Doğrusal Zamanla Değişmeyen Sistemler (devam)

2.6. AYRIK ZAMANLI, DZD BİR SİSTEMİN TEPKİSİ VE KONVOLÜSYON TOPLAMI

A. Dürtü Tepkisi:

T ile gösterilen ayrık zamanlı, DZD bir sistemin $h[n]$ dürtü tepkisi (ya da birim örnek tepkisi), girişe $\delta[n]$ uygulandığı zamanki tepkisi olarak şöyle tanımlanır:

$$h[n] = \mathbf{T}\{\delta[n]\} \tag{2.30}$$

B. Herhangi Bir Girişe Tepki:

Eşitlik (1.53)'den $x[n]$ girişi

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\,\delta[n-k] \tag{2.31}$$

olarak ifade edilebilir. Sistem doğrusal olduğundan sistemin herhangi bir $x[n]$ girişine olan $y[n]$ tepkisi

$$y[n] = \mathbf{T}\{x[n]\} = \mathbf{T}\left\{\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\,\delta[n-k]\right\}$$
$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\,\mathbf{T}\{\delta[n-k]\} \tag{2.32}$$

olarak ifade edilebilir. Sistem zamanla değişmez olduğundan

$$h[n-k] = \mathbf{T}\{\delta[n-k]\} \tag{2.33}$$

yazılabilir. Eşitlik (2.33), Eşitlik (2.32)'de yerine konarak

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\,h[n-k] \tag{2.34}$$

elde edilir. (2.34) eşitliği göstermektedir ki ayrık zamanlı, DZD bir sistem, $h(t)$ dürtü tepkisi ile tümüyle tanımlanmaktadır.

C. Konvolüsyon Toplamı

Eşitlik (2.35); iki adet $x[n]$ ve $h[n]$ dizisinin

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\,h[n-k] \tag{2.35}$$

ifadesi ile verilen konvolüsyonunu tanımlar. (2.35) eşitliği yaygın olarak konvolüsyon toplamı olarak bilinir. O halde, yine ulaşılan temel sonuç; herhangi bir ayrık zamanlı, DZD sistemin çıkışı, $x[n]$ girişi ile sistemin dürtü tepkisi $h[n]$'nin konvolüsyonudur. Şekil 2.3 dürtü tepkisinin tanımını ve Eşitlik (2.35)'deki ilişkiyi sergilemektedir.

Şekil 2.3 Ayrık zamanlı, DZD sistem

D. Konvolüsyon Toplamının Özellikleri:

Konvolüsyon toplamın aşağıdaki özellikleri Böl.(2.3)'de bahsedilen konvolüsyon entegralinin özelliklerinin karşılığı olan özelliklerdir.

1. Yer değiştirme:

$$x[n] * h[n] = h[n] * x[n] \qquad (2.36)$$

2. Birleşim:

$$\{x[n] * h_1[n]\} * h_2[n] = x[n] * \{h_1[n] * h_2[n]\} \qquad (2.37)$$

3. Dağılım:

$$x[n] * \{h_1[n]\} + h_2[n]\} = x[n] * h_1[n] + x[n] * h_2[n] \qquad (2.38)$$

E. Konvolüsyon Toplamına İlişkin İşlem:

Yine, konvolüsyon toplamın yer değiştirme özelliği Eşitlik (2.35)'e uygulanırsa

$$y[n] = h[n] * x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]\, x[n-k] \qquad (2.39)$$

elde edilir. Bu işlem, Eşitlik (2.35) ile hesaplamaya kıyasla çoğu kez daha kolaydır. Sürekli zamanlı sistemlerde olduğu gibi konvolüsyon toplamı [Eşitlik (2.35)] aşağıdaki dört adımdan oluşur:

1. $h[k]$ dürtü tepkisi zamana göre ters çevrilerek (orijine göre yansıtılarak) $h[-k]$ elde edilir. Daha sonra n parametreli, k'nın bir fonksiyonu olan $h[n-k]=h[-(k-n)]$'yi oluşturmak için n birim kaydırılır.
2. n parametresi sabit tutularak $x[k]$ ve $h[n-k]$ dizileri k'nın tüm değerleri için çarpılır.
3. $y[n]$ çıkışının tek bir değerini üretmek için $x[k]\, h[n-k]$ çarpımı tüm k için çarpılır.
4. $y[n]$ çıkışının tüm değerlerini üretmek için n'nin $-\infty$'dan $+\infty$'a kadar olan değerleri için 1-3 adımları tekrarlanır.

Yukarıdaki konvolüsyon toplamı işlemine ilişkin örnekler Prob.(2.28) ve (2.30)'da verilmiştir.

2.27. Aşağıdakilerin doğruluğunu gösteriniz.

(a) $x[n] * \delta[n] = x[n]$ (2.130)

(b) $x[n] * \delta[n - n_0] = x[n - n_0]$ (2.131)

(c) $x[n] * u[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$ (2.132)

(d) $x[n] * u[n - n_0] = \sum_{k=-\infty}^{n-n_0} x[k]$ (2.133)

2.28. Kesikli zamanlı, DZD bir sistemin $x[n]$ girişi ve $h[n]$ dürtü tepkisi aşağıda verilmiştir.

$$x[n] = u[n] \qquad h[n] = \alpha^n u[n] \qquad 0 < \alpha < 1$$

(a) Eşitlik (2.35)'i kullanarak $y[n]$'yi hesaplayınız.

(b) Eşitlik (2.39)'u kullanarak $y[n]$'yi hesaplayınız.

(a) Eşitlik (2.35) kullanılarak

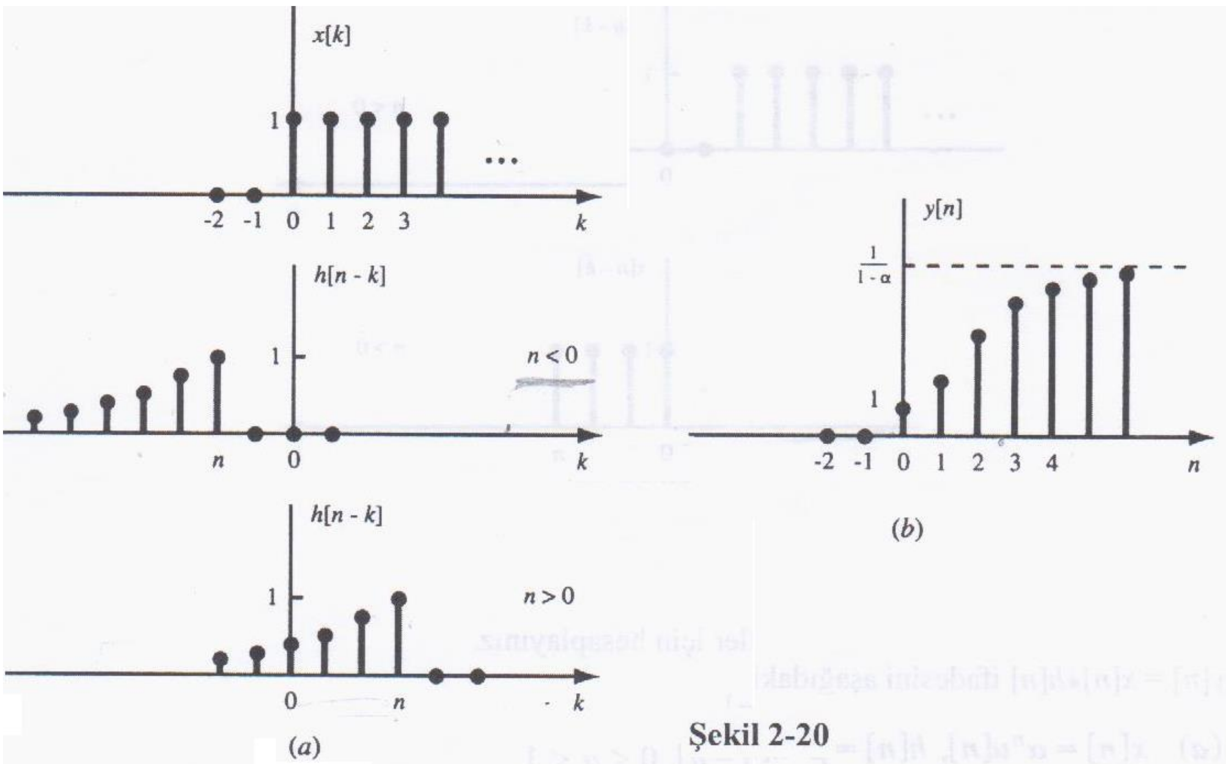
$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]$$

yazılabilir. $x[k]$ ve $h[n-k]$ dizileri $n<0$ ve $n>0$ için Şekil 2-20(a)'da gösterilmiştir. Şekil (2.20(a)'nin incelenmesi sonucu $n<0$ için $x(k)$ ve $h[n-k]$'nın örtüşmediği, $n \geq 0$ için ise bunların $k=0$'dan $k=n$'ye kadar örtüştüğü görülmektedir. O halde $n<0$ için $y[n]=0$ dır. $n \geq 0$ için

$$y[n] = \sum_{k=0}^{n} \alpha^{n-k}$$

olduğundan toplama işlemindeki k değişkeni $m=n-k$ olarak değiştirilir ve Eşitlik (1.90) kullanılırsa $y[n]$

$$y[n] = \sum_{m=n}^{0} \alpha^m = \sum_{m=0}^{n} \alpha^m = \frac{1-\alpha^{n+1}}{1-\alpha}$$



Şekil 2-20

olarak elde edilir. Sonuç olarak aşağıdaki gibi ifade edilebilen $y[n]$ çıkışının değişimi Şekil 2-20(b)'de verilmiştir.

$$y[n] = \left(\frac{1-\alpha^{n+1}}{1-\alpha}\right)u[n] \qquad (2.134)$$

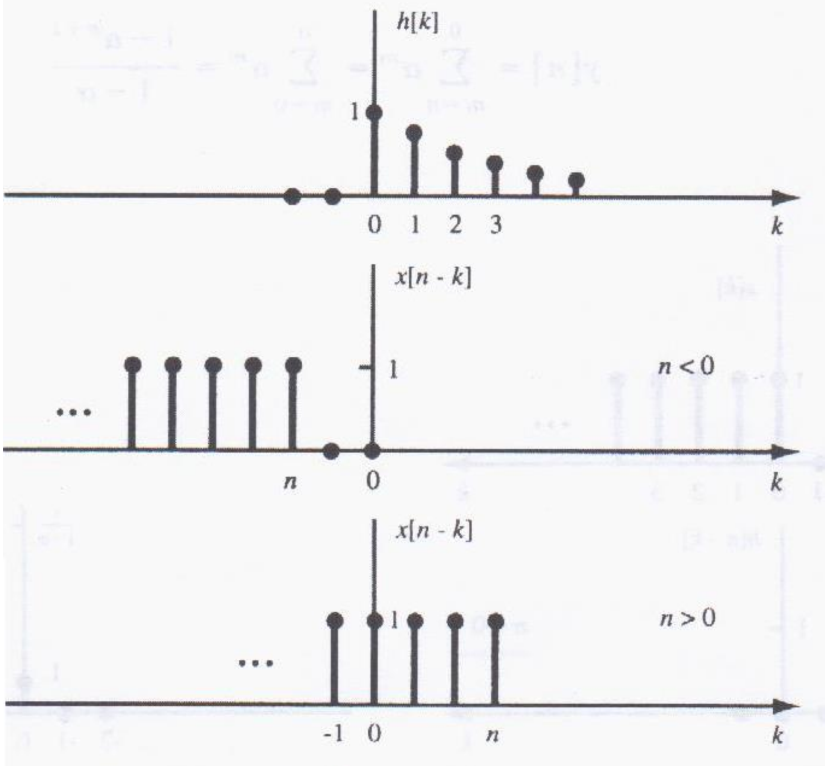
(b) Eşitlik (2.39) kullanılarak

$$y[n] = h[n] * x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k]$$

yazılabilir. Şekil 2-21'de verilen $h[k]$ ve $x[n-k]$ dizilerinin $n<0$ için örtüşmediği, $n \geq 0$ için ise bunların $k=0$, $k=n$ aralığında örtüştüğü görülmektedir. O halde, $n<0$ için $y[n] = 0$ ve $n \geq 0$ için ise

$$y[n] = \sum_{k=0}^{n} \alpha^k = \frac{1-\alpha^{n+1}}{1-\alpha}$$

olup bu, Eşitlik (2.134)'de verilen sonuçla aynıdır.



Şekil 2-21

2.30. Şekil 2-23'de gösterilen $x[n]$ ve $h[n]$ için $y[n] = x[n] * h[n]$ konvolüsyonunu

(a) analitik bir yöntemle, (b) grafiksel bir yöntemle hesaplayınız.

Şekil 2-23

(a) $x[n]$ ve $h[n]$ analitik olarak şöyle ifade edilebilir.

$$x[n] = \delta[n] + \delta[n-1] + \delta[n-2] + \delta[n-3]$$
$$h[n] = \delta[n] + \delta[n-1] + \delta[n-2]$$

Eşitlik (2.38), (2.130) ve (2.131) kullanılarak

$$\begin{aligned} x[n] * h[n] &= x[n] * \{\delta[n] + \delta[n-1] + \delta[n-2]\} \\ &= x[n] * \delta[n] + x[n] * \delta[n-1] + x[n] * \delta[n-2]\} \\ &= x[n] + x[n-1] + x[n-2] \end{aligned}$$

oluşturulur. O halde, istenen sonuç: $$\begin{aligned} y[n] = \delta[n] &+ \delta[n-1] + \delta[n-2] + \delta[n-3] \\ &+ \delta[n-1] + \delta[n-2] + \delta[n-3] + \delta[n-4] \\ &+ \delta[n-2] + \delta[n-3] + \delta[n-4] + \delta[n-5] \end{aligned}$$

ya da $$y[n] = \delta[n] + 2\delta[n-1] + 3\delta[n-2] + 3\delta[n-3] + 2\delta[n-4] + \delta[n-5]$$

ya da $$y[n] = \{1, 2, 3, 3, 2, 1\}$$

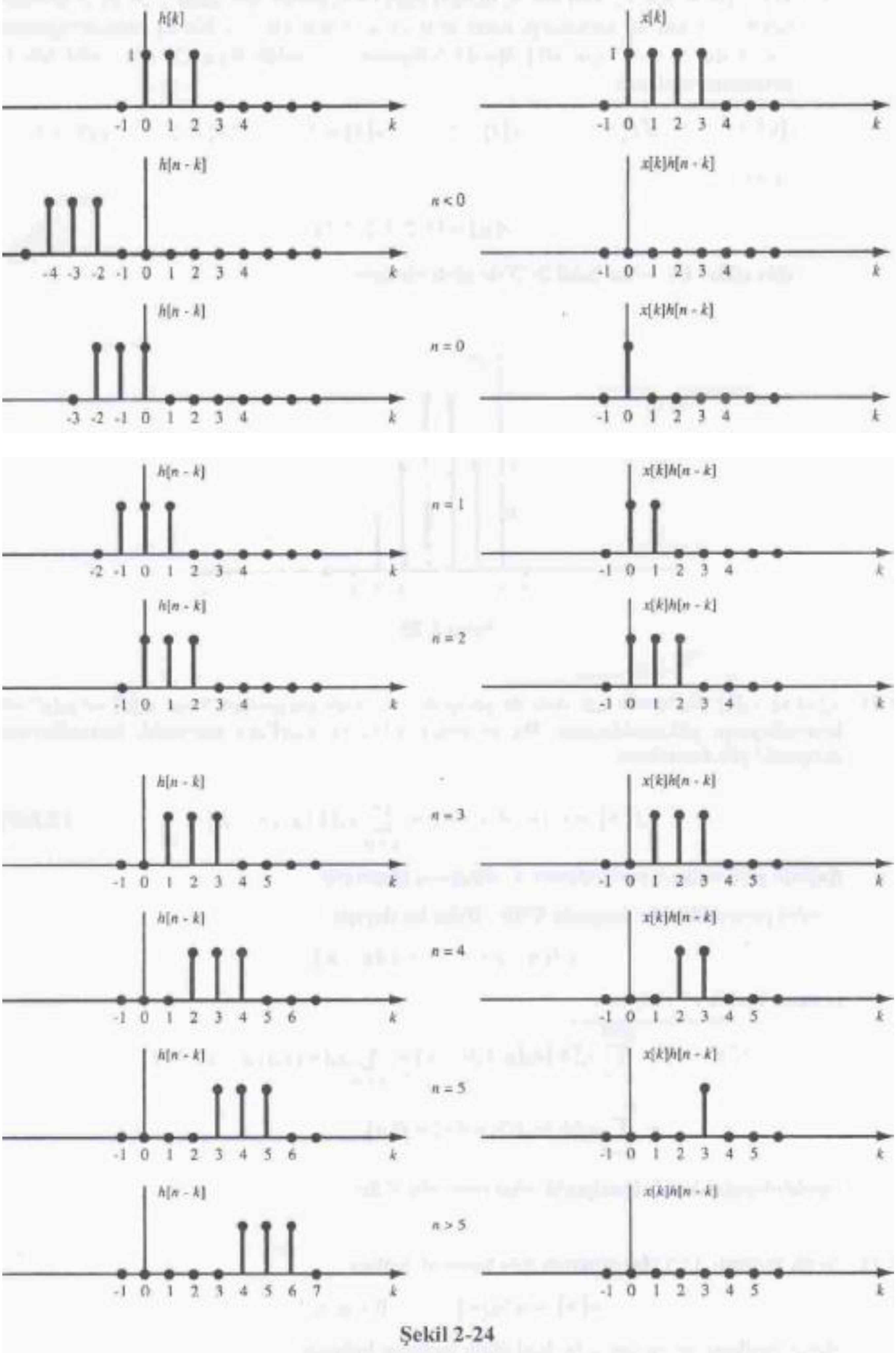
(b) $h[k]$, $x[k]$ ve $h[n-k]$, $x[k]\ h[n-k]$ dizileri çeşitli n değerleri için Şekil 2-24'de çizilmiştir. Şekil 2-24'den de görüleceği üzere $n<0$ ve $n>5$ *için* $x[k]$ ve $h[n-k]$ örtüşmediğinden $y[n]=0$'dır. $0 \le n \le 5$ için $x[k]\ h[n-k]$ örtüşüyor. O halde $0 \le n \le 5$ için $x[k]\ h[n-k]$ terimlerini toplarsak

$y[0] = 1$ $\quad y[1] = 2$ $\quad y[2] = 3$ $\quad y[3] = 3$ $\quad y[4] = 2$ $\quad y[5] = 1$

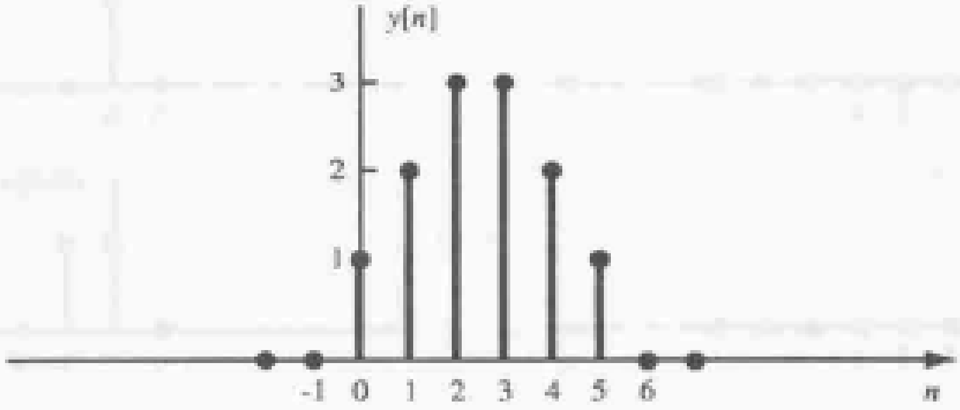
ya da

$$y[n] = \{1, 2, \overset{\cdot}{3}, 3, 2, 1\}$$

elde edilir. Bu sonuç Şekil 2-25'de gösterilmiştir.



Şekil 2-24

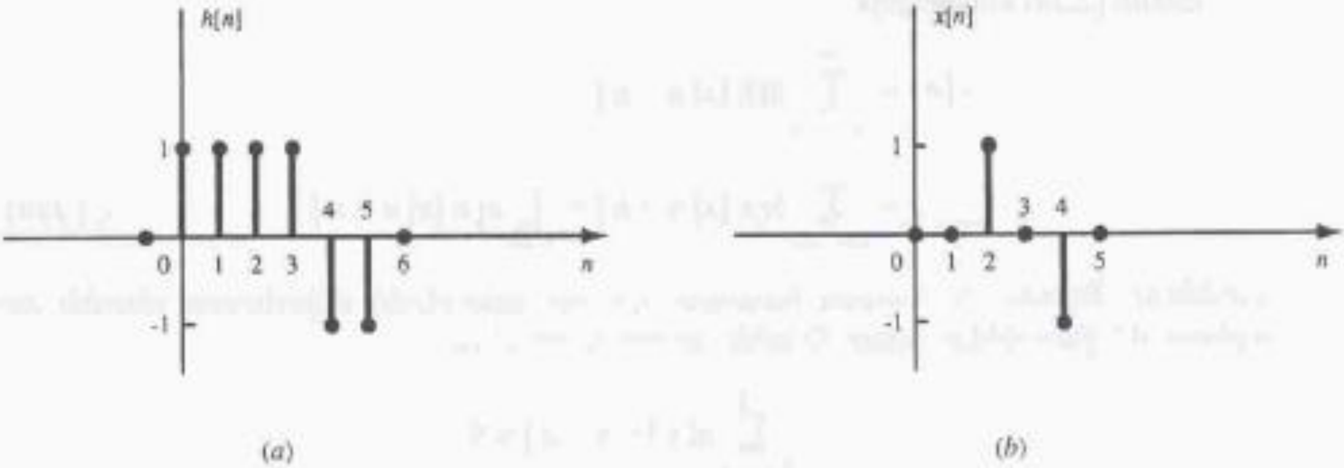


Şekil 2-25

2.34. Ayrık zamanlı DZD bir sistemin $h[n]$ dürtü tepkisi Şekil 2-26(a) verilmiştir. Konvolüsyon tekniğini kullanmadan Şekil 2-26 (b)'de verilen $x[n]$ girişi için sistemin $h[n]$ dürtü tepkisini bulunuz ve çiziniz.

Şekil 2-26 (b)'de verilen $x[n]$ sinyalini aşağıdaki gibi ifade edebiliriz.

$$x[n] = \delta[n-2] - \delta[n-4]$$

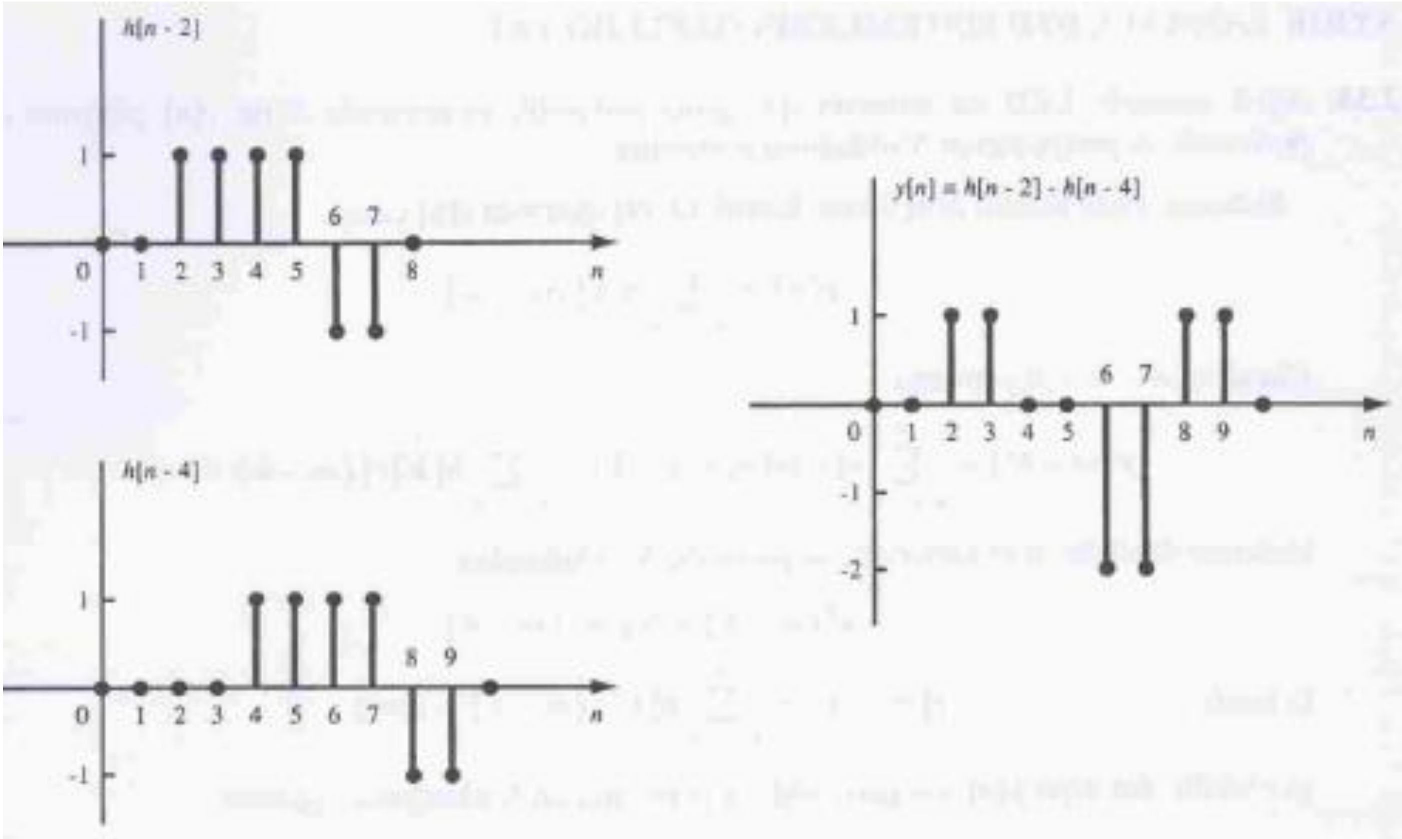


Şekil 2-26

Sistem doğrusal ve zamanla değişmez olduğundan dürtü tepkisinin tanımı uyarınca $y[n]$ çıkış tepkisinin

$$y[n] = h[n-2] - h[n-4]$$

biçiminde olduğu görülmektedir. Bu sonuç Şekil 2-27'de çizilmiştir.



Şekil 2-27

3.) 1.sorudaki x[n] dizisi ile, h[n]=x[n-2] dizisinin Konvolüsyon toplamı işleminin sonucunu bulunuz?

$x[n] = \{5, 4, \underset{\uparrow}{3}, 2, 1, 2\}$

$x[k] = \{5, 4, \underset{\uparrow}{3}, 2, 1, 2\}$

$h[n] = x[n-2] = \{\underset{\uparrow}{5}, 4, 3, 2, 1, 2\}$

$h[k] = \{\underset{\uparrow}{5}, 4, 3, 2, 1, 2\}$

$h[-k] = \{2, 1, 2, 3, 4, \underset{\uparrow}{5}\}$ (1)

$h[n-k] = \{2, 1, 2, 3, 4, 5, 0, 0 \cdots 0, \underset{\uparrow}{0}\}$ (1)

$n < 0$ için

$n = -3$ için

$h[n-k] = \{2, 1, 2, 3, 4, 5, 0, 0, \underset{\uparrow}{0}\}$

$x[k] \cdot h[n-k]$'lar sıfır

$y[n] = 0$ (1)

$n < -2$ için $y(n) = 0$ (1)

$n = -2$ için

$h[n-k] = \{2, 1, 2, 3, 4, 5, 0, \underset{\uparrow}{0}\} \rightarrow y[n] = 5 \cdot 5 = 25$ (1)

$n = -1 \rightarrow h[n-k] = \{2, 1, 2, 3, 4, 5, \underset{\uparrow}{0}\} \rightarrow y[n] = 5 \cdot 4 + 4 \cdot 5 = 40$ (1)

$n = 0 \rightarrow h[n-k] = \{2, 1, 2, 3, 4, \underset{\uparrow}{5}\} \rightarrow y[n] = 5 \cdot 3 + 4 \cdot 4 + 3 \cdot 5 = 46$ (1)

$n=1 \rightarrow h[n-k] = \{2, 1, 2, 3, \underset{\uparrow}{4}, 5\} \rightarrow y[n] = 5\cdot2+4\cdot3+3\cdot4+2\cdot5$

$y[n] = 44$ 1

$n=2 \rightarrow h[n-k] = \{2, 1, 2, \underset{\uparrow}{3}, 4, 5\} \rightarrow y[n] = 5\cdot1+4\cdot2+3\cdot3+2\cdot4+1\cdot5 = 35$ 1

$n=3 \rightarrow h[n-k] = \{2, 1, \underset{\uparrow}{2}, 3, 4, 5\} \rightarrow y[n] = 5\cdot2+4\cdot1+3\cdot2+2\cdot3+1\cdot4+2\cdot5$

$y[n] = 40$ 1

$n=4 \rightarrow h[n-k] = \{2, \underset{\uparrow}{1}, 2, 3, 4, 5\} \rightarrow y[n] = 4\cdot2+3\cdot1+2\cdot2+1\cdot3+2\cdot4 = 26$ 1

$n=5 \rightarrow h[n-k] = \{\underset{\uparrow}{2}, 1, 2, 3, 4, 5\} \rightarrow y[n] = 3\cdot2+2\cdot1+1\cdot2+2\cdot3 = 16$ 1

$n=6 \rightarrow h[n-k] = \{\underset{\uparrow}{0}, 2, 1, 2, 3, 4, 5\} \rightarrow y[n] = 2\cdot2+1\cdot1+2\cdot2 = 9$ 1

$n=7 \rightarrow h[n-k] = \{\underset{\uparrow}{0}, 0, 2, 1, 2, 3, 4, 5\} \rightarrow y[n] = 1\cdot2+2\cdot1 = 4$ 1

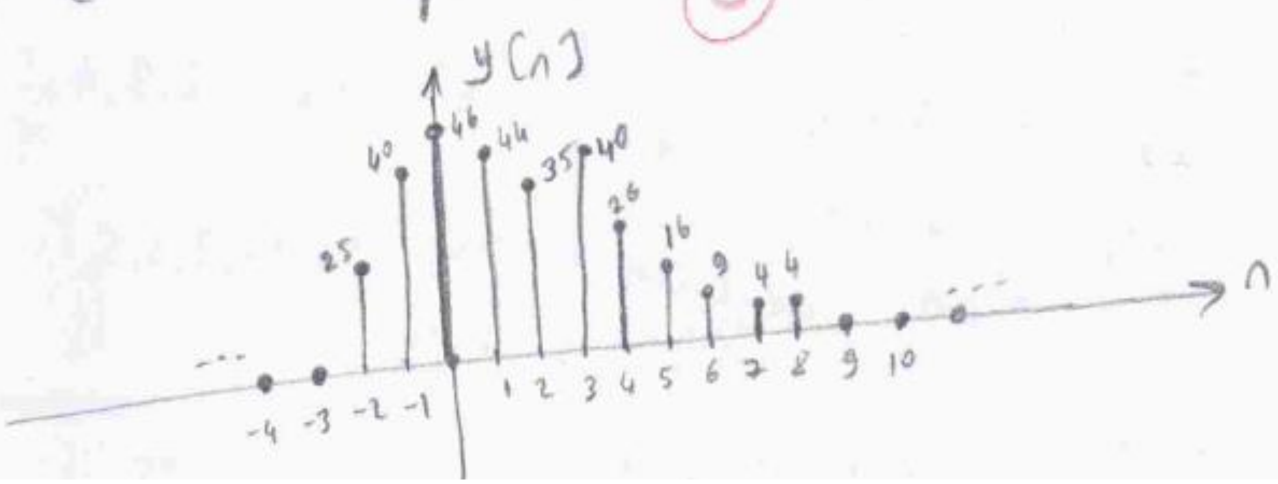
$n=8 \rightarrow h[n-k] = \{\underset{\uparrow}{0}, 0, 0, 2, 1, 2, 3, \overset{3}{4}, 5\} \rightarrow y[n] = 2\cdot2 = 4$ 1

$n > 9$ için 1

$y[n] = 0$

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\cdot h[n-k]$$ 1

$$y[n] = \{0, 25, 40, \underset{\uparrow}{46}, 44, 35, 40, 26, 16, 9, 4, 4, 0\}$$ 3



F. Basamak Tepkisi:

$h[n]$ dürtü tepkisi ile tanımlanan ayrık zamanlı, DZD bir sistemin $s[n]$ basamak tepkisi Eşitlik (2.39) kullanılarak kolayca bulunur.

$$s[n] = h[n] * u[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]u[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{n} h[k] \qquad (2.40)$$

Eşitlik (2.40)'dan

$$h[n] = s[n] - s[n-1] \qquad (2.41)$$

olduğu görülmektedir. Eşitlik (2.40) ve (2.41), Eşitlik (2.12) ve (2.13)'ün ayrık zamanlı karşılıklarıdır.

2.7. AYRIK ZAMANLI, DZD SİSTEMLERİN ÖZELLİKLERİ

A. Bellekli ya da Belleksiz Sistemler:

Belleksiz bir sistemin $y[n]$ çıkışı yalnızca o andaki $x[n]$ girişine bağımlı olduğundan, doğrusal ve zamanla değişmeyen bir sistem için bu ilişki yalnızca aşağıdaki biçimde ifade edilebilir.

$$y[n] = Kx[n] \qquad (2.42)$$

Burada K, sistem kazancı olup bir sabittir. Dolayısıyla, sisteme ilişkin dürtü tepkisi aşağıdaki sade ilişki ile tanımlanır.

$$h[n] = K\delta[n] \qquad (2.43)$$

Sonuç olarak, eğer $n_0 \neq 0$ için $h[n_0] \neq 0$ ise ayrık zamanlı, DZD sistem belleklidir.

B. Nedensellik:

Sürekli zamanlı durumda olduğu gibi ayrık zamanlı, DZD bir sistem için nedensellik koşulu:

$$h[n] = 0 \qquad n < 0 \qquad (2.44)$$

(2.44) ile verilen nedensellik koşulu Eşitlik (2.39)'a uygulanırsa, nedensel DZD bir sistemin çıkışı aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$y[n] = \sum_{k=0}^{\infty} h[k]x[n-k] \qquad (2.45)$$

Ya da (2.44) nedensellik koşulunu denkl. (2.35)'e uygulayarak şu alternatif ifade bulunur.

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k]h[n-k] \qquad (2.46)$$

(2.46) eşitliği göstermektedir ki, $y[n]$ çıkışını hesaplamak için kullanılan $x[n]$ girişinin değerleri yalnızca $k \leq n$ koşulunu sağlayan giriş değerleridir.

Sürekli zamanlı durumda olduğu gibi eğer

$$x[n] = 0 \qquad n < 0 \tag{2.47a}$$

ise bir $x[n]$ girişi nedensel, eğer

$$x[n] = 0 \qquad n \geq 0 \tag{2.47b}$$

ise nedensel değildir. O halde, bir nedensel $x[n]$ girişi için nedensel, ayrık zamanlı, DZD bir sistemin $y[n]$ çıkış şöyle olacaktır:

$$y[n] = \sum_{k=0}^{n} h[k]x[n-k] = \sum_{k=0}^{n} x[k]h[n-k] \tag{2.48}$$

C. Kararlılık:

Eğer dürtü tepkisi mutlak toplanabilir ise, yani

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| < \infty \tag{2.49}$$

koşulu sağlanıyor ise, ayrık zamanlı DZD bir sistemin SGSÇ anlamında kararlı olduğu gösterilebilir.

2.8. AYRIK ZAMANLI, DZD SİSTEMLERİN ÖZFONKSİYONLARI

Bölüm 1 (Prob. 1.45)'de, **T** ile tanımlanan ayrık zamanlı, DZD sistemlerin özfonksiyonlarının, z bir karmaşık değişken olmak üzere, z^n biçimindeki karmaşık fonksiyonlar olduğu belirlenmişti. Bu durumda,

$$\mathbf{T}\{z^n\} = \lambda z^n \tag{2.50}$$

olup, burada λ, **T**'nin z^n'ye ilişkin özdeğeridir. Eşitlik (2.39)'da $x[n] = z^n$ koyarak

$$y[n] = \mathbf{T}\{z^n\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]z^{n-k} = \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]z^{-k}\right] z^n$$

$$= H(z)z^n = \lambda z^n \tag{2.51}$$

bulunur. Burada:

$$\lambda = H(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]z^{-k} \tag{2.52}$$

O halde, ayrık zamanlı, DZD bir sistemin z^n özfonksiyonuna ilişkin özdeğeri karmaşık bir sabit olan $H(z)$ olup değeri, z'nin ilgili değeri kullanılarak Eşitlik (2.52) ile hesaplanır. Eşitlik (2.51)'den $y[0] = H(z)$ olduğuna dikkat ediniz (bkz. Prob.1.45).

Yukarıdaki sonuçlar Böl. 4. ve 6'da açıklanan z dönüşümünün ve ayrık zamanlı Fourier dönüşümünün tanımlarının temelini oluşturmaktadır.

2.9. FARK DENKLEMLERİYLE TANIMLANAN SİSTEMLER

Türevsel denklemlerin sürekli zamanlı sistemleri tanımlamada üstlendiği rol, ayrık zamanlı sistemleri tanımlamada fark denklemlerince üstlenilir.

A. Doğrusal, Sabit Katsayılı Fark Denklemleri:

(2.25) genel türevsel denkleminin ayrık zamandaki karşıtı *N*. mertebeden doğrusal, sabit katsayılı aşağıdaki denklemdir.

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k] \qquad (2.53)$$

Burada a_k ve b_k gerçel sabitleridr. *N* mertebesi Eşitlik (2.53)'deki $y[n]$'nin en büyük gecikme değeridir. Doğrusal, sabit katsayılı fark denklemlerinin sınıfına yönelik bir örnek Bölüm 1 (Prob. 1.37)'de verilmiştir. Sürekli zamandakine karşıt olarak Eşitlik (2.53)'ün çözümü ve doğrusallık, nedensellik ve zamanla değişmezlik gibi tüm sistem özellikleri; türevsel denklemlerin incelenmesindeki tekniklere paralel teknikler izlenerek incelenebilir. Eğer sistem başlangıçta durgun durumda ise Eşitlik (2.53) ile tanımlanan sistemin nedensel ve DZD olduğu tekrar vurgulanmalıdır.

B. Tekrarlı Çözüm:

Eşitlik (2.53)'ün daha basit bir alternatif çözümü, bu denklemin yeniden düzenlenmesi ile elde edilir.

$$y[n] = \frac{1}{a_0}\left\{ \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k] - \sum_{k=1}^{N} a_k y[n-k] \right\} \qquad (2.54)$$

Bu formül bize n anındaki çıkışın o andaki giriş ile daha önceki giriş ve çıkış değerleri cinsinden hesaplanması olanağını vermektedir. Yardımcı koşullara gereksinim Eşitlik (2.54)'den açıkça görülmektedir. $n = n_0$'dan başlayarak $y[n]$'yi hesaplamak için $n \geq n_0 - M$ için $x[n]$ girişine ek olarak $y[n_0-1]$, $y[n_0-2]$, . . . , $y[n_0-N]$ değerleri de bilinmelidir. Çıkışı giriş ve daha önceki çıkışlar cinsinden hesaplayan tekrarlı bir yöntem olması nedeniyle Eşitlik (2.54) ile verilen genel ifade bir tekrarlı denklem olarak bilinir.

$N = 0$ için Eşitlik (2.53)

$$y[n] = \frac{1}{a_0}\left\{ \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k] \right\} \tag{2.55}$$

tekrarlı olmayan bir denkleme dönüşür. Çünkü, çıkışın şimdiki değerini hesaplamak için çıkışın eski değerleri gerekmez. Bu durumda $y[n]$'nin hesabı için yardımcı koşullara gereksinim yoktur.

C. Dürtü Tepkisi:

Sürekli zamanlı sistemden farklı olarak Eşitlik (2.53) ya da eşdeğer biçimde Eşitlik (2.54) ile tanımlanan ayrık zamanlı, DZD bir sistemin $h[n]$ dürtü tepkisi aşağıdaki eşitlikle kolayca saptanabilir.

$$h[n] = \frac{1}{a_0}\left\{ \sum_{k=0}^{M} b_k\, \delta[n-k] - \sum_{k=1}^{N} a_k h[n-k] \right\} \tag{2.56}$$

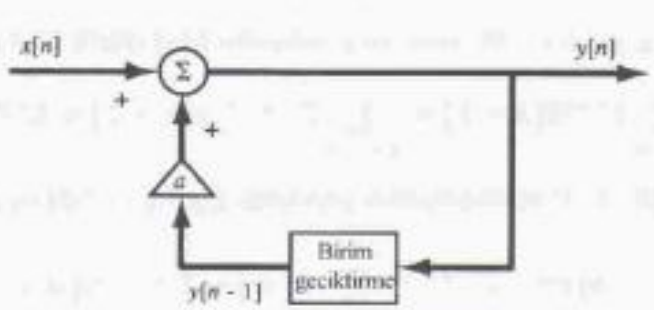
Eşitlik (2.55) ile tanımlanan sistemin $h[n]$ dürtü tepkisi ise

$$h[n] = \frac{1}{a_0} \sum_{k=0}^{M} b_k\, \delta[n-k] = \begin{cases} b_n/a_0 & 0 \le n \le M \\ 0 & \text{Diğer durumlarda} \end{cases} \tag{2.57}$$

biçimindedir. Bu sistem için dürtü tepkisinin sonlu sayıda terimden oluştuğuna dikkat ediniz. Diğer bir deyişle yalnızca sonlu bir zaman süresince tepki sıfırdan farklıdır. Bu özellik nedeniyle Eşitlik (2.55) ile tanımlanmış bir sistem sonlu dürtü tepkili (FIR) sistem olarak bilinir. Diğer taraftan, sonsuz zaman süresince tepkisi sıfırdan farklı olan bir sistem de sonsuz dürtü tepkili (IIR) sistem olarak bilinir. Dürtü tepkisinin bulunmasına ilişkin örnekler Prob.2.44 ve 2.45'de çözülmüştür. Dönüşüm tekniklerini kullanarak dürtü tepkisinin bulunması Bölüm 4'de incelenecektir.

FARK DENKLEMLERİYLE TANIMLANAN SİSTEMLER

2.39. Şekil 2-28'deki ayrık zamanlı sistem bir birim geciktirme elemanı ve bir skalar çarpıcıdan oluşmuştur. $y[n]$ çıkışı ve $x[n]$ girişi arasındaki ilişkiyi tanımlayan fark denklemini yazınız.



Şekil 2-28

Şekil 2-28'deki birim geciktirme elemanının çıkışı $y[n-1]$ olduğundan

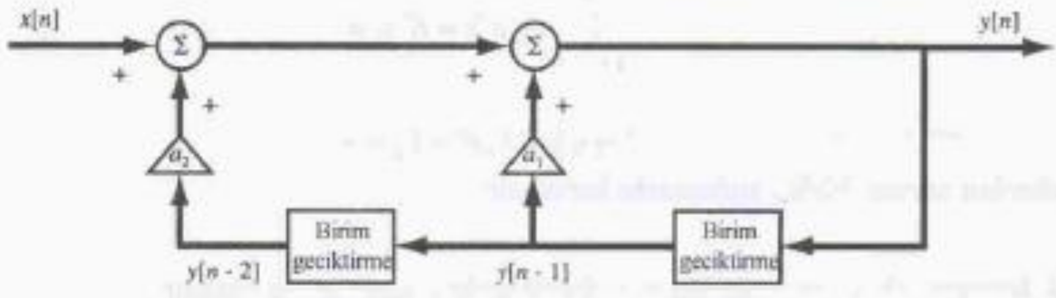
$$y[n] = ay[n-1] + x[n] \tag{2.142}$$

ya da

$$y[n] - ay[n-1] = x[n] \tag{2.143}$$

yazılabilir. Bu, istenen birinci mertebeden fark denklemidir.

2.40. Şekil 2-29'daki ayrık zamanlı sistem iki birim geciktirme elemanı ve bir skalar çarpıcıdan oluşmuştur. $y[n]$ çıkışı ve $x[n]$ girişi arasındaki ilişkiyi tanımlayan fark denklemini yazınız.



Şekil 2-29

Şekil 2-29'daki sağdan birinci birim geciktirme elemanının çıkışı $y[n-1]$, sağdan ikinci birim geciktirme elemanının çıkışı ise $y[n-2]$ dir. O halde

$$y[n] = a_1 y[n-1] + a_2 y[n-2] + x[n] \tag{2.144}$$

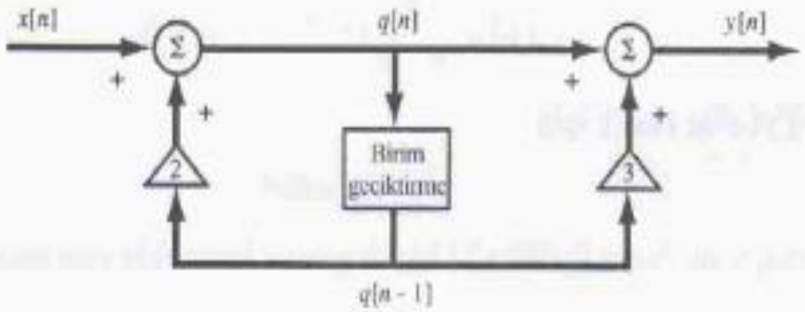
ya da

$$y[n] - a_1 y[n-1] - a_2 y[n-2] = x[n] \tag{2.145}$$

yazılabilir. Bu, istenen ikinci mertebe fark denklemidir.

Not: Genel olarak, birim geciktirme elemanlarının ve skalar çarpıcıların bağlanmasından oluşan ayrık zamanlı, DZD bir sistemin mertebesi, sistemdeki birim geciktirme elemanlarının sayısına eşittir.

2.41. Şekil 2-30'daki sistemde $y[n]$ çıkışı ile $x[n]$ girişi arasındaki ilişkiyi veren fark denklemini yazınız.



Şekil 2-30

Şekil 2-30'daki birim geciktirme elemanının girişi $q[n]$ olsun. Bu durumda

$$q[n] = 2q[n-1] + x[n] \tag{2.146a}$$

$$y[n] = q[n] + 3q[n-1] \tag{2.146b}$$

yazılabilir. Bu iki eşitlikten $q[n]$ ve $q[n-1]$, $x[n]$ ve $y[n]$ cinsinden çözülebilir.

$$q[n] = \tfrac{2}{5}y[n] + \tfrac{3}{5}x[n] \tag{2.147a}$$

$$q[n-1] = \tfrac{1}{5}y[n] - \tfrac{1}{5}x[n] \tag{2.147b}$$

Eşitlik (2.147a)'da $n \to (n-1)$ değişikliği yapılırsa

$$q[n-1] = \tfrac{2}{5}y[n-1] + \tfrac{3}{5}x[n-1] \tag{2.147c}$$

elde edilir. Eşitlik (2.147b) ve Eşitlik (2.147c) birbirine eşitlenerek

$$\tfrac{1}{5}y[n] - \tfrac{1}{5}x[n] = \tfrac{2}{5}y[n-1] + \tfrac{3}{5}x[n-1]$$

ve yeniden düzenleme ile

$$y[n] - 2y[n-1] = x[n] + 3x[n-1] \tag{2.148}$$

elde edilir. Bu, istenen fark denklemidir.