

BÖLÜM 2.2 İŞARETLER

12 Exponensiyel işaretler

Burada exponensiyel işaretler gerçek ve kompleks formlarına göre ele alınacaklardır. Bunun için “s” kompleks frekans olmak üzere exponensiyel veya üstel olarak bilinen bu işaretlerin genel yapısı aşağıdaki gibi genel kompleks formundadır. Eğer $x(t)$ işareti genel $x(t) = e^{js}$ formundaysa

$$s = \sigma + j\omega$$

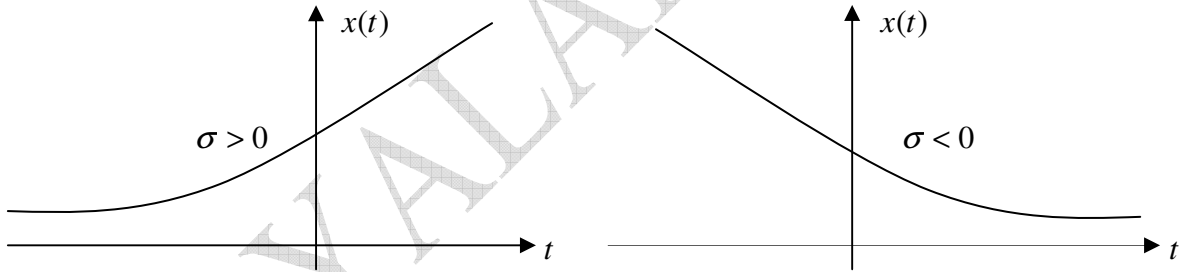
$$\begin{aligned} x(t) &= e^{js} = e^{(\sigma + j\omega)t} \\ &= e^{\sigma t} e^{j\omega t} = e^{\sigma t} (\cos \omega t + j \sin \omega t) \end{aligned}$$

$$\text{Re}\{s\} = \text{Re}\{e^{(\sigma + j\omega)t}\} = e^{\sigma t} = \text{gerçek exponensiyel işaret}$$

$$e^{j\omega t} = \text{kompleks exponensiyel işaret}$$

12.1 Gerçek exponensiyel işaretler

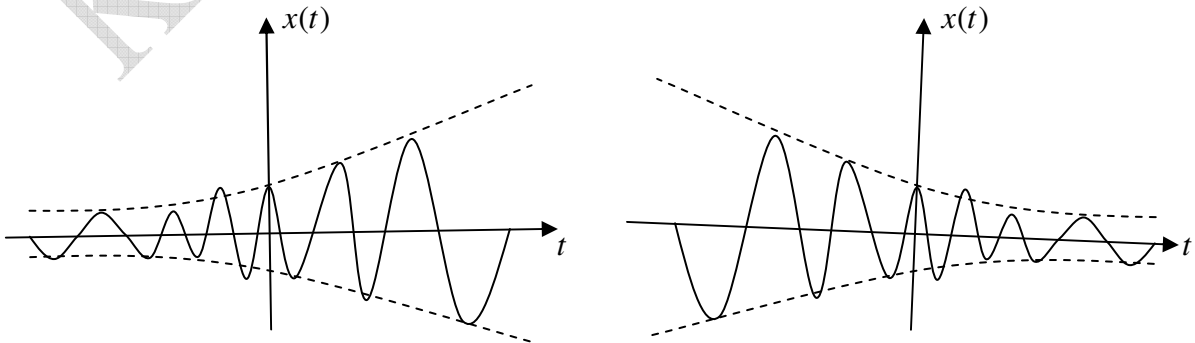
$$x(t) = e^{\sigma t}$$



Şekil 1 Gerçek exponensiyel işaretler

12.2 Kompleks exponensiyel işaretler

$$x(t) = e^{j\omega t}$$



Şekil 2 Exponensiyel artan ve azalan sinüs işaretleri

Örnek

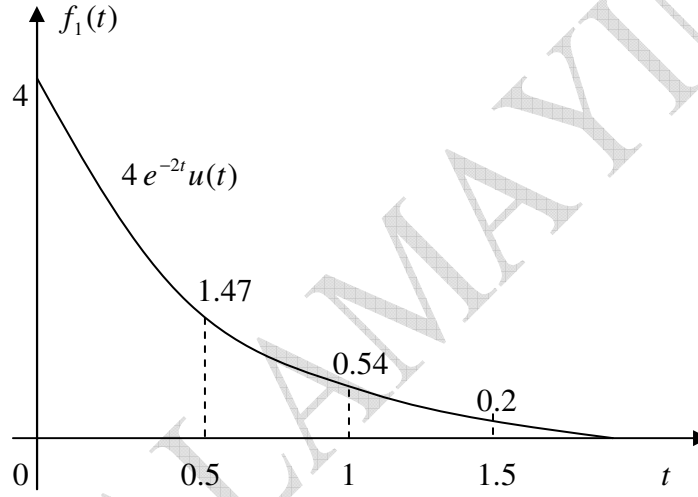
$$f(t) = 4 e^{-2t} \cos(6t - 60^\circ)$$

Fonksiyonunu çizelim.

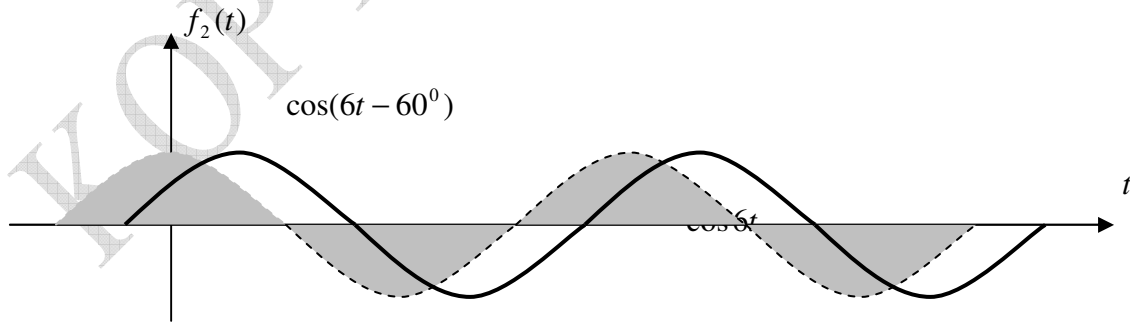
Çözüm

$f(t)$ fonksiyonu iki ayrı fonksiyon olan $4 e^{-2t}$ ve $\cos(6t - 60^\circ)$ fonksiyonlarının çarpımından oluşmaktadır. Buna göre her iki fonksiyonu ayrı ayrı düşünüp, çarpımlarını almamız gerekecektir.

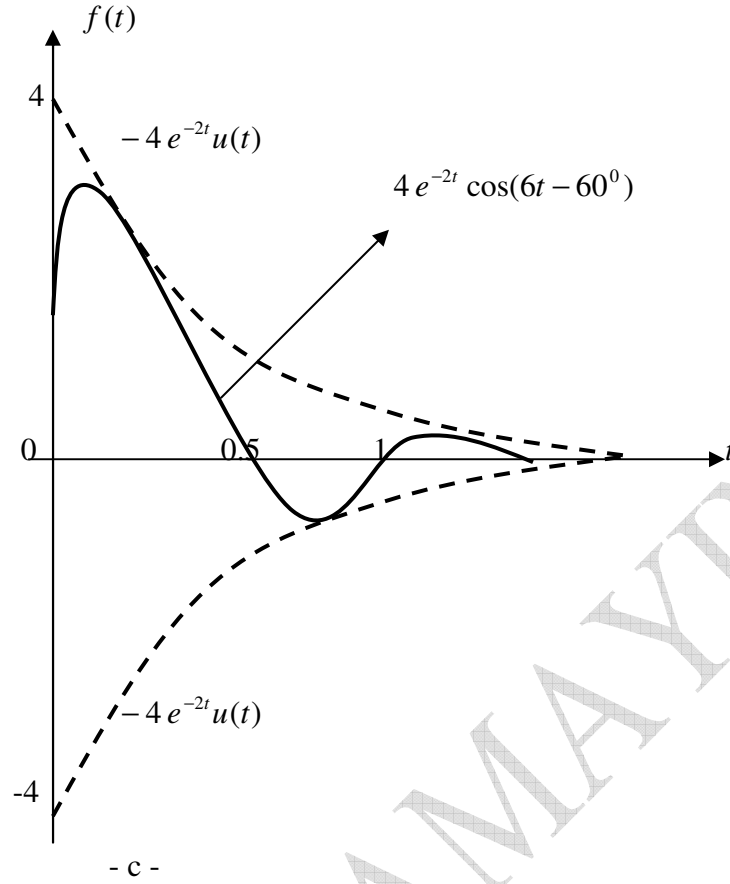
1. $f_1(t) = 4 e^{-2t}$



- a -



- b -



Şekil 3 $4e^{-2t} \cos(6t - 60^\circ)$ Fonksiyonu

Exponensiyel e^{st} Fonksiyonu

Exponensiyel e^{st} işareti gerek işaret gerekse sistem analizde oldukça önemli bir yere sahiptir. “s” kompleks yapıda bir değişken olup, kısaca kompleks frekans olarak anılmaktadır.

$$s = \sigma + j\omega$$

$$e^{st} = e^{(\sigma + j\omega)t} = e^{\sigma t} e^{j\omega t} = e^{\sigma t} \cos(\omega t) + j \sin(\omega t)$$

$$e^{st} = e^{\sigma t} e^{j\omega t} = r e^{j\omega t}$$

$$r = e^{\sigma t}$$

r, e^{st} fonksiyonunun genliğini göstermektedir.

$$s^* = \sigma - j\omega$$

$$e^{s^*t} = e^{(\sigma - j\omega)t} = e^{\sigma t} e^{-j\omega t} = e^{\sigma t} \cos(\omega t) - j \sin(\omega t)$$

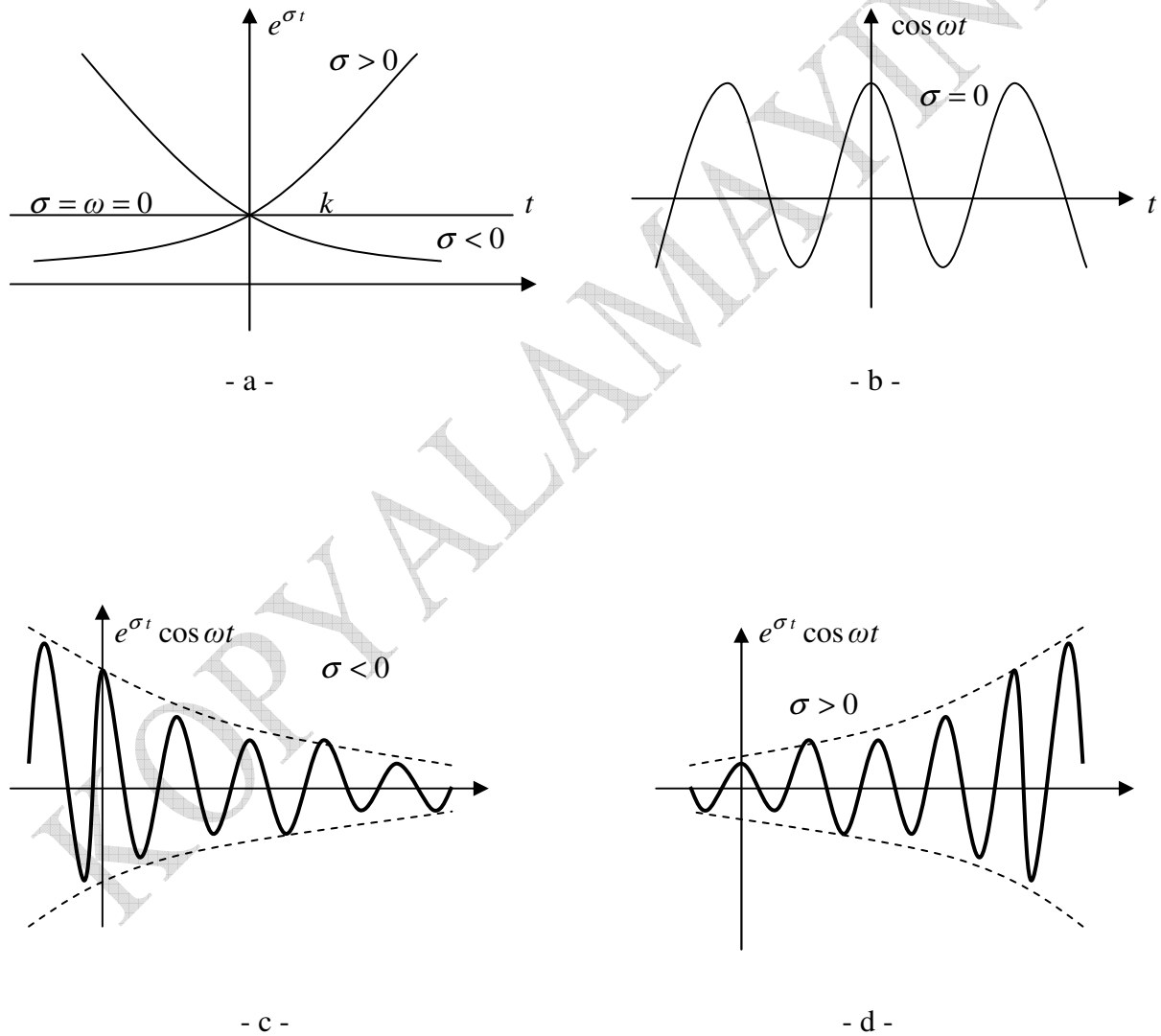
$$e^{\sigma t} \cos \omega t = \frac{1}{2}(e^{st} + e^{s^*t})$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(e^{st} + e^{s^*t}) &= \frac{1}{2}(e^{(\sigma + j\omega)t} + e^{(\sigma - j\omega)t}) = \frac{e^{\sigma t} e^{j\omega t} + e^{\sigma t} e^{-j\omega t}}{2} = e^{\sigma t} \left(\frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2} \right) \\ &= e^{\sigma t} \cos \omega t \end{aligned}$$

Bu denklemin Euler denklemiyle verilen $e^{j\omega t}$ denklemin daha genel bir hali olduğu görülmektedir. Diğer bir deyişle Euler denklemi $s = \sigma + j\omega$ olarak verilen ifadenin $\sigma = 0$ için oluşan özel bir halidir. Bu yüzden “s” kompleks frekans olarak anılmaktadır. e^{st} fonksiyonunun çok daha geniş bir işaret sınıfını kapsadığı bilinmektedir.

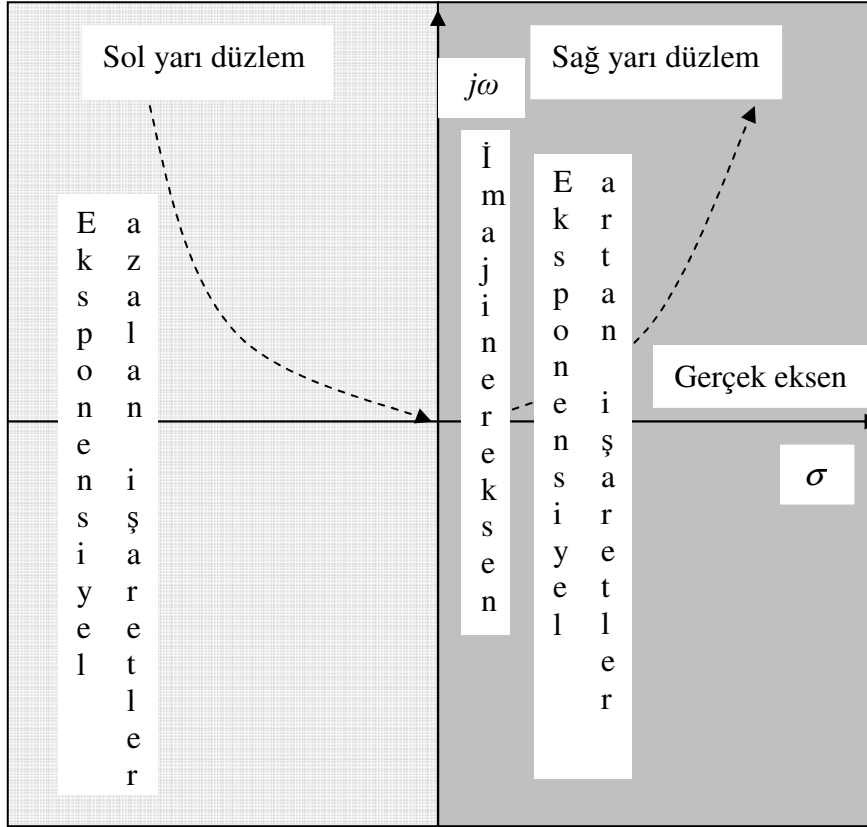
1. Eğer e^{st} ile bir “k” sabit bir sayı tanımlanacaksa , $k = k e^{0t}$ ($s = 0$)
2. Monoton artan bir exponensiyel fonksiyon $e^{\sigma t}$ ($\omega = 0, s = \sigma$)
3. Sinusoid fonksiyon $\cos \omega t$, ($\sigma = 0, s = j\omega$)
4. Exponensiyel değişen sinusoid $e^{\sigma t} \cos \omega t$ ($s = \sigma + j\omega$)

Verilen dört kategori aşağıdaki şekillerde gösterilmiştir.



Şekil 4 Kompleks frekansın $s = \sigma + j\omega$ sinusoidleri

Kompleks frekansı tanımlayan dört kategorideki işaretlerin aşağıdaki kompleks frekans düzleminde gösterimi daha açıklayıcı olacaktır.



Şekil 5 Kompleks frekans düzlemi

Şekilden de görüldüğü gibi yatay eksen gerçek eksen σ dikey eksen de imajiner eksen $j\omega$ göstermektedir. İmajiner bölümün mutlak değeri $|\omega| e^{\sigma t}$ nin salınım frekansını göstermektedir.

İlk olarak gerçek bölüm göz önüne alınırsa, bu bölüm σ de $e^{\sigma t}$ nin genliğini göstermektedir. Aslında bu değer yukarıda verilen $r = e^{\sigma t}$ görünümündedir. Bu şekle göre kompleks frekansı gerçek eksen üzerinde olan işaretlerin frekansları sıfırdır ($e^{\sigma t}$ ($\omega = 0, s = \sigma$)). Bu durum Şekil (a) da gösterilmiştir. Bu durumda görüldüğü gibi bu exponensiyel işaretler monoton olarak artan ($\sigma > 0$) veya azalan ($\sigma < 0$) formda olabilirler.

Diğer yandan kompleks frekansları imajiner eksen üzerinde olan işaretler de vardır. Bu ($\sigma = 0, s = j\omega$) koşulunda oluşur. Burada aslında $e^{\sigma t} = e^{\sigma t} e^{j\omega t} = e^{j\omega t}$ durumu göz önüne alındığında $e^{\sigma t}$ nin genliğini 1 yani $\sigma = 0, e^{\sigma t} = 1$ durumunun olduğu göz önüne alınmıştır. Bu durumda ($\sigma = 0$) işaretin sabit genlikli klasik sinusoid ($\cos \omega t$) olduğu düşünülür. Bu durum şekil (b) de gösterilmiştir.

Bir diğer durumda kompleks frekansın sıfır olma halidir ($s = 0$). Bu durumda kompleks frekansı oluşturan bileşenler sıfırdır ($\sigma = \omega = 0$). Bu anda klasik d.c. akım söz konusudur (e^{0t}). Bu durumda şekil (a) da gösterildiği gibi kompleks frekans iki eksen üzerinde de değildir.

Son durumda ise kompleks frekansı oluşturan bileşenlerden gerek σ gerekse ω sıfır değildir. Bu durumda σ ya bağlı olarak fonksiyon artan veya azalan formdadır. Eğer $\sigma > 0$ ise kompleks frekans imajiner eksenin sağ tarafına doğru artan yöndedir. Bu durumda kompleks frekansın “sağ yarı düzlemde (RHP)” olduğu kabul edilir. Eğer $\sigma < 0$ ise bu durumda da kompleks frekans imajiner eksenin soluna doğrudur ve “sol yarı düzlemde (RHP)” de kabul edilir. Görüldüğü gibi imajiner eksen düzlemi iki parçaya (LHP, LHP) bölmüştür. Buna göre sürekli artan ve sonuçta sistemi kararsızlığa götürecek işaretlerin frekansları sağ yarı düzlemde iken, daha kararlı işaretler ise sol yarı düzlemde yer alacaklardır.

Örnek

$$f(t) = e^{3t} \cos(7t + \theta)$$

$$\begin{aligned} e^{3t} \cos(7t + \theta) &= \frac{1}{2}(e^{st} + e^{s^*t}) = \frac{1}{2}e^{3t}(e^{j7t} + e^{-j7t}) \\ &= \frac{1}{2}[e^{(3+j7)t} + e^{(3-j7)t}] \end{aligned}$$

Görüldüğü gibi $3 + j7$ ve $3 - j7$ şeklinde iki kompleks frekans vardır. Özellikle gerçek bölüm olan $\sigma > 0$ (+3) olduğundan kompleks frekanslar sağ yarı düzlemde (RHP) çıkmaktadırlar. Bu durumda sistem frekansları olarak düşünülürse sistemin exponensiyel olarak artan istikameti işaret eden sağ yarı düzlemde kompleks frekansları olduğu ve kararlılık (stabilite) açısından kararsız bir sistemin olası olduğu düşünülebilir.

Örnek

$$f(t) = e^{-3t} \cos(7t + \theta)$$

$$\begin{aligned} e^{-3t} \cos(7t + \theta) &= \frac{1}{2}(e^{st} + e^{s^*t}) = \frac{1}{2}e^{-3t}(e^{j7t} + e^{-j7t}) \\ &= \frac{1}{2}[e^{(-3+j7)t} + e^{(-3-j7)t}] \end{aligned}$$

Görüldüğü gibi $-3 + j7$ ve $-3 - j7$ şeklinde iki kompleks frekans vardır. Burada durum bir önceki örneğin tersi istikamettir. Gerçek bölüm olan $\sigma < 0$ (-3) olduğundan kompleks frekanslar sol yarı düzlemde (LHP) çıkmaktadırlar. Bu durumda sistem frekansları olarak düşünülürse sistemin exponensiyel olarak azalan istikameti işaret eden sol yarı düzlemde kompleks frekansları olduğu ve kararlılık (stabilite) açısından kararlı bir sistemin olası olduğu düşünülebilir.

Örnek

$$f(t) = \cos(7t + \theta)$$

$$\begin{aligned}\cos(7t + \theta) &= \frac{1}{2}(e^{st} + e^{s^*t}) = \frac{1}{2}(e^{j7t} + e^{-j7t}) \\ &= \frac{1}{2}[e^{j7t} + e^{-j7t}]\end{aligned}$$

Görüldüğü gibi $+j7$ ve $-j7$ şeklinde imajiner eksen üzerinde olan iki kompleks frekans vardır ($\sigma = 0$). Bu durumda sabit genlikli konvansiyonel sinusoid söz konusudur.

Örnek

$f(t)$ fonksiyonunun $\pm j7$ ve $\pm j7$ frekanslarına sahip bir sinusoid olması durumunu araştırın.

Çözüm

Görüldüğü gibi kökler imajiner eksen üzerinde katlı değerlerde (köklerde, kutuplarda) olduklarından

$$f(t) = \text{Re}\{e^{j\beta t^2}\} = \cos(\beta t^2)$$

fonksiyonuna benzer olarak t^2 lineer olmayan zaman parametresinden dolayı kararsız bir davranış gösterir (chirp işareti gibi, frekansı zamanla değişen sinyal). Bu nedenle $\pm j7$ ve $\pm j7$ gibi imajiner eksen üzerinde katlı kutuplara sahip ve $\cos(\beta t^2)$ sinusoidi gibi işarete sahip sistem, kararsızdır

Örnek

$$f(t) = e^{\pm 3t}$$

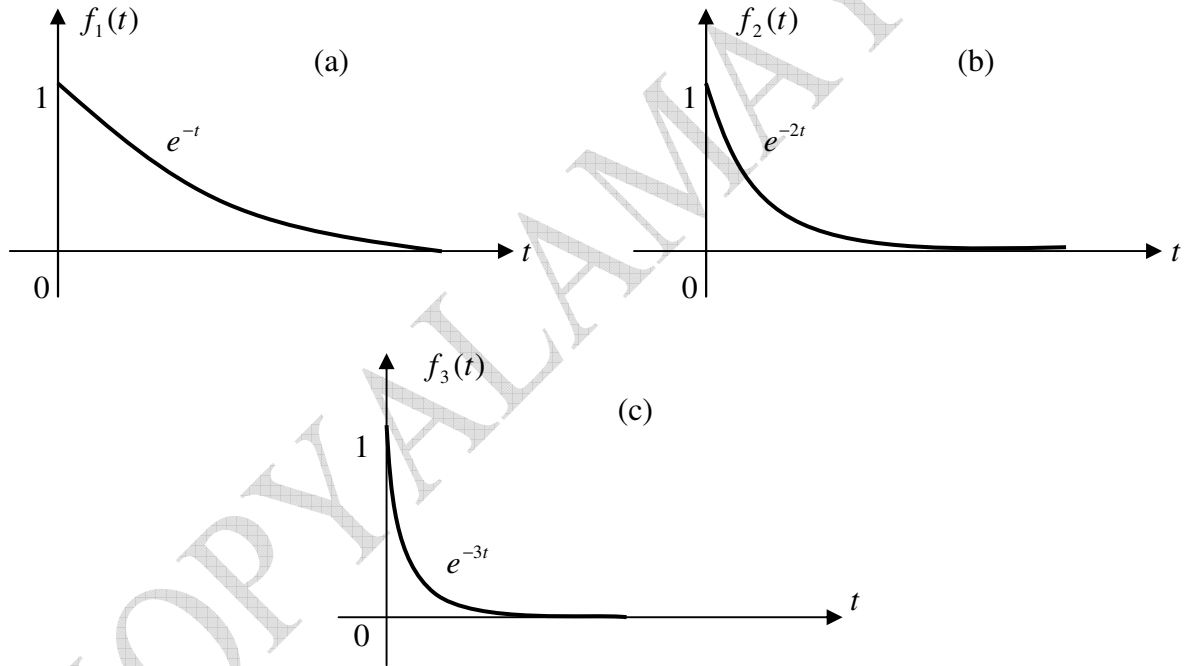
İşaretinin ($\omega = 0$, $s = \sigma$) durumu için exponensiyel artan ve azalan ± 3 kompleks frekansları olduğu görülmektedir.

Örnek

$f_1(t) = e^{-t}$, $f_2(t) = e^{-2t}$, $f_3(t) = e^{-3t}$ İşaretlerini sönümlenme özellikleri açısından inceleyin.

Çözüm

Sönüm, sistem cevaplarının belirlenmesi açısından önemli bir kriterdir. Sistem işaretlerinin sönümlü olması beklenir. Sönümlülük, işaretin bir limitinin olması, bir değere yaklaşması veya belli bir süre sonra sıfır olması halidir. Sönüm, ayrıca sistem kararlılığında önemlidir. Sönümlü olmayan giriş ve de özellikle çıkış işareti, sistemin kararlı hale (rejime) gelemeyeceğini ve sonucunda da kararlı olamayacağına dair önemli bir kriterdir. Bu nedenle sonsuz aralıktaki sinusoidal işaretlerdeki periodik özellik yerine, sönüm özelliğindeki exponensiyel işaretler sistemler için daima tercih edilir. Aşağıda verilen fonksiyonlara ait şekiller (a), (b), (c) de verilmiştir.



Şekil 6 Exponensiyel işaretlerde sönüm

Şekiller incelendiğinde e^{-at} tipinde ($a > 0$) işaretlerin sönümlü oldukları, sıfıra yaklaştıkları görülmektedir. İşaretin daha hızlı sönümlenmesini sağlayan parametrenin “ a ” olduğu görülmektedir. e^{-at} formatındaki “ a ” ne kadar büyükse ($a > 0$), işaretin o denli hızlı sönümlendiği görülmektedir. Bu açıdan bakıldığında $f_3(t)$ işaretinin diğer ikisinden daha hızlı sönümleneceği, $f_1(t)$ işaretinin ise daha uzun vadede sönümleneceği görülmektedir. Hızlı sönümlenme açısından sıralamanın $f_3(t)$, $f_2(t)$, $f_1(t)$ olduğu görülmektedir. Bununla beraber e^{-at} tipli ($a < 0$) veya e^{at} tipli ($a > 0$) işaretlerde sönümün hiçbir zaman gerçekleşmeyeceği, sonucunda da sistemi kararsız yapacağı görülmektedir.

NOT : RLC devrelerinin analizlerinde sistem olarak devrenin cevabının gerilim olarak hesaplanmasında

$$V(t) = V e^{-\tau t}$$

bağıntısının kullanıldığı, burada τ zaman parametresi olarak

$$\tau = \frac{R}{L} \quad \text{veya} \quad \tau = RC$$

olarak sistem cevabı veya **zaman sabiti** (time constant) olarak yazılabilmektedir. Buradan hareketle sistem cevabı,

$$V(t) = V e^{-\frac{R}{L}t} \quad \text{veya} \quad V(t) = V e^{-\frac{1}{RC}t}$$

olarak yazılarak, sistemin cevabı zaman sabiti olarak $\tau = \frac{R}{L}$ veya $\tau = RC$ değerlerinden

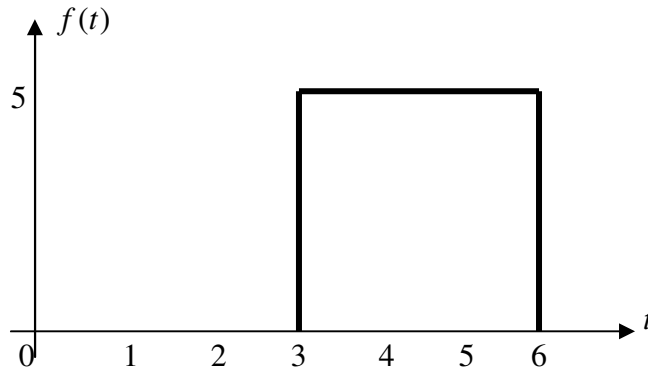
tespit edilebilmektedir. İşaret analiz olarak ele alınan $e^{\sigma t}$ fonksiyonundaki σ , vektörel açıdan özdeğer (λ , eigenvalue), sistem açısından ise bir tür τ zaman sabiti (parametresi) olarak değerlendirilebilir. Sistemin hızlı cevap vermesi için endüktif devrede L endüktansının büyük, kapasitif devrelerde ise C kondansatörünün küçük seçilmesi gerektiği açıktır.

Parça Tipli İşaret Fonksiyonları

Piecewise olarak bilinen bu fonksiyonlar veya işaretler, birden fazla parçadan oluşmuş ve birden fazla aralıkta tanımlı olan fonksiyonlardır. Parçalı fonksiyonlarda sürekli (türevlenebilir) ve süreksiz (türevlenemez) olarak ikiye ayrılırlar. İşaret işlemede oldukça önemli yerleri vardır. Aşağıda bu sınıfa ait bazı işaret örnekleri verilmiştir.

Örnek

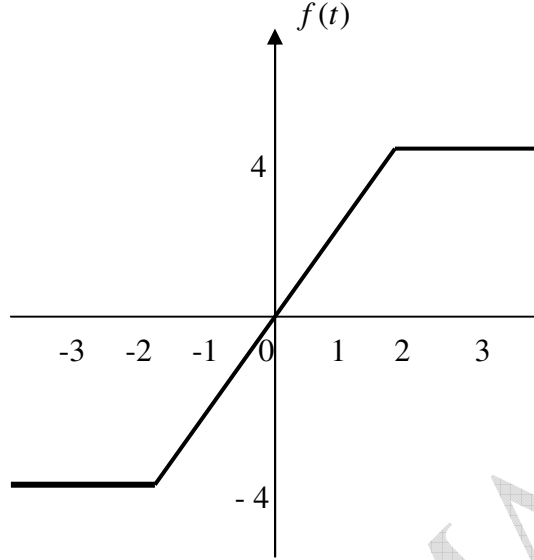
$$f(t) = \begin{cases} 0 & , \quad t < 3 \\ 5 & , \quad 3 \leq t < 6 \\ 0 & , \quad t \geq 6 \end{cases}$$



Şekil 7 Sürekli parçalı işaret

Örnek

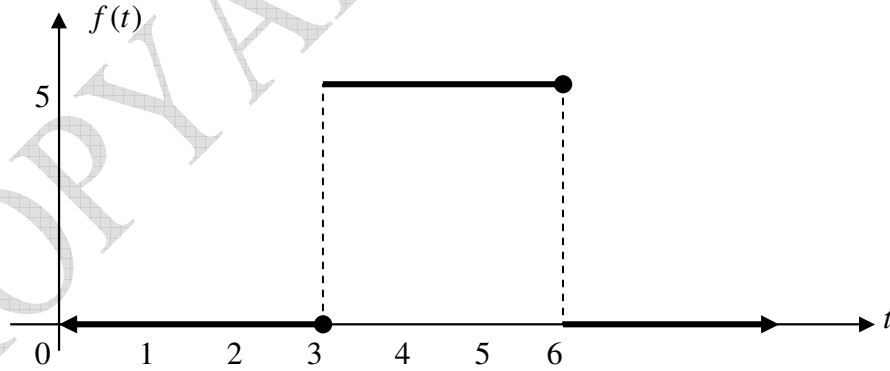
$$f(t) = \begin{cases} -4 & , \quad t < -2 \\ x & , \quad -2 \leq t \leq 2 \\ 4 & , \quad t > 2 \end{cases}$$



Şekil 8 Sürekli parçalı işaret

Örnek

$$f(t) = \begin{cases} 0 & , \quad t \leq 3 \\ 5 & , \quad 3 < t \leq 6 \\ 0 & , \quad t > 6 \end{cases}$$



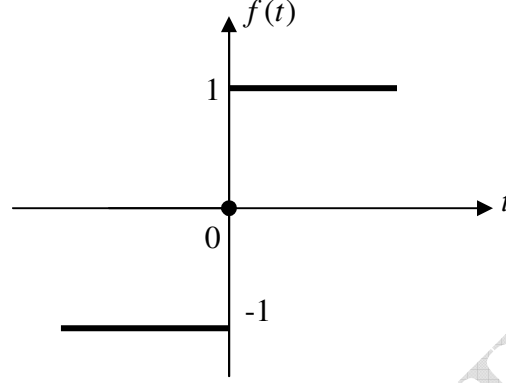
Şekil 9 Sürekli olmayan parçalı işaret

Özel Parçalı Fonksiyonlar

İşaret işlemede ve sistem analizinde kullanılan çok önemli parçalı fonksiyonlar vardır. Bunlar özellikleri itibariyle anahtarlama (basamak ve rampa) ve filtre fonksiyonları (dikdörtgen, sinc ve üçgen) olarak da anılmaktadır. Tümü sırasıyla aşağıda ele alınmıştır.

1. İşaret Fonksiyonu

$$f(t) = \text{Sgn}(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 0 & t = 0 \\ -1 & t < 0 \end{cases}$$



Şekil 10 Süreksiz Sgn fonksiyonu

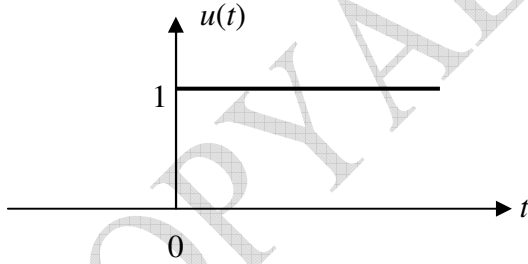
a) $\text{sgn}(t) = 2u(t) - 1$

b) $\frac{d}{dt}(\text{sgn}(t)) = 2\delta(t)$

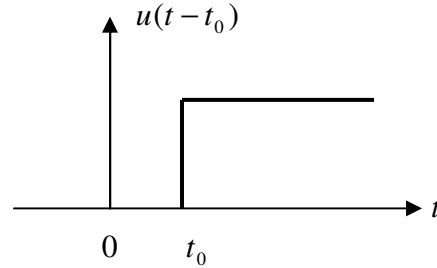
2. Birim Basamak Fonksiyonu

Birim adım (unit step) veya olarak bilinen bu işaretin matematiksel modeli ;

$$u(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} ; \quad u(t-t_0) = \begin{cases} 1 & t > t_0 \\ 0 & t < t_0 \end{cases}$$



- a -



- b -

Şekil 11 a) Birim basamak fonksiyonu , b) Kaydırılmış birim basamak fonksiyonu

Birim basamak ile işaret fonksiyonu arasında aşağıdaki ilişki mevcuttur.

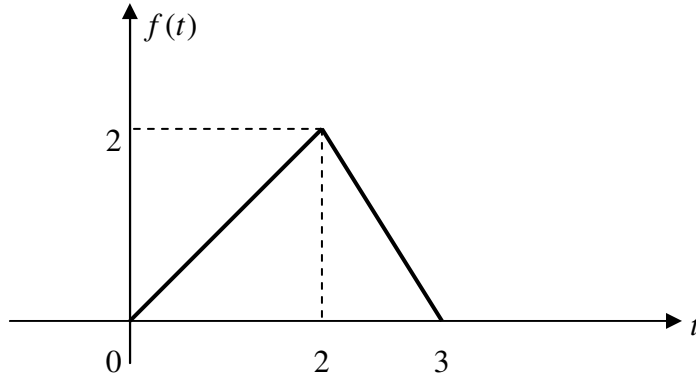
$$u(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \text{sgn}(t)$$

$$\frac{du}{dt} = \delta(t)$$

$$\frac{d^2u}{dt^2} = \delta'(t) = \text{belirsiz} , t = 0 \text{ hariç.}$$

$$\frac{d^nu}{dt^n} = \frac{d^{n-1}\delta}{dt^{n-1}} = \delta^{n-1}(t) = \text{belirsiz} , t = 0 \text{ hariç.}$$

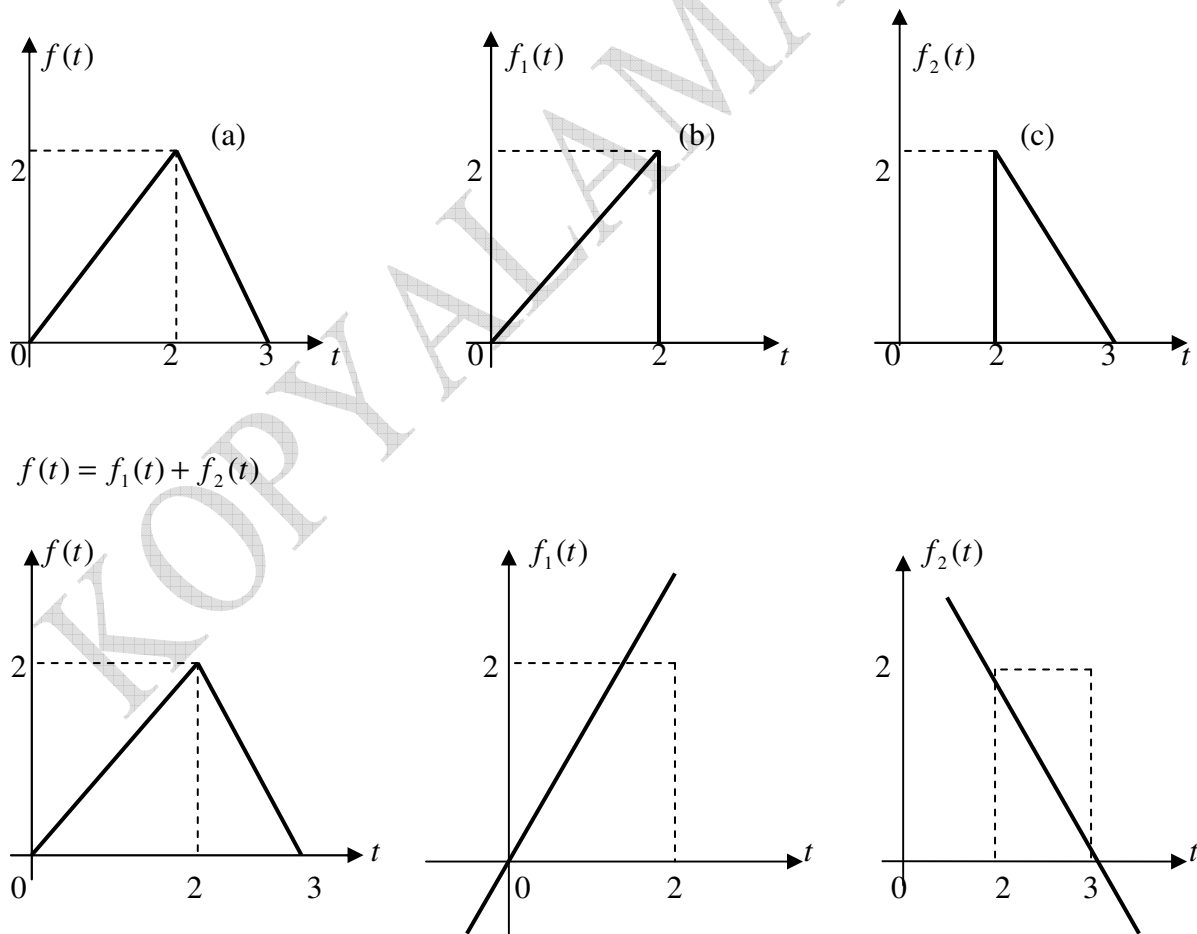
Örnek



Şekil 12

İşaretinin birim basamak fonksiyonu türünden karşılığını yazınız.

Çözüm



Şekil 13

Buradan $f_1(t)$ ve $f_2(t)$ fonksiyonlarını $u(t)$ birim basamak fonksiyonu türünden yazmaya çalışalım. Bunun için (b) deki $f_1(t)$ fonksiyonunun (0,0)-(2,2) noktalarındaki doğru denklemini yazalım.

$$\begin{aligned}\frac{y - y_1}{y_1 - y_2} &= \frac{t - t_1}{t_1 - t_2} \\ &= \frac{y - 0}{0 - 2} = \frac{t - 0}{0 - 2} \\ &= \frac{y}{-2} = \frac{t}{-2} \\ y &= t\end{aligned}$$

Elde edilen $y = t$ doğrusunun $u(t) - u(t - 2)$ ile çarpımı $f_1(t)$ yi oluşturacaktır.

$$f_1(t) = t [u(t) - u(t - 2)]$$

Benzer biçimde $f_2(t)$ yi elde etmek üzere, bu fonksiyonun aslında (c) de gösterilen (2,2)-(3,2) doğrusuyla $u(t - 2) - u(t - 3)$ fonksiyonunun çarpımı olduğu görülmektedir. Bunun için (2,2)-(3,2) koordinatlarındaki doğrunun denklemini elde etmeye çalışalım.

$$\begin{aligned}\frac{y - y_1}{y_1 - y_2} &= \frac{t - t_1}{t_1 - t_2} \\ &= \frac{y - 2}{2 - 0} = \frac{t - 2}{2 - 3} \\ &= \frac{y - 2}{2} = \frac{t - 2}{-1} \\ &= y - 2 = -2t + 4 \\ y &= -2t + 6 = y \\ y &= -2(t - 3)\end{aligned}$$

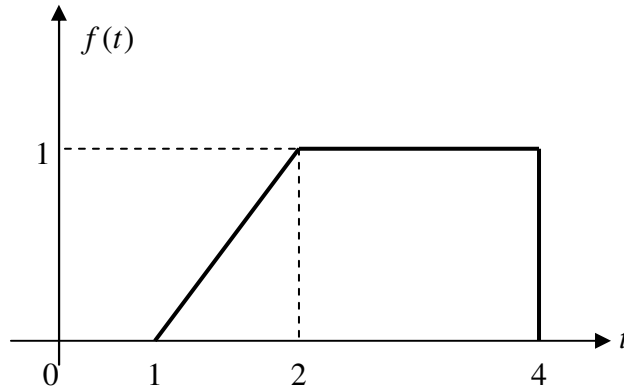
Görüldüğü gibi elde edilen doğru davranışına uygun olarak negatif eğime sahiptir.

$$f_2(t) = -2(t - 3) [u(t - 2) - u(t - 3)]$$

Bunların sonucunda verilen $f(t)$ fonksiyonunun birim basamak karşılığı her iki fonksiyonun toplamından elde edilecektir.

$$\begin{aligned}f(t) &= f_1(t) + f_2(t) \\ &= t [u(t) - u(t - 2)] - 2(t - 3) [u(t - 2) - u(t - 3)]\end{aligned}$$

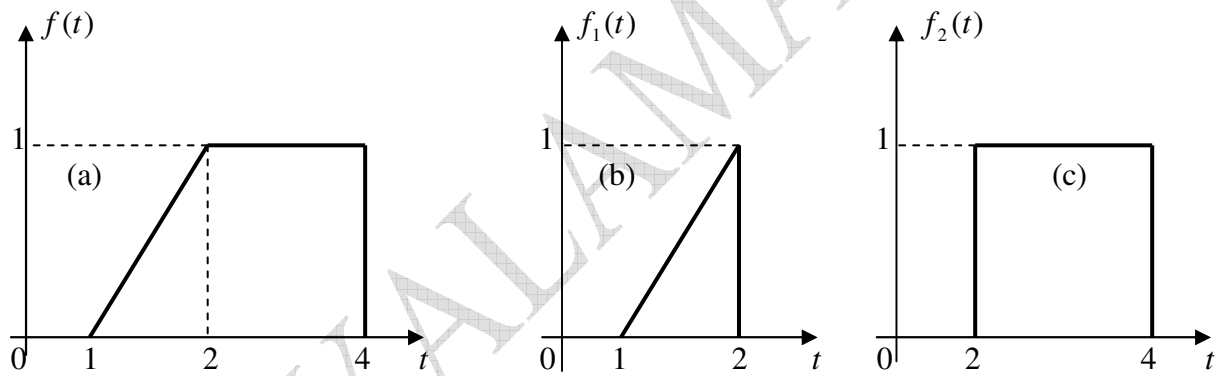
Örnek



Şekil 14

İşaretinin birim basamak fonksiyonu türünden karşılığını yazınız.

Çözüm



Şekil 15

Buradan $f_1(t)$ ve $f_2(t)$ fonksiyonlarını $u(t)$ birim basamak fonksiyonu türünden yazmaya çalışalım. Bunun için (b) deki $f_1(t)$ fonksiyonunun (1,0)-(2,1) noktalarındaki doğru denklemini yazalım.

$$\begin{aligned}\frac{y - y_1}{y_1 - y_2} &= \frac{t - t_1}{t_1 - t_2} \\ &= \frac{y - 0}{0 - 1} = \frac{t - 1}{1 - 2} \\ &= \frac{y}{-1} = \frac{t - 1}{-1} \\ y &= t - 1\end{aligned}$$

Elde edilen $y = t - 1$ doğrusunun $u(t - 1) - u(t - 2)$ ile çarpımı $f_1(t)$ yi oluşturacaktır.
 $f_1(t) = (t - 1)[u(t - 1) - u(t - 2)]$

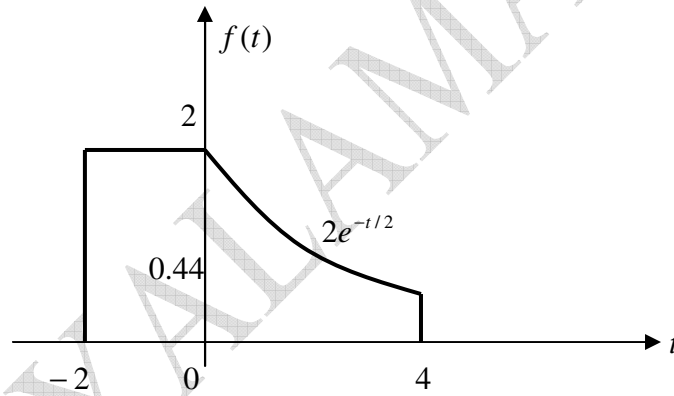
Benzer biçimde $f_2(t)$ yi elde etmek üzere, bu fonksiyonun aslında (c) de gösterilen $u(t - 2) - u(t - 4)$ dörtgeninden ibarettir.

$$f_2(t) = [u(t - 2) - u(t - 4)]$$

Bunların sonucunda verilen $f(t)$ fonksiyonunun birim basamak karşılığı her iki fonksiyonun toplamından elde edilecektir.

$$\begin{aligned} f(t) &= f_1(t) + f_2(t) \\ &= (t - 1)[u(t - 1) - u(t - 2)] + [u(t - 2) - u(t - 4)] \\ &= (t - 1)u(t - 1) + u(t - 2)[- (t - 1) + 1] - u(t - 4) \\ &= (t - 1)u(t - 1)u(t - 2)[-t + 1 + 1] - u(t - 4) \\ &= (t - 1)u(t - 1) - (t - 2)u(t - 2) - u(t - 4) \end{aligned}$$

Örnek



Şekil 16

İşaretinin birim basamak fonksiyonu türünden karşılığını yazınız.

Çözüm

Fonksiyon $t = (-2, 0)$ aralığında birim basamak, $t = (0, 4)$ aralığında ise exponensiyel fonksiyon olarak davrandığından bu iki aralıktaki toplamdan elde edilecektir. Öncelikle $t = (-2, 0)$ aralığı için $f_1(t)$ fonksiyonunu yazalım.

$$f_1(t) = 2[u(t + 2) - u(t)]$$

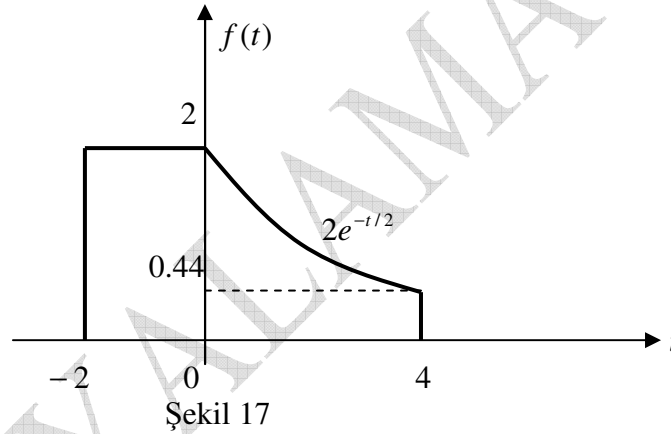
Ardından $t = (0, 4)$ aralığı için $f_2(t)$ fonksiyonu $2e^{-t/2}$ ile $[u(t) - u(t - 4)]$ nun çarpımından oluşacaktır.

$$f_2(t) = 2e^{-t/2} [u(t) - u(t-4)]$$

Bunların sonucunda verilen $f(t)$ fonksiyonunun karşılığı her iki fonksiyonun toplamından elde edilecektir.

$$\begin{aligned} f(t) &= f_1(t) + f_2(t) \\ &= 2[u(t+2) - u(t)] + 2e^{-t/2} [u(t) - u(t-4)] \\ &= 2u(t+2) - 2(1 - e^{-t/2})u(t) - 2e^{-t/2}u(t-4) \end{aligned}$$

Örnek



Şekil 17

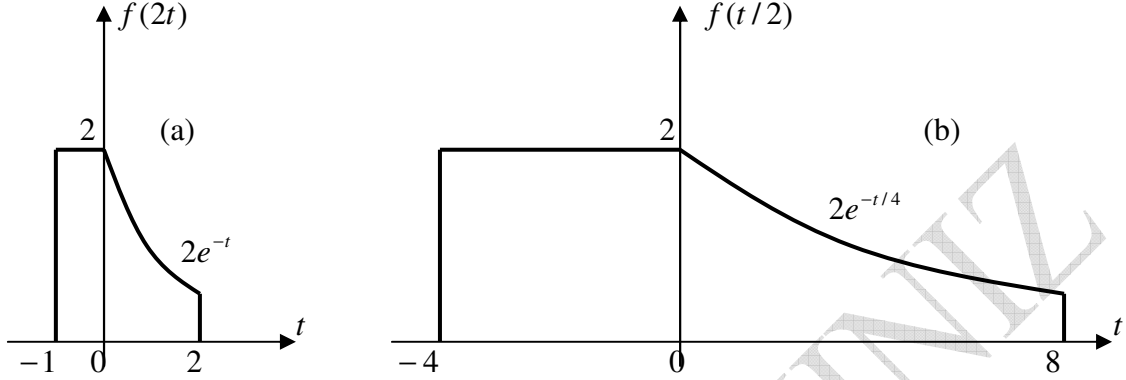
İşaretinin $f(2t)$ ve $f(t/2)$ karşılıklarını bulun.

Çözüm

a) $f(2t)$ fonksiyonu $f(t)$ fonksiyonun zaman ekseninde iki kat sıkıştırılmış (compressing) biçimidir. Diğer bir deyişle $f(t)$ verilmişken $f(2t)$ yi hesaplamak için $t = 2t$ yazılacağı düşünülmelidir. Buna göre oluşan $f(2t)$ aşağıdaki (a) daki gibi olacaktır. Daha önce zaman olarak $(-2,4)$ aralığında olan $f(t)$ işareti, $f(2t)$ olarak yarı yarıya azalarak (sıkışarak) $(-1,2)$ aralığına düşürülmüştür. Dikkat edilirse bu durumda $t = 2t$ için $2e^{-t/2}$ işareti de yarı yarıya sıkışmayı göstermek üzere $2e^{-t}$ biçimine dönüşmüştür.

b) Öte yandan birincisine ters biçimde $f(t/2)$ fonksiyonu $f(t)$ fonksiyonun zaman ekseninde iki kat genişletilmiş (expanding) biçimidir. Diğer bir deyişle $f(t)$ verilmişken $f(t/2)$ yi hesaplamak için $t = t/2$ yazılacağı düşünülmelidir. Buna göre oluşan $f(t/2)$

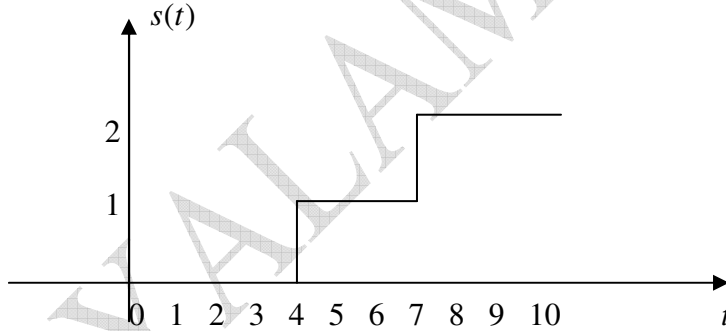
aşağıdaki (b) daki gibi olacaktır. Daha önce zaman olarak orijinal formda $(-2,4)$ aralığında olan $f(t)$ işareti, $f(t/2)$ olarak iki kat genişleyerek $(-4,8)$ aralığına düşürülmüştür. Dikkat edilirse bu durumda $t = t/2$ için $2e^{-t/2}$ işareti de iki kat genişlemeyi göstermek üzere $2e^{-t/4}$ biçimine dönüşmüştür..



Şekil 18 Sıkıştırılmış ve genişletilmiş fonksiyonlar

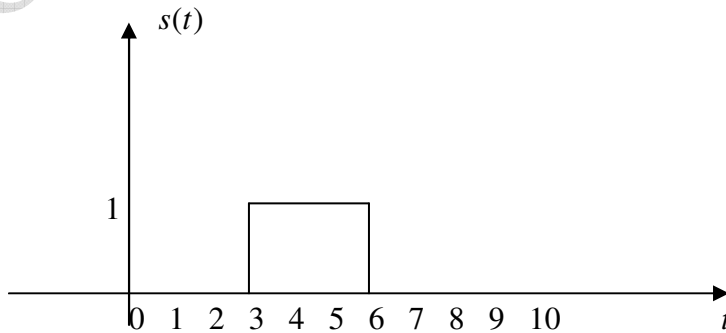
Örnek Aşağıdaki işaretleri çiziniz.

a) $s(t) = u(t - 4) + u(t - 7)$



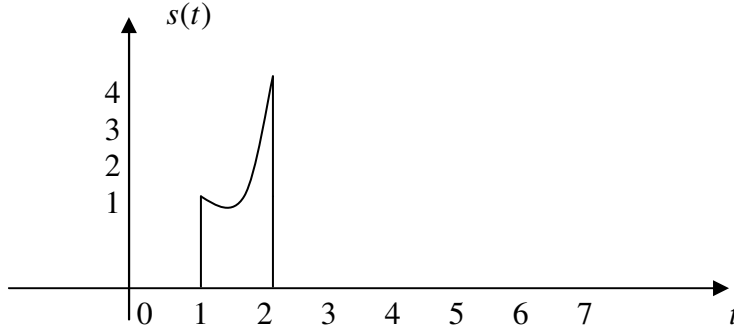
Şekil 19 İki birim basamak fonksiyonunun toplamı

a) $s(t) = u(t - 3) - u(t - 6)$



Şekil 20 İki birim basamak fonksiyonunun farkı

b) $s(t) = t^2[u(t-1) - u(t-2)]$

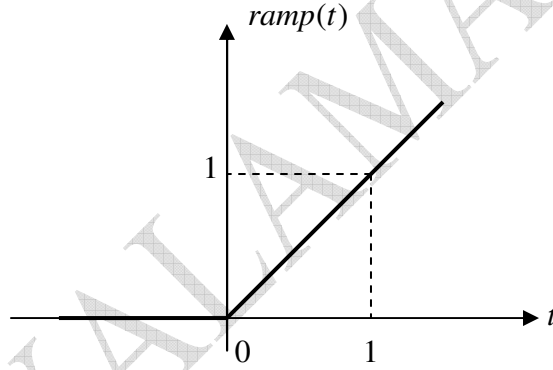


Şekil 40 Birim basamak fonksiyon işlemi

3. Birim Rampa Fonksiyonu

Birim rampa fonksiyonu olarakda bilinen bu işareti iki biçimde tanımlamak mümkündür.

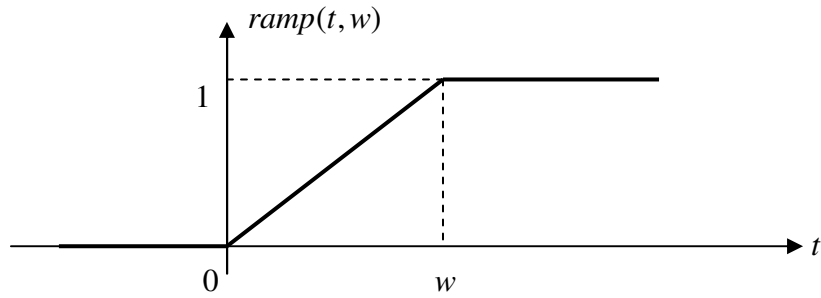
(a) Rampa fonksiyonu



Şekil 21 (a) : Birim rampa fonksiyonu

$$ramp(t) = \begin{cases} t & t > 0 \\ 0 & t \leq 0 \end{cases}$$

(b) Birim rampa fonksiyonu



Şekil 22 (b): Birim rampa fonksiyonu

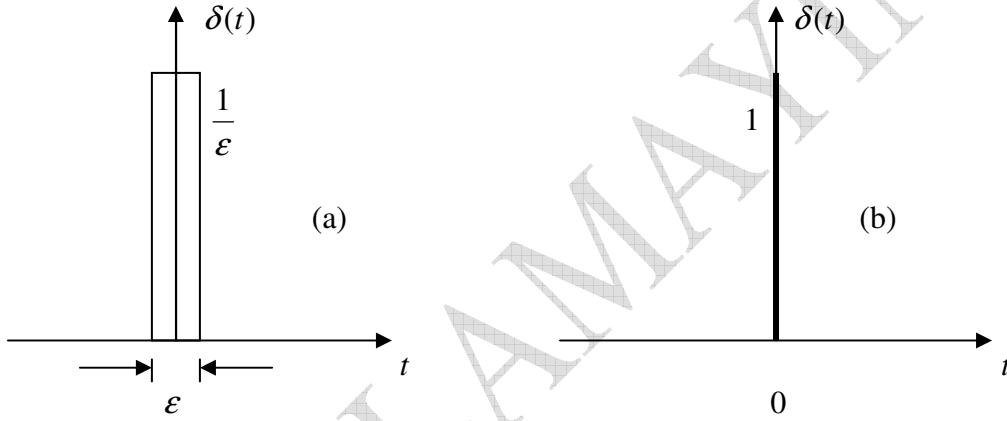
$$\text{ramp}(t) = \begin{cases} t & t \geq w \\ t/w & 0 \leq t \leq w = \int_{-\infty}^t u(\lambda) d\lambda = tu(t) \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

veya yalnızca ;

$$\text{ramp}(t) = \int_{-\infty}^t u(\lambda) d\lambda = tu(t)$$

9. Birim Impuls Fonksiyonu

Birim impuls veya Dirac delta fonksiyonu olarak bilinen bu fonksiyon aşağıdaki şekilde ve ifadesiyle fonksiyoneldir.



Şekil 23 Birim impuls (Delta fonksiyonu)

Şekillerden görüldüğü gibi, çok küçük değerlerde olan birim impuls delta fonksiyonunun $\delta(t)$, ε aralığının sifıra yaklaşmasıyla $\lim \varepsilon \rightarrow 0$, işaretin genliği $\frac{1}{\varepsilon}$ sonsuz büyük olabilmektedir, $\frac{1}{\varepsilon} \rightarrow \infty$.

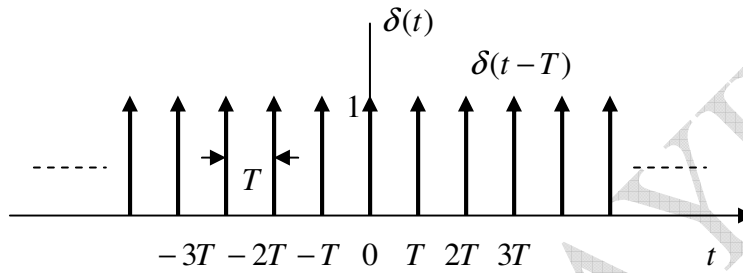
$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & t \neq 0 \\ \infty \text{ veya } 1 & t = 0 \end{cases}$$

ve

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \delta(t) dt = 1$$

olarak hesaplanmıştır. Burada genişliği sifıra yaklaşan ve genlik şiddeti sonsuza giden gibi görünen bir işaretin integrasyonunun nasıl oluyor da “1” çıkması biraz ilginç görünse de, bunun integrasyon yaklaşımından kaynaklandığını görmekteyiz. teorik de olsa sifır genişliğinde ve sonsuz (çok büyük) şiddetinde (genliğinde) olması sebebiyle üretilmesi ve çalışılması zor bir işarettir.

Açıklama : Birim impuls fonksiyonu da işaret ve sistem analizde oldukça önemli bir yere sahiptir. Öncelikle bahsedildiği gibi oldukça dar ($\varepsilon \cong 0$) ve yüksek şiddetli [$\frac{1}{\varepsilon} \rightarrow \infty (\varepsilon \rightarrow 0)$] bir işaret olduğundan pratikte elde edilmesi oldukça güçtür ve bu sebeple genişliği sıfır yerine belli miktarlarda olan dar darbeler olarak kullanılmaktadır. En önemli uygulama alanı, örnekleme fonksiyonu olarak kullanılmasıdır. Örnekleme işleminde $\delta(t)$ gibi “Delta Dirac” fonksiyonu olarak kullanılmaktadır. Görüntüsü aşağıdaki gibi olur. Burada her bir noktadaki değeri “1” olarak verilmiş işaretler “impuls” i göstermektedirler. Bunlar “ T ” miktar birbirlerinden ötelenmiş ($t - T$) veya ($t - nT$) işaret dizilerinden oluştuğu için aşağıdaki şekil impuls yerine “*impuls dizisi*” olarak adlandırılır.



Şekil 24 Impuls dizisi : örnekleme fonksiyonu

Impuls dizisinin örneklemedeki rolünü açıklarsak ; eğer bir $f(t)$ sürekli-zaman işareti örneklenecekse birim impuls tipli “Delta Dirac” fonksiyonu kullanılarak örnekleme işlemi

$$\bar{f}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT) \delta(t - nT)$$

biçiminde ifade edilir. Burada “T” örnekleme periodu olup, $\bar{f}(t)$ örneklenmiş işarettir. Impuls fonksiyonun bir diğer uygulaması ise bir giriş işaretinin bir sisteme uygulanmasında işareti bileşenlerine ayırarak (decomposition) her bir bileşenin sisteme tek tek uygulanmasına sağlamaya yöneliktir. Bu durumda girişin impuls olarak uygulanmasıyla sistemin buna vereceği tepki veya cevapta “birim impuls cevabı (unit impulse response)” olarak adlandırılır ki, bu işlem sonucunda linear zamandan bağımsız (LTI) sistemin çıkışındaki toplam cevap ta girişte impuls olarak uygulanan her bir bileşenin oluşturduğu tek tek impuls cevapların toplamından oluşacaktır ki, bu yaklaşım sürekli-zaman sistemlerin bir $f(t)$ girişine karşı gelen cevabının hesaplanmasında oldukça önemli ve faydalı bir katkı sağlar. Bu nedenle bir $f(t)$ giriş işaretinin “Delta” fonksiyonu kullanılarak bileşenlerine ayrılma işini sağlayan ifade bir integrasyon olarak aşağıdaki gibi yazılır.

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \delta(t - \tau) d\tau$$

Impuls örnekleri

İmpuls işareti olarak bir silahdaki merminin patlamasını, bir demircinin çekiçle sert bir şekilde demiri döverken çıkardığı sesi ve büyük boyutlu çalar saatlerin saat başlarını gösteren

yüksek frekansları çok geniş alanlardan yankı yapacak boyuttaki çan seslerini örnek verebiliriz. Buna göre kısaca delta olarak anacağımız bu sinyalin bazı özellikleri aşağıda verilmiştir.

1- $\int_{-\infty}^{\infty} \phi(t) \delta(t) dt = \phi(0)$

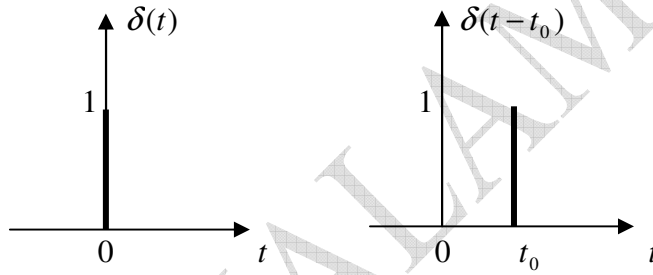
2- $\int_{-\infty}^{\infty} \phi(t) \delta(t - t_0) dt = \phi(t_0)$

3- $\delta(at) = \frac{1}{|a|} \delta(t)$

4- $\delta(t) = \delta(-t)$

5- Herhangi bir analog veya sürekli-zaman işareti delta fonksiyonu ile aşağıdaki gibi gösterilebilir.

$$s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau) \delta(t - \tau) d\tau$$



Şekil 25 Delta ve kaydırılmış delta fonksiyonları

6- Birim basamak ve delta fonksiyonu arasındaki bağıntı ;

a) $u(t) = \int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau$; $\delta(t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \delta_{\Delta}(t)$

veya

b) $\int_{-\infty}^t k \delta(\tau) d\tau = ku(t)$

Alternatif bir gösterimle ;

c) $u(t) = \int_0^{\infty} \delta(\tau - \sigma) d\sigma$

Ayrıca,

d) $\text{sgn}(t) = 2u(t) - 1$

e) $\frac{d}{dt}(\text{sgn}(t)) = 2\delta(t)$

f) $\frac{d}{dt}(u(t)) = \delta(t)$

g) $\frac{du}{dt} = \delta(t)$

h) $\frac{d^2u}{dt^2} = \delta'(t) = \text{belirsiz}$, $t = 0$ hariç.

i) $\frac{d^nu}{dt^n} = \frac{d^{n-1}\delta}{dt^{n-1}} = \delta^{n-1}(t) = \text{belirsiz}$, $t = 0$ hariç.

Örnek

Aşağıdaki birim impuls (delta, δ) fonksiyonu ile ilgili hesaplamaları yapınız.

Çözümler için

$$\delta(t) = \begin{cases} 1 & , t = 0 \\ 0 & , t \neq 0 \end{cases} \text{ olduğundan}$$

Koşulu göz önünde bulundurulacaktır.

a) $2t\delta(t)$

$$2t\delta(t) = 0$$

b) $\cos t\delta(t - \pi)$

$$\cos t\delta(t - \pi) = \cos \pi\delta(\pi - \pi) = -1 = -\delta(t)$$

c) $\int_{-2}^5 (3t^2 + 1)\delta(t)dt$

$$\int_{-2}^5 (3t^2 + 1)\delta(t)dt = (t^2 + t)t_{-2}^5\delta(t) = 0$$

d) $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2t+4}\delta(t)dt$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2t+4}\delta(t)dt = e^{0+4} = e^4$$

Örnekler

$$(a) (t^2 - 4)\delta(t) = -4\delta(t)$$

$$(b) [3\cos(t^3 + \pi)\delta(t)] = -3\delta(t)$$

$$(c) \left[\frac{\omega + 12}{\omega^2 - 4} \delta(\omega + 5) \right] = \frac{7}{21} \delta(\omega + 5)$$

$$(d) 4e^{-(t-3)}\delta(3-t) = 4\delta(t)$$

Ayrık işaretin impuls fonksiyonuyla gösterimi

Bölümün başında ele aldığımız bir $x(n)$ dizisinin

$$x(n) = \{2, 3, 5, 3, 4, 2, 1\}$$

elemanlarından oluştuğunu ve bu diziye ayrık işaret olarak

$$\begin{aligned} x(n) &= \dots + x(-4) + x(-3) + x(-2) + x(-1) + x(0) + x(1) + x(2) + x(3) + x(4) + x(5) + x(6) + \dots \\ &= \dots + 0 + 0 + 2 + 3 + 5 + 3 + 4 + 2 + 1 + 0 + 0 + \dots \end{aligned}$$

veya

$$\begin{aligned} x(n) &= x(-2) + x(-1) + x(0) + x(1) + x(2) + x(3) + x(4) \\ &= 2 + 3 + 5 + 3 + 4 + 2 + 1 \end{aligned}$$

yazıp, sonrasında da impuls fonksiyonuna bağlı olarak

$$x(n) = 2\delta(n+2) + 3\delta(n+1) + 5\delta(n) + 3\delta(n-1) + 4\delta(n-2) + 2\delta(n-3) + \delta(n-4)$$

veya

$$\begin{aligned} x(n) &= \dots + x(-2)\delta(n+2) + x(-3)\delta(n+3) + x(0)\delta(n) \\ &\quad + x(1)\delta(n-1) + x(2)\delta(n-2) + x(3)\delta(n-3) + x(4)\delta(n-4) + \dots \end{aligned}$$

yazıp, hatta

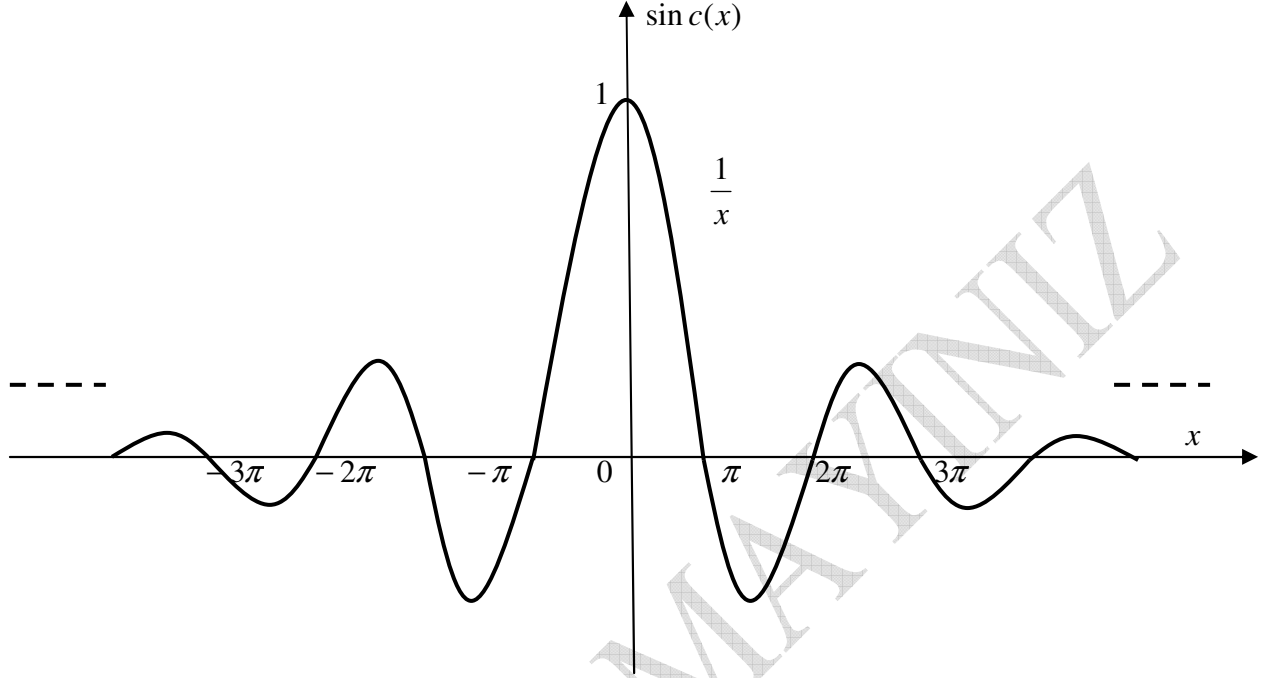
$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) \delta(n-k)$$

formatında genellediğimizi hatırlayalım. Dizinin alt ve üst elemanları için $k = [-2, 4]$ olduğunu düşünecek olursak, ifadenin örneğe uygun olarak

$$x(n) = \sum_{k=-2}^4 x(k) \delta(n-k)$$

olarak yazılabileceğini biliyoruz. Bu yolla $x(n)$ dizisinin her bir “ k ” anındaki değeri $n = k$ için $\delta(n-k) = 1$ ile alınarak dizinin tüm değerleri elde edilmektedir. Bu tüm değerler $x(n)$ ayrık işareti olduğundan, beklenildiği gibi dizinin impuls fonksiyonuyla gösterimi sağlanmış olmaktadır. Bir işaretin impuls fonksiyonuna bağlı bu tarzdaki gösterimi, işaret işleme ve sistem analizlerinde sık kullanılan bir yaklaşımdır.

4. Sinc işaret fonksiyonu



Şekil 26 $\sin c(x)$ İşaretinin görünümü

$$\sin c(x) = \frac{\sin x}{x}$$

Şekilden görüldüğü gibi $\sin c(x)$ darbe fonksiyonu yalnızca $x=0$ anında 1 değerini alan ($\delta(x)=1=\delta(0)$ gibi), π nin tam sayı katlarında ($x=\pm\pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi, \dots, \pm k\pi$) ise sıfır değerini almakta diğer bütün durumlarda ise, $\frac{\sin x}{x}$ değerini almaktadır. İşaretin kuyruk kısmındaki salınımları izlenirse, işaretin genliği sonsuza giderken, sıfıra yaklaşmakta, ancak hiç bir zaman sıfır olmamaktadır. Bu açıdan bu görünümüyle zaman domeninde zaman sınırsız, frekans domeninde ise band sınırsız işaretlere örnektir. İşareti özetlersek aşağıdaki tanımına ulaşırız.

$$\sin c(x) = \begin{cases} 1 & x = 0 \\ 0 & x = \pm\pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi, \dots, \pm k\pi \\ \frac{\sin x}{x} & x \neq 0 \text{ ve } x \neq \pm k\pi \end{cases}$$

Bazen örnekleme işareti ve “gate function” olarak da bilinen bu fonksiyon önemli bir işaret türü olup bir çok uygulamada kullanılmaktadır. Filtre fonksiyonu olarak da kullanılan bu işarete biraz yakından göz atmak yararlı olacaktır. Bu fonksiyonun tanım aralığı

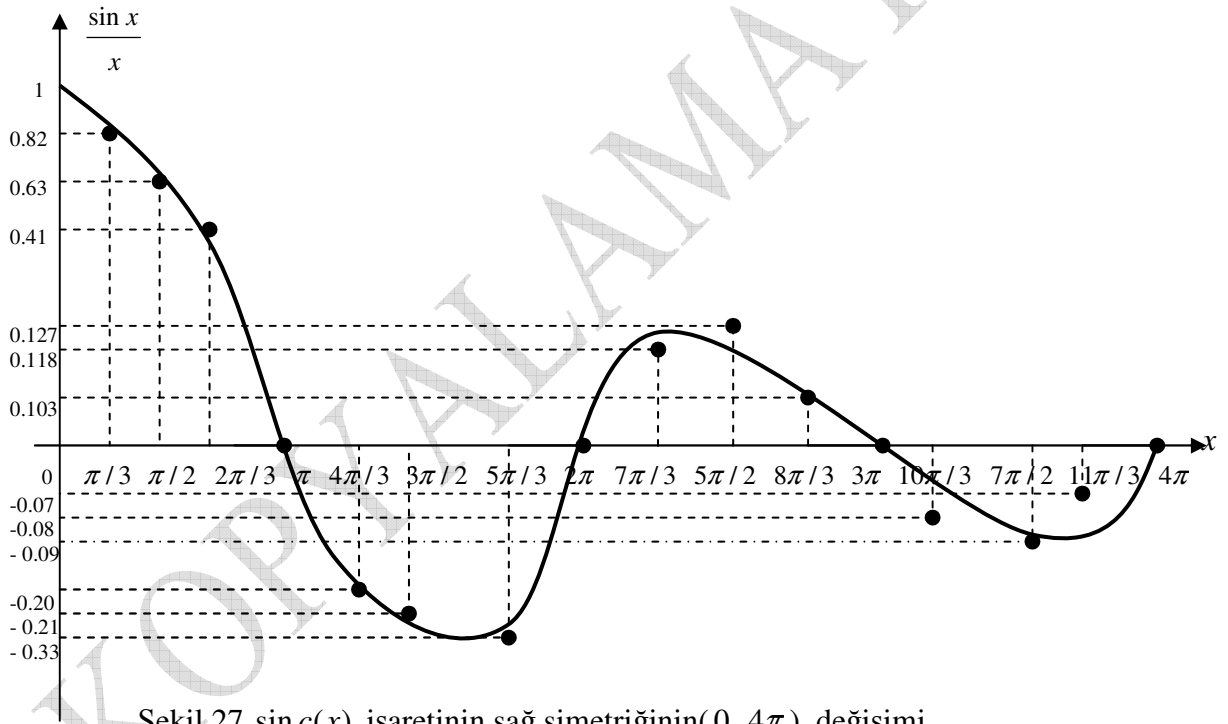
$$\text{sinc}(x) = \frac{\sin(x)}{x}$$

veya

$$\text{Sinc}(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$$

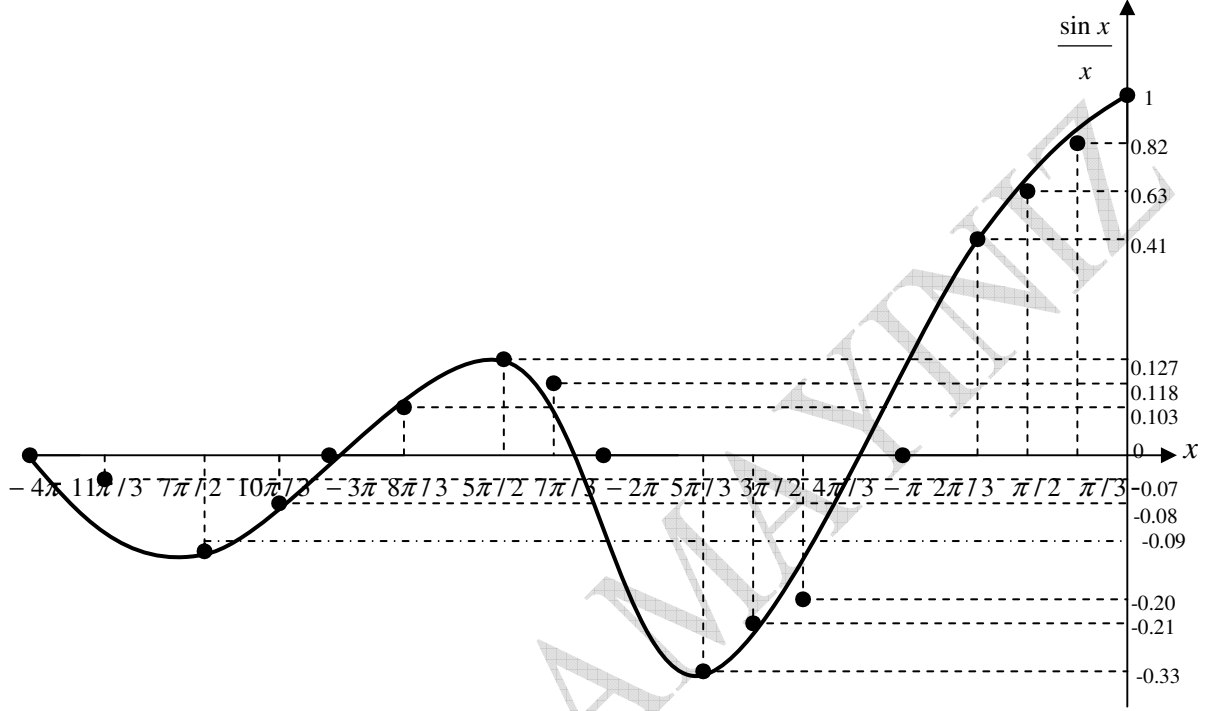
Simetrik ve çift fonksiyon olan $\sin x/x$ fonksiyonunun simetrisinin her iki tarafı için değişimleri aşağıdaki şekillerde sırasıyla ele alınmıştır.

x	0	$\pi/3$	$\pi/2$	$2\pi/3$	π	$4\pi/3$	$3\pi/2$	$5\pi/3$	2π	$7\pi/3$	$5\pi/2$	$8\pi/3$	3π	$10\pi/3$	$7\pi/2$	$11\pi/3$	4π
$\frac{\sin x}{x}$	1	0.82	0.63	0.41	0	-0.20	-0.212	-0.33	0	0.118	0.127	0.103	0	-0.082	-0.09	-0.075	0

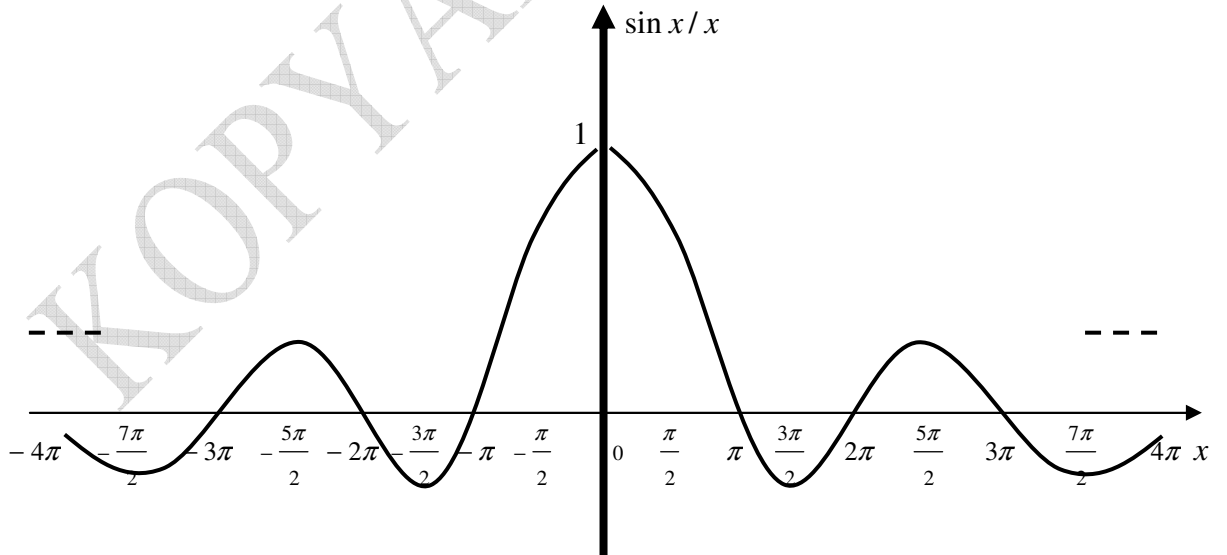


Şekil 27 $\text{sinc}(x)$ işaretinin sağ simetrisinin $(0, 4\pi)$ değişimi

x	0	$-\pi/3$	$-\pi/2$	$-2\pi/3$	$-\pi$	$-4\pi/3$	$-3\pi/2$	$-5\pi/3$	-2π	$-7\pi/3$	$-5\pi/2$	$-8\pi/3$	-3π	$-10\pi/3$	$-7\pi/2$	$-11\pi/3$	-4π
$\frac{\sin x}{x}$	1	0.82	0.63	0.41	0	-0.20	-0.212	-0.33	0	0.118	0.127	0.103	0	-0.082	-0.09	-0.075	0



Şekil 28 $\sin c(x)$ işaretinin sol simetriğinin $(-4\pi, 0)$ değişimi



Şekil 29 $\sin c(x)$ işaretinin $(-4\pi, 4\pi)$ değişimi

Şekile göre sol ve sağ yarı tarafta simetrik durumdaki, kuyruk kısımlarının aslında bir noktada durmadığı, sonsuza devam etmektedir. Bu yüzden band sınırsız işaretler sınıfındadır.

Örnek

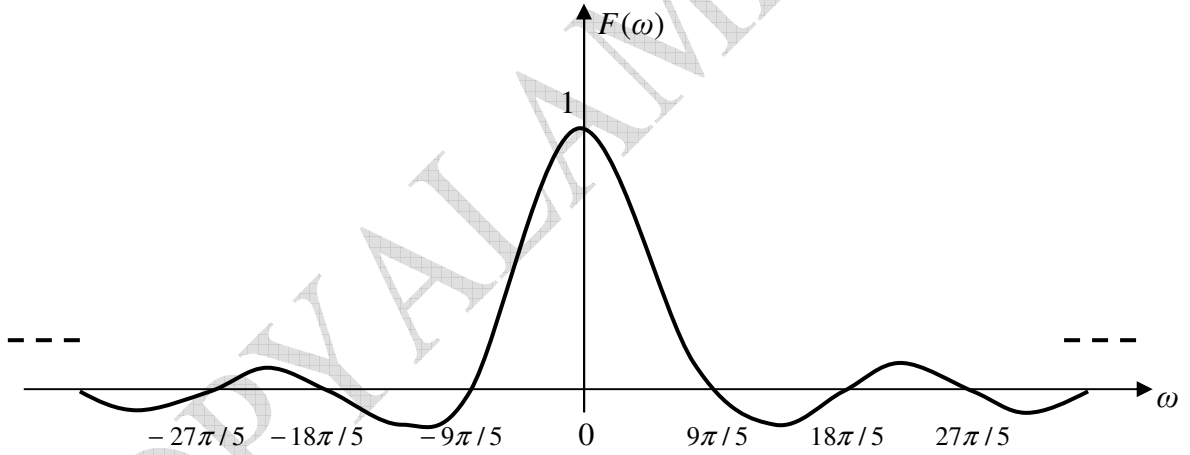
$F(\omega) = \text{sinc}\left(\frac{5\omega}{9}\right)$ olarak verilen darbe fonksiyonunun grafik gösterimini yapın

Çözüm

Bunun için yukarıda alınan referans $\text{sinc}(x)$ işaretinin $F(\omega) = \text{sinc}\left(\frac{5\omega}{9}\right)$ fonksiyonuna karşılık gelen değerlerini tespit etmemiz gerekiyor. Öncelikle $\omega = 0$ için $F(\omega) = 1$ olduğunu biliyoruz. Ardından $F(\omega) = 0$ gibi sıfır noktalarını tayin etmeye çalışalım. Bunun için $\text{sinc}(x) = 0$, $x = \pm\pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi, \dots, \pm k\pi$ noktalarını göz önüne almamız gerekiyor.

$$\frac{5\omega}{9} = \pi, \quad \frac{5\omega}{9} = 2\pi, \quad \frac{5\omega}{9} = 3\pi$$
$$\omega = \frac{9\pi}{5}, \quad \omega = \frac{18\pi}{5}, \quad \omega = \frac{27\pi}{5}$$

Tüm bunların ışığında $F(\omega) = \text{sinc}\left(\frac{5\omega}{9}\right)$ fonksiyonunun değişimi aşağıdaki gibi olacaktır.

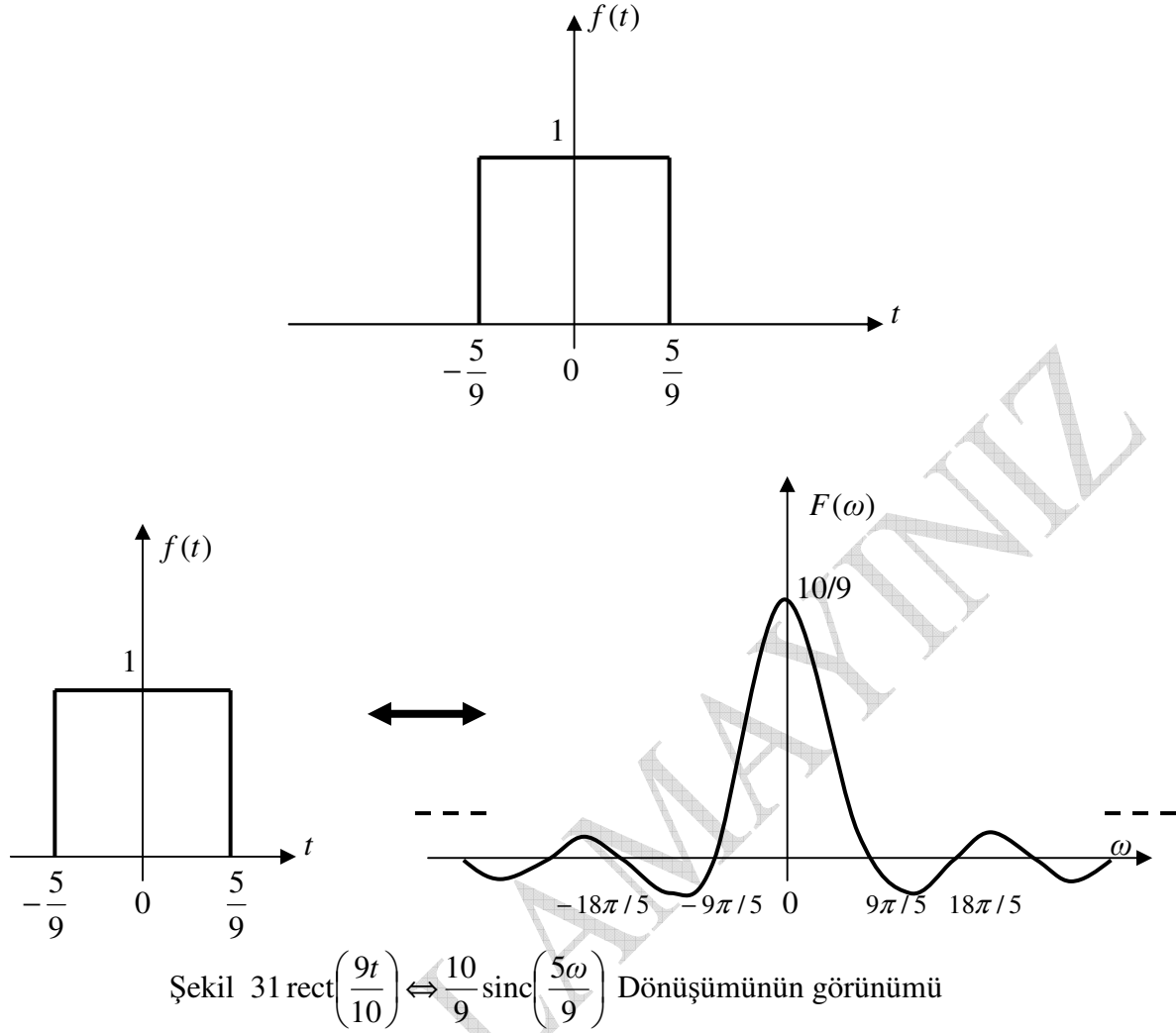


Şekil 30 $F(\omega) = \text{sinc}\left(\frac{5\omega}{9}\right)$ İşaretinin görünümü

$F(\omega) = \text{sinc}\left(\frac{5\omega}{9}\right)$ Fonksiyonunu sağlayan darbe fonksiyonunun t domenindeki karşılığı ise

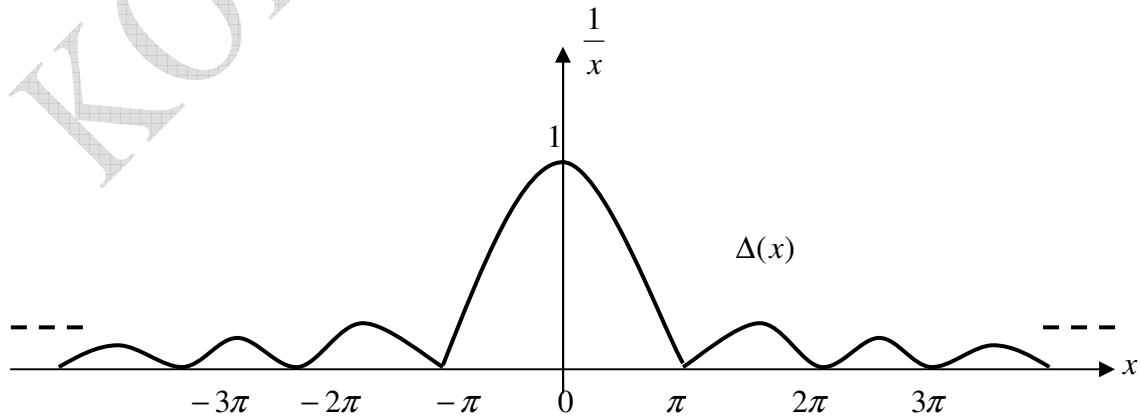
$$\text{rect}\left(\frac{9t}{10}\right) \Leftrightarrow \frac{10}{9} \text{sinc}\left(\frac{5\omega}{9}\right)$$

ifadesinden $f(t) = \text{rect}\left(\frac{9t}{10}\right)$ olarak bulunur. Bunun görüntüsü



5. $\Delta(x)$: Üçgen Fonksiyonu

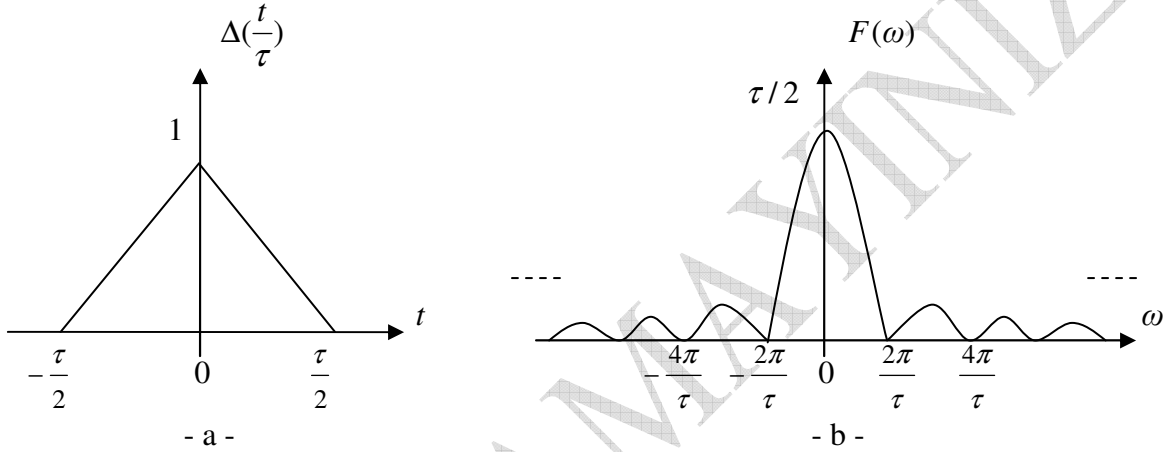
Üçgen fonksiyonu olarak bilinen $\Delta(x)$ işaretinin genel görünümü aşağıdaki gibidir.



Şekil 32 $\Delta(x)$ gösterimi

$$\Delta(x) = \sin^2(x) = \begin{cases} 1 & x = 0 \\ 0 & x = \pm\pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi, \dots, \pm k\pi \\ \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 & x \neq 0 \text{ ve } x \neq \pm k\pi \end{cases}$$

Şekil ve tanım aralığı itibarıyla $\Delta(x)$ işaretinin daha önce ele alınan $\sin c(x)$ işaretiyle büyük benzerlik içinde olduğu görülmektedir. Buna dair aşağıda örnekler verilmiştir.



Şekil 33 Üçgen işaretin $\Delta(\frac{t}{\tau})$ Fourier gösterimi : $F(\omega) = \frac{\tau}{2} \sin^2(\frac{\omega\tau}{4})$

Örnek

$F(\omega) = \Delta(\frac{\omega}{9})$ olarak verilen fonksiyonunun grafik gösterimini yapın

Çözüm

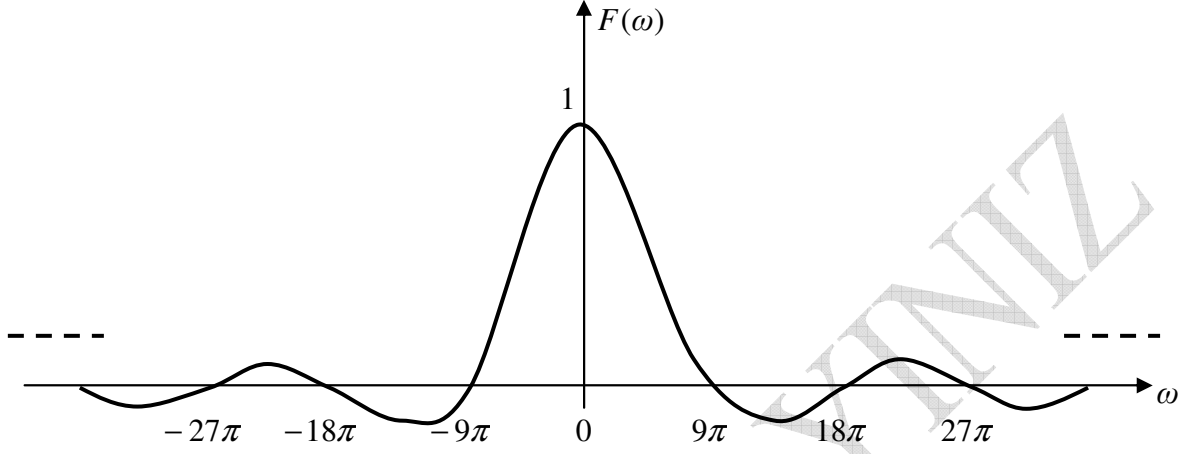
$\omega = 0$ için $F(\omega) = 1$

$$\frac{\omega}{9} = \pi, \quad \frac{\omega}{9} = 2\pi, \quad \frac{\omega}{9} = 3\pi$$

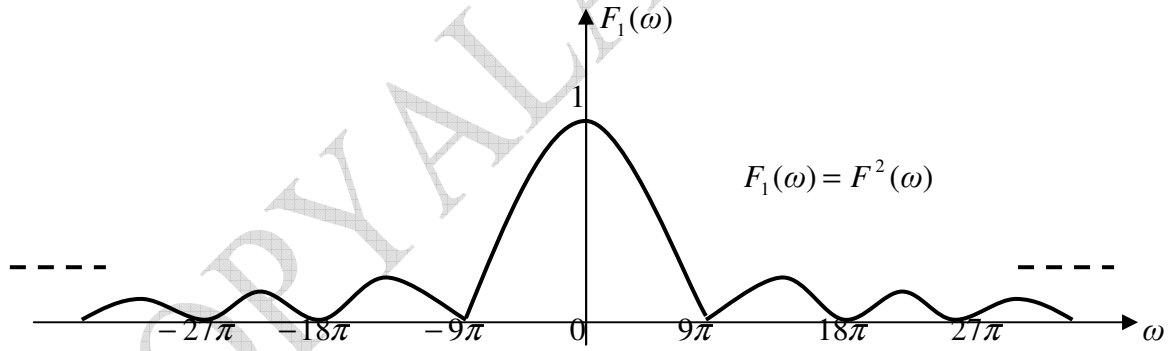
$$\omega = 9\pi, \quad \omega = 18\pi, \quad \omega = 27\pi$$

Örnek

Tüm bunların ışığında $F(\omega) = \text{sinc}\left(\frac{\omega}{9}\right)$ fonksiyonunun değişimi aşağıdaki gibi olurdu.



Şekil 34 $F(\omega) = \text{sinc}\left(\frac{\omega}{9}\right)$ İşaretinin görünümü



Şekil 35 $F_1(\omega) = \Delta\left(\frac{\omega}{9}\right)$ gösterimi

Her iki şekil incelendiğinde, ikinci işaret $F_1(\omega)$ ile $F(\omega)$ arasında yakın ilişki görülmektedir. $F_1(\omega)$ işareti, $F(\omega)$ işaretinin negatif bölümlerinin pozitif alınmasıyla oluşturulmuştur. Buna göre

$$F_1(\omega) = F^2(\omega)$$

veya kompleks durumda,

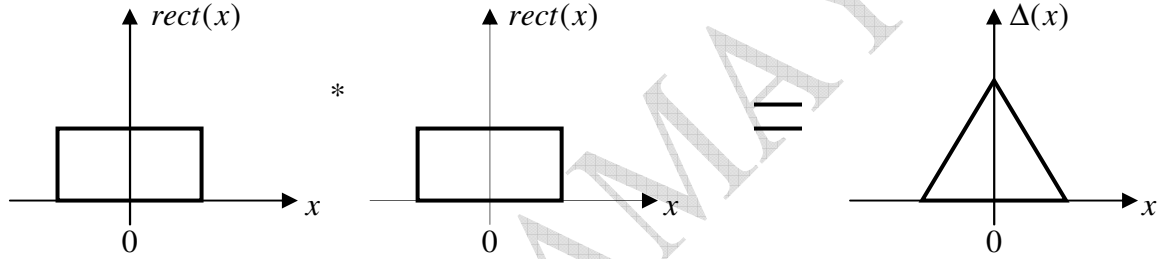
$$F_1(\omega) = |F(\omega)|^2$$

sinc(x) Fonksiyonu Genlik Spektrumu ve $\Delta(x)$ Fonksiyonu

Şu ana kadar ki verilerin ışığında,

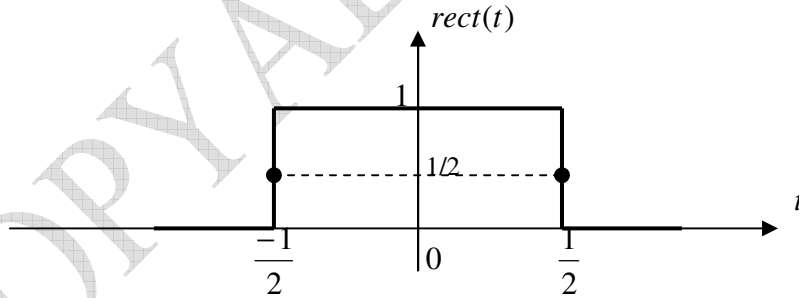
$$\text{rect}(x) \leftrightarrow \text{sinc}(\omega) \text{ ve } \text{sinc}(x) \leftrightarrow \text{rect}(\omega)$$

bağıntısıyla $\text{rect}(x)$ ve $\text{sinc}(x)$ fonksiyonlarının Fourier ve ters Fourier dönüşümleri arasında ilişki olduğu görülmektedir. Bu nedenle zaman domenindeki dörtgen veya dikdörtgen bir dalganın frekans domenindeki (Fourier transformasyonu) arasında ilişki olduğu görülmektedir. Buradan, zaman domenindeki $\text{rect}(x)$ dörtgenin frekans domeninin $\text{sinc}(\omega)$ fonksiyonu olduğunu pratikten bilmekteyiz. Bunun terside doğrudur. Bununla beraber yukarıda gösterildiği gibi $\text{rect}(x)$ dörtgen fonksiyonuyla $\Delta(x)$ üçgen fonksiyonu arasındaki ilişkiyi de görmüş bulunuyoruz. Bunun sonucu olarak iki darbe fonksiyonun çarpımından (konvülasyonundan), üçgen işaretinin elde edileceği aşağıda şematize edilmiştir.



Şekil 36 $\Delta(x) = \text{rect}(x) * \text{rect}(x)$

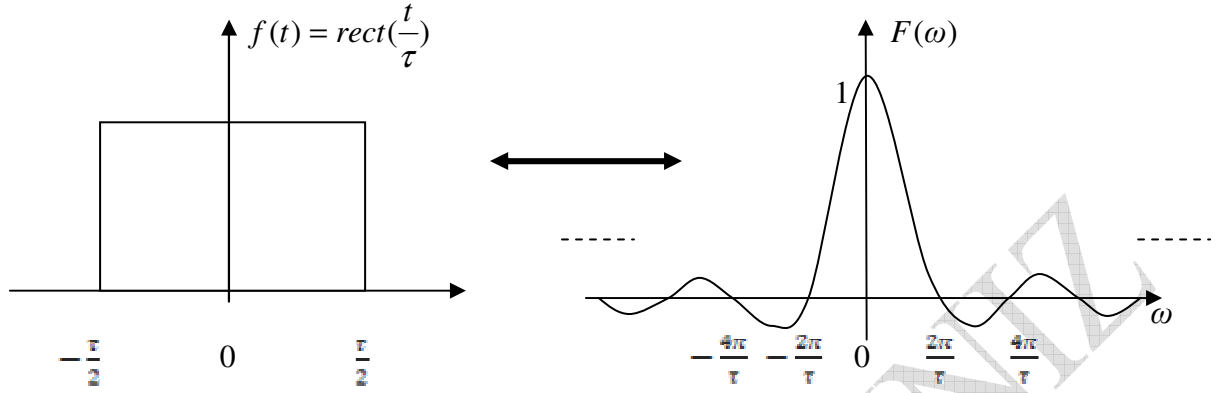
6. Diktörtgen işaret fonksiyonu



Şekil 37 Birim diktörtgen fonksiyonu

$$\text{rect}(t) = \begin{cases} 1 & |t| < \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & |t| = \frac{1}{2} \\ 0 & |t| > \frac{1}{2} \end{cases}$$

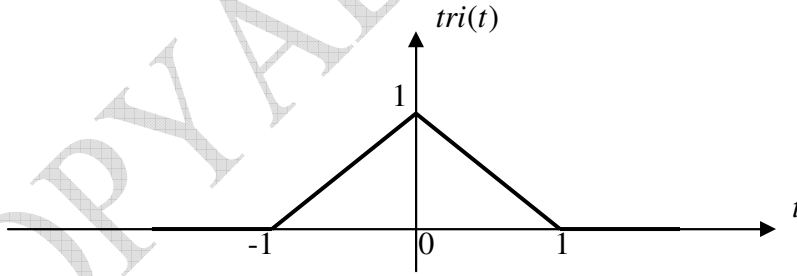
Darbe (pulse) özellikli dikdörtgen fonksiyon işaret işleme ve sistem analizde oldukça önemli bir fonksiyondur. Daha çok filtre (alçak geçiren) özellikli bu fonksiyonun (ω) frekans spektrumu aşağıda gösterilmiştir. Bu gösterim Fourier transformasyonuna göre yapılmıştır.



Şekil 38 Dörtgen işaretin $rec(\frac{t}{\tau})$ Fourier gösterimi : $F(\omega) = \tau \sin c(\frac{\omega \tau}{2})$

Görüldüğü gibi $(-\frac{\tau}{2}, \frac{\tau}{2})$ aralığındaki dikdörtgen fonksiyon $f(t) = rect(\frac{t}{\tau})$ frekans spektrumunda (ω), $\omega_0 = \frac{2\pi}{\tau}$ olmak üzere $(-\omega_0, +\omega_0)$ band aralığında (sıfıra yakın noktalarda) aktif olan “alçak geçiren filtre (low pass filter (LPF))” gibi davranmaktadır. Sonuçta dikdörtgen işaretin böyle filtre tipli özelliği işaret ve sistem analizde yüksek frekanslı bileşenlerin eliminasyonuna oldukça önemli bir katkı sağlayacaktır. Bu nedenle dikdörtgen işaret fonksiyonu genellikle alçak geçiren filtre kavramıyla özdeşleşmiş bir fonksiyondur.

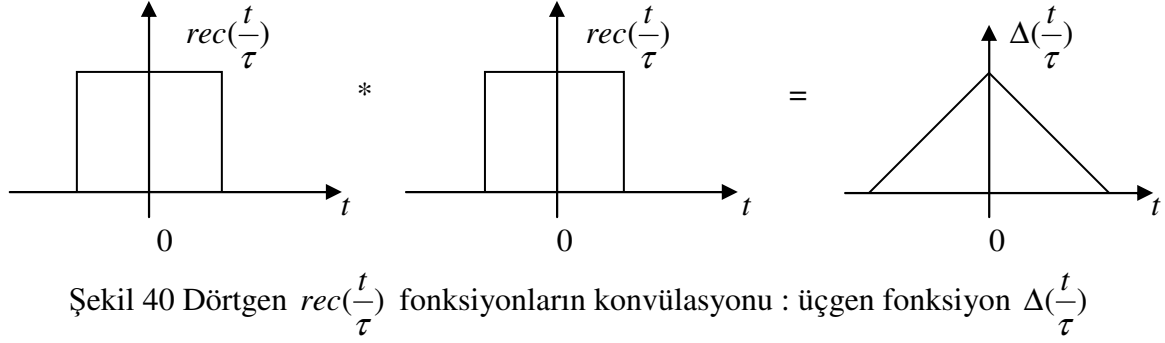
7. Üçgen işaret fonksiyonu



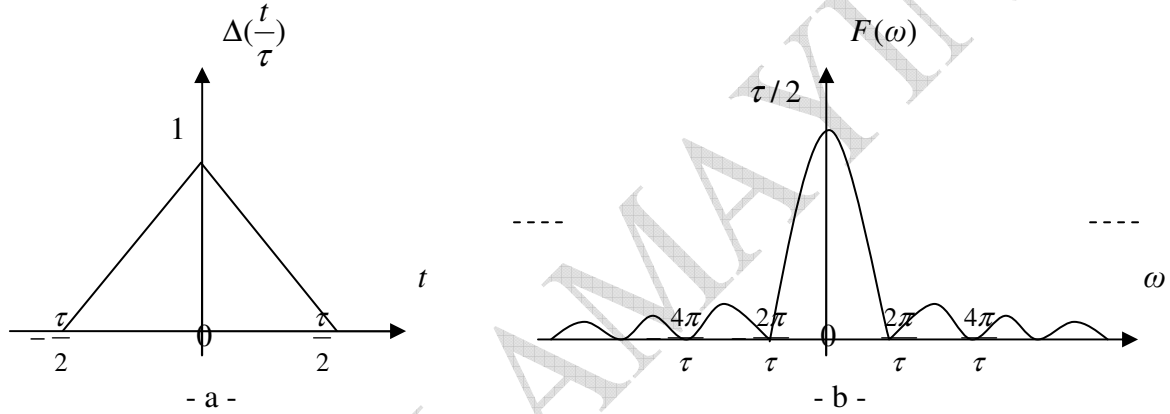
Şekil 39 Birim üçgen fonksiyonu

$$tri(t) = \begin{cases} 1 - |t| & |t| < 1 \\ 0 & |t| \geq 1 \end{cases}$$

Darbe özellikli dikdörtgen işaret fonksiyonu gibi üçgen fonksiyonun da işaret işlemede önemli işlevleri vardır. Aslında üçgen fonksiyon aşağıda gösterildiği gibi özdeş iki dikdörtgen fonksiyonun konvülasyonundan ibarettir.



Yapısında dikdörtgen dalga olduğu için bir anlamda onun özelliklerini (özellikle filtresel) kapsayacaktır. Bu nedenle spektrum görünümü $F(\omega) * F(\omega) = |F(\omega)|^2$ biçiminde olacaktır. Bu yapıda tüm salınımlar pozitif olacağından aşağıdaki spektrum elde edilecektir.



Şekil 41 Üçgen işaretin $\Delta(\frac{t}{\tau})$ Fourier gösterimi : $F(\omega) = \frac{\tau}{2} \text{sinc}^2(\frac{\omega\tau}{4})$

Şekil (b) deki $F(\omega)$ spektrumundan, aslında üçgen fonksiyonunda, darbe fonksiyonu ($\text{sinc}(\omega)$) gibi, band sınırsız bir işaret olduğunu görmekteyiz.

8. Bell (zil) Fonksiyonu

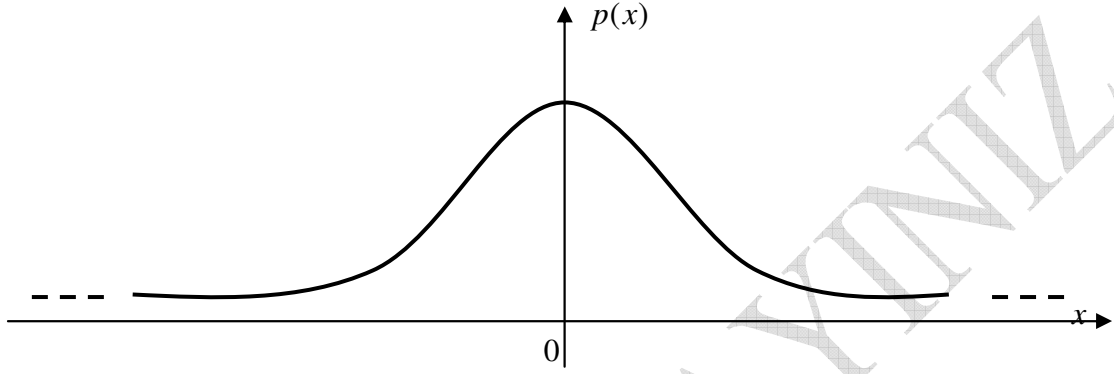
Olasılık teorisinde normal dağılım veya Gaussian dağılım olarak bilinen dağılım aslında sürekli olasılık dağılımı olup, uzun vadede yani çok verinin göz önüne alınması halinde, ortalama bir değere yaklaştığını, verinin ortalama etrafında dağıldığını gösterir. Böyle bir dağılım, zil (bell) yapısında olduğu için bell fonksiyonu olarak anılmaktadır. Bu dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)}$$

Denklemdaki σ , standart sapma (normal fonksiyonun genişliğini ölçer) ve μ ortalamayı (aritmetik) göstermektedir. Ortalamanın sıfır ($\mu = 0$) ve standart sapmanın "1" ($\sigma = 1$) alınması durumundaki $p(x)$ olasılık yoğunluk fonksiyonu, standart normal dağılım olarak anılır.

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\left(-\frac{x^2}{2}\right)}$$

Bu özellikteki bell fonksiyonunun genel görünümü aşağıdaki gibidir.

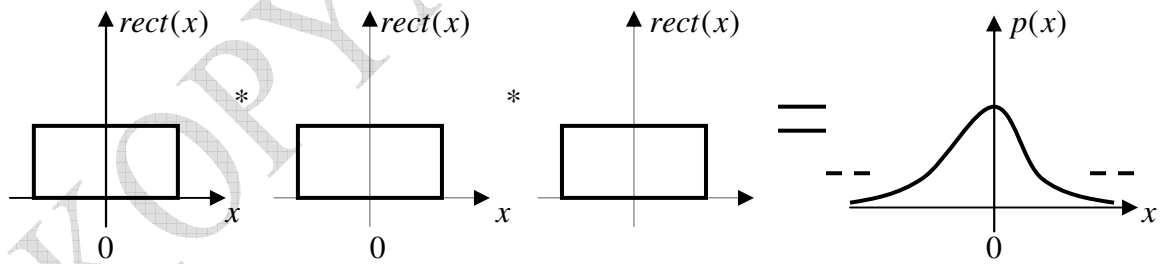


Şekil 42 Bell (Gaussian) fonksiyonu

Gaussian fonksiyonun da işaret analizde ki $rect(x)$ dörtgen işaretle ilintili olduğunu görmekteyiz. Bu ilişkinin

$$p(x) = rect(x) * rect(x) * rect(x)$$

biçiminde, bu kez genel anlamda üç tane dörtgen işaretin çarpımının (konvülasyonunun) Gaussian (bell) fonksiyonu oluşturduğunu görmekteyiz.

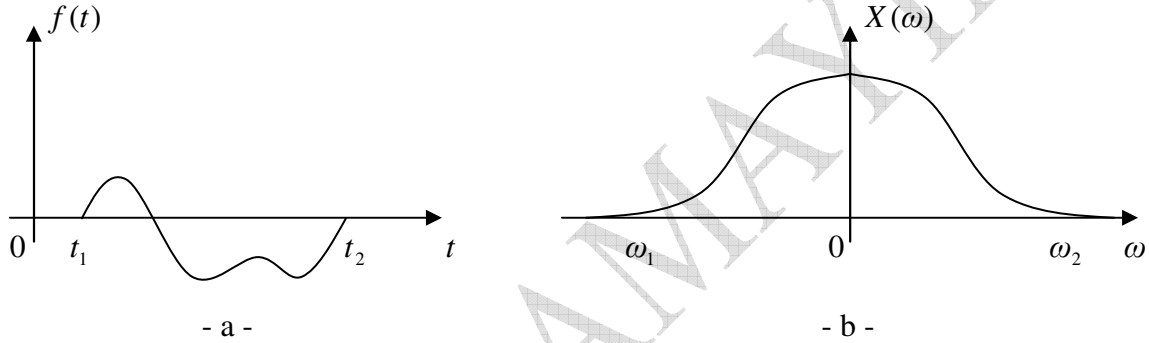


Şekil 43 $p(x) = rect(x) * rect(x) * rect(x)$

Band-limitli ve Zaman-limitli işaretler

Zaman limitli (band-limited) işaret belli bir zaman aralığının dışında değeri sıfır olan işarettir. Band-sınırlı (band-limited) işaret ise belli bandın dışında frekansı sıfır olan işaretlerdir. Band sınırlı işaretlerde bandın dışı için Fourier transformasyonu sıfırdır ($|F(\omega)| = 0$). Periyodik olmayan işaretler band-sınırlı işaretlerin en tipik biçimidir.

Zaman limitli işarete belli bir zaman aralığındaki bir işaretin o işarete ait tüm bandı gösteremeyeceği bilinmektedir. Veya belli bir zaman aralığındaki işaretin o işareti oluşturan tüm frekansları içermeyeceğinden zaman-sınırlı işaret aynı zamanda band-sınırlı işaret olamamaktadır. Bunun terside doğrudur. Band-sınırlı bir işaret aynı zamanda zaman-limitli olamamaktadır. Bir işaret aynı anda hem band hem de zaman limitli olamamasına karşın aynı anda hem frekans hem de zamanda limitsiz olabilir. Aşağıdaki şekil (a) ve (b) de zaman-sınırlı ve band-sınırlı işaretler verilmiştir.



Şekil 44 (a) Zaman-sınırlı işaret (b) Band-sınırlı işaret

Bir örnekle işaretin hem band hem de zaman limitli olamayacağını gösterebiliriz. Eğer $x(t)$ işareti $t_1 < t < t_2$ arasında zaman-limitli (bu değerlerin dışında sıfır) ve aynı anda band limitli kabul edelim. Eğer bu durumda $x(t)$ nin Fourier transformasyonu alındığında

$$F\{x(t)\} = X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

Bu ifadeye göre $x(t)$ nin Fourier transformasyonu olarak $X(\omega)$ band-sınırlıdır, çünkü belli frekans bölgesinin dışında Fourier transformasyonu sıfırdır ($|X(\omega)| = 0$). Buna karşın denklemden görüldüğü gibi $x(t)$ işareti aynı zamanda zaman-limitli değildir, çünkü $t_1 < t < t_2$ yerine $(-\infty, \infty)$ gibi sonsuz aralık göz önüne alınmıştır. Diğer bir deyişle $x(t)$ ancak zaman sınırsız $t = (-\infty, \infty)$ aralığında band-sınırlı olabilmektedir. Bundan dolayı bir işaret ($x(t)$) aynı anda hem band-sınırlı hemde zaman-sınırlı olarak alınamamaktadır. Bunun terside iddia edilebilir. Zaman sınırlı bir işaret aynı zamanda band sınırlı olamamaktadır. Bunu da,

$$F^{-1}\{X(\omega)\} = x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

bağıntısından (ters Fourier transformasyonu) görebilmekteyiz. Zaman olarak sınırlı ($t_1 < t < t_2$) işaret, denklemden görülebileceği gibi ancak band olarak sınırsız $\omega = (-\infty, \infty)$ aralığı için elde edilebildiğinden, bir işaret zaman sınırlıysa, aynı anda band sınırlı olamamaktadır. Buradan ayrıca çıkarılacak iki sonuç vardır.

NOT : Zaman domeninde dörtgen ve üçgen olan fonksiyonların frekans domenindeki davranışları yukarıda ele alınan $Sinc(\omega)$ ve $Sinc^2(\omega)$ tipli spektrumları sonsuz band vaad ederler. Bu yüzden bu tip fonksiyonların modülasyonu (darbe modülasyonları) ve örneklenmesi daima kritiktir.

İşaret Fonksiyonunun Parametreleri Üzerine İşlemler

Bu bölümde bir $y(t)$ işareti, $x(t)$ işaret fonksiyonuna bağlı olarak genel,

$$y(t) = Ax\left(\frac{Bt}{C} \mp D\right)$$

biçimiyle ele alınıp, **A,B,C,D** gibi genlik, frekans ve faz parametrelerine göre $y(t)$ nin cevapları çözümlenerek açıklanacaktır. Detaylara girmeden, yukarıdaki değişkenlerin işlevlerini kısaca verirsek ;

A : $x(t)$ işaret fonksiyonunun genliğini (amplitude), şiddetini belirtir.

B : $x(t)$ işaret fonksiyonunun frekansını, salınım sayısını artırır (sıkıştırma, compressing)

C : $x(t)$ işaret fonksiyonunun periyodunu artırarak, frekansını düşürür (yavaşlama, expanding)

D : $x(t)$ işaret fonksiyonunun t zaman eksenindeki ötelenme (kaydırma, shifting) miktarını belirtir. Bu işaretin “-” olması sağa doğru ötelenmeyi (gecikme, delay), “+” olması ise, sola doğru ötelenmeyi (önceki değerlere kaydırma, advance) gösterir.

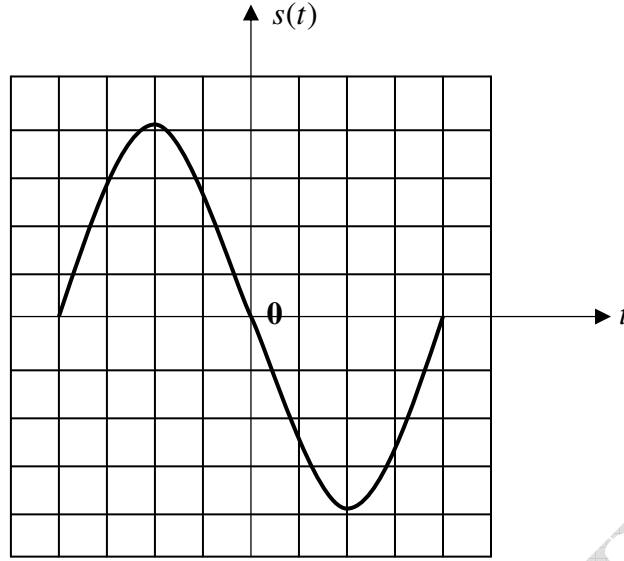
Dört değişken aşağıda grafik ve açıklamalarıyla verilmiştir.

1. Genlik Ölçekleme (A)

Burada bir işaretin bir sabitle çarpımı ile oluşan değişimin, düşey ekseninde gösterimi söz konusudur. Genliği gösteren sabitin düşey eksenindeki \pm büyüklüğü, aynı zamanda işaretin gücünü göstermeye yarayan bir parametredir. Eğer işaret $s(t)$ ise bunun A gibi bir sabitle çarpımı

$$As(t)$$

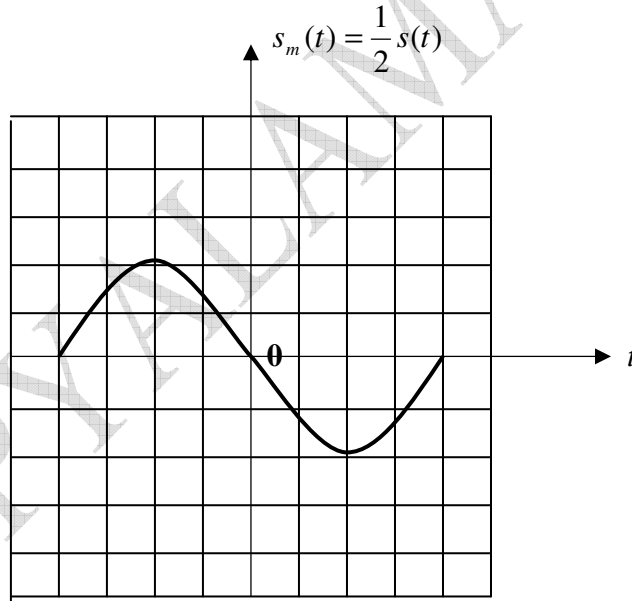
olacaktır. Görüldüğü gibi işaretin sabit ile çarpımı işaret genliğini değiştirmeye (arttırma/azaltma) yönelik bir işlemdir. Aşağıda üç tip genlik ölçeklendirilme işlemi verilmiştir.



Şekil 45 İşaretin genlik – zaman domeninde ölçeklendirilmesi

Örnek

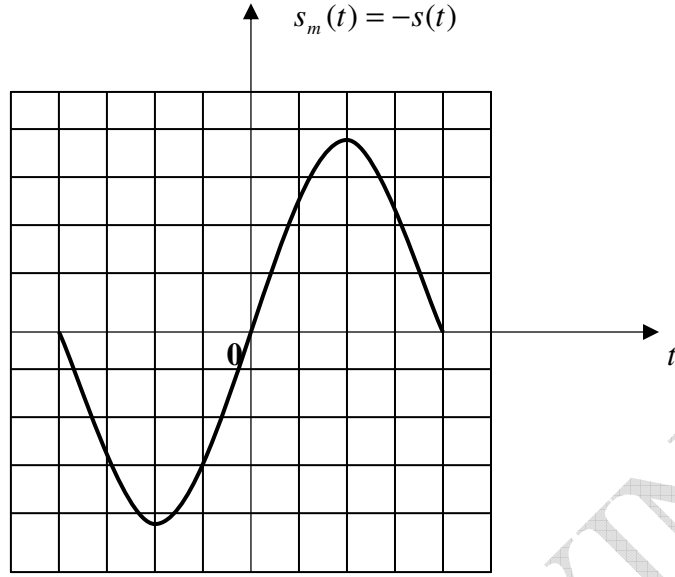
$$s_m(t) = \frac{1}{2} s(t)$$



Şekil 46 İşaretin 1/2 ile çarpımı : genlikte 1/2 azalma

Örnek

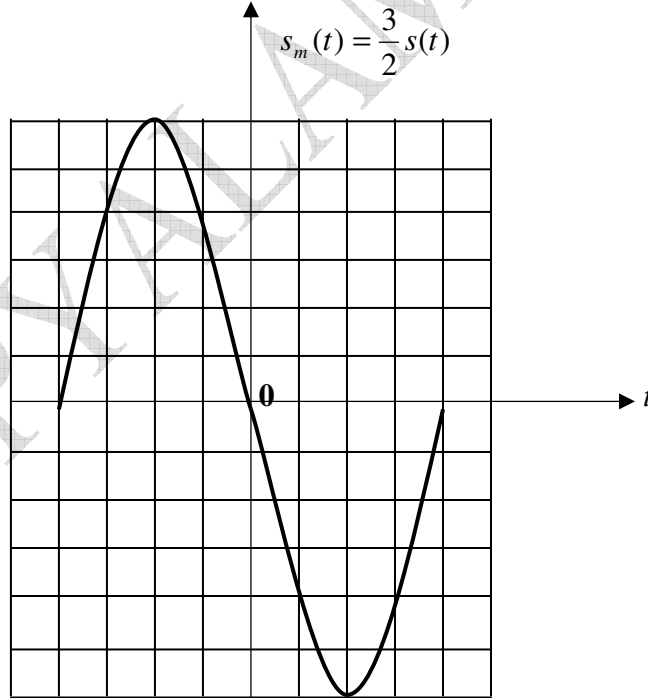
$$s_m(t) = -s(t)$$



Şekil 47 İşaretin (-) ile çarpımı : işaretin terslenmesi

Örnek

$$s_m(t) = \frac{3}{2} s(t)$$



Şekil 48 İşaretin 3/2 ile çarpımı : genliğin 1.5 kat büyümesi

Uygulanan her 3 şekilden görüldüğü gibi, işaretin bir sabit ile çarpımı, zaman (x) ekseninde bir değişime uğramazken, yalnızca genlik (y) ekseninde değişime sebep olmaktadır.

2. Frekans Ölçekleme (B)

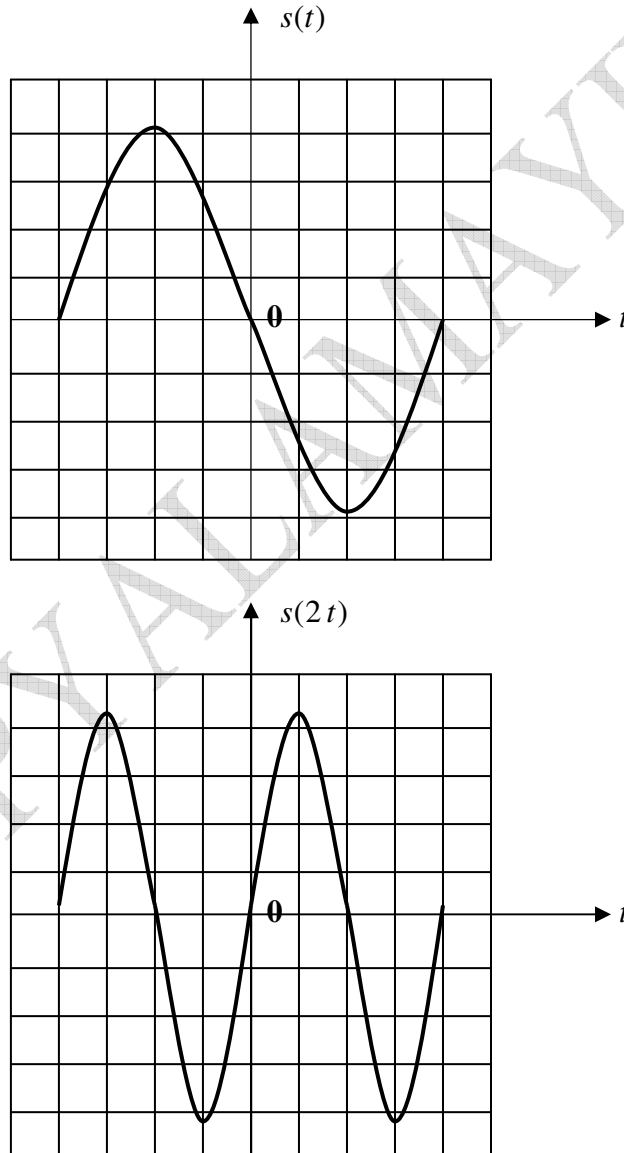
Burada işaretin yine zaman (x) ekseninde değişim hızında farklılık görülecektir. İşaretin periyodunda b kat daha küçülme, dolayısıyla frekansında da b kat artış görülecektir.

$$t \rightarrow b t$$

Örnek

$$s_m(t) = s(2t)$$

İşaretini göz önüne alalım. İfadeye bakılacak olursa, işaretin hızı veya frekansı başlangıç işaretine göre 2 kat daha hızlı olacaktır.



Şekil 49 İşaretin frekansının ölçeklendirilmesi

Görüldüğü gibi işaretin frekansı, başlangıca göre iki kat daha artmıştır.

3. Period Ölçekleme (C)

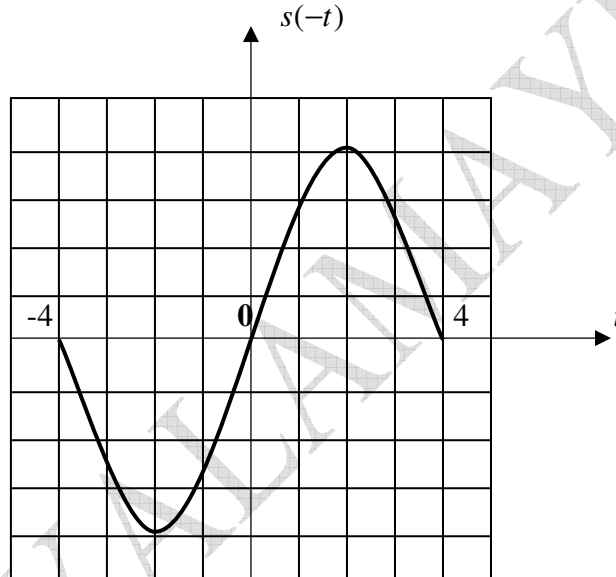
Burada işaretin yine zaman (x) ekseninde değişim görülecektir. İşaretin periyodunda c kat daha büyüme, dolayısıyla frekansında da c kat yavaşlama görülecektir.

$$t \rightarrow \frac{t}{c}$$

Örneğinde işaretin zaman değişkeninin büyüklüğü/genliği'nin sabit bir sayıya bölümü söz konusudur. Bu yöntemle $c > 1$ olduğu sürece işaretin frekansı azalacağı için periyodu büyümektedir.

Örnek

$s_m(t) = s(-\frac{t}{2})$ işaretini Şekil 2.81'ü göz önüne alarak önce $s(-t)$ halini inceleyelim.



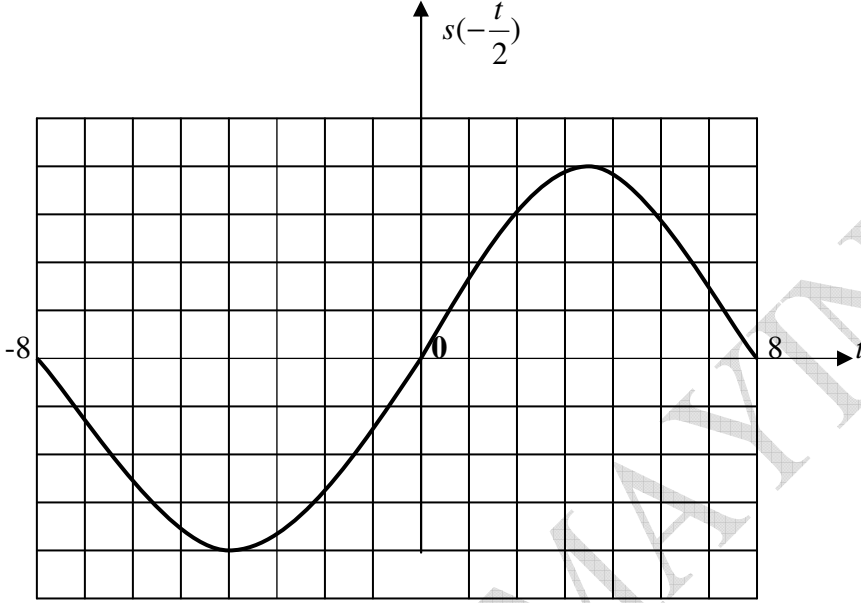
Şekil 50 İşaretin zaman domeninde terslenmesi

Şimdi $s(-t)$ işaretine ait $-\frac{t}{2}$ durumu için aşağıdaki tabloyu düzenleyelim.

t	$-\frac{t}{2}$	$s(-\frac{t}{2})$
-8	4	0
-6	3	3
-4	2	4
-2	1	3
0	0	0
2	-1	-3
4	-2	-4
6	-3	-3
8	-4	-0

Tablo 2.1 Terslenmiş zaman ölçeklenmesi

Görüldüğü gibi daha önce $(-4,4)$ gibi daha dar aralıktaki zaman ekseninin değişim hızı, yavaşlayarak yeni durumda $(-8,8)$ aralığında ancak gerçekleştirilebilmiştir. Tabloya göre $s(-\frac{t}{2})$ aşağıdaki gibi oluşturulur.



Şekil 51 İşaretin zaman domeninde terslenmesi ve ölçeklenmesi

Görüldüğü gibi işaret değişkeninin küçülmesi (bölünmesi), işaretin genliğinde herhangi bir değişim yapmadığı halde yalnızca değişim hızını aynı oranda azaltmaktadır. Bunun terside doğrudur. Örneğin $\sin \frac{x}{2}$ işaretinin değişim hızı, $\sin x$ işaretine göre iki kat daha yavaştır.

4. İşaret Öteleme (D)

Bu tip işlemlerde, işaretin genlik ekseninden ziyade yatay zaman (x) ekseninde ötelenme ve değişimi söz konusu olacaktır.

a) İleriye öteleme (-D)

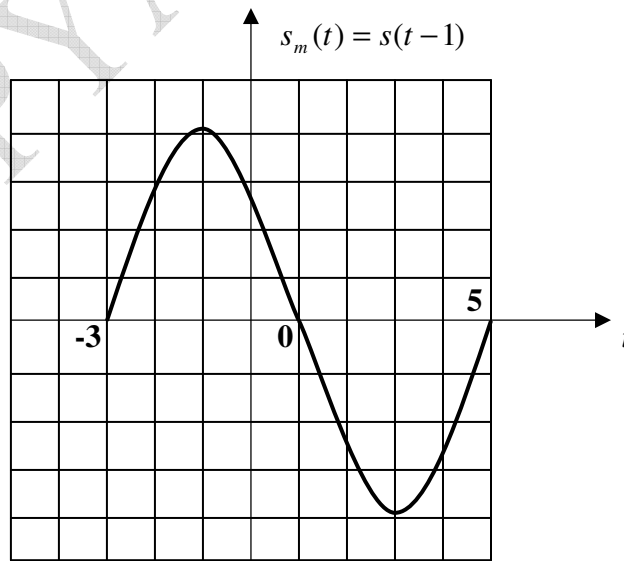
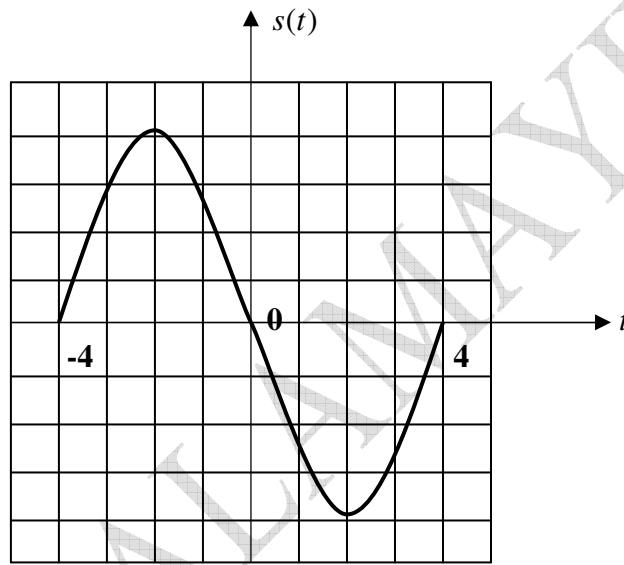
Sağa doğru öteleme olarak bilinen bu işlemde, işarettaki gecikme vurgulanmaktadır. İşarete herhangi bir andaki değişim, “ d ” kadar sonralık bir gecikmeyle gözlemlenebilmektedir.

$$s(t) = As(t - d)$$

Eğer başlangıçtaki orijinal şekli göz önüne alırsak örneğin $s(t - 1)$ ’i inceleyelim. Bunun için aşağıdaki tablo yararlı olacaktır.

t	$t-1$	$s(t-1)$
-4	-5	0
-3	-4	0
-2	-3	3
-1	-2	4
0	-1	3
1	0	0
2	1	-3
3	2	-4
4	3	-3
5	4	0

Tablo 2.2 $s(t-1)$ değerlerinin hesaplanması



Şekil 52 $s(t)$ işaretinin $s(t-1)$ ötelenmesi

Tablodan ve şekillerden görülebileceği gibi, $s(t-1)$ ile işaretle geriye doğru bir ötelenme, gecikme söz konusudur. $s(t)$ işaretinin t anındaki değerini, $s(t-1)$ işareti “1” birim gecikmeyle almaktadır. Bu şu örneğe benzetilebilir. Güneşten yayılan ışınlar 8 dakikada yeryüzüne varıyor. Bunun anlamı şudur : bizim hissettiğimiz güneş ışını gerçekte 8 dakika kadar önceki güneşin ışın değeridir.

$$\text{yeryüzü}(t) = A \text{ güneş}(t-8)$$

Veya Radar sinyallerinin hedefe gidip dönmesi için geçen süre :

$$\tau = \frac{2R}{c}, \quad c = \text{ışık hızı } 3.10^8 \text{ m/sn}, \quad R = \text{mesafe}$$

ise, bizim radar alıcısında gördüğümüz sinyal :

$$s_r(t) = A s_{tr}(t - \tau) = A s(t - \frac{2R}{c})$$

$s_{tr}(t)$ gönderilen sinyaldir. Demek ki alıcıda görülen değer τ sn kadar önceki hedefe ait bir değerdir. Bu gibi durumlarda alınan ve gönderilen işaretler arasında aşağıdakine benzer hesaplamalar yapılabilmektedir.

$$s(t) = s_{tr}(t) \times s_r(t) = A s_{tr}(\tau) \times s_{tr}(t - \tau)$$

b) Geriye öteleme (+D)

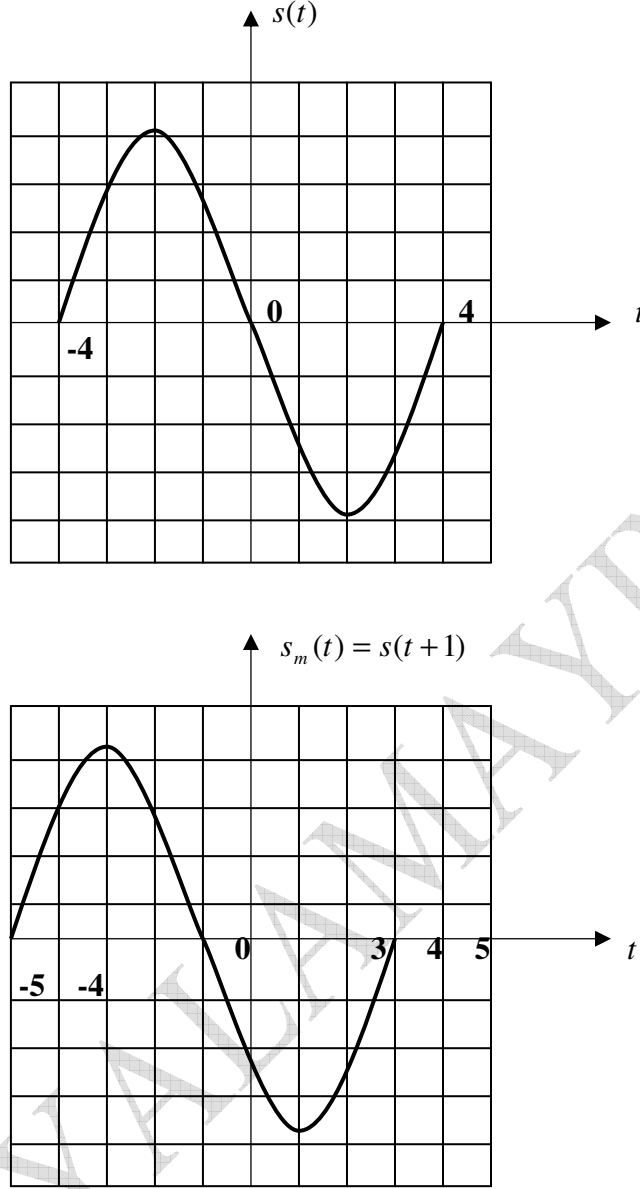
Bu tip işlemde işaret sola doğru ötelenerek, işaretledeki “ d ” kadar önceki durumu gözlemek mümkün olmaktadır.

$$s(t) = A s(t + d)$$

Eğer Şekil 93’ü göz önüne alırsak örneğin $s(t+1)$ ’i inceleyelim. Bunun için aşağıdaki tablo yararlı olacaktır.

t	$t+1$	$s(t+1)$
-5	4	0
-4	-3	3
-3	-2	4
-2	-1	3
-1	0	0
0	1	-3
1	2	-4
2	3	-3
3	4	0
4	5	0

Tablo 2.3. $s(t+1)$ değerlerinin hesaplanması



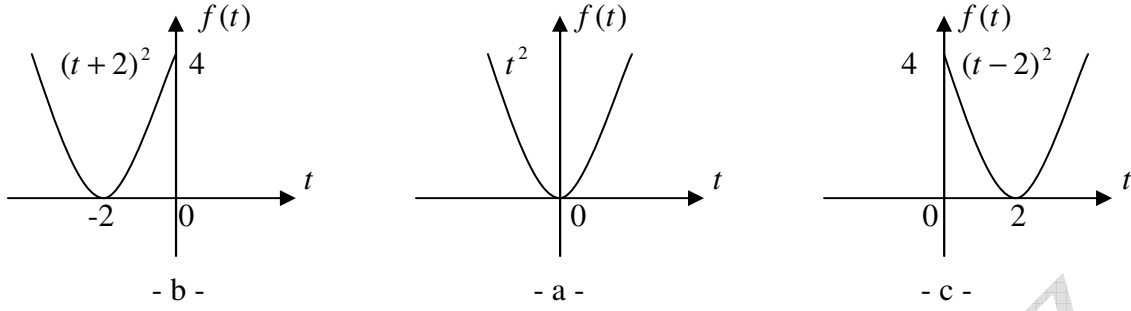
Şekil 53 $s(t)$ ve ötelenmiş $s(t+1)$ işaretin gösterimi

Tablodan ve şekillerden görülebileceği gibi, $s(t+1)$ ile işarete ileriye doğru bir ötelenme, önceden oluşma söz konusudur. $s(t)$ işaretinin t anındaki değerini, $s(t+1)$ işareti “1” birim önceden almaktadır. İleri ve geri ötelenme aşağıdaki final tablosunda özetlenmiştir. Örneğin $s(t) = t+1$ fonksiyonunu gözönüne alalım.

t	$t+1$	$t-1$	$s(t+1)$	$s(t)$	$s(t-1)$
0	1	-1	4	3	2
1	2	0	5	4	3
2	3	1	6	5	4
3	4	2	7	6	5
4	5	3	8	7	6
5	6	4	9	8	7

Tablo 2.4 İşaretlerin ileri ve geri ötelenmesi

Öteleme üzerine örnekler

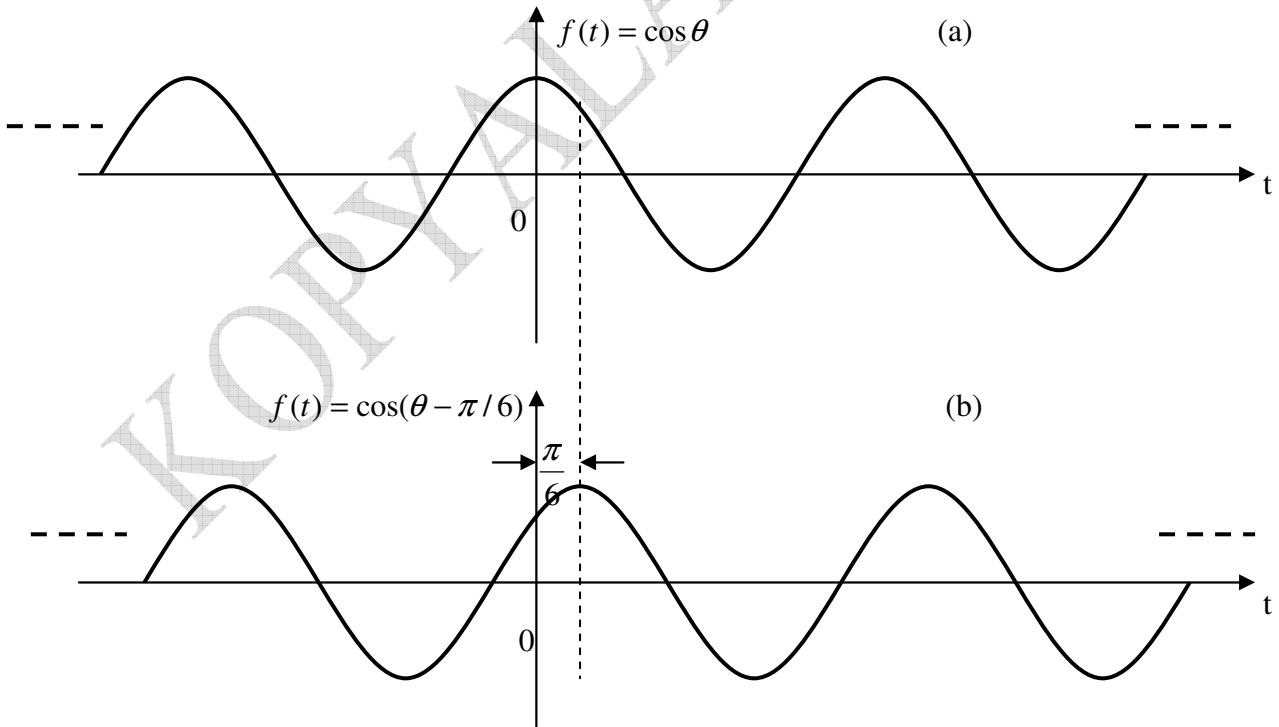


Şekil 54 Sürekli işaret öteleme

Yukarıdaki yaklaşım sağa ve sola ötelemeyi sürekli formda açık olarak belirtmektedir. Görüldüğü gibi, $f(t) = t^2$ verilmişken, $f(t+2) = (t+2)^2$ ile fonksiyon $t = -2$ birim kadar sola kaymıştır. Aynı şekilde $f(t-2) = (t-2)^2$ ifadesi ile de bu kez $t = 2$ birim kadar sağa kaymıştır.

Faz kayması (phase shift)

Faz kayması veya ötelemesi, işaretin maksimum olduğu noktanın $t = 0$ noktasına olan uzaklığını gösterir. Aşağıda $f(t) = \cos(\theta - \phi)$ genel ifadesiyle verilen ifadenin $\phi = 0$ anındaki değişimi (a) da $f(t) = \cos \theta$ iken işaretin $\pi/6$ lık kaymasıyla $t = 0$ noktasına olan konumu (b) de verilmiştir.



Şekil 55 Faz kayması

Şekil (b) göz önüne alındığında $f(t) = \cos \theta$ işaretinin $t = 0$ daki maksimum değeri kayarak $\pi/6$ noktasına taşınmıştır. Bu durum faz kayması olarak adlandırılmaktadır.

Zaman kayması (time shift)

Zaman kayması veya ötelemesi, işaretin başlangıcının $t=0$ başlangıç noktasına olan uzaklığını gösterir. Uzaklık miktarı “gecikme/geçmiş” anlamına gelen “delay/advance” olarak anılmaktadır. Eğer işaretin başlangıcı $t=0$ noktasının sağında ise *gecikme*, solunda ise *geçmiş* anlamı taşımaktadır.

Aşağıda şekil (a) da $t=0$ başlangıç anına konuşlanmış $f(t)$ şeklinin, (b) de bir birimlik gecikmeyle $f(t-1)$ (delay), (c) de ise 3 birimlik geçmiş (advance) ile $f(t+3)$ olarak yer aldığı görülmektedir. Şekil (b) deki gecikmenin sebebi buradaki her andaki değerin veya olayın (a) da bir birim önce olmasıdır. Diğer bir deyişle, (b) şekli veya fonksiyonu (a) nın gecikmiş halidir. Şekil (b) $t=0$ noktasına göre değerlendirilirse, $f(t-1)$ fonksiyonunun sıfır değeri için

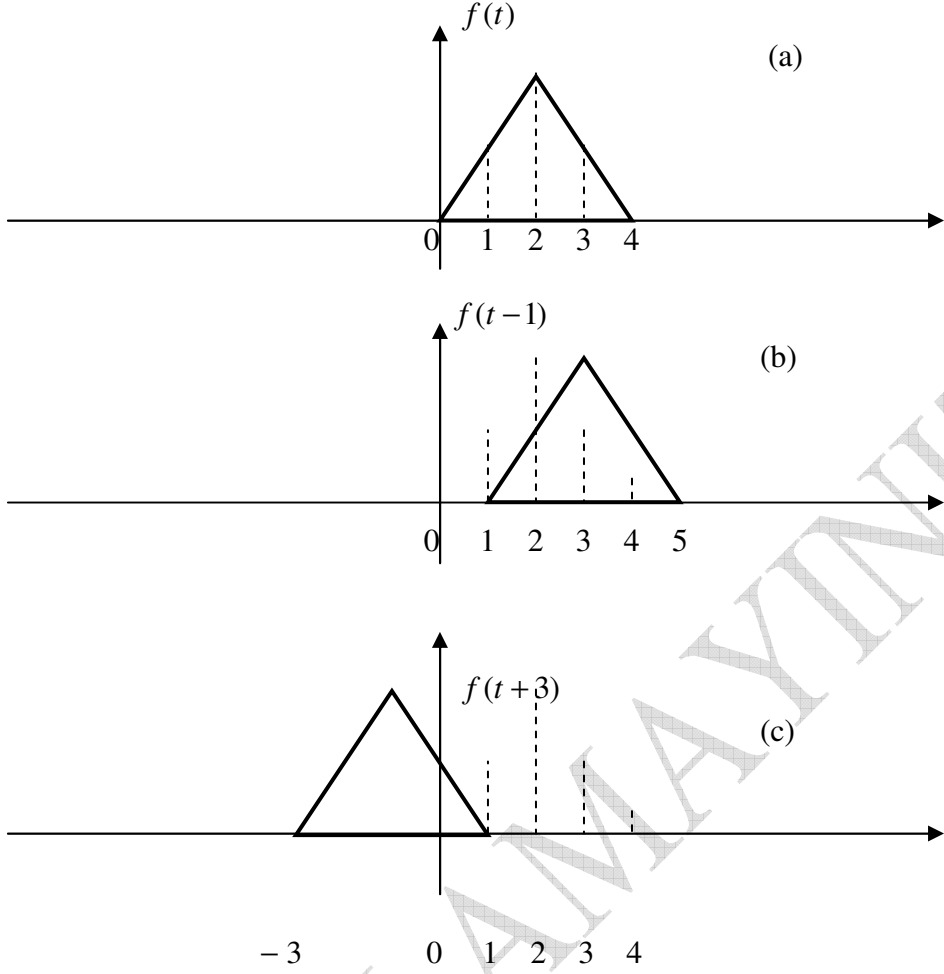
$$\begin{aligned}f(t-1) &= f(0) \\t-1 &= 0 \\t &= 1\end{aligned}$$

bunun anlamı $f(t-1)$ fonksiyonunun $f(t)$ gibi $f(0)$ sıfır değeri, $t=1$ değeri için mevcuttur. Bulunan $t=1$ değeri, kaymadan sonraki $f(t)$ şeklinin başlangıç noktasını göstermektedir.

Diğer yandan (c) göz önüne alındığında bu kez kaymanın $t=0$ noktasına göre sol tarafa doğru olduğunu görmekteyiz. Bunun olduğunu yukarıdaki benzer yaklaşımdan görebiliriz.

$$\begin{aligned}f(t+3) &= f(0) \\t+3 &= 0 \\t &= -3\end{aligned}$$

bunun anlamı $f(t+3)$ fonksiyonunun $f(t)$ gibi $f(0)$ sıfır değeri, $t=-3$ değeri için mevcuttur. Bulunan $t=-3$ değeri, kaymadan sonraki $f(t)$ şeklinin başlangıç noktasını göstermektedir.

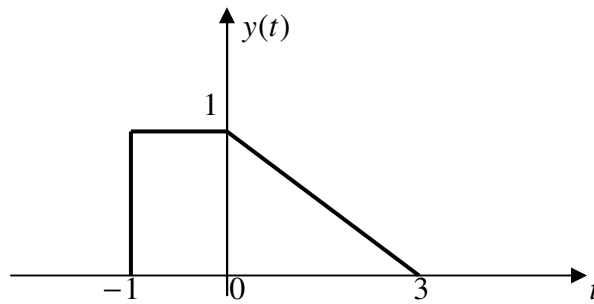


Şekil 56 Zaman kayması

İşaretler ve İşlemler

Cebirsel anlamda çok iyi bildiğimiz bazı matematiksel işlemler, işaret işlemede de yoğun biçimde kullanılmaktadır. Bunlardan sık kullanılanları kısaca hatırlatılacaktır.

Örnek



Şekil 57

Verilen şekile göre aşağıdaki ifadeleri çözün.

- a) $y(t-2)$ b) $y(t+3)$ c) $y(-t)$ d) $y(-t+2)$ e) $y(2t)$
f) $y(2t-1)$ g) $y(\frac{t}{2})$ h) $-y(t)$

Çözüm

$y(t)$ işareti veya fonksiyonu verilmişken (a-j) şıklarındaki tüm ifadelerin orijinal aslında $y(t)$ nin başlangıç ve bitiş noktaları değiştirilmiş biçiminden başka bir şey değildir. Esas olan koyu çizgilerle gösterilen ve $t = (-4,4)$ aralığında yer alan yamuktur. Her bir seçenek için bu yamuğun sınır değerleri değişecektir. Yani sorulan şıkların her biri için ilgili yamuğun farklı zamanlardaki değerleriyle gösterimleri elde edilmeye çalışılacaktır. Buna göre söz konusu yamuk şıkların niteliğine göre daha genişlerken, bazen daha daralacak, bazen sola, bazen de sola doğru kaydırılacaktır. Şimdi bunlardan hangilerinin olacağını şıkları çözerek görmeye çalışalım.

a) $y(t-2) \rightarrow$ sağa kaydırma (işareti geciktirme(time delay))

$y(t)$ işareti incelendiğinde sınırlarının $t = (-4,4)$ aralığı olduğu görülmektedir. Bu anlamda

$$y(-1) = 0$$

olduğu görülmektedir. Benzer şekilde

$$y(3) = 0$$

olduğu da açıktır. Yani $y(t)$ işaretinin/fonksiyonunun değerinin (genliğinin) sıfır olduğu noktalar $t = -1$ için $y(-1) = 0$ ve $t = 3$ için ise $y(3) = 0$ dir. Sorulan $y(t-2)$ ile yamuğun sınır değerlerini bulmamız gerekiyor. Bu değerleri hesapladıktan sonra, yamuğu bu noktalar arasına yerleştirdiğimiz taktirde istenilen $y(t-2)$ fonksiyonunu hesaplamış olacağız.

Buna göre $y(t)$ için yamuğun başlangıç noktalarında genliği sıfır olan değerlerinden biri $t = -1$ için $y(-1) = 0$ hesaplanmıştı. Bu şekilden net olarak görülmektedir. Acaba $y(t)$ deki aynı yamuğun sıfır genlik değeri, $y(t-2)$ işaretinin hangi noktasına karşılık gelecektir. Eğer $y(t-2)$ işareti göz önüne alınırsa,

$$t-2 = -1$$

durumunda $y(t-2)$ işaretide genlik olarak sıfır değerini ($y(t-2) = 0$) verecektir. Buna göre

$$y(t-2) = y(-1) = 0$$

durumu söz konusudur. Diğer bir deyişle $y(t-2)$ de, $t-2 = -1$ olduğu sürece, $y(t-2)$ işaretide aynen $y(t)$ işareti gibi sıfır genlik değerini oluşturacaktır [$y(t-2) = y(-1) = 0$]. Bundan dolayı, $y(t)$ verilmişken eğer $y(t-2)$ aranıyorsa $t-2 = -1$ çözümü aranmalıdır.

$$t-2 = -1$$

$$t = 1$$

Bununla orijinal $y(t)$ de soldaki sınır değeri olan $t = -1$ noktasının karşılığı olarak bu kez $y(t-2)$ için $t = 1$ bulunmuştur. Buna göre $y(t)$ için $t = -1$ noktasındaki başlangıç noktası $y(t-2)$ için $t = 1$ noktasına kaymıştır/ötelenmiştir.

Şimdi $y(t)$ de verilen işaretin diğer (sağdaki) sınır noktası olan $t = 3$ noktasının $y(t-2)$ deki karşılığını bulmaya çalışacağız. Benzer yaklaşım burada da kullanılacaktır. Bu kez $y(t)$ işaretinde $t = 3$ için $y(3) = 0$ değeri, $y(t-2)$ tarafından da sağlanması için

$$t - 2 = 3$$

durumunda $y(t-2)$ işaretide genlik olarak sıfır değerini ($y(t-2) = 0$) verecektir. Buna göre

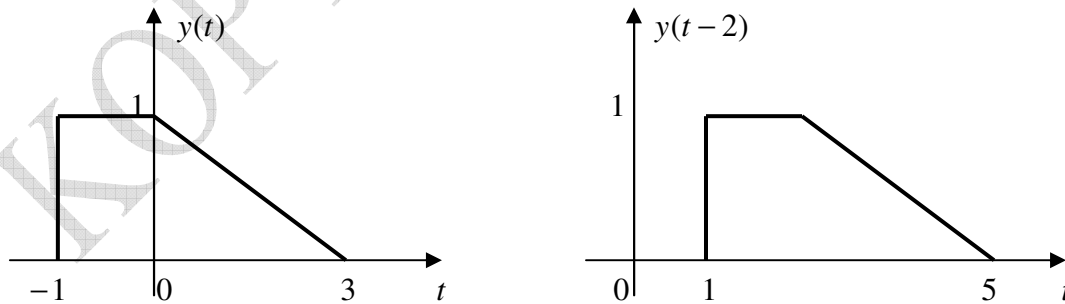
$$y(t-2) = y(3) = 0$$

durumu söz konusudur. Diğer bir deyişle $y(t-2)$ de, $t-2=3$ olduğu sürece, $y(t-2)$ işaretide aynen $y(t)$ işareti gibi sıfır genlik değerini oluşturacaktır [$y(t-2) = y(3) = 0$]. Bundan dolayı, $y(t)$ verilmişken eğer $y(t-2)$ aranıyorsa $t-2=3$ çözümü aranmalıdır.

$$\begin{aligned} t - 2 &= 3 \\ t &= 5 \end{aligned}$$

Bununla orijinal $y(t)$ de bu kez sağdaki sınır değeri olan $t = 3$ noktasının karşılığı olarak $y(t-2)$ için $t = 5$ bulunmuştur. Buna göre $y(t)$ için $t = 3$ noktasındaki bitiş noktası $y(t-2)$ için $t = 5$ noktasına kaymıştır/ötelenmiştir.

Bu işlemlerin sonucunda $y(t)$ için $t = (-1,3)$ olan sınır değerleri, $y(t-2)$ için $t = (1,5)$ olarak hesaplanmıştır. Diğer bir deyişle daha önce $t = (-1,3)$ olan koordinatlar, $y(t-2)$ için $t = (1,5)$ noktasına kaymıştır/ötelenmiştir. Aşağıda karşılaştırmalı olarak $y(t)$ ve $y(t-2)$ şekilleri verilmiştir.



Şekil 58

Bundan sonraki şıkların çözümleri (a) daki gibi detayları atlayarak, çözümleriyle verilecektir.

b) $y(t+3) \rightarrow$ **sola kaydırma** (önceki durum (advance))

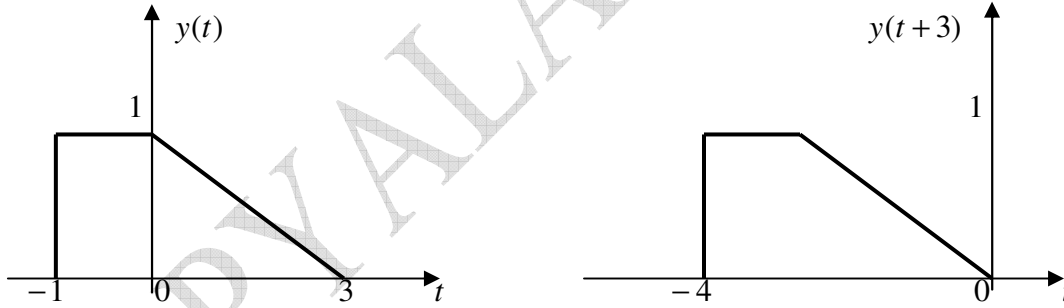
$y(t+3)$, çözüm için, yamuğun soldaki sınır değerini bulmak $y(t+3) = y(-1) = 0$ olması gerekeceğinden, yamuğun soldaki sınır değeri

$$\begin{aligned} t+3 &= -1 \\ t &= -4 \end{aligned}$$

Şimdi $y(t)$ de verilen işaretin diğer (sağdaki) sınır noktası olan $t=3$ noktasının $y(t+3)$ deki karşılığını bulmaya çalışacağız. Benzer yaklaşım burada da kullanılacaktır. Bu kez $y(t)$ işaretinde $t=3$ için $y(3)=0$ değerini bulmak için $y(t+3) = y(3) = 0$ olması gerekeceğinden, yamuğun sağdaki sınır değeri

$$\begin{aligned} t+3 &= 3 \\ t &= 0 \end{aligned}$$

Bununla orijinal $y(t)$ de bu kez sağdaki sınır değeri olan $t=3$ noktasının karşılığı olarak $y(t+3)$ için $t=0$ bulunmuştur. Buna göre $y(t)$ için $t=3$ noktasındaki bitiş noktası $y(t+3)$ için $t=0$ noktasına kaymıştır/ötelenmiştir. Bu işlemlerin sonucunda $y(t)$ için $t=(-1,3)$ olan sınır değerleri, $y(t+3)$ için $t=(-4,0)$ olarak hesaplanmıştır. Diğer bir deyişle daha önce $t=(-1,3)$ olan koordinatlar, $y(t+3)$ için $t=(-4,0)$ noktasına kaymıştır/ötelenmiştir. Aşağıda karşılaştırmalı olarak $y(t)$ ve $y(t+3)$ şekilleri verilmiştir.



Şekil 47

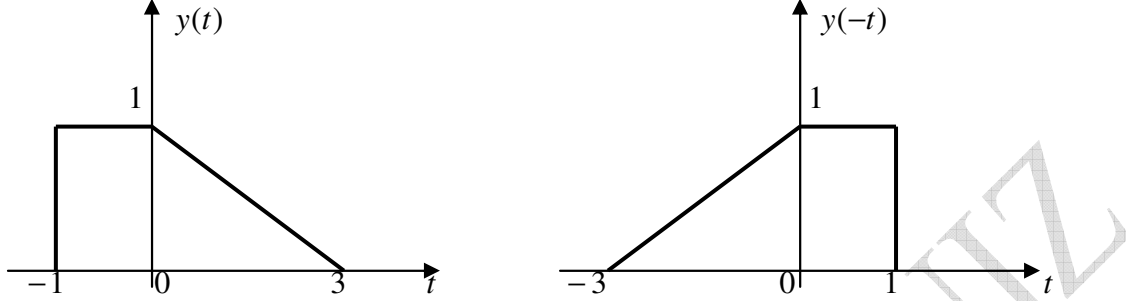
c) $y(-t)$, çözüm için, yamuğun soldaki sınır değerini bulmak $y(-t) = y(-1) = 0$ olması gerekeceğinden, üçgenin soldaki sınır değeri

$$\begin{aligned} -t &= -1 \\ t &= 1 \end{aligned}$$

$y(t)$ de verilen işaretin sağdaki sınır noktası olan $t=3$ noktasının $y(t+3)$ deki karşılığını bulmak için $y(-t) = y(3) = 0$ olması gerekeceğinden, yamuğun sağdaki sınır değeri

$$\begin{aligned} -t &= 3 \\ t &= -3 \end{aligned}$$

Bununla orijinal $y(t)$ de bu kez sağdaki sınır değeri olan $t = 3$ noktasının karşılığı olarak $y(-t)$ için $t = -3$ bulunmuştur. Bu işlemlerin sonucunda $y(t)$ için $t = (-1,3)$ olan sınır değerleri, $y(-t)$ için $t = (1,-3)$ noktasına kaymıştır/ötelenmiştir. Aşağıda karşılaştırmalı olarak $y(t)$ ve $y(-t)$ şekilleri verilmiştir.



Şekil 59 Zaman domenine göre tersleme (time-reverse)

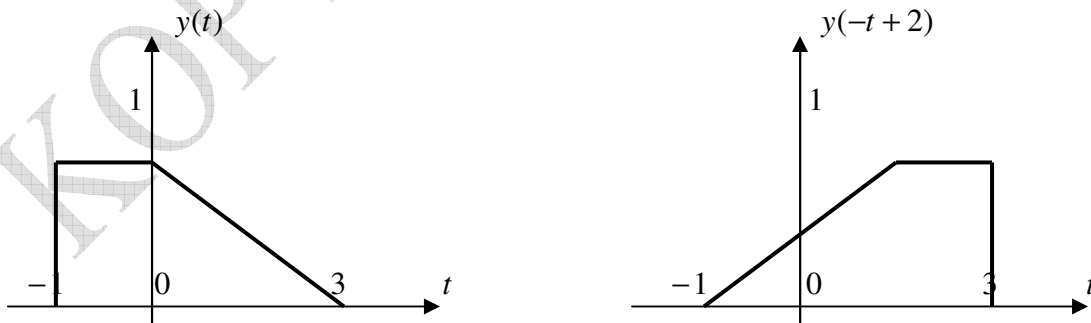
d) $y(-t+2)$, çözüm için, yamuğun soldaki sınır değerini bulmak $y(-t+2) = y(-1) = 0$ olması gerekeceğinden, yamuğun soldaki sınır değeri

$$\begin{aligned} -t+2 &= -1 \\ t &= 3 \end{aligned}$$

$y(t)$ de verilen işaretin sağdaki sınır noktası olan $t = 3$ noktasının $y(t+3)$ deki karşılığı için $y(-t+2) = y(3) = 0$ olması gerekeceğinden, yamuğun sağdaki sınır değeri

$$\begin{aligned} -t+2 &= 3 \\ t &= -1 \end{aligned}$$

Bu işlemlerin sonucunda $y(t)$ için $t = (-1,3)$ olan sınır değerleri, $y(-t+2)$ için $t = (3,-1)$ noktasına kaymıştır/ötelenmiştir. Aşağıda karşılaştırmalı olarak $y(t)$ ve $y(-t+2)$ şekilleri verilmiştir.



Şekil 60

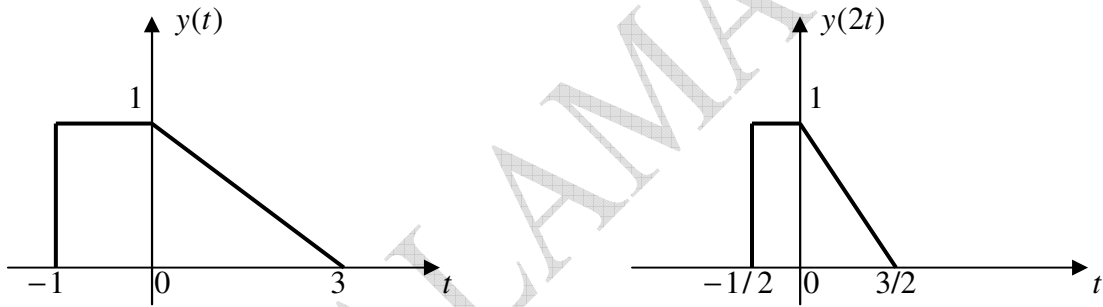
e) $y(2t)$, çözüm için, yamuğun soldaki sınır değerini bulmak $y(2t) = y(-1) = 0$ olması gerekeceğinden, yamuğun soldaki sınır değeri

$$2t = -1$$
$$t = -1/2$$

$y(t)$ de verilen işaretin sağdaki sınır noktası olan $t = 3$ noktasının $y(2t)$ deki karşılığı için $y(2t) = y(3) = 0$ olması gerekeceğinden, yamuğun sağdaki sınır değeri

$$2t = 3$$
$$t = 3/2$$

Bu işlemlerin sonucunda $y(t)$ için $t = (-1,3)$ olan sınır değerleri, $y(2t)$ için $t = (-1/2,3/2)$ noktasına kaymıştır/ötelenmiştir. Bu işlem sonucu $y(2t)$ işareti, zaman ekseninde $y(t)$ işaretinin yarısına düşmüştür. Diğer bir deyişle $y(2t)$ işareti, $y(t)$ işaretinin 2 kat sıkıştırılmış biçimidir. Sıkıştırma işlemi, işaret analizde daha ziyade yüksek frekanslı işaretleri gösterir. Bu gösterimle işaretin frekansı iki katına çıkarılmıştır. Zaman domeninde sıkıştırma (compressing) olarak anılan bu işlemde $y(t)$ ve $y(2t)$ şekilleri aşağıda verilmiştir.



Şekil 61 Sıkıştırma (compressing) işlemi

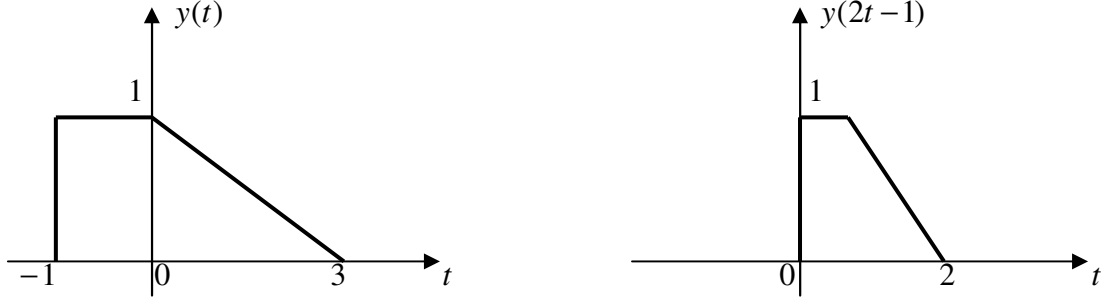
f) $y(2t-1)$, çözüm için, yamuğun soldaki sınır değerini bulmak $y(2t-1) = y(-1) = 0$ olması gerekeceğinden, yamuğun soldaki sınır değeri

$$2t-1 = -1$$
$$t = 0$$

$y(t)$ de verilen işaretin sağdaki sınır noktası olan $t = 3$ noktasının $y(2t-1)$ deki karşılığı için $y(2t-1) = y(3) = 0$ olması gerekeceğinden, yamuğun sağdaki sınır değeri

$$2t-1 = 3$$
$$t = 2$$

Bir tür sıkıştırma olan bu işlemler sonucunda $y(t)$ için $t = (-1,3)$ olan sınır değerleri, $y(2t-1)$ için $t = (0,2)$ noktasına kaymıştır/ötelenmiştir (sıkıştırılmıştır). Bununla ilgili $y(t)$ ve $y(2t-1)$ şekilleri aşağıda verilmiştir.



Şekil 62 Sıkıştırma (compressing) işlemi

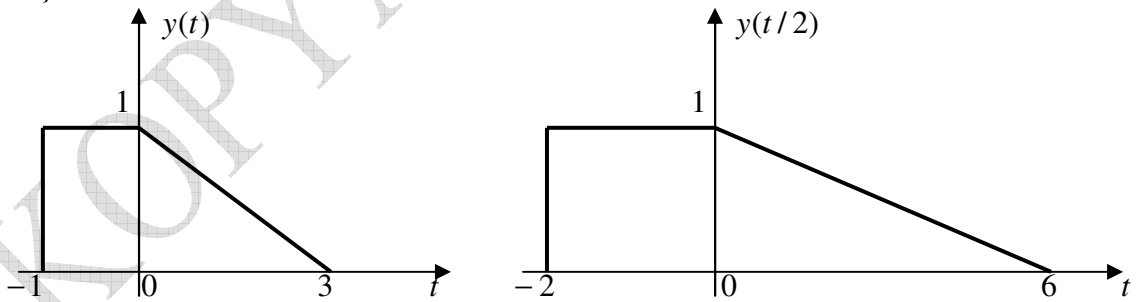
g) $y(\frac{t}{2})$, çözüm için, yamuğun soldaki sınır değerini bulmak $y(t/2) = y(-1) = 0$ olması gerekeceğinden, yamuğun soldaki sınır değeri

$$\begin{aligned} t/2 &= -1 \\ t &= -2 \end{aligned}$$

$y(t)$ de verilen işaretin sağdaki sınır noktası olan $t = 3$ noktasının $y(t/2)$ deki karşılığı için $y(t/2) = y(3) = 0$ olması gerekeceğinden, yamuğun sağdaki sınır değeri

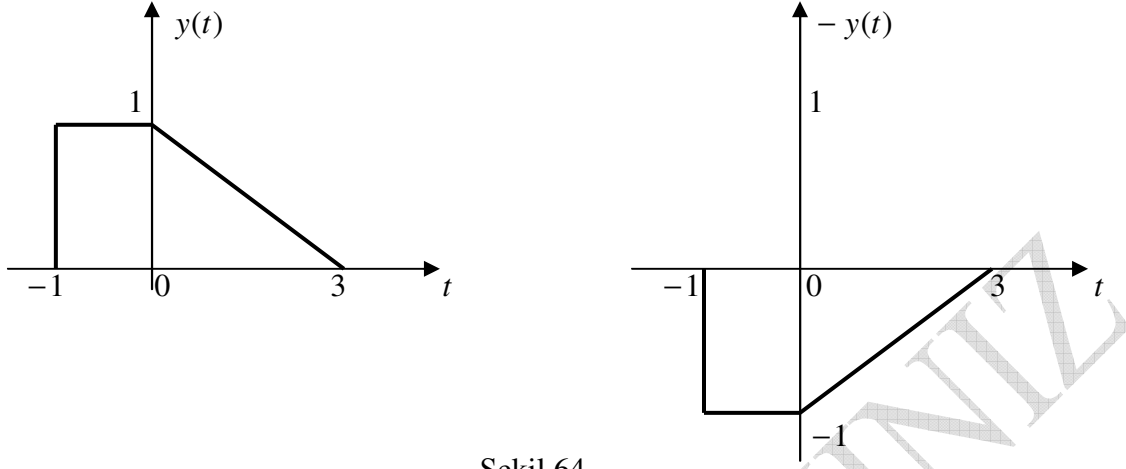
$$\begin{aligned} t/2 &= 3 \\ t &= 6 \end{aligned}$$

Sıkıştırmanın tersi olan bu genleşme (expanding) işlemi sonucunda $y(t)$ için $t = (-1,3)$ olan sınır değerleri, $y(t/2)$ için $t = (-2,6)$ noktasına kaymıştır/ötelenmiştir (genleşmiştir). Diğer bir deyişle, zaman ekseninde $y(t/2)$ işareti, $y(t)$ işaretinin iki katına genişlemiştir. Genleştirme işlemi, işaret analizde daha ziyade düşük frekanslı işaretleri gösterir. Bu gösterimle işaretin frekansı yarıya düşmüştür. Bununla ilgili $y(t)$ ve $y(t/2)$ şekilleri aşağıda verilmiştir.



Şekil 63 Genleştirme (expanding) işlemi

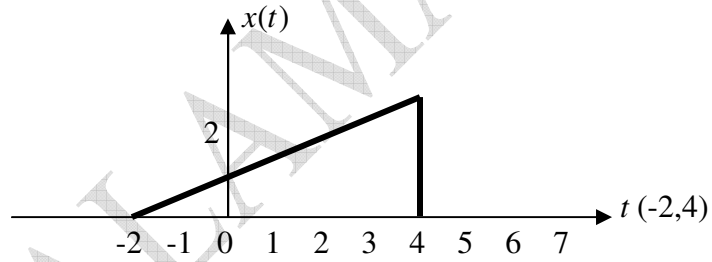
h) $-y(t)$, çözüm için, yamuğun yalnızca düşey eksendeki genliği değişecektir. Aşağıda karşılaştırmalı olarak $y(t)$ ve $y(-t+2)$ şekilleri verilmiştir.



Şekil 64

Örnek

Aşağıdaki $x(t)$ işaretine ait



Şekil 65

- a) $x(t-2)$ b) $x(t+2)$ c) $x(2t)$ d) $x(2t+4)$ e) $x(\frac{t}{2})$ f) $x(-t)$ g) $x[-\frac{1}{2}(t-4)]$
h) $x(-\frac{1}{2}t)$ i) $x(-\frac{1}{2}t+1)$ j) $x(-2t+4)$ k) $x(\frac{1}{2}t+1)$ l) $2x(t)$ m) $-x(t)$ n) $x(t)+1$

işlemlerini gerçekleyiniz.

Çözüm

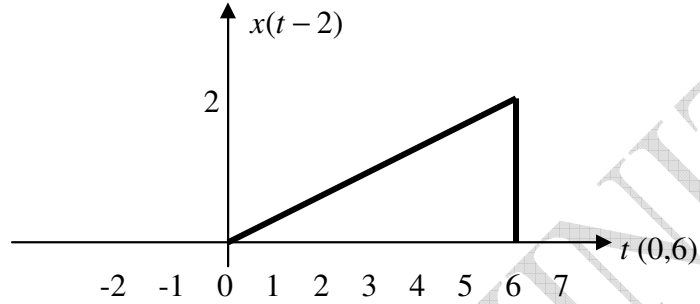
a) $x(t-2)$

1. $t-2=-2$

$t=0$

2. $t-2=4$

$t=6$



- a -

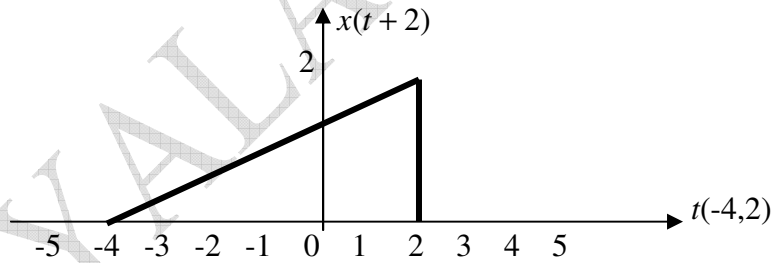
b) $x(t+2)$

1. $t+2=-2$

$t=-4$

2. $t+2=4$

$t=2$



- b -

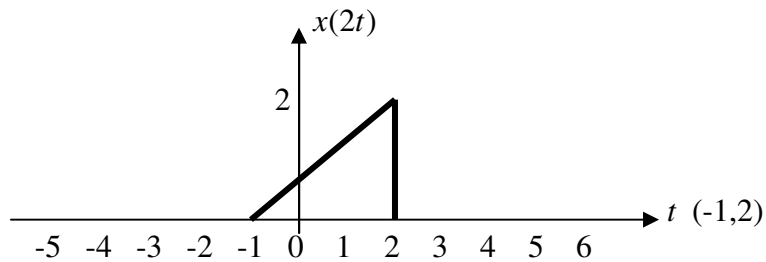
c) $x(2t)$

1. $2t=-2$

$t=-1$

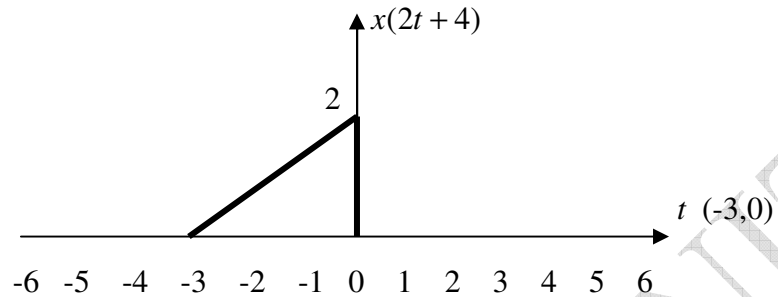
2. $2t=4$

$t=2$



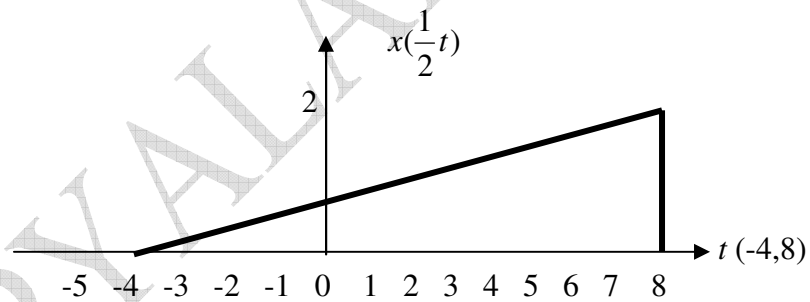
- c -

- d) $x(2t+4)$
 1. $2t+4 = -2$
 $t = -3$
 2. $2t+4 = 4$
 $t = 0$



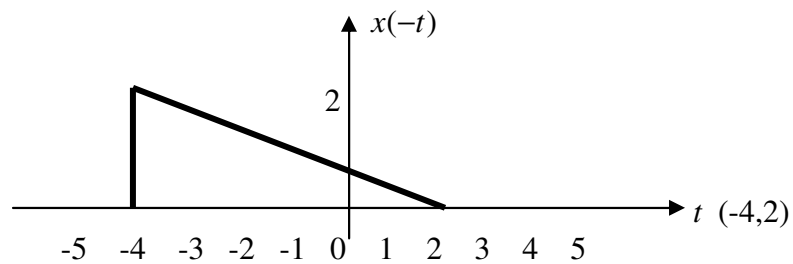
- d -

- e) $x(\frac{1}{2}t)$
 1. $\frac{t}{2} = -2$
 $t = -4$
 2. $\frac{t}{2} = 4$
 $t = 8$



- e -

- f) $x(-t)$
 1. $-t = -2$
 $t = 2$
 2. $-t = 4$
 $t = -4$



- f -

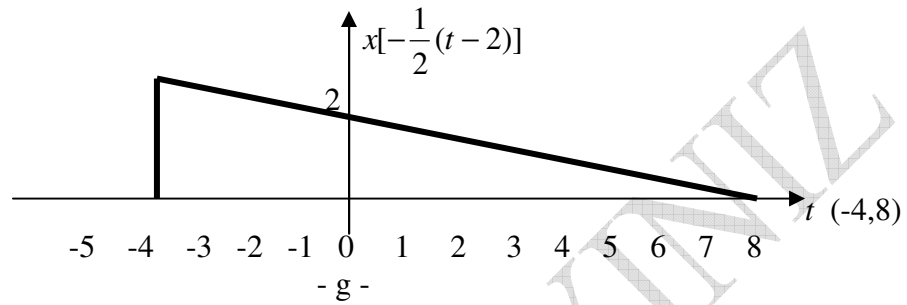
g) $x[-\frac{1}{2}(t-4)]$

1. $-\frac{t}{2} + 2 = -2$

$t = 8$

2. $-\frac{t}{2} + 2 = 4$

$t = -4$



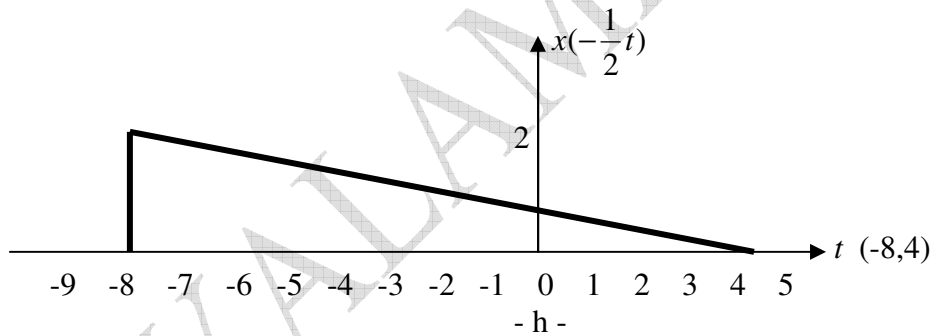
h) $x(-t/2)$

1. $-t/2 = -2$

$t = 4$

2. $-t = 4$

$t = -8$



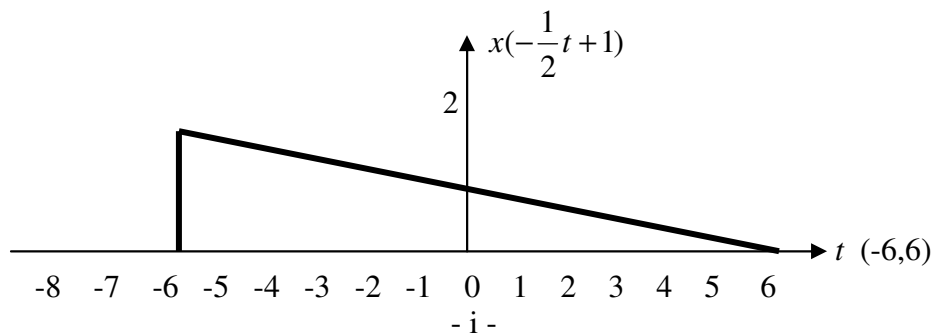
i) $x(-\frac{1}{2}t+1)$

1. $-\frac{t}{2} + 1 = -2$

$t = 6$

2. $-\frac{t}{2} + 1 = 4$

$t = -6$



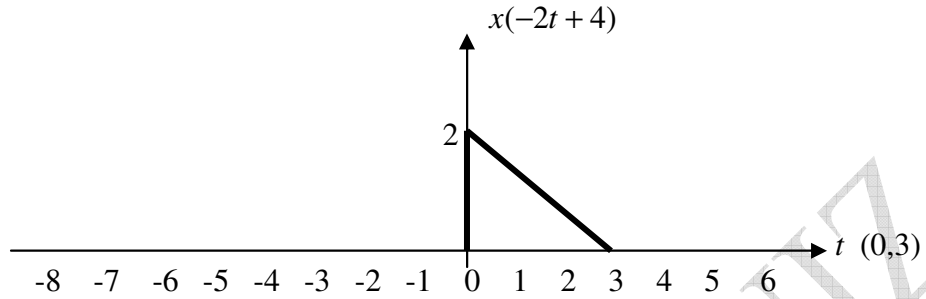
j) $x(-2t + 4)$

1. $-2t + 4 = -2$

$t = 3$

2. $-2t + 4 = 4$

$t = 0$



- j -

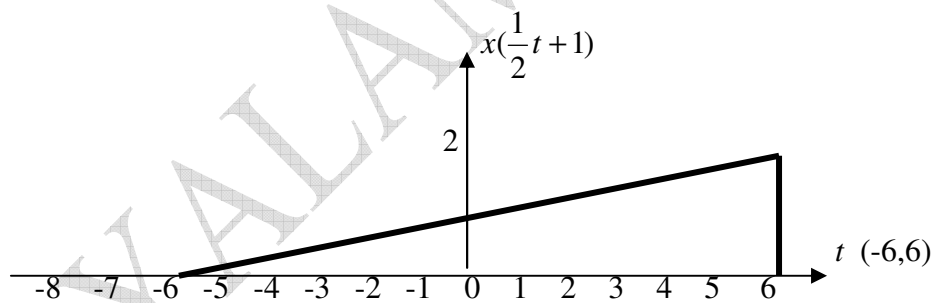
k) $x(\frac{1}{2}t + 1)$

1. $\frac{t}{2} + 1 = -2$

$t = -6$

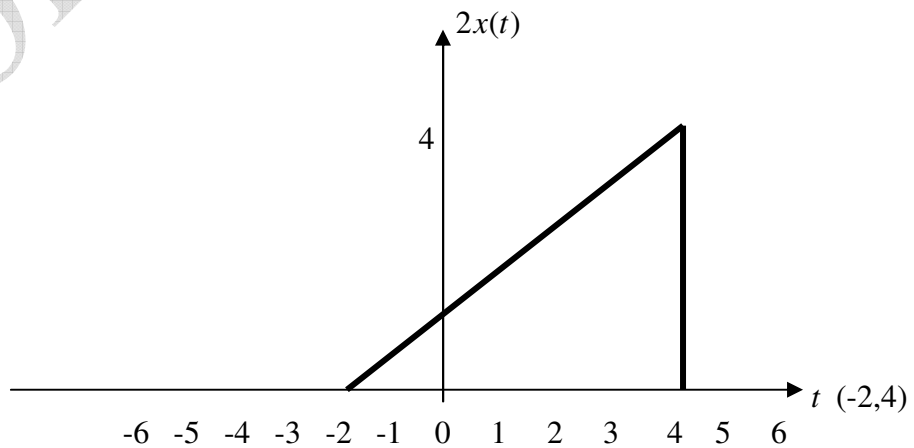
2. $\frac{t}{2} + 1 = 4$

$t = 6$



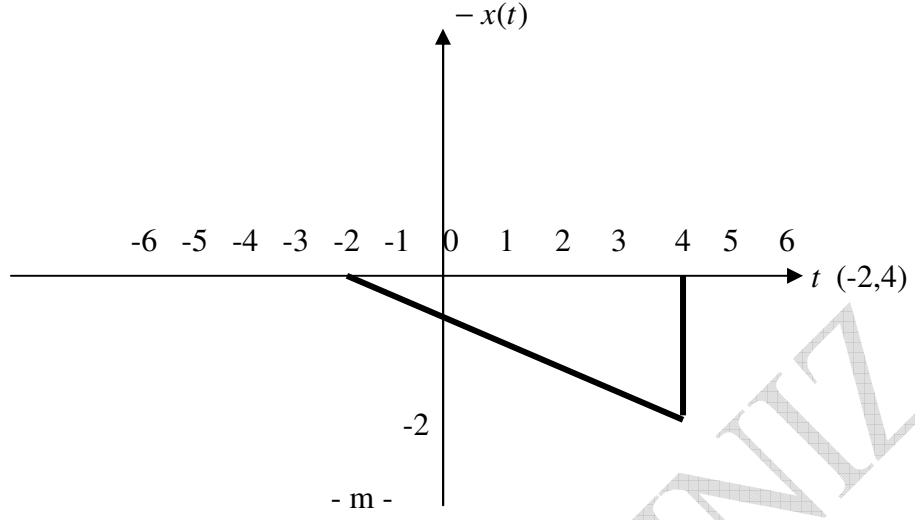
- k -

l) $2x(t)$

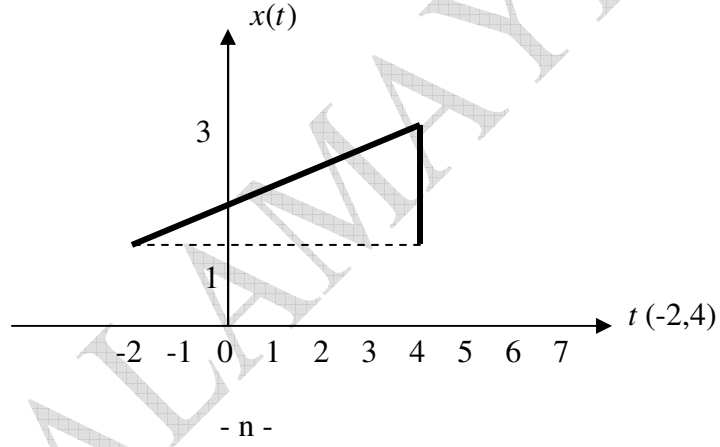


- l -

m) $-x(t)$



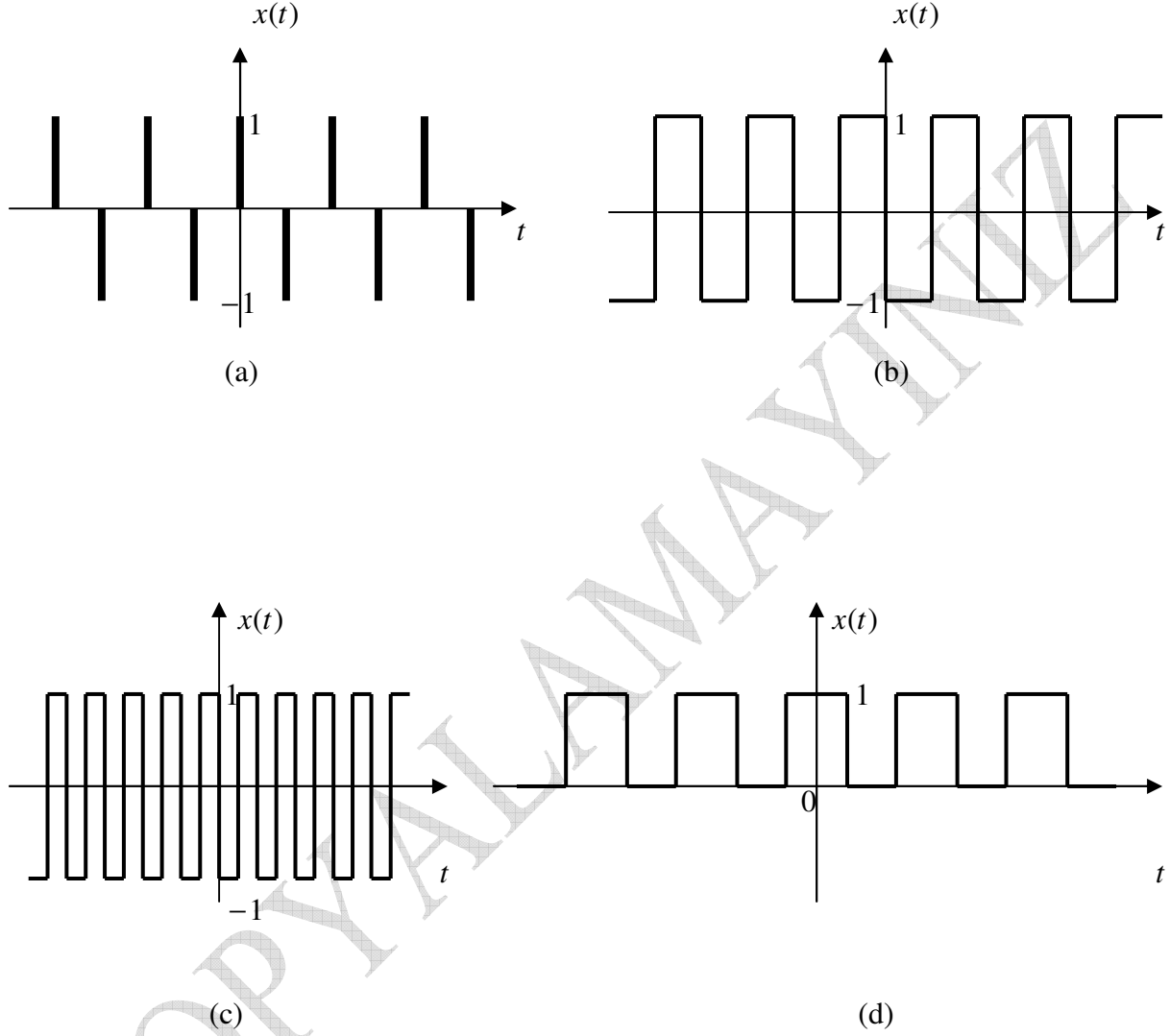
n) $x(t) + 1$



Şekil 66 Çeşitli işaret işlemleri

DİJİTAL İŞARETLER

Sayısal işaretler olarak da bilinen dijital işaretler daha önceden vurgulandığı gibi, sürekli veya ayırık işaretlerin sonlu genlikli formlarıdır. Genel olarak darbe işaretleri olarak bilinen sayısal işaretlerin çeşitli gösterimleri mevcuttur.

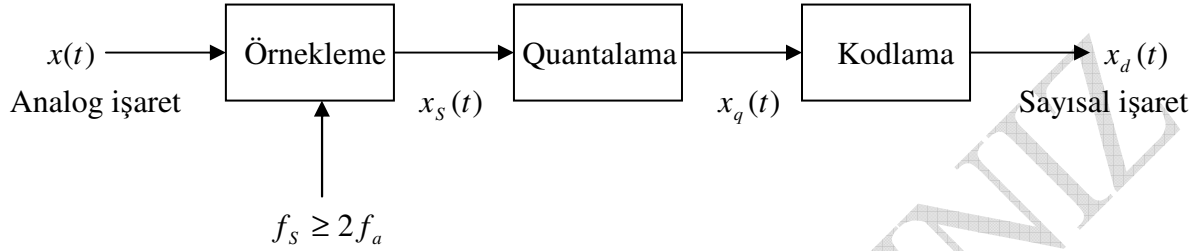


Şekil 67 Dijital işaretler

Şekillerden çeşitli tipte ve genişlikteki darbe dizileri şeklinde sayısal işaretler görülmektedir. Puls (pals) olarak da bilinen dijital işaretlerin genişliklerine göre özel adları mevcuttur. Bazen dikdörtgen veya kare dalga olarak anılmaktalar. Genişliği dar olan hatta sıfır kabul edilen darbeler impuls olarak adlandırılmaktalar.

Sayısal (dijital) İşaretlerin Elde Edilmesi

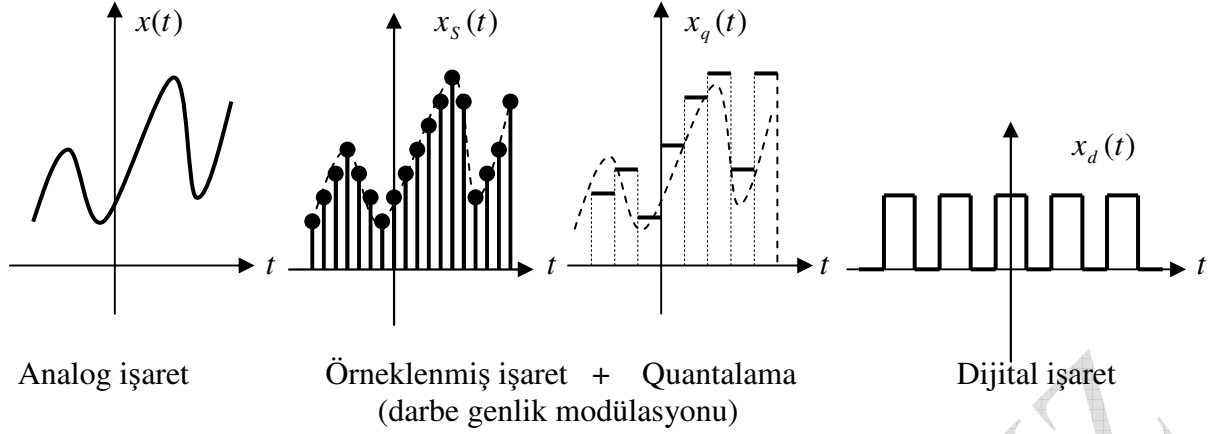
Sayısal veya dijital işaretler doğal işaretler olmayıp, sürekli-zaman işaretlerden elde edilmektedirler. Bu nedenle dijital işaret sürekli $x(t)$ işaretinin (analog işaret) örnekleme, quantalama ve kodlama safhalarından geçirilerek $x_d(t)$ formunda elde edilen işarettir. Bu safhaları içeren blok diagram aşağıda verilmiştir.



Şekil 68 Dijital işaretin elde edilmesi

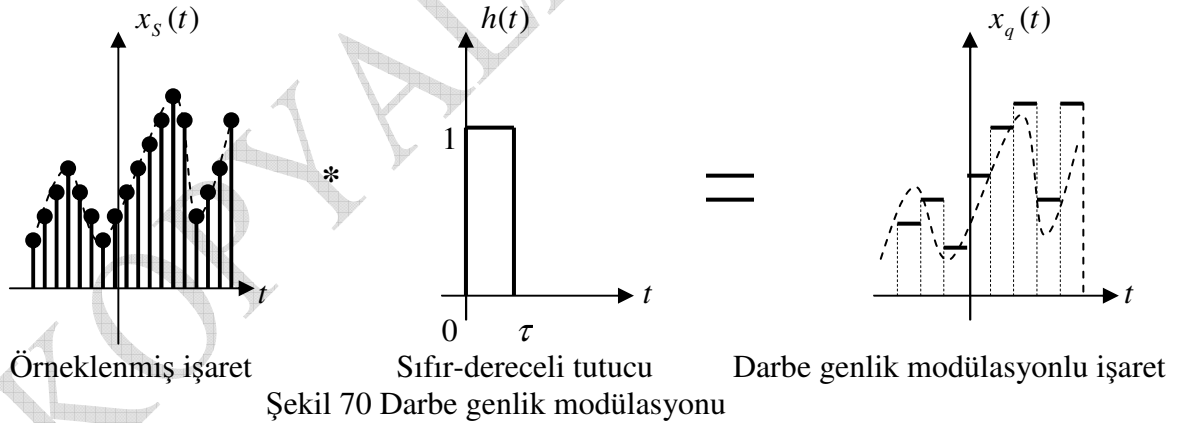
Şekilden $x(t)$ işaretinin örneklenmesiyle oluşan örneklenmiş $x_s(t)$ aslında $x_s(t) = x(kT)$ dir. Buna göre $x(t)$ işaretinin T periodik aralıklarla örneklenmesiyle $x_s(t)$ veya $x_s(t) = x(kT)$ oluşmuştur. Eğer $t \rightarrow kT$ olarak düşünülürse, $x(kT)$ yerine $x[k]$ ayrık işaretime kullanılabilir. $x[k]$ Ayrık işaretin, $x_s(t) = x(kT)$ örneklenmiş işaretin k anlarındaki değerleri olduğunu görmekteyiz.

Devam edersek, şekilden de görüldüğü gibi $x_d(t)$ dijital işaretin elde edilmesi hiç de kolay bir proses olarak görünmüyor. Analog $x(t)$ işaretinden itibaren bir dizi işlem sonrasında üretilmektedir. İşlem safhalarına baktığımızda, işaret analog olarak $x(t)$ sürekli formunda örneklenerek $x_s(t)$ ayrık işarete dönüştürülmektedir. Sonraki bölümlerde detaylı olarak göreceğimiz gibi, örnekleme özel ve önemli bir teori olarak, sürekli işaretlerden ayrık işaretlerin elde edilmesini sağlamaktadır. Örnekleme yapılırken örneklenecek $x(t)$ sürekli işaretinin f_a frekansına göre örnekleme frekansı belirlenir. Shannon ve Nyquist yöntemiyle belirlenen örnekleme f_s örnekleme frekansı ile f_a arasında $f_s \geq 2f_a$ bağıntısı mevcuttur. Buna göre örnekleme frekansı örneklenecek sürekli işaretin en az iki katı veya büyük seçilmelidir. Bu olmadığı takdirde, orijinal $x(t)$ işaretinin örneklerinden $x_s(t)$, tekrar elde edilmesi mümkün olmaz. Bu nedenle $f_s \geq 2f_a$ kuralı örnekleme veya sürekli işareten ayrık veya dijital işaretin elde edilmesinde olmazsa olmaz bir kural olarak mutlaka sağlanmalıdır. Dijital işaretin elde edilmesini gösteren yukarıdaki blok diagramdaki $x(t)$, $x_s(t)$, $x_q(t)$ ve $x_d(t)$ aşamalarını işaretler üzerinde göz önüne alalım.

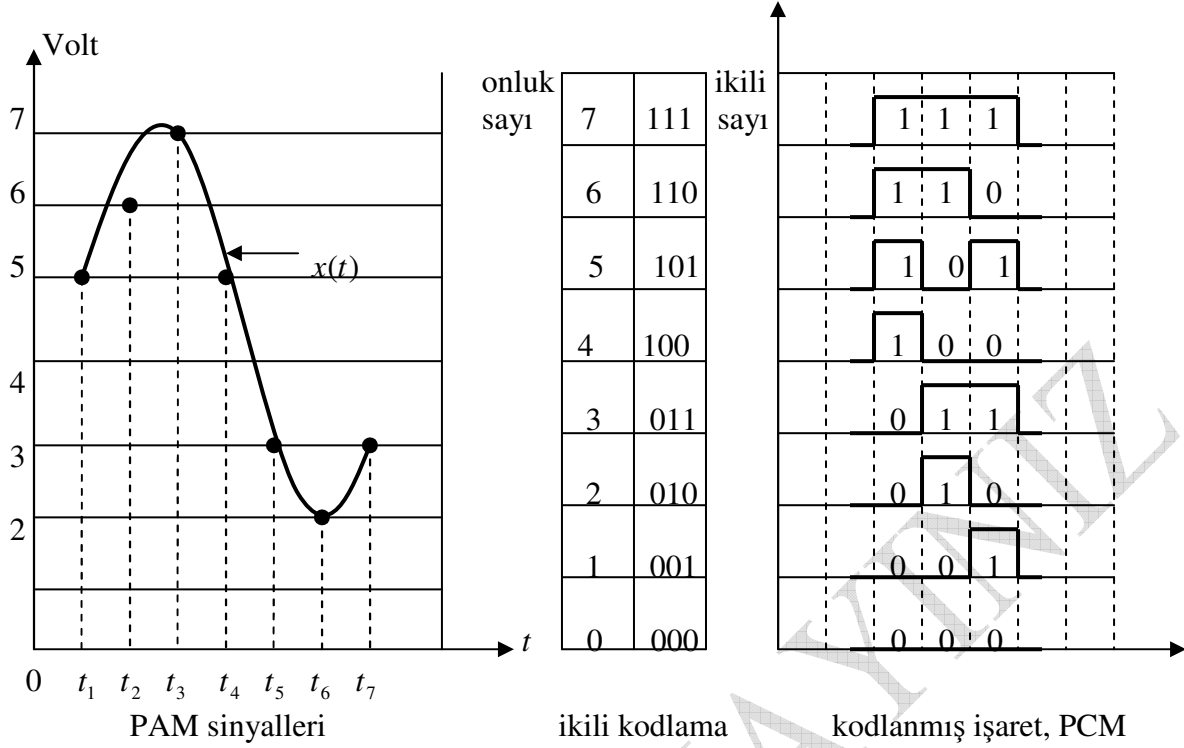


Şekil 69 Analog –dijital işaret dönüşümü

Görüldüğü gibi $x(t)$ analog işareti $f_s \geq 2f_a$ kuralına göre örneklenerek önce $x_s(t)$ ayrık işaretini, bu işaret de belli bir genişlikteki sıfır-seviyeli tutucudan geçirilerek, genlik darbe modülasyon (pulse amplitude modulation, PAM) işareti elde edilir. Elde edilen PAM işareti belli seviyelere göre quantalanarak $x_q(t)$ işaretini oluşturmaktadır. Oluşan $x_q(t)$ işareti darbe kod modülasyonundan (pulse code modulation, PCM) geçirilerek beklenen $x_d(t)$ dijital işareti elde edilir. Quantalanmış PAM sinyallerinin PCM den geçirilmesi demek, PAM işaretinin eşit genlikteki darbelerle kodlanması demektir. Bu şekilde kodlanmış işaret $x_d(t)$ dijital işarettir. Aşağıda örneklenmiş ve ayrık seviyelerle belirlenmiş $x_s(t)$ işaretinin verilen özellikteki $h(t)$ fonksiyonuyla (convolution, bir tür çarpma) işlemine tutulmasıyla oluşan genlik darbe modülasyon, PAM işaretinin elde edilmesi verilmiştir.

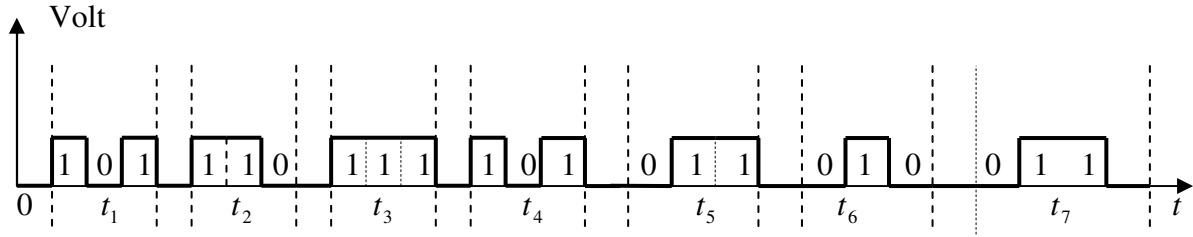


Darbe genlik modülasyonu ile elde edilen işaret değişken genlikteki darbelerden oluşmaktadır. Ancak özellikle haberleşme alanında genlik özellikli işaretlerin bozulmaya açık olması sebebiyle PAM işaretinin bu handikapını kaldıracak sabit genlikli bir kodlama sistemine ihtiyaç duyulur. Bu sistem darbe kod modülasyonu (pulse code modulation, PCM) olarak bilinir. Dolayısıyla gürültü gibi iletim ortamlarından etkilenecek bozulmaya uğrayabilecek PAM işareti, işaretin quantalama seviyelerine göre düzenlenmiş sabit genlikli PCM ile kodlanarak, dijital işarete dönüşür. Bu şekilde elde edilen dijital işaret söz konusu PAM işareti gibi bozulmalara karşı daha güvenli bir yöntemdir. Aşağıda bir $x(t)$ analog işaretinin $x_d(t)$ dijital işarete dönüşümü safhalarıyla gösterilmiştir.



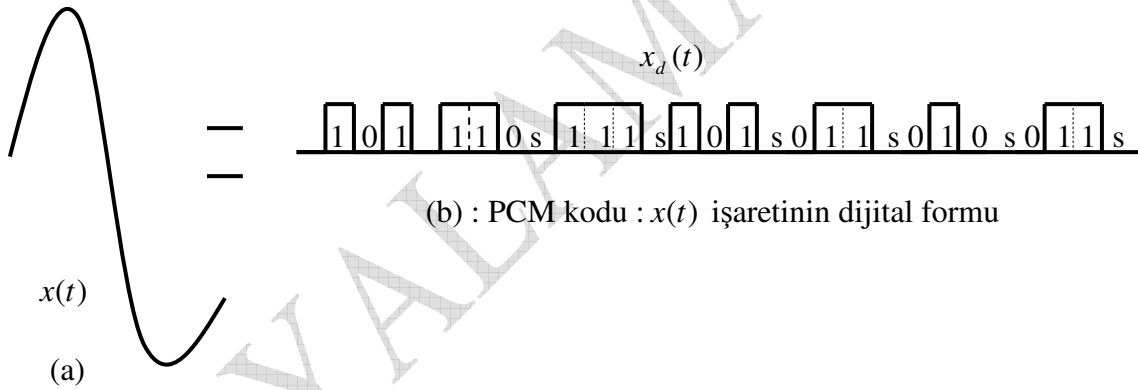
Şekil 71 Analog işaretin 3-bitli ikili sayı ile kodlanması

Görüldüğü gibi $x(t)$ işareti PAM işareti haline getirildikten sonra toplam 8 seviyede (voltaj seviyesi) quantalanmıştır. Bu her bir değer 0-7 arasında bir değere yuvarlatılmıştır. Bu yuvarlatılmış değerler quantalanmış değerler olarak anılmaktadır. Böylece PAM dizisini gösteren her bir quantalanmış onluk düzendeki (0-7) toplam 8 değer ikili (binary) kod ile kodlanmıştır. Toplam 8 quantalanmış değer mevcut olduğundan 3 bitlik bir ikili sistem kullanılmıştır. Toplam quantalanmış 16 değer olsaydı 4 bitlik, tam olmayan 56 değer quantalanmış olsaydı bu kez de 6 bitlik ikili kodlama sistemi kullanılıyor olacaktı. Bunların ışığında 8 quanta seviyesine göre 3 bit olarak kodlanmış $x(t)$ işaretinin dijital formu aşağıdaki gibi olacaktır.



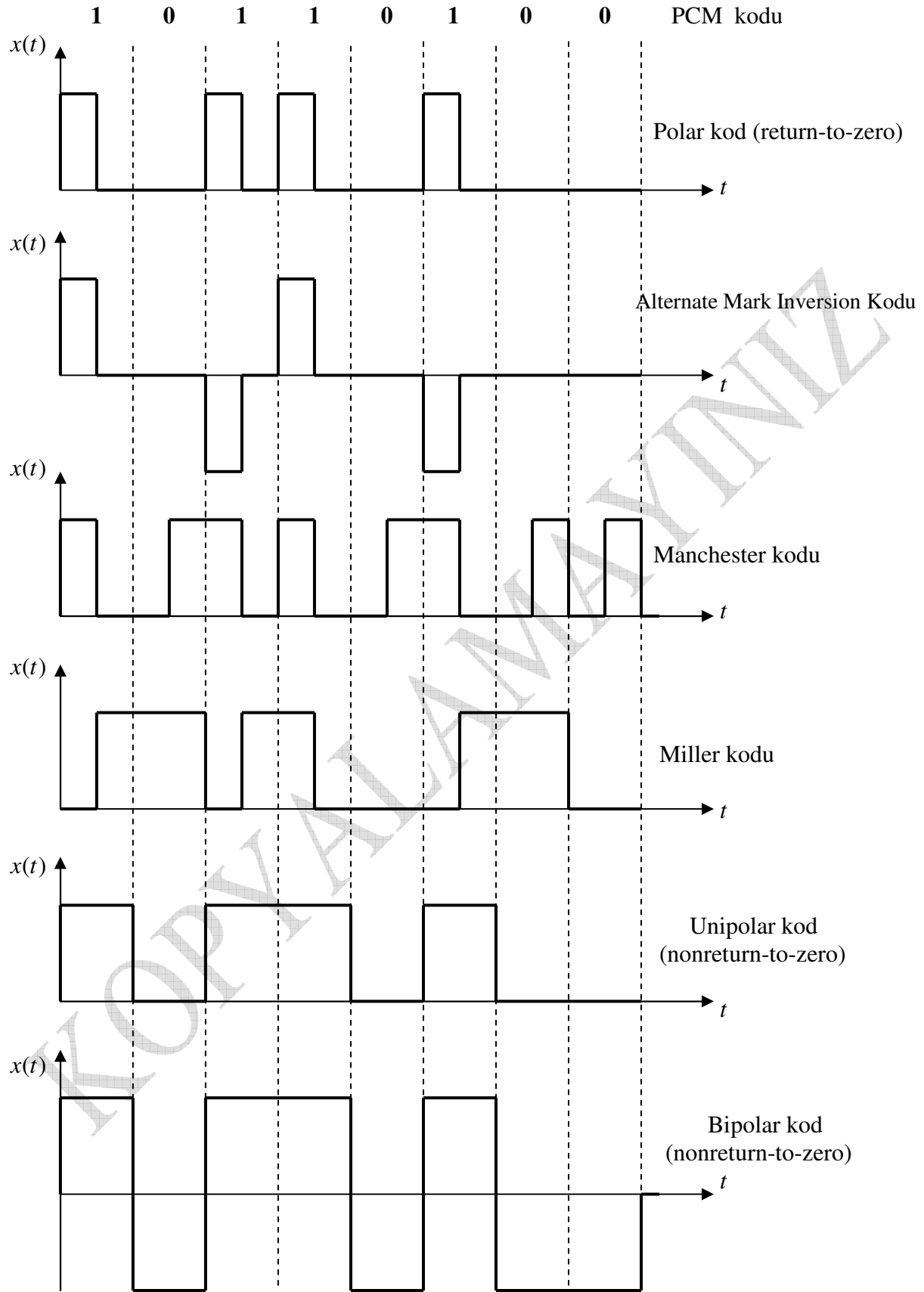
Şekil 72 Dijital işaret : darbe kod modülasyonu (PCM) dizisi

Bakıldığında dijital işaret olarak $x(t)$ analog işaretinin PCM ile kodlanmış dijital formunu görmekteyiz. Darbe katarı olarak da bilinen bu şekildeki PCM kodlu dijital işaret kullanımı özellikle haberleşme mühendisliğinde önemli bir yöntemdir. Şekilde 3-bitlik her bir paket arasındaki boşluk, haberleşmede gönderici ve alıcı arasındaki senkronizasyonu sağlamak üzere “0” veya “1” şeklinde 1-bitlik başlatma veya sonlandırma bitidir. Buna göre $x(t)$ analog (sürekli-zaman) işaretinin örnekleme – PAM-PCM yöntemleriyle elde edilen dijital formu aşağıdaki gibi olacaktır.



Şekil 73 (a) : $x(t)$ analog işaret , (b) : Dijital işaret

Şekil (b) deki her bir aralık “0” veya “1” şeklinde bite karşılık gelmektedir. Dijital işaret de görülen “s” de böyle “0” veya “1” bitidir. Bu bit haberleşmede veri iletiminde veri paketleri arasındaki başlangıç veya bitiş biti gibi senkronizasyon biti olarak değerlendirilmektedir. Aşağıda binary (ikili) formdaki PCM kodunun alternatifi olan bazı dijital kodlar ele alınmıştır.



Şekil 74 PCM kodlama teknikleri

Her bir teknikte “10110100” şeklindeki ikili PCM kodunun karşılığı olan dijital işaretler gösterilmiştir. Buna göre beşinci sıradaki “unipolar kodlama” bizim yukarıda 3-bitlik yaptığımız kodlamanın karşılığı olarak gözlemlenmektedir. Mevcut kodlarda dijital işaretler genlikleri göz önüne alındığında ya (1,0) olarak yani tek değerlikli unipolar veya (-1,1) biçiminde bipolar yani çift değerlikli olarak kodlanmışlardır.

Sayısal İşaretlerin Özellikleri

Gürültüye karşı dayanıklılıkları, yüksek data kapasitelerine uygun olmaları, işlenebilmeleri, depolanabilmeleri, bakım ve kontrollerinin kolaylıkları önemli avantajlarıdır.

KOPYALANMAYINIZ