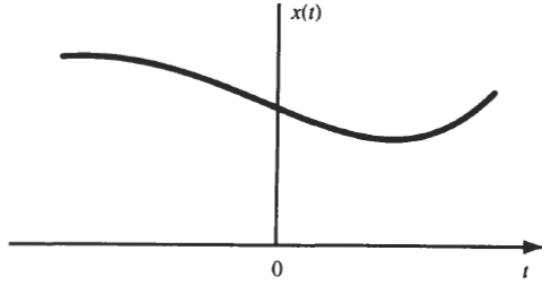


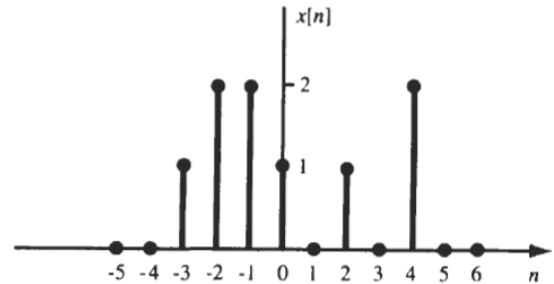
SİNYALLER ve SİSTEMLER

1. Sinyallerin Sınıflandırılması

1.1 Sürekli Zamanlı ve Ayrık Zamanlı Sinyaller



(a)
Sürekli Zamanlı Sinyal
(Analog Sinyal)



(b)
Ayrık Zamanlı Sinyal
(Sayısal Sinyal)

1.2 Analog ve Sayısal Sinyaller

Herhangi bir (a,b) reel sayı aralığında bir $x(t)$ sinyali sonsuz değer alıyorsa bu sinyal analog sinyal diye adlandırılır. Ayrık zamanlı $x[n]$ sinyali ise belirli bir aralıkta sınırlı değer alan sinyallerdir.

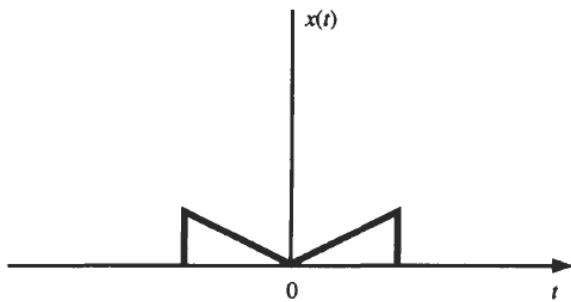
1.3 Gerçek ve Karmaşık Sinyaller

Bir sinyal sadece reel sayılardan oluşmuşsa gerçek sinyal, sanal (imajiner) kısım içeriyorsa da karmaşık sinyal olarak adlandırılır.

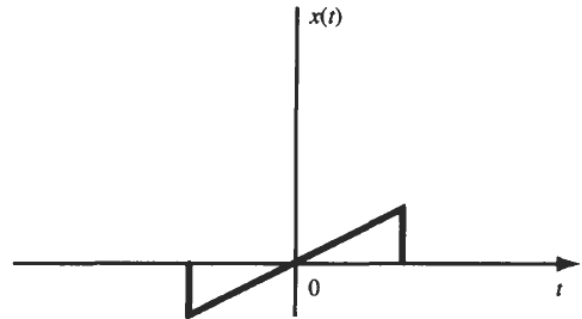
1.4 Belirli ve Rastgele Sinyaller

Herhangi bir sinyalin hangi zaman aralığında hangi değerlerini alacağını biliyorsak bu sinyal belirli bir sinyal olmuş olur. Rastgele sinyal ise zamanla nasıl değiştiğini, hangi değerleri hangi zamanda alacağını bilemediğimiz sinyallerdir; örneğin toplamsal beyaz gürültü. Rastgele sinyallerin karakteristik özelliklerini istatistiksel olarak ifade edebiliriz.

1.5 Tek ve Çift Sinyaller



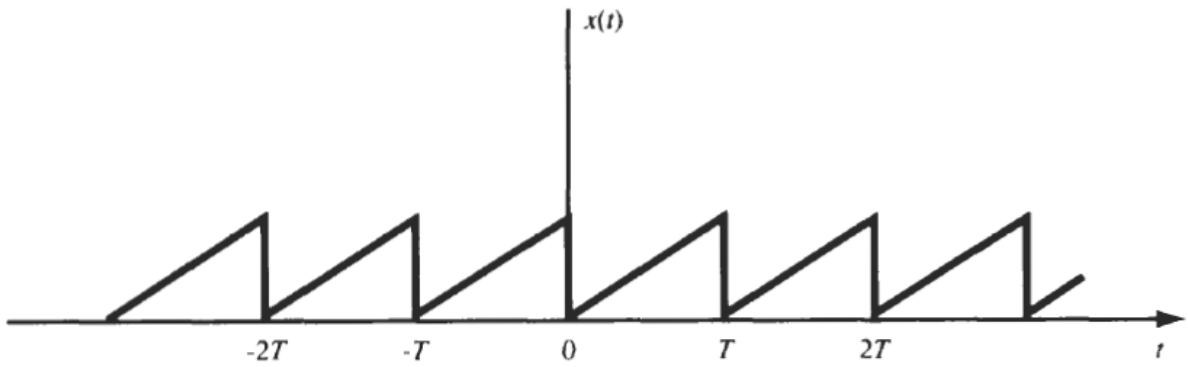
(a) Çift Sinyal



(b) Tek Sinyal

1.6 Periyodik ve Periyodik Olmayan Sinyaller

$$x(t + T) = x(t)$$



(a) Periyodik Sinyal

1.7 Enerji ve Güç Sinyalleri

Sonsuz değer alan sinyallerin enerjileri de sonsuz olacağından bu sinyallerin gücünden bahsedilir ve bu sinyallere güç sinyali denir. Eğer sonsuz değer almıyor ve enerjisi bir reel sayıya eşit oluyorsa bu tür sinyallere de enerji sinyali denir.

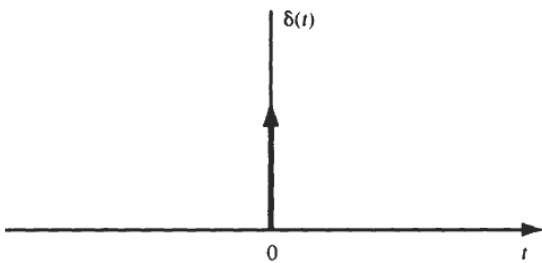
$$E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2$$

$$P = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N + 1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2$$

- $0 < E < \infty$, Enerji sinyali, böylece $P = 0$.
- $0 < P < \infty$, Güç sinyali, böylece $E = 0$.
- Bu iki koşula uymayan sinyaller ne enerji sinyalidir ne de güç.

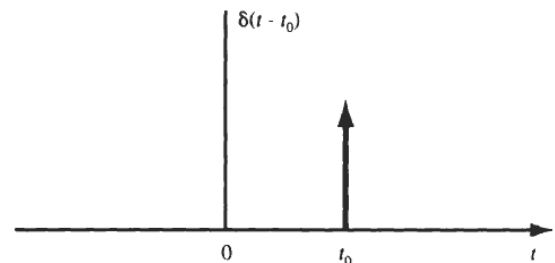
2. Birim Darbe Fonksiyonu

Birim darbe fonksiyonu $\delta(t)$, Dirak delta fonksiyonu olarak da adlandırılır. Bu sinyal sistem analizinde merkezi bir rol oynamaktadır.



(a)

Birim Darbe Fonksiyonu



(b)

Kaydırılmış Birim Darbe Fonksiyonu

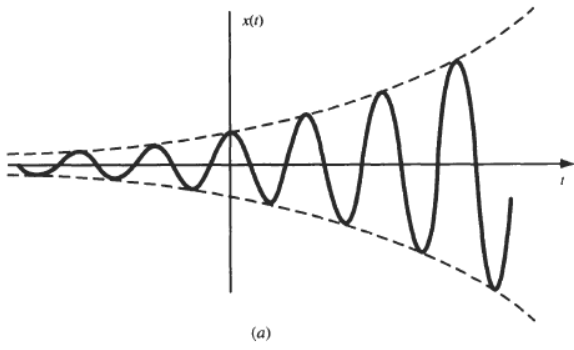
$$\delta(at) = \frac{1}{|a|} \delta(t)$$

$$\delta(-t) = \delta(t)$$

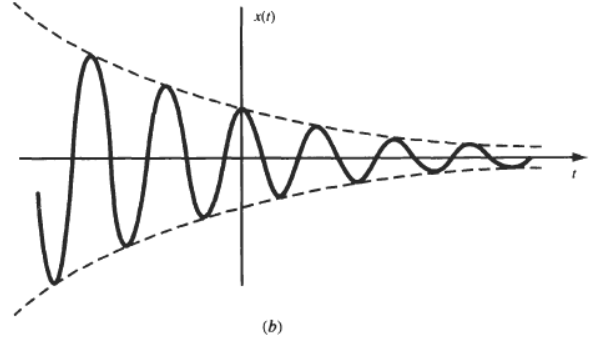
$$x(t) \cdot \delta(t) = x(0) \cdot \delta(t)$$

3. Karmaşık Üstel Sinyaller

$$x(t) = e^{j\omega_0 t}$$



Karmaşık Üstel Artan Sinyal



Karmaşık Üstel Azalan Sinyal

Karmaşık üstel sinyal Euler formülüne göre aşağıdaki biçimde ifade edilir.

$$x(t) = e^{j\omega_0 t} = \cos(\omega_0 t) + j\sin(\omega_0 t)$$

Temel periyot;

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

4. Sinüzoidal Sinyaller

Sürekli zamanlı bir sinüzoidal sinyal aşağıdaki biçimde ifade edilebilir,

$$x(t) = A \cdot \cos(\omega_0 t + \theta)$$

A: Genlik (Volt)

ω_0 : Açısal frekans (rad)

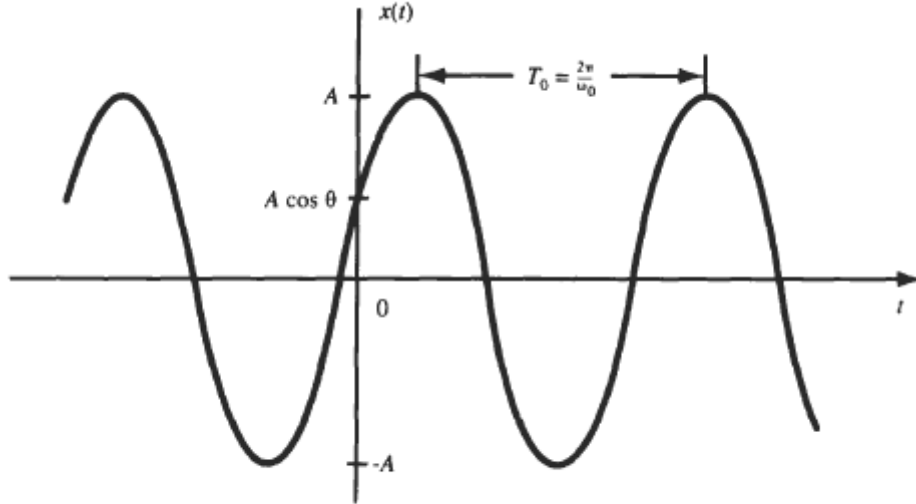
θ : Faz açısı (rad)

Temel periyot;

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

Temel frekans;

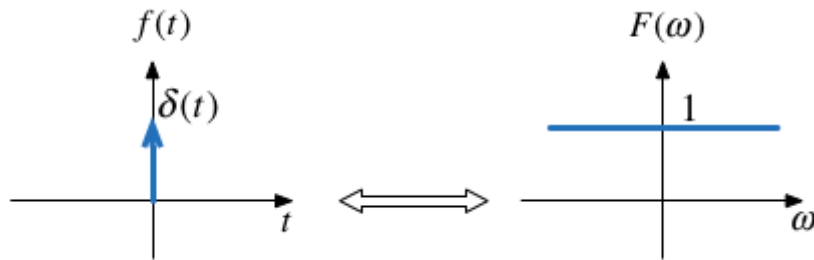
$$f_0 = \frac{1}{T_0} \text{ Hertz(Hz)} \quad \omega_0 = 2\pi f_0$$



Sürekli Zamanlı Sinüzoidal Sinyal

KONVOLÜSYON

Birim darbe fonksiyonu tüm frekansları içerir. Dolayısıyla sistemlerin darbe cevapları bu fonksiyon kullanılarak elde edilir.



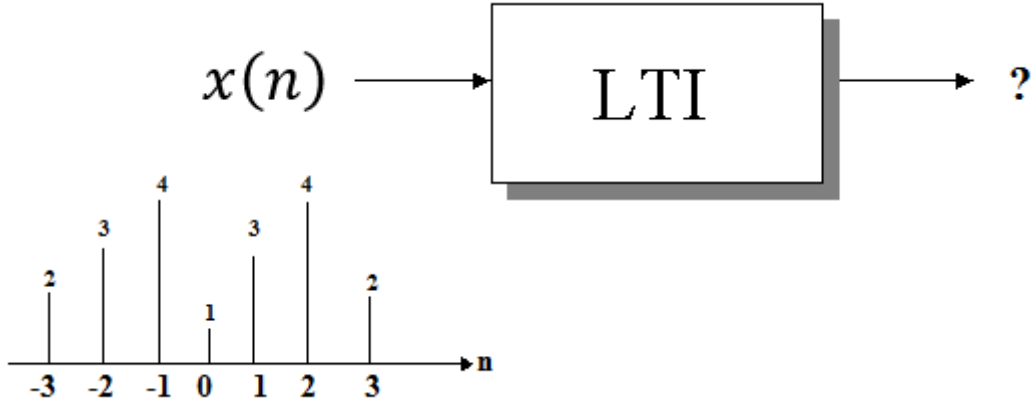
Aşağıdaki şekilde lineer zamanla değişmeyen (LTI) bir sistem verilmiştir. Bu sistemin girişine birim darbe fonksiyonu uygulanırsa ($x(t) = \delta(t)$), çıkıştan alınan sinyal ($y(t) = h(t)$) sistemin darbe cevabı olur. (Ayrık zamanlı sinyallerde “t” yerine “n” kullanılır.)



LTI Sistemin girişine birim darbe sinyali uygulanırsa sistemin darbe cevabı $h(n)$ elde edilir.



* Peki, bir sistemde $h(n)$ biliniyorsa ve sistemin girişine bilinen bir $x(n)$ sinyali uygularsak sistemin çıkışı ne olur?



Verilen giriş sinyalinin birim darbe fonksiyonu cinsinden yazalım.

$$x(n) = 2 \cdot \delta(n + 3) + 3 \cdot \delta(n + 2) + 4 \cdot \delta(n + 1) + \delta(n) + 3 \cdot \delta(n - 1) + 4 \cdot \delta(n - 2) + 2 \cdot \delta(n - 3)$$

Giriş $\delta(n)$ uyguladığımızda çıkışın $h(n)$ olduğunu biliyoruz. Dolayısıyla verilen $x(n)$ sinyali de birim darbelerden oluştuğu için sistemin çıkışını $h(n)$ cinsinden yazabiliriz.

$$y(n) = 2 \cdot h(n + 3) + 3 \cdot h(n + 2) + 4 \cdot h(n + 1) + h(n) + 3 \cdot h(n - 1) + 4 \cdot h(n - 2) + 2 \cdot h(n - 3)$$

Bu elde ettiğimiz ifade çıkış işaretidir. Bunu genelleştirmek için $x(n)$ giriş sinyalinin değerlerini değil de kendisini yerine yazalım.

$$y(n) = x(-3) \cdot h(n + 3) + x(-2) \cdot h(n + 2) + x(-1) \cdot h(n + 1) + x(0) \cdot h(n) + x(1) \cdot h(n - 1) + x(2) \cdot h(n - 2) + x(3) \cdot h(n - 3)$$

Bu ifadeyi aşağıdaki gibi genel biçimde yazabiliriz.

$$y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) \cdot h(n - k)$$

Bu toplama konvolüsyon toplamı denir. Sürekli zamanlı sinyallerde ise konvolüsyon integrali aşağıdaki biçimdedir.

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \cdot h(t - \tau) \cdot d\tau$$

Konvolüsyon Toplamının Özellikleri

1. Değişme özelliği

$$x[n] * h[n] = h[n] * x[n]$$

2. Birleşme özelliği

$$\{x[n] * h_1[n]\} * h_2[n] = x[n] * \{h_1[n] * h_2[n]\}$$

3. Dağılma özelliği

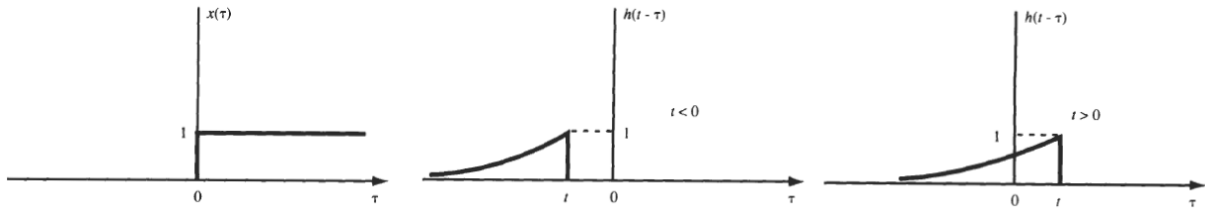
$$x[n] * \{ h_1[n] + h_2[n] \} = x[n] * h_1[n] + x[n] * h_2[n]$$

Örnek 1. Darbe cevabı $h(t)$ olan sürekli zamanlı bir LTI sistemin girişine $x(t)$ sinyali uygulandığında, sistemin çıkışındaki $y(t)$ sinyali ne olur?

$$x(t) = u(t) \quad h(t) = e^{-\alpha t} \cdot u(t) \quad \alpha > 0$$

Çözüm 1: Sürekli zamanlı olduğu için konvolüsyon integralinin kullanılması gerekmektedir.

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{\tau=-\infty}^{\infty} x(\tau) \cdot h(t - \tau) \cdot d\tau$$



$x(\tau)$ ve $h(t - \tau)$ fonksiyonlarının grafikleri, $t < 0$ ve $t > 0$ durumları için şekilde verilmiştir.

Şekilden de görüldüğü gibi $x(\tau)$ ve $h(t - \tau)$ fonksiyonları $t < 0$ durumu için üst üste çakışmamaktadır ($t < 0$ için $y(t) = 0$). Bu durumda integrali sadece $t > 0$ durumu için alırsak sonuca ulaşırız.

$$y(t) = \int_0^t 1 \cdot e^{-\alpha(t-\tau)} \cdot d\tau = e^{-\alpha t} \cdot \int_0^t 1 \cdot e^{\alpha\tau} \cdot d\tau = e^{-\alpha t} \cdot \left(\frac{e^{\alpha\tau} - 1}{\alpha} \right)$$

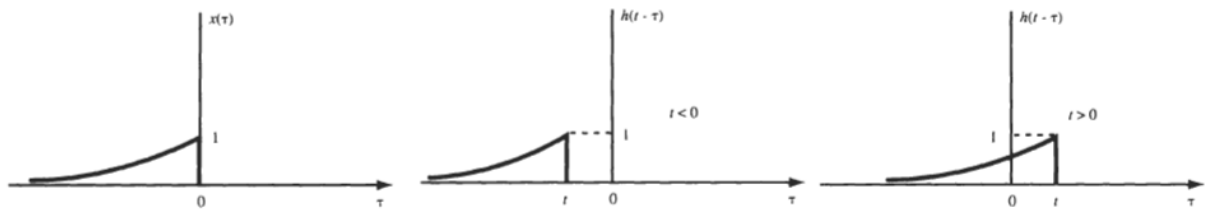
$$y(t) = \frac{1}{\alpha} (1 - e^{-\alpha t}) \cdot u(t)$$

Örnek 2. Sürekli zamanlı LTI bir sistemin darbe cevabı ve giriş sinyali aşağıda verilmiştir. Sistemin çıkış sinyalini bulunuz.

$$x(t) = e^{\alpha t} \cdot u(-t) \quad h(t) = e^{-\alpha t} \cdot u(t) \quad \alpha > 0$$

Çözüm 2:

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{\tau=-\infty}^{\infty} x(\tau) \cdot h(t - \tau) \cdot d\tau$$



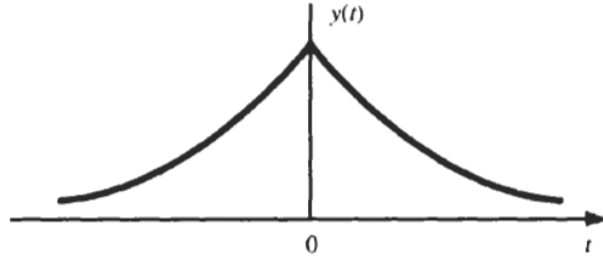
Şekildeki grafiklere bakıldığında $x(\tau)$ ve $h(t - \tau)$ fonksiyonları $t < 0$ ve $t > 0$ için üst üste çakışmaktadır. Dolayısıyla iki farklı aralıkta integral almamız gerekmektedir. $t < 0$ için, $\tau = -\infty$ 'dan $\tau = t$ 'ye kadar ilk integrali alalım;

$$y(t) = \int_{-\infty}^t e^{\alpha\tau} \cdot e^{-\alpha(t-\tau)} \cdot d\tau = e^{\alpha t} \cdot \int_{-\infty}^t e^{2\alpha\tau} \cdot d\tau = \frac{1}{2\alpha} e^{\alpha t}$$

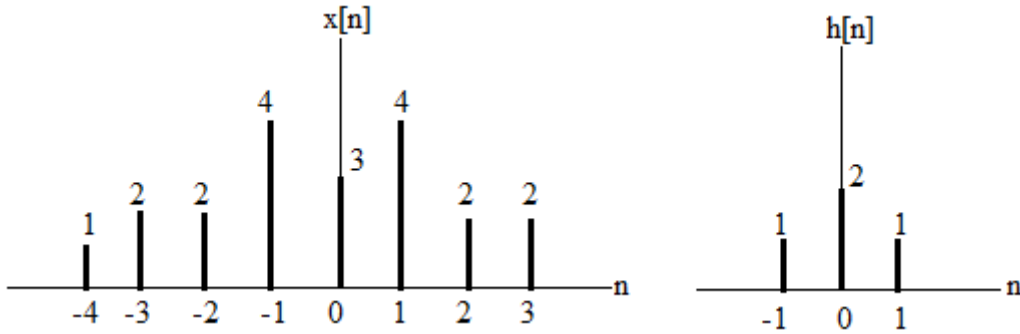
$t > 0$ için, $\tau = -\infty$ 'dan $\tau = 0$ 'a kadar ikinci integrali alalım;

$$y(t) = \int_{-\infty}^0 e^{\alpha\tau} \cdot e^{-\alpha(t-\tau)} \cdot d\tau = e^{\alpha t} \cdot \int_{-\infty}^0 e^{2\alpha\tau} \cdot d\tau = \frac{1}{2\alpha} e^{-\alpha t}$$

Çıkış sinyali aşağıda verilmiştir.



Örnek 3. Ayırık zamanlı LTI bir sistemin darbe cevabı $h[n]$ aşağıda verilmiştir. Bu sistemin girişine şekilde verilen $x[n]$ sinyali uygulanırsa çıkış sinyali $y[n]$ ne olur?



Çözüm 3:

1.Yol:

Ayrık zamanlı LTI sisteme $\delta[n]$ uygulandığında $h[n]$ sinyalinin elde edildiğini biliyoruz. $x[n]$ sinyalini birim darbe fonksiyonu cinsinden yazıp, sistemin darbe cevabını kullanarak çıkış sinyalini elde edebiliriz.

Verilen $x[n]$ sinyalini birim darbeler cinsinden yazalım,

$$x[n] = \delta[n + 4] + 2 \cdot \delta[n + 3] + 2 \cdot \delta[n + 2] + 4 \cdot \delta[n + 1] + 3 \cdot \delta[n] + 4 \cdot \delta[n - 1] + 2 \cdot \delta[n - 2] + 2 \cdot \delta[n - 3]$$

$\delta[n]$ uygulandığında $h[n]$, $p \cdot \delta[n \pm r]$ uygulandığında da $p \cdot h[n \pm r]$ elde edilir. Dolayısıyla;

$$y[n] = h[n + 4] + 2 \cdot h[n + 3] + 2 \cdot h[n + 2] + 4 \cdot h[n + 1] + 3 \cdot h[n] + 4 \cdot h[n - 1] + 2 \cdot h[n - 2] + 2 \cdot h[n - 3]$$

görülen çıkış sinyali elde edilir. Artık bu ifadeyi kullanarak çıkış sinyalinin değerlerini elde edebiliriz.

$$y[-5] = h[-1] + 2 \cdot h[-2] + 2 \cdot h[-3] + 4 \cdot h[-4] + 3 \cdot h[-5] + 4 \cdot h[-6] + 2 \cdot h[-7] + 2 \cdot h[-8]$$

$$y[-5] = 1$$

NOT: Darbe cevabı sadece -1,0,1 değerlerinde sıfırdan farklıdır, geri kalan tüm tam sayı değerlerinde sıfırdır.

$$y[-4] = h[0] + 2 \cdot h[-1] + 2 \cdot h[-2] + 4 \cdot h[-3] + 3 \cdot h[-4] + 4 \cdot h[-5] + 2 \cdot h[-6] + 2 \cdot h[-7]$$

$$y[-4] = 2 + 2 = 4$$

$$y[-3] = h[1] + 2 \cdot h[0] + 2 \cdot h[-1] + 4 \cdot h[-2] + 3 \cdot h[-3] + 4 \cdot h[-4] + 2 \cdot h[-5] + 2 \cdot h[-6]$$

$$y[-3] = 1 + 2 \cdot 2 + 2 = 7$$

$$y[-2] = h[2] + 2 \cdot h[1] + 2 \cdot h[0] + 4 \cdot h[-1] + 3 \cdot h[-2] + 4 \cdot h[-3] + 2 \cdot h[-4] + 2 \cdot h[-5]$$

$$y[-2] = 2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 4 \cdot 1 = 10$$

$$y[-1] = h[3] + 2 \cdot h[2] + 2 \cdot h[1] + 4 \cdot h[0] + 3 \cdot h[-1] + 4 \cdot h[-2] + 2 \cdot h[-3] + 2 \cdot h[-4]$$

$$y[-1] = 2 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + 3 \cdot 1 = 13$$

$$y[0] = h[4] + 2 \cdot h[3] + 2 \cdot h[2] + 4 \cdot h[1] + 3 \cdot h[0] + 4 \cdot h[-1] + 2 \cdot h[-2] + 2 \cdot h[-3]$$

$$y[0] = 4 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 4 \cdot 1 = 14$$

$$y[1] = h[5] + 2 \cdot h[4] + 2 \cdot h[3] + 4 \cdot h[2] + 3 \cdot h[1] + 4 \cdot h[0] + 2 \cdot h[-1] + 2 \cdot h[-2]$$

$$y[1] = 3 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + 2 \cdot 1 = 13$$

$$y[2] = h[6] + 2 \cdot h[5] + 2 \cdot h[4] + 4 \cdot h[3] + 3 \cdot h[2] + 4 \cdot h[1] + 2 \cdot h[0] + 2 \cdot h[-1]$$

$$y[2] = 4 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 1 = 10$$

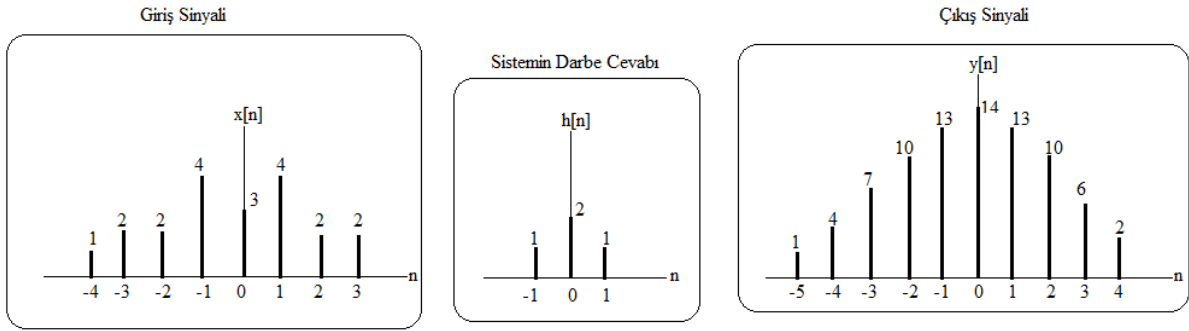
$$y[3] = h[7] + 2 \cdot h[6] + 2 \cdot h[5] + 4 \cdot h[4] + 3 \cdot h[3] + 4 \cdot h[2] + 2 \cdot h[1] + 2 \cdot h[0]$$

$$y[3] = 2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 = 6$$

$$y[4] = h[8] + 2 \cdot h[7] + 2 \cdot h[6] + 4 \cdot h[5] + 3 \cdot h[4] + 4 \cdot h[3] + 2 \cdot h[2] + 2 \cdot h[1]$$

$$y[4] = 2$$

Çıkış sinyalinin tüm değerlerini elde etmiş olduk. Şimdi bunu grafikte gösterelim.



2.Yol:

Konvolüsyon toplamı kullanarak çıkış sinyali bulunabilir.

$$y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) \cdot h(n - k)$$

Bu yöntemde öncelikle $h[n]$ sinyali ters çevrilerek $h[-n]$ sinyali elde edilir. Ardından birer birim kaydırılarak baştan sona tüm $x[n]$ değerleri ile toplanır ve çıkış sinyali $y[n]$ elde edilir.

$$h[n] = [1 \ 2 \ 1], \quad h[-n] = [1 \ 2 \ 1]$$

$$\begin{array}{ccccccc} & & 1 & 2 & 2 & 4 & 3 & 4 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & \boxed{1} & & & & & & & \\ \hline y[-5] & = & 1 \cdot 1 & = & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc} & & 1 & 2 & 2 & 4 & 3 & 4 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & \boxed{2} & \boxed{1} & & & & & & \\ \hline y[-4] & = & 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 & = & 4 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc} & & 1 & 2 & 2 & 4 & 3 & 4 & 2 & 2 \\ & & \boxed{1} & \boxed{2} & \boxed{2} & & & & & \\ \hline y[-3] & = & 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 1 & = & 7 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc} & & 1 & 2 & 2 & 4 & 3 & 4 & 2 & 2 \\ & & \boxed{2} & \boxed{2} & \boxed{4} & & & & & \\ & & \boxed{1} & \boxed{2} & \boxed{1} & & & & & \\ \hline y[-2] & = & 2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 4 \cdot 1 & = & 10 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc} & & 1 & 2 & 2 & 4 & 3 & 4 & 2 & 2 \\ & & \boxed{2} & \boxed{4} & \boxed{3} & & & & & \\ & & \boxed{1} & \boxed{2} & \boxed{1} & & & & & \\ \hline y[-1] & = & 2 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + 3 \cdot 1 & = & 13 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc} & & 1 & 2 & 2 & 4 & 3 & 4 & 2 & 2 \\ & & & \boxed{4} & \boxed{3} & \boxed{4} & & & & \\ & & & \boxed{1} & \boxed{2} & \boxed{1} & & & & \\ \hline y[0] & = & 4 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 4 \cdot 1 & = & 14 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc} & & 1 & 2 & 2 & 4 & 3 & 4 & 2 & 2 \\ & & & & \boxed{3} & \boxed{4} & \boxed{2} & & & \\ & & & & \boxed{1} & \boxed{2} & \boxed{1} & & & \\ \hline y[1] & = & 3 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + 2 \cdot 1 & = & 13 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc} & & 1 & 2 & 2 & 4 & 3 & 4 & 2 & 2 \\ & & & & & \boxed{4} & \boxed{2} & \boxed{2} & & \\ & & & & & \boxed{1} & \boxed{2} & \boxed{1} & & \\ \hline y[2] & = & 4 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 1 & = & 10 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc} & & 1 & 2 & 2 & 4 & 3 & 4 & 2 & 2 \\ & & & & & & \boxed{2} & \boxed{2} & & \\ & & & & & & \boxed{1} & \boxed{2} & & \\ \hline y[3] & = & 2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 & = & 4 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc} & & 1 & 2 & 2 & 4 & 3 & 4 & 2 & 2 \\ & & & & & & & \boxed{2} & & \\ & & & & & & & \boxed{1} & 2 & 1 \\ \hline y[4] & = & 2 \cdot 1 & = & 2 \end{array}$$

3.Yol:

MATLAB programını kullanarak konvolüsyon alalım. Bu işlem MATLAB'ta "conv" komutu ile yapılır.

```
>> h=[1 2 1];
>> x=[1 2 2 4 3 4 2 2];
>> y=conv(x,h)
```

y =

1 4 7 10 13 14 13 10 6 2

FOURIER SERİLERİ ve AYRIK SPEKTRUM

A. Kompleks Üstel Fourier Serileri

Temel periyodu T_o olan periyodik bir $x(t)$ sinyali olsun. Biz bu $x(t)$ sinyalini karmaşık üstel Fourier serileri biçiminde aşağıdaki gibi tanımlarız,

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jnw_o t} \quad w_o = \frac{2\pi}{T_o}$$

Burada c_n katsayıları, herhangi bir t_o değeri için aşağıdaki biçimde elde edilir.

$$c_n = \frac{1}{T_o} \int_{t_o}^{t_o+T_o} x(t) e^{-jnw_o t} dt$$

Bu c_n katsayıları, Fourier katsayıları olarak adlandırılır ve $t_o = -T_o/2$, olarak alınırsa,

$$c_n = \frac{1}{T_o} \int_{-T_o/2}^{T_o/2} x(t) e^{-jnw_o t} dt$$

Elde edilir. Bu katsayılar genellikle karmaşık sayılardır ve aşağıdaki biçimde ifade edilebilirler.

$$c_n = |c_n| e^{j\theta_n}$$

Burada c_n katsayılarının genliği $|c_n|$, faz açısı ise $e^{j\theta_n}$ 'dir.

B. Frekans Spektrumu

Periyodik bir $x(t)$ sinyalinin Fourier katsayılarının genlikleri olan $|c_n|$, açısal frekans olan $w = 2\pi f$ 'e göre çizdirilirse, genlik spektrumu elde edilir. θ_n açısal frekansa göre çizdirilirse faz spektrumu elde edilir. Bu ikisi birlikte açısal frekansa göre çizdirilirse frekans spektrumu elde edilir.

İndeks olan “n” tamsayıları ifade ettiğinden, periyodik bir sinyalin bir spektrumu sadece ayırık değerlerden oluşacaktır. Bu ayırık frekans değerleri nw_o 'dır.

Eğer bir $x(t)$ sinyali zamanın gerçek bir fonksiyonu ise,

$$c_{-n} = c_n^* = |c_n| e^{-j\theta_n}$$

Bunun anlamı şudur, gerçek periyodik sinyaller için pozitif ve negatif katsayılar birbirlerinin konjugeleridir. Yani,

$$|c_{-n}| = |c_n| \quad \theta_{-n} = -\theta_n$$

Dolayısıyla genlik spektrumu w 'nın çift fonksiyonu, faz spektrumu ise w 'nın tek fonksiyonudur.

C. Periyodik Bir Sinyalin Güç İçeriği ve Parseval Teoremi

Periyodik bir $x(t)$ sinyalinin gücü, bir periyodu boyunca karesel değerinin ortalaması olarak tanımlanır.

$$P = \frac{1}{T_o} \int_{-T_o/2}^{T_o/2} |x(t)|^2 dt$$

Parseval Teoremi der ki; temel periyodu T_o olan periyodik bir sinyalin gücü Fourier katsayılarının karesel toplamına eşittir.

$$\frac{1}{T_o} \int_{-T_o/2}^{T_o/2} |x(t)|^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2$$

FOURIER DÖNÜŞÜMÜ ve SÜREKLİ SPEKTRUM

Periyodik olmayan sinyallerin frekans spektrumunu elde etmede kullanılır.

A. Tanım

$x(t)$ sinyali periyodik olmayan bir sinyal olsun. Bu $x(t)$ sinyalinin Fourier dönüşümü F ile sembolize edilir ve aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$X(w) = F[x(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt$$

$X(w)$ 'nın ters Fourier dönüşümü ise F^{-1} ile sembolize edilir ve aşağıdaki biçimde tanımlanır.

$$x(t) = F^{-1}[X(w)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(w)e^{j\omega t} dw$$

Verilen iki ifade genellikle Fourier dönüşüm çifti olarak adlandırılır ve aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$x(t) \leftrightarrow X(w)$$

B. Frekans Spektrumu

Genel olarak Fourier dönüşümü olan $X(w)$, açısal frekans w 'nın karmaşık bir fonksiyonudur, böylece biz bunu aşağıdaki gibi ifade edebiliriz.

$$X(w) = |X(w)|e^{j\theta_w}$$

Burada $|X(w)|$, $x(t)$ 'nin sürekli genlik spektrumu diye adlandırılırken θ_w , $x(t)$ 'nin sürekli faz spektrumu olarak adlandırılır. Sürekli spektrum denmesinin nedeni ise $X(w)$ 'nin genlik ve fazının, sürekli olan frekans w 'nın fonksiyonu olmasıdır.

Eğer $x(t)$ sinyali zamanın gerçekte bir fonksiyonu ise,

$$X(-w) = X^*(w) = |X(w)|e^{-j\theta_w}$$

Veya

$$|X(-w)| = |X(w)| \quad \theta(-w) = -\theta(w)$$

Dolayısıyla Fourier serilerinde olduğu gibi genlik spektrumu $X(w)$, w 'nın çift fonksiyonudur; faz spektrumu $\theta(w)$ ise w 'nın tek fonksiyonudur.

C. Bir Sinyalin Güç İçeriği ve Parseval Teoremi

Bir $x(t)$ sinyalinin normalize edilmiş enerji içeriği E aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt$$

Eğer $x(t)$ sinyali enerji sinyali ise bu sinyalin enerjisinin Fourier dönüşümü ile elde edilmesi Parseval teoremidir.

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(w)|^2 dw$$

FOURIER DÖNÜŞÜMÜNÜN ÖZELLİKLERİ

1. Doğrusallık

$$a_1x_1(t) + a_2x_2(t) \leftrightarrow a_1X_1(w) + a_2X_2(w)$$

2. Zamanda Kaydırma

$$x(t - t_o) \leftrightarrow X(w)e^{-j\omega t_o}$$

3. Frekansta Kaydırma

$$x(t)e^{j\omega_o t} \leftrightarrow X(w - \omega_o)$$

4. Ölçekleme

$$x(at) \leftrightarrow \frac{1}{|a|} X\left(\frac{w}{a}\right)$$

5. Zamanda Geri Dönüş

$$x(-t) \leftrightarrow X(-w)$$

6. İkili

$$X(t) = 2\pi x(-w)$$

7. Konvolüsyon

$$x_1(t) * x_2(t) \leftrightarrow X_1(w).X_2(w)$$

8. Çarpma

$$x_1(t) \cdot x_2(t) \leftrightarrow \frac{1}{2\pi} X_1(w) * X_2(w)$$

Örnek 4.

$$x(t) = \sin(w_o t)$$

Sinyalinin karmaşık Fourier serisini bulunuz ve frekans spektrumunu çizdiriniz.

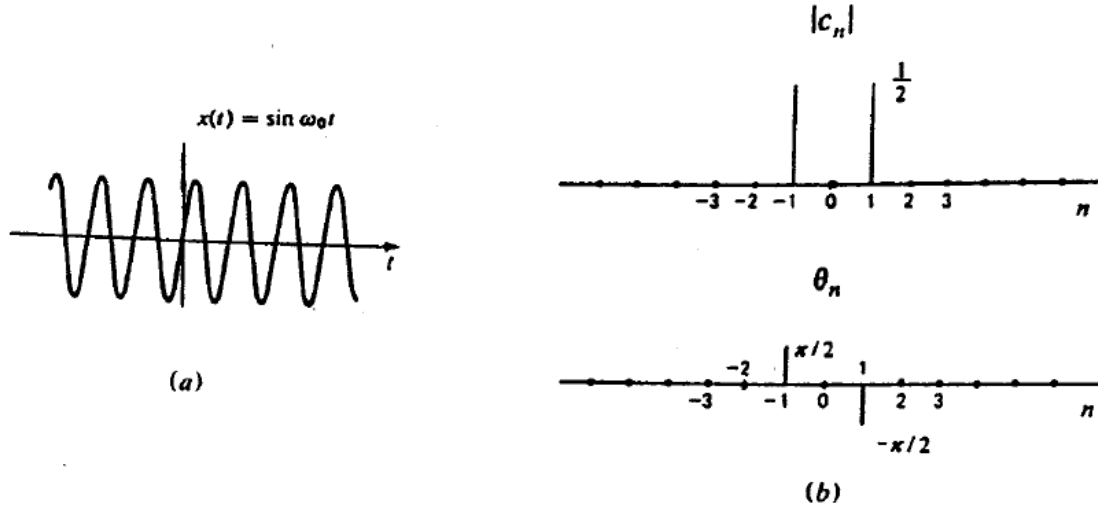
Çözüm 4: Euler açılımını kullanarak bu fonksiyonu karmaşık üstel biçimde yazalım.

$$x(t) = \sin(w_o t) = \frac{1}{2j} (e^{jw_o t} - e^{-jw_o t}) = -\frac{1}{2j} e^{-jw_o t} + \frac{1}{2j} e^{jw_o t}$$

Böylece,

$$c_{-1} = -\frac{1}{2j} = \frac{1}{2} e^{j(\frac{\pi}{2})} \quad c_1 = \frac{1}{2j} = \frac{1}{2} e^{-j(\frac{\pi}{2})} \quad n \neq +1 \text{ veya } -1 \text{ için } c_n = 0$$

Verilen fonksiyonun frekans spektrumu aşağıdaki gibidir.



MATLAB FFT Kodu

```
fs=10000;
ts=1/fs;
t=0:ts:1-ts;
fm=500;
m=5*cos(2*pi*fm*t);
mf=fft(m,fs)/fs;
mfs=fftshift(mf);
mfs_abs=abs(mfs);
frekans = linspace(-fs/2, fs/2-1, fs);
plot(frekans,mfs_abs)
```