

BÖLÜM 6

LAPLACE TRANSFORMASYONU

Laplace Transformasyonuna Klasik Bakış

Laplace yaklaşımı Elektrik Mühendisliği Bölümünün derslerinde genel olarak işaretler ve sistemler ve de bunun gibi işaret işleme ve sistem analizlerini direkt olarak kapsamayan Diferansiyel Denklemler ve Devre Analizi gibi derslerde ele alınmaktadır. Bu kapsamdaki Laplace transformasyonu yalnızca integro-diferansiyel denklemlerin çözümü için kullanılmaktadır. Bu kapsamda Laplace transformasyonunun sistem özelliği, işaret ve veri işleme özelliği dikkate alınmamaktadır. Bu doğrultuda Laplace transformasyonunun geliştiriliş ve kullanım amacına değinilmemekte, ve sağladığı katkılar detaylandırılmamaktadır. Bu doğrultuda herhangi bir diferansiyel denklem veya devre çözümü sırasında ne Laplace transformasyonunun

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$
$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

biçimindeki Fourier transformasyonuna sağladığı dönüşüm özellikleri nede Laplace yaklaşımının özü olan onun temsil edildiği s domeninin $s = \sigma + j\omega$ yapısındaki kompleks frekans düzlem özelliğini göz önüne alınmaz. Bunun yerine yalnızca cebirsel problemin çözümüne yönelik kullanılacak direkt Laplace formüllerinden yararlanılır.

Bu bölüm itibariyle yukarıda belirtilen özelliklerin dışında Laplace yaklaşımının ve transformasyonunun daha ziyade işaret işleme ve sistem teoriye olan katkıları dikkate alınacaktır. Fourier transformasyonunun bazı noktalardaki yetersizliği ve bunu gidermek üzere Laplace transformasyonunun gerekliliği gibi önemli ayrıntılar analiz edilmeye çalışılacaktır. Bu nedenle bu bölümümüze ilk olarak Devre Analizi ve diferansiyel Denklemler çerçevesinde aşına olduğumuz Laplace yaklaşımını kısaca hatırlatarak başlamak istiyoruz. Buna yönelik iki basit örnek göz önüne alınmıştır.

Örnek

Girişi $x(t)$, çıkışı $y(t)$ olan ve

$$\frac{d^3 y}{dt^3} + 12 \frac{d^2 y}{dt^2} + 42 \frac{dy}{dt} + 48 y(t) = 2 \frac{d^2 x}{dt^2} + 7 \frac{dx}{dt} + 3x(t)$$

diferansiyel denklemiyle verilen bir devrenin analizini Laplace yaklaşımıyla ele alarak devrenin transfer fonksiyonunu ve impuls cevabını bulun.

Çözüm

Devre odaklı sistem yaklaşımdan hatırlanacağı gibi sistemin veya devrenin çözümü integro-diferansiyel denklemlere göre yapılacaktır. Buna göre verilen problem bir tür cebirsel yaklaşım olan diferansiyel denklemlerin çözümü gibi düşünülebilir. Bu çözüm yöntemlerinden olan Laplace yaklaşımı böyle bir diferansiyel denklem sisteminin çözümünde kullanılabilir. Bu nedenle verilen problemin sistem veya işaret boyutu göz önüne alınmadan cebirsel bir problemmiş gibi düşünülerek Laplace vasıtasıyla bir çözüm aranacaktır. Bunun için cebirsel çözüme hazırlamak amacıyla verilen diferansiyel denklem Laplace formasyonuna uygun hale getirilmelidir. Bunun için diferansiyel denklemdeki terimler

$$\frac{d^3 y(t)}{dt^3} = s^3 Y(s), \quad \frac{d^2 y(t)}{dt^2} = s^2 Y(s), \quad \frac{dy(t)}{dt} = s Y(s), \quad y(t) = Y(s) \quad \text{ve}$$
$$\frac{d^2 x}{dt^2} = s^2 X(s), \quad \frac{dx}{dt} = s X(s), \quad x(t) = X(s)$$

olarak alınırsa diferansiyel denklem sisteminin kompleks frekans s , yani Laplace domenindeki karşılığı aşağıdaki gibi elde edilebilir.

$$s^3 Y(s) + 12s^2 Y(s) + 42s Y(s) + 48Y(s) = 2s^2 X(s) + 7sX(s) + 3X(s)$$

$$(s^3 + 12s^2 + 42s + 48)Y(s) = (2s^2 + 7s + 3)X(s)$$

Buradan çıkışın, giriş oranından transfer fonksiyonu elde edilir.

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{2s^2 + 7s + 3}{s^3 + 12s^2 + 42s + 48} = H(s)$$

$$H(s) = \frac{(2s+1)(s+3)}{(s+2)(s+4)(s+6)}$$

Elde edilen s veya kompleks frekans domenine (Laplace) bağlı transfer fonksiyonunun zamana bağlı çözümünü (ters Laplace transformasyonu), basit kesirlere ayırma yöntemi ile bulabiliyorduk.

$$H(s) = \frac{2s^2 + 7s + 3}{(s+2)(s+4)(s+6)} = \frac{A}{s+2} + \frac{B}{s+4} + \frac{C}{s+6}$$

$$\begin{aligned} \frac{2s^2 + 7s + 3}{(s+2)(s+4)(s+6)} &= \frac{A(s^2 + 10s + 24)}{(s+2)(s+4)(s+6)} + \frac{B(s^2 + 8s + 12)}{(s+2)(s+4)(s+6)} + \frac{C(s^2 + 6s + 8)}{(s+2)(s+4)(s+6)} \\ &= \frac{s^2(A+B+C) + s(10A+8B+6C) + 24A+12B+8C}{(s+2)(s+4)(s+6)} \end{aligned}$$

$$A + B + C = 2 \rightarrow A = 2 - (B + C)$$

$$10A + 8B + 6C = 7$$

$$24A + 12B + 8C = 3$$

$$10(2 - (B + C)) + 8B + 6C = 7 \rightarrow 2B + 4C = 13$$

$$24(2 - (B + C)) + 12B + 8C = 3 \rightarrow 12B + 16C = 45$$

$$2B + 4C = 13$$

$$12B + 16C = 45$$

$$A = -\frac{3}{8}, \quad B = -\frac{7}{4}, \quad C = \frac{33}{8}$$

Buna göre transfer fonksiyonu aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$H(s) = -\frac{3}{8} \frac{1}{s+2} - \frac{7}{4} \frac{1}{s+4} + \frac{33}{8} \frac{1}{s+6}$$

buradan sistemin/devrenin zamana bağlı impuls cevabını bulmak istiyorsak (bu ters Laplace transformasyonu demektir),

$$L\{e^{-at}u(t)\} = \frac{1}{s+a}$$

bağıntısından

$$H(s) = \left[-\frac{3}{8} \frac{1}{s+2} - \frac{7}{4} \frac{1}{s+4} + \frac{33}{8} \frac{1}{s+6} \right]$$

ifadesinin ters Laplace transformasyonu alındığında aşağıdaki

$$L^{-1}\{H(s)\} = -\frac{3}{8} L^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\} - \frac{7}{4} L^{-1}\left\{\frac{1}{s+4}\right\} + \frac{33}{8} L^{-1}\left\{\frac{1}{s+6}\right\}$$

$$L^{-1}\{H(s)\} = h(t)$$

$$-\frac{3}{8} L^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\} = -\frac{3}{8} e^{-2t}u(t), \quad -\frac{7}{4} L^{-1}\left\{\frac{1}{s+4}\right\} = -\frac{7}{4} e^{-4t}u(t), \quad \frac{33}{8} L^{-1}\left\{\frac{1}{s+6}\right\} = \frac{33}{8} e^{-6t}u(t),$$

yazımların ardından nihai çözümü olarak sistem impuls cevabı

$$h(t) = -\frac{3}{8} e^{-2t}u(t) - \frac{7}{4} e^{-4t}u(t) + \frac{33}{8} e^{-6t}u(t)$$

$$h(t) = -\frac{1}{8} (3e^{-2t} + 14e^{-4t} - 33e^{-6t})u(t)$$

olarak bulunur. Burada izlenen yöntemle bize verilen sistem veya devrenin özellikleri işaret analiz anlamında göz önüne alınmadan, direkt olarak diferansiyel denklem sisteminin çözümünün Laplace yaklaşımıyla ele alındığı bir yöntem/teknik tanıtılmıştır. Oysaki irdelendiğinde verilen örnekte $x(t)$ sistem girişini, $y(t)$ çıkışını başlangıç koşullarının sıfır olduğu düşünülen bir LTIC sistemin transfer fonksiyonunun ve impuls cevabının bulunması üzerine kuruludur. Ancak ele alınan örnekte sistem özelliği dikkate alınmaksızın öylesine direkt bir yöntem izlenmiştir ki, ne Laplace transformasyonunun

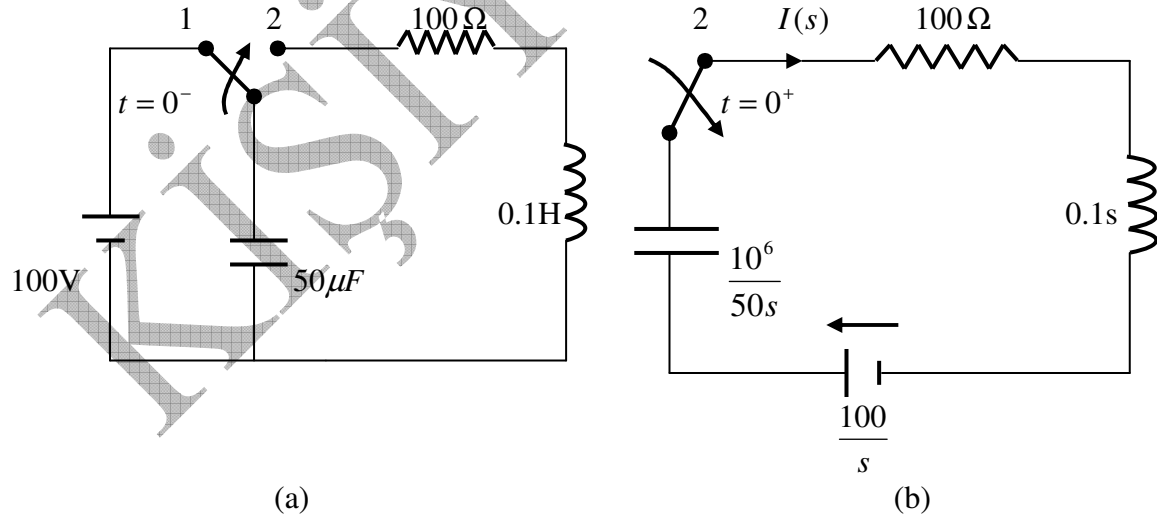
$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

özellikleri nede Laplace yaklaşımının özü olan onun temsil edildiği s domeninin $s = \sigma + j\omega$ gibi kompleks frekans özelliği bile göz önüne alınmamıştır. Bu anlamda alışa gelen klasik integro-diferansiyel denklemlerin Laplace çözümlerinde aslında Laplace yaklaşımının temel özellikleri bilinmeksizin yalnızca cebirsel çözüme sağladığı avantajdan yararlanıldığı sonucu ortaya çıkmaktadır. Bu nedenle Laplace yaklaşımının/transformatasyonunun gerçek özellikleri olan işaret ve sistem tarafı bu bölümün özünü oluşturacaktır.

Örnek

Aşağıda (a) da verilen devrede anahtar kapanmadan önce kondansatör uçlarındaki gerilim (başlangıç gerilimi) $V_0 = 116 = V(0^-)$ V tur. $t = 0^+$ anında anahtarın kapanması ile $t > 0$ için devreden geçen $i(t)$ akımını hesaplayın.



Şekil 2

Çözüm

Şekil (a) dan anahtar açık iken (1) pozisyonu yalnızca kondansatör uçlarında başlangıç gerilimi olarak $V_0 = 116 = V(0^-)$ mevcuttur. Anahtar kapandığında (2) pozisyonundaki devrenin Laplace olarak eşdeğer görünümü (b) deki gibi olacaktır. Kapalı pozisyonundaki devrenin gerilimi

$$V(s) = \frac{100}{s}$$

ve empedansı,

$$Z(s) = 100 + 0.1s + \frac{10^6}{50s} = \frac{5s^2 + 5000s + 10^6}{50s}$$

ise devreden geçen akım,

$$I(s) = \frac{V(s)}{Z(s)} = 100 + 0.1s + \frac{\frac{100}{s}}{\frac{5s^2 + 5000s + 10^6}{50s}} = \frac{1000}{s^2 + 1000s + 20000} = \frac{1000}{(s + 276.5)(s + 723.5)}$$

$$I(s) = \frac{1000}{(s + 276.5)(s + 723.5)} = \frac{A}{s + 276.5} + \frac{B}{s + 723.5} = \frac{As + 723.5A + Bs + 276.5B}{(s + 276.5)(s + 723.5)} = \frac{(A + B)s + 723.5A + 276.5B}{(s + 276.5)(s + 723.5)}$$

$$A + B = 0$$

$$723.5A + 276.5B = 1000$$

$$A = 2.24, B = -2.24$$

$$I(s) = \frac{2.24}{s + 276.5} - \frac{2.24}{s + 723.5}$$

$$L^{-1}\{I(s)\} = 2.24L^{-1}\left\{\frac{1}{s + 276.5}\right\} - 2.24L^{-1}\left\{\frac{1}{s + 723.5}\right\}$$

$$L^{-1}\{I(s)\} = i(t)$$

$$2.24L^{-1}\left\{\frac{1}{s + 276.5}\right\} = 2.24e^{-276.5t}u(t), \quad -2.24L^{-1}\left\{\frac{1}{s + 723.5}\right\} = -2.24e^{-723.5t}u(t)$$

yazımların ardından nihai çözümü olarak devre akımı aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$i(t) = 2.24e^{-276.5t}u(t) - 2.24e^{-723.5t}u(t)$$

$$i(t) = 2.24(e^{-276.5t} - e^{-723.5t})u(t)$$

e^{st} Exponensiyel İşaret s Düzlemi

Fourier transformasyonu başlangıcı $t = -\infty$ olan e^{st} exponensiyel işaret olarak ($s = \sigma + j\omega$) kompleks uzayın $\sigma = 0$ için ($s = j\omega$) bölümünde $e^{j\omega t}$ tipinde bulunan sürekli formdaki exponensiyel sinusoidlerin toplamını veren bir işaret transformasyonuydu. Bu anlamda Laplace transformasyonu $s = \sigma + j\omega$ olarak, kompleks frekans düzlemin tamamını kapsayan, daha genel bir transformasyondur. Aslında Laplace transformasyonunun evveliyatı exponensiyel e^{st} işaretine esas alan “s” kompleks frekans düzlemine dayalıdır. Aşağıdaki adımlar bu yaklaşımı teyit etmektedir.

$$s = \sigma + j\omega$$

$$e^{st} = e^{(\sigma + j\omega)t} = e^{\sigma t} e^{j\omega t} = e^{\sigma t} \cos(\omega t + j \sin \omega t)$$

$$e^{st} = e^{\sigma t} e^{j\omega t} = r e^{j\omega t}$$

$$r = e^{\sigma t}$$

r , e^{st} fonksiyonunun genliğini göstermektedir.

$$s^* = \sigma - j\omega$$

$$e^{s^* t} = e^{(\sigma - j\omega)t} = e^{\sigma t} e^{-j\omega t} = e^{\sigma t} \cos(\omega t - j \sin \omega t)$$

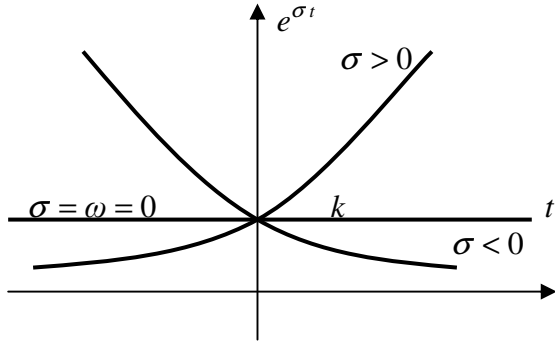
$$e^{\sigma t} \cos \omega t = \frac{1}{2}(e^{st} + e^{s^* t})$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(e^{st} + e^{s^* t}) &= \frac{1}{2}(e^{(\sigma + j\omega)t} + e^{(\sigma - j\omega)t}) = \frac{e^{\sigma t} e^{j\omega t} + e^{\sigma t} e^{-j\omega t}}{2} = e^{\sigma t} \left(\frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2} \right) \\ &= e^{\sigma t} \cos \omega t \end{aligned}$$

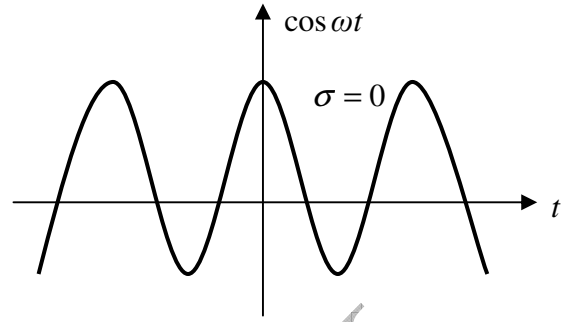
Bu denklemin Euler denklemiyle verilen $e^{j\omega t}$ denklemin daha genel bir hali olduğu görülmektedir. Diğer bir deyişle Euler denklemi $s = \sigma + j\omega$ olarak verilen ifadenin $\sigma = 0$ için oluşan özel bir halidir. Bu yüzden “s” kompleks frekans olarak anılmaktadır. e^{st} fonksiyonunun çok daha geniş bir işaret sınıfını kapsadığı bilinmektedir. Elde edilen $e^{\sigma t} \cos \omega t$ ifadesi dört başlık altında incelenebilmekteydi.

- Eğer e^{st} ile bir “k” sabit bir sayı tanımlanacaksa, $k = k e^{0t}$ ($s = 0$)
- Monoton artan bir exponensiyel fonksiyon $e^{\sigma t}$ ($\omega = 0, s = \sigma$) : salınım yok
- Sinusoid fonksiyon $\cos \omega t$, ($\sigma = 0, s = j\omega$) : imajiner ekseninde ω frekanslı sinusoid
- Exponensiyel değişen sinusoid $e^{\sigma t} \cos \omega t$ ($s = \sigma + j\omega$)

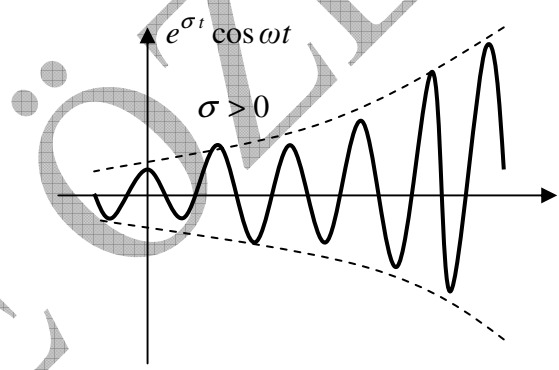
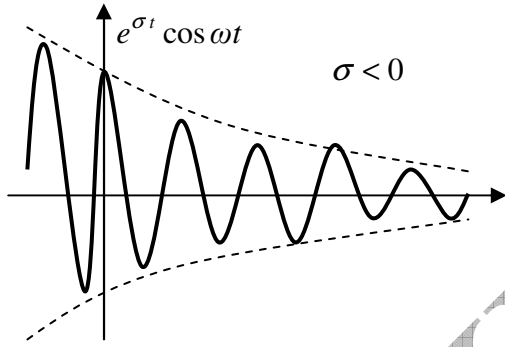
Verilen dört kategori aşağıdaki şekillerde gösterilmiştir.



- (a,b) -



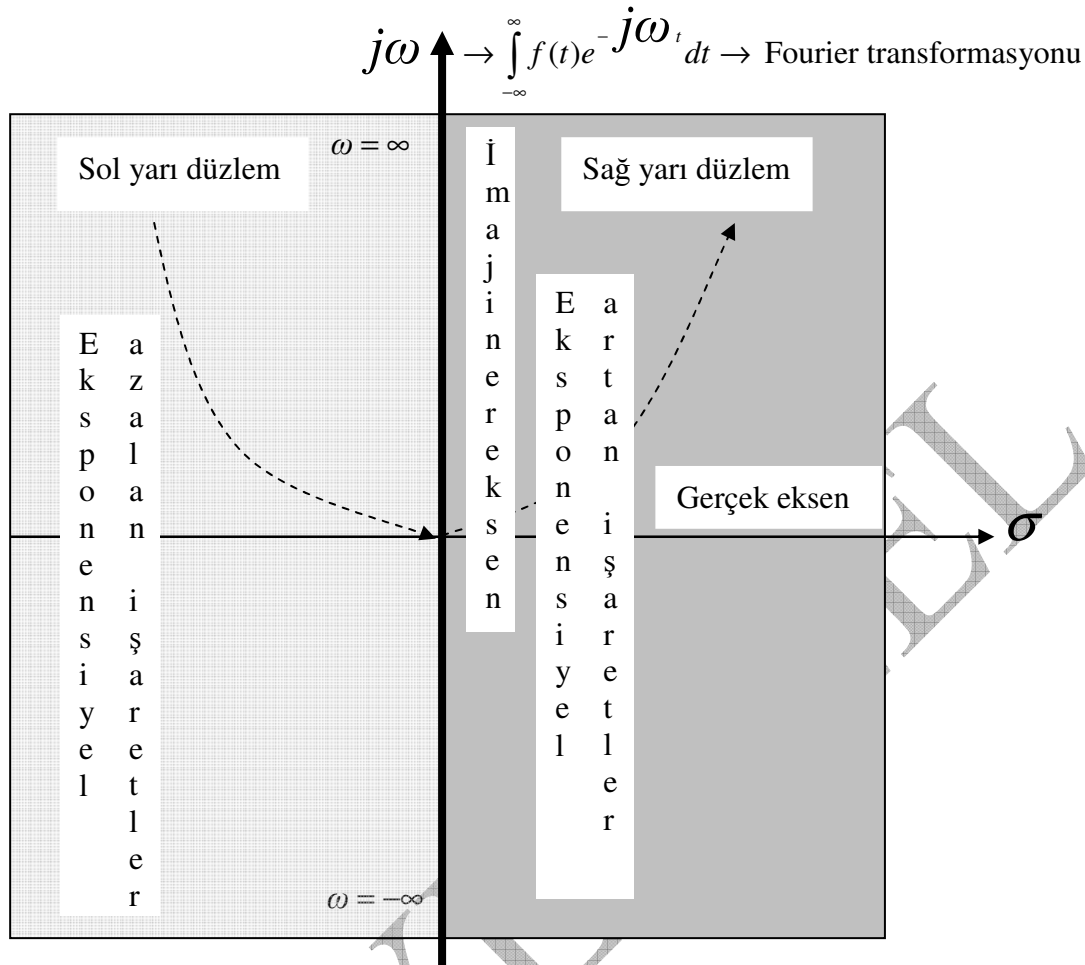
- (c) : Fourier transformasyonu



- (d) : Laplace transformasyonu

Şekil 3 Kompleks frekansın $s = \sigma + j\omega$ sinusoidleri

Şekillerden (c) seçeneğinin ($\sigma = 0, s = j\omega$), haliyle kompleks frekans düzleminin $s = j\omega$ olarak yalnızca yalnızca imajiner yani $j\omega$ ekseninde var olduğu görülmektedir. Böyle bir ekseninde $\omega = (-\infty, \infty)$ için $e^{j\omega t}$ ve $e^{-j\omega t}$ olarak (bunların toplamından oluşan) sonsuz tane farklı frekansta (unique) $\cos \omega t$ ve $\sin \omega t$ gibi sinusoid fonksiyon mevcuttur. Şekil (c) de $\sigma = 0$ için verilen $\cos \omega t$ fonksiyonu, $s = j\omega$ için düşey $j\omega$ eksenine göre ω frekansla değişim göstermektedir. Bu anlamda düşey yani imajiner $j\omega$ ekseninde $\omega = (-\infty, \infty)$ ile belirtilen sonsuz sayıda $\cos \omega t$ gibi sinusoid yazmak mümkündür. Diğer bir deyişle bu yaklaşıma göre farklı frekansta yazılabilecek $x(t)$ gibi sürekli fonksiyonun frekans aralığı $\omega = (-\infty, \infty)$ dır. Oysa ki daha sonar göreceğimiz gibi, $x[k]$ gibi ayrık formda yazılabilecek farklı frekanstaki işaretlerin frekansı sadece $\Omega = (0, 2\pi)$ gibi daha dar bir aralıktan seçilecektir. Verilen şekillerden (a,b,c,d) olarak Kompleks frekansı tanımlayan dört kategorideki işaretlerin aşağıdaki kompleks frekans düzleminde gösterimi daha açıklayıcı olacaktır.



Şekil 4 Kompleks frekans düzlemi ($s = \sigma + j\omega$: Laplace Transformasyonu)

Şekilden de görüldüğü gibi yatay eksen gerçek eksen σ düşey eksen de imajiner eksen $j\omega$ göstermektedir. İmajiner eksen olarak düşey eksen $j\omega$ olduğundan, bu eksenin aynı zamanda Fourier transformasyonuna karşılık geldiği görülmektedir. Buna göre Fourier transformasyonu, $s = \sigma + j\omega$ kompleks frekans düzleminin (diğer bir deyişle Laplace transformasyonunun) yalnızca düşey $j\omega$ imajiner eksenine karşılık gelmektedir. Diğer bir deyişle $s = \sigma + j\omega$ kompleks frekans düzleminin reel kısmının sıfır alınmasıyla ($\sigma = 0$) oluşan yeni $s = j\omega$ düzlemi, Fourier transformasyonu için tanımlı olan, $j\omega$ veya ω biçimindeki frekans düzlemidir.

Laplace Transformasyonu : Tarihçe

Fourier transformasyonu, daha ziyade işaret analiz tekniği olmasına karşın, Laplace transformasyonu daha ziyade sistem analiz tekniği olarak bilinmektedir. Bununla beraber Laplace ile kısmi işaret analizde yapılabilmektedir. Özellikle Fourier transaformasyonunun yetersiz kaldığı işaretlerin yakınsama bölgelerinin tayininde Laplace etkili bir yöntemdir. Fourier transformasyonunun, yalnızca asimtotik olarak kararlı sistemler için uygun olması, onu genel anlamda sistem analiz yöntemi olmasını büyük ölçüde sınırlamaktadır. Öte yandan Laplace transformasyonunun her durumda sistem ararlılık analiz yeteneği, Fourier transformasyonunun aksine onu işaret analizden ziyade sistem analiz konusunda etkin kılmıştır.

Yapılan incelemelerin ışığında periodik olmayan işaretlerin frekans veya zaman uzayındaki davranışlarını inceleyebilmek, Fourier transformasyonunun en önemli katkısıydı. Ancak bununla beraber bazı handikapları da önemliydi. Çünkü Fourier transformasyonu bir çok önemli katkısının yanı sıra, frekans uzayının yalnızca imajiner bölümüyle ilgili olmasının getirdiği sınırlama veya e^{at} tipli ($a > 0$) reel değerlikli exponensiyellerin sürekli artan formu için bir karşılığının olmaması ve nihayet, stabil olmayan sistemler içinde kullanılamayacak durumda olması, Fourier transformasyonunun önemli eksiklikleri olarak görünmektedir. Bu yüzden bunları giderici özellikteki Fransız matematikçi Pierre-Simon De Laplace tarafından 1779 da geliştirilen ve kendi adıyla anılan Laplace transformasyonu daha yakından inceleme zorunluluğu vardır. Bu incelemelerde Fourier transformasyonunun, Laplace transformasyonunun özel bir hali olup, bu vesileyle **Laplace transformasyonunun sürekli-zaman işaret ve sistemlerinin genel temsilcisi** pozisyonunda olduğu teyit edilecektir. Bilindiği gibi sürekli-zaman ve lineer zamandan bağımsız sürekli (LTIC) sistemleri başta olmak üzere Laplace transformasyonlarının integro-diferansiyel denklem sistemlerinin cebirsel denklemlere dönüştürülmesi üzerine önemli uygulama alanı olmasına karşın, bu bölümde daha ziyade Laplace transformasyonunun işaret analiz açısından özellikleri ele alınacaktır.

Laplace teorisinin ayrıntılarına girmeden Fourier transformasyonunun yetersizliğinden kaynaklanan e^{at} tipli exponensiyel sinusoidlerin $s = \sigma + j\omega$ kompleks düzlemini kullanarak çözümlerine ilişkin örnekler aşağıda ele alınmıştır.

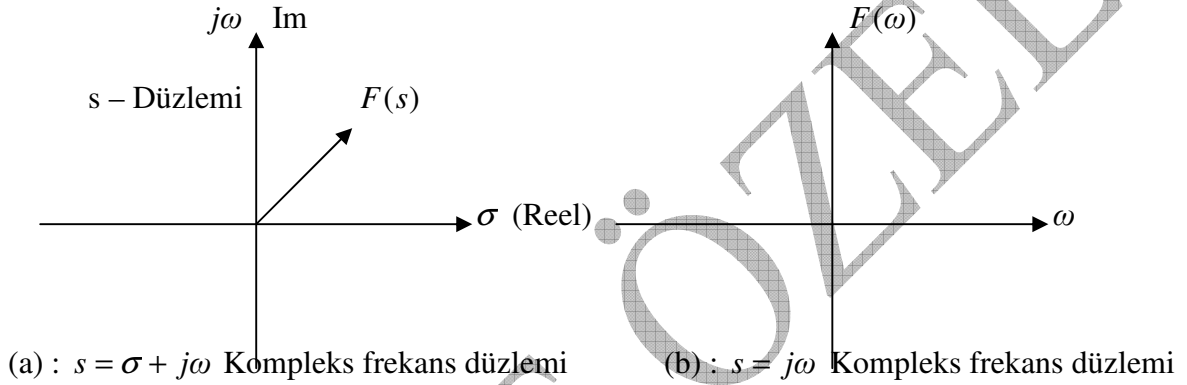
Sürekli-Zaman Sistemlerinin Laplace Transformasyonu ile Analizi

Laplace transformasyonu mühendislikte daha çok LTIC sistemlerin davranışlarını incelemek üzere geliştirilen genel bir metod olduğunu biliyoruz. Bu açıdan transformasyondaki işaret analiz ağırlığının, sistem davranışına göre biraz daha geri planda olduğunu düşünebiliriz. Bu anlamda Laplace işaretten ziyade bir sistem davranışını analiz etmek üzere kullanılan bir tekniktir. Ancak sistem analiz veya sistem terorisinin işaretten istenide izole edilemeyeceği gerçeğini de göz önünde bulundurarak, biz burada daha çok işaret özelliğine eğilmeye çalışacağız. Bu açıdan, çıkış noktasını tam bir işaret analiz yöntemi olarak benimsenen Fourier teoriden esinlenerek işe başlayabiliriz. Fourier transformasyonu ile olan ilişkisini irdelediğimiz taktirde, dolaylı olarak Laplace transformasyonunun aynı zamanda işaret işleme veya analiz özelliğini göz önüne almış oluruz. Bu yüzden Laplace transformasyonu, ele almadan önce, ona taban oluşturacak Fourier transformasyonu ele alarak başlayalım.

Kompleks frekansı $s = \sigma + j\omega$ biçiminde düşünürsek, Fourier transformasyonunun yalnızca kompleks frekansın $s = j\omega$ imajiner kısmı ($\sigma = 0$) için geçerli olan bir sürekli-zaman sistemi analizörü olduğunu görürüz. Bir diğer önemli farklılık da, buna göre Laplace transformasyonu bir **düzlem**i (iki boyutlu) göstermesine karşın, Fourier transformasyonunun böyle bir iddiası olmamakla beraber, ilgili düzlemin özel hali olabilecek yalnızca bir alt düzlem konumu düşünülebilir. Bunu aşağıdaki Fourier transformasyon çiftleri üzerinde bir kez daha teyit etmek mümkündür.

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

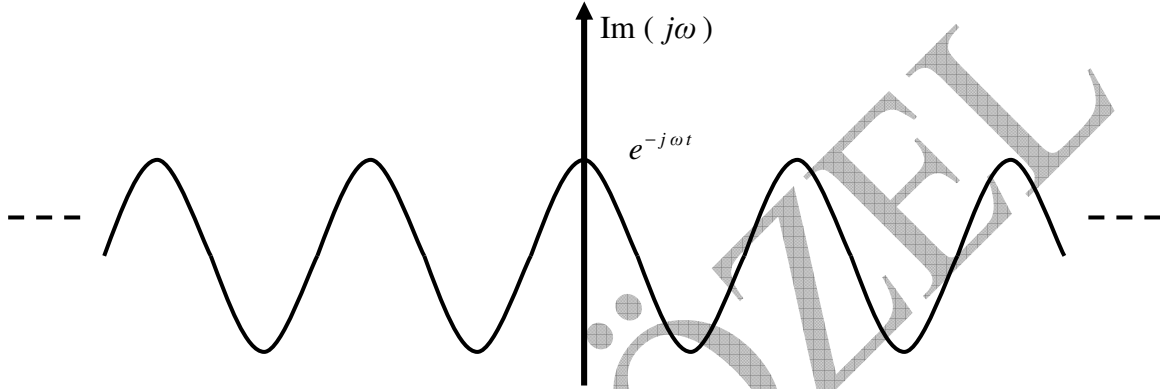


Şekil 5 (a) : Laplace transformasyonu : $s = \sigma + j\omega$, (b) : Fourier transformasyonu ($\sigma = 0$)

Şekle göre Fourier transformasyonu, Laplace transformasyonunun temeli olan “s”-kompleks düzlemin yalnızca imajiner eksenine kurulu özel bir hali gibi görünmektedir. Bu durumun denklemleriyle de teyit edildiği Fourier transformasyonu e^{jst} genel gösteriminin $\sigma = 0$ için yalnızca imajiner kısım olan $s = j\omega$ için $e^{j\omega t}$ olarak geçerlidir. Eğer $f(t) = e^{at}u(t)$ fonksiyonu ($a > 0$) için Fourier transformasyonunu düşünürsek, böyle bir fonksiyonun monoton artan özellikte olması sebebiyle Fourier transformasyonunun söz konusu olmadığını gözlemlemekteyiz. Çünkü $e^{j\omega t}$ özellikli sinusoidlerin böylesine real kısımlar üzerine kurulu, üstelik artan yöndeki fonksiyonların analizlerini yapabilme kabiliyetleri yoktur. Bu sorunun çözümü, kompleks frekansın yalnızca imajiner kısmını değil ($s = j\omega$), real kısmını da birlikte ($s = \sigma + j\omega$) dikkate alacak yöntemlerle mümkün olur. Diğer bir deyişle kompleks frekansın $s = j\omega$ özel halinin $s = \sigma + j\omega$ genel haline dönüştürülmesi gerekiyor. Bu genel hale göre işaretleri analiz edecek sürekli zaman sistemi Laplace Transformasyonu olarak bilinmektedir. Laplace transformasyonu ile artık $e^{at}u(t)$ ($a > 0$) tipindeki artan eksponensiyellerin analizleri mümkün olmaktadır.

Laplace Transformasyonu Ön bilgi

Bazı Fourier transformasyonu alınamayan işaretlerin Laplace yaklaşımıyla çözümlerine geçmeden önce $F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$ Fourier transformasyonunun $s = \sigma + j\omega$ kompleks frekans düzleminin $\sigma = 0$ için $s = j\omega$ olarak yalnızca imajiner eksenini olduğunu biliyoruz. Bu imajiner ekseninde ω frekanslı sinusoidler mevcuttur. Buna örnek olarak aşağıdaki şekil göz önüne alınabilir.

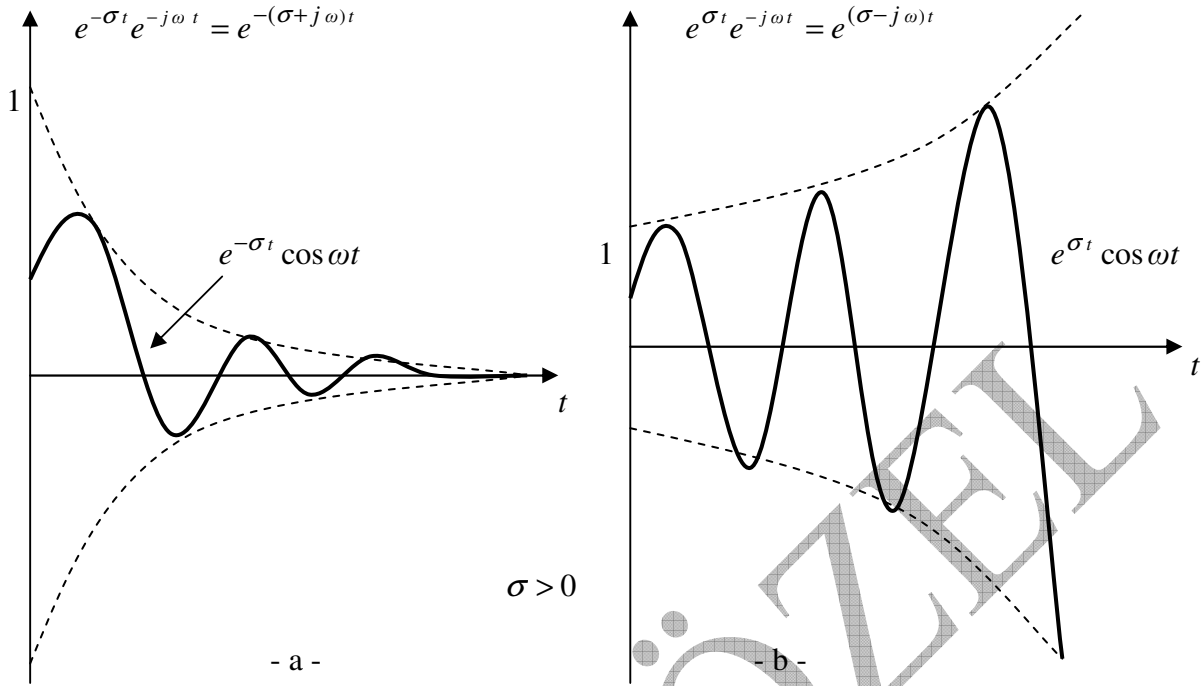


Şekil 6 Fourier Transformasyonu : $\text{Re}\{e^{-j\omega t}\} = \cos \omega t$ İşaretinin $j\omega$ ekseninde değişimi

Görüldüğü gibi Fourier transformasyonu $s = j\omega$ formunda $\text{Re}\{e^{-j\omega t}\} = \cos \omega t$ biçiminde ω frekanslı sinusoidlerden (bunların lineer toplamlarından) oluşmaktadır. Eğer böyle değişimi olan sinusoidleri içeren herhangi bir $f(t)$ işaretinin Fourier transformasyonu alınacaksa, kullanılacak $f(t)$ işareti, şekilde görülen $\text{Re}\{e^{-j\omega t}\} = \cos \omega t$ sinusoidlerinden sahip olduklarının ya genliğini ya da fazını değiştirecektir. Şimdilik genliğini değiştireceği düşüncesiyle ilk olarak $f(t) = e^{-\sigma t} u(t)$, $\sigma > 0$ işaretini göz önüne alalım. Bu işaretin Fourier transformasyonunu göz önüne aldığımızda.

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\sigma t} e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\sigma + j\omega)t} dt$$

Fourier transformasyonu olarak $e^{-\sigma t} e^{-j\omega t} = e^{-(\sigma + j\omega)t}$ tipli bir fonksiyonun integralinin söz konusu olduğunu görmekteyiz. Bunun anlamı daha önce yukarıda $e^{-j\omega t}$ tipinde Fourier transformasyonunu oluşturan sinusoidlerin bu kez $e^{-\sigma t}$ genliğiyle de aynı zamanda çarpım halinde olduklarını görmekteyiz. Diğer bir deyişle $\text{Re}\{e^{-(\sigma + j\omega)t}\} = e^{-\sigma t} \cos \omega t$ söz konusudur. ω frekanslı sinusoidlerin genlikleri $e^{-\sigma t}$ ile çarpım halindedir. Buna göre artık yukarıda ele alınan $\text{Re}\{e^{-j\omega t}\} = \cos \omega t$ sinusoidin genlikleri $e^{-\sigma t}$ kadar daha değişecektir. $e^{-\sigma t}$ ifadesi $\sigma > 0$ için giderek monoton azalan eğilimde olduğundan sönümlü bir değişim göstereceğinden, bununla çarpım halinde olan $\text{Re}\{e^{-j\omega t}\} = \cos \omega t$ sinusoidinin genliğide bu istikamette, yani monoton azalan ve sönümlü özellikte olacaktır. Bu değişimi aşağıda şekil (a) dan görebilmekteyiz. Dolayısıyla böyle bir değişim halinde olan $f(t) = e^{-\sigma t} u(t)$, $\sigma > 0$ işaretinin Fourier transformasyonunun alınabileceğini veya integralde görülen $e^{-\sigma t} e^{-j\omega t} = e^{-(\sigma + j\omega)t}$ ifadesinin integralinin alınarak sonlu bir değer elde edilebileceğini düşünebiliriz.



Şekil 7 $\sigma > 0$ için $\text{Re}\{e^{-(\sigma+j\omega)t}\} = e^{-\sigma t} \cos \omega t$ ve $\text{Re}\{e^{(\sigma-j\omega)t}\} = e^{\sigma t} \cos \omega t$
İşaretlerinin değişimleri

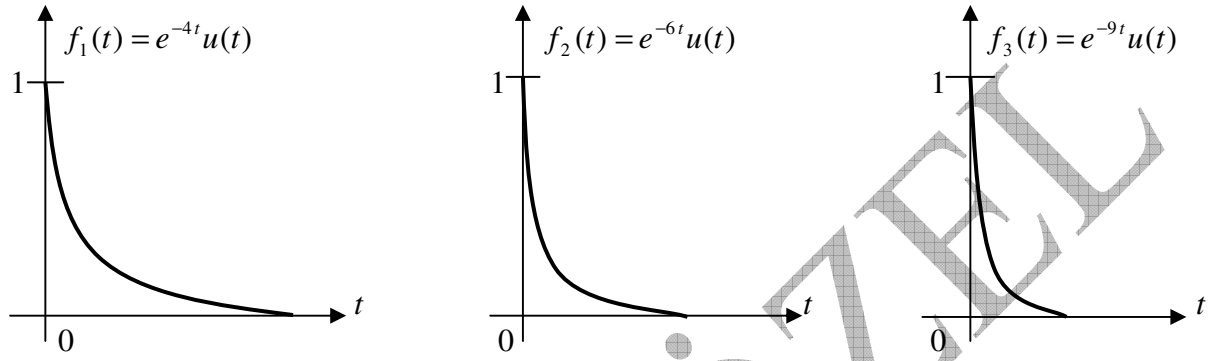
Öte yandan bu kez $f(t) = e^{\sigma t} u(t)$, $\sigma > 0$ işaretini göz önüne alarak, Fourier transformasyonunu değerlendirmeye çalışalım. Bu işaretin Fourier transformasyonunu göz önüne aldığımızda.

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\sigma t} e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{(\sigma-j\omega)t} dt$$

Fourier transformasyonu olarak $e^{\sigma t} e^{-j\omega t} = e^{(\sigma-j\omega)t}$ tipli bir fonksiyonun integralinin söz konusu olduğunu görmekteyiz. Bunun anlamı daha önce yukarıda $e^{-j\omega t}$ tipinde Fourier transformasyonunu oluşturan sinusoidlerin bu kez $e^{\sigma t}$ genliğiyle de aynı zamanda çarpım halinde olduğudur. Diğer bir deyişle $\text{Re}\{e^{(\sigma-j\omega)t}\} = e^{\sigma t} \cos \omega t$ söz konusudur. ω frekanslı sinusoidlerin genlikleri $e^{\sigma t}$ ile çarpım halindedir. Buna göre artık yukarıda ele alınan $\text{Re}\{e^{-j\omega t}\} = \cos \omega t$ sinusoidin genlikleri $e^{\sigma t}$ kadar daha değişecektir. $e^{\sigma t}$ ifadesi $\sigma > 0$ için giderek monoton artan eğilimde olduğundan sönümlü bir değişim göstermeyeceğinden, bununla çarpım halinde olan $\text{Re}\{e^{-j\omega t}\} = \cos \omega t$ sinusoidinin genliğide bu istikamette, yani monoton artan ve sönümsüz özellikte olacaktır. Bu değişimi de yukarıdaki şekil (b) den görebilmekteyiz. Dolayısıyla böyle bir değişim halinde olan $f(t) = e^{\sigma t} u(t)$, $\sigma > 0$ işaretinin Fourier transformasyonunun alınamayacağını veya integralde görülen $e^{\sigma t} e^{-j\omega t} = e^{(\sigma-j\omega)t}$ ifadesinin integralinin sonlu bir değer üretmeyeceğini düşünebiliriz.

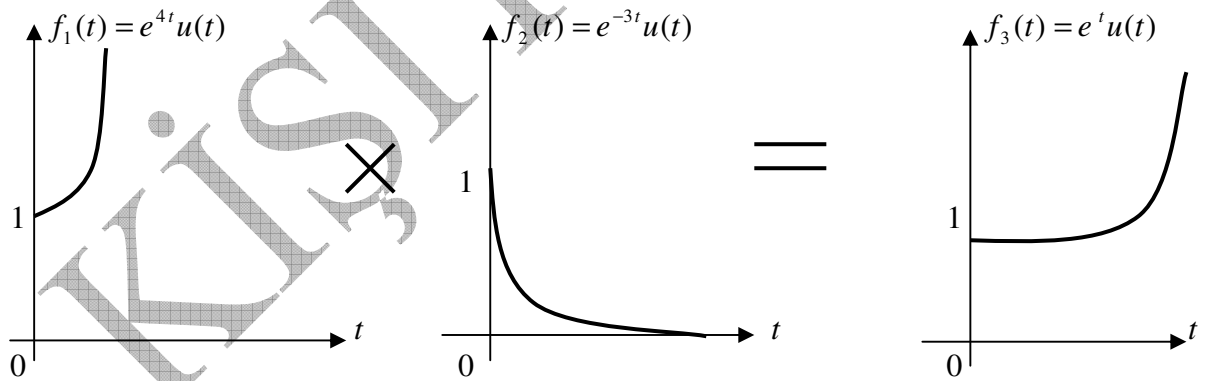
Bu önemli hatırlatmaların ardından daha önce işlenen $F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$ biçimindeki

Fourier transformasyonunu tehdit eden işaretlerden birinin $f(t) = e^{at}u(t)$, $a > 0$ tipindeki exponensiyeller olduğunu biliyoruz. Bu yüzden bu tür exponensiyellere biraz daha pratik açıdan bakmak yararlı olacaktır. Aşağıda sönümlenme hızları (sistem cevapları) farklı bazı exponensiyeller verilmiştir.



Şekil 8 Farklı sönümlenme hızlarındaki exponensiyeller

Bunlara göre en hızlı sönümlemeye (en hızlı sistem cevabına) $f_3(t) = e^{-9t}u(t)$ işaretiyle ulaşılmıştır. Aşağıda ise farklı sönümlenme hızlarındaki exponensiyellerin çarpımları ele alınmıştır.

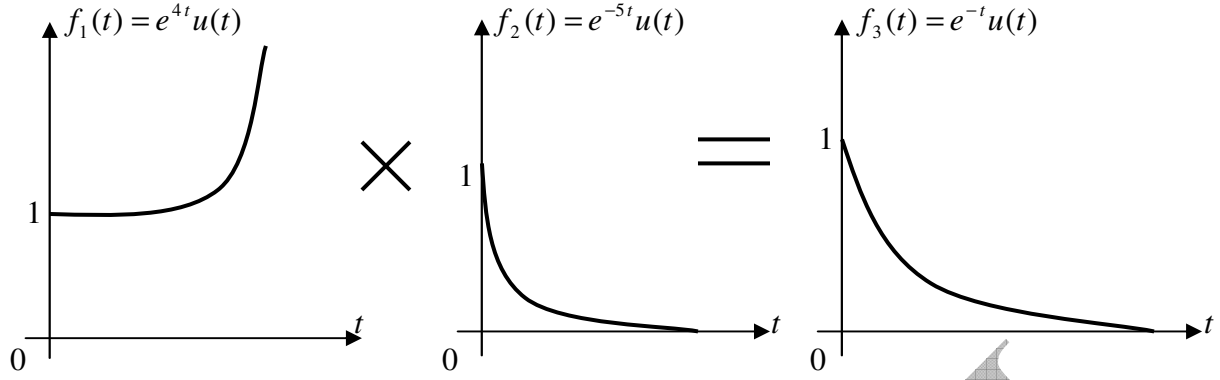


Şekil 9 Farklı sönümlenme hızlarındaki exponensiyellerin çarpımı

Görüldüğü gibi pozitif (sönümsüz) ve negatif (sönümlü) iki exponensiyelin çarpımından

$$f_3(t) = f_1(t) \times f_2(t) = e^{4t} \times e^{-3t} = e^{(4-3)t} = e^t u(t)$$

elde edilmiştir. Buna göre elde edilen $f_3(t) = e^t u(t)$ de sönümsüzdür. Diğer yandan benzer biçimde aşağıdaki exponensiyellerin çarpımını göz önüne alalım.



Şekil 10 Farklı sönümlenme hızlarındaki exponensiyellerin çarpımı

Bu kez pozitif (sönümsüz) ve negatif daha hızlı (sönümlü) iki exponensiyelin çarpımından

$$f_3(t) = f_1(t) \times f_2(t) = e^{4t} \times e^{-5t} = e^{(4-5)t} = e^{-t} u(t)$$

elde edilmiştir. Buna göre elde edilen $f_3(t) = e^{-t} u(t)$ bu kez sönümlüdür. Bu nedenle sönümsüz bir işareti sönümlü kılmak adına onu daha hızlı sönümlü bir işaret ile çarpmanın yeterli olduğunu görmekteyiz. Bu yaklaşımdan, Laplace transformasyonunun elde edilmesinde yararlanılmaktadır. Buna göre aşağıda (a) da verilen $f(t) = e^{at} u(t)$, $a > 0$ işaretini göz önüne alalım. Görüldüğü gibi sönümsüz bir işarettir. Bu haldeyken Fourier transformasyonunun alınamayacağını biliyoruz ;

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{at} e^{-j\omega t} u(t) dt = \int_0^{\infty} e^{(a-j\omega)t} dt = \frac{1}{a-j\omega} = \frac{1}{s-a} = \text{tanımsız}$$

Çünkü $f(t)$ işareti $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty$ olarak tanımlanan Fourier transformasyonunun varlığını ortadan kaldıran bir işarettir. Bu işareti tanımlı hale getirebilmek, daha doğrusu Fourier transformasyonunun alınmasını mümkün kılma adına sönümsüz e^{at} exponensiyelini ondan çok daha hızlı sönümlü $e^{-\sigma t}$ formunda bir başka exponensiyel ile çarpmamızın gerektiği yukarıda belirtilmişti ($y(t) = e^{at} \times e^{-\sigma t} = e^{(a-\sigma)t}$).

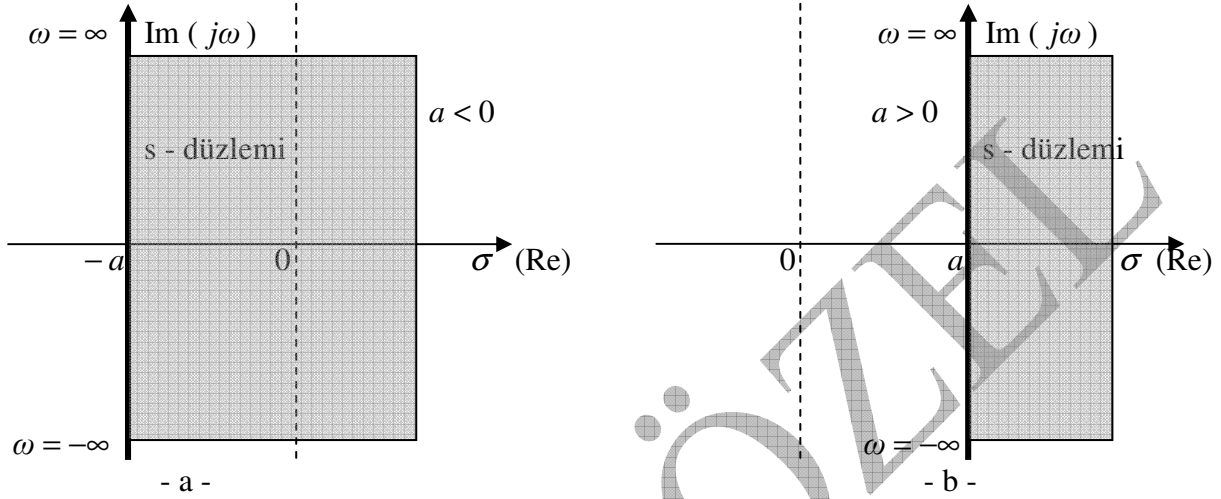
$$y(t) = f(t) e^{-\sigma t} = e^{at} \times e^{-\sigma t} = e^{(a-\sigma)t}$$

Elde edilen sonucun Fourier transformasyonunun alınabilmesi ve de sonucun sönümlü olabilmesi için $a - \sigma < 0$ gerektiğini görebiliyoruz. Buradan $\sigma > a$ olması gerektiği ortaya çıkar. Örneğin $f(t) = e^{4t} u(t)$ ise ($a = 4$) bu işareti minimum e^{-5t} ile çarpmamız gerektiği açıktır ($\sigma = 5$). Çünkü $\sigma > a$ koşulu ($5 > 4$) ancak bu yaklaşımla sağlanabilmektedir. Bu haldeyken çarpmanın $y(t) = e^{4t} \times e^{-5t} = e^{(4-5)t} = e^{-t}$ sonucunun sönümlü ve de Fourier transformasyonu alınabilir bir işaret olarak elde edilmektedir. Madem sorunlu $f(t) = e^{at} u(t)$, $a > 0$ işareti $e^{-\sigma t}$ ile çapılarak Fourier transformasyonu alınabilir vaziyete getirildiyse oluşan toplam işaretin Fourier transformasyonunu inceleyebiliriz.

$$f(t)e^{-\sigma t} = e^{at}u(t)e^{-\sigma t}$$

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-\sigma t} e^{-j\omega t} u(t) dt = \int_0^{\infty} e^{at} e^{-\sigma t} e^{-j\omega t} dt = \int_0^{\infty} e^{-(\sigma-a+j\omega)t} dt$$

$$= \frac{1}{\sigma-a+j\omega} ; \quad \sigma > a$$



Şekil 11 Laplace Düzlemi : $s - a = \sigma + j\omega - a = (\sigma - a) + j\omega$

Görüldüğü gibi $f(t)e^{-\sigma t}$ çarpımının Fourier transformasyonunun mevcut olabilmesi, $\sigma > a$ koşuluna bağlıdır. Böyle bir çarpma işleminin etkisini her iki şekilden gri renkli bölgeler itibariyle görmekteyiz. **Gri bölgeler Fourier transformasyonunun tanımlı olduğu bölgeleri (Region Of Convergence, ROC) belirtmektedir.** Bunun altını özellikle çizmemizin sebebi, Fourier transformasyonu ile ilgili olarak tanımlı bölgelerden söz edebilmemizdir. Hatırlayacağımız gibi daha önce Fourier transformasyonundan söz ederken, yakınsama bölgesinden (ROC) ziyade yakınsama noktası (Point Of Convergence, POC) kavramlarından söz etmiştik. Yani Fourier transformasyonunun $s = \sigma + j\omega$ olarak tanımlanan genel frekans düzleminin özel bir noktasını gösterdiğinden, dolayısıyla onun özel bir hali olarak düşünülebileceğini belirtmiştik. Oysa şimdi aynı Fourier transformasyonu için artık düzlem olarak yakınsama bölgesinden (ROC) bahsedebiliyoruz. Bunu sağlayan $e^{-\sigma t}$ ifadesidir. Sorunlu kabul edilen, yani Fourier transformasyonunun alınamaz olduğuna inandığımız $f(t) = e^{at}u(t)$, $a > 0$ işaretinin $e^{-\sigma t}$ ile çarpımı, Fourier transformasyonu için de yakınsama bölgesi (ROC) kavramının kullanılmasının önünü açmıştır. Bu sayede artık Fourier transformasyonunun $s = \sigma + j\omega$ düzleminde bir nokta da değil belirli bir alanda tanımlanabileceğini görmekteyiz (gri alanlar). Fourier transformasyonu daha önce belirli noktalarını kullandığı σ reel eksenin şimdi tamamını kullanabilir durumdadır. Aslında bu haliyle Fourier transformasyonu farklı bir boyuta taşınmıştır. Bu yeni taşındığı boyut her ne kadar Fourier transformasyonunun izlerini taşısa da genel anlamıyla farklı bir fikri, yaklaşımı ve bakış açısını ortaya koymaktadır. Bu yeni konsept ve boyut Laplace Transformasyonu olarak anılmaktadır. **Laplace yaklaşımı sayesinde $f(t) = e^{at}u(t)$ gibi işaretlerde a nın her değeri için ($\pm a$) tanımlı bir yakınsama bölgesinin (ROC) olması, Laplace yönteminin en önemli sonucudur. Burda önemli bir sonuç şudur ; a değişkeni pozitif veya negatif, her ne olursa olsun bu yaklaşım daima bir sonuç üretmektedir. Bu çok önemli bir tespittir.** Bu fikirlerin ışığı altında Laplace transformasyonunun geliştirilmesi aşağıda basit anlamda özetlenmiştir.

Laplace Yaklaşımı

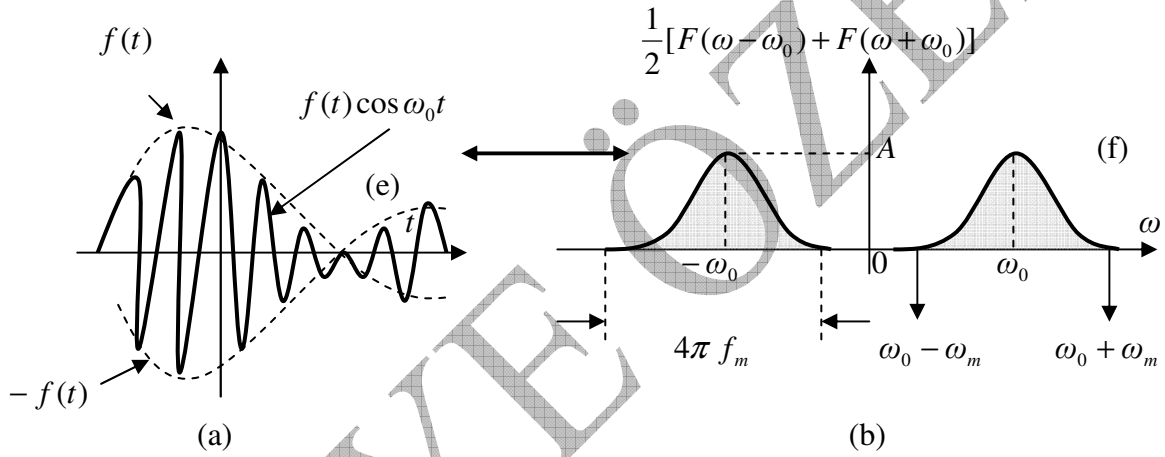
Aşağıda şekil (a) da $f(t) = e^{at}u(t)$, $a > 0$ tipli Fourier transformasyonu mümkün olmayan monoton artan işaret görülmektedir. Bu işaretin bu haliyle direkt Fourier transformasyonunun alınamayacağı kesindir. Ancak bir biçimde sınırlı da olsa bu işaretin tanımlı olduğu veya Fourier transformasyonunun alınabileceği noktalar veya bölgeler var mıdır, bunun cevabı araştırılabilir. Acaba böyle bir işaretin uzayda Fourier transformasyonunun alınabileceği bir bölge var mıdır, varsa da bu bölgeyi nasıl bulabiliriz. Bu bölümde bu sorunun cevabı araştırılacaktır. Bunun için bir işaretin Fourier transformasyonunun alınabilmesinin önemini bir kez daha hatırlamamız gerekiyor. Niçin bir işaretin Fourier transformasyonunun alınabilmesi önemlidir, ve alınamıyorsa bu ne anlama gelir. Bunları kısaca tekrar hatırlayalım.

Bu işareti Fourier transformasyonu alınabilir forma sokmak için, ondan çok daha hızlı $e^{-\sigma t}$ gibi bir işaretle çarpmanın gerekliliği yukarıda açıklanmıştı. Bu yaklaşım Şekil (b) de verilmiştir. Bu çarpımla oluşan ifadenin Fourier transformasyonu test edildiğinde

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-\sigma t} e^{-j\omega t} u(t) dt = \int_0^{\infty} e^{at} e^{-\sigma t} e^{-j\omega t} e^{(a-j\omega)t} dt = \int_0^{\infty} e^{-(\sigma-a+j\omega)t} dt$$
$$= \frac{1}{\sigma - a + j\omega} ; \quad \sigma > a$$

$f(t)e^{-\sigma t}$ çarpımının Fourier transformasyonunun mevcut olabilmesi, $\sigma > a$ koşuluna bağlı olduğu ortaya çıkmıştı. Böyle bir çarpma işleminin etkisi, şekil (b) ile şematize edilmiştir. Şekilden $\sigma > a$ koşulu sağlandığı sürece $f(t)e^{-\sigma t}$ sonucunun sönümlü olduğu ortaya çıkmaktadır. Hatırlanacağı gibi bu da, $f(t) = e^{at}u(t)$, $a > 0$ olsa dahi Fourier transformasyonunun alınabileceği anlamına gelmekteydi. Şekil (c) de Fourier transformasyonu alınabilir duruma getirilen $f(t)e^{-\sigma t}$ ifadesinin Fourier transformasyonu ifadesindeki $j\omega$ eksenindeki sinusoid davranışı görülmektedir. Fourier serisindeki harmoniklerin frekansların aksine genlik olarak giderek azalan yapıda olmasını hatırlarsak, bu yöntem üzerine kurulu Fourier transformasyonunu da anlamak kolay olacaktır. Burada içerdiği $f(t) = e^{at}u(t)$, $a > 0$ tipindeki işaretler genlik olarak Fourier transformasyonunda $j\omega$ eksenindeki sinusoidlerin genliğini monoton olarak sonsuza kadar artıracaktır. Bu yaklaşım yani harmonik genliklerinin artan trend de olması Fourier serisine aykırı bu durumdur. Bunu tersine yani doğal formuna çevirmek için $f(t)$ işaretinin $e^{-\sigma t}$ gibi bir başka işaretle çarpılması gerekmektedir. $f(t)$ nin $e^{-\sigma t}$ ile çarpılması durumunda $f(t)$ deki sinusoidler daha düşük genliklere dönüşen sinusoidlerin toplamından oluşacaktır. Bu yolla $f(t)e^{-\sigma t}$ nin Fourier transformasyonunda sinusoidler yüksek genlikli sinusoidlerden sönümlü biçimdeki düşük genlikli sinusoidlere doğru olacaktır. Şekil (c) de bu durum anlatılmak istenmektedir. Bu gösterimde çeşitli sinusoid harmoniklerin $j\omega$ eksenindeki salınımlarını görmekteyiz. Doğal olarak bu sinusoidlerin genliğinin de $f(t)e^{-\sigma t}$ sönümlü ifadesinden dolayı giderek küçülen genliklerde olacaktır.

Burada $f(t)$ işaretinin $e^{-\sigma t}$ gibi bir başka işaretle çarpılması durumu üzerinde biraz durmamız gerekiyor. Bilindiği gibi $f(t)$ Fourier transformasyonu alınamaz yapıda bir işaret iken, $e^{-\sigma t}$ ile çarpılması durumunda transformasyonun alınabilir olduğunu görmekteyiz. Yapılan işin aslında bir tür **modülasyon** (hatta genlik modülasyonu) olduğunu görmekteyiz. $f(t)$ işareti kendisinden daha hızlı sönümlü (yüksek frekanslı) taşıyıcı özellikli bir $e^{-\sigma t}$ işaretiyle modüle edilmektedir. Diğer bir deyişle $f(t)$ işareti, $e^{-\sigma t}$ ile kodlanmaktadır (modüle edilmektedir). Bu anlamda aslında $f(t)$ yok olmamakta veya ortadan kaldırılmamaktadır. Bir başka biçime dönüştürülmüştür. İşte bu modülasyonun tanımıyla tam olarak örtüşmektedir. Yapılan iş, genlik anlamda sorunlu olan bir işaret, $e^{-\sigma t}$ ile kodlanmıştır. Sonuçta aşağıdaki şekil (a,b) den gerek zaman gerekse frekans domeninden de görülebileceği gibi, modülasyonlu dalga olarak ortaya çıkan $f(t)e^{-\sigma t}$ işareti, özünde hala $f(t)$ işaretini temsil etmektedir.



Şekil 12. $f(t)$ işaretinin modülasyon $f(t)\cos \omega_0 t$ spektrumu

Dolayısıyla buradan bir başka biçime sokulan $f(t)$ işaretinin tekrar elde edilebileceği gerçeği ortaya çıkmaktadır. Yapılan modülasyonun, aslında sonsuz nokta/data içeren bir işareti ($f(t)$), sonlu sayıda içerecek biçime sokmuş olması ($f(t)e^{-\sigma t}$) bu yaklaşımın en önemli katkısıdır. Bir tür konformal dönüşüm olarak düşünülebilecek bu yaklaşımda veri kaybının olmamasının sebebi modülasyonun $s = \sigma + j\omega$ kompleks frekans düzleminin tamamında cerayan etmesidir.

Şekil (d) de aynı zamanda Fourier transformasyonu alınabilir duruma getirilen $f(t)e^{-\sigma t}$ ifadesinin kompleks frekans düzleminin $\sigma = 0$ için $s = j\omega$ bölümündeki/eksenindeki konumunu görmekteyiz (nokta yakınsaması ; Point Of Convergence, POC). Şekil (b) deki $f(t)e^{-\sigma t}$ çarpımından tekrar $f(t)$ yi elde etmek için bu ifadeyi $e^{\sigma t}$ ile çarpmamız gerekir ;

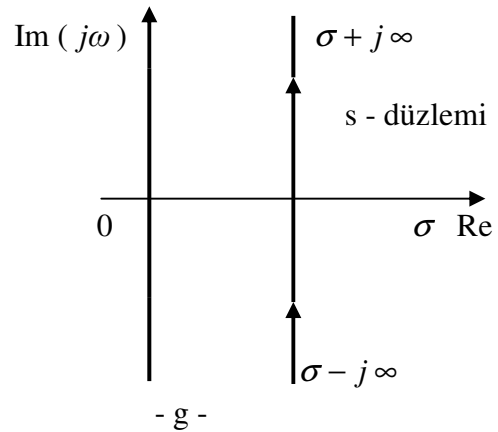
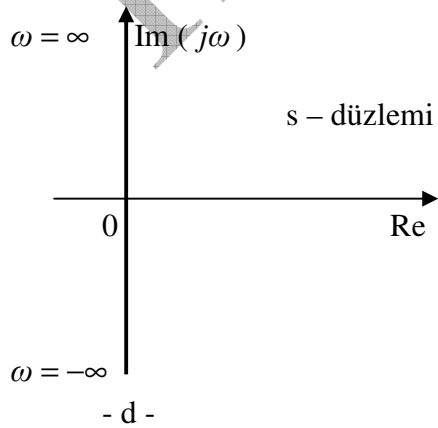
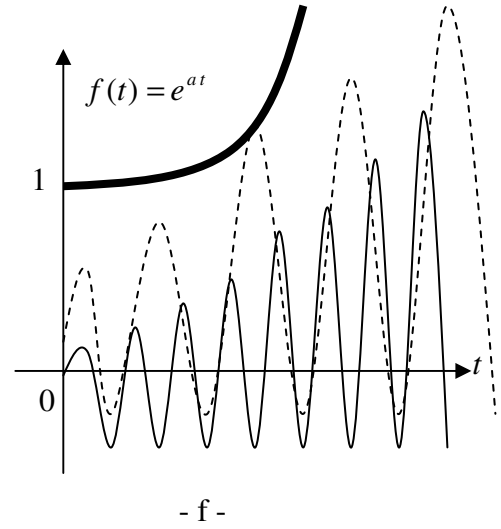
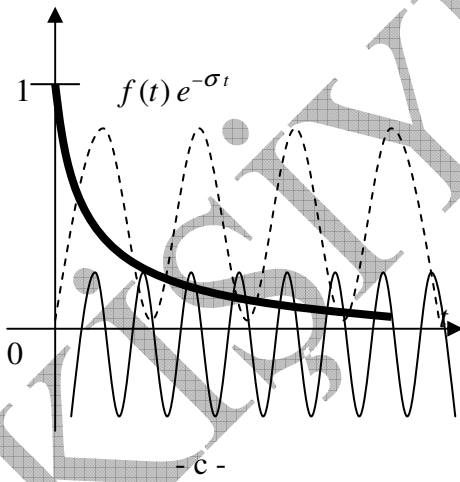
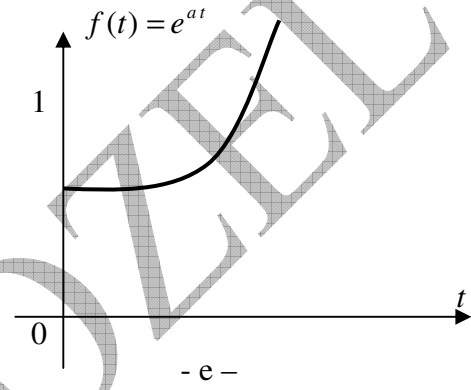
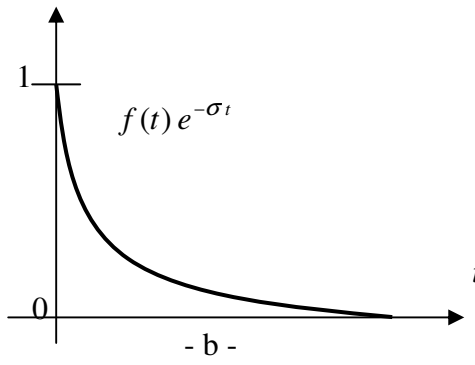
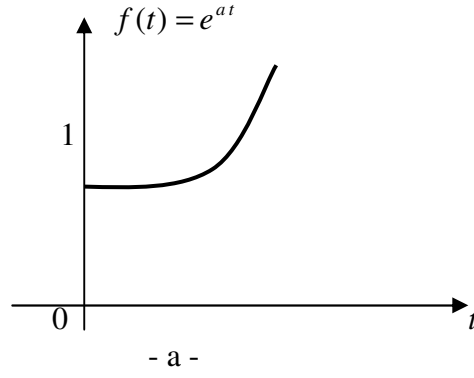
$$f(t) = (f(t)e^{-\sigma t}) e^{\sigma t}$$

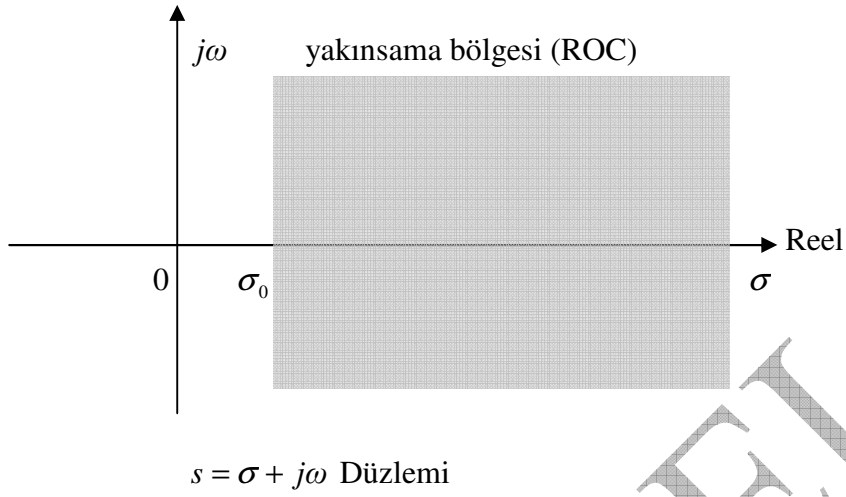
Eğer (c) şeklini göz önüne alırsak, $f(t)e^{-\sigma t}$ ifadesini $e^{\sigma t}$ ile çarpmanın, aynı zamanda şekilde görülen her bir harmoniğinde $e^{\sigma t}$ ile çarpılması demek olacağından, şekil (e) elde edilir. Bu şekildeki fonksiyonun tekrar Fourier transformasyonu alınamaz olan işaret olduğunu görmekteyiz.

Dolayısıyla takip eden şekil (f) de bu işarete ait harmoniklerin genliklerinin monoton artan exponensiyel, dolayısıyla belirsiz veya Fourier transformasyonu alınmaz özellikte olduğunu görmekteyiz. Bu andaki elde edilen $f(t)$ işaretinin şekil (g) den de görüldüğü gibi artık σ değerinde göz önüne alan $s = \sigma + j\omega$ kompleks frekans düzleminde oluştuğunu görmekteyiz. Şekil (h) de de ise $f(t)$ işaretinin (Fourier transformasyonu alınmaz özellikteki) σ eksenindeki hangi noktadan itibaren tanımlı olduğunu gösteren bölge görülmektedir. Fourier transformasyonunun $s = j\omega$ ekseninden $s = \sigma + j\omega$ düzlemine genişlemiş hali olan bu yeni yaklaşım **Laplace transformasyonu** olarak anılmaktadır. Şekil (h) den de görüldüğü gibi Laplace transformasyonunun varlığı, üstelik sağ yarı düzlemde σ ekseninde tanımlanan minimum bir σ_0 noktasından itibaren sözkonusu olan yakınsama bölgesiyle (Region Of Convergence, ROC) tanımlanmaktadır. Hatırlanacağı gibi Fourier transformasyonunda böyle bir avantaj yoktu. Hatta yakınsama bölgesinden ziyade, özgün bir yaklaşım olarak bizim isimlendirdiğimiz ; yakınsama noktası (Point Of Convergence, POC) kavramını kullanmıştık.

Burada önemli olan şekil (e) veya (f) den monoton artan exponensiyel özellikteki işaretin tekrar elde edilebilmesidir. Bunun sebebinin (g) deki $s = \sigma + j\omega$ düzleminden kaynaklandığını görmekteyiz. Çünkü işaret (e) veya (f) de kararsız pozisyonda olmasına rağmen, (h) deki $s = \sigma + j\omega$ düzleminde belirli bir noktadan ($\sigma > \sigma_0$) itibaren ve belirli bir bölge içersinde (ROC) tanımlı (sönümlü) olabileceğini görmekteyiz. Bir anlamda $f(t)e^{-\sigma t}$ işaretinin tanımlı olduğu (d) deki $s = j\omega$ düzlemindeki frekans bileşenleri, (g) deki $s = \sigma + j\omega$ düzlemine ($\sigma > \sigma_0$ noktasına) dönüştürülmüştür. Diğer bir deyişle (e) deki frekans değerleri, (g) deki düzlemin $s = \sigma_0 + j\omega$ noktasında tranfer edilmiştir (dönüştürülmüştür). Bir tür konformal dönüşüm (conformal mapping) söz konusudur.

İşin (g) noktasına gelmesiyle meseleye daha önce modülasyon penceresinden bakarken şimdide bu yaklaşımın tersi bakış açısıyla bakmamız gerekecektir. Hatırlayacağımız gibi şekil (e), $f(t)e^{-\sigma t}$ işaretinin (modülasyonlu işaret) $e^{\sigma t}$ ile çarpımından elde edilmişti. Eğer daha önce nasıl $f(t)$ işaretinin, $e^{-\sigma t}$ ile çarpılması modülasyon yani kodlanma (genlik modülasyonu) olarak anılmaktaysa, bu kez de $f(t)e^{-\sigma t}$ işaretinin (modülasyonlu işaret) $e^{\sigma t}$ ile çarpımı da **demodülasyon** olarak anılacaktır. Daha önce kodlanan $f(t)$ işaretini tekrar elde etmek üzere, bu işareti içeriğinde bulunduran $f(t)e^{-\sigma t}$ modülasyonlu dalga bu kez $e^{\sigma t}$ ile demodüle edilerek, $f(t)$ işaretinin elde edilmesini sağlamaktadır.





- h -

Şekil 13 Fourier transformasyonundan Laplace Transformasyonuna geçiş

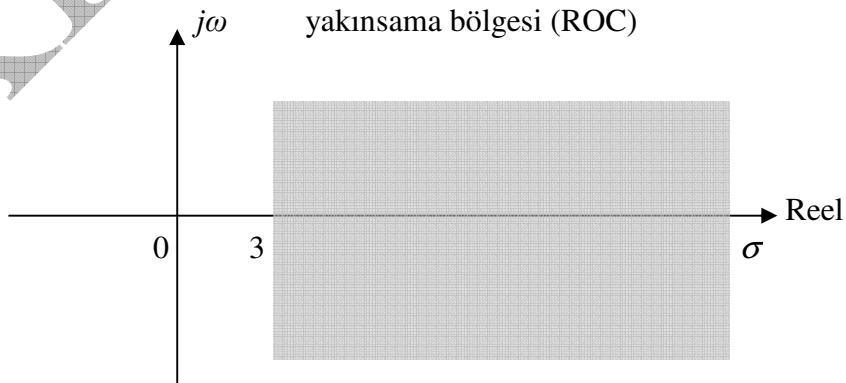
Şekil (h) den $f(t) = e^{at}u(t)$, $a > 0$ tipli bir işaretin gri olarak tanımlanmış yakınsama bölgesinde (ROC) tanımlanabileceği görülmektedir. Buna göre işaretin tanımlı olduğu birden fazla değer/nokta olduğunu görmekteyiz. Örneğin eğer işaretimiz $f(t) = e^{3t}u(t)$ ise, $f(t)e^{-\sigma t}$ olarak çarpımının Fourier transformasyonuna bakalım.

$$F\{f(t)e^{-\sigma t}\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-\sigma t}u(t)e^{-j\omega t}dt = \int_0^{\infty} e^{3t}e^{-(\sigma+j\omega)t}dt = \int_0^{\infty} e^{3t}e^{-(\sigma-3+j\omega)t}dt$$

Bu ifadenin tanımlı yani Fourier transformasyonunun var olabilmesi için $e^{-(\sigma-3+j\omega)t}$ ifadesinin

$$\sigma - 3 > 0 \rightarrow \sigma > 3$$

olması gerektiği açıktır. Bu nedenle $s = \sigma + j\omega$ kompleks frekans düzleminde tanımlı bölgenin (yakınsama bölgesinin) $\sigma > 3$ olması gerektiği ortaya çıkar.



Şekil 14 $s = \sigma + j\omega$ Düzlemi

Bunun anlamı $f(t) = e^{3t}u(t)$ işareti Fourier transformasyonu alınamaz olmasına rağmen, $s = \sigma + j\omega$ düzlemi vasıtasıyla yalnız bir nokta için değil, $\sigma > 3$ noktasından itibaren çok sayıda noktayı kapsayan geniş bir bölge içinde tanımlı olabileceğini görmekteyiz. Bu yaklaşımdan aşağıda açıklanacak Laplace transformasyonunun tanımlı/mevcut olma hali $(\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)e^{-\sigma t}| dt < \infty)$ içinde yararlanılacaktır.

Laplace Yaklaşımının Formüle Edilmesi

Eğer $f(t) = e^{at}u(t)$, $a > 0$ tipli Fourier transformasyonu mümkün olmayan monoton artan işaret söz konusuysa (şekil a), bu işaretin Fourier transformasyonunu mümkün kılmak üzere bir $e^{-\sigma t}$ ile çarpımı olan $f(t)e^{-\sigma t}$ ifadesini göz önüne alarak bunun Fourier transformasyonunu inceliyelim. Eğer Fourier çifti

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \quad \text{ve} \quad f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

ise, $f(t)e^{-\sigma t}$ çarpımının Fourier transformasyonuna bakalım.

$$F\{f(t)e^{-\sigma t}\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-\sigma t} e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-(\sigma+j\omega)t} dt$$

$$F(\omega) \Leftrightarrow f(t) \text{ ise,}$$

$$F\{f(t)e^{-\sigma t}\} = F(\sigma + j\omega)$$

$$F(\sigma + j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-(\sigma+j\omega)t} dt$$

$$s = \sigma + j\omega \text{ ise,}$$

$$F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-st} dt$$

Bununla artık sorunlu gibi görünen $f(t)$ işareti $e^{-\sigma t}$ ile çarpılarak $f(t)e^{-\sigma t}$ biçiminde Fourier transformasyonu alınabilir forma getirilmiştir. Çünkü Fourier transformasyonu $F(j\omega)$ yerine $F(\sigma + j\omega)$ olarak $s = \sigma + j\omega$ kompleks frekans düzleminde elde edilmiştir.

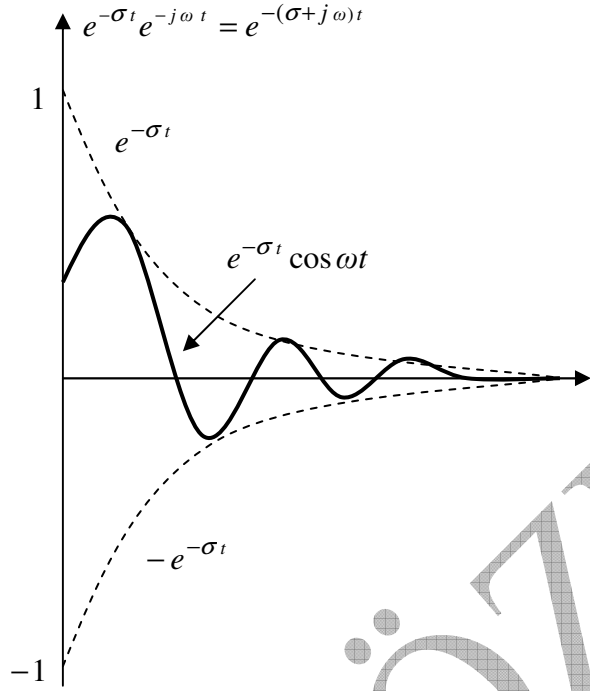
Eğer $F(\sigma + j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-(\sigma+j\omega)t} dt$ ifadesini göz önüne alırsak, integraldeki $f(t) e^{-(\sigma+j\omega)t}$

ifadesinin anlamı, $f(t)$ işareti içersinde $e^{-\sigma t}$ genlikli ve $e^{-j\omega t}$ exponensiyeliyle gösterilen ω frekanslı $\text{Re}\{e^{-(\sigma+j\omega)t}\} = e^{-\sigma t} \cos \omega t$ tipindeki sinusoidlerin varlığı (ilişkisi, korelasyonu) araştırılmaktadır (aşağıdaki şekildeki koyu çizgili sinusoid). Bu şekilde koyu çizgili sinusoid burada sembolik olarak verilmiştir.

Bunun gibi sonsuz harmoniğin olduğu ve bunların toplamı alınacağı düşünülmelidir. Diğer bir deyişle burada yeni bir yaklaşım olarak modülasyonlu dalga yzünden $f(t)$ işaretinin hangi genlik ve frekanstaki sinusoidlerden oluştuğu araştırılmaktadır. Bu ilişkinin cevabı, bir tür frekans genlik miktarı olarak $F(\sigma + j\omega)$ veya $F(s)$ ile tanımlanmaktadır. $F(\sigma + j\omega)$ ifadesinin (Laplace transformasyonu) sağ tarafını (integrali) dikkate aldığımızda, $f(t)$ işaretinin $e^{-\sigma t}$ ile modüle edilmesiyle oluşan $f(t)e^{-\sigma t}$ modülasyonlu dalgayı oluşturan $e^{-(\sigma + j\omega)t}$ tipli harmonikler, bir anlamda $f(t)$ işaretinde içerdiği sinusoidleri yani harmonikleri $F(\sigma + j\omega)$ frekans genliğiyle göstereceğinden, sonuçta sorunlu gibi görünen $f(t) = e^{at}u(t)$, $a > 0$ işaretinin spektrumunu gösterme yeteneğinde olduğu ortaya çıkar. Çünkü yapılan $f(t)e^{-\sigma t}$ modülasyonu $f(t)$ işaretini kodlama amacı taşıdığından, böyle bir dalganın spektrumundaki frekans bileşenleri doğal olarak $f(t)$ işaretinin spektrumunu yansıtacaktır.

Bu yolla $F(\sigma + j\omega)$ vasıtasıyla $f(t)$ kapsamındaki hem $e^{-\sigma t}$ nin işaret genliği ($F(\sigma)$) hemde ω frekanslı $e^{-j\omega t}$ sinusoidinin frekans genliği ($F(j\omega)$) belirlenmektedir. Oysa ki Fourier transformasyonundan biliyoruz ki $F(j\omega)$ ile, örneğin herhangi bir $x(t)$ işaretinde var olduğu düşünülen ω frekanslı $e^{-j\omega t}$ sinusoid(ler)in yalnızca frekans genliği belirlenmekteydi. Burada $s = \sigma + j\omega$ desteği ile, işaretin hem zaman hem frekans domenindeki genliği belirlenmektedir. Ekstradan $e^{-\sigma t}$ işaretinin genlik bilgisinin belirlenmesi önemlidir. Bununla bir işaretin hangi genlikteki harmonikleri içerdiği veya hangi genlikteki harmoniklerin toplamından oluştuğu sorusunun cevabı verilebilmektedir. Yani daha önce hiç olmayan bir durum olarak artık bir işaretin genlik bilgisi söz konusudur. σ veya Laplace düzlemindeki σ , $e^{-\sigma t}$ olarak genlik bilgisini sağlayabilmektedir. Bu genlik miktarını bilmek nasıl bir fayda sağlamaktadır. Bunun cevabını vermeye çalışalım. Belirsiz özelliğide olsa bir $f(t)$ işaretinin belirli genlikteki ($e^{-\sigma t}$) ve ω frekanslı $e^{-j\omega t}$ sinusoidlerin (harmoniklerden) toplamından oluşması daima mümkündür. Her ikisinin tespiti, $\text{Im}(j\omega)$ ve Reel (σ) eksenleriyle var olan $s = \sigma + j\omega$ kompleks frekans düzleminin sağladığı, $e^{-j\omega t}$ frekans ve $e^{-\sigma t}$ genlik bilgisiyle mümkün olmaktadır. Bu, $F(j\omega)$ nin $F(\sigma + j\omega)$ düzlemine dönüştürülmesiyle sağlanmaktadır. $F(\sigma + j\omega)$ ifadesi, $j\omega$ eksen (orijindeki), σ noktasına ($\sigma > \sigma_0$ gibi) ötelenmiş $f(t)$ işaretinin Fourier transformasyonu demektir. Bu nedenle bir anlamda $s = j\omega$ Fourier düzlemi, $s = \sigma + j\omega$ düzlemine dönüştürülmüş gibi de düşünebiliriz. Böylece bir $f(t)$ işareti, $\sigma > \sigma_0$ noktasındaki $e^{-\sigma t}$ genliğindeki, ω frekanslı $e^{-j\omega t}$ tipteki harmoniklerin toplamından oluşmaktadır veya bunları içermektedir.

$f(t)$ işareti $e^{-\sigma t}$ ile modüle edilerek oluşturulan $f(t)e^{-\sigma t}$ modülasyonlu dalganın içeriğindeki genliği değiştirilmiş harmonikler, bir anlamda $f(t)$ işaretinde içerdiği sinusoidleri de $F(\sigma + j\omega)$ olarak gösterdiğinden, bu yaklaşımla aslında $f(t)e^{-\sigma t}$ gibi bir modülasyonlu dalganın Fourier transformasyonunun, $s = \sigma + j\omega$ kompleks frekans düzleminde $f(t)$ işaretinin σ noktasında $e^{-\sigma t}$ genlikli ω frekanslı $e^{-j\omega t}$ tipteki harmoniklerin toplamından oluşan $F(\sigma + j\omega)$ tipinde Fourier transformasyonu olduğu sonucuna varılır.



Şekil 15 $\sigma > 0$ için $\text{Re}\{e^{-(\sigma + j\omega)t}\} = e^{-\sigma t} \cos \omega t$ tipli harmoniklerin (toplamının) değişimi

Bunların sonucunda $f(t)$ olarak Fourier transformasyonu alınamaz türdeki işaretler $s = \sigma + j\omega$ düzleminde artık dikkate alınan σ reel kısmın katkısıyla söz konusu olan yakınsama bölgesi (Region Of Convergence, ROC) sayesinde tanımlanabilir hale gelmiştir. Bu anlamda $\sigma > \sigma_0$ noktasından itibaren başlayan bir bölge içerisinde (yakınsama bölgesi, ROC), $e^{-(\sigma + j\omega)t}$ tipindeki bileşenlerin yani sinusoidlerin frekans (harmonik) genlikleri, $F(\sigma + j\omega)$ veya $F(s)$ olarak sonlu (giderek azalan trend de) değerde elde edilir.

Şimdi buradan tekrar $f(t)$ işaretini elde etmeye çalışalım. $F(\sigma + j\omega)$ den bu kez $f(t)$ yi elde etmeye çalışalım. Bunun için $f(t)$ işaretini tekrar elde etme, iki aşamada gerçekleşecektir. İlk aşamada $(F\{f(t)e^{-\sigma t}\})$ ifadesinin ters Fourier transformasyonunu alırsak,

$$f(t)e^{-\sigma t} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\sigma + j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

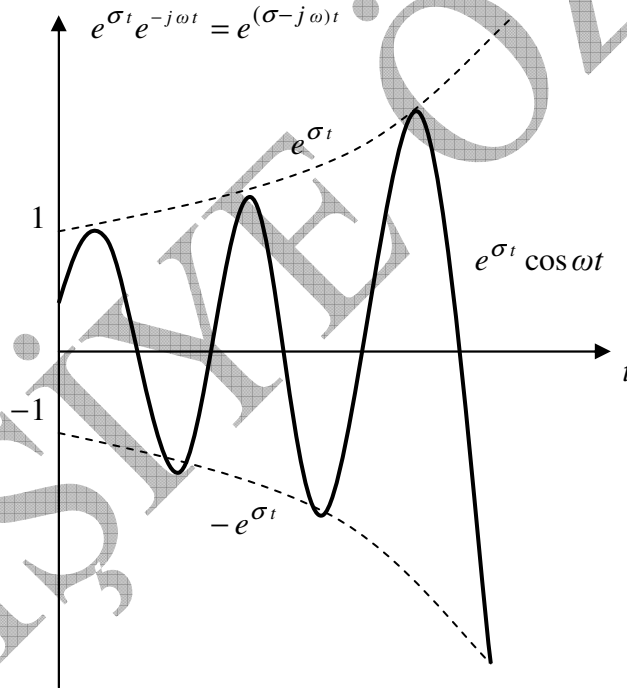
elde edilir ($F^{-1}\{f(t)e^{-\sigma t}\} = f(t)e^{-\sigma t}$). İkinci aşamada ise $f(t)$ yi elde etmek üzere son denklemdaki eşitliğin iki yanını $e^{\sigma t}$ ile çarpmamız yeterli olur. $f(t)e^{-\sigma t}$ çarpma işleminin değişimi aşağıdaki şekilde verilmiştir. Bu şekilde koyu çizgili sinusoid burada sembolik olarak verilmiştir. Bunun gibi sonsuz harmoniğin olduğu ve bunların toplamı alınacağı düşünülmelidir.

$$(f(t)e^{-\sigma t})e^{\sigma t} = \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\sigma + j\omega) e^{j\omega t} d\omega \right] e^{\sigma t} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\sigma + j\omega) e^{\sigma t} e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\sigma + j\omega) e^{(\sigma + j\omega)t} d\omega$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\sigma + j\omega) e^{(\sigma + j\omega)t} d\omega$$

Son denklemde $f(t) = e^{at}u(t)$, $a > 0$ özellikteki işaretin tekrar elde edilebildiğini görmekteyiz. Bu işaretin $\sigma > \sigma_0$ noktasındaki $e^{\sigma t}$ genliğindeki, ω frekanslı $e^{j\omega t}$ tipteki $F(\sigma + j\omega)$ genlikli harmoniklerin toplamından oluştuğunu görmekteyiz.

Bu yaklaşımla aslında $(f(t)e^{-\sigma t})e^{\sigma t}$ demodülasyonlu dalganın ters Fourier transformasyonunun, aslında $s = \sigma + j\omega$ kompleks frekans düzleminde σ noktasında $e^{-\sigma t}$ genlikli ω frekanslı $e^{-j\omega t}$ tipteki $F(\sigma + j\omega)$ genlikli harmoniklerin toplamından oluşan $f(t)$ orijinal işaret olduğu sonucuna varılır.



Şekil 16 $\sigma > 0$ için $\text{Re}\{e^{(\sigma - j\omega)t}\} = e^{\sigma t} \cos \omega t$ tipli harmoniklerin (toplamının) değişimi

Görüldüğü gibi $f(t)$, klasik Fourier transformasyonundaki $f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} dt$ ifadesindeki kompleks frekans düzleminin bir bölümünde/noktasında $s = j\omega$ olarak elde edilirken (POC), şimdi burada $f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\sigma + j\omega) e^{(\sigma + j\omega)t} d\omega$ ifadesinden de görülebileceği gibi, $s = \sigma + j\omega$ kompleks frekans düzleminin tamamında elde edilmiştir. Bu, yeni yaklaşımın Fourier transformasyonu arasındaki en önemli farkı oluşturmaktadır. Son yazılan $f(t)$ işaretini biraz düzenleyelim.

$$s = \sigma + j\omega \text{ ise}$$

$$ds = d(\sigma + j\omega) = d(j\omega) = j d\omega$$

$$d\omega = \frac{ds}{j}$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\sigma + j\omega) e^{(\sigma + j\omega)t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(s) e^{st} \frac{ds}{j} = \frac{1}{2\pi j} \int_{-\infty}^{\infty} F(s) e^{st} ds$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{-\infty}^{\infty} F(s) e^{st} ds$$

Buna göre yukarıda elde ettiğimiz $F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-st} dt$ denkleminide göz önüne alırsak, Laplace yaklaşımı olarak bilinen denklem çiftini aşağıdaki gibi oluştururuz.

$$F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-st} dt$$

Laplace Transformasyonu

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{-\infty}^{\infty} F(s) e^{st} ds$$

Ters Laplace Transformasyonu

Ters Laplace transformasyonu olarak $f(t)$ göz önüne alınırsa $s = \sigma + j\omega$ için tanımlanmıştı. Ancak bunun içinde $\sigma > \sigma_0$ gibi bir eşik değerin olduğunu biliyoruz. Bu açıdan eğer $c = \sigma > \sigma_0$ olarak göz önüne alınırsa gerçek anlamda $f(t)$ işaretinin sınırları c ye göre düşünülmelidir. Diğer yandan $s = \sigma + j\omega$ deki frekans (ω) sonsuz aralıkta düşünüleceğinden ($\omega = (-\infty, \infty)$), $f(t)$ işaretinin gerek reel ve imajiner anlamda bu yeni sınırlara göre göz önüne alınması daha gerçekçi bir yaklaşım olacaktır.

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{-\infty}^{\infty} F(s) e^{st} ds = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\omega}^{\sigma+j\omega} F(s) e^{st} ds = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\omega}^{c+j\omega} F(s) e^{st} ds = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(s) e^{st} ds$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(s) e^{st} ds$$

Ters Laplace Transformasyonu

Örnek

$f(t) = e^{4t} u(t)$ işaretinin Laplace transformasyonunu bulun

Çözüm

Daha önce e^{at} tipli ($a > 0$) işaretlerin Fourier transformasyonunun olmadığı belirtilmişti. Verilen örnek, bu özelliktedir. Çözümünün yapılabilmesi için mevcut Fourier transformasyonundaki $s = j\omega$ yerine, reel kısmında dikkate alındığı ($\sigma \neq 0$), $s = \sigma + j\omega$ düzleminin tamamı dikkate alınarak, verilen örnek analiz edilecektir. Bunun için,

$$F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-s t} dt$$

Formunda olan fonksiyonun $s = j\omega$ hali için,

$$F(s = j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

veya

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

biçiminde Fourier transformasyonu elde edilmekteydi. Şimdi “s” kompleks frekansı $\sigma \neq 0$ için $s = \sigma + j\omega$ olarak göz önüne alınırsa,

$$F(s = \sigma + j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-(\sigma + j\omega) t} dt$$

veya

$$\begin{aligned} F(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-(\sigma + j\omega) t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-s t} dt \end{aligned}$$

biçiminde düşünülebilir. Bu haldeyken Fourier transformasyonunda sorunlu olan $f(t) = e^{4t} u(t)$ işaretinin analizini yapmaya çalışalım. İlgili aşamalar aşağıya detaylandırılmıştır.

$$\begin{aligned} F(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-s t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{4t} u(t) e^{-s t} dt = \int_0^{\infty} e^{4t} e^{-s t} dt = \int_0^{\infty} e^{4t} e^{-(\sigma + j\omega)t} dt = \int_0^{\infty} e^{-(4 + \sigma + j\omega)t} dt \\ &= \left[-\frac{1}{-4 + \sigma + j\omega} e^{-(4 + \sigma + j\omega)t} \right]_0^{\infty} = \left[\left(-\frac{1}{-4 + \sigma + j\omega} e^{-(4 + \sigma + j\omega)\infty} \right) - \left(-\frac{1}{-4 + \sigma + j\omega} e^{-(4 + \sigma + j\omega)0} \right) \right] \end{aligned}$$

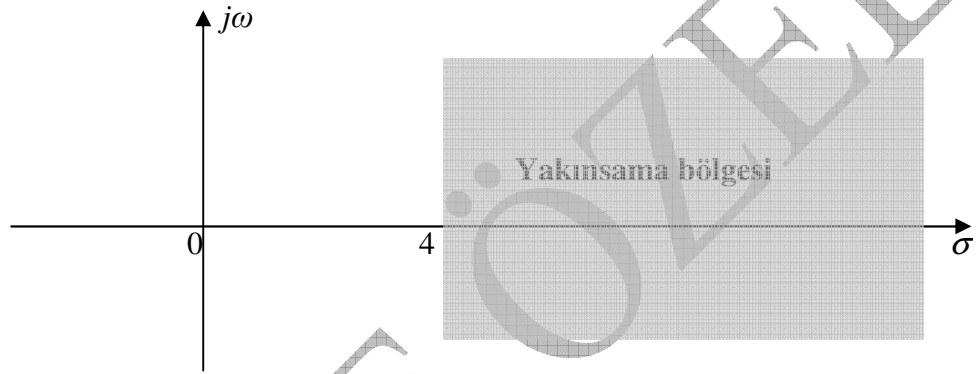
Bu denklemde görülen

$$\left(-\frac{1}{-4+\sigma+j\omega} e^{-(4+\sigma+j\omega)\infty} \right)$$

ifadesinin $t \rightarrow \infty$ için sonlu bir değer üretebilmesi için $e^{-(4+\sigma+j\omega)\infty}$ teriminin sıfır olması gerekir ($e^{-(4+\sigma+j\omega)\infty} \rightarrow 0$). Bunun için

$$(-4+\sigma) > 0 \text{ veya } \sigma > 4$$

olması gerekir. Aksi takdirde ($\sigma < 4$) $e^{-(4+\sigma+j\omega)\infty} \rightarrow \infty$ olacağı için çözüm elde edilemezdi. Buna ilişkin yakınsama bölgesi (ROC) aşağıdaki görünümde olacaktır.



Şekil 17 $f(t) = e^{4t}u(t)$ İşaretinin $\sigma > 4$ için yakınsama bölgesi

Buradan hareketle, Laplace transformasyonu ise, yukarıdaki işlemin devam ettirilmesiyle aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$\begin{aligned} F(s) &= \left[\left(-\frac{1}{-4+\sigma+j\omega} e^{-(4+\sigma+j\omega)\infty} \right) + \frac{1}{-4+\sigma+j\omega} \right] = \left[-\frac{1}{-4+\sigma+j\omega} \frac{1}{e^{-(4+\sigma+j\omega)\infty}} + \frac{1}{-4+\sigma+j\omega} \right] \\ &= \left[-\frac{1}{-4+\sigma+j\omega} \times \frac{1}{\infty} + \frac{1}{-4+\sigma+j\omega} \right] = \left[-\frac{1}{-4+\sigma+j\omega} \times 0 + \frac{1}{-4+\sigma+j\omega} \right] \\ &= \left[0 + \frac{1}{-4+\sigma+j\omega} \right] \\ &= \frac{1}{-4+\sigma+j\omega}, \quad \sigma > 4 \\ &= \frac{1}{s-4} \end{aligned}$$

Yakınsama bölgesi : $\sigma > 4$

Örnek

$f(t) = e^{-3t}u(t)$ işaretinin Laplace transformasyonunu bulun

Çözüm

Bu örnek, Fourier yaklaşımı açısından mümkün görünmesine rağmen, burada alternatif olarak yukarıdakine benzer biçimde ele alınacaktır. Çözümün aşamaları aşağıda verilmiştir.

$$\begin{aligned} F(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-s t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{3t} u(t) e^{-s t} dt = \int_0^{\infty} e^{-3t} e^{-s t} dt = \int_0^{\infty} e^{-(3+\sigma+j\omega)t} dt = \int_0^{\infty} e^{-(3+\sigma+j\omega)t} dt \\ &= \left[-\frac{1}{3+\sigma+j\omega} e^{-(3+\sigma+j\omega)t} \right]_0^{\infty} = \left[\left(-\frac{1}{3+\sigma+j\omega} e^{-(3+\sigma+j\omega)\infty} \right) - \left(-\frac{1}{3+\sigma+j\omega} e^{-(3+\sigma+j\omega)0} \right) \right] \end{aligned}$$

Bu denklemde görülen

$$\left(-\frac{1}{3+\sigma+j\omega} e^{-(3+\sigma+j\omega)\infty} \right)$$

ifadesinin $t \rightarrow \infty$ için sonlu bir değer üretebilmesi için $e^{-(3+\sigma+j\omega)\infty}$ teriminin sıfır olması gerekir ($e^{-(3+\sigma+j\omega)\infty} \rightarrow 0$). Bunun için yakınsama bölgesinin

$$(3+\sigma) > 0 \quad \text{veya} \quad \sigma > -3$$

olması gerekir. Buna uygun yakınsama bölgesi (ROC) aşağıdaki görünümde olacaktır.



Şekil 18 $f(t) = e^{-3t}u(t)$ İşaretinin $\sigma > -3$ için yakınsama bölgesi

Buradan, Laplace transformasyonunun bulunması aşamasına geçilebilir.

$$\begin{aligned}
 F(s) &= \left[\left(-\frac{1}{3+\sigma+j\omega} e^{-(3+\sigma+j\omega)\infty} \right) + \frac{1}{3+\sigma+j\omega} \right] = \left[-\frac{1}{3+\sigma+j\omega} \frac{1}{e^{(3+\sigma+j\omega)\infty}} + \frac{1}{3+\sigma+j\omega} \right] \\
 &= \left[-\frac{1}{3+\sigma+j\omega} \times \frac{1}{\infty} + \frac{1}{3+\sigma+j\omega} \right] = \left[-\frac{1}{3+\sigma+j\omega} \times 0 + \frac{1}{3+\sigma+j\omega} \right] \\
 &= \left[0 + \frac{1}{3+\sigma+j\omega} \right] \\
 &= \frac{1}{3+\sigma+j\omega}, \quad \sigma > -3 \\
 &= \frac{1}{s+3}
 \end{aligned}$$

Örnek

$f(t) = e^{-at}u(t)$ işaretinin yakınsama bölgesini (ROC) ve Laplace transformasyonunu bulun.

Çözüm

$$\begin{aligned}
 F(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(a+\sigma)t} e^{-j\omega t} u(t) dt = \int_0^{\infty} e^{-(a+\sigma)t} e^{-j\omega t} dt = \int_0^{\infty} e^{-(a+\sigma+j\omega)t} dt = -\frac{1}{a+\sigma+j\omega} \left[e^{-(a+\sigma+j\omega)t} \right]_0^{\infty} \\
 &= -\frac{1}{a+\sigma+j\omega} \left[e^{-(a+\sigma+j\omega)\infty} - e^{-(a+\sigma+j\omega)0} \right]
 \end{aligned}$$

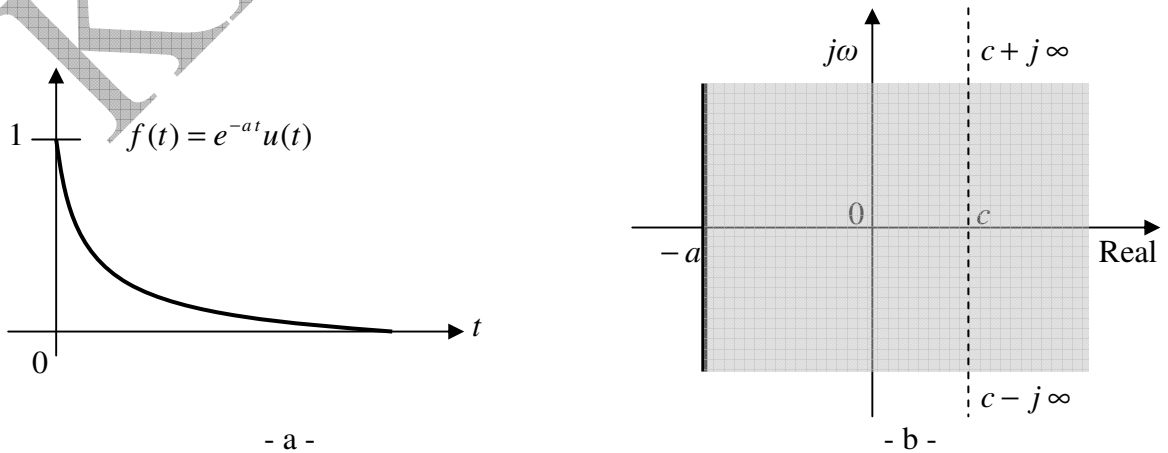
denklemden

$$-\frac{1}{a+\sigma+j\omega} e^{-(a+\sigma+j\omega)\infty}$$

$t \rightarrow \infty$ için $e^{-(a+\sigma+j\omega)\infty}$ ifadesinin sıfır olması gerekecektir ($e^{-(a+\sigma+j\omega)\infty} \rightarrow 0$) Bunun için

$$a+\sigma > 0 \quad \text{veya} \quad \sigma > -a$$

olması gerektiğini görüyoruz. Buna göre yakınsama bölgesi (ROC) aşağıdaki gibi elde edilecektir.



Şekil 19 $e^{-at}u(t)$ İşaretinin Laplace transformasyonu ve $\sigma > -a$ yakınsama bölgesi (ROC)

Buradan devam ederek Laplace transformasyonunu elde edebiliriz.

$$\begin{aligned} F(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(a+\sigma)t} e^{-j\omega t} u(t) dt = \int_0^{\infty} e^{-(a+\sigma)t} e^{-j\omega t} dt = \int_0^{\infty} e^{-(a+\sigma+j\omega)t} dt = -\frac{1}{a+\sigma+j\omega} \left[e^{-(a+\sigma+j\omega)t} \right]_0^{\infty} \\ &= -\frac{1}{a+\sigma+j\omega} \left[e^{-(a+\sigma+j\omega)\infty} - e^{-(a+\sigma+j\omega)0} \right] \\ &= -\frac{1}{a+\sigma+j\omega} \left[\frac{1}{e^{(a+\sigma+j\omega)\infty}} - 1 \right] = -\frac{1}{a+\sigma+j\omega} \left[\frac{1}{\infty} - 1 \right] \\ &= -\frac{1}{a+\sigma+j\omega} [0-1] \\ &= \frac{1}{a+\sigma+j\omega} \\ &= \frac{1}{s+a} \end{aligned}$$

Buradan Laplace ile ilgili ilk kurallarımızı yazabiliriz.

$$1. e^{-at} u(t) \Leftrightarrow \frac{1}{s+a}$$

$$2. e^{at} u(t) \Leftrightarrow \frac{1}{s-a}$$

Laplace Transformasyonunun $U(t)$ Birim Basamak Fonksiyonla Kullanımı

Laplace transformasyonuna dair fonksiyonların genellikle $u(t)$ birim basamak fonksiyonuyla verildiğini görmekteyiz. Örneğin

$$f(t) = e^{-at} u(t)$$

$$f(t) = \delta(t) u(t)$$

$$f(t) = t u(t)$$

$$f(t) = e^{\lambda t} u(t)$$

$$f(t) = \cos \omega_0 t u(t)$$

gibi fonksiyonların her birinin Laplace transformasyonu istenebilir. Hepsinin ortak noktası $u(t)$ birim basamak fonksiyonuyla verilmesidir. Bunun sebebini Laplace transformasyonuna ait denklemi incelediğimizde görmekteyiz.

$$F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-st} dt$$

Laplace denklemine göre Laplace transformasyonunun mümkün olabilmesi için integrasyondaki e^{-st} eksponensiyel ifadesinin sönümlü olması gerekiyor, yani bir noktaya yakınsaması veya limiti olması gerekiyor. Bunun içinde

$$t \geq 0$$

olmalıdır. Çünkü bu halde iken $e^{-s t}$ ifadesi $s \rightarrow \infty$ için

$$e^{-s t} \rightarrow 0$$

olabilmektedir. Bunu gerçeklemek üzere $t \geq 0$ koşulunun sağlanmasının en emin yolu fonksiyonun $u(t)$ birim basamak ile kullanılmasıdır. Çünkü

$$u(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

olduğundan yukarıda verilen “ e^{-at} , t , $e^{\lambda t}$, $\cos \omega_0 t$ ” fonksiyonlarının $u(t)$ ile kullanımı $t \geq 0$ koşulunu $t = [0, \infty)$ aralığında “ $e^{-at}u(t)$, $t u(t)$, $e^{\lambda t}u(t)$, $\cos \omega_0 t u(t)$ ” formlarında sağlayacağından Laplace transformasyonunu belirsiz yapabilecek $e^{-s t}$ terimi $e^{-s t} \rightarrow 0$ sönümlü özelliğiyle integrasyonun sonlu bir değerde olmasını garanti edecektir. Dolayısıyla Laplace transformasyonunun normalde çift yönlü olarak

$$F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-s t} dt$$

formunda görünen ifadesi aslında belirtilen kaygılardan dolayı $t = [0, \infty)$ aralığında olmak üzere

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-s t} dt$$

şeklinde unilaterale yani tek yönlü olarak ifade edilir. Diğer yandan bu tarzda kullanım sistem özelliği açısından da açıklanabilir. Çünkü bir sisteme $t < 0$ anında giriş yapılmaması, **nedensellik** (causality) gereğidir. Bunun için sistem girişlerinin **nedensel** (causal) olması yani $t < 0$ anından önceki değeri sıfır olan işaretler olması istenir.

Laplace Transformasyonunun Yakınsaması

Laplace transformasyonu ile ilgili iki tip yakınsama söz konusudur. Birincisi yukarıda kısaca kastedilen “yakınsama bölgesi, ROC” diğer ise Fourier serisi ve transformasyonunda incelendiği üzere, orijinal fonksiyonun, ters transformasyonla elde edilen zaman domenindeki değere olan yakınlığıyla ilgilidir. Burada ikinci tip yakınsama şu an için ele alınacaktır. Laplace transformasyonunun orijinal $f(t)$ fonksiyonunu işleyerek $F(s)$ fonksiyonunu oluşturduğunu görmekteyiz. Laplace $f(t) \Leftrightarrow F(s)$ şeklinde çift yönlü bir transformasyon olduğundan, bu kez $F(s)$ fonksiyonunun

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(s) e^{s t} ds$$

denklemini kullanarak $f(t)$ yi oluşturduğunu görmekteyiz. Ancak değişken değişimi yaparak ters Laplace dönüşümünün karşılığı olarak

$$f_L(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(s) e^{st} ds$$

denklemini göz önüne aldığımızda orijinal $f(t)$ ve Laplace transformasyonundan elde edilen $f_L(t)$ fonksiyonlarının

$$f(t) \stackrel{?}{=} f_L(t)$$

şeklinde eşit olması, beklentiden öteye geçmeyebilir. Çünkü $f_L(t)$ fonksiyonu Laplace transformasyonunun tanımlı olduğu reel eksenindeki $s = c - j\infty$ ve $s = c + j\infty$ sonlu aralığında ele alınmaktadır.

Ancak ifadelerden ω frekans değerinin $\omega = -\infty, \infty$ sonsuz aralığında değişiyor olması, pratikte sonsuz aralığın kullanılamaması yüzünden elde edilecek $f_L(t)$ fonksiyonu ancak original $f(t)$ işaretinin yaklaşık bir hali olabileceğini göstermektedir. Bu yüzden her zaman $f(t)$ ile $f_L(t)$ arasında bir fark kaçınılmaz olabilecektir.

$$f(t) - f_L(t) \neq 0 = \text{hata}$$

Bu yüzden Laplace transformasyonunda da original $f(t)$ işaretine olan yaklaşımdan yani yakınsamaktan söz etmek mümkündür.

Yakınsama Bölgesi

Yukarıdaki bölümlerde iki tip yakınsama kavramından bahsedilmişti. Burada ilk tip yakınsama ele alınacaktır. “*The Region of Convergence (ROC)*” adıyla anılan yakınsama bölgesi, Laplace transformasyonunun varlığını ($\int_{-\infty}^{\infty} |f(t) e^{-\sigma t}| dt < \infty$) gösteren bölgedir. Bu bölgenin varlığı halinde exponensiyel işaret monoton artan özellikten, belli bir değere yakınsayarak stabil olmaya çalışmaktadır, buda Laplace transformasyonunun varlığı için önemli bir gerektir.

Fourier ve Laplace Transformasyonlarında Yakınsama Bölgeleri

Eğer Fourier ve Laplace transformasyonlarını bir kez daha göz önüne alırsak,

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-s t} dt$$

$$f(t) = e^{-at} u(t)$$

tipli genel sayılabilecek fonksiyonlar için Fourier transformasyonunda yakınsama bölgesi

$$a > 0$$

iken, Fourier düzlemi σ kadar ötelenmiş Laplace transformasyonunun yakınsama bölgesinin

$$\sigma > -a$$

biçiminde olduğunu görmekteyiz. Bunun anlamı, Fourier düzleminin orijine göre σ kadar ötelenmesi durumunda, oluşacak Laplace transformasyonunun varlığı, σ miktarını göz önüne alarak incelenmelidir. Laplace transformasyonunda ROC olarak anılan bu bölgenin işlevini açıklamaya yönelik aşağıdaki örnek yararlı olacaktır.

Örnek

$x(t) = 3e^{-2t}u(t) - 2e^{-t}u(t)$ işaretinin yakınsama bölgesini bulun.

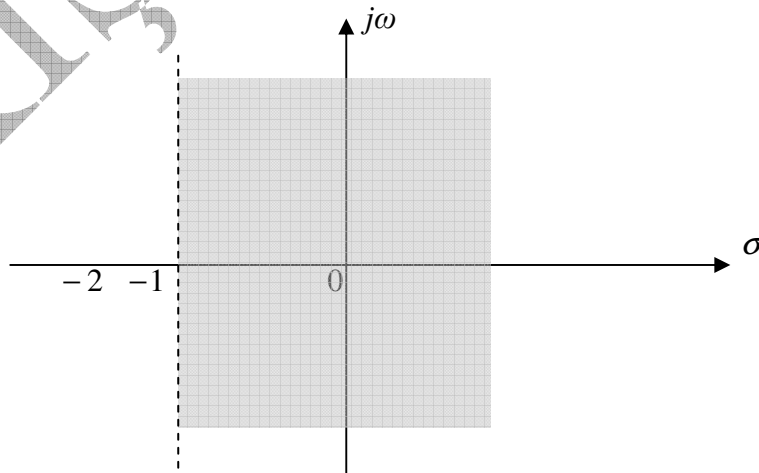
Çözüm

$$\begin{aligned} F(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-s t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} [3e^{-2t}u(t) - 2e^{-t}u(t)] e^{-(\sigma+j\omega) t} dt \\ &= 3 \int_{-\infty}^{\infty} [e^{-2t}u(t)] e^{-(\sigma+j\omega) t} dt - 2 \int_{-\infty}^{\infty} [e^{-t}u(t)] e^{-(\sigma+j\omega) t} dt \\ &= 3 \int_0^{\infty} e^{-(2+\sigma+j\omega) t} dt - 2 \int_0^{\infty} e^{-(1+\sigma+j\omega) t} dt \\ &= -\frac{3}{2+\sigma+j\omega} \left[e^{-(2+\sigma+j\omega) t} \right]_0^{\infty} - \left(-\frac{2}{(1+\sigma+j\omega)+1} \right) \left[e^{-(1+\sigma+j\omega) t} \right]_0^{\infty} \\ &= -\frac{3}{2+\sigma+j\omega} (e^{-(2+\sigma+j\omega) \infty} - e^{-(2+\sigma+j\omega) 0}) + \frac{2}{(1+\sigma+j\omega)+1} (e^{-(1+\sigma+j\omega) \infty} - e^{-(1+\sigma+j\omega) 0}) \end{aligned}$$

Burada $t \rightarrow \infty$ için $e^{-(2+\sigma+j\omega) \infty} \rightarrow 0$ ve $e^{-(1+\sigma+j\omega) \infty} \rightarrow 0$ beklentilerinden dolayı yakınsama bölgeleri $2+\sigma > 0$ ve $1+\sigma > 0$ düşünüldüğünde, esas yakınsama bölgeleri

$$\sigma > -2 \text{ ve } \sigma > -1$$

olduğu görülmektedir. Bu iki durum göz önüne alındığında, $\sigma > -1$ koşulunun yakınsama bölgesini garanti edeceği görülmektedir. Eğer $\sigma > -2$ alınsaydı, daha düşük alt değer olacağından bu kez $\sigma = -1$ için $e^{-(2+s)t}$ ifadesi belirsizliğe sebep olabilirdi. Buna göre yakınsama bölgesini $\sigma > -1$ koşuluna göre aşağıdaki gibi belirleyebiliriz.



Şekil 20 $\sigma > -1$ Yakınsama bölgesi

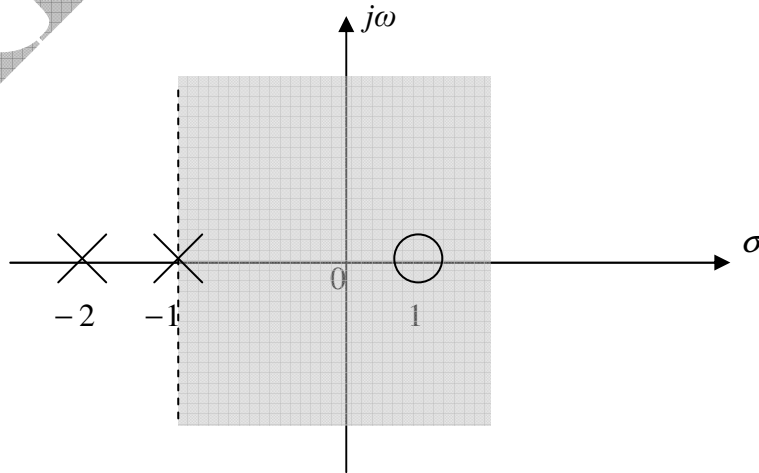
Buradan yarım bırakılan Laplace transformasyonuna devam edilerek aşağıdaki netice elde edilir.

$$\begin{aligned}
 F(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-s t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} [3e^{-2t} u(t) - 2e^{-t} u(t)] e^{-(\sigma+j\omega) t} dt \\
 &= 3 \int_{-\infty}^{\infty} [e^{-2t} u(t)] e^{-(\sigma+j\omega) t} dt - 2 \int_{-\infty}^{\infty} [e^{-t} u(t)] e^{-(\sigma+j\omega) t} dt \\
 &= 3 \int_0^{\infty} e^{-(2+\sigma+j\omega) t} dt - 2 \int_0^{\infty} e^{-(1+\sigma+j\omega) t} dt \\
 &= -\frac{3}{2+\sigma+j\omega} \left[e^{-(2+\sigma+j\omega) t} \right]_0^{\infty} - \left(-\frac{2}{1+\sigma+j\omega+1} \right) \left[e^{-(1+\sigma+j\omega) t} \right]_0^{\infty} \\
 &= -\frac{3}{2+\sigma+j\omega} (e^{-(2+\sigma+j\omega) \infty} - e^{-(2+\sigma+j\omega) 0}) + \frac{2}{1+\sigma+j\omega+1} (e^{-(1+\sigma+j\omega) \infty} - e^{-(1+\sigma+j\omega) 0}) \\
 &= -\frac{3}{2+\sigma+j\omega} \left(\frac{1}{e^{(2+\sigma+j\omega) \infty}} - 1 \right) + \frac{2}{1+\sigma+j\omega+1} \left(\frac{1}{e^{(1+\sigma+j\omega) \infty}} - 1 \right) \\
 &= -\frac{3}{2+\sigma+j\omega} \left(\frac{1}{\infty} - 1 \right) + \frac{2}{1+\sigma+j\omega+1} \left(\frac{1}{\infty} - 1 \right) = -\frac{3}{2+\sigma+j\omega} (0-1) + \frac{2}{1+\sigma+j\omega+1} (0-1) \\
 &= \frac{3}{2+\sigma+j\omega} - \frac{2}{1+\sigma+j\omega+1} \\
 &= \frac{3}{s+2} - \frac{2}{s+1}
 \end{aligned}$$

Alternatif olarak yakınsama bölgesini sistemin kutup ve sıfırlarına göz önüne alarak da belirleyebiliriz. Yukarıda bulduğumuz Laplace transformasyonunu göz önüne alarak düzenlemeye çalışalım

$$F(s) = \frac{3}{s+2} - \frac{2}{s+1} = \frac{3s+3-2s-4}{(s+1)(s+2)} = \frac{s-1}{(s+1)(s+2)}$$

Buna göre $F(s)$ sisteminin kutupları $s = -1$ ve $s = -2$, sıfırı ise $s = 1$ dir. Buna göre “s” kompleks frekans düzleminin görünümü aşağıdaki gibi olacaktır.



Şekil 21 $\sigma > -1$ Yakınsama bölgesi

s düzlemine göre niçin $s = -1$, $s = -2$ ve $s = 1$ değerlerinin σ ekseninde konuşlandığını bilmemiz gerekiyor. Örneğin eğer $s = -1$ değerini kompleks frekans düzleminde göstermek istiyorsak, aslında bu değer $\sigma + j\omega = -1$ dir. Buna göre başlangıçta (0,0) merkezi noktadaki s düzlemi $\sigma = -1$ miktarından dolayı sola ötelenmiştir. Bu nedenle söz konusu “-1” değeri yatay σ eksenı üzerindedir. Öte yandan eğer $\sigma + j\omega = -1$ göz önüne alınırsa $\sigma + j\omega = -1 + 0j\omega$ yazımından da aslında “-1” değerinin $\sigma = -1$ olarak yatay eksenle ilgili olduğu görülecektir.

Örnek

$f(t) = e^{-2t}u(t) + e^{2t}u(-t)$ İşaretinin yakınsama bölgesini ve Laplace transformasyonunu bulun.

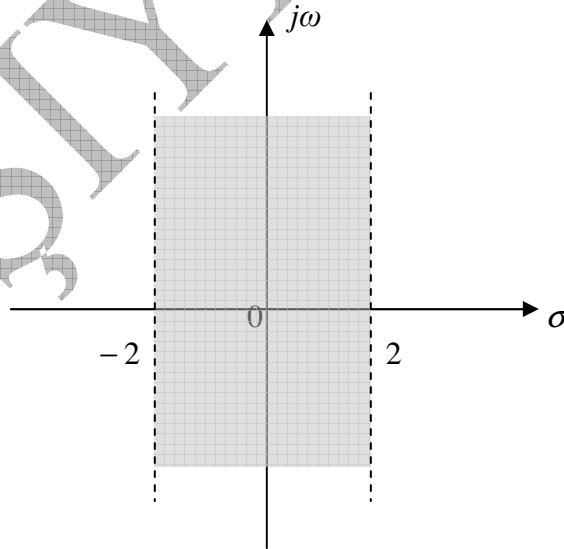
Çözüm

Verilen işaret yukarıda ayrı ayrı olarak $f_1(t) = e^{-2t}u(t)$ ve $f_2(t) = e^{2t}u(-t)$ olarak incelenmişti. Hatırlayacağımız gibi $f_1(t) = e^{-2t}u(t)$ işareti için $\sigma > -2$ ve $f_2(t) = e^{2t}u(-t)$ işareti içinse yakınsama bölgesi $\sigma < 2$ ve bulunmuştu.

$$f_1(t) = e^{-2t}u(t) \quad \sigma > -2$$

$$f_2(t) = e^{2t}u(-t) \quad \sigma < 2$$

Bunlara uygun yakınsama bölgesi aşağıdaki görünümde olacaktır.



Şekil 22 $-2 < s < 2$ Yakınsama bölgesi

Buradan hareketle böyle bir yakınsama bölgesini sağlayan Laplace transformasyonu ise aşağıdaki gibi hesaplanacaktır.

$$F(s) = F_1(s) + F_2(s)$$

Yukarıdan hatırlayacağımız gibi, $f_1(t) = e^{-2t}u(t)$ için

$$F_1(s) = \frac{1}{s+2}$$

ve $f_2(t) = e^{2t}u(-t)$ için

$$F_2(s) = -\frac{1}{s-2}$$

$$F(s) = \frac{1}{s+2} - \frac{1}{s-2}$$

Buna göre toplam $f(t) = e^{-2t}u(t) + e^{2t}u(-t)$ için

$$F(s) = \frac{1}{s+2} - \frac{1}{s-2} = \frac{s-2-(s+2)}{(s+2)(s-2)} = \frac{-4}{s^2-4}$$

elde edilir. Burada

$$f(t) = e^{-2t}u(t) + e^{2t}u(-t) = e^{-2|t|}$$

olduğunu bilmemiz gerekiyor. Buna göre

$$e^{-2t}u(t) + e^{2t}u(-t) \Leftrightarrow \frac{1}{s+2} - \frac{1}{s-2} = -\frac{4}{s^2-4}$$

Örnek

$$F(s) = \frac{6}{-s^2+9} \text{ işaretinin yakınsama bölgesini bulun.}$$

Çözüm

$$F(s) = \frac{6}{-s^2+9}$$

$F(s)$ fonksiyonunu biraz düzenlemeye çalışalım.

$$F(s) = \frac{6}{-s^2+9} = -\frac{6}{s^2-9} = -\frac{6}{(s-3)(s+3)} = \frac{A}{s-3} + \frac{B}{s+3}$$

$$F(s) = -\frac{6}{(s-3)(s+3)} = \frac{A}{s-3} + \frac{B}{s+3} = \frac{As+3A+Bs-3B}{(s-3)(s+3)} = \frac{(A+B)s+3A-3B}{(s-3)(s+3)}$$

$$A+B=0 \rightarrow A=-B$$

$$3A-3B=-6 \rightarrow 3(-B)-3B=-6$$

$$-3B-3B=-6 \rightarrow -6B=-6$$

$$B=1 \text{ ve } A=-1$$

$$F(s) = -\frac{6}{s^2 - 9} = -\frac{1}{(s-3)} + \frac{1}{(s+3)}$$

$$F(s) = \frac{1}{(s+3)} - \frac{1}{(s-3)}$$

$$e^{-at}u(t) \Leftrightarrow \frac{1}{s+a} \text{ kuralına göre}$$

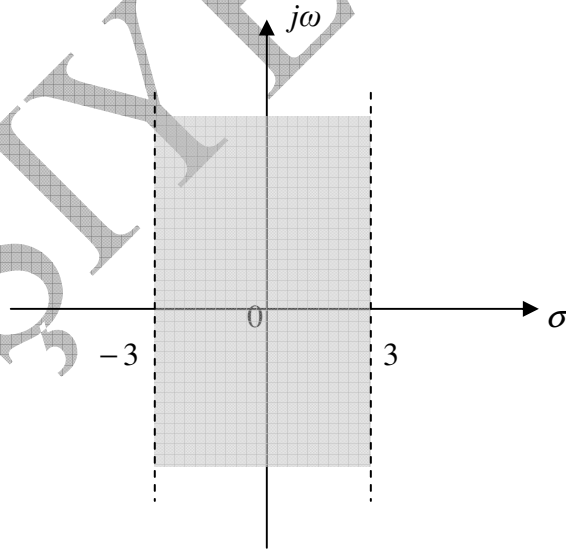
$$\frac{1}{(s+3)} = e^{-3t}u(t) \Leftrightarrow \frac{1}{s+3a}$$

ve

$$e^{at}u(-t) \Leftrightarrow \frac{-1}{s-a} \text{ kuralına göre ise,}$$

$$-\frac{1}{(s-3)} = e^{3t}u(-t) \Leftrightarrow \frac{-1}{s-3}$$

Buna göre yakınsama bölgesi $-3 < \sigma < 3$



Şekil 23 $-3 < \sigma < 3$ Yakınsama bölgesi

Laplace Transformasyonunun Var Olması

Eğer Laplace transformasyonunun bir yakınsama bölgesi varsa, bunun Laplace transformasyonunun varlığına işaret olduğunu biliyoruz. Bunun yanı sıra, eğer $f(t) e^{-\sigma t}$ için Laplace transformasyonunun yakınsama bölgesi σ göz önüne alınarak yapılıyorsa, bunun geçerli olduğu yakınsama durumunda ayrıca aşağıdaki denkleminde sağlandığı görülmektedir.

$$|F(s)| = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-s t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t) e^{-\sigma t} e^{-j\omega t}| dt = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t) e^{-\sigma t}| dt < \infty$$

denkleminde $|e^{-j\omega t}| = 1$ olduğunu biliyoruz. Buna göre yakınsama bölgesinin sağlanması, aynı zamanda Laplace transformasyonunun

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t) e^{-\sigma t}| dt < \infty$$

biçiminde sonlu değer üretmesiyle açıklanabilmektedir.

Laplace Transformasyonu ve Fourier Transformasyonu

Kompleks frekans $s = \sigma + j\omega$ göz önüne alındığında Fourier transformasyonu frekans uzayının sadece imajiner bölümü için geçerli bir transformasyon şeklidir.

$$F(\omega) = F(s)|_{s=j\omega}$$

Veya Fourier transformasyonu $F(s)$ Laplace transformasyonunun reel kısmının sıfır olduğu özel bir şeklidir diye tanımlanabilir;

$$F(\omega) = F(s)|_{\sigma=0}$$

Son ifaden de görülebileceği gibi, Fourier transformasyonu sürekli-zaman işaretler kategorisinde düşünüldüğü zaman, Laplace transformasyonunun özel bir halidir. Bu açıdan gerek işaret işlemede gerekse sistem analizde sürekli-zaman işaret özellikli sistemlere uyarlanacak en tipik, faydalı ve kullanışlı teknik anlamında Laplace transformasyonu bu alanda akla ilk gelendir. Bunların ışığında aşağıdaki çıkarımları yapmak mümkündür.

1. Laplace transformasyonu, sürekli Fourier transformasyonunu da kapsayan en genel LTIC sistem analiz yöntemidir.

2. Laplace transformasyonu $f(t) = e^{at} u(t)$ $a > 0$ şeklinde belirsizliğe sahip işaretleri ROC olarak tanımlanan bir alanda analiz edebilme kabiliyetinde bir yöntemdir.

3. Laplace transformasyonu $s = \sigma + j\omega$ şeklinde kompleks frekans düzlemine dayalı iki boyutlu (σ ve $j\omega$) bir düzlem transformasyonudur.

4. Fourier transformasyonu $F(\omega) = F(s)|_{s=j\omega}$ veya $F(\omega) = F(s)|_{\sigma=0}$ özellikli yalnızca $s = j\omega$ şeklinde tek boyutlu bir spektrumdur.

LAPLACE TRANSFORMASYONUyla ÇÖZÜMLER

Bu bölümde bazı çok bilinen fonksiyonların Laplace ve invers Laplace transformasyonları ele alınacaktır.

Örnek

$f(t) = \delta(t)u(t)$ işaretinin Laplace transformasyonunu hesaplayalım.

Çözüm

$$F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-s t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-s t} dt = \delta(0) e^{-s \cdot 0} = 1$$

Bunun anlamı $F(\omega) = 1$ Fourier transformasyonundaki gibi düşünülebilir. Orada her noktada frekansı mevcut, neredeyse sonsuz band genişliğindeki bir impuls fonksiyonu vurgulanmaktaydı. Laplace transformasyonu açısından da $F(s) = 1$ benzer durumdadır. Kompleks frekans düzleminin her noktasında tanımlı güçlü bir işaret vurgulanmaktadır.

Örnek

$F(s) = \delta(s)$ işaretinin invers Laplace transformasyonunu hesaplayalım.

Çözüm

Dualite prensibinden

$$L^{-1}[\delta(s)] = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} \delta(s) e^{s t} ds = \frac{1}{2\pi j}$$

Örnek

$f(t) = 1$ işaretinin Laplace transformasyonunu hesaplayalım.

Çözüm

$$f(t) \Leftrightarrow F(s)$$

prensibinden yukarıda

$$L^{-1}[\delta(s)] = \frac{1}{2\pi j}$$

bulunmuştu, buradan

$$\delta(s) \Leftrightarrow \frac{1}{2\pi j}$$
$$1 \Leftrightarrow 2\pi j\delta(s)$$

Örnek

$f(t) = u(t)$ işaretinin Laplace transformasyonunu hesaplayalım.

Çözüm

$$F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-s t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} u(t) e^{-s t} dt = \int_0^{\infty} (1) e^{-s t} dt = \int_0^{\infty} e^{-s t} dt = -\frac{1}{s} e^{-s t} \Big|_0^{\infty}$$
$$= \frac{1}{s}, \quad \text{Re } s > 0$$

Örnek

$f(t) = tu(t)$ işaretinin Laplace transformasyonunu hesaplayalım.

Çözüm

$$F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-s t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} tu(t) e^{-s t} dt = \int_0^{\infty} t (1) e^{-s t} dt = \int_0^{\infty} t e^{-s t} dt = \frac{e^{-s t}}{s^2} (-st - 1) \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{s^2}$$

Örnek

$f(t) = t^2 u(t)$ işaretinin Laplace transformasyonunu hesaplayalım.

Çözüm

$$F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-s t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} t^2 u(t) e^{-s t} dt = \int_0^{\infty} t^2 (1) e^{-s t} dt = \int_0^{\infty} t^2 e^{-s t} dt$$
$$= \frac{e^{-s t}}{(-s)^3} (s^2 t^2 + 2st + 2) \Big|_0^{\infty} = \frac{2}{s^3}$$

Kural :

$$t^n u(t) = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

Örnek

$f(t) = e^{\lambda t} u(t)$ işaretinin Laplace transformasyonunu hesaplayalım.

Çözüm

$$\begin{aligned} F(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-s t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda t} u(t) e^{-s t} dt = \int_0^{\infty} e^{\lambda t} (1) e^{-s t} dt = \int_0^{\infty} e^{\lambda t} e^{-s t} dt \\ &= \int_0^{\infty} e^{(\lambda-s) t} dt = \frac{1}{\lambda-s} e^{(\lambda-s) t} \Big|_0^{\infty} \\ &= \frac{1}{s-\lambda}, \quad \text{Re}(s) > \lambda \end{aligned}$$

Örnek

$f(t) = t e^{\lambda t} u(t)$ işaretinin Laplace transformasyonunu hesaplayalım.

Çözüm

$$\begin{aligned} F(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-s t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} t e^{\lambda t} u(t) e^{-s t} dt = \int_0^{\infty} t e^{\lambda t} (1) e^{-s t} dt = \int_0^{\infty} t e^{\lambda t} e^{-s t} dt \\ &= \int_0^{\infty} t e^{(\lambda-s) t} dt = \frac{e^{(\lambda-s) t}}{(s-\lambda)^2} (\lambda t - s t - 1) \Big|_0^{\infty} \\ &= \frac{1}{(s-\lambda)^2} \end{aligned}$$

Örnek

$f(t) = t^n e^{\lambda t} u(t)$ işaretinin Laplace transformasyonunu hesaplayalım.

Çözüm

$$\begin{aligned} F(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-s t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} t^n e^{\lambda t} u(t) e^{-s t} dt = \int_0^{\infty} t^n e^{\lambda t} (1) e^{-s t} dt = \int_0^{\infty} t^n e^{\lambda t} e^{-s t} dt \\ &= \int_0^{\infty} t^n e^{(\lambda-s) t} dt = \frac{e^{(\lambda-s) t}}{(s-\lambda)^{n+1}} ((\lambda-s)t - 1)^n \Big|_0^{\infty} = \frac{e^{(\lambda-s) t}}{(s-\lambda)^{n+1}} (\lambda t - s t - 1)^n \Big|_0^{\infty} \\ &= \frac{n!}{(s-\lambda)^{n+1}} \end{aligned}$$

Örnek

$f(t) = \cos \omega_0 t u(t)$ işaretinin Laplace transformasyonunu hesaplayalım.

Çözüm

$$\begin{aligned} F(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-s t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \cos \omega_0 t u(t) e^{-s t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} [e^{j \omega_0 t} + e^{-j \omega_0 t}] u(t) e^{-s t} dt \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j \omega_0 t} u(t) e^{-s t} dt + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j \omega_0 t} u(t) e^{-s t} dt \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(s-j \omega_0) t} u(t) dt + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(s+j \omega_0) t} u(t) dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} e^{-(s-j \omega_0) t} (1) dt + \frac{1}{2} \int_0^{\infty} e^{-(s+j \omega_0) t} (1) dt \\ &= -\frac{1}{2} \left[\frac{1}{s-j \omega_0} e^{-(s-j \omega_0) t} \Big|_0^{\infty} \right] - \frac{1}{2} \left[\frac{1}{s+j \omega_0} e^{-(s+j \omega_0) t} \Big|_0^{\infty} \right] \\ &= -\frac{1}{2} \left[-\frac{1}{s-j \omega_0} \right] - \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{s+j \omega_0} \right] = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{s-j \omega_0} \right] + \frac{1}{2} \left[\frac{1}{s+j \omega_0} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{s-j \omega_0} + \frac{1}{s+j \omega_0} \right] = \frac{1}{2} \frac{2s}{s^2 + \omega_0^2} \\ &= \frac{s}{s^2 + \omega_0^2} \\ F(s) &= \frac{s}{s^2 + \omega_0^2}, \quad \text{Re } s > 0 \end{aligned}$$

Kural :

$$\cos bt u(t) = \frac{s}{s^2 + b^2}$$

Örnek

$f(t) = \sin \omega_0 t u(t)$ işaretinin Laplace transformasyonunu hesaplayalım.

Çözüm

$$\begin{aligned} F(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-s t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \sin \omega_0 t u(t) e^{-s t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2j} [e^{j \omega_0 t} - e^{-j \omega_0 t}] u(t) e^{-s t} dt \\ &= \frac{1}{2j} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j \omega_0 t} u(t) e^{-s t} dt - \frac{1}{2j} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j \omega_0 t} u(t) e^{-s t} dt \\ &= \frac{1}{2j} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(s-j \omega_0) t} u(t) dt - \frac{1}{2j} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(s+j \omega_0) t} u(t) dt \\ &= \frac{1}{2j} \int_0^{\infty} e^{-(s-j \omega_0) t} (1) dt - \frac{1}{2j} \int_0^{\infty} e^{-(s+j \omega_0) t} (1) dt \\ &= -\frac{1}{2j} \left[\frac{1}{s-j \omega_0} e^{-(s-j \omega_0) t} \right]_0^{\infty} + \frac{1}{2j} \left[\frac{1}{s+j \omega_0} e^{-(s+j \omega_0) t} \right]_0^{\infty} \\ &= -\frac{1}{2j} \left[-\frac{1}{s-j \omega_0} \right] + \frac{1}{2j} \left[-\frac{1}{s+j \omega_0} \right] = \frac{1}{2j} \left[\frac{1}{s-j \omega_0} \right] - \frac{1}{2j} \left[\frac{1}{s+j \omega_0} \right] \\ &= \frac{1}{2j} \left[\frac{1}{s-j \omega_0} - \frac{1}{s+j \omega_0} \right] = \frac{1}{2j} \frac{2j \omega_0}{s^2 + \omega_0^2} \\ &= \frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2} \end{aligned}$$

$$F(s) = \frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2}, \quad \text{Re } s > 0$$

Kural :

$$\sin bt u(t) = \frac{b}{s^2 + b^2}$$

Örnek

$f(t) = e^{-at} \cos \omega_0 t u(t)$ işaretinin Laplace transformasyonunu hesaplayalım.

Çözüm

$$\begin{aligned} F(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-s t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at} \cos \omega_0 t u(t) e^{-s t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} [e^{j \omega_0 t} + e^{-j \omega_0 t}] u(t) e^{-(s+a) t} dt \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j \omega_0 t} u(t) e^{-(s+a) t} dt + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j \omega_0 t} u(t) e^{-(s+a) t} dt \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(s+a-j \omega_0) t} u(t) dt + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(s+a+j \omega_0) t} u(t) dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} e^{-(s+a-j \omega_0) t} (1) dt + \frac{1}{2} \int_0^{\infty} e^{-(s+a+j \omega_0) t} (1) dt \\ &= -\frac{1}{2} \left[\frac{1}{(s+a-j \omega_0)} e^{-(s+a-j \omega_0) t} \Big|_0^{\infty} \right] - \frac{1}{2} \left[\frac{1}{(s+a+j \omega_0)} e^{-(s+a+j \omega_0) t} \Big|_0^{\infty} \right] \\ &= -\frac{1}{2} \left[-\frac{1}{(s+a-j \omega_0)} \right] - \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{(s+a+j \omega_0)} \right] = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{(s+a-j \omega_0)} \right] + \frac{1}{2} \left[\frac{1}{(s+a+j \omega_0)} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{(s+a-j \omega_0)} + \frac{1}{(s+a+j \omega_0)} \right] = \frac{1}{2} \frac{2(s+a)}{s^2 + \omega_0^2} \\ &= \frac{s+a}{s^2 + \omega_0^2} \end{aligned}$$

$$F(s) = \frac{s+a}{s^2 + \omega_0^2}$$

Örnek

$f(t) = e^{-at} \sin \omega_0 t u(t)$ işaretinin Laplace transformasyonunu hesaplayalım.

Çözüm

$$\begin{aligned}
 F(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-s t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at} \sin \omega_0 t u(t) e^{-s t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2j} [e^{j \omega_0 t} - e^{-j \omega_0 t}] u(t) e^{-(s+a) t} dt \\
 &= \frac{1}{2j} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j \omega_0 t} u(t) e^{-(s+a) t} dt - \frac{1}{2j} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j \omega_0 t} u(t) e^{-(s+a) t} dt \\
 &= \frac{1}{2j} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(s+a-j \omega_0) t} u(t) dt - \frac{1}{2j} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(s+a+j \omega_0) t} u(t) dt \\
 &= \frac{1}{2j} \int_0^{\infty} e^{-(s+a-j \omega_0) t} (1) dt - \frac{1}{2j} \int_0^{\infty} e^{-(s+a+j \omega_0) t} (1) dt \\
 &= -\frac{1}{2j} \left[\frac{1}{(s+a-j \omega_0)} e^{-(s+a-j \omega_0) t} \right]_0^{\infty} + \frac{1}{2j} \left[\frac{1}{(s+a+j \omega_0)} e^{-(s+a+j \omega_0) t} \right]_0^{\infty} \\
 &= -\frac{1}{2j} \left[-\frac{1}{(s+a-j \omega_0)} \right] + \frac{1}{2j} \left[-\frac{1}{(s+a+j \omega_0)} \right] = \frac{1}{2j} \left[\frac{1}{(s+a-j \omega_0)} \right] - \frac{1}{2j} \left[\frac{1}{(s+a+j \omega_0)} \right] \\
 &= \frac{1}{2j} \left[\frac{1}{(s+a-j \omega_0)} - \frac{1}{(s+a+j \omega_0)} \right] = \frac{1}{2j} \frac{2j \omega_0}{(s+a)^2 + \omega_0^2} \\
 &= \frac{\omega_0}{(s+a)^2 + \omega_0^2}
 \end{aligned}$$

$$F(s) = \frac{\omega_0}{(s+a)^2 + \omega_0^2}$$

Örnek

$f(t) = r e^{-at} \cos(bt + \theta) u(t)$ işaretinin Laplace transformasyonunu hesaplayalım.

Çözüm

$$1. F(s) = \frac{(r \cos \theta)s + (ar \cos \theta - br \sin \theta)}{s^2 + 2as + (a^2 + b^2)}$$

$$2. F(s) = \frac{0.5 r e^{j\theta}}{(s + a - jb)} + \frac{0.5 r e^{-j\theta}}{(s + a + jb)}$$

$$3. F(s) = \frac{As + B}{s^2 + 2as + c}$$

$$r = \sqrt{\frac{A^2 c + B^2 - 2ABa}{c - a^2}}, \quad \theta = \tan^{-1} \frac{Aa - B}{A\sqrt{c - a^2}}, \quad b = \sqrt{c - a^2}$$

Örnek

$F(s) = \frac{5s - 8}{s^2 - 3s - 10}$ işaretinin invers Laplace transformasyonunu hesaplayalım.

Çözüm

$$F(s) = \frac{5s - 8}{s^2 - 3s - 10} = \frac{5s - 8}{(s + 2)(s - 5)} = \frac{c_1}{(s + 2)} + \frac{c_2}{(s - 5)}$$

$$\begin{aligned} \frac{5s - 8}{(s + 2)(s - 5)} &= \frac{c_1}{(s + 2)} + \frac{c_2}{(s - 5)} = \frac{sc_1 - 5c_1}{(s + 2)(s - 5)} + \frac{sc_2 + 2c_2}{(s + 2)(s - 5)} \\ &= \frac{s(c_1 + c_2) - 5c_1 + 2c_2}{(s + 2)(s - 5)} \end{aligned}$$

$$c_1 + c_2 = 5$$

$$-5c_1 + 2c_2 = -8$$

$$c_1 = -\frac{7}{18}, \quad c_2 = \frac{97}{18}$$

$$F(s) = -\frac{7}{18} \frac{1}{s + 2} + \frac{97}{18} \frac{1}{s - 5}$$

Bulunan fonksiyonun invers Laplace transformasyonu alınır

$$L^{-1}[F(s)] = L^{-1}\left[\frac{-\frac{7}{18}}{s+2} + \frac{\frac{97}{18}}{s-5}\right] = \left(-\frac{7}{18}e^{-2t} + \frac{97}{18}e^{5t}\right)u(t)$$

$$f(t) = \left(-\frac{7}{18}e^{-2t} + \frac{97}{18}e^{5t}\right)u(t)$$

Örnek

$F(s) = \frac{3s+6}{s(s^2+5s+6)}$ işaretinin invers Laplace transformasyonu hesaplayalım.

Çözüm

$$F(s) = \frac{3s+6}{s(s^2+5s+6)} = \frac{3(s+2)}{s(s-2)(s-3)} = \frac{c_1}{s} + \frac{c_2}{(s-2)} + \frac{c_3}{(s-3)}$$

$$\frac{3s+6}{s(s^2+5s+6)} = \frac{3(s+2)}{s(s-2)(s-3)} = \frac{c_1}{s} + \frac{c_2}{(s-2)} + \frac{c_3}{(s-3)}$$

$$= \frac{c_1s^2 + 5c_1s + 6c_1}{s(s-2)(s-3)} + \frac{c_2s^2 - 3c_2s}{s(s-2)(s-3)} + \frac{c_3s^2 - 2c_3s}{s(s-2)(s-3)}$$

$$\frac{3s+6}{s(s^2+5s+6)} = \frac{(c_1+c_2+c_3)s^2 + (5c_1-3c_2-2c_3)s + 6c_1}{s(s-2)(s-3)}$$

$$c_1 + c_2 + c_3 = 0$$

$$5c_1 - 3c_2 - 2c_3 = 3$$

$$6c_1 = 6$$

$$c_1 = 1, \quad c_2 = 4, \quad c_3 = -5$$

$$F(s) = \frac{1}{s} + \frac{4}{(s-2)} - \frac{5}{(s-3)}$$

Bulunan fonksiyonun invers Laplace transformasyonu alınır

$$L^{-1}[F(s)] = L^{-1}\left[\frac{1}{s} + \frac{4}{s-2} - \frac{5}{s-3}\right] = (1 + 4e^{2t} - 5e^{3t})u(t)$$

$$f(t) = (1 + 4e^{2t} - 5e^{3t})u(t)$$

Örnek

$$F(s) = \frac{5\omega}{3s^2 + 12\omega^2} \text{ Fonksiyonunun invers Laplace transformasyonunu bulun}$$

Çözüm

$$f(t) \Leftrightarrow F(s)$$

$$L^{-1}[F(s)] = L^{-1}\left[\frac{5\omega}{3(s^2 + 4\omega^2)} = \frac{5}{3} \frac{\omega}{(s^2 + 4\omega^2)} = \frac{5}{3} \frac{\omega}{s^2 + (2\omega)^2}\right] = \frac{5}{3} \sin 2\omega t u(t)$$

$$f(t) = \frac{5}{3} \sin 2\omega t u(t)$$

Örnek

$$F(s) = \frac{2s + \omega}{4s^2 + 7\omega^2} \text{ Fonksiyonunun ters Laplace transformasyonunu bulun}$$

Çözüm

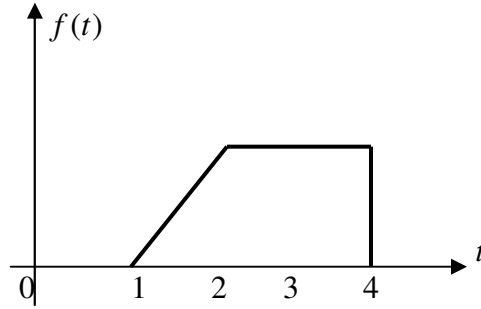
$$f(t) \Leftrightarrow F(s)$$

$$\begin{aligned} L^{-1}[F(s)] &= L^{-1}\left[\frac{2s + \omega}{4s^2 + 7\omega^2} = \frac{2s}{4s^2 + 7\omega^2} + \frac{\omega}{4s^2 + 7\omega^2} = \frac{2s}{4(s^2 + \frac{7}{4}\omega^2)} + \frac{\omega}{4(s^2 + \frac{7}{4}\omega^2)}\right] \\ &= L^{-1}\left[\frac{1}{2} \frac{s}{s^2 + \left(\frac{\sqrt{7}\omega}{2}\right)^2} + \frac{1}{2} \frac{\omega}{s^2 + \left(\frac{\sqrt{7}\omega}{2}\right)^2}\right] = \frac{1}{2} \cos \frac{\sqrt{7}\omega}{2} t u(t) + \frac{1}{2} \sin \frac{\sqrt{7}\omega}{2} t u(t) \\ &= \frac{1}{2} \left[\cos \frac{\sqrt{7}\omega}{2} t + \sin \frac{\sqrt{7}\omega}{2} t \right] u(t) \end{aligned}$$

$$f(t) = \frac{1}{2} \left[\cos \frac{\sqrt{7}\omega}{2} t + \sin \frac{\sqrt{7}\omega}{2} t \right] u(t)$$

Örnek

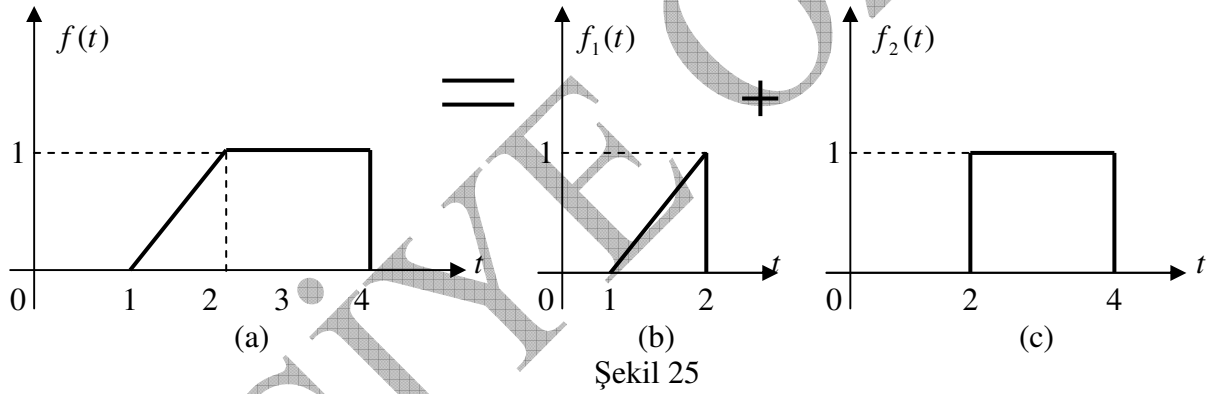
$f(t)$ işaretinin Laplace transformasyonunu bulun



Şekil 24

Çözüm

Problemin çözümü için verilen $f(t)$ fonksiyonu aşağıdaki gibi düzenlenir.



Görüldüğü gibi $f(t)$ işareti (b) deki üçgen ve (c) deki dörtgenin toplamından oluşmaktadır ($f(t) = f_1(t) + f_2(t)$). Eğer bu fonksiyonları $u(t)$ birim basamak türünden yazabilirsek, Laplace transformasyonları kolaylaşır. Önce üçgenin denklemini yazmaya çalışalım. Görüldüğü gibi üçgen aslında bir $x(t) = t$ rampa fonksiyonunun $t = 1$ noktasına ötelenmiş ($x(t-1) = t-1$) rampasıyla $u(t) - u(t-2)$ nin çarpımından oluşmaktadır.

$$f_1(t) = (t-1)[u(t) - u(t-2)]$$

Diğer yandan ikinci işaret olan $f_2(t)$ ise görüldüğü aslında $t = 2$ noktasına ötelenmiş $u(t-2) - u(t-4)$ dörtgeninden oluşmaktadır.

$$f_2(t) = u(t-2) - u(t-4)$$

Buna göre $f(t) = f_1(t) + f_2(t)$ toplamı yazılabilir.

$$f(t) = (t-1)[u(t) - u(t-2)] + u(t-2) - u(t-4)$$

$$f(t) = (t-1)u(t) - (t-1)u(t-2) + u(t-2) - u(t-4)$$

$$(t-1)u(t-2) = (t-2+1)u(t-2) = (t-2)u(t-2) + u(t-2)$$

$$\begin{aligned} f(t) &= (t-1)u(t) - (t-1)u(t-2) + u(t-2) - u(t-4) \\ &= (t-1)u(t) - [(t-2)u(t-2) + u(t-2)] + u(t-2) - u(t-4) \\ &= (t-1)u(t) - (t-2)u(t-2) - u(t-2) + u(t-2) - u(t-4) = (t-1)u(t) - (t-2)u(t-2) - u(t-4) \end{aligned}$$

$$f(t) = (t-1)u(t) - (t-2)u(t-2) - u(t-4)$$

Denklemdaki üç terimin ayrı olarak Laplace transformasyonları alınacaktır.

$$t u(t) \Leftrightarrow \frac{1}{s^2}$$

ise $(t-1)u(t)$ ifadesinin Laplace transformasyonu bir birimlik gecikmeyle, $x(t-t_0) \Leftrightarrow F(s)e^{-s t_0}$ kuralı gereği

$$(t-1)u(t) \Leftrightarrow \frac{1}{s^2} e^{-s}$$

olarak göz önüne alınacaktır. Benzer biçimde

$$(t-2)u(t-2) \Leftrightarrow \frac{1}{s^2} e^{-2s}, \quad u(t) \Leftrightarrow \frac{1}{s}, \quad u(t-4) \Leftrightarrow \frac{1}{s} e^{-4s}$$

toparlarsak,

$$L\{f(t)\} = L\{(t-1)u(t)\} - L\{(t-2)u(t-2)\} - L\{u(t-4)\}$$

$$F(s) = \frac{1}{s^2} e^{-s} - \frac{1}{s^2} e^{-2s} - \frac{1}{s} e^{-4s}$$

Laplace Transformasyonunun Özellikleri

1. Lineerlik

$$f_1(t) \Leftrightarrow F_1(s) \text{ ve } f_2(t) \Leftrightarrow F_2(s)$$

$$a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t) \Leftrightarrow a_1 F_1(s) + a_2 F_2(s)$$

2. Zaman öteleme : $f(t - t_0)$

Bu özellik zamandan bağımsız özelliğini vurgulayan, aynı zamanda distorsiyonsuz iletimde kullanılan önemli bir özelliktir. Aşağıda Laplace uzayında ispat edilecektir.

$$f(t) \Leftrightarrow F(s)$$

$$f(t) u(t) \Leftrightarrow F(s)$$

$$L\{f(t - t_0) u(t - t_0)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t - t_0) u(t - t_0) e^{-s t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t - t_0) u(t - t_0) e^{-s t} dt$$

$$t - t_0 = x$$

$$t = x + t_0$$

$$dt = dx$$

$$\begin{aligned} L\{f(t - t_0) u(t - t_0)\} &= \int_{t_0}^{\infty} f(x) u(x) e^{-s(x+t_0)} dx = \int_0^{\infty} f(x) e^{-s(x+t_0)} dx = e^{-s t_0} \int_0^{\infty} f(x) e^{-s x} dx \\ &= e^{-s t_0} F(s) \end{aligned}$$

$$f(t - t_0) \Leftrightarrow F(s) e^{-s t_0}$$

Bilindiği gibi bu özellik Fourier transformasyonunda, distorsiyonsuz iletimin esası olarak incelenmiştir.

3. Frekans öteleme : $F(s - s_0)$

Frekans domenindeki kaymanın, zaman domenindeki modülasyona karşılık geldiğini bildiğimiz, ve de aşına olduğumuz bir özelliktir. Aşağıda Laplace uzayında ispat edilecektir.

$$f(t) \Leftrightarrow F(s)$$

$$F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-s t} dt$$

$$\begin{aligned} L\{f(t) e^{s_0 t}\} &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{s_0 t} e^{-s t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-(s-s_0) t} dt \\ &= F(s - s_0) \end{aligned}$$

$$f(t) e^{-s_0 t} \Leftrightarrow F(s - s_0)$$

Bilindiği gibi bu özellik Fourier transformasyonunda, modülasyon kavramı kapsamında incelenmişti.

4. Ağırlıklandırma (scaling) : $f(at)$

Fourier transformasyonundan, zaman domenindeki sıkıştırmanın, frekans uzayındaki genişlemeye (sonsuz band) karşılık geldiği bir özelliktir.

$$f(t) \Leftrightarrow F(s)$$

$$F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-s t} dt$$

$$L\{f(at)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(at) e^{-s t} dt$$

$$at = x$$

$$t = x/a$$

$$dt = dx/a$$

$$L\{f(at)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(at) e^{-s t} dt = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-\frac{s x}{a}} dx = \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right)$$

$$f(at) \Leftrightarrow \frac{1}{|a|} F\left(\frac{s}{|a|}\right)$$

Bu özelliği Fourier transformasyonundan da bilmekteyiz. Zaman domeninde at olarak sıkıştırma (compressing), frekans domeninde genişlemeye (expanding) denktir. Ancak frekans domeninde aynı zamanda $1/a$ oranıyla değişen genlik azalmasında olduğunu görmekteyiz.

5. Convolution

$$f_1(t) \Leftrightarrow F_1(s) \text{ ve } f_2(t) \Leftrightarrow F_2(s)$$

$$f_1(t) * f_2(t) \Leftrightarrow F_1(s) F_2(s) \text{ (zaman convolution)}$$

$$f_1(t) f_2(t) \Leftrightarrow \frac{1}{2\pi j} [F_1(s) * F_2(s)] \text{ (frekans convolution)}$$

5. Türev

$$f(t) \Leftrightarrow F(s)$$

$$\frac{df}{dt} \Leftrightarrow s F(s) - f(0^-)$$

$$\frac{d^2 f}{dt^2} \Leftrightarrow s^2 F(s) - s f(0^-) - \dot{f}(0^-)$$

$$\frac{d^n f}{dt^n} \Leftrightarrow s^n F(s) - s^{n-1} f(0^-) - s^{n-2} \dot{f}(0^-) - \dots - f^{(n-1)}(0^-)$$

Örnek

Başlangıç koşulları sıfır olan $\frac{d^2 f}{dt^2} = \delta(t) - 3\delta(t-2) + 2\delta(t-3)$ diferansiyel denkleminin Laplace Fourier transformasyonunu bulun.

Çözüm

$$f(0^-) = \dot{f}(0^-) = 0$$

$$L\left(\frac{d^2 f}{dt^2}\right) = L(\delta(t) - 3\delta(t-2) + 2\delta(t-3))$$

$$L(\delta(t)) \Leftrightarrow 1$$

$$L\left(\frac{d^2 f}{dt^2}\right) = (1 - 3e^{-2t} + 2e^{-2t})$$

$$\frac{d^2 f}{dt^2} \Leftrightarrow s^2 F(s) - s f(0^-) - \dot{f}(0^-) = (1 - 3e^{-2t} + 2e^{-2t})$$

$$\frac{d^2 f}{dt^2} \Leftrightarrow F(s) = \frac{1}{s^2} (1 - 3e^{-2t} + 2e^{-2t})$$

7. Başlangıç Koşulu Teoremi (initial value theorem)

Bazı uygulamalarda $f(t)$ fonksiyonunun başlangıç değerlerini gösteren $t \rightarrow 0$ için $f(0)$ değerlerini bilmek gerekebilir.

$$f(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} s F(s)$$

Bu bağıntı ancak ve ancak $f(t)$ ve onun diferansiyeli olan df/dt nin Laplace transformasyonu alınabilir durumdaysa söz konusudur. Görüldüğü gibi $f(t)$ nin başlangıç koşulları için $s \rightarrow \infty$ gibi yüksek frekanslar söz konusudur. Bunun anlamını sistemin başlangıçta yüksek frekanslarla aktif olduğunu, belirli süre boyunca olan (yüksek) salınımlar sonucunda rejim değerine ulaşmaktadır (geçici cevap, transient response).

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} s F(s)$$

Teorem, $f(t)$ nin küçük zaman dilimi için (sıfır gibi, 0) davranışını bulmaktadır ($f(0)$). Bu haliyle başlangıç koşullarını (geçici koşullar, transient response) ilgilendiren küçük zaman dilimlerindeki davranışı göstermektedir. Küçük zaman, reel “s” ekseninden uzaktaki büyük frekanslarla söz konusu olmaktadır.

$$f(0) = \lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} s F(s)$$

Örnek

$f(t) = 5e^{-2t}$ işaretinin başlangıç değerini bulun.

Çözüm

$$f(0) = 5e^{-2 \times 0} = 5$$

7. Final Koşulu Teoremi (final value theorem)

Bazı uygulamalarda $f(t)$ fonksiyonunun son (final) değerlerini gösteren $t \rightarrow \infty$ için $f(\infty)$ değerlerini bilmek gerekebilir.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s F(s)$$

Başlangıç koşullarında olduğu gibi bu bağıntı da ancak ve ancak $f(t)$ ve onun diferansiyeli olan df/dt nin Laplace transformasyonu alınabilir durumdaysa söz konusudur.

Bu teorem verilen haliyle, bir sistemin (veya devrenin) steady-state cevabını bulmak için önemlidir. Dolayısıyla final (son) değer teoremi bu şekliyle yalnızca stabil sistemlere uygulanabilir.

Görüldüğü gibi $f(t)$ nin final koşulları için $s \rightarrow 0$ gibi daha ziyade düşük frekanslar söz konusudur. Bunun anlamı, sistemin başlangıçtan itibaren yüksek frekanslarla aktif olduğu geçici dönemden (transient response) sonra kararlı hal olan rejim (steady-state response) durumuna düşük/stabil salınımlarla eriştiği görülmektedir.

Teorem, $f(t)$ nin büyük (uzun) zaman dilimi için (sonsuz, ∞) davranışını bulmaktadır ($f(\infty)$). Bu haliyle sistemin rejimde olduğu daha uzun zaman dilimlerindeki davranışını göstermektedir. Uzun zaman dilimi, reel “s” eksenine yakın düşük frekanslarla söz konusu olmaktadır.

$$f(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s F(s)$$

Örnek

$F(s) = \frac{2s+5}{s^2+3s+1}$ işaretini son değer teoremine göre hesaplayın

Çözüm

$$f(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) \Leftrightarrow \lim_{s \rightarrow 0} s F(s) = s \times \frac{2s+5}{s^2+3s+1} = \frac{s(2s+5)}{s(s+3+\frac{1}{s})} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{(2 \times 0 + 5)}{(0+3+\frac{1}{0})} = \frac{5}{\infty} = 0$$

Örnek

Laplace transformasyonu olarak verilen $Y(s) = \frac{10(2s+3)}{s(s^2+2s+5)}$ fonksiyonuna ait $y(t)$ işaretinin başlangıç ve final değerlerini hesaplayın.

Çözüm

Başlangıç değeri için $f(0) = \lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} s F(s)$

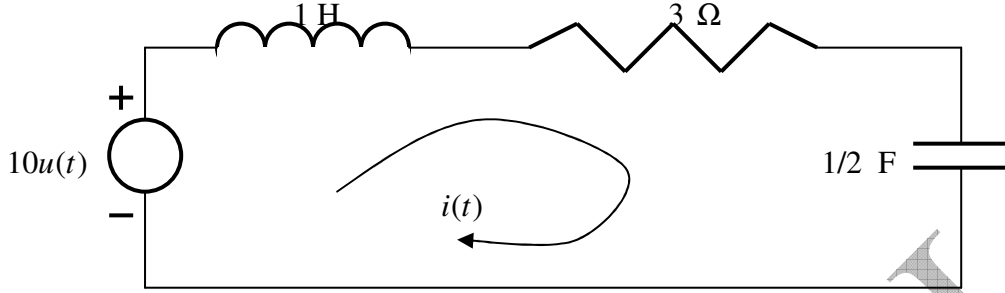
$$f(0) = \lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} s F(s) = s \times \frac{10(2s+3)}{s(s^2+2s+5)} = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{s^2(\frac{20}{s} + \frac{30}{s^2})}{s^2(1 + \frac{2}{s} + \frac{5}{s^2})} = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{(\frac{20}{0} + \frac{30}{0})}{(1 + \frac{2}{0} + \frac{5}{0})} = 0$$

Final değeri içinse

$$f(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s F(s) = s \times \frac{10(2s+3)}{s(s^2+2s+5)} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{10(2s+3)}{(s^2+2s+5)} = 6$$

Örnek

Başlangıç koşulları sıfır kabul edilen aşağıda verilen RLC devresinin akımını bulun



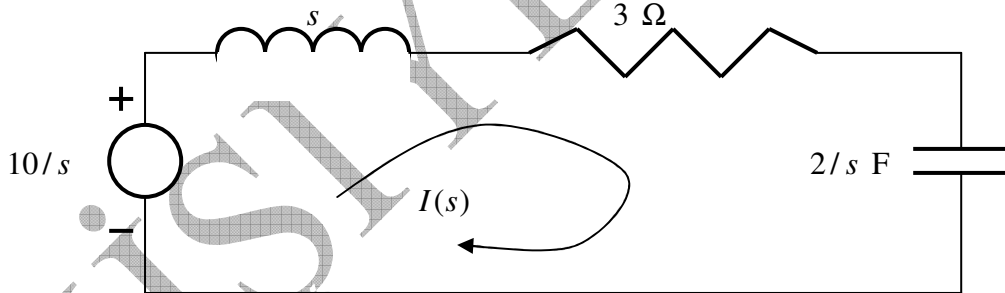
Şekil 26 RLC Devresi

Çözüm

Devrenin değişik çözüm yolları olabileceği gibi, burada Laplace tekniğiyle çözüm aranacaktır. Bunun için öncelikle

$$u(t) = \frac{1}{s} \quad , \quad \frac{d}{dt} = s \quad , \quad \int_{-\infty}^t = \frac{1}{s}$$

Bilgilerini göz önüne alarak t domenindeki devrenin laplace eşdeğerini oluşturalım. İlgili devre aşağıda verilmiştir.



Şekil 27 RLC Devresi s domeni gösterimi

oluşan seri devrenin gerilim denklemini yazmaya çalışalım.

$$v(t) = L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t) + \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i(\tau) d\tau$$

$$10u(t) = L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t) + \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i(\tau) d\tau$$

$$u(t) = \frac{1}{s} \quad , \quad \frac{d}{dt} = s \quad , \quad \int_{-\infty}^t = \frac{1}{s}$$

$$10\frac{1}{s} = sI(s) + 3I(s) + \frac{2I(s)}{s}$$

$$10\frac{1}{s} = (s + 3 + \frac{2}{s})I(s)$$

$$I(s) = \frac{\frac{10}{s}}{s^2 + 3s + 2} = \frac{10}{s^2 + 3s + 2} = \frac{10}{(s+1)(s+2)}$$

$$I(s) = \frac{\frac{10}{s}}{(s+1)(s+2)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+2} = \frac{sA + 2A + sB + B}{(s+1)(s+2)} = \frac{(A+B)s + 2A+B}{(s+1)(s+2)}$$

$$A + B = 0 \rightarrow A = -B$$

$$2A + B = 10 \rightarrow 2(-B) + B = 10$$

$$A = 10$$

$$B = -10$$

$$I(s) = \frac{10}{(s+1)(s+2)} = \frac{10}{s+1} - \frac{10}{s+2}$$

Buradan ters Laplace alınırsa,

$$\begin{aligned} L\{I(s)\} = i(t) &= L\left\{\frac{10}{s+1} - \frac{10}{s+2}\right\} = L\left\{\frac{10}{s+1}\right\} - L\left\{\frac{10}{s+2}\right\} \\ &= 10e^{-t}u(t) - 10e^{-2t}u(t) \end{aligned}$$

$$i(t) = 10(e^{-t} - e^{-2t})u(t)$$

LTIC SİSTEM CEVAPLARININ INTEGRO DİFERANSİYEL DENKLEMLERLE ÇÖZÜMÜ

İntegral ve diferansiyel denklemlerden oluşan integro diferansiyel denklemlerin Laplace yaklaşımlarıyla çözümü, Laplace alanındaki en bilinen yöntemlerdendir. Bu şekliyle daha yaygın olsada, şu ana kadar biz daha çok Laplace transformasyonunun sistem ve işaret analiz açısından özelliklerini analiz etmeye çalıştık. Şimdi Laplace transformasyonunun bu klasik özelliğini basit örneklerle ele almaya çalışacağız. Bunu yaparken yine çok klasik diferansiyel denklemlerle olan yaklaşımı değil de, aynı zamanda sistem özelliğini de içerecek şekilde almaya gayret edeceğiz. Bu açıdan sürekli-zaman zamandan bağımsız (LTIC) sistem örneklerini ele alarak, bu tür sistemlerin cevaplarını Laplace yaklaşımıyla analiz etmeye çalışacağız. Bu anlamda bir LTIC sistemin parametrelerini (giriş, çıkış, impuls cevap) $\frac{d^k y(t)}{dt^k}$

gibi diferansiyel denklemlerle yazmak ve göstermek mümkündür. $\frac{d^k y(t)}{dt^k}$ formatında

gösterilen sistem denklemlerin, $\frac{d^k y(t)}{dt^k} \Leftrightarrow s^k Y(s)$ biçimindeki Laplace dönüşümleriyle cebirsel forma dönüştürülerek çözümleri mümkündür. Bu dönüşümün ardından Laplace değişkeni $Y(s)$ üzerine çözümler yapıldıktan sonra, final aşamasında işlem invers Laplace transformasyonu ile tekrar $y(t)$ olarak elde edilir. Sonuçta sabit katsayılı diferansiyel denklemler ifade edilebilen LTIC sistemlerin cevabının Laplace transformasyonu ile çözümü mümkün olabilmektedir. Buna uygun sistem çözümleri iki aşamada gerçekleştirilecektir.

1. Linear Zamanla Değişmeyen Sürekli Sistemlerin (LTIC) Cevaplarının Transfer Fonksiyonuyla Çözümü

2. LTIC Sistemlerin Cevaplarının Sıfır-Giriş ve Sıfır-Durum Cevaplarıyla Çözümü

1. Lineer Zamanla Değişmeyen Sürekli Sistemlerin (LTIC) Cevaplarının Transfer Fonksiyonuyla Çözümü

Linear time invariant continuous (LTIC) sistemlerin

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(s) e^{st} ds \equiv \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{F(n\Delta s)\Delta s}{2\pi j} \right] e^{(n\Delta s)t}$$

Buradan Laplace transformasyonu, $f(t)$ nin $e^{(n\Delta s)t}$ tipteki eksponensiyellerin toplamından oluştuğunu gösterir. Daha önceden bir LTIC sistemin e^{st} girişine karşı cevabının $h(t)$ olduğunu biliyoruz ;

$$\begin{aligned} y(t) &= e^{-st} * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{s(t-\tau)} d\tau \\ &= e^{st} \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-s\tau} d\tau \end{aligned}$$

$$H(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-s\tau} d\tau$$

Elde edilen $H(s)$ fonksiyonu transfer fonksiyonu olarak anılmaktadır. İşlemsel açıdan gösterdiği ifade de bir tür kompleks öz değer rolü oynamaktadır. Bu yüzden λ özdeğeri ve doğal olarak $e^{s t}$ de öz vektörü göstermek üzere

$$\lambda = H(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-s\tau} d\tau$$

biçiminde gösterilebileceğinin önceki bölümlerden biliyoruz. Sistem transfer fonksiyonunun ardından sistem toplam cevabının ise

$$y(t) = H(s) e^{s t}$$

olduğunu biliyorduk. Denklemden $s = \sigma + j\omega$ olduğundan özdeğer rolündeki transfer fonksiyonunun kompleks olduğunu görmekteyiz. Burada transfer fonksiyonu olan $H(s)$ sistem çıkışının, sistem girişine oranı olarak sistem davranışının analizinde oldukça önemli bir işleve sahiptir. Bu sonuca Laplace transformasyonu ile ulaşmamız mümkündür. Sistem girişi olarak $f(t)$ nin yukarıdaki verilen toplama ifadesine göre, girişinin $e^{(n\Delta s)t}$ olduğunu, bu girişin sistem impuls cevabı olan $H(s)$ fonksiyonunun da $H(n\Delta s)$ gibi düşünersek, sistemin bu durumda $e^{(n\Delta s)t}$ girişine cevabı $H(n\Delta s) e^{(n\Delta s)t}$ olacaktır. Bu durumda sistem çıkışı $y(t)$,

$$y(t) = f(t) * h(t) = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{F(n\Delta s) H(n\Delta s) \Delta s}{2\pi j} \right] e^{(n\Delta s)t}$$

$$y(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c'-j\infty}^{c'+j\infty} F(s) H(s) e^{s t} ds$$

$y(t) \Leftrightarrow Y(s)$ ise sistem cevabı,

$$Y(s) = F(s) H(s)$$

olarak bulunur. Buradan

$$H(s) = \frac{Y(s)}{F(s)}$$

olarak bulunan **sistem transfer fonksiyonunun, başlangıç koşullarının sıfır alındığı düşünülmektedir.**

Örnek

Başlangıç koşulları sıfır düşünülen kararlı bir LTIC sistem

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 5 \frac{dy(t)}{dt} + 6y(t) = \frac{dx(t)}{dt} + x(t)$$

diferansiyel denklemi ile verilmiştir. Denklemden $x(t)$ sistem girişini, $y(t)$ çıkışını gösterdiğine göre sistem impuls cevabını bulun.

Çözüm

Çözüm yukarıdakine benzer yapılacaktır. Buna göre

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} = s^2 Y(s), \quad \frac{dy(t)}{dt} = s Y(s), \quad y(t) = Y(s) \quad \text{ve} \quad \frac{dx(t)}{dt} = s X(s), \quad x(t) = X(s)$$

alınırsa diferansiyel denklemin kompleks frekans s domenindeki karşılığı

$$s^2 Y(s) + 5s Y(s) + 6Y(s) = sX(s) + X(s)$$

$$[s^2 + 5s + 6]Y(s) = [s + 1]X(s)$$

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{s + 1}{s^2 + 5s + 6}$$

$$H(s) = \frac{s + 1}{s^2 + 5s + 6}$$

$$H(s) = \frac{s + 1}{(s + 2)(s + 3)}$$

Sistemin kararlı oluşu köklerin -2 ve -3 olarak sol yarı düzlemde oluşundan bellidir. Elde edilen kompleks frekansa bağlı transfer fonksiyonunun zamana bağlı çözümünü (ters Laplace transformasyonu), basit kesirlere ayırma yöntemi ile bulabiliriz.

$$H(s) = \frac{s + 1}{(s + 2)(s + 3)} = \frac{A}{s + 2} + \frac{B}{s + 3}$$

$$\frac{s + 1}{(s + 2)(s + 3)} = \frac{s(A + B) + 3A + 2B}{(s + 2)(s + 3)}$$

$$A + B = 1$$

$$3A + 2B = 1$$

$$A = -1$$
$$B = 2$$

Buna göre transfer fonksiyonu aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$H(s) = -\frac{1}{s+2} + \frac{2}{s+3}$$

buradan zamana bağlı impuls cevabını bulmak istiyorsak (bu ters Laplace transformasyonu demektir), daha önce bulduğumuz

$$L\{e^{at}u(t)\} = \frac{1}{s-a}$$

veya

$$e^{at}u(t) \Leftrightarrow \frac{1}{s-a}$$

bağıntılarını hatırlarsak, aşağıdaki düzenlemeyle oluşan

$$H(s) = \left[-\frac{1}{s+2} + \frac{2}{s+3} \right]$$

ifadesinin ters Laplace transformasyonu alındığında aşağıdaki

$$L^{-1}\{H(s)\} = -L^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\} + 2L^{-1}\left\{\frac{1}{s+3}\right\}$$

$$L^{-1}\{H(s)\} = h(t)$$

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\} = e^{-2t}u(t)$$

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{s+3}\right\} = e^{-3t}u(t)$$

yazımların ardından nihai çözümü olarak sistem impuls cevabı

$$h(t) = -e^{-2t}u(t) + 2e^{-3t}u(t)$$

$$h(t) = (-e^{-2t} + 2e^{-3t})u(t)$$

olarak bulunur.

Örnek

Girişi $f(t) = 2e^{-4t}u(t)$ olan ve

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + 8\frac{dy}{dt} + 15y(t) = \frac{df}{dt} + 2f(t)$$

denklemlle verilen LTIC sistemin $y(t)$ cevabını hesaplayalım.

Çözüm

Çözüm transfer fonksiyonu yaklaşımından yapılacaktır. Sistem denklemleri aşağıdaki gibi yazılır.

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} = s^2 Y(s), \quad \frac{dy(t)}{dt} = s Y(s), \quad y(t) = Y(s) \quad \text{ve} \quad \frac{dx(t)}{dt} = s X(s), \quad x(t) = X(s)$$

$$s^2 Y(s) + 8s Y(s) + 15Y(s) = sX(s) + 2X(s)$$

$$[s^2 + 8s + 15]Y(s) = [s + 2]X(s)$$

buradan transfer fonksiyonu

$$H(s) = \frac{s + 2}{s^2 + 8s + 15}$$

giriş fonksiyonunun Laplace dönüşümü ise,

$$F(s) = L[2e^{-4t}u(t)] = \frac{2}{s + 4}$$

$$\begin{aligned} Y(s) = H(s)F(s) &= \frac{2(s + 2)}{(s + 4)(s^2 + 8s + 15)} = \frac{2(s + 2)}{(s + 4)(s + 5)(s + 3)} = \frac{c_1}{s + 4} + \frac{c_2}{s + 5} + \frac{c_3}{s + 3} \\ &= \frac{(c_1 + c_2 + c_3)s^2 + (8c_1 + 7c_2 + 9c_3)s + 15c_1 + 12c_2 + 20c_3}{(s + 4)(s - 6)(s + 2)} \end{aligned}$$

$$c_1 + c_2 + c_3 = 0$$

$$8c_1 + 7c_2 + 9c_3 = 2$$

$$15c_1 + 12c_2 + 20c_3 = 4$$

$$c_1 = 4, \quad c_2 = -3, \quad c_3 = -1$$

buradan $Y(s)$ sistem cevabı

$$Y(s) = \frac{4}{s + 4} - \frac{3}{s + 5} - \frac{1}{s + 3}$$

bulunan $Y(s)$ fonksiyonun invers Laplace transformasyonu alınır

$$L^{-1}[Y(s)] = L^{-1}\left(\frac{4}{s+4} - \frac{3}{s+5} - \frac{1}{s+3}\right) = (4e^{-4t} - 3e^{-5t} - e^{-3t})u(t)$$

$$y(t) = (4e^{-4t} - 3e^{-5t} - e^{-3t})u(t)$$

olarak bulunur.

2. LTIC Sistemlerin Cevaplarının Sıfır-Giriş ve Sıfır-Durum Cevaplarıyla Çözümü

Bir sistemin toplam çıkışının, “sıfır-giriş cevabı “zero-input response” ve “sıfır-durum cevabı (zero-state response)” olarak iki parçanın verecekleri cevapların toplamından oluştuğunu biliyoruz. Sıfır-giriş cevabının sistem başlangıç koşullarını dikkate alan ve sistem girişinin olmadığı $[f(t) = 0]$ duruma göre düzenlendiğini, sistem-durum cevabının ise, bunun tam tersine, başlangıç koşullarının olmadığı, sistem çıkışının sistem girişiyle oluştuğu kabulü üzerine kurulduğunu da biliyoruz. Eğer sistem sıfır-giriş cevabı $y_{zi}(t)$ ve sistem sıfır-durum cevabı $y_{zs}(t)$ ise sistem toplam çıkışı $y(t)$ bu ikisinin toplamından oluşacaktır;

$$y(t) = y_{zi}(t) + y_{zs}(t)$$

eğer giriş $f(t)$ ve başlangıç koşulları göz önüne alındığında denklem aşağıdaki gibi değişir;

$$y(t) = \underbrace{y_{zi}(t)}_{f(t)=0, \text{ başlangıç koşulları}} + \underbrace{y_{zs}(t)}_{\text{başlangıç koşulları, } f(t) \neq 0}$$

Buna dair aşağıdaki örneği göz önüne alalım.

Örnek

Bir sistemin ikinci dereceden diferansiyel denklemle gösterimi

$$(D^2 + 4D + 3)y(t) = (D + 4)f(t)$$

şeklindedir. $f(t)$ sistem girişini ve $y(t)$ sistem çıkışını göstermektedir. Sistem girişi $f(t) = e^{-2t}u(t)$ ve başlangıç koşulları $y(0^-) = -2$ ve $\dot{y}(0^-) = 3$ ise sistem çıkışı $y(t)$ yi hesaplayalım.

Çözüm

Verilen sistemin diferansiyel denklemi aşağıdaki gibi düzenlenir.

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + 4 \frac{dy}{dt} + 3y(t) = \frac{df}{dt} + 4f(t)$$

$$y(t) \Leftrightarrow Y(s)$$

özelliğinden

$$\frac{dy}{dt} \Leftrightarrow sY(s) - y(0^-) = sY(s) - (-2) = sY(s) + 2$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} \Leftrightarrow s^2Y(s) - sy(0^-) - \dot{y}(0^-) = s^2Y(s) - (-2)s - 3 = s^2Y(s) + 2s - 3$$

$$f(t) = e^{-2t}u(t)$$

$$F(s) = \frac{1}{s+2}$$

$$\frac{df}{dt} \Leftrightarrow sF(s) - f(0^-) = \frac{s}{s+2} - 0 = \frac{s}{s+2}$$

$$\frac{df}{dt} + 3f(t) \Leftrightarrow sF(s) - f(0^-) + 4F(s) = s \frac{1}{s+2} + 4 \frac{1}{s+2} = \frac{s+4}{s+2}$$

Buna göre sistem diferansiyel denklemi

$$[s^2Y(s) + 2s - 3] + 4[sY(s) + 2] + 3Y(s) = \frac{s}{s+2} + 4 \frac{1}{s+2}$$

$$s^2Y(s) + 2s - 3 + 4sY(s) + 8 + 3Y(s) = \frac{s+4}{s+2}$$

$$(s^2 + 4s + 3)Y(s) + 2s + 5 = \frac{s+4}{s+2}$$

Dikkat edilirse çıkışın olduğu sol tarafta $Y(s)$ ortak parantezin dışında kalan $2s+5$ terimi, başlangıç koşullarından oluştuğu için, sistemin başlangıç koşullarına göre olan sistem cevabı, yani “sıfır giriş cevabı” olarak değerlendirilmektedir. Bununla beraber eşitliğin sağ tarafında yer alan terimler sistemin giriş yapıldığı an ile ilgili olduğundan, bu anlamda “sıfır durum cevabı” olarak kabul edilmektedir.

$$(s^2 + 4s + 3)Y(s) = \underbrace{-2s-5}_{\text{başlangic kosullari}} + \underbrace{\frac{s+4}{s+2}}_{\text{giris terimleri}}$$

$$Y(s) = \underbrace{\frac{-2s-5}{s^2+4s+3}}_{\text{sifir giris cevabi}} + \underbrace{\frac{s+4}{(s+2)(s^2+4s+3)}}_{\text{sifir durum cevabi}}$$

$$Y(s) = \underbrace{\frac{-2s-5}{(s+1)(s+3)}}_{\text{sifir giris cevabi}} + \underbrace{\frac{s+4}{(s+1)(s+2)(s+3)}}_{\text{sifir durum cevabi}}$$

$$Y(s) = Y_{zi}(s) + Y_{zs}(s)$$

$$Y_{zi}(s) = \frac{-2s-5}{(s+1)(s+3)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+3} = \frac{(A+B)s+3A+B}{s+1}$$

$$\begin{aligned} A+B &= -2 \\ 3A+B &= -5 \end{aligned}$$

$$A = -\frac{3}{2}, \quad B = -\frac{1}{2}$$

$$Y_{zi}(s) = -\frac{3}{2} \frac{1}{s+1} - \frac{1}{2} \frac{1}{s+3}$$

$$\begin{aligned} Y_{zs}(s) &= \frac{s+4}{(s+1)(s+2)(s+3)} = \frac{C}{s+1} + \frac{D}{s+2} + \frac{E}{s+3} = \frac{C(s^2+5s+6) + D(s^2+4s+3) + E(s^2+3s+2)}{(s+1)(s+2)(s+3)} \\ &= \frac{(C+D+E)s^2 + (5C+4D+3E)s + 6C+3D+2E}{(s+1)(s+2)(s+3)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C+D+E &= 0 \\ 5C+4D+3E &= 1 \\ 6C+3D+2E &= 4 \end{aligned}$$

$$C = \frac{3}{2}, \quad D = -2, \quad E = \frac{1}{2}$$

$$Y_{zs}(s) = \frac{3}{2} \frac{1}{s+1} - 2 \frac{1}{s+2} + \frac{1}{2} \frac{1}{s+3}$$

buradan $Y(s)$ sistem cevabı

$$Y(s) = Y_{zi}(s) + Y_{zs}(s)$$

$$Y(s) = \left[-\frac{3}{2} \frac{1}{s+1} - \frac{1}{2} \frac{1}{s+3} \right] + \left[\frac{3}{2} \frac{1}{s+1} - 2 \frac{1}{s+2} + \frac{1}{2} \frac{1}{s+3} \right]$$

Bunun invers Laplace transformasyonu alınırsa sistem toplam cevabı “ sıfır-giriş cevabı ve sıfır-durum cevabı” toplamlarından aşağıdaki gibi neticelenir.

$$L^{-1}[Y(s)] = L^{-1} \left[-\frac{3}{2} \frac{1}{s+1} - \frac{1}{2} \frac{1}{s+3} \right] + L^{-1} \left[\frac{3}{2} \frac{1}{s+1} - 2 \frac{1}{s+2} + \frac{1}{2} \frac{1}{s+3} \right]$$

$$y(t) = \underbrace{\left(-\frac{3}{2} e^{-t} - \frac{1}{2} e^{-3t} \right) u(t)}_{\text{sıfır giriş cevabı}} + \underbrace{\left(\frac{3}{2} e^{-t} - 2e^{-2t} + \frac{1}{2} e^{-3t} \right) u(t)}_{\text{sıfır durum cevabı}}$$

Laplace Transformasyonunda Sıfırlar ve Kutuplar (poles – zeros)

Bir sistemin girişi $f(t)$ ve çıkışı $y(t)$ olmak üzere LTI bir sistemin diferansiyel denklemlerle gösteriminin aşağıdaki gibi olduğunu biliyoruz.

$$\frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + a_{n-2} \frac{d^{n-2} y}{dt^{n-2}} + \dots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 = b_m \frac{d^m f}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} f}{dt^{m-1}} + b_{m-2} \frac{d^{m-2} f}{dt^{m-2}} + \dots + b_1 \frac{d^m f}{dt^m} + b_0$$

Eğer bu sistemin giriş ve çıkış başlangıç koşullarını sıfır aldığımızı düşünürsek,

$$f(0^-) = \dot{f}(0^-) = \ddot{f}(0^-) = \dots = f^{(n-1)}(0^-) = 0$$

$$y(0^-) = \dot{y}(0^-) = \ddot{y}(0^-) = \dots = y^{(n-1)}(0^-) = 0$$

sistemin transfer fonksiyonunu elde etmek Laplace yaklaşımı kullanılarak aşağıdaki adımlar gerçekleştirir.

$$y(t) \Leftrightarrow Y(s) \text{ ve } f(t) \Leftrightarrow F(s)$$

$$\frac{d^r}{dt^r} y(t) \Leftrightarrow s^r Y(s)$$

$$\frac{d^k}{dt^k} f(t) \Leftrightarrow s^k F(s)$$

Bunlar göz önüne alınarak başlangıçtaki sistem denklemi

$$(s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0)Y(s) = (b_ms^m + b_{m-1}s^{m-1} + \dots + b_1s + b_0)F(s)$$

$$Y(s) = \frac{b_ms^m + b_{m-1}s^{m-1} + \dots + b_1s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0} F(s)$$

$$Y(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} F(s)$$

Eğer sistem transfer fonksiyonu olarak $H(s)$

$$H(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}$$

olarak tanımlanırsa, sistem çıkış fonksiyonu $Y(s)$

$$Y(s) = H(s)F(s)$$

olarak elde edilir. Buradan sistem transfer fonksiyonu

$$H(s) = \frac{Y(s)}{F(s)} = \frac{L[\text{sifir - durum cevabi}]}{L[\text{giris}]}$$

$$H(s) = \frac{Y(s)}{F(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} = \frac{P(s)}{Q(s)}$$

$$H(s) = b_m \frac{(s - z_1)(s - z_2) \dots (s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2) \dots (s - p_n)}$$

biçimlerinden biri olarak elde edilir. Son denklemden görmekteyiz ki, sistemin p_1, p_2, \dots, p_m kutupları sistemi sonsuza z_1, z_2, \dots, z_m sıfırları ise, sistemi sıfıra götürme özelliğindedir. Bunun dışında sistemin “kutupları” sistemin kararlılığı üzerine etkiliyken, “sıfırları” kararlılık üzerine hiç bir etkisi yoktur. Sistemin “sıfırları” geçici rejim cevabını (transient response) etkilemektedir. Bunların ötesinde s düzlemi için $s = \sigma + j\omega$ kompleks frekans düzlemini göz önünde bulundurmanız gerekmektedir. Bu s değişkeni transfer fonksiyonun paydasında bulunuyorsa “kutup”, payında bulunuyorsa “sıfır” olarak anılmaktadır. Sistem analizlerinde kutupların önemi daha fazla olduğundan öncelikle kutupların genel özelliklerini hatırlamaya çalışalım. Bunun için bir sistem transfer fonksiyonunda payda bölümü sistem karakteristik denklemi olarak anılır. Bizim kutup diye incelediğimiz aslında bu anlamda karakteristik denklemin kökleridir. Öncelikle $s = \sigma + j\omega$ ifadesinden görülebileceği gibi sistem kutup veya sıfırları kompleks yapıda olmakla beraber aynı zamanda yalnızca reel veya imajiner de olabileceklerini düşünerek buradan şimdilik kutupların başlıca özellikleri aşağıya çıkarılmıştır.

- Eğer kutupların **tümünün** reel kısmı negatif ise ($\sigma < 0$), sistem tam anlamıyla kararlıdır (sol yarı düzlem).
- Eğer kutuplardan **yalnızca birinin bile** reel kısmı pozitif ($\sigma > 0$) ise, sistem tam anlamıyla kararsızdır (sağ yarı düzlem).
- Eğer kutuplardan **yalnızca birinin bile** (daha fazlada olabilir) reel kısmı sıfır ($\sigma = 0$) ise, sistem marjinal olarak kararlıdır ($\text{Im}(j\omega)$, imajiner eksen).
- İmajiner kısmı sıfır ($j\omega = 0$) olan kutupların osilasyon özelliği yoktur.
- İmajiner kısmı sıfırdan farklı ($j\omega \neq 0$) olan kutupların osilasyon özelliği vardır.

Sistem transfer fonksiyonunun derecesini eğer payda bölümündeki kutuplar belirliyorsa, yüksek dereceli sistemin çok sayıda kutbu olduğu düşünülebilir. Ya da bunun terside doğrudur ;. eğer bir sistemin çok kutbu varsa, transfer fonksiyonunun yüksek dereceli olduğu düşünülür. Transfer fonksiyonu diferansiyel denklemlerden elde edildiği için kutup sayısının fazla olması dolayısıyla yüksek dereceli diferansiyel denklemleri çağrıştıracığından, sonuçta bu tür diferansiyel denklemlerin ve onların temsil ettikleri sistemlerin analiz ve çözümlerinin zor vede karmaşık olacağı düşünülmelidir. Bir başka özellik olarak kompleks frekans düzleminin sol yarı düzleminde olan veya sağ tarafına uzakta olan kutupların, sistem cevabını (olumlu) domine ettikleri gözlemlenmektedir. Bir system için çok önemli olan kutup ve sıfırlar ve bunların pozisyonlarına farklı bir açıdan yaklaşmak üzere system homojen cevabını göz önüne alalım.

$$y_h(t) = \sum_{i=1}^n C_i e^{\lambda_i t} = \sum_{i=1}^n C_i e^{p_i t}$$

λ_i , sistem karektersitik denklemin kökleri (özdeğerleri) olup bir anlamda p_i sistem kutuplarını gösterir. Bu denkleme bakarak bu kez de kutuplara bağlı olarak sistemin davranışı hakkında bilgi edinebilmekteyiz. Bunlardan başlıcaları aşağıya çıkarılmıştır.

- Eğer $p_i = -\sigma$ gibi yalnızca reel bölümden oluşan kutupların **tümünün** reel kısmı negatif ise ($\sigma < 0$), sistem $C_i e^{-\sigma t}$ ifadesine uygun olarak exponensiyel azalarak, sönümlü ve kararlı bir davranış gösterir (sol yarı düzlem).
- Orijindeki kutup $p_i = 0$, sabit bir değer olup başlangıç koşullarını gösterir.
- Eğer $p_i = \sigma$ gibi yalnızca reel bölümden oluşan kutuplardan **yalnızca birinin bile** reel kısmı pozitif ($\sigma > 0$) ise, sistem $C_i e^{\sigma t}$ ifadesine uygun olarak exponensiyel artarak, sönümlü ve kararlı olmayan bir davranış gösterir (sağ yarı düzlem).
- Eğer $p_i = -\sigma \pm j\omega$ gibi kompleks kutupların **tümünün** reel kısmı negatif ise ($\sigma < 0$), sistem $A e^{-\sigma t} \sin(\omega t + \phi)$ ifadesine uygun olarak hem exponensiyel azalan hemde salınımlı, aynı zamanda sönümlü ve kararlı bir davranış gösterir (sol yarı düzlem).
- Eğer $p_i = \sigma \pm j\omega$ gibi kompleks kutupların **tümünün** reel kısmı pozitif ise ($\sigma > 0$), sistem $A e^{\sigma t} \sin(\omega t + \phi)$ ifadesine uygun olarak hem exponensiyel artan hemde salınımlı, aynı zamanda sönümsüz ve kararsız bir davranış gösterir (sağ yarı düzlem).
- Eğer $p_i = \pm j\omega$ olarak imajiner kısımdan oluşan kutuplar, imajiner eksen üzerinde sabit genlikli ω frekansı ile titreşen cevaplar üretmektedirler.

LTIC Sistemlerin Transfer Fonksiyonuyla Kararlılıklarının Analizi

Linear zamanla değişmeyen sürekli (LTIC) sistemlerin sıfır-durum cevabı aynı zamanda sistem transfer fonksiyonunun elde edilmesini sağlar. Bunun anlamı, sistem başlangıç koşullarının sıfır kabul edilmesidir. Buna göre sıfır-durum cevabı, sisteme aktif olarak bir girişin uygulandığı durum (başlangıç koşulları sıfır) olduğu için, sistemin transfer fonksiyonundan söz edilmektedir. Sistem transfer fonksiyonu çıkışın girişe oranı olarak daha fazla bilginin tanımlandığı fonksiyon olmasının yanında, bu özelliğiyle sistem kararlılıklarının incelenmesinde de yararlanılan önemli bir fonksiyondur. Bir sistemin, transfer fonksiyonu üzerinden kararlılığının analizi üzerine aşağıdaki adımlar takip edilecektir. Eğer “n” nci dereceden bir LTIC sistem aşağıdaki denklemle tanımlanıyorsa

$$Q(D)y(t) = P(D)f(t)$$

veya

$$(D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \dots + a_1D + a_0)y(t) = (b_nD^n + b_{n-1}D^{n-1} + \dots + b_1D + b_0)f(t)$$

Sıfır-durum cevabı, başlangıç koşullarının olmadığı durumu varsaydığı için az önce yazılan denklem geçerli olacaktır ve aşağıdaki başlangıç koşulları sıfır olacaktır.

$$y(0^-) = \dot{y}(0^-) = \ddot{y}(0^-) = \dots = y^{(n-1)}(0^-) = 0$$

Bununla beraber sistem girişi casual olacağından, yani girişler sıfırdan başlayacağından

$$f(0^-) = \dot{f}(0^-) = \ddot{f}(0^-) = \dots = f^{(n-1)}(0^-) = 0$$

$$y(t) \Leftrightarrow Y(s) \text{ ve } f(t) \Leftrightarrow F(s)$$

Başlangıç koşullarının sıfır olmasından dolayı

$$D^r y(t) = \frac{d^r}{dt^r} y(t) \Leftrightarrow s^r Y(s)$$

$$D^k f(t) = \frac{d^k}{dt^k} f(t) \Leftrightarrow s^k F(s)$$

Bunlar göz önüne alınarak başlangıçtaki sistem denklemini

$$(s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0)Y(s) = (b_ns^n + b_{n-1}s^{n-1} + \dots + b_1s + b_0)F(s)$$

$$Y(s) = \frac{b_ns^n + b_{n-1}s^{n-1} + \dots + b_1s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0} F(s)$$

$$Y(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} F(s)$$

Eğer sistem transfer fonksiyonu olarak $H(s)$

$$H(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}$$

olarak tanımlanırsa, sistem çıkış fonksiyonu $Y(s)$

$$Y(s) = H(s)F(s)$$

olarak elde edilir. Buradan sistem transfer fonksiyonu tekrar

$$H(s) = \frac{Y(s)}{F(s)} = \frac{L[\text{sifir - durum cevabi}]}{L[\text{giris}]}$$

$$H(s) = \frac{Y(s)}{F(s)} = \frac{b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \dots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} = \frac{P(s)}{Q(s)}$$

$$H(s) = b_n \frac{(s - z_1)(s - z_2) \dots (s - z_n)}{(s - p_1)(s - p_2) \dots (s - p_n)}$$

olarak yazılır. Son denklemdeki “ z_1, z_2, \dots, z_n ” sistem transfer fonksiyonunun “*sıfırlarını (zeros)*”, “ p_1, p_2, \dots, p_n ” ise sistem transfer fonksiyonunun “*kutuplarını (poles)*” göstermektedir. Bir LTIC sistemin transfer fonksiyonundan yararlanarak sistemin “sıfırlar (zeros)” ve “kutup (poles)” pozisyonlarını göz önüne alarak sistemin stabilite kriterlerini de tanımlayabiliriz. Buna göre sistemin stabilitesi üç duruma göre belirlenir.

1. Sürekli bir LTIC sistemin asimtotik olarak kararlı olabilmesi için sistem transfer fonksiyonunun “kutupları (poles)” *sol yarım düzlemde* (LHP) olması gerekiyor.

2. Sürekli bir LTIC sistem kararsız ise, iki koşuldan birinin var olması gerekir :

- a) Transfer fonksiyonunun en az bir kutbu sağ yarı düzlemde
- b) Transfer fonksiyonunun imajiner eksen üzerinde katlı kutupları olması gerekir.

3. Eğer sürekli LTIC sistemin transfer fonksiyonunun kutupları sağ yarı düzlemde değilse, ama imajiner eksen üzerinde katlı olmayan kutuplar varsa, *zorunlu (marginally) kararlılık* durumu söz konusu olacaktır.

Örnek

$$H(s) = \frac{s^2 + 4s + 3}{s^2 + 9s + 14}$$

Transfer fonksiyonuyla verilen LTIC sistemin kararlılığını araştırın.

Çözüm

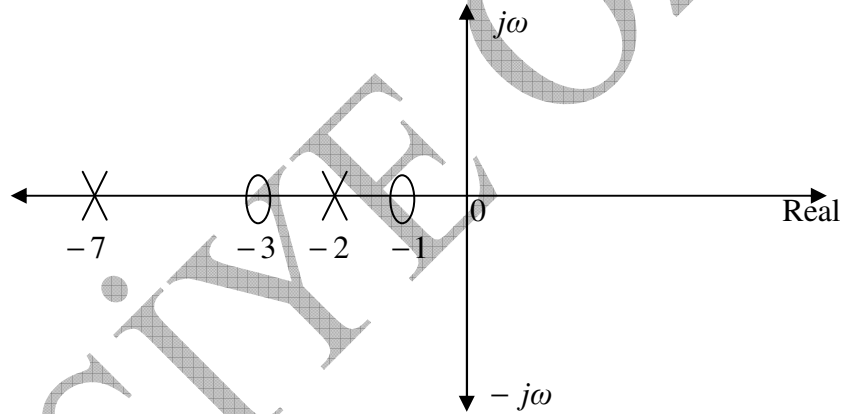
$$H(s) = \frac{s^2 + 4s + 3}{s^2 + 9s + 14} = \frac{(s+1)(s+3)}{(s+2)(s+7)}$$

Transfer fonksiyonunun kutupları,

$$(s+2) = 0 \Rightarrow s = -2 \text{ ve } (s+7) = 0 \Rightarrow s = -7$$

Transfer fonksiyonunun sıfırları, $(s+1) = 0 \Rightarrow s = -1$ ve $(s+3) = 0 \Rightarrow s = -3$

Kutuplar $(-2$ ve $-7)$ sol yarım düzlemde olduğu için sistem kararlıdır. Transfer fonksiyonuyla verilen sistemin kararlılığı aşağıda kompleks frekans düzleminde verilmiştir. Transfer fonksiyonunun sıfırları daire içinde gösterilmiştir.



Şekil 28 Sistem transfer fonksiyonunun kompleks frekans düzlemindeki stabilitesi

Örnek

$$H(s) = \frac{s^2 + 6s + 8}{s^2 + 4}$$

Transfer fonksiyonuyla verilen LTIC sistemin kararlılığını araştırın.

Çözüm

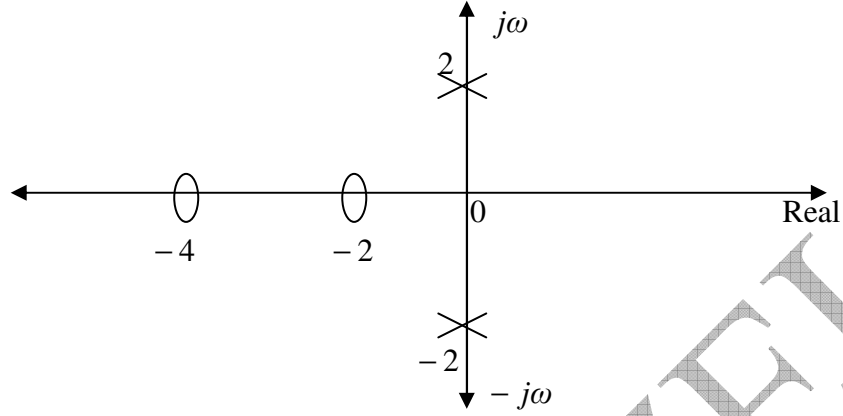
$$H(s) = \frac{s^2 + 6s + 8}{s^2 + 4} = \frac{(s+2)(s+4)}{s^2 + 4}$$

Transfer fonksiyonunun kutupları,

$$(s^2 + 4) = 0 \Rightarrow s = \pm 2j$$

Transfer fonksiyonunun sıfırları, $(s+2) = 0 \Rightarrow s = -2$ ve $(s+4) = 0 \Rightarrow s = -4$

Kutuplar ($\pm 2j$) imajiner eksen üzerinde ve katlı kök halinde olmadıklarından sistem stabil marjinal olarak kararlıdır. Transfer fonksiyonuyla verilen sistemin kararlılığı aşağıda kompleks frekans düzleminde verilmiştir.



Şekil 29 Sistem transfer fonksiyonunun kompleks frekans düzlemindeki stabilitesi

Örnek

$$H(s) = \frac{s^2 + 9s + 14}{(s^2 + 6s - 16)}$$

Transfer fonksiyonuyla verilen LTIC sistemin kararlılığını araştırın.

Çözüm

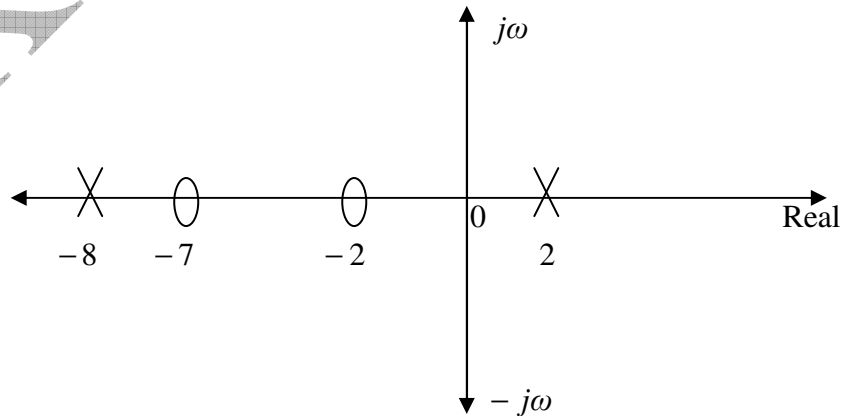
$$H(s) = \frac{s^2 + 9s + 14}{(s^2 + 6s - 16)} = \frac{(s + 2)(s + 7)}{(s - 2)(s + 8)}$$

Transfer fonksiyonunun kutupları,

$$(s - 2) = 0 \Rightarrow s = 2 \quad \text{ve} \quad (s + 8) = 0 \Rightarrow s = -8$$

Transfer fonksiyonunun sıfırları, $(s + 2) = 0 \Rightarrow s = -2$ ve $(s + 7) = 0 \Rightarrow s = -7$

Kutuplar $(2, -8)$ olarak bir tanesi (2) sağ yarım düzlemde (RHP) olduğundan sistem kararsızdır.



Şekil 30 Sağ yarı düzlemde bulunan kutuplardan kaynaklanan kararsızlık

Örnek

$$H(s) = \frac{s^2 + 9s + 18}{(s^4 + 4)}$$

Transfer fonksiyonuyla verilen LTIC sistemin kararlılığını araştırın.

Çözüm

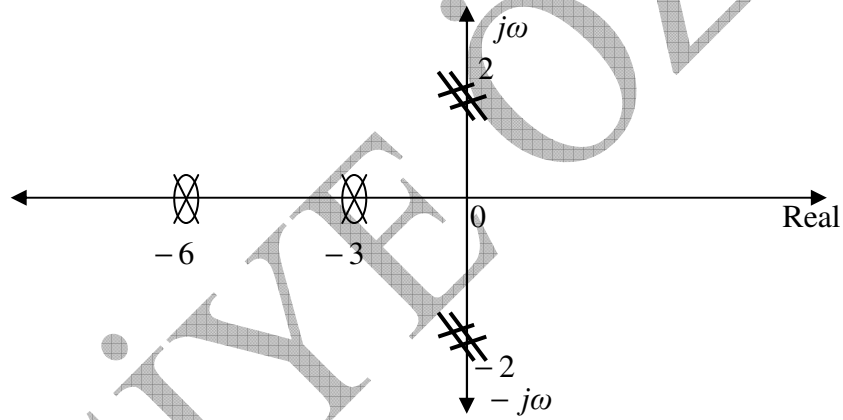
$$H(s) = \frac{s^2 + 9s + 18}{(s^4 + 4)(s^2 + 6s - 16)} = \frac{(s + 3)(s + 6)}{(s^4 + 4)}$$

Transfer fonksiyonunun kutupları,

$$(s^2 + 4) = 0 \Rightarrow s = \pm 2j, \pm 2j \quad \text{ve}$$

Transfer fonksiyonunun sıfırları, $(s + 3) = 0 \Rightarrow s = -3$ ve $(s + 6) = 0 \Rightarrow s = -6$

Kutuplar $(\pm 2j, \pm 2j)$ olarak imajiner eksen üzerinde katlı kök halinde olduğundan sistem kararsızdır.



Şekil 31 İmajiner eksenindeki katlı kutuplardan kaynaklanan kararsızlık

Örnek

Giriş $f(t) = 2e^{-4t}u(t)$ olan ve

$$\frac{d^2 y}{dt^2} - 4 \frac{dy}{dt} - 12y(t) = \frac{d^2 f}{dt^2} - 3 \frac{df}{dt} - 18f(t)$$

denklemlerle verilen LTIC sistemin kararlılığını tespit ederek, sistem çıkışından, kararlılığı gözlemleyin.

Çözüm

Verilen diferansiyel denklem sistemini yazmaya çalışalım.

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} = s^2 Y(s), \quad \frac{dy(t)}{dt} = s Y(s), \quad y(t) = Y(s) \quad \text{ve} \quad \frac{dx(t)}{dt} = s X(s), \quad x(t) = X(s)$$

$$s^2Y(s) - 4sY(s) - 12Y(s) = s^2X(s) - 3sX(s) - 18X(s)$$

$$[s^2 - 4s - 12]Y(s) = [s^2 - 3s - 18]X(s)$$

buradan transfer fonksiyonu

$$H(s) = \frac{s^2 - 3s - 18}{s^2 - 4s - 12} = \frac{(s+3)(s-6)}{(s+2)(s-6)}$$

Buradan

$$H(s) = \frac{(s+3)(s-6)}{(s+2)(s-6)} = \frac{(s+3)}{(s+2)}$$

Sistem kutbu $s = -2$ olarak sol yarı düzlemde görüldüğünden, sistem kararlı görünüyor. Ancak bu başlangıç koşulları sıfır durumuna göre, doğru olabilir, yine de sistemin kararlı olduğu söylenemez. Çünkü sistemde sağ yarı düzlemde görünen $s = 6$ kutbu, sistemi kararsızlığa götürmektedir. Bu kutbun, payda bulunan $(s-6)$ terimi ile iptali, kararsızlık sorununu tam çözmemektedir. Doğru bir tespit için sistem durum-uzay analizi yapılmalıdır. Böyle bir sistemin çıkışını da gözlemlemeye çalışırsak, verilen $f(t) = 2e^{-4t}u(t)$ girişinin Laplace dönüşümü alınır,

$$F(s) = L[2e^{-4t}u(t)] = \frac{2}{s+4}$$

$$\begin{aligned} Y(s) &= H(s)F(s) = \frac{2(s+3)(s-6)}{(s+4)(s+2)(s-6)} = \frac{2(s+3)}{(s+4)(s+2)} = \frac{c_1}{s+4} + \frac{c_2}{s+2} + \frac{c_3}{s-6} \\ &= \frac{(c_1 + c_2 + c_3)s^2 + (-4c_1 - 2c_2 + 6c_3)s - 12c_1 - 24c_2 + 8c_3}{(s+4)(s+2)(s-6)} \end{aligned}$$

$$c_1 + c_2 + c_3 = 2$$

$$-4c_1 - 2c_2 + 6c_3 = -6$$

$$-12c_1 - 24c_2 + 8c_3 = -36$$

$$c_1 = 1, \quad c_2 = 1, \quad c_3 = 0$$

buradan $Y(s)$ sistem cevabı

$$Y(s) = \frac{1}{s+4} + \frac{1}{s+2}$$

bulunan $Y(s)$ fonksiyonun invers Laplace transformasyonu alınır

$$L^{-1}[Y(s)] = L^{-1}\left(\frac{1}{s+4} + \frac{1}{s+2}\right) = (e^{-4t} + e^{-2t})u(t)$$

$$y(t) = (e^{-4t} + e^{-2t})u(t)$$

olarak bulunur. Çıkış olarak gerek $Y(s) = \frac{1}{s+4} + \frac{1}{s+2}$ gerekse $y(t) = (e^{-4t} + e^{-2t})u(t)$ ifadelerinden sistem kararlı gibi görünsede (kutuplar, $s = -2$ ve $s = -4$), başlangıçtaki $H(s) = \frac{(s+3)(s-6)}{(s+2)(s-6)}$ fonksiyonunda görünen $s = 6$ kutbundan dolayı, sistem kararsızdır. Buna göre sistem $y(t)$ çıkışından herşey yolunda kararlı görünmesine rağmen, sistem içindeki $s = 6$ kutbundan dolayı, gerçekte görünenden farklı olarak, sistem kararsız ve risk altındadır.

Örnek

$$H(s) = \frac{(s-2)(s+7)}{(s-2)(s+3)(s+4)}$$

Transfer fonksiyonuyla verilen LTIC sistemin kararlılığını araştırın.

Çözüm

Eğer transfer fonksiyonu başlangıç koşullarının sıfır alındığı duruma uygun olarak aşağıdaki gibi düşünülürse

$$H(s) = \frac{(s-2)(s+7)}{(s-2)(s+3)(s+4)} = \frac{(s+7)}{(s+3)(s+4)}$$

bu haldeki sistemin kutupları

$$(s+3) = 0 \Rightarrow s = -3 \text{ ve } (s+4) = 0 \Rightarrow s = -4$$

olduklarından, sistem kararlı görünür. Ancak durum gerçekte görüldüğünden farklıdır. Çünkü gerçek değerlendirmede, Transfer fonksiyonunun kutupları,

$$(s-2) = 0 \Rightarrow s = 2, \quad (s+3) = 0 \Rightarrow s = -3 \text{ ve } (s+4) = 0 \Rightarrow s = -4$$

Bu durumda kutuplardan biri $s = 2$ olarak sağ yarı düzlemde görüldüğünden, sistem kararsız olacaktır. Yani işlem marifetiyle,

$$H(s) = \frac{\cancel{(s-2)}(s+7)}{\cancel{(s-2)}(s+3)(s+4)} = \frac{(s+7)}{(s+3)(s+4)}$$

olarak düşünülmesi, “sıfırlar (zeros)” – “kutuplar (poles)” iptali (zero-pole cancellation) olarak bilinir. Bu ifade cebirsel olarak doğru olmakla birlikte, uygulamada aynı sonucu vermesi asla düşünülemez. Unutulmamalıdır ki, bir sistemin transfer fonksiyonu tasarlanmış ve üretilmiş bir elektronik cihaz veya sistemdir. Bu yüzden hiçbir zaman için fiili bir iptal söz konusu olmaz. Eğer böyle olduğu düşünülerek sistem kullanılmaya devam edilirse sistemin kararsız çalışma başta olmak üzere çökmesi gibi çeşitli risklere maruz kalacağı bilinmelidir. Bu yüzden böyle bir tehlike veya risk varsa yapılacak en sağlıklı şeyin bu duruma maruz kalacak payda bölümünde bulunan kutupun yerini daha güvenli bir yere taşımaktır. Bir an için önlem alınmadığı düşünülürse, sistem kararlıymış gibi görünmesine rağmen, sistemin risk

altında olduğu, hatta çökeceği bilinmelidir. Çünkü sistemin gerçekte sağ yarı düzlemde, sistemi kararsız yapan bir kutbu vardır, bu gerçeği bile bile, kutup ve sıfırlar arasındaki iptal (cancellation) durumu, sistemi kararlı yapmaya yetmez. Eğer başlangıç koşullarının göz önüne alındığı duruma göre araştırılırsa, sistemin kararsız olacağı kesindir. Bu nedenle sistem doğru olarak tekrar

$$H(s) = \frac{(s-2)(s+7)}{(s-2)(s+3)(s+4)} = \frac{(s-2)(s+7)}{(s-2)(s+3)(s+4)}$$

gibi düşünülmelidir. Bu halde de sistemin kararsız olduğu zaten görülecektir. Bu gibi durumlarda bir sistemin doğru analizi için

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t) \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t) \mathbf{f}(t)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}(t) \mathbf{x}(t) + \mathbf{D}(t) \mathbf{f}(t)$$

biçiminde gösterilen modern kontrol teorisinin temelini oluşturan **durum-uzay** (state-space) sistem analizinden yararlanılmalıdır. Böyle bir analizde, $H(s)$ formunda görünmeyen ve durum-uzay denklem sisteminde, $\dot{\mathbf{x}}(t)$ ve $\mathbf{x}(t)$ gibi durum değişkenleri (state variables) olarak anılan kapasite ve endüktans gibi enerji tutma özelliğindeki elemanların, artık mıknatıslanma özelliğinden kaynaklanan başlangıç koşulları göz önüne alınarak, sistemin kararsızlığı ortaya çıkarılmaktadır.

Başlangıç Koşulu Teoremi (initial value theorem)

$$f(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} s F(s)$$

Bu teorem verilen haliyle, diferansiyel bir işlemin transformasyonu icra edildiğinde gerekli olan başlangıç koşullarının bulunması için gereklidir.

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} s F(s)$$

Teorem, $f(t)$ nin küçük zaman dilimi için (sıfır gibi, 0) davranışını bulmaktadır ($f(0)$). Bu haliyle başlangıç koşullarını (geçici koşullar, transient response) ilgilendiren küçük zaman dilimlerindeki davranışı göstermektedir. Küçük zaman, reel “s” ekseninden uzaktaki büyük frekanslarla söz konusu olmaktadır.

$$f(0) = \lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} s F(s)$$

Örnek

$$f(t) = 5e^{-2t} \text{ işaretinin başlangıç değerini bulun.}$$

Çözüm

$$f(0) = 5e^{-2 \times 0} = 5$$

Final Koşulu Teoremi (final value theorem)

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s F(s)$$

Bu teorem verilen haliyle, bir sistemin (veya devrenin) steady-state cevabını bulmak için önemlidir. Dolayısıyla final (son) değer teoremi bu şekliyle yalnızca stabil sistemlere uygulanabilir.

Teorem, $f(t)$ nin büyük (uzun) zaman dilimi için (sonsuz, ∞) davranışını bulmaktadır ($f(\infty)$). Bu haliyle sistemin rejimde olduğu daha uzun zaman dilimlerindeki davranışını göstermektedir. Uzun zaman dilimi, reel “s” eksenine yakın düşük frekanslarla söz konusu olmaktadır.

$$f(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s F(s)$$

Örnek

$$F(s) = \frac{2s+5}{s^2+3s+1} \text{ işaretini son değer teoremine göre hesaplayın}$$

Çözüm

$$\begin{aligned} f(\infty) &= \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) \Leftrightarrow \lim_{s \rightarrow 0} s F(s) = s \times \frac{2s+5}{s^2+3s+1} = \frac{s(2s+5)}{s(s+3+\frac{1}{s})} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{(2 \times 0 + 5)}{(0 + 3 + \frac{1}{\frac{0}{\infty}})} = \frac{5}{\infty} \\ &= 0 \end{aligned}$$