(t) + [(D^2 + 5D + 6)(e^{-t} - e^{-2t})]u(t) \\ = \delta(t) + [D^2(e^{-t} - e^{-2t}) + 5D(e^{-t} - e^{-2t}) + 6(e^{-t} - e^{-2t})]u(t)$$

$$D(e^{-t} - e^{-2t}) = \frac{d}{dt}(e^{-t} - e^{-2t}) = -e^{-t} + 2e^{-2t}$$

$$D^2(e^{-t} - e^{-2t}) = \frac{d^2}{dt^2}(e^{-t} - e^{-2t}) = \frac{d}{dt} \left[\frac{d}{dt}(e^{-t} - e^{-2t}) \right] = \frac{d}{dt} [-e^{-t} + 2e^{-2t}] = e^{-t} - 4e^{-2t}$$

$$\begin{aligned}
 h(t) &= \delta(t) + [D^2(e^{-t} - e^{-2t}) + 5D(e^{-t} - e^{-2t}) + 6(e^{-t} - e^{-2t})]u(t) \\
 &= \delta(t) + [e^{-t} - 4e^{-2t} + 5(-e^{-t} + 2e^{-2t}) + 6(e^{-t} - e^{-2t})]u(t) \\
 &= \delta(t) + [e^{-t} - 4e^{-2t} - 5e^{-t} + 10e^{-2t} + 6e^{-t} - 6e^{-2t}]u(t) \\
 &= \delta(t) + [2e^{-t}]u(t)
 \end{aligned}$$

$$h(t) = \delta(t) + [2e^{-t}]u(t)$$

olarak elde edilmiştir. Denklemden $\delta(t)$ olmasına rağmen $t < 0$ için $\delta(t) = 0$ olacağı görülmektedir. Buna göre elde edilen sistem $n = m$ ($n = 2, m = 2$) koşuluna uygun $t < 0$ için $h(t) = 0$ koşulunu sağladığından aynı zamanda nedenseldir (causal).

Örnek-3 ($n < m$)

Aşağıdaki gibi lineer denklem sistemiyle tanımlanmış $f(t)$ sistem girişi ve $y(t)$ sistem çıkışı olan bir lineer zamandan bağımsız sistemin $h(t)$ impuls cevabını bulun.

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + 3 \frac{dy}{dt} + 2y(t) = \frac{d^3 f}{dt^3} + \frac{d^2 f}{dt^2} + \frac{df}{dt} + f(t)$$

Çözüm-3

Diferansiyel denklem sistem incelendiğinde sistemin $n < m$ ($n = 2, m = 3$) koşuluna uygun olduğu görülmektedir. Denklem $D = d/dt$ diferansiyel operatörüne göre düzenlenirse,

$$(D^2 + 3D + 2)y(t) = (D^3 + D^2 + D + 1)f(t)$$

Bu durumda kullanılacak sistem impuls cevabının ifadesi

$$h(t) = b_n \delta(t) + [P(D)y_n(t)]u(t)$$

gibi olacaktır. $n = 2$ olduğundan sağ taraftaki giriş ifadesine ilişkin b_2 teriminin bu kez $b_n = b_2 = 1$ olarak $\frac{d^2 f}{dt^2}$ terimiyle mevcut olduğunu görmekteyiz. Bu durumda sistem impuls cevabı aşağıdaki gibi olacaktır.

$$\begin{aligned}
 h(t) &= b_n \delta(t) + [P(D)y_n(t)]u(t) = b_2 \delta(t) + [P(D)y_n(t)]u(t) \\
 &= \delta(t) + [P(D)y_n(t)]u(t)
 \end{aligned}$$

Burada da ilk örnekteki çözüm belli bir noktaya kadar aynen yapılacaktır. Burada da iki farklı noktanın belirtildiği gibi $b_n = b_2 = 1$ dolayısıyla

$$h(t) = \delta(t) + P(D)[y_n(t)u(t)]$$

ve diferansiyel denklem sisteminin sağ tarafındaki girişe ait $P(D)$ ifadesinin bu kez

$$P(D) = D^3 + D^2 + D + 1$$

olarak daha farklı bir ifadeyle verilmesidir. Girişin olmadığı $f(t) = 0$ durumu için yine aynı $y_n(0) = 0$ ve $\dot{y}_n(0) = 1$ başlangıç koşullarının verildiğini kabul edelim. Bu durumda

$$(D^2 + 3D + 2)y(t) = 0$$

çözümünün aynen örnek-1 deki gibi yapılacağını düşünürsek $(D^2 + 3D + 2)y(t) = 0$ karakteristik denklemi $Q(\lambda)y(t) = 0$ gereği λ parametresine göre sistemin cevabı

$$y_n(t) = e^{-t} - e^{-2t}$$

olarak elde edilecektir. Buradan aranan $h(t)$ sistem impuls cevabı

$$h(t) = \delta(t) + P(D)[y_n(t)u(t)]$$

ifadesinden çözülür. Ancak bu ifade diğer iki örnekten farklı olarak parantez içersinde yer alan $y_n(t)u(t)$ ifadesinin türevleneceği görülmektedir. Bunun anlamı bu yolla $u(t)$ birim basamak fonksiyonunun yüksek dereceli türevlerinin (örneğin üçüncü derece) söz konusu olmasıdır. Bu sonuç, oluşacak toplam ifade içersinde $\delta'(t)$, $\delta''(t)$ ve $\delta'''(t)$ gibi değeri $t = 0$ dışında belirsiz olan terimler vasıtasıyla sistem impuls cevabını da belirsiz yapabilme riski açısından önemlidir. Çözüm için ifadedeki $P(D)$ nin orijinal diferansiyel denkleminin girişle

ilgili sağ taraftaki $P(D) = D^3 + D^2 + D + 1 = \frac{d^3}{dt^3} + \frac{d^2}{dt^2} + \frac{d}{dt} + 1$ ifadesini hatırlayalım. Buna göre

$$\begin{aligned} h(t) &= \delta(t) + (D^3 + D^2 + D + 1)[(e^{-t} - e^{-2t})u(t)] \\ &= \delta(t) + D^3[(e^{-t} - e^{-2t})u(t)] + D^2[(e^{-t} - e^{-2t})u(t)] + D[(e^{-t} - e^{-2t})u(t)] + [(e^{-t} - e^{-2t})u(t)] \end{aligned}$$

$\delta(t) = \frac{du}{dt}$ ve $\delta'(t) = \frac{d\delta}{dt}$ olduğunu düşünerek denklemi elde etmeye çalışalım.

$$D[(e^{-t} - e^{-2t})u(t)] = \frac{d}{dt}[(e^{-t} - e^{-2t})u(t)] = (-e^{-t} + 2e^{-2t})u(t) + (e^{-t} - e^{-2t})\delta(t)$$

$$\begin{aligned}
 D^2[(e^{-t} - e^{-2t})u(t)] &= \frac{d^2}{dt^2}[(e^{-t} - e^{-2t})u(t)] = \frac{d}{dt} \left[\frac{d}{dt}[(e^{-t} - e^{-2t})u(t)] \right] \\
 &= \frac{d}{dt} [(-e^{-t} + 2e^{-2t})u(t) + (e^{-t} - e^{-2t})\delta(t)] \\
 &= [(e^{-t} - 4e^{-2t})u(t) + (-e^{-t} + 2e^{-2t})\delta(t) + (-e^{-t} + 2e^{-2t})\delta(t) + (e^{-t} - e^{-2t})\delta'(t)] \\
 &= [(e^{-t} - 4e^{-2t})u(t) + (-e^{-t} + 2e^{-2t} - e^{-t} + 2e^{-2t})\delta(t) + (e^{-t} - e^{-2t})\delta'(t)] \\
 &= [(e^{-t} - 4e^{-2t})u(t) + (-2e^{-t} + 4e^{-2t})\delta(t) + (e^{-t} - e^{-2t})\delta'(t)]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 D^3[(e^{-t} - e^{-2t})u(t)] &= \frac{d^3}{dt^3}[(e^{-t} - e^{-2t})u(t)] = \frac{d}{dt} \left[\frac{d^2}{dt^2}[(e^{-t} - e^{-2t})u(t)] \right] \\
 &= \frac{d}{dt} [(e^{-t} - 4e^{-2t})u(t) + (-2e^{-t} + 4e^{-2t})\delta(t) + (e^{-t} - e^{-2t})\delta'(t)] \\
 &= \left[(-e^{-t} + 8e^{-2t})u(t) + (e^{-t} - 4e^{-2t})\delta(t) + (2e^{-t} - 8e^{-2t})\delta(t) + (-2e^{-t} + 4e^{-2t})\delta'(t) \right. \\
 &\quad \left. + (-e^{-t} + 2e^{-2t})\delta'(t) + (e^{-t} - e^{-2t})\delta''(t) \right] \\
 &= \left[(-e^{-t} + 8e^{-2t})u(t) + (e^{-t} - 4e^{-2t} + 2e^{-t} - 8e^{-2t})\delta(t) + (-2e^{-t} + 4e^{-2t} - e^{-t} + 2e^{-2t})\delta'(t) \right. \\
 &\quad \left. + (e^{-t} - e^{-2t})\delta''(t) \right] \\
 &= [(-e^{-t} + 8e^{-2t})u(t) + (3e^{-t} - 12e^{-2t})\delta(t) + (-3e^{-t} + 6e^{-2t})\delta'(t) + (e^{-t} - e^{-2t})\delta''(t)]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 h(t) &= \delta(t) + [(-e^{-t} + 8e^{-2t})u(t) + (3e^{-t} - 12e^{-2t})\delta(t) + (-3e^{-t} + 6e^{-2t})\delta'(t) + (e^{-t} - e^{-2t})\delta''(t)] \\
 &\quad + [(e^{-t} - 4e^{-2t})u(t) + (-2e^{-t} + 4e^{-2t})\delta(t) + (e^{-t} - e^{-2t})\delta'(t)] \\
 &\quad + [(-e^{-t} + 2e^{-2t})u(t) + (e^{-t} - e^{-2t})\delta(t)] \\
 &\quad + [(e^{-t} - e^{-2t})u(t)]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 h(t) &= \delta(t) + [(-e^{-t} + 8e^{-2t} + e^{-t} - 4e^{-2t} - e^{-t} + 2e^{-2t} + e^{-t} - e^{-2t})u(t)] \\
 &\quad + [(3e^{-t} - 12e^{-2t} - 2e^{-t} + 4e^{-2t} + e^{-t} - e^{-2t})\delta(t) + (-3e^{-t} + 6e^{-2t} + e^{-t} - e^{-2t})\delta'(t) + (e^{-t} - e^{-2t})\delta''(t)]
 \end{aligned}$$

$$h(t) = \delta(t) + [(-4e^{-t} + 5e^{-2t})u(t) + (2e^{-t} - 9e^{-2t})\delta(t) + (-2e^{-t} + 5e^{-2t})\delta'(t) + (e^{-t} - e^{-2t})\delta''(t)]$$

$$h(t) = (-4e^{-t} + 5e^{-2t})u(t) + (1 + 2e^{-t} - 9e^{-2t})\delta(t) + (-2e^{-t} + 5e^{-2t})\delta'(t) + (e^{-t} - e^{-2t})\delta''(t)$$

olarak elde edilmiştir. Görüldüğü gibi elde edilen impuls cevabında $\delta'(t)$ ve $\delta''(t)$ gibi $t = 0$ noktaları dışında tanımlı olmayan, diğer bir deyişle belirsiz olan terimler bulunduğundan sistem impuls cevabı $h(t)$ belirsiz olarak elde edilecektir.

$$\begin{aligned}
 h(t) &= (-4e^{-t} + 5e^{-2t})u(t) + (1 + 2e^{-t} - 9e^{-2t})\delta(t) + (-2e^{-t} + 5e^{-2t})\delta'(t) + (e^{-t} - e^{-2t})\delta''(t) \\
 &\rightarrow \text{BELIRSİZ}
 \end{aligned}$$

Buna göre elde edilen sistem $n < m$ ($n = 2, m = 3$) koşuluna uygun

$t < 0$ için $h(t) \neq 0 \rightarrow$ belirsiz

olduğundan sistem nedensel değildir (noncausal). Nedensellik, sistemin gerçekleştirilebilirliğini gösterdiğinden, bu durumda gerçekleştirilemez bir sistemin söz konusu olduğunu görmekteyiz. İncelenen üç örneği toparlarsak,

1) $n > m$ için

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + 3 \frac{dy}{dt} + 2y(t) = \frac{df}{dt}, \quad h(t) = [-e^{-t} + 2e^{-2t}]u(t) \text{ tam nedensel (strictly proper)}$$

2) $n = m$ için

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + 3 \frac{dy}{dt} + 2y(t) = \frac{d^2 f}{dt^2} + 5 \frac{df}{dt} + 6f(t), \quad h(t) = \delta(t) + [2e^{-t}]u(t) \text{ nedensel (proper)}$$

3) $n < m$ için

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + 3 \frac{dy}{dt} + 2y(t) = \frac{d^3 f}{dt^3} + \frac{d^2 f}{dt^2} + \frac{df}{dt} + f(t),$$
$$h(t) = (-4e^{-t} + 5e^{-2t})u(t) + (1 + 2e^{-t} - 9e^{-2t})\delta(t) + (-2e^{-t} + 5e^{-2t})\delta'(t) + (e^{-t} - e^{-2t})\delta''(t)$$

nedensel değil, improper

LTI Sistemlerin Sistem Impuls Cevabı Üzerine

Elde edilen üç sonuca ek olarak diferansiyel denklem ile gösterilen bir LTI sistemin impuls cevabını destekleyecek ek yorumumuzu bu kez sistem transfer fonksiyonu üzerinden yapmamız mümkündür. Örneğin bir nolu örneği ele aldığımızda,

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + 3 \frac{dy}{dt} + 2y(t) = \frac{df}{dt}$$

burada Laplace dönüşümüne uygun olarak, $s^n Y(s) = \frac{d^n y}{dt^n}$ kabulünü yaparak verilen sistem denklemini

$$(s^2 + 3s + 2)Y(s) = sF(s)$$

yazılabilir. Buradan çıkışın giriş oranını alırsak, $H(s)$ biçiminde

$$H(s) = \frac{Y(s)}{F(s)} = \frac{s}{s^2 + 3s + 2}$$

sistem transfer fonksiyonu elde edilir. Sistem transfer fonksiyonunun ilk ele aldığımız

$$\frac{y(t)}{f(t)} = \frac{P(D)}{Q(D)} = \frac{b_m D^m + b_{m-1} D^{m-1} + b_{m-2} D^{m-2} + \dots + b_1 D + b_0}{a_n D^n + a_{n-1} D^{n-1} + a_{n-2} D^{n-2} + \dots + a_1 D + a_0}$$

öneğine benzer olarak bu kez,

$$H(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + b_{m-2} s^{m-2} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + a_{n-2} s^{n-2} + \dots + a_1 s + a_0}$$

olarak yazdığımızda ele aldığımız $H(s) = \frac{Y(s)}{F(s)} = \frac{s}{s^2 + 3s + 2}$ örneğinin $n > m$ koşuluna

uygun olduğunu görürüz. Bu durumda $h(t)$ olarak değil, $H(s)$ durumundayken $n > m$ koşulunu nasıl değerlendirmeliyiz. Buna göre

1) $n > m$

$$H(s) = \frac{Y(s)}{F(s)} = \frac{s}{s^2 + 3s + 2} \text{ ifadesi } \lim_{s \rightarrow \infty} \text{ için}$$

$$\lim_{s \rightarrow \infty} H(s) = \frac{s}{s^2(1 + \frac{3}{s} + \frac{2}{s^2})} = \frac{1}{s(1 + \frac{3}{s} + \frac{2}{s^2})} = \frac{1}{\infty(1 + \frac{3}{\infty} + \frac{2}{\infty^2})} = \frac{1}{\infty(1 + 0 + 0)} = \frac{1}{\infty} = 0$$

$$\lim_{s \rightarrow \infty} H(s) = 0$$

Bu durumu nasıl yorumlamalıyız. $\lim_{s \rightarrow \infty}$ için sistem sıfır olmaktadır. Eğer $s = j\omega$ biçiminde ω frekansına bağlı olarak düşünülürse,

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} H(j\omega) = 0$$

sistemin yüksek frekanslar ($\omega \rightarrow \infty$) için kazancının sıfır olduğu anlamı ortaya çıkar. Bu tutarlı bir gerektir. Yüksek frekanslarda sistem frekans kazancı küçük (sıfır) olmalıdır. Fourier serisinde de seri açılımındaki terimler incelendiğinde, yüksek frekanslı terimlerin kazançlarının (katsayılarının) giderek küçüldüğü görülmektedir. Bu sonuç aynı zamanda sistemin sönümlü (kararlı) olması açısından da önemlidir. Bu nedenle aynı sistemin s domeninde ele alınan $H(s)$ sisteminin analizinde de $n > m$ koşulunun önemli olduğunu görmekteyiz.

2) $n = m$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + 3 \frac{dy}{dt} + 2y(t) = \frac{d^2 f}{dt^2} + 5 \frac{df}{dt} + 6f(t)$$

burada Laplace dönüşümüne uygun olarak, $s^n Y(s) = \frac{d^n y}{dt^n}$ kabulünü yaparak verilen sistem denklemini

$$(s^2 + 3s + 2)Y(s) = (s^2 + 5s + 6)F(s)$$

yazılabilir. Buradan çıkışın giriş oranını alırsak, $H(s)$ biçiminde

$$H(s) = \frac{Y(s)}{F(s)} = \frac{s^2 + 5s + 6}{s^2 + 3s + 2}$$

sistem transfer fonksiyonu elde edilir. Sistem transfer fonksiyonunun ilk ele aldığımız

$$\frac{y(t)}{f(t)} = \frac{P(D)}{Q(D)} = \frac{b_m D^m + b_{m-1} D^{m-1} + b_{m-2} D^{m-2} + \dots + b_1 D + b_0}{a_n D^n + a_{n-1} D^{n-1} + a_{n-2} D^{n-2} + \dots + a_1 D + a_0}$$

öneğine benzer olarak bu kez,

$$H(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + b_{m-2} s^{m-2} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + a_{n-2} s^{n-2} + \dots + a_1 s + a_0}$$

olarak yazdığımızda ele aldığımız örneğin $n = m$ koşuluna uygun olduğunu görürüz. Bu durumda $H(s)$ transfer fonksiyonuna göre $n = m$ koşulunu nasıl değerlendirelim. Buna göre

$$H(s) = \frac{Y(s)}{F(s)} = \frac{s^2 + 5s + 6}{s^2 + 3s + 2} \text{ ifadesi } \lim s \rightarrow \infty \text{ için}$$

$$\lim_{s \rightarrow \infty} H(s) = \frac{s^2(1 + \frac{5}{s} + \frac{6}{s^2})}{s^2(1 + \frac{3}{s} + \frac{2}{s^2})} = \frac{(1 + \frac{5}{s} + \frac{6}{s^2})}{(1 + \frac{3}{s} + \frac{2}{s^2})} = \frac{(1 + \frac{5}{\infty} + \frac{6}{\infty^2})}{\infty(1 + \frac{3}{\infty} + \frac{2}{\infty^2})} = \frac{(1 + 0 + 0)}{\infty(1 + 0 + 0)} = \frac{1}{\infty} < \infty$$

= 1

$$\lim_{s \rightarrow \infty} H(s) = 1 = \frac{b_m}{a_n} = \frac{b_n}{a_n} < \infty$$

Bu durumu nasıl yorumlamalıyız. $\lim s \rightarrow \infty$ için sistem sıfır değil bir değere yakınsamaktadır. Diğer bir deyişle sistemin bir limit yani sınırlı değeri söz konusudur. Eğer $s = j\omega$ biçiminde ω frekansına bağlı olarak düşünülürse,

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} H(j\omega) = 1 = \frac{b_n}{a_n} < \infty$$

sistemin yüksek frekanslar ($\omega \rightarrow \infty$) için kazancının sonsuz olmadığı, ve belirli limit bir değer aldığı görülmektedir ki bu da tutarlı bir gerekçe olup, yüksek frekanslarda sistem frekans kazancının küçük (sıfır olamıyorsa) olması ilkesiyle örtüşmektedir. Bu sonuç aynı zamanda sistemin tam sönümlü (kararlı) olmasa da (marjinal kararlı), belli değerlerde davranış sergilediğinden kararsız olmaması açısından önemlidir. Bu nedenle aynı sistemin s domeninde ele alınan $H(s)$ sisteminin analizinde de $n = m$ koşulunun önemli olduğunu görmekteyiz.

3) $n < m$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + 3 \frac{dy}{dt} + 2y(t) = \frac{d^3 f}{dt^3} + \frac{d^2 f}{dt^2} + \frac{df}{dt} + f(t)$$

burada Laplace dönüşümüne uygun olarak, $s^n Y(s) = \frac{d^n y}{dt^n}$ kabulünü yaparak verilen sistem denklemini

$$(s^2 + 3s + 2)Y(s) = (s^3 + s^2 + s + 1)F(s)$$

yazılabilir. Buradan çıkışın giriş oranını alırsak, $H(s)$ biçiminde

$$H(s) = \frac{Y(s)}{F(s)} = \frac{s^3 + s^2 + s + 1}{s^2 + 3s + 2}$$

sistem transfer fonksiyonu elde edilir. Sistem transfer fonksiyonunun ilk ele aldığımız

$$\frac{y(t)}{f(t)} = \frac{P(D)}{Q(D)} = \frac{b_m D^m + b_{m-1} D^{m-1} + b_{m-2} D^{m-2} + \dots + b_1 D + b_0}{a_n D^n + a_{n-1} D^{n-1} + a_{n-2} D^{n-2} + \dots + a_1 D + a_0}$$

öneğine benzer olarak bu kez,

$$H(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + b_{m-2} s^{m-2} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + a_{n-2} s^{n-2} + \dots + a_1 s + a_0}$$

olarak yazdığımızda ele aldığımız örneğin $n = m$ koşuluna uygun olduğunu görürüz. Bu durumda $H(s)$ transfer fonksiyonuna göre $n = m$ koşulunu nasıl değerlendirelim. Buna göre

$$H(s) = \frac{Y(s)}{F(s)} = \frac{s^3 + s^2 + s + 1}{s^2 + 3s + 2} \text{ ifadesi } \lim s \rightarrow \infty \text{ için}$$

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow \infty} H(s) &= \frac{s^3(1 + \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s^3})}{s^2(1 + \frac{3}{s} + \frac{2}{s^2})} = \frac{s(1 + \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s^3})}{(1 + \frac{3}{s} + \frac{2}{s^2})} = \frac{\infty(1 + \frac{1}{\infty} + \frac{1}{\infty^2} + \frac{1}{\infty^3})}{(1 + \frac{3}{\infty} + \frac{2}{\infty^2})} = \frac{\infty(1 + 0 + 0 + 0)}{(1 + 0 + 0)} = \infty \\ &= \infty \end{aligned}$$

$$\lim_{s \rightarrow \infty} H(s) = \infty$$

Bu durumu nasıl yorumlamalıyız. $\lim s \rightarrow \infty$ için sistem sonsuz elde edilmektedir. Diğer bir deyişle sistemin bir limit yani sınırlı değeri söz konusu değildir. Eğer $s = j\omega$ biçiminde ω frekansına bağlı olarak düşünülürse,

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} H(j\omega) = \infty$$

sistemin yüksek frekanslar ($\omega \rightarrow \infty$) için kazancının sonsuz olduğu bir durum söz konusu olur ki, bu tutarlı bir sonuç değildir. Sistem sönümlü değildir. Bu nedenle aynı sistemin s domeninde ele alınan $H(s)$ sisteminin analizinde $n < m$ koşulunun önemli olduğunu, ve böyle bir sistemin gerçekleşemez olduğunu görmekteyiz.

Kompleks frekans düzleminde değerlendirilen üç örnek toparlandığında

1) $n > m$

$$H(s) = \frac{Y(s)}{F(s)} = \frac{s}{s^2 + 3s + 2} \text{ ifadesi } \lim s \rightarrow \infty \text{ için}$$

$$\lim_{s \rightarrow \infty} H(s) = 0 \text{ tutarlı, sönümlü, kararlı, nedensel}$$

2) $n = m$

$$H(s) = \frac{Y(s)}{F(s)} = \frac{s^2 + 5s + 6}{s^2 + 3s + 2} \text{ ifadesi } \lim s \rightarrow \infty \text{ için}$$

$$\lim_{s \rightarrow \infty} H(s) = 1 = \frac{b_m}{a_n} = \frac{b_n}{a_n} < \infty \text{ tutarlı, sönümlü, kararlı, nedensel}$$

3) $n < m$

$$H(s) = \frac{Y(s)}{F(s)} = \frac{s^3 + s^2 + s + 1}{s^2 + 3s + 2} \text{ ifadesi } \lim_{s \rightarrow \infty} \text{ için}$$

$$\lim_{s \rightarrow \infty} H(s) = \infty \quad \text{tutarsız, sönümsüz, kararsız, nedensel değil}$$

Bunların ışığında gerek $h(t)$ gerekse $H(s)$ olarak ele alınan sistemlerin n ve m derecelerinin belirlenmesinde $n > m$ ve $n = m$ koşullarının gerçekçi sistem yaklaşımı sayılabileceğini görmekteyiz.

Tercih edilmeyen $n < m$ durumu özellikle diferansiyel denklem sistemleri gibi işaretin türevlendiği sistemlerde, türevden dolayı gürültü gibi yüksek frekanslı işaretlerin sistem içerisinde daha da kuvvetlendirilmesi sebebiyle, genellikle $n < m$ uzak durulan sistemlerdir.

Örnek

Aşağıdaki sistemleri $m < n$, $m \leq n$ ve $m > n$ kriterlerine göre analiz edin.

$$a) H(s) = \frac{2s^3 + s^2 + 3s + 1}{s^4 + s^3 + 4s^2 + s - 1}$$

$$b) H(s) = \frac{5s^4 + 2s^3 + s^2 + 3s + 1}{3s^4 + s^3 + 4s^2 + s - 1}$$

$$c) H(s) = \frac{s^4 + 2s^3 + s^2 + 3s + 1}{s^3 + s^2 + 4s - 1}$$

Burada integro diferansiyel denklemlerin cebirsel çözümlerine yönelik diferansiyel denklemlerin sistem özellikleri göz önüne alınmıştır. Klasik tek giriş – tek çıkışlı ve frekansa dayalı çözümleri içeren sistemleri göz önüne alan diferansiyel denklemin genel olarak

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = b_m \frac{d^m x(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} x(t)}{dt^{m-1}} + \dots + b_1 \frac{dx(t)}{dt} + b_0 x(t)$$

veya

$$\sum_{k=0}^n a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^m b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}$$

$$a. m < n \text{ ise } H(s) \text{ “tam causal” } \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{s^m}{s^n} = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{s^{n-m}} = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{s^{n-m}} \rightarrow 0 \text{ tam sönümlü sistem}$$

$$b. m \leq n \text{ ise } H(s) \text{ “causal” } \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{s^m}{s^n} = \frac{s^m}{s^m} = \frac{5}{3} < \infty \text{ sönümlü sistem}$$

$$c. m > n \text{ ise } H(s) \text{ “causal değil (noncausal)” } \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{s^m}{s^n} = \lim_{s \rightarrow \infty} s^{m-n} = \lim_{s \rightarrow \infty} s^{m-n} \rightarrow \infty \text{ sönümsüz (kararsız) sistem}$$

Nedensel (causal) işaretler ve periodik işaretlerle ilgisi

Periodik işaretlerin başlangıç noktaları tartışılan bir konudur. **Causal işaret** $t = 0$ dan önce başlamayan işaretlerdir. Diğer bir deyişle bir işaret fonksiyonu $f(t)$

$$f(t) = 0, \quad t < 0$$

Causal işaret sıfır anından önce başlamayan işaretler olduğu halde, causal sistemler giriş işaretinin o anki ve geçmiş değerlerine bağlı olarak değişmektedirler. Bu durum ilk anda bir çelişkiymiş gibi görünsede öyle değildir. Causal sistemdeki giriş işaretinin başlangıç anı önemli değildir. Girişin $t = 0$ anındaki, önceki veya sonraki anındaki değeri sisteme uygulanabilir. Yani causal sistem giriş işaretinin başlangıç anıyla ilgilenmemektedir.

Nedensel (causal) işaretler ve periodik işaretlerle ilgisi

Periodik işaretlerin başlangıç noktaları tartışılan bir konudur. **Causal işaret** $t = 0$ dan önce başlamayan işaretlerdir. Diğer bir deyişle bir işaret fonksiyonu $f(t)$

$$f(t) = 0, \quad t < 0$$

Causal işaret sıfır anından önce başlamayan işaretler olduğu halde, causal sistemler giriş işaretinin o anki ve geçmiş değerlerine bağlı olarak değişmektedirler. Bu durum ilk anda bir çelişkiymiş gibi görünsede öyle değildir. Causal sistemdeki giriş işaretinin başlangıç anı önemli değildir. Girişin $t = 0$ anındaki, önceki veya sonraki anındaki değeri sisteme uygulanabilir. Yani causal sistem giriş işaretinin başlangıç anıyla ilgilenmemektedir.

9. Linear-Zamandan Bağımsız (LTI) Sistemler

Mevcut bilgilerin ışığında lineer sistemlerin bir diğer önemli özelliği olan zamandan bağımsızlık (time invariant), sistemin veya işaretin parametrelerinin zamanla değişmemesidir (time invariance). Eğer bir $x(t)$ giriş işareti T süre gecikmeli uygulanıyor veya öteleniyorsa ($x(t - T)$) buna karşılık gelen $y(t)$ çıkışının cevabı da aynı oranda ($y(t - T)$) gecikecek veya ötelenecektir. Bununla kastedilen şudur ;

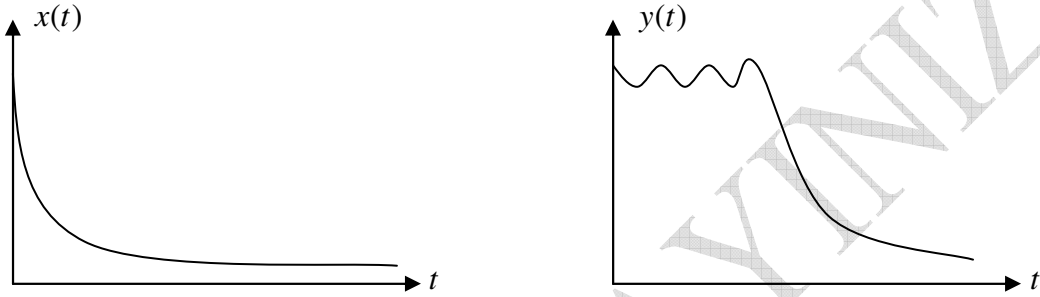
sistem çıkışı, sistem girişindeki bir T miktarlık gecikmeden etkilenmiyor veya değişmiyorsa, böyle bir sistem zamandan bağımsız sistemdir. Aksi durumda sistem zamanla değişendir (time varying).

Zamandan Bağımsız-Bağımlı Sistemler

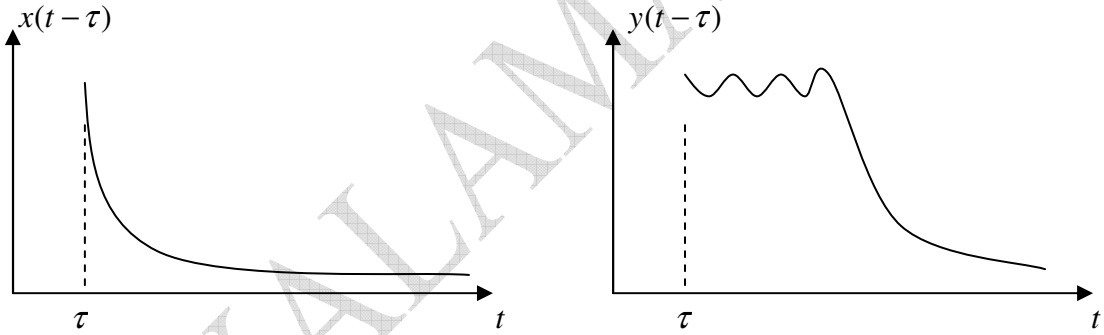
Sistem girişlerindeki değişimlerin ($x(t), x(t - \tau)$) aynı oranlarda zamandan bağımsız olarak çıkışlarda da $y(t), y(t - \tau)$ gözlemlendiği sistemlere zamandan bağımsız / zamana göre değişmeyen sistemler (time-invariance systems) denir. Diğer bir deyişle sistem karakteristiklerinin zamanla değişmemesi haline “zamandan bağımsız (değişmeyen)” sistemler demekteyiz. Giriş değişkeninde ötelenme oluşan gecikme miktarının sistem çıkışında da aynen görüldüğü sistemler, zamandan bağımsızdırlar. Bunun tersi özellikteki sistemler, zamana bağımlı/değişkenli (time-varying) olarak anılırlar. Sistem girişinin ekstra bir zaman değişkenli fonksiyonuyla çarpımı hali her zaman çıkışıda zamana bağlı olarak değiştireceğinden bu tip denklemlerle ifade edilen sistemler “zamanla değişen (time-varying)” sistemlerdir. Matematiksel gösterimleri ;

$$\mathbf{T}\{x(t - \tau)\} = y(t - \tau)$$

şeklindedir. Sistem çıkışı girişin dışındaki herhangi bir zamana göre değişmemektedir. Girişteki ötelenme veya gecikme, çıkışa da aynen yansımaktadır. Zamandan bağımsız sistemler aşağıda şekiller üzerinde gösterilmiştir.



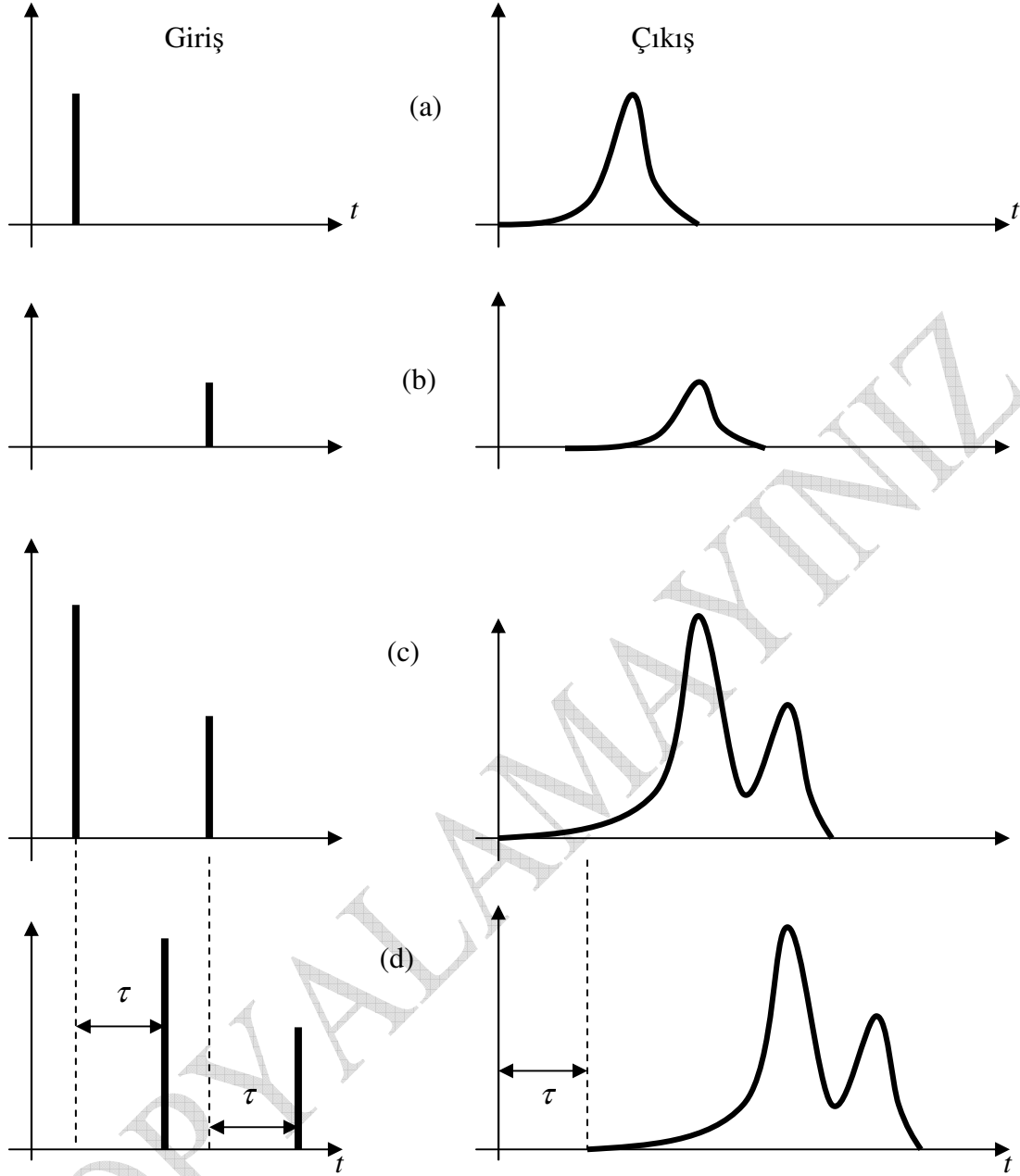
Şekil 35 t Anında sistem giriş ve çıkışları



Şekil 36 $t - \tau$ Anında sistem giriş ve çıkışları

Şekillerden de görüldüğü gibi, sistemdeki değişme zamana bağımlı değildir. Başlangıçtaki girişe göre sistemin cevabı ne ise, sistem ikinci girişle yüklendikten sonra sistem çıkışındaki değişme, bu değişmeye sebep olan etki ile orantılı olarak değişmektedir. Sistemin ikinci girişteki yüklenmeye $(t - \tau)$ karşı tepkisi aynı kalmaktadır. Gerek $x_2(t)$ ile verdiği tepki, gerekse direkt olarak $y_1(t) = y(t)$ de verdiği tepkiler/cevaplar aynı olmaktadır.

Sistemin ilk $x(t)$ girişine cevabı $y(t)$ ise, eğer bu sistemin girişi $x(t - \tau)$ olarak τ kadar geciktirilmişse, sistemin buna cevabı da aynı miktardaki gecikme ile $y(t - \tau)$ olmalıdır. Yani girişteki değişimin etkisi aynı oranda çıkışta da görülmelidir. Sonuçta sistemde bir değişim değil, gecikme söz konusudur. Aşağıda lineer zamanla değişmeyen sistemin (LTI) davranışı şematize edilmiştir.



Şekil 37 Lineer zamanla değişmeyen (LTI) sistem

Görüldüğü gibi (a) da her hangi bir $x_1(t)$ girişi için oluşan $y_1(t)$ çıkışı, (b) de ikinci bir $x_2(t)$ için $y_2(t)$ çıkışı elde edilmiştir. Şekil (c) de ise önceki girişlerin c_1 ve c_2 katsayılarıyla ağırlıklandırılmalarıyla oluşan $c_1x_1(t)$ ve $c_2x_2(t)$ girişlerinin süperpozisyonu olarak ağırlıklandırılmış $c_1x_1(t) + c_2x_2(t)$ girişine karşılık gelen $c_1y_1(t) + c_2y_2(t)$ toplam çıkışı söz konusudur. Bu adıma kadar olanlarla lineer sistem anlatılmıştır. Şekil (d) de ise oluşan $c_1x_1(t) + c_2x_2(t)$ toplam girişinin τ kadar ötelenmesine karşılık, $c_1y_1(t) + c_2y_2(t)$ toplam çıkışlarının da aynı τ miktarında ötelendiği görülmektedir. Bu da sistemin hem lineer aynı zamanda zamandan bağımsız (time-invariant) olduğunu gösterir. Dolayısıyla son şekilden görüldüğü gibi, girişteki ötelenme miktarı, çıkışın oluşmasına içerik açısından etki etmemiştir. Ötelenme zaman açısından girişin içeriğini değişmediğinden, böyle bir girişle oluşan çıkışa sahip sistemin lineer bağımsız olduğu kabul edilir.

Alternatif yaklaşım

Sistem girişi $x(t)$ ve sistem çıkışı $y(t)$ olmak üzere, eğer zaman domeninde çıkışın girişe oranı zamana bağlı değilse, sistem zamandan bağımsız (time invariant), aksi taktirde, zamana bağımlıdır (time varying).

Örnek

$y(t) = 7x(t)$ sisteminin zamandan bağımsızlığını araştırın.

Çözüm

Denklemden sistem katsayısı olarak bir sabitin (7) oluşu sistemin zamana bağımlı olmadığını (time invariant) göstermektedir. Ancak çıkışı girişe oranı açısından yaklaşırsak, oranın görüldüğü gibi

$$\frac{y(t)}{x(t)} = 7$$

sabit olduğundan verilen sistem zamandan bağımsızdır.

Örnek

$y(t) = tx(t)$ sisteminin zamandan bağımsızlığını araştırın.

Çözüm

Denklemden sistem katsayısı olarak zaman değişkeninin oluşu sistemin zamana bağımlı olduğunu (time varying) göstermektedir. Orandan teyit edebiliriz.

$$\frac{y(t)}{x(t)} = t$$

görüldüğü gibi oran zamana bağlı değiştiğinden verilen sistem zamandan bağımsız değildir (time varying).

Örnek

$$y(t) = 10x(t)$$

Sistemde girişin başındaki 10 sabiti çıkışı etkilememektedir. Dolayısıyla sistem zamandan bağımsızdır. Çıkışın, girişe oranının sabit (10) olduğu dikkati çekmektedir.

Örnek

$$y(t) = tx(t)$$

Sistemde girişin başındaki “t” değişkeni çıkışı etkilemektedir. Diğer bir deyişle çıkış yalnızca girişle değil aynı zamanda girişin başındaki katsayı durumundaki zaman değişkeni ile de değiştiğinden, sistem zamana bağımlıdır.

Haberleşme sistemleri ve zamandan bağımsızlık

Bir haberleşme sisteminde belli bir hattan iletilecek bilgi veya mesaj işaret $x(t)$ olsun. Bu işaret hedef alıcıya gittiğinde görünümü aşağıdaki gibi olacaktır.

$$y(t) = Kx(t - \tau)$$

Burada K sabit olup işaret genlik kazancıdır. Bağlantıya göre işaret alıcıya K kadarlık bir genlik kazancı (artma veya azalma yönünde) ve bir τ zaman dilimindeki gecikmeyle gitmiştir. Bu yaklaşım haberleşme sistemi açısından tutarlıdır ve distorsiyonsuz (bozulmasız) iletimin en önemli kuralıdır.

Çünkü bilgi belli uzunluktaki bir hattan gönderileceği için τ kadarlık gecikme doğal olduğu kadar, çeşitli sebeplerden dolayı genliğindeki değişimlerden dolayı da K değerinde olması tutarlı bir durumdur. Bu yüzden “zamandan bağımsızlık (time invariant)” yaklaşımı haberleşme sistemleri için oldukça bilinen ve uygulanan bir yöntemdir. Alıcıdaki işarete var olan gecikme kaldırıldıktan sonra başlangıçtaki orijinal bilgi işareti $x(t)$ tekrar orijinal haliyle elde edilmektedir, dolayısıyla gecikme kaldırıldığında tekrar bilgi elde edilebilmektedir. Buradaki τ gecikmesi bilginin tekrar elde edilmesini zorlaştıran bir parametre değildir. Dolayısıyla zamandan bağımsızlık kuralı haberleşme sistemleri için bilinen tipik bir parametredir.

Lineer Zamandan Bağımsız ve Zamana Bağlı Sistem Örnekleri

Lineer zamandan bağımsız sistemlerin diferansiyel denklemlere alternatif olarak bir diğer gösterim şekli de aşağıdaki gibi verilen **durum-uzay sistemleridir**.

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}(t) \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t) \mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}(t) \mathbf{x}(t) + \mathbf{D}(t) \mathbf{u}(t)\end{aligned}$$

Burada $\mathbf{A}(t)$, $\mathbf{B}(t)$, $\mathbf{C}(t)$ ve $\mathbf{D}(t)$ sistem katsayılarını oluşturmaktadırlar. Dikkat edilirse bu formdaki katsayılar zamana bağlı fonksiyon şeklindedirler. Bu yüzden bu tür sistemlere lineer zamana bağlı sistemler denir. Oysa verilen durum-uzay gösterimi aşağıdaki gibi göz önüne alınsaydı

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A} \mathbf{x}(t) + \mathbf{B} \mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C} \mathbf{x}(t) + \mathbf{D} \mathbf{u}(t)\end{aligned}$$

görüldüğü gibi söz konusu \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} ve \mathbf{D} katsayıları zamana bağlı olmayan, sabit (reel veya kompleks) durumundadırlar. Bu yüzden bu tür parametreleri (katsayılar olarak) zamanla değişmeyen sistemlere lineer zamandan bağımsız sistemler denilmektedir. Bunların ışığında daha önce transfer fonksiyonuna göre ele alınan örnekler aşağıda sistem katsayılarını göre tekrarlanmıştır.

Örnek

$y(t) = \sin u(t)$ sisteminin zamandan bağımsızlığını inceleyelim.

Çözüm

$$u(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

olduğundan genel bir yaklaşımla $u(t) = 1$ düşünüldüğü zaman

$$y(t) = \sin u(0) = \sin 1$$

$$y(t) = \sin u(1) = \sin 1$$

$$y(t) = \sin u(2) = \sin 1$$

\vdots

$$y(t) = \sin u(n) = \sin 1$$

olduğundan çıkış giriş değerine bağlı olarak değişmediğinden sistem “zamanla değişmeyen (time invariance)” özelliktedir.

Örnek

$y(t) = \sin(t) u(t)$ sisteminin zamandan bağımsızlığını inceleyelim.

Çözüm

$$x_1(t) = u(t)$$

$$y_1(t) = x_1(t) = \sin(t) u(t)$$

t_0 lık bir öteleme için $(t - t_0)$ yeni giriş

$$x_2(t) = x_1(t - t_0) = u(t - t_0)$$

olurken bu durumda bunun çıkışı

$$y_2(t) = x_2(t) = \sin(t) u(t - t_0) \dots\dots\dots(1)$$

olacaktır. Diğer yandan $y_2(t)$ aynı zamanda $y_1(t)$ nin $t - t_0$ kadar ötelenmiş hali olması gerekeceğinden

$$y_2(t) = y_1(t - t_0) = \sin(t - t_0) u(t - t_0) \dots\dots\dots (2)$$

olarak elde edilir. Bu durumda (1) ve (2) durumları göz önüne alındığında $y_2(t)$ çıkışı $y_1(t)$ çıkışının $t - t_0$ kadarlık ötelenmiş hali olmadığından $[(1) \neq (2)]$ sistem “zamanla değişen (time varying)” dir.

Örnek

$y[n] = nx[n]$ sisteminin zamandan bağımsızlığını inceleyelim.

Çözüm

$$x_1[n] = x[n]$$

$$y_1[n] = x_1[n] = nx[n]$$

n_0 lık bir öteleme için $(n - n_0)$ yeni giriş

$$x_2[n] = x_1[n - n_0] = x[n - n_0]$$

olurken bu durumda bunun çıkışı

$$y_2[n] = x_2[n] = nx[n - n_0] \dots\dots\dots(1)$$

olacaktır. Diğer yandan $y_2[n]$ aynı zamanda $y_1[n]$ nin $n - n_0$ kadar ötelenmiş hali olması gerekeceğinden

$$y_2[n] = y_1[n - n_0] = (n - n_0)x[n - n_0] \dots\dots\dots(2)$$

olarak elde edilir. Bu durumda (1) ve (2) durumları göz önüne alındığında $y_2[n]$ çıkışı $y_1[n]$ çıkışının $n - n_0$ kadarlık ötelenmiş hali olmadığından $[(1) \neq (2)]$ sistem “zamanla değişen (time varying)” dir.

Örnek

$$y(t) = \cos t \ x(t)$$

Sisteminin zamanla değişmez özelliğini $t_0 = 2\pi$ kaymasına göre inceleyin

Çözüm

$$y_1(t) = x_1(t) = \cos(t) \ x(t)$$

t_0 lık bir öteleme için $(t - t_0)$ yeni giriş

$$x_2(t) = x_1(t - t_0) = x(t - t_0)$$

olurken bu durumda bunun çıkışı

$$y_2(t) = x_2(t) = \cos(t) \ x(t - t_0) \dots\dots\dots(1)$$

olacaktır. Diğer yandan $y_2(t)$ aynı zamanda $y_1(t)$ nin $t - t_0$ kadar ötelenmiş hali olması gerekeceğinden

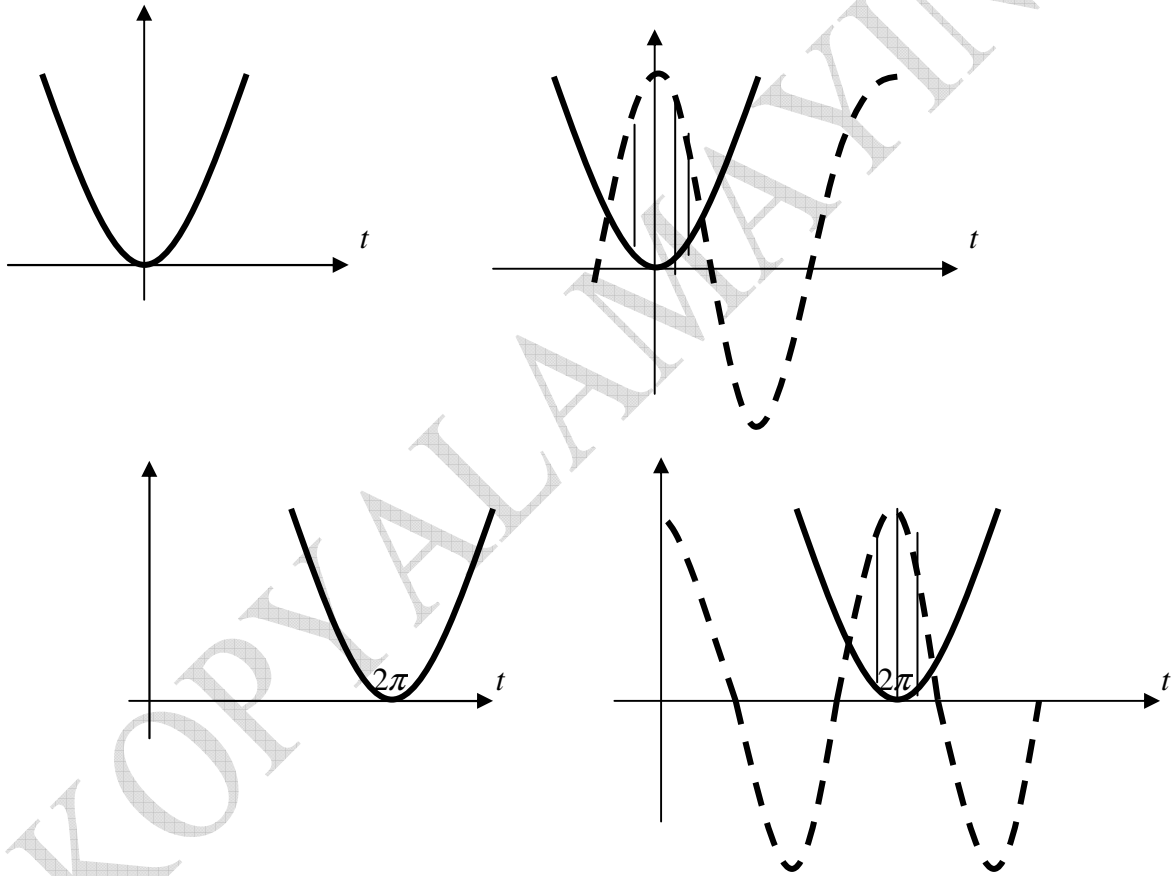
$$y_2(t) = y_1(t - t_0) = \cos(t - t_0) x(t - t_0)$$

denklem özel durum $t_0 = 2\pi$ kayma için göz önüne alınırsa,

$$y_2(t) = y_1(t - t_0) = \cos(t - 2\pi) x(t - t_0)$$

$$y_2(t) = y_1(t - t_0) = \cos t x(t - t_0) \dots\dots\dots (2)$$

olarak elde edilir. Bu durumda (1) ve (2) durumları göz önüne alındığında $y_2(t)$ çıkışı $y_1(t)$ çıkışının $t - t_0$ kadarlık ötelenmiş hali olduğundan $[(1) = (2)]$ sistem “zamanla değişmez (time invariant)” dir. Örneğin $x(t) = t^2$ ise aşağıdaki şekil üzerinde durumu görebilmekteyiz.



Şekil 38 $y(t) = \cos t x(t) [x(t) = t^2]$ fonksiyonunun zamandan bağımsız değişimi

Örnek

$$y(t) = \sin t \, x(t)$$

Sisteminin zamanla değişmez özelliğini $t_0 = 2\pi$ kaymasına göre inceleyin

Çözüm

Yukarıdakinin benzeri olan bu soruda nihai aşamada çıkış

$$y_2(t) = y_1(t - t_0) = \sin(t - 2\pi) x(t - t_0)$$

Buda,

$$y_2(t) = y_1(t - t_0) = -\sin t \, x(t - t_0)$$

olacağından $y(t - 2\pi) \neq y_2(t)$ durumu gereği sistem zamana bağımlı (time varying) olacaktır.

Örnek

$$y(t) = tx(t)$$

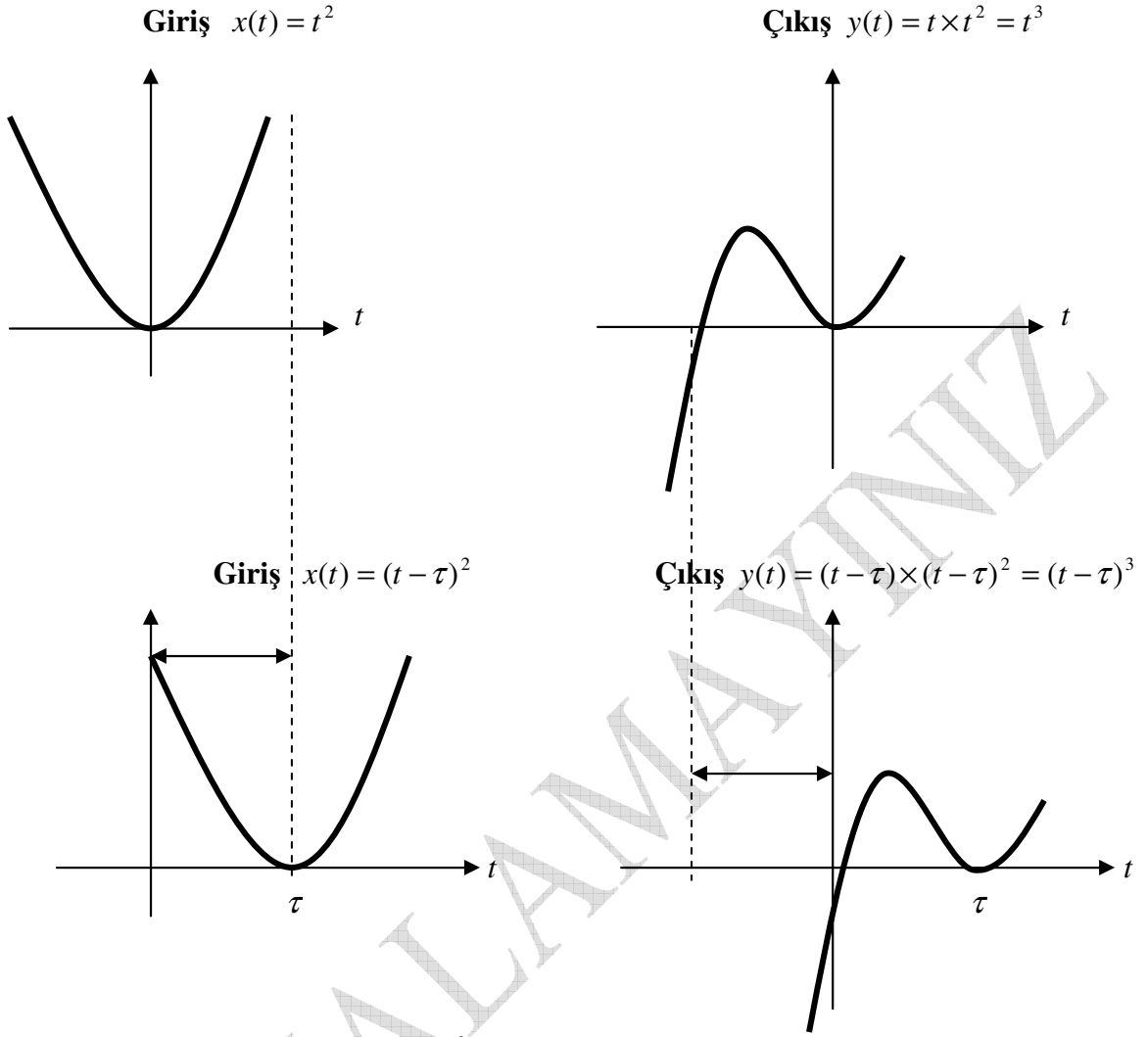
Sisteminin zaman değişmezlik/değişkenliğini $x(t) = t^2$ fonksiyonuna göre inceleyiniz.

Çözüm

Normal koşullar altında eğer $y(t) = tx(t)$ incelenmiş olsaydı

$$y_2(t) = y_1(t - t_0) = (t - t_0) x(t - t_0)$$

durumundan dolayı $y(t - 2\pi) \neq y_2(t)$ olacağından sistem zamana bağımlı (time varying) olarak değişecekti. Ancak giriş fonksiyonunun $x(t) = t^2$ özel durumu için aşağıdaki şekil incelendiğinde



Şekil 39 $y(t) = t x(t)$ [$x(t) = t^2$] fonksiyonunun zamandan bağımsız değişimi

bunlara göre sistemin zamandan bağımsızdır.

Örnek

$$y(t) = x(at)$$

Sisteminin zaman değişmezlik/değişkenliğini inceleyiniz.

Çözüm

$$x_1(t) = x(at)$$

$$y_1(t) = x_1(t) = x(at)$$

t_0 lık bir öteleme için $(t - t_0)$ yeni giriş

$$x_2(t) = x_1(t - t_0) = x(a(t - t_0))$$

olurken bu durumda bunun çıkışı

$$y_2(t) = x_2(t) = x(a(t - t_0)) \dots\dots\dots(1)$$

olacaktır. Diğer yandan $y_2(t)$ aynı zamanda $y_1(t)$ nin $t - t_0$ kadar ötelenmiş hali olması gerekeceğinden

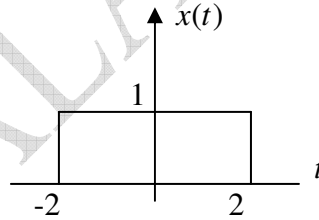
$$y_2(t) = y_1(t - t_0) = x(at - t_0) \dots\dots\dots (2)$$

olarak elde edilir. Bu durumda (1) ve (2) durumları göz önüne alındığında $y_2(t)$ çıkışı $y_1(t)$ çıkışının $t - t_0$ kadarlık ötelenmiş hali olmadığından $[(1) \neq (2)]$ sistem “zamanla değişen (time varying)” dir.

Not : $y(t) = x(at)$ denkleminde $a = 1$ alındığında çözüm takip edilirse sonuç “zamandan bağımsız (time invariance)” olarak bulunur. Bundan dolayı $y(t) = x(at)$ şeklindeki ifadelerin yalnız $a = 1$ için çözümleri “zamandan bağımsız” olarak çıkar.

Örnek

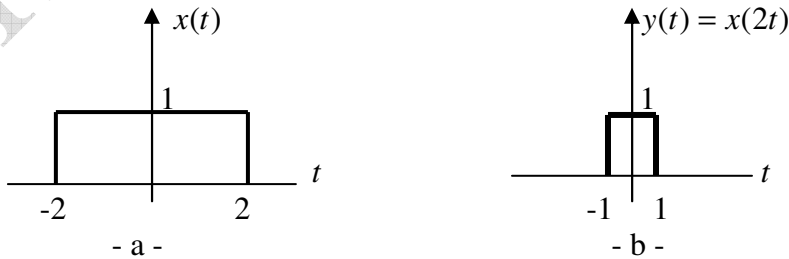
Aşağıdaki şekilde $x(t)$ giriş işaretinin değişimi görülmektedir. Çıkış fonksiyonu $y(t) = x(2t)$ ise, böyle bir sistemin zamandan bağımsız olup olmadığını araştırın.



Şekil 40 Sistem girişi

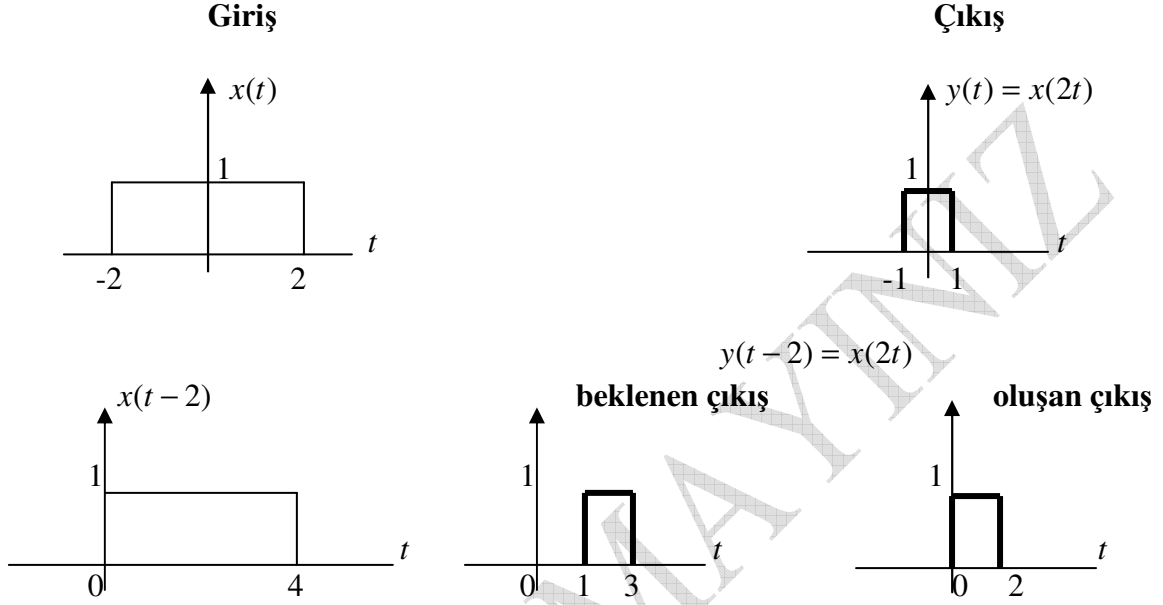
Çözüm

Giriş yukarıdaki gibi ise, buna bağlı $y(t) = x(2t)$ çıkışı aşağıdaki gibi olacaktır.



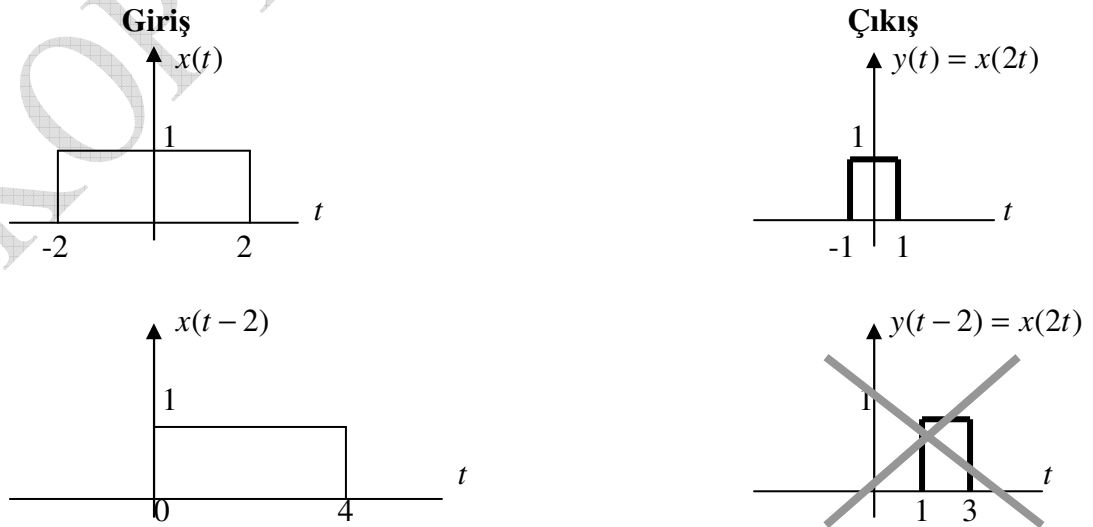
Şekil 41 $y(t) = x(2t)$ sistemi

Görüldüğü gibi, giriş işareti $x(t)$ iken, $x(2t)$ durumu, işaretin frekansının iki kat artmasından dolayı, tipik sıkıştırma işlemi gerçekleşecektir. Böylece $y(t) = x(2t)$ sistem çıkışı, girişin yarı zaman uzunluğunda, sıkışmış biçimde oluşacaktır. Bunu şekil (b) de görmekteyiz. Bu durumda sistem nasıl time-invariant (zamandan bağımsız) olur inceleyelim. Bunun için sistemi $t_0 = 2$ olmak üzere iki birimlik ötelediğimizi düşünelim. Bu haldeyken giriş ve çıkış arasındaki değişimi aşağıda görmekteyiz.



Şekil 42 $y(t) = x(2t)$ sisteminin zamana bağımlılığı (sıkıştırma işlemi)

Görüldüğü gibi giriş 2 birimlik ötelenmesine karşın, çıkış (1,3) aralığındaki beklenen çıkışa aksine girişin $x(2t)$ değerine bağlı olarak (0,2) aralığında sıkışma davranışını sürdürmüştür. Çünkü giriş fonksiyonun iki birimlik gecikmesi ile giriş (0,4) aralığında değişirken, sıkıştırma işlemi gereği çıkışta bunun (0,2) yarı aralığında değişmiştir. Bundan dolayı sistem zamandan bağımsız değildir. Yani zamana bağımlıdır (time varying). Oysaki zamandan bağımsız olsaydı, değişim aşağıdaki gibi gerçekleşecekti ;



Şekil 43 $y(t) = x(2t)$ zamandan bağımsız senaryo

Buradaki davranışta çıkışın girişin sıkıştırılmış hali olması özelliği göz önüne alınmamıştır. Çıkışın lineer özellikli bir giriş fonksiyonu olduğu kabulü yapılmıştır. Dolayısıyla $y(t) = x(2t)$ gerçeğine göre sonucun zamandan bağımsız olduğu söylenemez. Bunların sonucunda ortaya çıkan iki işlem türü vurgulanabilir :

Sıkıştırma : zamanla değişen/zamana bağlı işlem

Öteleme : zamandan bağımsız/zamana bağlı olmayan işlem

Örnek

$y(t) = \sin [x(t)]$ olarak verilen sistemin zamandan bağımsız/bağımlı özelliğini araştıralım.

$x(t)$ girişi için sistem çıkışını

$$y_1(t) = \sin [x_1(t)]$$

olarak düşünelim.

Sisteme ikinci bir giriş olarak

$$x_2(t) = x_1(t - \tau)$$

Buna karşılık gelen sistem çıkışı

$$y_2(t) = \sin [x_2(t)] = \sin [x_1(t - \tau)]$$

ötelenmiş durumu ilk çıkışta gözlemleyelim.

$$y_1(t - \tau) = \sin [x_1(t - \tau)]$$

sonuçta $y_2(t) = y_1(t - \tau)$ olduğundan sistem *zamandan bağımsızdır* (değişmezdir).

Sistemlerin Kararlılığı

Sistem kararlılığının değerlendirildiği birden fazla yorum mevcuttur. Sistemin normal (etiket) değerlerinde çalışması, veya dışarıdan bozucu girişlere rağmen sistemin normal şartlardaki çalışmasını sürdürebilmesi bu tanımlardan bazılarıdır. Sistemlerin transfer fonksiyonunun kutuplarına göre kararlılıklarının belirlenmesi bunlardan biridir. Alternatif olarak sistem sınırlı giriş-sınırlı çıkış özellikli olarak değerlendirilebilmektedir. Buna göre sistem sınırlı bir giriş için sınırlı bir çıkış üretiyorsa, sistem kararlıdır. Sistem girişi olan x

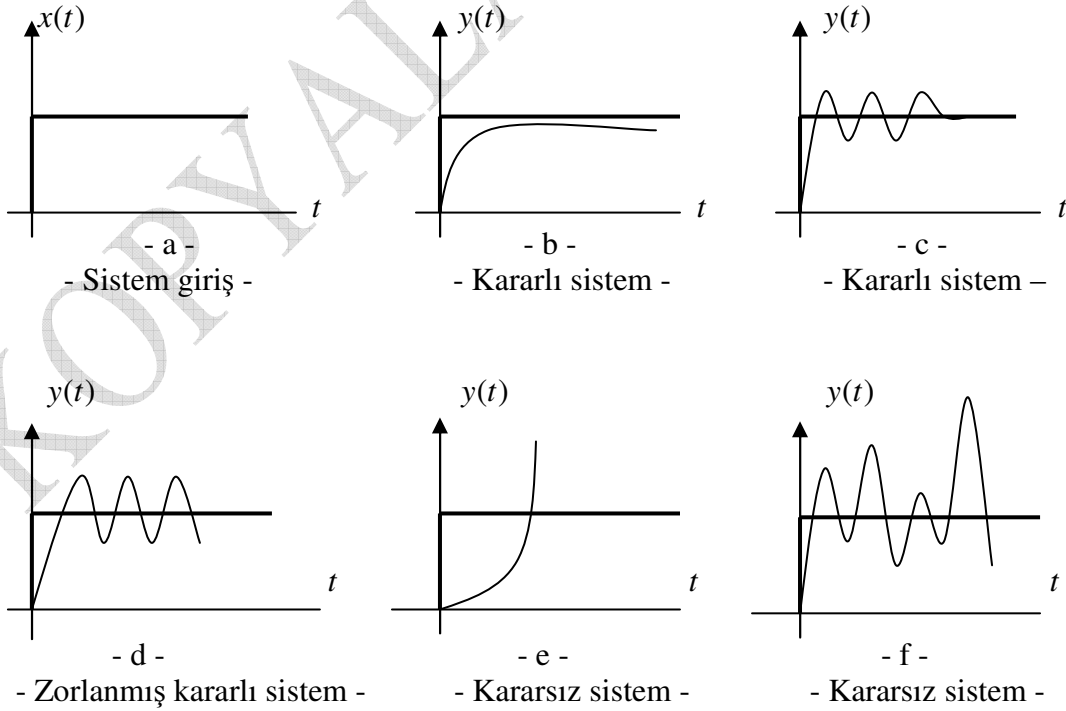
$$|x| \leq k_1$$

k_1 gibi bir sınırlama ile uygulandığında, sistem çıkındaki y

$$|y| \leq k_2$$

k_2 gibi bir sınır değere bağlı olarak oluşuyorsa sistemin hem giriş hem çıkış için sınırlı ve sonuçta sistemin kararlı olduğu ortaya çıkar. Burada k_1 ve k_2 sonlu reel değerlerdir. Stabilite veya kararlılık sistemin girişe cevabıdır. Kararlı bir sistem dışarıdan bir etki yapılmadığı sürece kararlı durumunu sürdürür ve dışarıdan etkiye maruz kaldığında ise, bu etki kalktığı zaman tekrar kararlı durumuna döner.

Aşağıda ilk şekilde kalın çizgilerle sistem sınırlı girişi $x(t)$ görülmektedir. Diğer şekillerde bu girişe karşılık gelen sistem cevapları normal çizgilerle gösterilmiştir. Bu yapıya bakarak ilk iki şekillerinde (b,c) sistemin sınırlı girişlere göre sınırlı cevaplar (çıkışlar) ürettiği, dördüncüde (d) zorlanmış da olsa sınırlı, son ikisinde de (e,f) sınırlı girişlere karşın sınırsız çıkışlar üretilmesi dolayısıyla kararsız sistemlerin oluştuğu görülmektedir.



Şekil 44 Sistem girişi $x(t)$ (a)'ya sistemin kararlı-kararsız cevapları

LTI Sistemlerinin Bellek Özelliği

Sistemin çıkışı girişin yalnızca o anki yapılan giriş değerine göre değişiyorsa sistemin bellek özelliğinin olmadığı kabul edilir. Buna göre sistemin ayrık ve sürekli formdaki girişlerinin impuls fonksiyonlarıyla gösterildiği denklemleri göz önüne aldığımızda

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \delta[n-k] \quad \text{ve} \quad x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \delta(t-\tau) d\tau$$

sistemine ait

$$y[n] = x[n] * h[n] \quad \text{ve} \quad y(t) = x(t) * h(t)$$

çıkışlarındaki sistem impuls cevaplarının

$$h[n] = 0, \quad n \neq 0$$

$$h(t) = 0, \quad t \neq 0$$

olduğu sürece LTI sistemin belleği olmadığı (memoryless) kabul edilecektir.

LTI Sistemlerinin (sınırlı-giriş sınırlı-çıkış) Kararlılığı

Eğer her sınırlı (bounded) giriş yine sınırlı çıkış oluşturuyorsa, sistem sınırlı-giriş, sınırlı-çıkış olarak kararlıdır (bounded input – bounded output stability). Bir sistemin kararlılığını sistem fonksiyonu durumundaki transfer fonksiyonu üzerinden incelemek daha önemli bir yöntemdir. Bu nedenle bir sistemin transfer fonksiyonuna giden

$$y(t) = x(t) * h(t)$$

denklemini göz önüne alındığında, $h(t)$ sistem impuls cevabı üzerinden kararlılığı ele alarak stabiliteyi inceleyeceğiz. Bunu LTI sistemlere uyarlayabilmek için örneğin $x(t)$ girişinin magnitud veya genlik olarak B ile sınırlı olduğunu düşünelim:

$$|x(t)| < B$$

Böyle bir sınırlı giriş karşılık, $y(t)$ sistem çıkışında $|y(t)| < C$ gibi sınırlı olması gerektiğinden yola çıkarak, sistem çıkış denklemini göz önüne alarak kararlılığı tespit etmeye çalışalım.

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) x(t-\tau) d\tau$$

çıkışın $|y(t)| < C$ magnituduna göre hesaplama yapılacağından

$$|y(t)| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) x(t-\tau) d\tau \right|$$

denkleminde integral tanımı gereği $h(\tau)x(t-\tau)d\tau$ ifadesinin altındaki alanın büyüklüğü (magnitudu), $|h(\tau)x(t-\tau)d\tau| = |h(\tau)||x(t-\tau)|$ ile verilen fonksiyonun altındaki alanın büyüklüğünden (magnitude) küçük veya eşit olması gerektiğinden, aşağıdaki ifade yazılabilir.

$$|y(t)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)||x(t-\tau)| d\tau$$

$|x(t)| < B$ koşuluna göre ifade

$$|y(t)| \leq B \int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)| d\tau$$

olarak yazılabilir. Bunun sağlanabilmesi için yani çıkışın sınırlı olabilmesinin tek yolunun

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)| d\tau < \infty$$

bağıntısından geçtiğini görmekteyiz. Sonuçta sınırlı ön giriş koşulundan sonra sürekli haldeki LTI sisteminin kararlı olabilmesi için diğer koşul olarak da sistem impuls cevabının sonlu veya integre edilebilir olması gerektiği ortaya çıkmaktadır.

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)| d\tau < \infty$$

Sistem impuls cevabının bu şekilde sınırlı olması aynı zamanda sistem çıkışının da sınırlı olması anlamına geleceğinden, sonuçta LTI sistemin kararlılığı için sınırlı-giriş – sınırlı-çıkış koşulu sağlanmış olmaktadır.

Örnek

Çıkışı

$$y(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$$

olan LTI sistemin girişi $x(t) = \delta(t)$ alınırsa kararlılığını inceleyelim.

Çözüm

Sistemin kararlı olabilmesi için

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)| d\tau < \infty$$

olması gerekiyordu. Buna göre

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t-\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau) h(t-\tau) d\tau = h(t)$$

$$h(t) = \int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau = u(t)$$

Yani birim basamak fonksiyonu elde edilir. Bu durumda birim basamak fonksiyonunun

$$\int_{-\infty}^{\infty} |u(\tau)| d\tau = \int_0^{\infty} d\tau = \infty$$

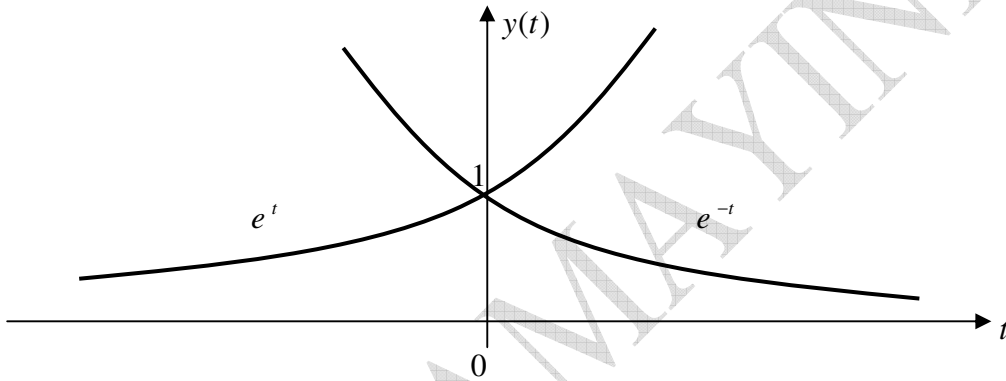
olduğundan sistem kararsızdır.

Örnek

$y(t) = e^{\pm t} u(t)$ Sisteminin kararlılığını inceleyiniz.

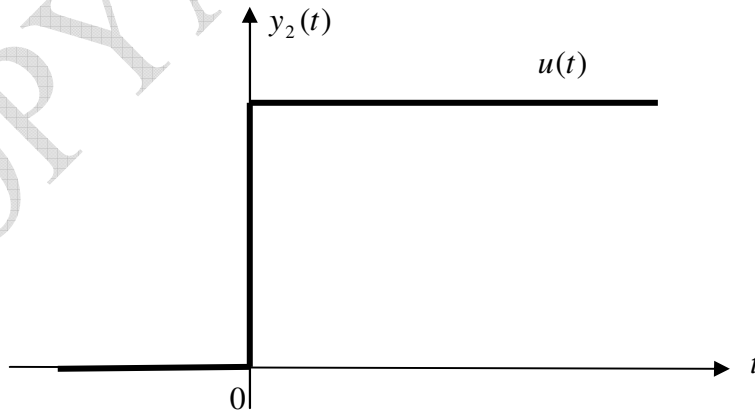
Çözüm

Normal koşullar altında e^t ve e^{-t} fonksiyonlarının sürekli artan ve azalan fonksiyonlar olduğunu sonuçta da e^t için kararsız, e^{-t} olduğunu aşağıdaki şekillerden de biliyoruz.



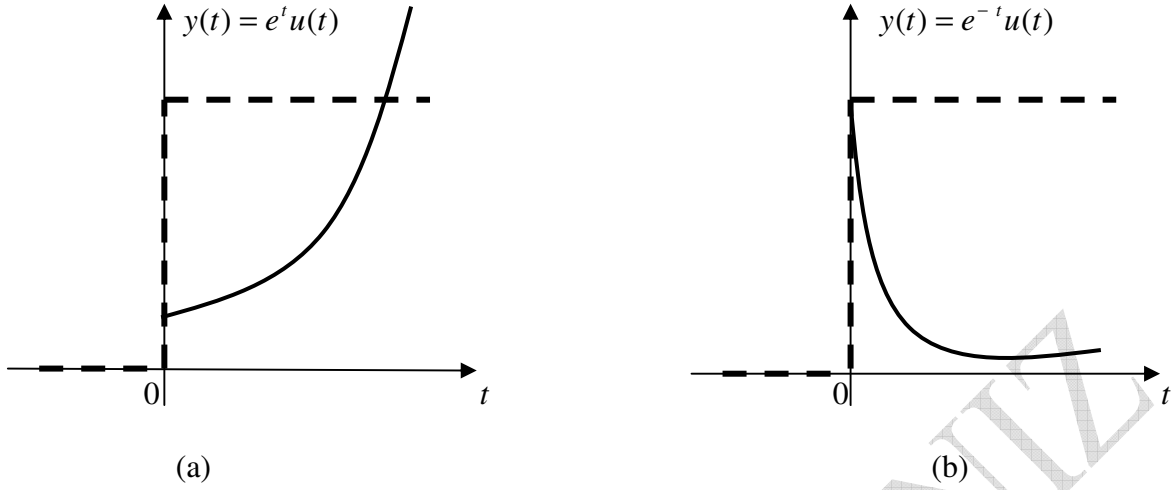
Şekil 45 Exponensiyel $e^{\pm t}$ fonksiyununun değişimi

Öte yandan $e^{\pm t}$ fonksiyonun birim basamak fonksiyonu ile çarpım halinde de olduğunu görüyoruz. Bunun için birim basamak fonksiyonunun değişimini tekrar hatırlayacak olursak,



Şekil 46 Sınırlı birim basamak giriş fonksiyonu

Buna göre eğer verilen sisteme ait $e^{\pm t}$ fonksiyonunun $u(t)$ ile çarpımı söz konusu olacağından $y(t) = e^t u(t)$ sistemi kararsızlığa, $y(t) = e^{-t} u(t)$ sistemide kararlı davranacaktır. Aşağıda her iki sistem gösterilmiştir.



Şekil 47 (a) Kararsız sistem, (b) Kararlı sistem

Şekilden görüldüğü gibi aslında $e^{\pm t}$ fonksiyonu $-\infty$ da uzantısı olan fonksiyon olmasına rağmen, birim basamak fonksiyonunun $u(t) = 0, t < 0$ özelliğinden dolayı, negatif bölümdeki davranış dikkate alınmamıştır.

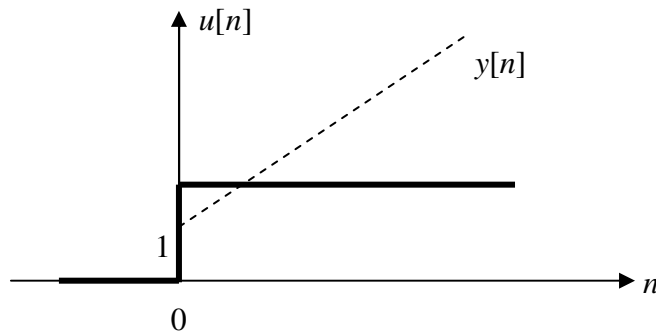
Örnek

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^n u[k] \text{ sistemi stabilmidir?}$$

Çözüm

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^n u[k] = (n+1) u[n]$$

olduğundan sistem girişle çarpım durumundaki “n” değişkenine bağlı olduğundan sürekli artan yönde olacağından stabil veya kararlı değildir. Aşağıda bu değişim görülmektedir.



Şekil 48 Sınırlı giriş-sınırsız çıkış sistem cevabı

Görüldüğü gibi sınırlı $u[n]$ girişlerine, karşılık sistem çıkış değeri $y[n]$, sürekli artan değerler aldığından herhangi bir alt ve üst değer arasında sınırlı olmadığından sistem kararlı değildir.

LTI SİSTEMLERİN KARARLILIĞI

Fourier Transformasyonunun ve Kararlılık

Bir LTI sistemin transfer fonksiyonunu aşağıdaki gibi göz önüne alırsak

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{(s + z_1)(s + z_2) \cdots (s + z_n)}{(s + p_1)(s + p_2) \cdots (s + p_n)}$$

$s = j\omega$ için sistemin Fourier transformasyonu karşılığının veya frekans cevabının

$$H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = \frac{(j\omega + z_1)(j\omega + z_2) \cdots (j\omega + z_n)}{(j\omega + p_1)(j\omega + p_2) \cdots (j\omega + p_n)}$$

olduğunu düşünürsek, böyle bir LTI sistemin kararlı olabilmesi için aşağıdaki koşulları sağlaması gerektiğini biliyoruz. Öncelikle sistem denkleminin (transfer fonksiyonunun) aşağıdaki yapıda olduğunu düşünelim.

$$H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = \frac{\beta}{(j\omega + \alpha)^2 + \beta^2}$$

Bu durumda sistemin karakteristik denkleminin $((j\omega + \alpha)^2 + \beta^2)$ kökleri $j\omega = -\alpha \pm j\beta$. Bu bilginin ışığında kararlılıkla ilgili aşağıdaki tespitlerimizi yapabiliriz.

1. Sistemin kutupları (p_1, p_2, \dots, p_n) yani kökleri $s = \sigma + j\omega$ ile belirlenmiş kompleks frekans düzleminin sol yarı düzleminde yer alıyorsa, sistem (asimtotik) kararlıdır. Bu durumda sistem kutupları yani kökleri

$$j\omega = -\alpha \pm j\beta$$

gibi olacaktır. Eğer $\beta \neq 0$ ise sistemin kararlı ve eşlenik kökleri (kutupları) var demektir. Ayrıca farklı β değerleri için sistemin tam kararlı hali için yalnızca negative kutupları söz konusu olur. Sistemin tam kararlı durumundaki sistem impuls cevabı

$$h(t) = e^{-\alpha t}$$

Görüldüğü gibi sistem $\alpha > 0$ olmak üzere $t \rightarrow \infty$ için $h(t) \rightarrow 0$ olacağından sistem kararlı olur.

2. Sistemin kutupları (p_1, p_2, \dots, p_n) yani kökleri $s = \sigma + j\omega$ ile belirlenmiş kompleks frekans düzleminin $s = j\omega$ imajiner ekseninde katlı kök olarak yer almıyorsa, sistem marjinal kararlıdır. Bu durumda sistem denklemi

$$H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = \frac{j\omega}{(j\omega)^2 + \beta^2}$$

gibi düşünüleceğinden karakteristik denklemin kökleri

$$j\omega = \pm j\beta$$

gibi katlı kök olmayarak imajiner ekseninde olacaktır. Bu durumdaki sistem impuls cevabı

$$h(t) = \cos \beta t$$

Görüldüğü gibi bu durumda sistem imajiner eksen üzerinde β frekansıyla salınım yapan bir sinusoidal dalga biçimindedir. Sistemi kararsız yapmadığı gibi kararlı da yapmayan belli frekansta (sistemin salınmaya devam eden periyodik özelliği) olduğundan impuls cevabının sıfır olması beklenmez.

3. Sistemin (p_1, p_2, \dots, p_n) kökleri veya kutuplarından herhangi biri $s = \sigma + j\omega$ kompleks frekans düzleminin sağ yarı tarafında yer alıyorsa, sistem kararsızdır.

$$H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = \frac{\beta}{(j\omega + \alpha)^2 + \beta^2}$$

Kararsız durumdaki sistemin kutupları

$$j\omega = \alpha \pm j\beta$$

Sistemin tam kararsız olduğu bu durumdaki sistem impuls cevabı

$$h(t) = e^{\alpha t}$$

Görüldüğü gibi sistem $t \rightarrow \infty$ için $h(t) \rightarrow \infty$ olacağından sistem kararsız olur.

4. Sistemin (p_1, p_2, \dots, p_n) kökleri veya kutuplarından herhangi biri $s = \sigma + j\omega$ kompleks frekans düzleminin $s = j\omega$ imajiner ekseninde katlı kök olarak yer alıyorsa, sistem kararsızdır. Bu durumda sistem denklemi

$$H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = \frac{j\omega}{[(j\omega)^2 + \beta^2]^2}$$

Böyle kararsız bir durumdaki sistemin karakteristik denklemine ait kökler (kutuplar)

$$j\omega = \pm j\beta$$

gibi kutuplardan tekrarlayan sayılarda olacaktır. Bu durumdaki sistem impuls cevabı

$$h(t) = t \cos \beta t$$

Görüldüğü gibi sistem $t \rightarrow \infty$ için $h(t) \rightarrow \infty$ olacağından sistem kararsız olur.

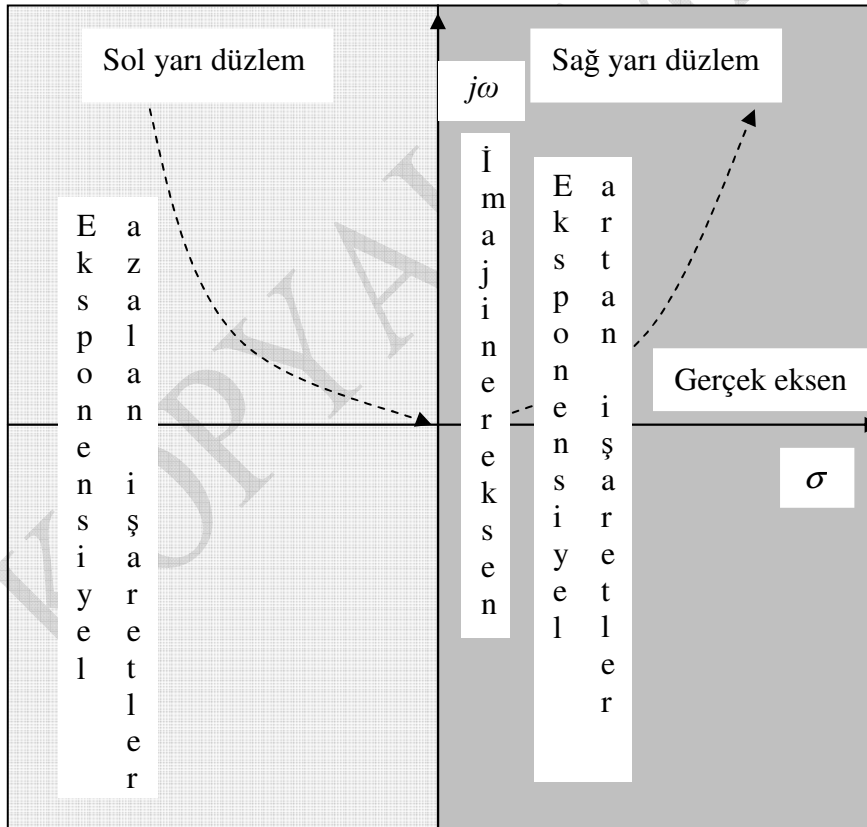
Fourier Transformasyonu ve Kararlılık

Bu koşulların Fourier transformasyonunun var olması ve olamaması durumuyla ilgili olduğu için, Fourier transformasyonunun ne tür sistemlere uyarlanabileceğinin de bilmemiz gerekiyor. Kararlılık bir anlamda aslında var olma kriteriyle de alakalıdır. Eğer bir işaretin Fourier transformasyonu alınamıyorsa bu işaretin aynı zamanda sistemde uygulanamaması gerekiyor. Çünkü bu tür işaretler monoton artan olarak sonsuza giden işaretlerse, sistemin çıkışında sonsuza gidecektir. Bu şekilde kontrol edilemeyen işaretler doğal olarak sistemi kararsız yapmaktadır. Bu açıdan Fourier transformasyonunun kararlı ve kararsız sistemlere uyarlanması önemlidir. Eğer denklemi

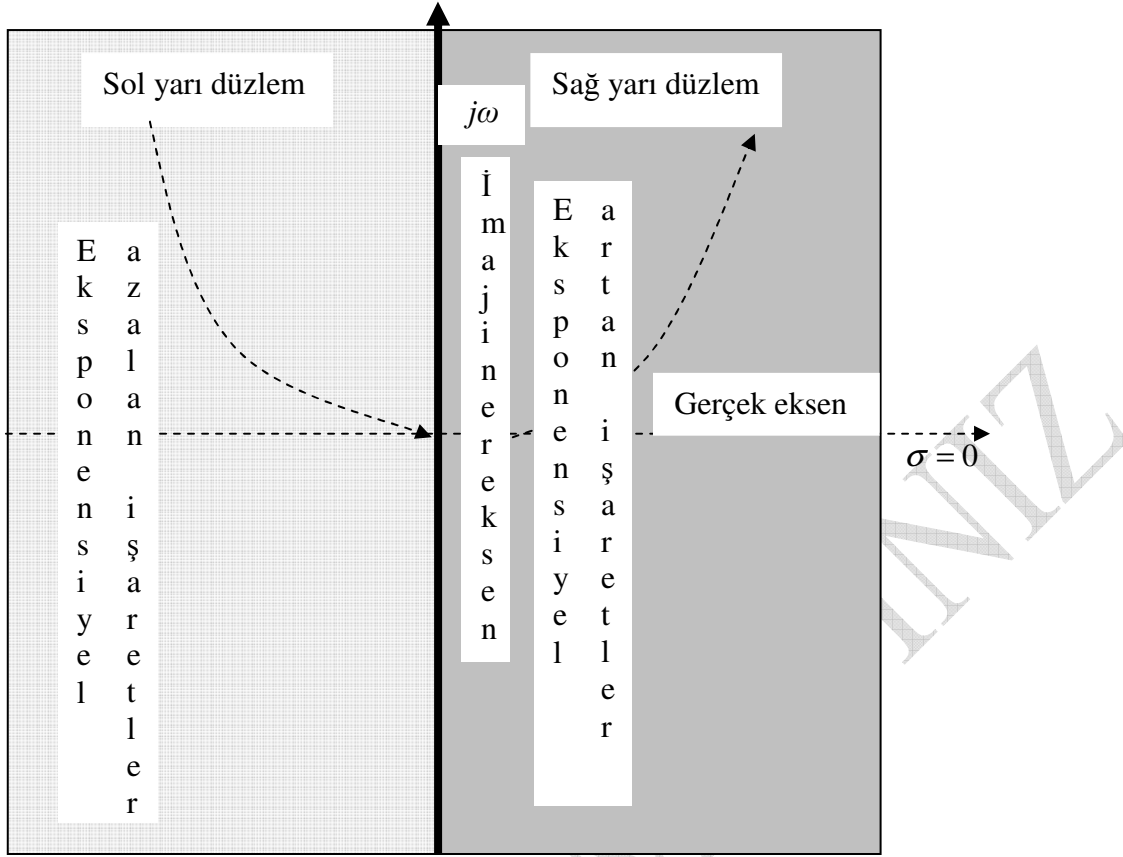
$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

olarak ele alırsak, ifadede görülen $j\omega$ terimi $s = \sigma + j\omega$ kompleks frekans düzleminin $\sigma = 0$ yaklaşımıyla oluştuğu görülecektir. Laplace düzlemi olarak $s = \sigma + j\omega$ ve Fourier düzlemi olarak $s = j\omega$ aşağıda verilmiştir.

Şekilden de görülebileceği gibi, Fourier düzlemi reel kısmın sıfır alınmasıyla ($\sigma = 0$) oluşan genel kompleks frekans düzleminin özel bir hali olarak görülmektedir. Fourier düzleminde yalnızca $j\omega$ biçiminde imajiner eksen mevcuttur (koyu düşey eksen).



Şekil 49 Kompleks frekans düzlemi ($s = \sigma + j\omega$)



Şekil 50 Fourier transformasyonu için kompleks frekans düzlemi ($s = j\omega, \sigma = 0$)

Marjinal kararlı sistem : Diğer bir deyişle Fourier transformasyonu kompleks frekans düzleminin reel kısmının sıfır alınmasıyla, yalnızca imajiner ($j\omega$) kısımdan oluşmaktadır. Bu duruma göre $s = j\omega$ düşünülebilir. Bu anlamda eğer sistemin transfer fonksiyonu

$$H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = \frac{(s + z_1)(s + z_2) \cdots (s + z_n)}{(s + p_1)(s + p_2) \cdots (s + p_n)}$$

$s = j\omega$ kutbunu gösterecek şekilde daha basit anlamda

$$H(j\omega) = \frac{(s + z_1)(s + z_2) \cdots (s + z_n)}{s^2 + p}$$

olarak gösterilirse, $s = \pm jp$ için sistem kutuplarını (pole) gösteren s değerleri imajiner eksende katlı olmayan kökler olacağından, sistem marjinal olarak kararlı olacaktır. Bu durumda $F(\omega)$ Fourier transformasyonu klasik biçiminde olacağından, exponensiyel olarak monoton artan işaretler için sonsuza giderek, var olma koşulunu sağlayamayacaktır. Bu sistemin kararsızlığına sebebiyet vereceğinden, burada çıkan sonuç $h(t) = \cos \beta t$ impuls cevabına sahip sistem hiç bir zaman için $t \rightarrow \infty$ durumunda $h(t) \rightarrow 0$ olmayacağından

sonuç 1 : Marjinal kararlı olan sistemlerin Fourier transformasyonu alınamaz.

Örnek

$$H(j\omega) = \frac{j\omega + 3}{-\omega^2 + 4}$$

Frekans (ω) domeninde transfer fonksiyonuyla verilen (frekans cevabı) sisteminin kararlılığını inceleyin.

Çözüm

$$H(j\omega) = \frac{j\omega + 3}{-\omega^2 + 4} = \frac{j\omega + 3}{(j\omega)^2 + 4}$$

Transfer fonksiyonunun karakteristik denklemine ait kökleri bulalım.

$$(j\omega)^2 + 4 = 0$$

$$(j\omega)^2 = -4 = 4j^2 = \pm 2j$$

Bulunan kökler $s = \sigma + j\omega$ ile belirlenmiş kompleks frekans düzleminin $s = j\omega$ imajiner ekseninde olup, katlı kök olmadığından, marjinal kararlı sistemdir. Fourier transformasyonu yöntemiyle tam kararlı davranamayan böyle bir sistemin analizi mümkün olmaz.

Kararsız sistem : tam kararsız bir sistemin impuls cevabı $h(t) = e^{\alpha t}$ ve $\alpha > 0$ olduğundan sistem hiç bir zaman için $t \rightarrow \infty$ durumunda $h(t) \rightarrow 0$ olmayacağından sistem kararsız olacaktır. Bu durumda $F(\omega)$ Fourier transformasyonu klasik biçiminden farklı olmayacağından yine, eksponensiyel olarak monoton artan işaretler için sonsuza giderek, var olma koşulunu sağlayamayacaktır. Bu sistemin kararsızlığına sebebiyet vereceğinden, burada çıkan sonuç

Sonuç 2 : Kararsız sistemlerin Fourier transformasyonu alınamaz.

Örnek

Sistem frekans cevabı

$$H(j\omega) = \frac{j\omega + 2}{-\omega^4 + 16}$$

olan sisteminin kararlılığını inceleyin.

Çözüm

$$H(j\omega) = \frac{j\omega + 2}{-\omega^4 + 16} = \frac{j\omega + 2}{(j\omega)^4 + 16}$$

Sistemin karakteristik denklemlerini elde etmeye çalışalım.

$$(j\omega)^4 + 16 = 0$$

$$(j\omega)^4 = -16 = (2j)^4 = \pm 2j \text{ ve } \pm 2j$$

Bulunan kökler $s = \sigma + j\omega$ ile belirlenmiş kompleks frekans düzleminin $s = j\omega$ imajiner ekseninde olup, katlı kök olduklarından, kararsız sistemdir. Fourier transformasyonu yöntemiyle böyle bir kararsız sistemin analizi mümkün olmaz.

Örnek

Sistem frekans cevabı

$$H(j\omega) = \frac{j\omega + 3}{(\omega^2 + 16)^2}$$

olan sisteminin kararlılığını inceleyin.

Çözüm

$$H(j\omega) = \frac{j\omega + 3}{(\omega^2 + 16)^2}$$

Sistemin karakteristik denklemlerini elde etmeye çalışalım.

$$(j\omega)^2 + 16 = 0$$

$$(j\omega) = \pm 4j$$

Karakteristik denklem $(\omega^2 + 16)^2$ biçiminde olduğundan $\pm 4j$ biçiminde iki tane daha kök olduğu anlaşılır. Buna göre verilen sistemin kökleri (kutupları)

$$\omega_{1,2} = +4j \text{ ve } \omega_{3,4} = -4j$$

şeklinde kendisini imajiner eksen üzerinde tekrarlayan yani katlı (repeated) köklerdir. Diğer bir deyişle aynı $+4j$ ve $-4j$ köklerinden imajiner eksen üzerinde ikişer tane olduğundan sistem kararsızdır.

Örnek

Frekans domenindeki transfer fonksiyonu

$$H(j\omega) = \frac{j\omega - 2}{-j\omega^3 - 7j\omega - 6}$$

olan sisteminin kararlılığını inceleyin.

Çözüm

$$H(j\omega) = \frac{j\omega - 2}{-j\omega^3 - 7j\omega - 6} = \frac{j\omega - 2}{-j\omega^3 - 3\omega^2 + 2j\omega + 3\omega^2 - 9j\omega - 6} = \frac{j\omega - 2}{(j\omega + 1)(j\omega + 2)(j\omega - 3)}$$

$$H(j\omega) = \frac{j\omega - 2}{(j\omega + 1)(j\omega + 2)(j\omega - 3)}$$

Sistemin paydasındaki kökleri (kutupları) araştırıldığında

$$j\omega = -1, \quad j\omega = -2 \quad \text{ve} \quad j\omega = 3$$

bulunmaktadır. Sistemin kararsız olabilmesi için yukarıdaki örnekte olduğu gibi, imajiner eksen üzerinde katlı kökler veya sağ yarı düzlemde en az bir kök (kutup) bulunması yeterli olduğundan, mevcut üç kök içersinden $j\omega = 3$, sağ yarı düzlemde olduğundan, sistem kararsızdır. Zaten bulunan kökler exponensiyel formda gösterildiğinde de $j\omega = -1$ için e^{-t} , $j\omega = -2$ için e^{-2t} köklerinin sönümlü yani kararlı davrandığı ancak $j\omega = 3$ için e^{3t} terimi, sürekli monoton artan formda belirsizliğe yol açarak sistemin kararsız davranmasına sebep olmaktadır. Sistemin kararsız davranmasına en az bir kök bile yeterli olduğundan, sonuçta sistem kararsız ve bundan dolayı Fourier transformasyonu yöntemiyle böyle bir kararsız sistemin analizi mümkün olmaz.

Kararlı sistem : Nihayet bu iki olumsuz koşulun yanısıra transfer fonksiyonunun paydası için kökler $(s + p_1)(s + p_2) \cdots (s + p_n)$ olarak $s = -p_1, -p_2, \dots, -p_n$ gibi reel değerlerden oluşuyorsa, bu durumda sistemin kökleri sol yarı düzlemde olacağından, sistem (asimtotik) kararlı olacaktır. Bu durumda kutuplar reel kısmı göstermek üzere $s = -p_1, -p_2, \dots, -p_n = \sigma = e^{-\sigma t}$ olarak $F(\omega)$ Fourier transformasyonunda $f(t) = f(t)e^{-\sigma t}$ yazılırsa bu kez klasik biçiminden farklı olarak,

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-\sigma t} e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-(\sigma + j\omega)t} dt$$

biçimine dönüşecektir. Buradan biliyoruz ki, $\sigma > 0$ için Fourier transformasyonu elde edilebilecektir ($F(\omega) < \infty$). Dolayısıyla burada sonlu değerler elde edildiğinden, exponensiyel olarak sönümlü (sıfıra yaklaşan) bir işaret söz konusu olacaktır. Bu sistemin kararlılığına, sebebiyet vereceğinden, buradan çıkan sonuç tam kararlı (asimtotik kararlı) bir sistemin sistem impuls cevabı olan $h(t) = e^{-\alpha t}$ ve $\alpha < 0$ olduğundan sistem daima $t \rightarrow \infty$ durumunda $h(t) \rightarrow 0$ olacağından

Sonuç 3 : Kararlı sistemlerin Fourier transformasyonu alınabilir.

Bu tür kararlılığa asimtotik kararlılık denilmektedir. Buradan mevcut 3 sonucu daha da genelleyip, tek bir başlık altında toparlayabiliriz.

Sonuç 4 : Yalnızca asimtotik kararlı sistemlerin Fourier transformasyonu alınabilir.

Diğer bir deyişle, Fourier transformasyonu yalnızca asimtotik kararlı sistemlere uygulanabilir.

Örnek

LTI sisteminin impuls cevabı $h(t) = e^{-3t}u(t) - e^{-2t}u(t)$ ise kararlılığını Fourier transformasyonu ile araştırın.

Çözüm

Verilen sistemin kararlılığını incelemek üzere transfer fonksiyonuna ait $H(\omega)$ Fourier transformasyonunun bulunması gerekmektedir.

$$\begin{aligned}
 H(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} (e^{-3t}u(t) - e^{-2t}u(t)) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-3t}u(t) e^{-j\omega t} dt - \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2t}u(t) e^{-j\omega t} dt \\
 &= \int_0^{\infty} e^{-3t} e^{-j\omega t} dt - \int_0^{\infty} e^{-2t} e^{-j\omega t} dt = \int_0^{\infty} e^{-(j\omega+3)t} dt - \int_0^{\infty} e^{-(j\omega+2)t} dt \\
 &= -\frac{1}{(j\omega+3)} (e^{-(j\omega+3)t})_0^{\infty} - \left(-\frac{1}{(j\omega+2)} (e^{-(j\omega+2)t})_0^{\infty} \right) = \\
 &= -\frac{1}{(j\omega+3)} (e^{-(j\omega+3)\infty} - e^{-(j\omega+3)0}) - \left(-\frac{1}{(j\omega+2)} (e^{-(j\omega+2)\infty} - e^{-(j\omega+2)0}) \right) \\
 &= -\frac{1}{(j\omega+3)} \left(\frac{1}{\infty} - 1 \right) - \left(-\frac{1}{(j\omega+2)} \left(\frac{1}{\infty} - 1 \right) \right) \\
 &= -\frac{1}{(j\omega+3)} (0-1) - \left(-\frac{1}{(j\omega+2)} (0-1) \right) = \frac{1}{(j\omega+3)} + \frac{1}{(j\omega+2)} = \frac{j\omega+2+j\omega+3}{(j\omega+2)(j\omega+3)} \\
 &= \frac{5+2j\omega}{(j\omega+2)(j\omega+3)}
 \end{aligned}$$

elde edilen

$$H(\omega) = \frac{5+2j\omega}{(j\omega+2)(j\omega+3)} = \frac{5+2j\omega}{-\omega^2+5j\omega+6}$$

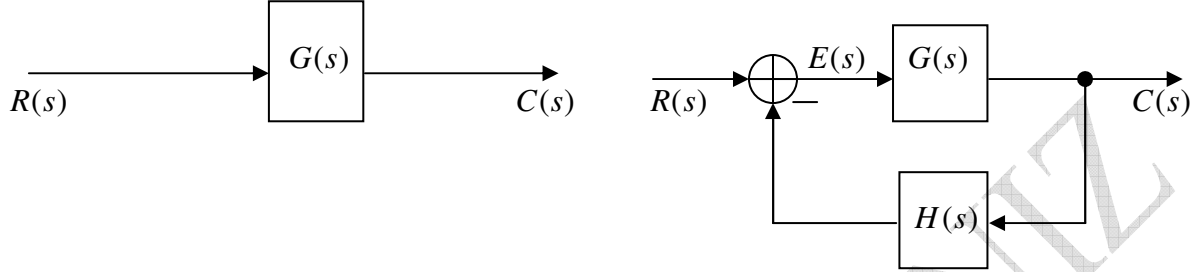
Sistem transfer fonksiyonunun kökleri (kutupları) araştırıldığında,

$$-\omega^2+5j\omega+6 = (j\omega+2)(j\omega+3) = 0$$

$j\omega = -2$ ve $j\omega = -3$ olarak kökler sol yarı düzlemde olduklarından system tam kararlı görünmektedir. Dolayısıyla böyle bir sistemin Fourier transformasyonu analizi mümkündür. Diğer yandan verilen $h(t) = e^{-3t}u(t) - e^{-2t}u(t)$ sistem fonksiyonuna bakıldığında e^{-3t} ve e^{-2t} gibi $t \rightarrow \infty$ için sönümlü fonksiyonlar mevcut olduğundan, sistemin kararlı olduğu belirgindir.

Kontrol Sistemleri ve Kararlılık

Kontrol sistemlerinin kararlılığı devrenin (sistemin) açık-çevrim ve kapalı-çevrim özellikli oluşuna göre değerlendirilir. Bunun için aşağıdaki genel bir açık-çevrim ve kapalı-çevrim (geri beslemeli) kontrol sistemlerini göz önüne alalım.



Şekil 51 Açık-çevrim ve kapalı-çevrim kontrol sistemleri

Açık çevrim kontrol sisteminin $H(s)=0$ için, kapalı-çevrim kontrol sisteminin özel hali olduğunu görmekteyiz. Bundan dolayı genelleme açısından, kapalı-çevrim kontrol sistemini ele almakta fayda var. Böyle bir sistemin girişiyle çıkışı arasındaki ilişkiyi (oranı) gösteren $T(s)$ kapalı-çevrim transfer fonksiyonu

$$T(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

gibi yazılabilir. Buradan

$$P(s) = G(s)H(s) = \text{Açık-çevrim transfer fonksiyonu}$$

$$T(s) = \text{Kapalı-çevrim transfer fonksiyonu}$$

$$Q(s) = 1 + G(s)H(s) = \text{Karakteristik denklem}$$

veya

$$Q(s) = 1 + P(s) = \text{Karakteristik denklem}$$

kavramları tanımlanabilir. Denklemlerden $P(s)$ açık-çevrim transfer fonksiyonuyla $Q(s)$ kapalı-çevrim transfer fonksiyonu arasında $Q(s) = 1 + P(s)$ bağıntısının olduğunu görmekteyiz. Sistem $T(s)$ transfer fonksiyonunda görülen $G(s)$ ifadesinden sistemin sıfırları (zeros)

$$G(s) = 0$$

olarak, karakteristik denklemi gösteren $Q(s)$ ifadesinden de sistemin kutupları (poles) $Q(s) = 0$ yazılarak bulunabilir.

$$1 + G(s) H(s) = 0$$

Buna göre $T(s)$ sistemine ait karakteristik denklemin kökleri, $1 + G(s) H(s)$ kapalı-çevrim transfer fonksiyonunun sıfırlarıdır (zeros). Gerek açık-çevrim gerekse kapalı-çevrim kontrol sisteminin ilgili transfer fonksiyonlarına bağlı kararlılıkları özellikle kutupları dikkate alınarak tespit edilir. Diğer bir deyişle kutuplar, transfer fonksiyonuna bağlı kontrol sistemlerinin kararlılıklarının belirlenmesindeki en önemli parametredir. Bu açıdan bakıldığında hem $G(s) H(s)$ görünümündeki açık-çevrim hem de $T(s)$ kapalı-çevrim transfer fonksiyonunun kutupları mevcuttur. Her ikisinde de kutupları bulabilmek için $G(s)H(s) = \infty$ ve $T(s) = \infty$ karşılıklarını sağlayan “s” düzlemindeki değerler (kökler) kutup olarak elde edilerek, sistemlerin kararlılığı araştırılır. Eğer sistemimiz açık-çevrim kontrol sistemi ise $G(s) H(s)$ ifadesini sonsuz (∞) yapacak ($G(s)H(s) = \infty$) değerlerin paydada olduğu görülecektir. Dolayısıyla paydanın sıfıra eşitlenmesiyle ilgili kutuplar (kompleks kökler) bulunacaktır. Öte yandan kapalı-çevrim kontrol sisteminin kutuplarını bulmak için kullanılacak $T(s) = \infty$ yaklaşımının anlamının bu ifadensin paydasını sıfır yapan değerler olduğundan buradan

$$1 + G(s) H(s) = 0$$

ifadesini araştırmak yeterli olacaktır. Bulunacak karakteristik denkleme ait kökler aynı zamanda aranan kutuplar olacaktır. Gerek açık-çevrim gerekse kapalı-çevrim kontrol sistemi aşağıdaki gibi

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = b_m \frac{d^m x(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} x(t)}{dt^{m-1}} + \dots + b_1 \frac{dx(t)}{dt} + b_0 x(t)$$

$$\sum_{k=0}^n a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^m b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}$$

bir diferansiyel denklemlerle tanımlanabilirdi. Bu denklem biraz daha düzenlendiğinde $s \equiv d/dt$ türev operatörü kullanılırsa mevcut denklem $T(s), G(s), H(s)$ veya $G(s)H(s)$ biçimlerinden biri olarak

$$[a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0] Y(s) = [b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0] X(s)$$

$$T(s), G(s), H(s), G(s)H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{P_m(s)}{Q_n(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}$$

$$T(s), G(s), H(s), G(s)H(s) = \frac{P_m(s)}{Q_n(s)} = K \frac{(s - z_1)(s - z_2) \dots (s - z_{m-1})(s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2) \dots (s - p_{n-1})(s - p_n)}$$

gibi yazılabilir. Burada K dönüşen ifadedeki oluşacak b_m / a_n biçimindeki kazanç parametresi, “z” sistem sıfırı (zero) ve “p” ise kararlılığı belirleyen ve bunun için birinci derecede bulunulması gereken kutup (pole) değişkendir.

Görüldüğü gibi aranan $G(s)H(s)$ açık-çevrim ve $1+G(s)H(s)$ kapalı-çevrim transfer fonksiyonları yukarıda açık olarak verilen $\frac{P_m(s)}{Q_n(s)}$ yapısında olduğu sürece, bu tür kontrol sistemlerinin kararlılığı için başvurulacak kutupların paydadaki $Q_n(s)$ ifadesinden

$$Q_n(s) = 0$$

yazılarak

$$(s - p_1)(s - p_2) \cdots (s - p_{n-1})(s - p_n) = 0$$

$p_1, p_2, \dots, p_{n-1}, p_n$ olarak bulunabileceği görülmektedir. Kapalı-çevrim kontrol sisteminin kararlılığı daha karmaşık olduğundan bazen, açık-çevrim kontrol sistemi üzerinden kapalı-çevrim kontrol sisteminin kararlılığı analiz edilir. Yer-kök eğrisi (root locus), Nyquist ve Bode yöntemleri bu tarzda teknikler olup, açık-çevrim transfer fonksiyonunun analizi üzerinden kapalı-çevrim kontrol sisteminin kararlılığını belirlemekte kullanılmaktadırlar.

Bu açıdan yaklaşırsak, açık-çevrim ve kapalı-çevrim kontrol sistemleri arasındaki yukarıdaki $Q(s) = 1 + P(s)$ ilişkisi incelendiğinde $Q(s)$ kapalı-çevrim sisteminin kutuplarının, $P(s)$ açık-çevrim sisteminin kutupları olduğu görülmektedir. Öte yandan $P(s)$ açık-çevrim sisteminin sıfırlarının ise bu kez $T(s)$ sistem transfer fonksiyonunun kutupları olduğu görülmektedir. Bunların ışığında yukarıda blok diagramı verilen kapalı-çevrim kontrol sisteminin kararlılığıyla ilgili olarak çıkarılacak bazı sonuçlar vardır.

- Kapalı-çevrim kontrol sisteminin kararlı olabilmesi için kutuplarının “s” düzleminin sol yarı tarafında bulunması gerekir.
- Buna göre $1 + G(s)H(s)$ Karakteristik denklemin kökleri “s” düzleminin sol yarı tarafında olması gerekir. Çünkü $1 + G(s)H(s)$ denkleminin kökleri yani sıfırları, kapalı-çevrim sisteminin kutupları olduğundan, “s” düzleminde sol yarı tarafta bulunmaları gerekir.
- $G(s)H(s)$ Açık-çevrim sisteminin (transfer fonksiyonunun) kararlı olabilmesi için kutuplarının “s” düzleminin sol yarı tarafında bulunması gerekir.

Bütün bunlara ek olarak sınırlı-giriş sınırlı-çıkış kararlılık sistemi gile kapalı-çevrim sisteminin kararlılığındaki arasında önemli bir sonuç ortaya çıkmıştır.

Sonuç : Kapalı-çevrim kontrol sisteminin kararlılığındaki kutup yöntemi, sınırlı-giriş sınırlı-çıkış kararlılığını $(\int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)| d\tau < \infty)$ sağlamaktadır. Bunun terside doğrudur.

Açık-çevrim ve Kapalı-çevrim Kontrol Sistemlerinin Kararlılığı

Burada yukarıda vurgulanan sonuçlar özetlenmiştir. Her iki durumdaki kontrol sisteminin kararlılığı ilgili transfer fonksiyonlarındaki açık çevrim ve kapalı-çevrim transfer fonksiyonlarındaki bulunacak kutuplarına göre tespit edilmektedir. Bunun için açık-çevrim kontrol sistemi için aranan kutuplar $G(s)=0$ ifadesinden, kapalı-çevrim kontrol sistemi içinse $1+G(s)H(s)=0$ ifadesinden elde edilerek değerlendirmeler yapılacaktır. Buna göre $s = \sigma + j\omega$ kompleks frekans düzleminde göz önüne alınan gerek açık-çevrim gerekse kapalı-çevrim kontrol sistemlerinin kararlılığı üç aşamada incelenmektedir.

1. Eğer ilgili kontrol sisteminin kutupları ($G(s)=0$ veya $F(s)=0$ olarak karakteristik denklemin kökleri) sol yarı düzlemdeyse sistem kararlı veya asimtotik olarak kararlıdır.

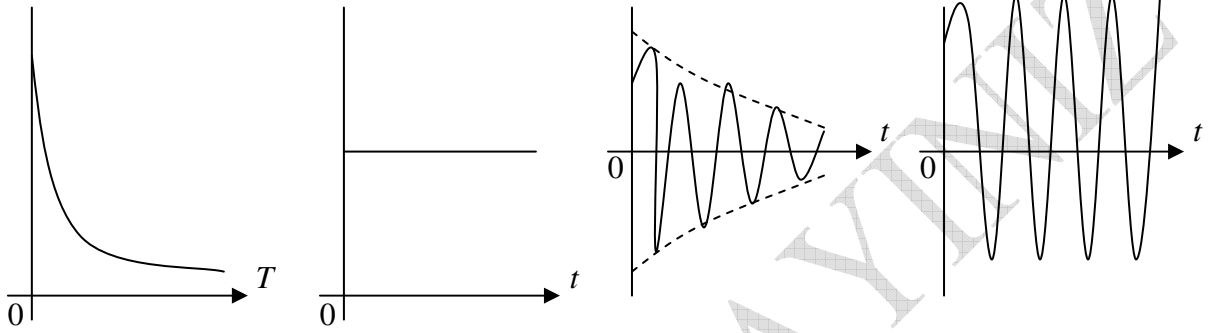
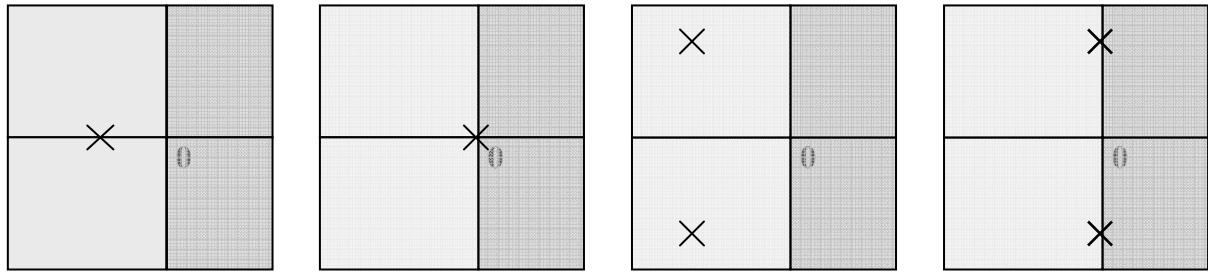
2. Eğer ilgili kontrol sisteminin kutuplarından ($G(s)=0$ veya $F(s)=0$ olarak karakteristik denklemin köklerinden) herhangi biri sağ yarı düzlemdeyse veya imajiner eksen üzerinde tekrarlayan kökler varsa sistem kararsızdır.

3. Eğer ilgili kontrol sisteminin kutupları ($G(s)=0$ veya $F(s)=0$ olarak karakteristik denklemin kökleri) sağ yarı düzlemde değilse ve imajiner eksen üzerindeki kökler tekrarlayan kökler yoksa sistem marjinal olarak kararlıdır.

Aşağıda bu üç duruma ait kompleks frekans düzlemindeki köklerin dağılımı verilmiştir. Şekillere bakıldığında (a,b,c) deki sistemlerin, kökler sol yarı düzlemde olduklarından kararlı oldukları görülmektedir. Ancak (d) deki sistemin kökleri imajiner eksen üzerinde ve tekrarlamayan yapıda olduğundan, zorlanmış kararlı sistem olarak anılmaktadırlar. Bu tür sistemlerin kararlılıklarının kritik olduğu ve dışarıdan en küçük olumsuz müdahalelerde kararsız olabilmesi oldukça olası olan sistemlerdir. Diğer yandan (e,f,g) deki sistemler ise kökleri sağ yarı düzlemde olduklarından kararsız sistemlerdir. Burada (h) de görülen sistemin kökleri imajiner eksen üzerinde ve de katlı kök (koyu renkte) yapısında olduğundan kararsızdır. Hatırlanacağı gibi stabiliteyi belirleyen durum

$$s = \sigma + j\omega$$

olarak verilen kompleks frekansın reel kısmını oluşturan σ parametresine göre belirlenmekteydi. eğer bu değer negatif ise ($\sigma < 0$), bu durumda “s” kökü düzlemin sol yarı tarafında yer alacağından, kararlı sistemi oluşturmaktaydı. Reel kısmın pozitif ($\sigma > 0$) olması durumunda ise, kök sağ yarı düzlemde yer alacağından kararsız sistemi göstermekteydi. Sol yarı düzlemin kararlılığı göstermesi ($\sigma < 0$) ile gösterildiğinden bu durumda sisteme ait ifadenin $e^{st} = e^{(\sigma + j\omega)t}$ şeklinde düşünülüp, burada ($\sigma < 0$) durumunda ifadenin $e^{st} = e^{(-\sigma + j\omega)t}$ olması sebebiyle sönümleneceği veya bir değere yakınsayacağından kökleri sol yarı düzlemdeki sistem kararlı kabul edilmektedir. Diğer yandan sağ yarı düzlemdeki kararsızlık ise ($\sigma > 0$) ile gösterildiğinden bu durumda kök $e^{st} = e^{(\sigma + j\omega)t}$ olarak sonsuz büyük değere gideceğinden sönümleme veya bir limit değer söz konusu olmayacağından, kökleri sağ yarı düzlemdeki sistem kararsız kabul edilmektedir.

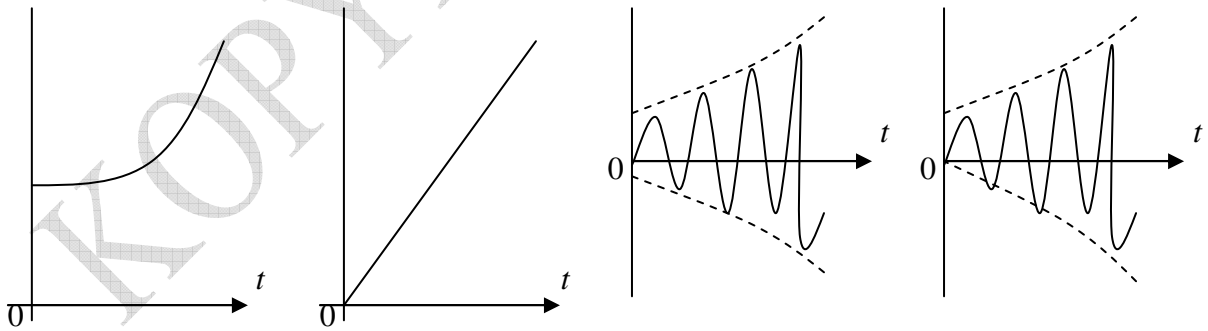
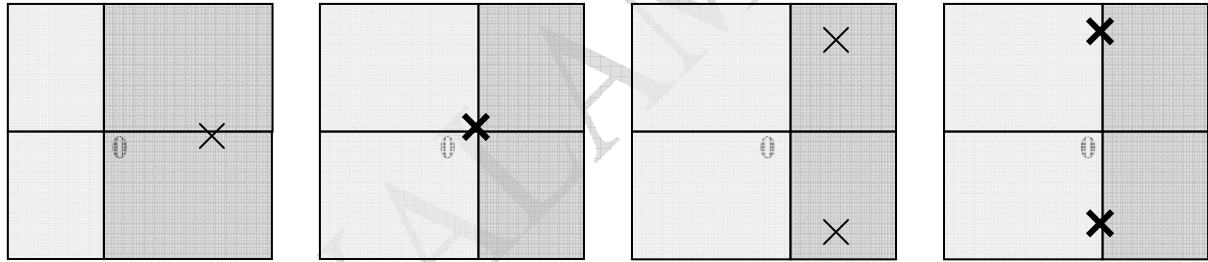


- a -

- b -

- c -

- d -



- e -

- f -

- g -

- h -

Şekil 52 Karakteristik köklerin yerleşimi ve ilgili işaretlerin gösterimi

Açık-çevrim ve kapalı-çevrim kontrol sistemlerinin kararlılığı üzerine

Yukarıda açık-çevrim kontrol sisteminin transfer fonksiyonu olarak

$$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)}$$

bulunmuştu. Bu sistemin kutup ve sıfırlara bağlı yazımının

$$G(s) = \frac{P_m(s)}{Q_n(s)} = K \frac{(s - z_1)(s - z_2) \cdots (s - z_{m-1})(s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2) \cdots (s - p_{n-1})(s - p_n)}$$

olarak ifade edildikten sonra, kutupların sol yarı düzlemde bulunma koşullarına göre geçerli tüm stabilite kriterlerinin uygulanabilmesi söz konusudur. Bu sistemlerde, sistemin olumsuz durumunda, kutup yerleşimlerinin değiştirilmesi söz konusu değildir. Oysa kapalı-çevrim kontrol sisteminde,

$$H(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

şeklindeki transfer fonksiyonunun da, stabilite kriterleri, fonksiyon sıfırlar ve kutuplardan oluşan ifadeye indirgendikten sonra yapılmaktaydı. Ancak bu sistemlerde sağ yarı düzlemde kararsız görünen kutuplarının yerleşimlerini ayarlamak mümkündür.

Örnek

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 1.25 \frac{dy(t)}{dt} + 0.375 y(t) = x(t)$$

Sisteminin kararlılığını araştırın.

Çözüm

Verilen sistemin karakteristik denklemini elde etmek için başlangıç koşulları sıfır olarak ele alınırsa, sistem transfer fonksiyonu aşağıdaki gibi bulunur. Eğer başlangıç koşulları sıfır kabul edilerek

$$\frac{d^n y}{dt^n} = s^n X(s)$$

olarak alınırsa

$$\left[\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 1.25 \frac{dy(t)}{dt} + 0.375 y(t) = x(t) \right] = \left[(s^2 + 1.25s + 0.375)Y(s) = X(s) \right]$$

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{s^2 + 1.25s + 0.375}$$

buradan karakteristik denklem $H(s)$ transfer fonksiyonunun paydası olarak çözülürse,

$$s^2 + 1.25s + 0.375 = 0 = (s + 0.75)(s + 0.5)$$

$$s_1 = -0.75 \text{ ve } s_2 = -0.5$$

elde edilen kutuplar (karakteristik denklemin kökleri) sol yarı düzlemde olduğundan sistem kararlıdır (stabildir). Çıkış denklemi ise

$$y(t) = c_1 e^{-0.75t} + c_2 e^{-0.5t}$$

$$y(t) = c_1 e^{-0.75t} u(t) + c_2 e^{-0.5t} u(t)$$

Örnek

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 0.25 \frac{dy(t)}{dt} - 0.375 y(t) = x(t)$$

Sisteminin kararlılığını (stabilitesini) araştırın.

Çözüm

Verilen sistemin karakteristik denklemi

$$s^2 + 0.25s - 0.375 = 0 = (s + 0.75)(s - 0.5)$$

ve kökleri

$$s_1 = -0.75 \text{ ve } s_2 = 0.5$$

denklem köklerinden biri ($s_2 = 0.5$) sağ yarı düzlemde olduğundan sistem stabil değildir (unstable). Çıkış denklemi ise

$$y(t) = c_1 e^{-0.75t} + c_2 e^{0.5t}$$

veya

$$y(t) = c_1 e^{-0.75t} u(t) + c_2 e^{0.5t} u(t)$$

Örnek

$[s^3 + 7s^2 + 14s + 8]Y(s) = X(s)$ sisteminin kararlılığını inceleyin.

Çözüm

Verilen sistemin transfer fonksiyonu

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{s^3 + 7s^2 + 14s + 8} = \frac{1}{(s+1)(s+2)(s+4)}$$

Sistemin karakteristik denklemin kökleri (özdeğerleri)

$$s_1 = -4, s_2 = -2 \text{ ve } s_3 = -1$$

olarak kompleks frekans düzleminin sol yarı düzleminde (left half plane, LHP) yer aldıkları için sistem stabildir (kararlı).

Örnek

$$(D+3)(D^2+10D+16)y(t) = (D+7)x(t)$$

Sisteminin kararlılığını inceleyin.

Çözüm

$$D = \frac{d}{dt} = s$$

$$(s+3)(s^2+10s+16)Y(s) = (s+7)X(s)$$

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{s+7}{(s+3)(s^2+10s+16)}$$

$$H(s) = \frac{s+7}{(s+3)(s+2)(s+8)}$$

Sistemin tek sıfırı

$$s_1 = -7$$

karakteristik denklemin kökleri $(s+2)(s+2)(s+8) = 0$

$$s_2 = -3,$$

$$s_3 = -2$$

$$s_4 = -8$$

Sistemin karakteristik denkleminin kökleri (özdeğerleri) sol yarı düzlemde olduğundan sistem kararlıdır.

Örnek

$$H(s) = \frac{s+3}{s^3+4s^2+9s+36}$$

Sisteminin kararlılığını inceleyin

Çözüm

$$H(s) = \frac{s+3}{s^3+4s^2+9s+36} = \frac{s+3}{(s+4)(s^2+9)}$$

karakteristik denklemin kökleri $(s+4)(s^2+9)=0$

$$s_1 = -4, \quad s^2 = -9 = j^2 9 = (j3)^2 = \pm j3$$
$$s_{2,3} = \pm j3$$

Sağ yarı düzlemde ve imajiner eksen üzerinde tekrarlayan kökler olmadığı için sistem marjinal stabildir.

Örnek

$$H(s) = \frac{s+1}{(s+3)(s^2+4)^2}$$

Sisteminin kararlılığını inceleyin

Çözüm

$$H(s) = \frac{s+1}{(s+3)(s^2+4)^2}$$

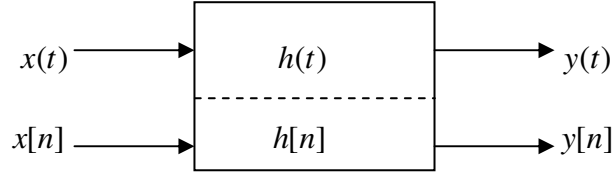
Karakteristik denklemin kökleri $(s+3)(s^2+4)^2=0$

$$s_1 = -3, \quad s^2 = -4 = j^2 4 = (j2)^2 = \pm j2$$
$$s_{2,3} = \pm j2$$

Sağ yarı düzlemde kökler olmamasına rağmen imajiner eksen üzerinde tekrarlayan kökler olduğu için sistem stabil değildir.

Lineer-Zamanla Değişmeyen (LTI) Sistemlerin Özellikleri

Bu bölümde LTI sistemlerin özellikleri daha önce ele alınan lineerity, causality, mmemory, time invariant özelliklerine benzer olarak ele alınacaktır. Ancak bu kez *sistem impuls cevabı* dikkate alınarak bu analizler yapılacaktır. Bunu biraz açarsak,



Şekil 53 Sistem girişleri, impuls cevapları ve çıkışları

tipinde sürekli veya ayrık-zamanlı sistemlerin özelliği dikkate alınacaktır. Burada en önemli parametre olarak sistem impuls cevabı olarak anılan $h(t)$ veya $h[n]$ dikkate alınarak incelemeler yapılacaktır. Bahsedilen sistem impuls cevabı çıkış ve girişler arasındaki oranlardan hareketle, sistem davranışlarının analiz edilmesinde ve ortaya konulmasında oldukça önemli bir rol oynamaktadır.

$$H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$$

Verilen ifadelerden de görüldüğü gibi “sistem impuls cevabı” olarak anılan bu kavram kullanıldığı sistemin özelliğine bağlı olarak $h(t)$, $h[n]$, $H(\omega)$ ve $H(s)$ formlarında ortaya çıkmakta ve her bir durumda ilgili olduğu sistemlerdeki “çıkışın girişe oranı” olarak ifade edilerek, sistem davranışlarının incelenmesinde oldukça önemli katkılar sağlamaktadır. Bu haliyle “sistem fonksiyonu” olarak nitelense de en belirgin adıyla “**sistem transfer fonksiyonu**” yapısıyla çok bilinen, başvurulan ve kullanılan bir sistem davranışlarını içeren önemli bir fonksiyondur. Bu bölümde sistem özellikleri daha ziyade bu parametreye bağlı olarak yapılacaktır. Hali hazırda sistem transfer fonksiyon özelliği, sistem özelliklerinin girişten, çıkışa aktarılmasını sağlamada etkin olduğu için kullanılırlan, “sistem impuls cevabı” kavramı da, sistem girişlerinin delta fonksiyonu ile impuls dizisi olarak sisteme girilmesi ve bu impuls benzeri girişlerin bu parametreyle işlem görmesini ifade etmek için kullanılmaktadır.

1. LTI Sistemlerde Değişme (commutative) Özelliği

LTI sistemlerde ayrık ve sürekli halde değişme özelliği vardır. Bu özellik sistem impuls cevabının göz önüne alınmasıyla convolution işlemi yardımıyla gösterilecektir.

$$x[n] * h[n] = h[n] * x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] x[n-k]$$
$$x(t) * h(t) = h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) x(t-\tau) d\tau$$

Her iki durumda sistem toplam çıkışı $y[n]$ veya $y(t)$ değişmemektedir.

$$y[n] = x[n] * h[n] = h[n] * x[n]$$
$$y(t) = x(t) * h(t) = h(t) * x(t)$$

2. LTI Sistemlerde Dağılma (distributive) Özelliği

LTI sistemlerde ayrık ve sürekli halde dağılma özelliği vardır.

$$x[n] * (h_1[n] + h_2[n]) = x[n] * h_1[n] + x[n] * h_2[n]$$
$$x(t) * (h_1(t) + h_2(t)) = x(t) * h_1(t) + x(t) * h_2(t)$$

Her iki durumda sistem toplam çıkışı $y[n]$ veya $y(t)$ değişmemektedir.

$$y[n] = x[n] * (h_1[n] + h_2[n]) = x[n] * h_1[n] + x[n] * h_2[n]$$
$$y(t) = x(t) * (h_1(t) + h_2(t)) = x(t) * h_1(t) + x(t) * h_2(t)$$

3. LTI Sistemlerde Birleşme (associative) Özelliği

LTI sistemlerde ayrık ve sürekli halde birleşme özelliği vardır.

$$x[n] * (h_1[n] * h_2[n]) = (x[n] * h_1[n]) * h_2[n]$$

$$x(t) * [h_1(t) * h_2(t)] = [x(t) * h_1(t)] * h_2(t)$$

Her iki durumda sistem toplam çıkışı $y[n]$ veya $y(t)$ değişmemektedir.

$$y[n] = x[n] * (h_1[n] * h_2[n]) = (x[n] * h_1[n]) * h_2[n]$$

$$y(t) = x(t) * [h_1(t) * h_2(t)] = [x(t) * h_1(t)] * h_2(t)$$

4. LTI Sistemlerin Terslenebilir (invertibility) Özelliği

Bildiğimiz gibi eğer bir sistemin $x(t)$ girişini, şekilden görüldüğü gibi $y(t)$ çıkışından elde ediliyorsa sistem “terslenebilir, tersden elde edilebilir (invertible)” özelliktedir denir. Bundan dolayı eğer bir sistemin inversi varsa sistemin terslenebilir (invertibility) özelliği var demektir. Buna göre

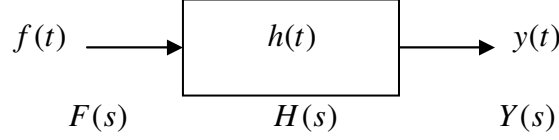
$$h(t) * h_1(t) = \delta(t)$$

$$h[n] * h_1[n] = \delta[n]$$

koşulları gerekir. Görüldüğü gibi $h_1(t)$ ye sahip system $h(t)$ ye sahip sistemin inversi durumundadır. Fourier, Laplace ve Z transformasyonu olarak bilinen işaret işleme teknikleri direkt ve invers özellikleriyle bu tür sistemlerden esinlenilerek geliştirilmişlerdir.

DURUM-UZAY SİSTEMLERİ

Bir sistem genel anlamda $f(t)$ giriş, $h(t)$ sistem fonksiyonu ve $y(t)$ çıkışı olan fonksiyonel mekanizma olarak düşünüldüğünde kapalı bir kutu izlenimini vermektedir.



Şekil 54 Genel bir sistem

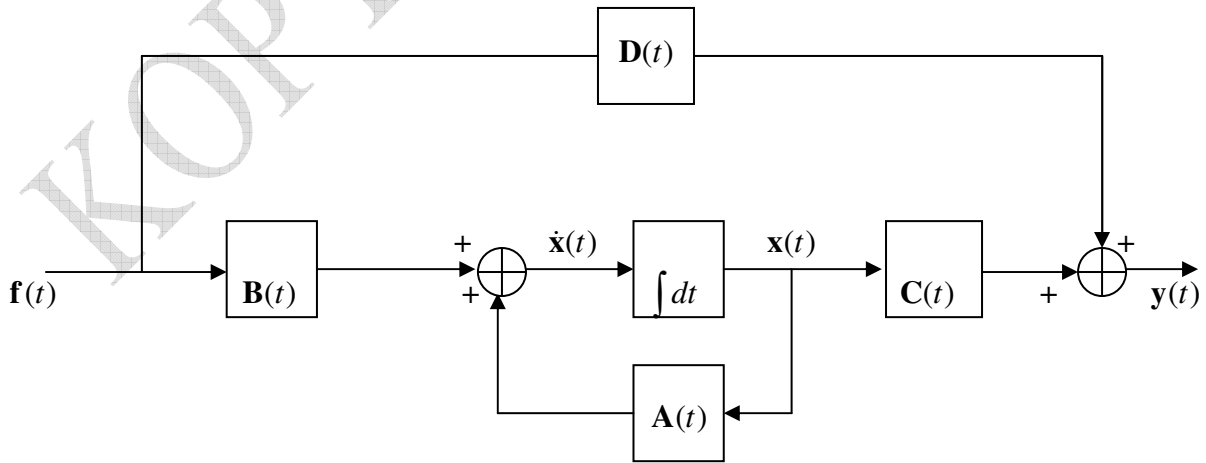
$$y(t) = f(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) h(t - \tau) d\tau$$

$$Y(s) = H(s)F(s)$$

Gerek “ t ” gerekse “ s ” modunda sistem çıkışını izlemek bu anlamda son derece sınırlı bir bilgiyle mümkün olmaktadır. Sistemin dışıyla ilgili bir gösterim olup, sistem yani kutunun içi hakkında fazla bir bilgiye sahip değiliz. Sistemin yalnızca giriş ve çıkışıyla ilgili harici bilgi edinmekteyiz. Sistem dinamikleriyle ilgili sistemin dahili bileşenleri hakkında bilgi edinememekteyiz. Dahası, klasik gösterimdeki böyle bir sistemin verilen denklemleri aşağıdaki gibi son derece karmaşık yapıda olan bir diferansiyel denklemle verilmişse analizi daha da zorlaşır.

$$\frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = b_m \frac{d^m f}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} f}{dt^{m-1}} + \dots + b_1 \frac{df}{dt} + b_0 f$$

Kaldı ki böylesine bir “ n ” ci dereceden diferansiyel denklemin çözümündeki zorluk ortadadır. Gerek $y(t)$ gerekse $Y(s)$ yaklaşımında sistemin giriş ile kontrolü ve de çıkıştan gözlemlenmesi de ayrıca handikap yaratmaktadır. Oysa ki verilen kompakt gösterim yerine sistem eğer aşağıdaki gibi düşünülse analizi daha farklı olabilirdi.



Şekil 55 Lineer sürekli zaman sistemin durum-uzay gösterimi

Böyle bir yaklaşımın denklemleri de aşağıdaki gibi olacaktır.

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t) \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t) \mathbf{f}(t)$$
$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}(t) \mathbf{x}(t) + \mathbf{D}(t) \mathbf{f}(t)$$

Bu gösterimde göze ilk çarpan $\mathbf{x}(t)$ durum değişkenleri (state variables) olup, klasik modeldeki kutu olarak verilen sistemin görünmeyen dinamik değişkenleridir. Modeldeki her bir değişken vektörel özellikte olup, bu çok girişli-çok çıkışlı bir sisteme karşılık gelmektedir. Modeldeki ilk denklem, durum değişkenleri ile $\mathbf{f}(t)$ sistem girişi arasındaki ilişki üzerine kurulu olup, **sistem denklemi** (state equation) olarak anılır. İkinci denklem, sistem çıkışının sistem durum değişkenleri türünden ifade edilmesini sağlayan **sistem çıkış denklemi** (output equation) olarak bilinir. Her iki denklemi içeren sisteme de **durum-uzay analizi** (state-space analysis) denilmektedir.

Durum-uzay yaklaşımını farklı kılan, vurgulandığı gibi $\mathbf{x}(t)$ durum değişkenleridir. Durum değişkenlerinin sağladığı avantaj şudur ; zaman domenindeki sistem içindeki mümkün tüm işaretler veya değişkenler, bu durum değişkenleri cinsinden ifade edilebilmektedirler. Bu neyi mümkün kılar sorusuna gelince, istenilen herhangi bir işaret veya değişkenin sistem içindeki hangi değişkenlerle ilişki içinde olduğu bilinmektedir. Diğer bir deyişle sistemdeki söz konusu işaretleri hangi durum değişkenlerinin etkilediği ortaya konulmaktadır. Sistemdeki işaret veya değişkenler hangi durum değişkenlerini etkiliyor veya onlardan etkileniyorsa bu durum bu modelde rahatlıkla ortaya konulabilmektedir. Bundan dolayı, sistemdeki işaretleri elde etme veya onların herhangi farklı anlardaki davranışlarını inceleyebilmek için, onları etkileyen durum değişkenlerine erişmek yeterli olacaktır. Eğer aranan işaret, fonksiyon veya değişkenler durum değişkenlerine bağlı olarak elde edilmişse, durum değişkenlerinin çeşitli t anlarındaki davranışları, aynı zamanda sistemdeki direkt ilgili olduğu işaretler hakkında da bilgi sağlayabilecektir. Özetlersek, bu modelde eğer durum değişkenlerinin tamamını t zaman domeninde bilirsek, sistemdeki olası tüm işaret veya değişkenlerin herhangi bir andaki davranışını belirleyebilmemiz mümkün olmaktadır.

Yeni modele sistem çıkışıyla ilgili yaklaştığımızda ise, sistem çıkışı denkleminde (ikinci denklem) ve blok şemadan da görüldüğü gibi çıkış, giriş ile durum değişkenlerinden oluştuğu için, artık klasik harici sistem yerine, sistemin iç (dahili) unsurlarını içeren bir tanımlama söz konusudur.

Öte yandan $\mathbf{x}(t)$ durum değişkeninin türev versiyonunu gösteren $\dot{\mathbf{x}}(t)$ fonksiyonuna gelince, blok diagramdan da görülebileceği gibi, durum değişkenlerinin dinamik oluşunu göstermektedir. Modelden $\mathbf{x}(t)$ gibi dinamik bir elemanın veya fonksiyonun değişimini izlemek sistem analizi açısından oldukça önemlidir. Buna göre çıkış gözlemlenerek (*gözlemlenebilirlik*), gerektiğinde geri besleme yoluyla sisteme müdahale edilerek, girişten bu değişkenlerin istenildiği gibi kontrolü (*kontrol edilebilirlik*) sağlanabilmektedir. Bu anlamda $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t) \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t) \mathbf{f}(t)$ olarak verilen durum denklemindeki $\mathbf{x}(t)$ dinamik durum değişkenindeki $\dot{\mathbf{x}}(t)$ değişimlerin gözlemlenmesi ve kontrol edilmesi sağlanmaktadır. Sonuçta, sistem $\mathbf{x}(t)$ gibi (kondansatör ve endüktans gibi) dinamik elemanlar içerdiği sürece değişim içerisinde olacaklarından, bu değişimler $\dot{\mathbf{x}}(t)$ olarak ifade edilmelidirler. Çünkü sistem çıkışını veya sistemdeki diğer işaretleri veya değişkenleri bu durum değişkenlerine bağlı olarak ifade edeceğimizden, bu işaretlerin doğru tespit edilebilmeleri için hem $\mathbf{x}(t)$ hem de değişimlerini gösteren $\dot{\mathbf{x}}(t)$ fonksiyonlarına ihtiyaç vardır, ve öncelikle bunların hesaplanması gerekmektedir.

Durum ve Çıkış Denklem Parametrelerinin Tanımı

Durum-uzay modelindeki durum değişkenlerini girişlerle ilişkilendiren ilk denklem ve çıkışın durum değişkenleri ve sistem girişine bağlı ifadesini niteleyen ikinci denklem

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t) \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t) \mathbf{f}(t)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}(t) \mathbf{x}(t) + \mathbf{D}(t) \mathbf{f}(t)$$

göz önüne alındığında, modeli daha anlaşılır kılabilmek için **A**, **B**, **C** ve **D** parametrelerine bir göz atmamız gerekiyor.

A = sistem matrisi olup, mevcut durumların (x), nasıl (\dot{x}) olarak durumlar üzerinde değişiklikleri etkilediğini gösterir. Eğer durum değişikliği, mevcut durumlara bağlı değilse (mevcut durumlardan kaynaklanmıyorsa), bu matris sıfır olacaktır.

B = kontrol matrisi olup, sistem girişinin nasıl (\dot{x}) olarak durumlar üzerinde değişiklikleri etkilediğini gösterir. Eğer durum değişikliği sistem girişine bağlı değilse bu matris sıfır gösterecektir. Eğer sistem girişi, sistem durumlarını (states) kontrol edebiliyorsa, matris sıfır olmayacaktır. Bu anlamda giriş, durumların hepsiyle veya bir kısmıyla ilişkili olabilir. Bu durumlarda, sistem girişinin durumları kısmi veya tam kontrol edebilmesinden söz edilebilir. Kısaca bu matris, sistemin **kontrol edilebilirliği** ile ilgilidir. Öte yandan sistem girişinin olmadığı, yani başlangıç koşullarının söz konusu olduğu durumda da bu matris sıfır olacaktır.

C = çıkış matrisi olup, (x) durumlarıyla sistem çıkışı arasındaki ilişkiyi gösterir. Bu matris yoluyla sistem durumları (states), çıkıştan tam veya kısmi olarak gözlemlenebilir. Bu matrisin sıfır olması, çıkışın gözlemlenemez olduğunu gösterir. Kısaca bu matris, sistemin **gözlemlenebilirliği** ile ilgilidir.

D = ileri besleme (feed-forward) matrisi olup, sistem girişinin direkt olarak sistem çıkışını etkilemesini gösterir. Geri beslemeli sistemler için, bu matris sıfır olacaktır.

Yukarıda denklemi verilen durum-uzay sistemleri dahilinde göz önüne alınabilecek bir LTI kontrol sisteminde ilgili matrislerin boyutları aşağıdaki gibi olacaktır.

$$\mathbf{A}_{p \times p}, \mathbf{B}_{p \times q}, \mathbf{C}_{r \times p}, \mathbf{D}_{r \times q}, x_{p \times 1}, \dot{x}_{p \times 1}, u_{q \times 1}, y_{r \times 1}$$

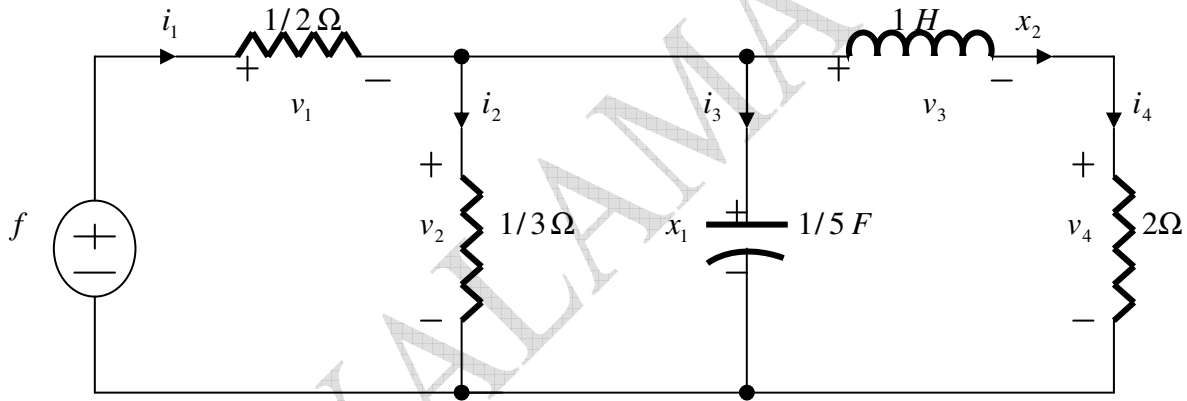
Durum-Uzay sistemi yaklaşımında sistem, fark edildiği gibi klasik yaklaşımdan farklı olarak $\mathbf{x}(t)$ sistem değişkenlerini göz önüne almaktadır. Sistemdeki değişimler $\dot{\mathbf{x}}(t)$ ile kontrol ve gözlem altında tutulmaya çalışılmaktadır. Ayrıca yine fark edildiği gibi sistem karmaşık yapıdaki “ n ” ci dereceden diferansiyel denklem yerine, birinci dereceden denklemlerle ifade edildiğinden, çözüm çok daha kolay olacaktır.

Vektörel gösterime dayandığından, bu şekilde çok giriş-çıkışlı bir gösterimi mümkün kıldığı gibi, en önemlisi de zaman domeninde gösterilebilmesidir. Bilindiği gibi zaman domeninde sistem analizi artık modern sistem ve kontrol teorisinin özelliklerindendir. Çünkü yüksek dereceli diferansiyel denklemlerle gösterilen sistemlerin çözüm ve analizlerinin zor ve de çok kompleks olduğu bir gerçektir. Oysaki n .ci dereceden kompleks bir diferansiyel denklemi çözmek yerine çok girişli çok çıkışlı bir modelde n tane birinci dereceden diferansiyel denklemin çözümü daha basit olacaktır.

Böyle bir gösterime sahip durum-uzay sisteminde durum değişkenlerinin etkisine bakalım. Blok diagramdan ve denklemlerden $\mathbf{x}(t)$ sistem durum değişkenlerinin bir sonraki davranışını / içeriğini gösteren $\dot{\mathbf{x}}(t)$ türev operatörünün integrasyonu, $\mathbf{y}(t)$ sistem çıkışını etkilemektedir. Sistem cevabında etkili olan $\mathbf{x}(t)$ sistem durum değişkeni, her yeni andaki değeriyle çıkışı etkilemektedir. Diğer bir deyişle sistem durum değişkenlerindeki $\mathbf{x}(t)$ yapısındaki her bir değişim, çıkış üzerinde etkili olmaktadır. Bu, durum değişkenlerindeki değişimin etkisini her an için, çıkıştan gözlemlenmesi açısından önemlidir (gözlemlenebilirlik kriteri). Diğer yandan, sistem çıkışının (zorlanmış cevap veya sıfır-durum cevabı (zere-state response)) elde edilmesinde önemli olan durum değişkenlerinin belirlenmesinde, $\mathbf{f}(t)$ sistem harici girişinin etkili olduğunu ayrıca görmekteyiz. Hatta sistem girişi, durum değişkenlerinin belirlenmesinde, dinamikler hariç en önemli etkidir. Bu açıdan sistem çıkışını etkileyen sistem durum değişkenlerinin belirlenmesinde / kontrolünde, sistem harici girişinin son derece önemli olduğunu görmekteyiz (kontrol edilebilirlik kriteri).

Örnek

Aşağıda verilen RLC devresini göz önüne alarak devredeki voltaj olarak f girişine karşın devre elemanlarının üzerindeki çıkışları hesaplamaya çalışalım.



Şekil 56 RLC Devresi

Çözüm

Buna göre durum değişkeni olarak atayacağımız değişkenleri belirleyelim. Bunlar bir kondansatördeki gerilim değişimi ile bir endükstandan geçen akımın değişimleri gösterecektir.

$$i = C \frac{dv}{dt} = x_1$$

$$v = L \frac{di}{dt} = x_2$$

Devredeki kondansatörün üzerindeki gerilim (x_1) ile endüktransın üzerindeki akımın (x_2) değişimini yakından izlemeye çalışalım. Devredeki elemanlar üzerindeki i_1, i_2, i_3 ve i_4 ve akımlarıyla yine elemanlar üzerindeki v_1, v_2, v_3 ve v_4 gerilimleri bulmaya çalışalım. Eğer

(x_1) endüktans üzerindeki akım değişimlerini ve (x_2) de kapasite üzerindeki gerilim değişimlerini gösteriyorsa bunlara göre i_1, i_2, i_3 ve i_4 akımları ile x_1 değişkeni, v_1, v_2, v_3 ve v_4 gerilimleriyle de x_2 değişkeni arasında ilişkiler var olabilecektir. Bu anlamda kapasite üzerindeki i_3 akımı ile x_1 gerilimi arasında doğal olarak

$$i_3 = C \frac{dx_1}{dt}$$

bağıntısından dolayı

$$i_3 = C \frac{dx_1}{dt} = C\dot{x}_1 = \frac{1}{5} \dot{x}_1 = 0.2\dot{x}_1$$

gibi bir ilişkide söz konusu olacağını görmekteyiz. Bunun gibi devredeki dirençlerden dolayı, i_1, i_2, i_3 ve i_4 akımları x_2 kondansatör gerilimi cinsinden, benzer biçimde v_1, v_2, v_3 ve v_4 gerilimleri de x_2 endüktans akımı cinsinden yazılabilecektir.

Bunların ışığında devrenin analizi yapıldığında devredeki akımları oluşturan i_1, i_2, i_3 ve x_2 arasındaki düğüm yaklaşımına göre

$$i_3 = i_1 - i_2 - x_2$$

denklemi yazılabilir. Ayrıca kapasite üzerindeki i_3 akımı ise

$$i_3 = C \frac{dx_1}{dt} = C\dot{x}_1 = \frac{1}{5} \dot{x}_1 = 0.2\dot{x}_1$$

ayrıca birinci gözdeki gerilim kaynakları arasındaki

$$\frac{1}{2}i_1 + v_2 = f$$

burada $v_2 = x_1$ olduğundan denklem

$$i_1 = 2(f - x_1)$$

olur. Diğer yandan ikinci gözdeki çevre denkleminde

$$\frac{1}{3}i_2 = x_1$$

$$i_2 = 3x_1$$

Nihayet üçüncü gözdeki çevre denkleminde

$$-x_1 + \dot{x}_2 + 2x_2 = 0$$

$$\dot{x}_2 = -x_1 - 2x_2$$

Elde edilir. Böylece $i_3 = i_1 - i_2 - x_2$ denkleminde i_1, i_2 ve i_3 değerleri yerine yazılırsa

$$0.2\dot{x}_1 = 2(f - x_1) - 3x_1 - x_2$$

$$\dot{x}_1 = -25x_1 - 5x_2 + 10f$$

elde edilir. Sonuçta durum denklemi olarak \dot{x}_1 ve \dot{x}_2

$$\dot{x}_1 = -25x_1 - 5x_2 + 10f$$

$$\dot{x}_2 = -x_1 - 2x_2$$

seti elde edilir. Bu durum denklemlerinin ardından her olası çıkış durum değişkenleri x_1, x_2 ve giriş f işaretinin lineer kombinasyonlarından elde edilebilir. Bu anlamda devrenin mümkün kıldığı olası çıkışlar aşağıdaki denklemlerle gösterilmiştir.

$$v_1 = f - x_1$$

$$i_1 = 2(f - x_1)$$

$$v_2 = x_1$$

$$i_2 = 3x_1$$

$$i_3 = i_1 - i_2 - x_2 = 2(f - x_1) - 3x_1 - x_2 = -5x_1 - x_2 + 2f$$

$$i_4 = x_2$$

$$v_4 = 2i_4 = 2x_2$$

$$v_3 = x_1 - v_4 = x_1 - 2x_2$$

durum denklemlerinin çözümünden $x_1(t)$ ve $x_2(t)$ elde edildikten sonra, verilen herhangi bir $f(t)$ girişi için istenen i_1, i_2, i_3 ve i_4 akımları veya v_1, v_2, v_3 ve v_4 gerilim çıkış fonksiyonlarının hesaplanabileceğini görmekteyiz. Dolayısıyla dikkati başlangıçta tanımlanan x_1 ve x_2 değişkenlerinin çektiği görülmektedir. Bu iki değişken $x_1(t)$ ve $x_2(t)$ olarak bilindiği sürece sistemdeki hem i_1, i_2, i_3 ve i_4 akımları hem de v_1, v_2, v_3 ve v_4 gerilimlerinin hesaplanabileceğini görmekteyiz. Bu yolla herhangi bir t anındaki $x_1(t)$ ve $x_2(t)$ değişkenlerinin üreteceği değerler ile sistem çıkış fonksiyonları belirlenebilecektir.

Sistem çıkış denklemi olarak bilinen bu denklemlerin her birinin “ t ” anındaki çıkış değeri $x_1(t), x_2(t)$ sistem durumları ve $f(t)$ girişinden elde edilebilir. Elde edilen

$$\dot{x}_1 = -25x_1 - 5x_2 + 10f$$

$$\dot{x}_2 = -x_1 - 2x_2$$

durum denklemlerinin çözümünden $x_1(t)$ ve $x_2(t)$ elde edildikten sonra, verilen herhangi bir $f(t)$ girişi için istenen v_1, v_2, v_3 ve v_4 çıkış fonksiyonlarının hesaplanabileceğini görmekteyiz. Eğer elde edilen denklemleri t zamana bağlı olarak düşünersek, durum değişkenlerindeki değişimlerin ($\dot{x}_1(t)$ ve $\dot{x}_2(t)$) durum değişkenleri ($x_1(t)$ ve $x_2(t)$) ve sistem girişiyle ($f(t)$) ilgili bağıntısı aşağıdaki gibi yazılacaktır.

$$\dot{x}_1(t) = -25x_1(t) - 5x_2(t) + 10f(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = -x_1(t) - 2x_2(t)$$

sistem çıkışlarıyla ilgili olarak da aşağıdaki denklemler yazılabilecektir.

$$v_1 = f(t) - x_1(t)$$

$$i_1 = 2(f(t) - x_1(t))$$

$$v_2 = x_1(t)$$

$$i_2 = 3x_1(t)$$

$$i_3 = i_1 - i_2 - x_2(t) = 2(f(t) - x_1(t)) - 3x_1(t) - x_2(t) = -5x_1(t) - x_2(t) + 2f(t)$$

$$i_4 = x_2(t)$$

$$v_4 = 2i_4 = 2x_2(t)$$

$$v_3 = x_1(t) - v_4 = x_1(t) - 2x_2(t)$$

biraz daha düzenlersek,

$$i_1 = -2x_1(t) + 2f(t)$$

$$i_2 = 3x_1(t)$$

$$i_3 = -5x_1(t) - x_2(t) + 2f(t)$$

$$i_4 = x_2(t)$$

$$v_1 = -x_1(t) + f(t)$$

$$v_2 = x_1(t)$$

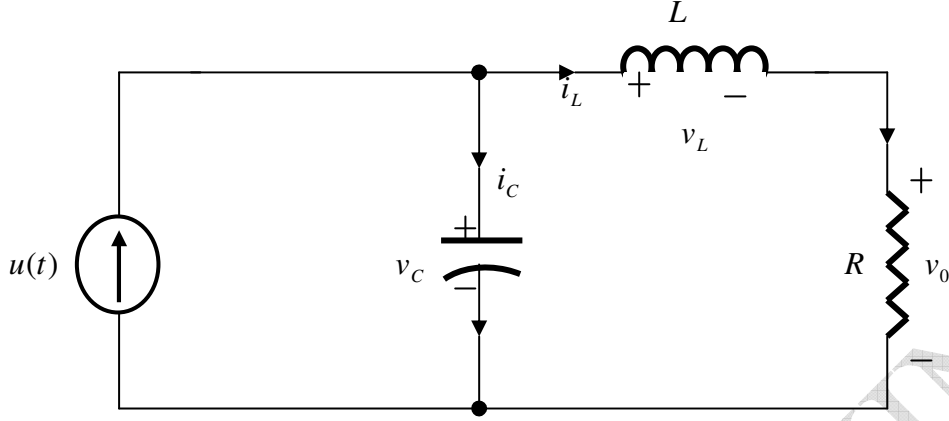
$$v_3 = x_1(t) - v_4 = x_1(t) - 2x_2(t)$$

$$v_4 = 2i_4 = 2x_2(t)$$

Görüldüğü gibi sistem durum değişkenleri olan $x_1(t)$ ve $x_2(t)$ yani $v_c(t)$ ve $i_L(t)$ bilindiği sürece, sistemdeki i_1, i_2, i_3 ve i_4 akım ve v_1, v_2, v_3 ve v_4 gerilimlerin her hangi bir mevcut veya gelecekteki bir t anındaki değerleri hesaplanabilecektir.

Örnek

Başlangıç koşulları sıfır aşağıda verilen devrenin durum-uzay denklem sistemini $u(t)$ girişi ve v_0 çıkışına göre bulun.



Şekil 57 RLC Devresi

kondansatördeki gerilim değişim miktarı

$$i_C = C \frac{dv_C}{dt} = u(t) - i_L$$

endüktanstaki akım değişim miktarı

$$v_L = v_C - R i_L$$

$$L \frac{di_L}{dt} = v_C - R i_L$$

sistem çıkışı

$$v_0 = R i_L(t)$$

$$\frac{dv_C}{dt} = -\frac{1}{C} i_L + \frac{1}{C} u(t)$$

$$\frac{di_L}{dt} = \frac{1}{L} v_C - \frac{R}{L} i_L$$

$$v_0 = R i_L(t)$$

$$\dot{v}_C = -\frac{1}{C} i_L + \frac{1}{C} u(t)$$

durum değişkenleri denklemi

$$\dot{i}_L = \frac{1}{L} v_C - \frac{R}{L} i_L$$

$$v_0 = R i_L(t) \quad \text{çıkış denklemi}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{v}_C \\ \dot{i}_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{C} \\ \frac{1}{L} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_C \\ i_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{C} \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

$$v_0 = [0 \quad R] i_L(t)$$

Eğer $x_1 = v_C$ ve $x_2 = i_L$ veya $\dot{x}_1 = \dot{v}_C$ ve $\dot{x}_2 = \dot{i}_L$ ise,

$$\dot{x}_1 = -\frac{1}{C} x_2 + \frac{1}{C} u(t)$$

durum değişkenleri denklemi

$$\dot{x}_2 = \frac{1}{L} x_1 - \frac{R}{L} x_2$$

$$v_0 = R x_2 \quad \text{çıkış denklemi}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{C} \\ \frac{1}{L} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{C} \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

$$v_0 = [0 \quad R] x_2$$

Kontrol Sistemleri : kontrol edilebilir – Gözlenebilir Sistemler Sistemler

İleri sistem analizlerinde sistem durum değişkenlerinden yararlanılarak, sistemlerin frekans domeninden ziyade zaman domenindeki analizleri yapılır. Bu analizler Durum-Uzay tekniği olarak bilinmektedir. Bu yaklaşımda $\mathbf{f}(t)$ = sistem giriş vektörü, $\mathbf{y}(t)$ = sistem çıkış vektörü, $\mathbf{A}(t)$ = durum (state) matrisi, $\mathbf{B}(t)$ = giriş matrisi, $\mathbf{C}(t)$ = çıkış matrisi, $\mathbf{D}(t)$ = iletim (transmission) matrisi, $\mathbf{x}(t)$ = durum değişkenleri (*state variables* : sistem davranışını tanımlar), $\dot{\mathbf{x}} = \frac{d\mathbf{x}}{dt}$ = sistemin bir sonraki adımdaki durumu (değişimi) olmak üzere model aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t) \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t) \mathbf{f}(t)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}(t) \mathbf{x}(t) + \mathbf{D}(t) \mathbf{f}(t)$$

Bu model yardımıyla sistemin $\mathbf{f}(t)$ giriş vektörlerinin kontrol edilebilirliğiyle, $\mathbf{y}(t)$ sistem çıkışının gözlenebilirliği önemlidir. Eğer $\dot{\mathbf{x}}(t)$ ve $\mathbf{y}(t)$, $\mathbf{x}(t)$ ve $\mathbf{f}(t)$ nin lineer kombinasyonlarından oluşmuyorsa, sistem lineer değildir (nonlinear system).

Kontrol edilebilirlik

Durum-uzay modelinde denklem çifti göz önüne alındığında, kontrol edilebilirlik açısından **A** ve **B** matrislerinin önemli olduklarını görmekteyiz. **A** matrisi, durum değişkenlerinin etkileri açısından gerekli iken, **B** matrisi direkt olarak girişin, durum değişkenlerini kontrolü ile ilgili olduklarından söz konusudurlar.

A = sistem matrisi olup, mevcut durumların (\mathbf{x}), nasıl ($\dot{\mathbf{x}}$) olarak durumlar üzerinde değişiklikleri etkilediğini gösterir. Eğer durum değişikliği, mevcut durumlara bağlı değilse (mevcut durumlardan kaynaklanmıyorsa), bu matris sıfır olacaktır.

B = kontrol matrisi olup, sistem girişinin nasıl ($\dot{\mathbf{x}}$) olarak durumlar üzerinde değişiklikleri etkilediğini gösterir. Eğer durum değişikliği sistem girişine bağlı değilse bu matris sıfır gösterecektir. Eğer sistem girişi, sistem durumlarını (states) kontrol edebiliyorsa, matris sıfır olmayacaktır. Bu anlamda giriş, durumların hepsiyle veya bir kısmıyla ilişkili olabilir. Bu durumlarda, sistem girişinin durumları kısmi veya tam kontrol edebilmesinden söz edilebilir. Kısaca bu matris, sistemin **kontrol edilebilirliği** ile ilgilidir. Öte yandan sistem girişinin olmadığı, yani başlangıç koşullarının söz konusu olduğu durumda da bu matris sıfır olacaktır.

Eğer bir LTI sistemi kontrol edilebilir ise $(p \times q)$ boyutlu ξ kontrol edilebilir matrisinin

$$\xi = [B \ AB \ A^2B \ \dots \ A^{p-1}B]$$

rankı ve **A** sistem matrisinin rankı aynı, “ p ” olmalıdır.

$$\text{Kontrol edilebilirlik} = \text{rank}(\xi) = \text{rank}(\mathbf{A}) = p$$

Bununla birlikte **A** sistem matrisinin invers özelliğinde olması gerektiğinde göz önüne alınırsa denklem,

$$\text{Kontrol edilebilirlik} = \text{rank}(\xi) = \text{rank}(\mathbf{A}^{-1}\xi) = \text{rank}(\mathbf{A}) = p$$

Diğer yandan bu yaklaşıma paralel olarak verilen modeldeki

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A} \mathbf{x}(t)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C} \mathbf{x}(t)$$

denklemleri göz önüne alındığında kontrol edilebilirliğin **A** matrisiyle ilgili olduğu görülmektedir. Çünkü giriş fonksiyonu \mathbf{f} fonksiyonu \mathbf{x} durum değişkenlerini kontrol etmek isteyeceğinden, giriş fonksiyonunun \mathbf{x} durum değişkenlerini kontrol edebilmesi için öncelikle \mathbf{x} vektörünün (matrisinin) var olması gerekir. Bu yüzden

$$\mathbf{A} \neq \mathbf{0} \ , \quad \text{tam kontrol edilebilirlik}$$

olmalıdır. Ancak bu koşulla durum değişkenleri mevcut olabileceğinden, giriş fonksiyonunun durum değişkenleri üzerindeki kontrol etkisi araştırılabilir. Eğer giriş durum değişkenlerinin hiçbirini kontrol edemiyorsa bunun anlamı

$\mathbf{A} = \mathbf{0}$, tam kontrol edilemezlik

Eğer giriş fonksiyonu durum değişkenlerinin bazılarını kontrol edebiliyorsa

$\mathbf{A} \neq \mathbf{0}$ ve $\mathbf{A} = \mathbf{0}$ kısmi kontrol edilebilirlik

Gözlenebilirlik

Durum-uzay modelinde denklem çifti göz önüne alındığında, kontrol edilebilirlik açısından bu kez de \mathbf{A} ve \mathbf{C} matrislerinin önemli olduklarını görmekteyiz. \mathbf{A} matrisi, durum değişkenlerinin etkileri açısından gerekli iken, \mathbf{C} matrisi de durum değişkenlerinin değişimlerinin etkilerinin gözlemlenmesi açısından söz konusudur.

\mathbf{A} = sistem matrisi olup, mevcut durumların (x), nasıl (\dot{x}) olarak durumlar üzerinde değişiklikleri etkilediğini gösterir. Eğer durum değişikliği, mevcut durumlara bağlı değilse (mevcut durumlardan kaynaklanmıyorsa), bu matris sıfır olacaktır.

\mathbf{C} = çıkış matrisi olup, (x) durumlarıyla sistem çıkışı arasındaki ilişkiyi gösterir. Bu matris yoluyla sistem durumları (states), çıkıştan tam veya kısmi olarak gözlemlenebilir. Bu matrisin sıfır olması, çıkışın gözlemlenemez olduğunu gösterir. Kısaca bu matris, sistemin **gözlemlenebilirliği** ile ilgilidir.

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A} \mathbf{x}(t)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C} \mathbf{x}(t)$$

olur. Böylece gözlemlenebilirliğin yalnızca \mathbf{A} ve \mathbf{C} katsayı matrislerine bağlı olduğu ortaya çıkar. Diğer bir deyişle bu iki matris kullanılarak gözlemlenebilirlik tespit edilebilir. Burada ilgili matrislerin boyutlarının ise $\mathbf{A}_{p \times p}, \mathbf{B}_{p \times q}, \mathbf{C}_{r \times p}, \mathbf{D}_{r \times q}$ olduğunu biliyoruz. Eğer elimizde ($p \times q$) boyutlu \mathbf{Q} gözlemlenebilir matrisi mevcut ise,

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \mathbf{CA}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{p-1} \end{bmatrix}$$

gözlemlenebilirliğin yalnızca bu “ p ” ranklı \mathbf{Q} matrisiyle mümkün olabileceğini söyleyebiliriz.

Gözlemlenebilirlik = $\text{rank}(\mathbf{Q}) = p$

Görüldüğü gibi eğer durum-uzay modeli göz önüne alındığında, gözlemlenebilirliğin bu modelin daha ziyade

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C} \mathbf{x}(t)$$

çıkış denklemiyle ilgili olduğu ortaya çıkar. Girişteki kontrol edilmeye çalışılan durum değişkenlerinin tamamının veya bir kısmının çıkışta gözlemlenmesi amaçlanmaktadır. Bunun içinde verilen denklemde \mathbf{C} katsayısı öne çıkmaktadır. Eğer durum değişkenlerinin tamamını çıkışta gözlemek istiyorsak,

$\mathbf{C} \neq \mathbf{0}$, tam gözlemlenebilirlik

koşulunun sağlanması gerekecektir. Eğer çıkışta hiç gözlem mümkün olmayacaksa bu durumda da

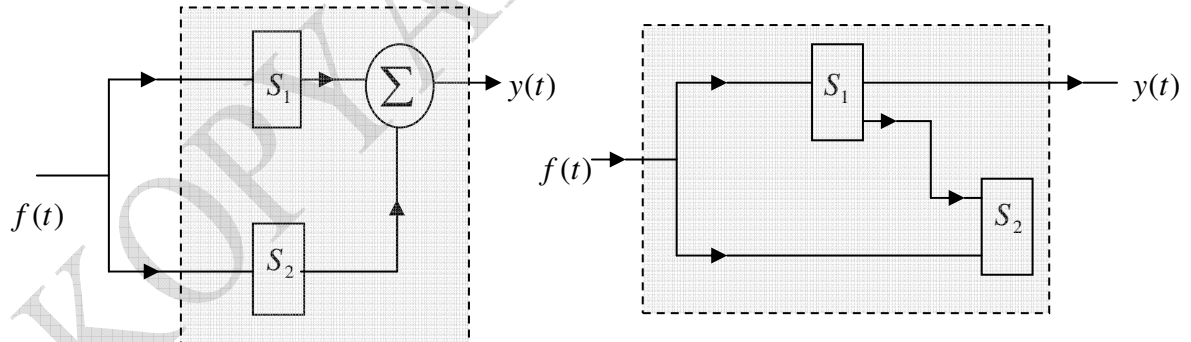
$\mathbf{C} = \mathbf{0}$, tam gözlemlenemezlik

koşulunun söz konusu olacağını görmekteyiz. Durum değişkenlerinden bazılarını gözlemleyebiliyorsak, bu durum

$\mathbf{C} \neq \mathbf{0}$ ve $\mathbf{C} = \mathbf{0}$, kısmi gözlemlenebilirlik

koşuluyla söz konusu olabilecektir. Aşağıda kontrol edilebilirlik ve gözlenebilirlik üzerine sistemlerin davranışları grafik olarak gösterilmiştir.

Örnek



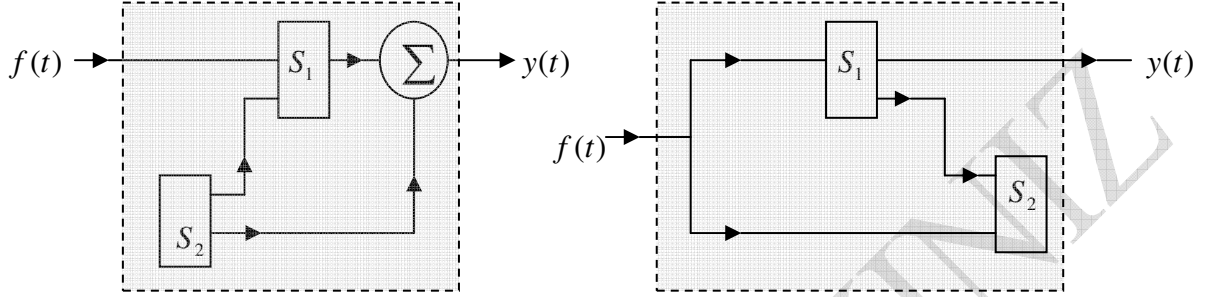
(a) : tam kontrol edilen-tam gözlemlenebilen

(b) : tam kontrol edilebilen-tam gözlemlenemeyen

Şekil 58 Sistem kontroledilebilirliği – Gözlemlenebilirliği

Şekil (a) incelendiğinde, sistemdeki durum değişkenleri olan S_1 ve S_2 , sistem girişi olan $f(t)$ tarafından kontrol edilebileceği (değiştirilebilme özelliği) için sistem tam kontrol edilebilirdir. Sistem gözlenebilirlik açısından incelendiğinde ise, aynı durum değişkenleri $y(t)$ sistem çıkışında gözlemlendiğinden sistem aynı zamanda tam gözlenebilirdir.

Şekil (b) ele alındığında ise, sistemdeki her iki durum değişkeni sistem girişi tarafından kontrol edilebildiğinden tam kontrol edilebilir olmasına karşın, çıkışta yalnızca S_1 girişi görülebildiğinden sistem tam gözlenemeyen yani kısmi gözlenebilirdir. Aşağıda şekil (a) da tam kontrol edilemeyen-tam gözlemlenebilen, (b) de ise tam kontrol edilebilen-tam gözlemlenemeyen sistem örneği verilmiştir.



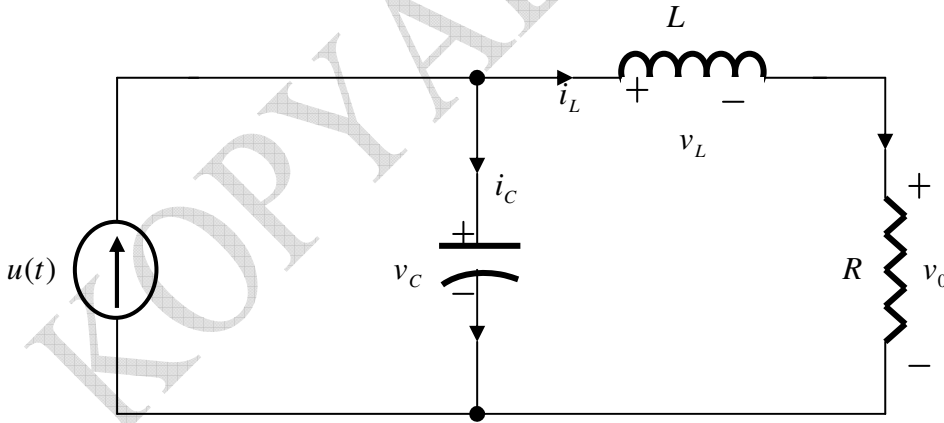
(a) : tam kontrol edilemeyen-tam gözlemlenebilen

(b) : tam kontrol edilebilen-tam gözlemlenemeyen

Şekil 59 Sistem kontroledilebilirliği – Gözlemlenebilirliği

Örnek

Başlangıç koşulları sıfır aşağıda verilen devrenin durum-uzay denklem sistemini $u(t)$ girişi ve v_0 çıkışına göre bulun.



Şekil 60 RLC Devresi

kondansatördeki gerilim değişim miktarı

$$i_C = C \frac{dv_C}{dt} = u(t) - i_L$$

endüktanstaki akım değişim miktarı

$$v_L = v_C - R i_L$$

$$L \frac{d i_L}{dt} = v_C - R i_L$$

sistem çıkışı

$$v_0 = R i_L(t)$$

$$\frac{dv_C}{dt} = -\frac{1}{C} i_L + \frac{1}{C} u(t)$$

$$\frac{d i_L}{dt} = \frac{1}{L} v_C - \frac{R}{L} i_L$$

$$v_0 = R i_L(t)$$

$$\dot{v}_C = -\frac{1}{C} i_L + \frac{1}{C} u(t)$$

durum değişkenleri denklemi

$$\dot{i}_L = \frac{1}{L} v_C - \frac{R}{L} i_L$$

$$v_0 = R i_L(t)$$

çıkış denklemi

$$\begin{bmatrix} \dot{v}_C \\ \dot{i}_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{C} \\ \frac{1}{L} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_C \\ i_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{C} \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

$$v_0 = \begin{bmatrix} 0 & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_C \\ i_L \end{bmatrix}$$

Eğer $x_1 = v_C$ ve $x_2 = i_L$ veya $\dot{x}_1 = \dot{v}_C$ ve $\dot{x}_2 = \dot{i}_L$ ise,

$$\dot{x}_1 = -\frac{1}{C} x_2 + \frac{1}{C} u(t)$$

durum değişkenleri denklemi

$$\dot{x}_2 = \frac{1}{L} x_1 - \frac{R}{L} x_2$$

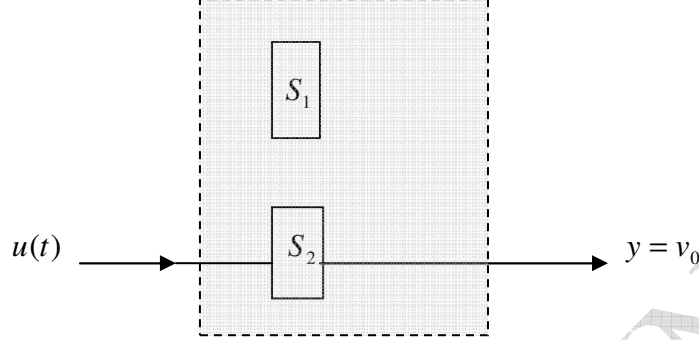
$$v_0 = R x_2$$

çıkış denklemi

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{C} \\ \frac{1}{L} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{C} \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

$$v_0 = \begin{bmatrix} 0 & R \end{bmatrix} x_2$$

Elde edilenlerin ışığında $u(t)$ ve v_0 çıkışı ve $S_1(x_1)$ ve $S_2(x_2)$ durumları arasındaki görünüm aşağıdaki gibi olacaktır.



Şekil 61 Tam kontrol edilemeyen-tam gözlemlenemeyen sistem

Yukarıdaki blok diagramdan sistemin girişi yalnızca ($S_2(x_2)$) kontrol edebildiği için, sistem tam kontrol edilemeyen, çıkıştan ise iki durum değişkeninden biri gözlemlenebildiğinden sistem aynı zamanda tam gözlemlenemeyendir.

Açıklama : Normalde matrisyel olarak denklemleri elde edilen sistem, durum-uzay sistemine göre değil de, diferansiyel denklem sistemine göre düzenlenseydi, girişi x , çıkışı y olan

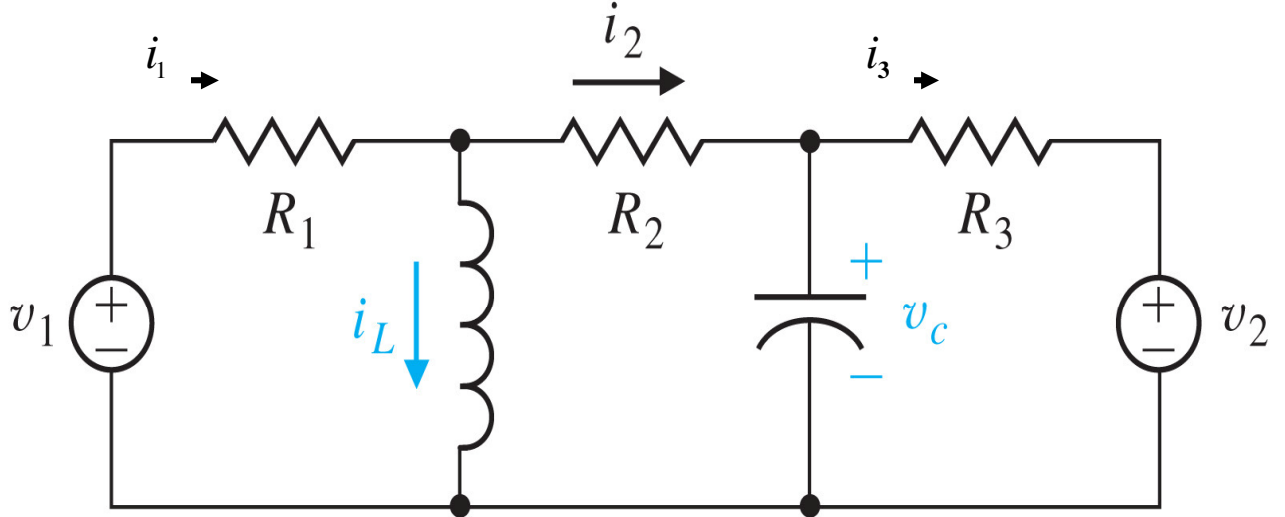
$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + a_{n-2} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) =$$

$$b_m \frac{d^m x(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} x(t)}{dt^{m-1}} + b_{m-2} \frac{d^{m-1} x(t)}{dt^{m-1}} + \dots + b_1 \frac{dx(t)}{dt} + b_0 x(t)$$

tipinde bir diferansiyel denklem sistemi elde edilerek, buradan başlangıç koşullarının verildiği veya verilmediği duruma göre sistemin çözümü yapılarak bir $y(t)$ çıkış fonksiyonu elde edilmeye çalışılacaktır. Bu çözümde, çıkışın söz konusu $S_1(x_1)$ ve $S_2(x_2)$ gibi durum değişkenleriyle bir ilgisi aranmamaktadır. Oysa ki durum değişkenlerinin $t = 0$ ve $t \geq 0$ anlarındaki değişimlerine göre çıkışın hesaplanması, en önemlisi de çıkıştan durum değişkenlerinin gözlemlenebilmesi mümkün olmaktadır. x_1 ve x_2 durum değişkenleri elde edildikten sonra, devredeki herhangi bir elemanın veya çıkış elemanının değeri, çözülen durum değişkenine göre yapılabilmektedir. Örneğin ele alınan örnekteki $y = v_0$ çıkışının çeşitli t zamanlarındaki değeri, durum değişkenlerinden olan $S_2(x_2)$ ye göre belirlenebilmektedir. Çıkış bu durum değişkenlerinin herhangi bir t anındaki değerine göre tespit edilebilmektedir. Bu yolla sistemi tam anlamıyla kontrol edebilmek ve gözlemleyebilmek mümkün olmaktadır. Ele aldığımız örnekteki $v_0 = \begin{bmatrix} 0 & R \end{bmatrix} x_2$ çıkış ifadesi, $v_0 = R x_2$ ifadesine göre, x_2 durum değişkenine bağlı olarak $v_0(t) = R x_2(t)$ gibi hesaplanabilmektedir.

Örnek

Başlangıç koşulları sıfır aşağıda verilen devrenin durum-uzay denklem sistemini v_1 ve v_2 girişleri ile i_2 çıkışına göre bulun.



Şekil 62

Çözüm

Kirchoff akım yasasını kullanırsak,

$$C \frac{dv_C}{dt} = i_2 + i_3$$

Kirchoff gerilim yasasını kullanırsak,

$$L \frac{di_L}{dt} = v_1 - R_1 i_1$$

ve

$$R_1 i_1 + R_2 i_2 + v_C = v_1$$

akım denklemi,

$$i_2 = i_1 - i_L$$

çevre gerilim denklemi buna göre düzenlenirse

$$R_1 i_1 + R_2 (i_1 - i_L) + v_C = v_1$$

$$(R_1 + R_2) i_1 - R_2 i_L + v_C = v_1$$

$$(R_1 + R_2) i_1 = v_1 - v_C + R_2 i_L$$

elde edilir. Buradan i_1 ,

$$i_1 = \frac{v_1 - v_C + R_2 i_L}{R_1 + R_2} = -\frac{v_C}{R_1 + R_2} + \frac{R_2 i_L}{R_1 + R_2} + \frac{v_1}{R_1 + R_2}$$

son çevreden (göz den) i_3 aşağıdaki gibi elde edilir.

$$R_3 i_3 + v_C = v_2$$

$$i_3 = \frac{v_2 - v_C}{R_3} = -\frac{v_C}{R_3} + \frac{v_2}{R_3}$$

bunlara göre $\frac{di_L}{dt}$ ve $\frac{dv_C}{dt}$ aşağıdaki gibi düzenlenirler.

$$L \frac{di_L}{dt} = v_1 - R_1 i_1 = v_1 - R_1 \frac{v_1 - v_C + R_2 i_L}{R_1 + R_2} = \frac{v_1 (R_1 + R_2 - R_1)}{R_1 + R_2} + \frac{R_1 v_C}{R_1 + R_2} - \frac{R_1 R_2 i_L}{R_1 + R_2}$$

$$\frac{di_L}{dt} = \frac{R_2}{L(R_1 + R_2)} v_1 + \frac{R_1}{L(R_1 + R_2)} v_C - \frac{R_1 R_2}{L(R_1 + R_2)} i_L$$

$$C \frac{dv_C}{dt} = i_2 + i_3 = i_1 - i_L + \frac{v_2 - v_C}{R_3} = \frac{v_1 - v_C + R_2 i_L}{R_1 + R_2} - i_L + \frac{v_2 - v_C}{R_3} = \frac{v_1}{R_1 + R_2} - \frac{v_C}{R_1 + R_2} + \frac{R_2 i_L}{R_1 + R_2} - i_L + \frac{v_2 - v_C}{R_3}$$

$$\frac{dv_C}{dt} = \frac{v_1}{C(R_1 + R_2)} + \frac{v_2}{CR_3} - \frac{v_C}{C(R_1 + R_2)} - \frac{v_C}{CR_3} + \frac{(R_2 - R_1 - R_2) i_L}{C(R_1 + R_2)}$$

$$\frac{dv_C}{dt} = \frac{v_1}{C(R_1 + R_2)} + \frac{v_2}{CR_3} - \frac{(R_1 + R_2 + R_3) v_C}{CR_3 (R_1 + R_2)} + \frac{(R_2 - R_1 - R_2) i_L}{C(R_1 + R_2)}$$

$$\frac{dv_C}{dt} = \frac{1}{C(R_1 + R_2)} v_1 + \frac{1}{CR_3} v_2 - \frac{R_1 + R_2 + R_3}{CR_3 (R_1 + R_2)} v_C - \frac{R_1}{C(R_1 + R_2)} i_L$$

Bunların neticesinde elde edilen $\frac{di_L}{dt}$ ve $\frac{dv_C}{dt}$ birlikte yazılırsa durum değişkenleri olarak aşağıdaki görünümde olacaklardır.

$$\frac{dv_C}{dt} = -\frac{R_1 + R_2 + R_3}{CR_3 (R_1 + R_2)} v_C - \frac{R_1}{C(R_1 + R_2)} i_L + \frac{1}{C(R_1 + R_2)} v_1 + \frac{1}{CR_3} v_2$$

$$\frac{di_L}{dt} = \frac{R_1}{L(R_1 + R_2)} v_C - \frac{R_1 R_2}{L(R_1 + R_2)} i_L + \frac{R_2}{L(R_1 + R_2)} v_1$$

$$\dot{v}_C = \frac{dv_C}{dt} \quad \text{ve} \quad \dot{i}_L = \frac{di_L}{dt}$$

$$\begin{aligned}\dot{v}_C &= -\frac{R_1 + R_2 + R_3}{CR_3(R_1 + R_2)} v_C - \frac{R_1}{C(R_1 + R_2)} i_L + \frac{1}{C(R_1 + R_2)} v_1 + \frac{1}{CR_3} v_2 \\ \dot{i}_L &= \frac{R_1}{L(R_1 + R_2)} v_C - \frac{R_1 R_2}{L(R_1 + R_2)} i_L + \frac{R_2}{L(R_1 + R_2)} v_1\end{aligned}$$

matris olarak yazılırsa

$$\begin{bmatrix} \dot{v}_C \\ \dot{i}_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R_1 + R_2 + R_3}{CR_3(R_1 + R_2)} & -\frac{R_1}{C(R_1 + R_2)} \\ \frac{R_1}{L(R_1 + R_2)} & -\frac{R_1 R_2}{L(R_1 + R_2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_C \\ i_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{C(R_1 + R_2)} & \frac{1}{CR_3} \\ \frac{R_2}{L(R_1 + R_2)} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

eğer $x_1 = v_C$ ve $x_2 = i_L$ veya $\dot{x}_1 = \dot{v}_C$ ve $\dot{x}_2 = \dot{i}_L$ ise,

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R_1 + R_2 + R_3}{CR_3(R_1 + R_2)} & -\frac{R_1}{C(R_1 + R_2)} \\ \frac{R_1}{L(R_1 + R_2)} & -\frac{R_1 R_2}{L(R_1 + R_2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{C(R_1 + R_2)} & \frac{1}{CR_3} \\ \frac{R_2}{L(R_1 + R_2)} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

Sistem çıkışı olarak ise, i_2 elde edilmek istenirse ($y = i_2$), çıkışı düzenleyelim.

$$i_2 = i_1 - i_L$$

$$i_1 = \frac{v_1 - v_C + R_2 i_L}{R_1 + R_2}$$

$$i_2 = \frac{v_1 - v_C + R_2 i_L}{R_1 + R_2} - i_L = \frac{-v_C}{R_1 + R_2} + \frac{R_2 i_L}{R_1 + R_2} + \frac{v_1}{R_1 + R_2} - i_L = \frac{-v_C}{R_1 + R_2} + \frac{(R_2 - R_1 - R_2) i_L}{R_1 + R_2} + \frac{v_1}{R_1 + R_2}$$

$$i_2 = -\frac{1}{R_1 + R_2} v_C - \frac{R_1}{R_1 + R_2} i_L + \frac{1}{R_1 + R_2} v_1$$

i_2 çıkışını y olarak, ve eğer $x_1 = v_C$ ve $x_2 = i_L$ olarak düzenlenirse

$$y = -\frac{1}{R_1 + R_2} x_1 - \frac{R_1}{R_1 + R_2} x_2 + \frac{1}{R_1 + R_2} v_1$$

matris olarak düzenlenirse,

$$y = \begin{bmatrix} -\frac{1}{R_1 + R_2} & -\frac{R_1}{R_1 + R_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1 + R_2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

Sonuçta durum değişkenleri ve çıkış matrislerini birlikte gösterelim.

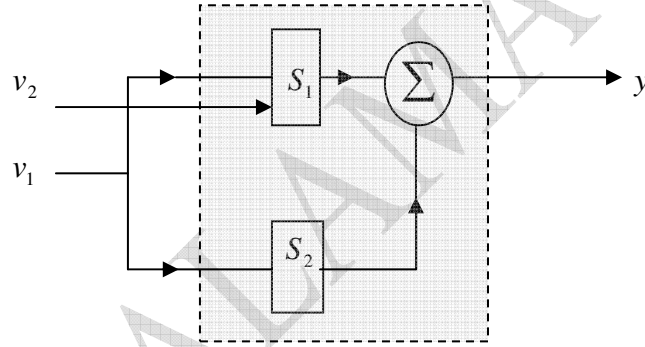
$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R_1 + R_2 + R_3}{CR_3(R_1 + R_2)} & -\frac{R_1}{C(R_1 + R_2)} \\ \frac{R_1}{L(R_1 + R_2)} & -\frac{R_1 R_2}{L(R_1 + R_2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{C(R_1 + R_2)} & \frac{1}{CR_3} \\ \frac{R_2}{L(R_1 + R_2)} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

Durum değişkenleri

$$y = \begin{bmatrix} -\frac{1}{R_1 + R_2} & -\frac{R_1}{R_1 + R_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1 + R_2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

Çıkış

Elde edilenlerin ışığında v_1 ve v_2 girişleri ile y çıkışı ve $S_1(x_1)$ ve $S_2(x_2)$ durumları arasındaki görünüm aşağıdaki gibi olacaktır.



Şekil 63 Tam kontrol edilemeyen-tam gözlemlenebilen sistem

Buna göre ele alınan RLC devresinin (sisteminin) çözümünde, durum değişkenlerinin girişe göre belirlenmesi mümkündür. Bunun yanısıra, çıkış olarak da seçilen ($y = i_2$) sistem çıkışı da,

$$y = -\frac{1}{R_1 + R_2} x_1 - \frac{R_1}{R_1 + R_2} x_2 + \frac{1}{R_1 + R_2} v_1$$

ifadesi gereği, sistem durum değişkenleri olan $S_1(x_1)$ ve $S_2(x_2)$ ye göre elde edilmiştir. Bunun anlamı, sistemin herhangi bir t anındaki çıkışını x_1 ve x_2 durum değişkenlerinden elde edebileceyiz.

$$y(t) = -\frac{1}{R_1 + R_2} x_1(t) - \frac{R_1}{R_1 + R_2} x_2(t) + \frac{1}{R_1 + R_2} v_1$$

Bunun için ilgili durum değişkenlerinin $x_1(t)$ ve $x_2(t)$ çözülerek elde edilmesi gerekiyor. Bunlar elde edildikten sonra, sistemin çıkışının herhangi bir t anına göre değeri ve de durum değişkenlerinin çıkıştan gözlemlenmesi mümkün olmaktadır. Yukarıdaki blok diagramdan sistemin ilk girişi her iki durum değişkenini kontrol edebilirken sistem ikinci girişi, durum değişkenlerinden yalnızca birini ($S_1(x_1)$) kontrol edebildiği için, sistem tam kontrol edilemeyen, ama çıkışta her iki durum değişkeni gözlemlenebildiğinden sistem tam gözlemlenebilirdir.

Bu yaklaşımda $x_1(t)$ ve $x_2(t)$ durum değişkenleri çözüldükten sonra, sistemin analizi kolaylaşmaktadır. Çünkü çözülen yani elde edilen $x_1(t)$ ve $x_2(t)$, durum değişkeni fonksiyonlarını göstermektedir. Bununla durum değişkenlerinin herhangi bir andaki davranışını izlemek mümkün olacaktır. Bunun yanı sıra, bu tür durum değişkeni fonksiyonuna bağlı devre veya sistemin diğer giriş, çıkış ve ara elemanlarının çözümü de mümkün olacaktır. Örneğin çıkış fonksiyonu olan $y(t)$, bu örnekte $y(t) = C_1 x_1(t) + C_2 x_2(t) + D v_1(t)$ gibi $x_1(t)$ ve $x_2(t)$ durum değişkeni fonksiyonlarına göre elde edilmiştir. Normal diferansiyel denklemi yöntemlerinde çıkış, sistem girişinin olmadığı başlangıç koşullarına göre belirlenen sıfır-giriş cevabı ile, başlangıç koşullarının olmadığı sisteme giriş yapıldıktan sonraki sıfır-durum cevabı toplamalarından elde edilmekteydi. Burada bunların yerine çıkış, daha farklı bir tarzda durum-değişkenlerine ve de sistemdeki girişlere göre elde edilmektedir.

Bununla beraber ilgili durum değişkenleri çözüldükten sonra yalnızca ($y = i_2$) sistem çıkışını değil, bu yolla aynı zamanda $x_1(t)$ ve $x_2(t)$ durum değişkenlerine bağlı olarak ifade edilen i_1 , i_2 ve i_3 gibi diğer devre büyüklüklerinin (çıkışlarının, sinyallerinin) de elde edilmesi mümkün olur.

$$\begin{aligned} i_1 &= -\frac{1}{R_1 + R_2} x_1 + \frac{R_2}{R_1 + R_2} x_2 + \frac{1}{R_1 + R_2} v_1 \\ i_2 &= -\frac{1}{R_1 + R_2} x_1 - \frac{R_1}{R_1 + R_2} x_2 + \frac{1}{R_1 + R_2} v_1 \\ i_3 &= -\frac{1}{R_3} x_1 + \frac{1}{R_3} v_2 \end{aligned}$$

Durum-Uzay Sistemlerinde Durum Değişkenleri ve Transfer Fonksiyonu

Bir sistemin transfer fonksiyonu klasik anlamda, sistem başlangıç koşullarını göz önüne almayan sistem çıkışının girişine oranından elde edilmektedir.

$$H(s) = \frac{Y(s)}{F(s)}$$

Transfer fonksiyonu sistemin özü kabul edildiğine göre, sistemin özü kabul edilen durum değişkenleriyle ilişkisi olması kaçınılmazdır. Çünkü bir sistem belli sayıda seçilmiş durumların veya durum değişkenlerinin toplamından oluşmaktadır. Bu anlamda sistem transfer fonksiyonunun içeriğinde sistemi temsil eden durum değişkenlerinin olması kaçınılmazdır. Kompakt

$$H(s) = \frac{Y(s)}{F(s)}$$

gösteriminde durum değişkenleri görülmemektedir. Bu durumda durum değişkenlerini içeren genel blok şema dikkate alınmalıdır. Söz konusu blok şema ve denklemleri göz önüne alındığında, buradan $H(s)$ transfer fonksiyonunun elde edilebileceği kabul edilir. Mason Kazanç yaklaşımı böyle durumlar için sistem transfer fonksiyonunun elde edilmesini sağlayan yöntemlerden birisidir.

Ancak klasik gösterimdeki $H(s)$ üzerinde $\mathbf{x}(t)$ durum değişkenlerinin etkisi gerçekte var olacağından, bu dolaylı olarak düşünülmelidir. Eğer transfer fonksiyonunun durum değişkenlerini içerdiğini görmek istiyorsak, bu açıdan durum-uzay sistemi belki de en önemli yöntemdir. Durum-uzay yöntemiyle ancak bir transfer fonksiyonunun durum değişkenlerine bağlı karşılığını görebiliriz. Bu açıdan bile durum-uzay gösterimleri oldukça önemlidir.

Örneğin

$$H(s) = \frac{1}{s+3}$$

transfer fonksiyonunu göz önüne alalım. Görüldüğü gibi, bu yazımdan ilgili sistemin durum değişkenlerini içerdiğini görmemiz mümkün değildir. Ancak eğer bu denklemin durum-uzay karşılığının,

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -3x + f \\ y &= x\end{aligned}$$

olduğu yazımı dikkate alırsak sistemin durum değişkenlerindeki içeren durum denkleminin $\dot{x} = -3x + f$, çıkış denkleminin ise $y = x$ olduğunu görürüz. Bu anlamda sistem transfer fonksiyonunun belirlenmesindeki en önemli parametrenin durum değişkenleri olduğunu görmekteyiz.

Örnek

$$\frac{d^3 y}{dt^3} + 8 \frac{d^2 y}{dt^2} + 19 \frac{dy}{dt} + 12 y(t) = 2 \frac{dy}{dt} + 10 f(t)$$

Başlangıç koşulları sıfır olan diferansiyel denklem ile verilen lineer sistemin, durum-uzay sistemindeki denklemlerini oluşturun.

Çözüm

Çözüm için, verilen sistemin “s” uzayındaki transfer fonksiyonuna sahip olmamız gerekmektedir. Bunun için başlangıç koşullarının sıfır alındığı Laplace dönüşümü hatırlayalım.

$$\frac{d^n x}{dx^n} = s^n X(s)$$

Bu genel yaklaşıma göre verilen diferansiyel denklem sistemi

$$s^3Y(s) + 8s^2Y(s) + 19sY(s) + 12Y(s) = 2sF(s) + 10F(s)$$

$$(s^3 + 8s^2 + 19s + 12)Y(s) = (2s + 10)F(s)$$

$$H(s) = \frac{Y(s)}{F(s)} = \frac{2s + 10}{s^3 + 8s^2 + 19s + 12}$$

elde edilen transfer fonksiyonunda var oldukları düşünülen durum değişkenlerini ortaya çıkarmak için durum-uzay yöntemine başvurmamız gerekiyor. Buna göre durum-uzay sisteminin durum ve çıkış denklemleri aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = x_3$$

$$\dot{x}_3 = -12x_1 - 19x_2 - 8x_3 + f$$

$$y = 2x_2 + 10x_1$$

Görüldüğü gibi $H(s)$ formunda görünmeyen x_1, x_2, x_3 durum değişkenleri açığa çıkmıştır. Bu durumda sistemin analizi daha kolaylaşmıştır. Eğer sistemi bu kez matris formunda düzenlersek,

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -12 & -19 & -8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} f$$

$$y = [10 \quad 2 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Durum Denkleminin (durum değişkenlerinin) Zaman Domeninde Çözümü

Durum denklemi olarak kastedilen durum değişkeninin girişle ilişkisini ortaya koyan

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t) \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t) \mathbf{f}(t)$$

denklemdir. Daha önce belirtildiği gibi, durum-uzay modelinin avantajlarından olarak eğer zaman domeninde $\mathbf{x}(t)$ durum değişkeni (vektör yani çok giriş olarak) çözülebilirse, sistem içerisindeki bu durum değişkeniyle bağlantılı bir çok işaret veya değişkenin çözülebileceği vurgulanmıştı. Bu nedenle birinci dereceden diferansiyel denklem olan durum denkleminin çözümü olarak kastedilen $\mathbf{x}(t)$ nin çözülmesidir. Bu durum durum değişkeninin çözümüne ilgili çözüm denklemi aşağıdaki gibidir.

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t} \mathbf{x}(0) + \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)} \mathbf{B} \mathbf{f}(\tau) d\tau$$

Denklemdaki $e^{\mathbf{A}t}$ exponensiyeli aşağıdaki sonsuz seri açılımdan hesaplanabilmektedir.

$$\begin{aligned} e^{\mathbf{A}t} &= \mathbf{I} + \mathbf{A}t + \frac{\mathbf{A}^2 t^2}{2!} + \frac{\mathbf{A}^3 t^3}{3!} + \dots + \frac{\mathbf{A}^n t^n}{n!} + \dots + \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^k t^k}{k!} \end{aligned}$$

Bu denklemler sistemin özü olan $\mathbf{x}(t)$ durum değişkeninin çözümünü mümkün kılmaktadır. Bundan sonra bu durum değişkeniyle ilişki halindeki herhangi bir işaret veya fonksiyon rahatlıkla elde edilebilir. Çözümü verilen $\mathbf{x}(t)$ nin denkleminin aslında

$$\mathbf{x}(t) = \underbrace{e^{\mathbf{A}t} \mathbf{x}(0)}_{\text{zero-input}} + \underbrace{\int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)} \mathbf{B} \mathbf{f}(\tau) d\tau}_{\text{zero-state}}$$

başlangıç koşullarının göz önüne alındığı (zorlanmış girişin olmadığı, $\mathbf{f}(t) = 0$) sıfır-giriş (zero-input) ile zorlanmış girişin olduğu (başlangıç koşullarının olmadığı, $\mathbf{x}(0) = 0$) sıfır-durum (zero-state) bileşenleri olduğunu görmekteyiz. Buna göre durum değişkenlerinin çözümü, başlangıç koşullarının olduğu $\mathbf{f}(t) = 0$ ve zorlanmış girişin söz konusu olduğu $\mathbf{x}(0) = 0$ koşulların toplamından oluşmaktadır.

Çıkış Denkleminin (durum değişkenlerinin) Zaman Domeninde Çözümü

Durum uzay modelinde çıkış denklemi olarak kastedilen çıkışın durum değişkeni karşılığını ortaya koyan

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C} \mathbf{x}(t) + \mathbf{D} \mathbf{f}(t)$$

Bu denklem yoluyla $\mathbf{y}(t)$ sistem çıkış(ları), zaman domeninde $\mathbf{x}(t)$ durum değişkeninden (vektöründen) yararlanılarak çözülebilmektedir. Bunun için esas olan $\mathbf{x}(t)$, çözümü az önce yukarıda yapılmıştı.

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t} \mathbf{x}(0) + \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)} \mathbf{B} \mathbf{f}(\tau) d\tau$$

bu denklem

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= e^{\mathbf{A}t} \mathbf{x}(0) + \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)} \mathbf{B} \mathbf{f}(\tau) d\tau \\ &= e^{\mathbf{A}t} \mathbf{x}(0) + e^{\mathbf{A}t} * \mathbf{B} \mathbf{f}(t) \end{aligned}$$

olarak $\mathbf{y}(t)$ de yerine yazılırsa,

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C} \mathbf{x}(t) + \mathbf{D} \mathbf{f}(t) = \mathbf{C} [e^{\mathbf{A}t} \mathbf{x}(0) + e^{\mathbf{A}t} * \mathbf{B} \mathbf{f}(t)] + \mathbf{D} \mathbf{f}(t)$$

$$e^{\mathbf{A}t} * \mathbf{B} \mathbf{f}(t) = e^{\mathbf{A}t} \mathbf{B} * \mathbf{f}(t)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C} [e^{\mathbf{A}t} \mathbf{x}(0) + e^{\mathbf{A}t} \mathbf{B} * \mathbf{f}(t)] + \mathbf{D} \mathbf{f}(t)$$

$\mathbf{f}(t)$ sistem giriş fonksiyonunun impulsler ($\delta(t)$) olarak sisteme giriş yaptığı göz önüne alınır

$$\mathbf{f}(t) = \delta(t) * \mathbf{f}(t)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C} [e^{\mathbf{A}t} \mathbf{x}(0) + e^{\mathbf{A}t} \mathbf{B} * \mathbf{f}(t)] + \mathbf{D} [\delta(t) * \mathbf{f}(t)] = \mathbf{C} [e^{\mathbf{A}t} \mathbf{x}(0) + e^{\mathbf{A}t} \mathbf{B} * \mathbf{f}(t)] + \mathbf{D} \delta(t) * \mathbf{f}(t)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C} e^{\mathbf{A}t} \mathbf{x}(0) + [\mathbf{C} e^{\mathbf{A}t} \mathbf{B} + \mathbf{D} \delta(t)] * \mathbf{f}(t)$$

Buna göre $\mathbf{x}(t)$ çözüldükten sonra, buna bağlı çıkışta elde edilebilecektir. Oluşan çıkışı veya toplam sistem cevabını iki alt cevap altında düşünebiliriz.

$$\mathbf{y}(t) = \underbrace{\mathbf{C} e^{\mathbf{A}t} \mathbf{x}(0)}_{\text{zero-input response}} + \underbrace{[\mathbf{C} e^{\mathbf{A}t} \mathbf{B} + \mathbf{D} \delta(t)] * \mathbf{f}(t)}_{\text{zero-state response}}$$

Görüldüğü gibi, toplam sistem cevabı, başlangıç koşullarının göz önüne alındığı (zorlanmış girişin sıfır olduğu, $\mathbf{f}(t) = 0$) sıfır-giriş cevabı (zero-input response) ile, zorlanmış girişin göz önüne alındığı (başlangıç koşullarının sıfır olduğu, $\mathbf{x}(0) = 0$) sıfır-durum cevabı (zero-state response) toplamından oluşmaktadır. Eğer başlangıç koşullarının sıfır olduğu $\mathbf{x}(0) = 0$ duruma göre sıfır-durum cevabı

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(t) &= [\mathbf{C} e^{\mathbf{A}t} \mathbf{B} + \mathbf{D} \delta(t)] * \mathbf{f}(t) \\ &= \mathbf{h}(t) * \mathbf{f}(t) \end{aligned}$$

olarak elde edilir. Denklemdaki $\mathbf{h}(t)$ sistem impulse cevabı olup, denklemden aşağıdaki gibi olduğu görülür.

$$\mathbf{h}(t) = \mathbf{C} e^{\mathbf{A}t} \mathbf{B} + \mathbf{D} \delta(t)$$

Sonuçta durum-uzay modelindein çözümü $\mathbf{x}(t)$ durum değişkenleri ile $\mathbf{y}(t)$ sistem çıkışının çözümlerini içeren aşağıdaki denklem çifti olarak bilinir.

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t} \mathbf{x}(0) + \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)} \mathbf{B} \mathbf{f}(\tau) d\tau$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C} e^{\mathbf{A}t} \mathbf{x}(0) + [\mathbf{C} e^{\mathbf{A}t} \mathbf{B} + \mathbf{D} \delta(t)] * \mathbf{f}(t)$$

Sürekli Zaman Lineer Zamanla Değişmeyen Sistemlerin Durum-Uzay Modeli

Sürekli zaman lineer zamanla değişmeyen (zamandan bağımsız) sistemlerin durum uzay modeli aşağıdaki denklem çifti ile gösterilir.

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A} \mathbf{x}(t) + \mathbf{B} \mathbf{f}(t)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C} \mathbf{x}(t) + \mathbf{D} \mathbf{f}(t)$$

Görüldüğü gibi sistem parametreleri olan $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ ve \mathbf{D} vektörleri zamandan bağımsız fonksiyonlar halindedir.

Sürekli Zaman Lineer Zamanla Değişmeyen Sistemlerin Durum-Uzay Modeli

Sürekli zaman lineer zamanla değişen (zamana bağımlı) sistemlerin durum uzay modeli aşağıdaki denklem çifti ile gösterilir.

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t) \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t) \mathbf{f}(t)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}(t) \mathbf{x}(t) + \mathbf{D}(t) \mathbf{f}(t)$$

Görüldüğü gibi sistem parametreleri olan $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ ve \mathbf{D} vektörleri zamandan bağımsız olmayıp, zamanla değişen $\mathbf{A}(t)$, $\mathbf{B}(t)$, $\mathbf{C}(t)$ ve $\mathbf{D}(t)$ fonksiyonları halindedir.

Ayrık Zaman Lineer Zamanla Değişmeyen Sistemlerin Durum-Uzay Modeli

Ayrık zaman lineer zamanla değişen (zamana bağımlı) sistemlerin durum uzay modeli aşağıdaki denklem çifti ile gösterilir.

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}(k) \mathbf{x}(k) + \mathbf{B}(k) \mathbf{f}(k)$$

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{C}(k) \mathbf{x}(k) + \mathbf{D}(k) \mathbf{f}(k)$$

Görüldüğü gibi sistem parametreleri olan $\mathbf{A}(k)$, $\mathbf{B}(k)$, $\mathbf{C}(k)$ ve $\mathbf{D}(k)$ vektörleri olan ayrık zaman lineer bir sistemin bu parametreleri “ t ” zamanına bağımlı olmayıp, ayrık uzaydaki “ k ” değişkeniyle değişim göstermektedirler. Bu anlamda, ayrık durum değişkenine dair $\mathbf{x}(k+1)$, $\mathbf{x}(k)$ durum değişkeninin türevi anlamına gelmektedir. Bu açıdan bakıldığında $\mathbf{x}(k+1)$ gösterimi, $\mathbf{x}(k)$ ’nin bir sonraki adımını (gelecek zamanını) gösterir ki, bu sürekli haldeki türev gösterimine uygundur. Bu yolla, sistemin gelecek davranışı gözlemlenebilmektedir. Böyle bakıldığında sürekli ve ayrık haldeki durum değişkenleri arasında $\mathbf{x}(t) \equiv \mathbf{x}(k)$ ve $\dot{\mathbf{x}}(t) \equiv \mathbf{x}(k+1)$ ilişkilerinin var olduğu düşünülebilir.