

BÖLÜM 2.1

İŞARETLER

İşaret, enerjisi ve frekansı olan dalgadır. Bu haliyle bilgi (data) gösteriminde, bilgiyi temsil etmek üzere kullanılan elektriki bir büyüklüktür. İşaret her ne kadar elektriki açıdan enerjisi ve frekansı olan dalga olarak tanımlansa da analitik açıdan *işaret* zaman, uzay veya herhangi bir bağımsız değişkenle ifade edilen fiziksel bir miktardır (quantity). Bu nedenle işaret herhangi bir bağımsız değişkene bağlı bir fonksiyon ile aşağıdaki biçimlerde gösterilebilir :

$$s(t) = 15t^2$$

$$s(x, y) = y^2 + 6xy - 9y + 5x - 7x^2$$

$$s(x, y, t) = 4x - 2xy + 3x^2 + 5t - 6xt + y^2$$

Görüldüğü gibi işaretler tek boyutlu olarak yalnızca zamana “*t*” veya iki boyutlu olarak bir düzlemdeki mesafelerle (yer, location) ilgili (spatial) bağımsız değişkenlerden oluşan koordinatlardan veya söz konusu “spatial” koordinatlarla “zaman” dan oluşan üçlü bağımsız değişkenden oluşan bir başka çok boyutlu formda gösterilebilmektedir.

Multichannel ve Multidimensional işaretler (çok kanallı ve çok boyutlu işaretler)

Görüldüğü gibi bir işaret bağımsız değişkenlerden oluşan fonksiyon olarak gösterilebilmektedir. Bu şekildeki bir fonksiyonun değeri real (gerçek)-değerli (skaler) miktar, kompleks-değerli miktar veya vektör olabilir. Eğer işaret real-değerlikli ise

$$s_1(t) = A \cos 5\pi t$$

olarak, eğer kompleks değerlikli ise de

$$s_2(t) = A e^{j5\pi t} = A \cos 5\pi t + jA \sin 5\pi t$$

Bazen bu gösterimlerin dışında işaretler birden çok sayıda kaynak veya sensör tarafından üretildiklerinden “*çoklu kaynak* (multisources) veya *çoklu sensör* (multisensors)” yapısında gösterilmeleri gerekiyor. Bu tür işaretler “*vektör form*” adı verilen biçimde gösterilirler. Eğer $s_k(t)$ $k=1,2,\dots$ alınırsa bu, k .ncı kaynak veya sensörden gelen işareti göstermektedir ($s_k(t)$). Eğer 4 kaynaktan (sensörden) işaret alınıyorsa bunu gösteren vektör $\mathbf{S}_4(t)$ olacaktır ve

$$\mathbf{S}_4(t) = \begin{bmatrix} s_1(t) \\ s_2(t) \\ s_3(t) \\ s_4(t) \end{bmatrix}$$

olarak gösterilecektir. Bu tipte (multi source – multi sensor) vektör formunda gösterilen işaretlere “**çok kanallı (multichannel) işaretler**” denilmektedir.

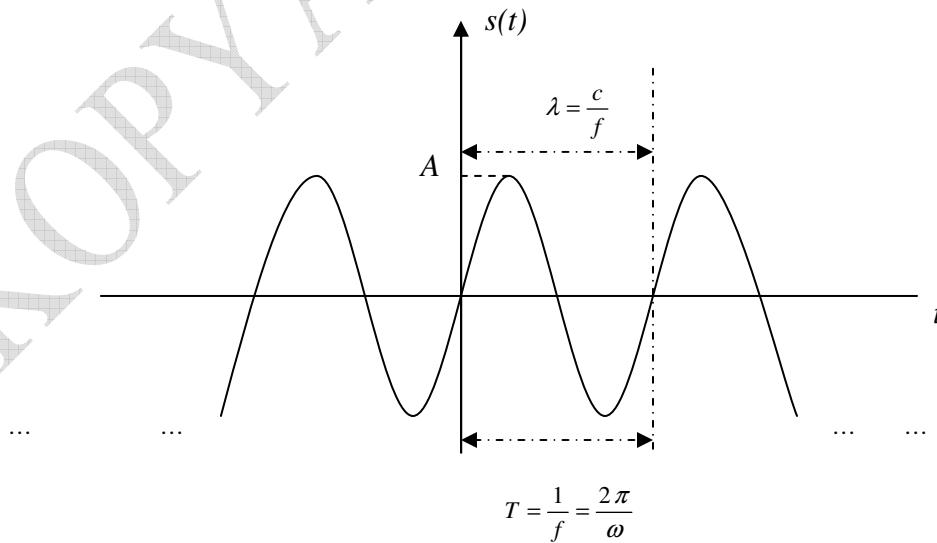
Buna ek olarak eğer bir işaret fonksiyonu eğer bir bağımsız değişkenden oluşuyorsa buna tek boyutlu, eğer çok bağımsız değişkenden oluşuyorsa da “**çok boyutlu (multi-dimensional, M-dimensional) işaretler**” denilmektedir. Örneğin bir resim üzerindeki bir herhangi bir noktanın şiddeti (intensity, brightness) $I(x, y)$ olarak iki boyutlu gösterilirken, bir siyah beyaz TV deki resmin bir noktası ise $I(x, y, t)$ gibi intensity zamanın fonksiyonu olarak ortaya çıkmaktadır. Buna mukabil bir renkli TV resmi “kırmızı, gri, mavi” renklerinin intensity fonksiyonları olarak $I_r(x, y, t)$, $I_g(x, y, t)$ ve $I_b(x, y, t)$ biçiminde *vektörler* biçiminde ortaya çıkmaktadır. Buna göre renkli TV resminin, aslında üç kanallı (*multichannel*) ve üç boyutlu (*multidimensional*)

$$\mathbf{I}(x, y, t) = \begin{bmatrix} I_r(x, y, t) \\ I_g(x, y, t) \\ I_b(x, y, t) \end{bmatrix}$$

biçiminde vektör formundaki bir işaret olduğu görülmektedir.

İŞARET VE TEMEL KAVRAMLAR

Yukarıdaki tanımlara sahip işaret, kullanıldığı alanlara göre farklı biçimde ortaya çıkar. Sinyal olarak anılan işaret, elektronikte, bir elektrik akımı, haberleşmede ise kodlanmış bilgi (data) olarak tanımlanmaktadır. Buna göre eğer bir $x(t)$ işaretindeki beş temel büyüklüğü (genlik (A), periyod (T, sn), frekans (Hz), faz (radyan), dalga boyu (m)) içeren genel gösterim aşağıdaki şekilde verilmiştir. İşaret fonksiyonu $s(t) = A \sin(2\pi f t + \theta)$ olsun. $\omega = 2\pi f$



Şekil 1 Temel işaret parametreleri

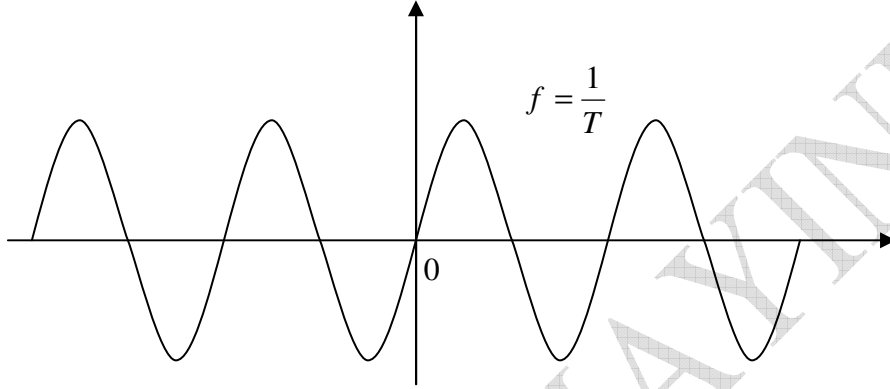
Period (T) : Bir saykılın zaman olarak uzunluğu

Dalga boyu (λ) : Bir saykılın mesafe olarak uzunluğu

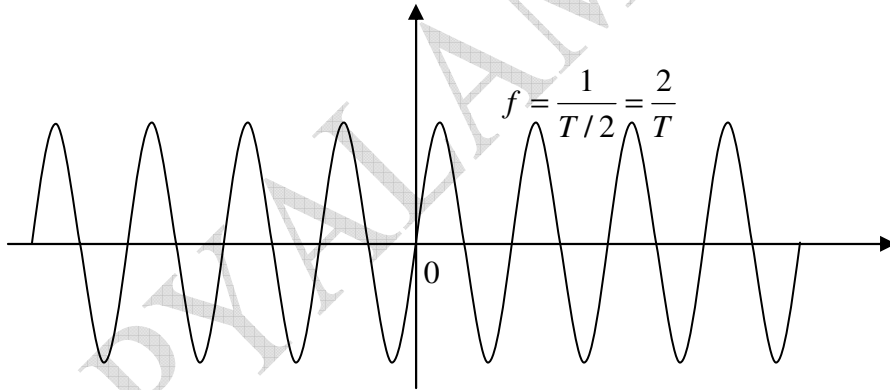
Frekans (f) : Saniyedeki salınım (period,saykıl) sayısı

Bilgi, frekans ve dalga boyu

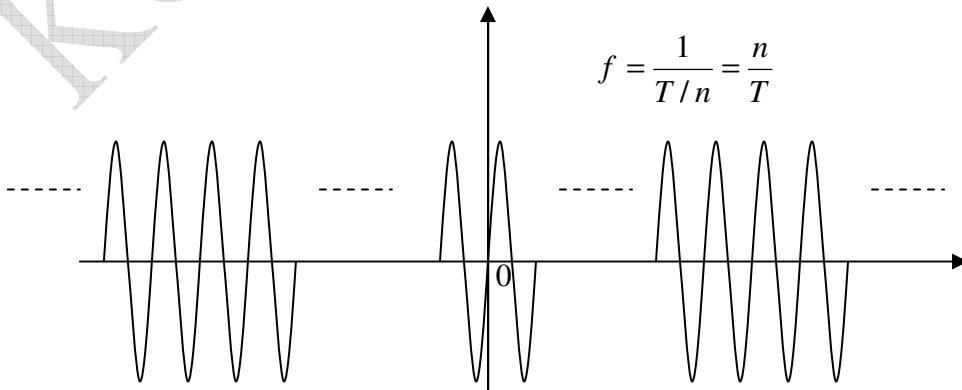
Yukarıdaki temel işaretin kullanılmak üzere bir bilgiyi temsil etmesi halinde, bilgi miktarı, frekans ve dalga boyu arasındaki ilişkinin nasıl olacağına dair fikir edinmeye çalışalım. Bunun için aşağıda yer alan bir T periodunda “ a “ kadar bilginin gösterildiği Şekil 2.2 yi ve ona bağlı diğer iki şekli göz önüne alalım.



Şekil 2 a bilginin gösterimi



Şekil 3 2a bilginin gösterimi



Şekil 4 $n \times a$ bilginin gösterimi

Şekillerden de görüldüğü gibi, period azaldıkça, diğer deyişle frekans arttıkça, yükseldikçe işaretin temsil ettiği, kodlandığı bilgi kapasitesinde de bir o kadar artış olacaktır. Yüksek frekanslarda daha fazla bilginin gösterilebilmesi bu yüzden mümkündür. Frekansla birlikte eğer,

$$\lambda = \frac{c}{f}$$

bağıntısı da göz önünde bulundurulursa, işaretin dalga boyunun da kısaldığı görülmektedir. Eğer daha işaretin daha fazla kapasitedeki bilgiyi temsil etmesi isteniyorsa, yüksek frekans – düşük dalga boyu önemli kriter olacaktır. Bilginin etkin işlenmesi, taşınması ve alınması açısından buna zorunluluk vardır. Küçük dalga boylarındaki işareti işlemek, göndermek ve almak daha kolaydır. Eğer bir radyo haberleşmesini göz önüne getirirsek, alıcı taraftaki bilgiyi gösteren işareti herhangi bir anten kullanarak alacağımıza göre, antenin dalga boyunun bilginin dalga boyu ile uyumlu olması gereklidir. Eğer işaretin dalga boyu, anteninkinden büyük ise, bu bilginin alınması mümkün olmayacaktır. Bu nedenle, bilgi işaretinin dalga boyunun anteninkine uygun olması gereklidir.

Bilgi Kapasitesi

Bir sistemin bilgi kapasitesi, basit anlamda saniyedeki bit sayısı (bps) olarak tanımlanır. Bir iletişim sisteminin bilgi kapasitesi ise, belli bir zaman dilimi içinde sistemde taşınabilecek bağımsız sembollerin sayısı olarak tanımlanmaktadır. 1928 yılında Hartley tarafından, band genişliği ve iletim süresine bağlı olarak bulunan kapasite ilişkisi yararlı olmuştur. Hartley kuralına göre W band genişliği ve T iletim süresi olmak üzere C kapasitesi

$$C = W \times T$$

olarak tanımlanmıştır. Kapasite birimi saniyedeki bit sayısını göstermek üzere “bps” olarak kabul edilmiştir. Buna göre bilgi kapasitesinin, band genişliği ve iletim süresi ile doğru orantılı (lineer) değiştiği görülmektedir. Buna ek olarak 1948 yılında C.E.Shannon tarafından geliştirilen kapasite tanımı, kodlanmış halde ne kadar bilgini taşınabileceğini gösteren bir ölçüm birimi olarak daha da geliştirilmiştir.

$$C = W \log_2 \left(1 + \frac{P_s}{P_N} \right)$$

Bilgi teoremine dayalı Shannon kuralı olarak da bilinen bu ifadede, saniyedeki bit sayısını (bps) gösteren C taşınabilecek bilgi kapasitesini, W frekanslara bağlı band genişliğini ($f_{\max} - f_{\min}$), P_s / P_N işaretin gücünün gürültünün gücüne oranını (signal to noise) göstermektedir. Görüldüğü gibi, bilgi kapasitesi yukarıda açıklananları teyit edecek şekilde frekans ile doğru orantılı bir kavram olarak görülmektedir. Bunun yanı sıra P_s / P_N ile de işaretin bozulmaya yol açacak gürültüye oranı ne kadar güçlü veya büyükse, bilgi kapasitesi bununlada artış gösterecek istikamettir.

Örnek

Sinyal gürültü oranı 1000 (30 dB, desibel) ve band genişliği 2.7 kHz olan bir ses bandı iletişim kanalındaki bilgi kapasitesini hesaplayalım.

Çözüm

$$\frac{P_s}{P_N} = 1000 = 30\text{dB} \quad , \quad W = 2.7 \text{ kHz}$$

$$C = W \log_2 \left(1 + \frac{P_s}{P_N}\right) = 2700 \log_2 (1 + 1000) \\ = 26.9 \text{ kbps}$$

buna göre 26.9 kbps lik bilgi 2.7 kHz lik bir kanalda iletilebilecektir.

Örnek :

1 kHz lik bir işareti alacak antenin dalga boyunu hesaplayalım.

$$\lambda = \frac{c}{f}$$

bağıntısı gereğince,

$$\lambda = \frac{3 \times 10^8}{1000} = 300.000 \text{ m}$$

Dalga boyu 300.000 m olan bir anten elbette mümkün değildir. Pratikte kullanılan anten boyu, işaret dalga boyunun çeyreği kadardır. Buna göre böyle bir haberleşmeyi mümkün kılmak için mutlaka frekansın artırılması gerekiyor. Bunu sağlamak üzere yapılan işleme **modülasyon** denilmektedir. Bu yöntemde zayıf işaret (bilgi) kuvvetli işaretin (taşıyıcı işaret) üzerine bindirilerek (zayıf ve kuvvetli işaretin çarpımı) işaret gönderilir. Bu işleme modülasyon denilmektedir. Pratikte kullanılan anten boyu, işaret dalga boyunun çeyreği kadardır. Buna göre modülasyon uygulanmış işaretin dalga boyu

$$\lambda = \frac{\text{ışık hızı}}{\text{modüle edilmiş taşıyıcı}} = \frac{c}{f_{(C \times m)}}$$

$$f_{(C \times m)} = f_C + f_m$$

ifadedeki f_C taşıyıcı frekansı, f_m bilgi (mesaj) işaretine oranla çok yüksektir. Durumu verilen örneğe uyarlamak için eğer taşıyıcı frekans 29.999 KHz (29999000 Hz, 29.999 GHz) alındığında modüle edilmiş işaretin dalga boyu

$$\lambda = \frac{3 \times 10^8}{29999000 + 1000} = \frac{3 \times 10^8}{30000000} = 10 \text{ m}$$

Böyle bir işareti almak üzere kullanılacak antenin çeyrek dalga boyutlu olduğu düşünülürse, sonuçta dalga boyu

$$\frac{\lambda}{4} = \frac{10}{4} = 2.5 \text{ m}$$

olan bir anten kullanmak yeterli olacaktır.

Örnek

600 MHz lik işaretin dalga boyunu hesaplayalım.

$$\lambda = \frac{3 \times 10^8}{0.6 \times 10^9} = 0.5 \text{ m} = 50 \text{ cm}$$

Görüldüğü gibi dalga boyu 50 cm olan antenler mevcut olduğundan, 3 GHz lik bir bilgi veya işaretin gönderilmesi ve anten vasıtasıyla alınması mümkündür. Haberleşme teorisinde, genellikle bilgi ilk örnekteki gibi genellikle düşük frekanslıdır (1 kHz gibi). Ama bu işareti alacak anten boyu olası olmayacağından, haberleşme tekniği olarak bu işaret daha büyük işaretli bir taşıyıcı işaretin üzerine bindirilerek gönderilir (modülasyon). Yüksek frekanslı taşıyıcı ve onun üzerindeki bilgiyi ikinci örnekteki benzer yolla almak mümkündür. Verilen örnekte 600 MHz lik işaretin, mesaj işaretin (modüle eden işaret) çok küçük olması durumunda, modüle edilen işarete (taşıyıcı işaret) yaklaşık olarak eşit olduğu kabul edilirse, modüle edilmiş işaretin frekansının yaklaşık olarak taşıyıcının işaretine denk olduğu göz önüne alınmıştır ($f_{(C \times m)} \cong 600 \text{ MHz}$).

Elektromagnetik Spektrum

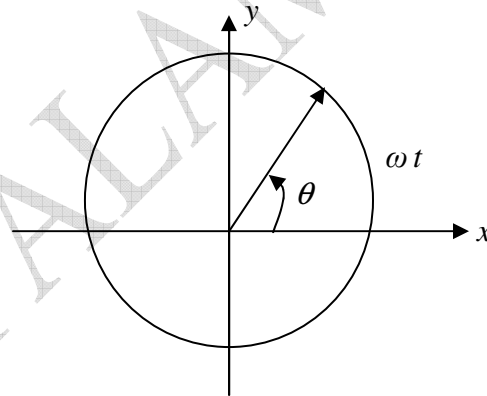
İşaretlerin frekans ve dalga boylarına göre sınıflandırıldığı tablodur. En genel haliyle aşağıdaki dalgalardan oluşur.

Dalga	Frekans (Hz)	Dalga boyu (m)
Radyo	$(0.5 - 1600) \cdot 10^6 \text{ Hz}$	0.187 – 600 m
AM Radyo	$(0.5 - 1.5) \cdot 10^6 \text{ Hz}$	600 – 200 m
KısaDalga Radyo	$(1.605 - 54) \cdot 10^6 \text{ Hz}$	187 - 5.55 m
TV-FM Radyo	$(54 - 1600) \cdot 10^6$	5.55 – 0.187 m
Mikrodalga (radar)	$(1.6 - 30) \cdot 10^9 \text{ Hz}$	187 – 10 nm
Infrared	$(0.003 - 4) \cdot 10^{14} \text{ Hz}$	1 mm – 750 nm
Görünür	$(4 - 7.5) \cdot 10^{14} \text{ Hz}$	750 – 400 nm
Ultraviolet	$7.5 \cdot 10^{14} - 3 \cdot 10^{16} \text{ Hz}$	400 – 10 nm
X-Ray	$\geq 3 \cdot 10^{16} \text{ Hz}$	< 10 nm
Gamma	$\geq 10^{20} \text{ Hz}$	< 10^{-12} nm

Spektruma ait mikrodalgaya kadar olan işaretlerin en önemli özelliklerinin yansıma olduğu görülmektedir. Bu tür işaretler çarptıkları herhangi bir engel veya hedeften yansıma özelliği gösterirler. Radarlar bu özellikten yararlanılarak geliştirilmiş sistemlerdir. Bunun yanında daha çok iyon yapısında ortaya çıkan ultraviolet, X-Ray ve Gamma sinyalleri yansıma özelliğinde değildirler. Bu işaretler yüksek düzeylerde yoğunlaştırılmış iyon yüklü olduklarından, delip-geçme özelliğindedirler. Ultrason, tomografi ve MR (magnetik rezonans) isimleriyle uygulamada yer bulan bu işaretlerin kullanımında, istenen dokudan geçen (delip-geçen) bu işaretlerden arka planda görüntüler oluşturularak, analiz ve teşhisler yapılır. Bu anlamda “slice-projection” üzerine kurulu kısmen Fourier transformasyon özellikli Radon transformasyonu bu alanlarda kullanılan tekniklerden bazılarıdır. Bunun yanında direkt odaklanma özelliği olan laser tipli işaretlerinde genel olarak yansıma özelliği yoktur. Ancak laser grubunda düşünülebilecek infrared işaretin yansıma özelliği bulunmaktadır.

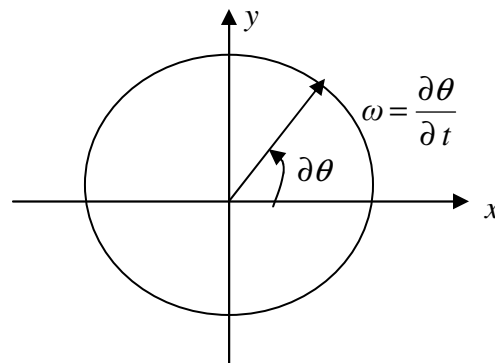
İşaret - Faz İlişkisi

Faz, herhangi bir andaki veya mesafedeki durum demektir. Faz farkı ise zaman veya mesafe açısından, herhangi bir zamandan diğer bir zamana geçildiği andaki geçen süreyi veya alınan mesafeyi (replacement) gösterir. $A\sin(\omega t + \theta)$ işaretini göz önüne alırsak, $(\omega t + \theta)$ teriminin anlık faz olduğunu, bunun alternatif olarak $A\sin[(\omega t + \theta(t))]$ gibi de yazılabileceğini düşünebiliriz. Eğer böyle yazarsak $\theta(t)$ değeri bu kez anlık faz sapması olarak değerlendirilecektir. Her iki halde de θ faz açısı (veya $\theta(t)$ anlık faz sapmasını irdlemek faydalı olacaktır. Bunun için verilen aşağıdaki şekilden



Şekil 5 Faz – açısal hız görünümü

ω açısal hız olup, “ t ” zaman süresince yer değişimi (replacement) ωt miktarı olarak, $\theta = \omega t$ faz açısı ile ifade edilmektedir. Eğer açısal yer değişimi $\Delta\theta$ ise,

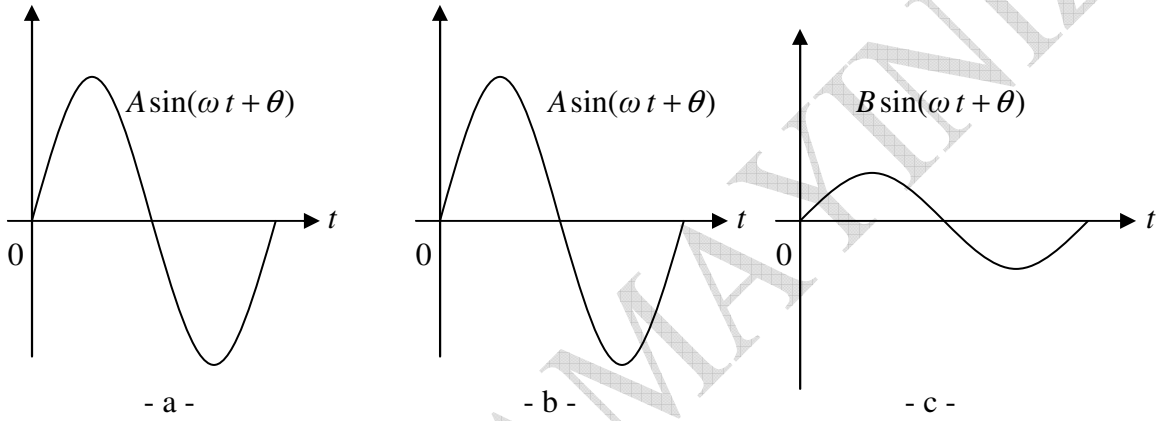


Şekil 6 Faz – açısal hız değişimi

açısal hızdaki değişim

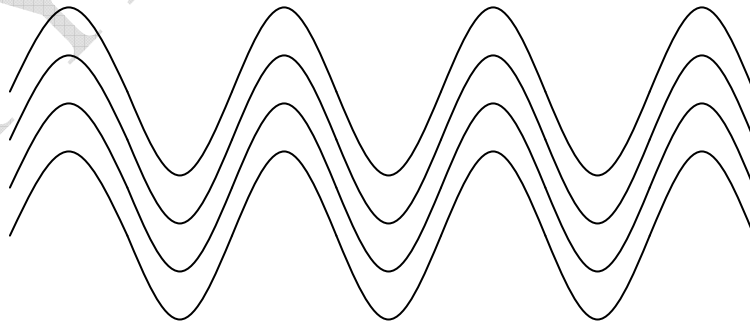
$$\omega = \frac{\partial \theta}{\partial t}$$

olacaktır. Buna göre, faz dediğimiz olay açıldaki mesafeye bağlı değişim $\Delta\theta = \partial\theta$ iken, açısal hız ise, saniyedeki açısal yer değişimi olarak ortaya çıkmaktadır. Bütün bunlar işaretle basit anlamda bilinen, faz kavramının aslında açısal hız ve açısal yer değiştirme kavramlarıyla ilgili olduğunu göstermektedir. Bu açıdan faz'ın aslında bulunduğu uzayda işaretin bir noktadan diğer bir noktaya hareketi veya yer değiştirme miktarı olarak mesafe ile ilgili bir kavram olduğu ortaya çıkar. Şimdi bu bilginin ışığında, işaretlerde çeşitli biçimlerde ortaya çıkan faz kavramına ait bazı kavramlar, aşağıda biraz daha yakından ele alınacaktır.



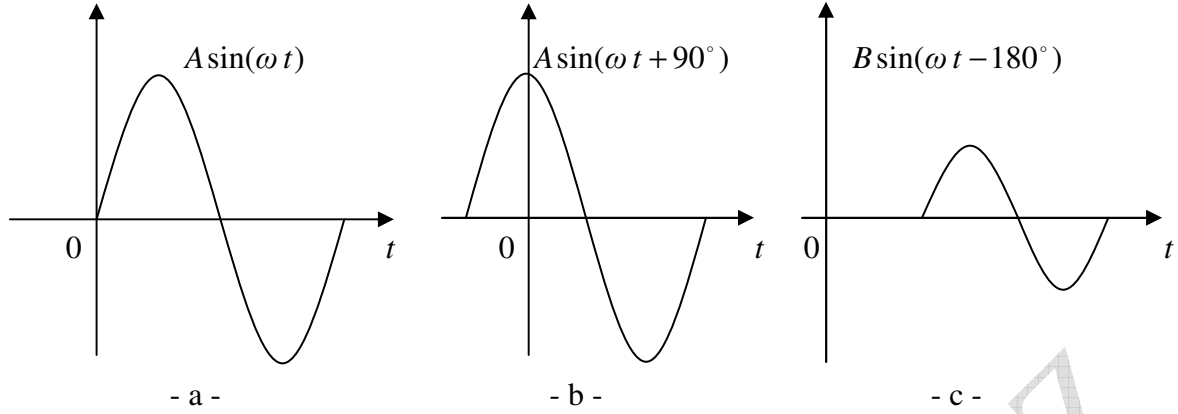
Şekil 7 Aynı fazlı ($\theta = 0$) işaretler

Her üç şekilden de görüldüğü gibi işaretlerin fazları aynıdır ($\theta = 0$), aynı noktadan ve aynı yönde salınma başlamaktadırlar. Genliklerinin farklı olması aynı fazda olmalarına engel değildir. Nitekim (a) ve (b) aynı fazlı, aynı genlikli (A,A) olmalarına rağmen, (c) farklı genlik (B) değerinde olmasına rağmen diğerleriyle aynı fazdadır.



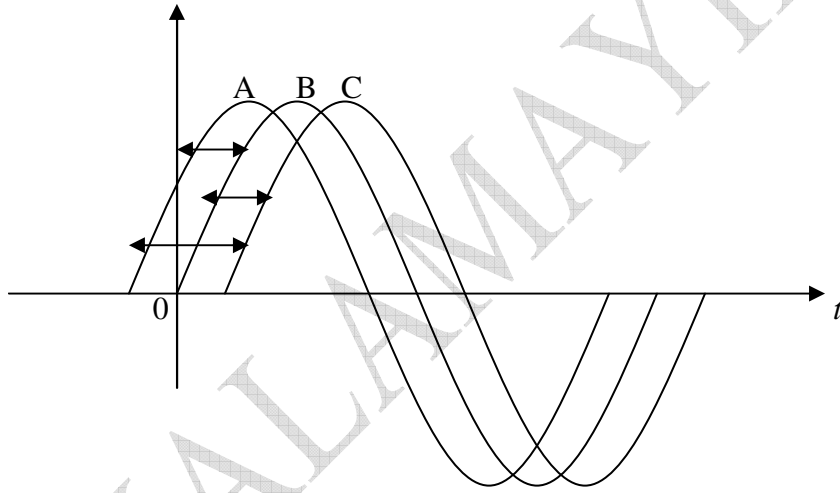
Şekil 8 Işın demeti : aynı fazlı ($\theta = 0$) işaretler

Aynı fazlı ve genlikli işaretlerin yukarıdaki gibi bir arada üretilmelerinden ışın demetleri (beam) oluşmaktadır. Aynı fazlı demetlere genellikle “*coherent*” dalgalar ($\theta = 0$) denir. Bu tür ışın demetlerindeki aynı fazlılık toplam dalganın veya demetin gücünü artırır, kuvvetlendirir.. Örneğin Laser dediğimiz işaretler bu özellikteki dalgalardan oluşmaktadır. Üstelik Laser aynı fazlı (coherent) ve aynı renkli (tek renk, “*monochromatic*”) işaretlerden oluşan özel bir dalgadır.

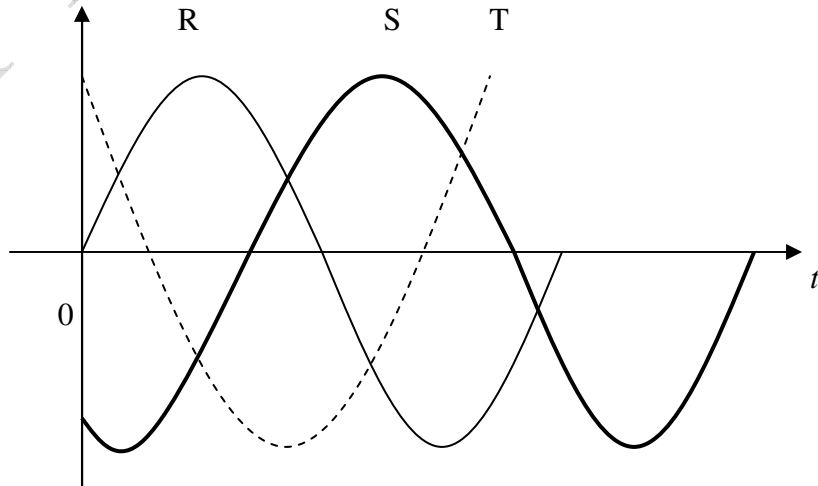


Şekil 9 Farklı fazlı işaretler

Görüldüğü gibi her üç şekildeki işaret farklı fazlardadır. (b) işareti (a) ya göre 90° ileri iken, (c) işareti ise, (a) ya göre 180° geridir. Dolayısıyla (b) de (c) ye göre 270° ileridir.



Şekil 10 Farklı fazlı işaretler

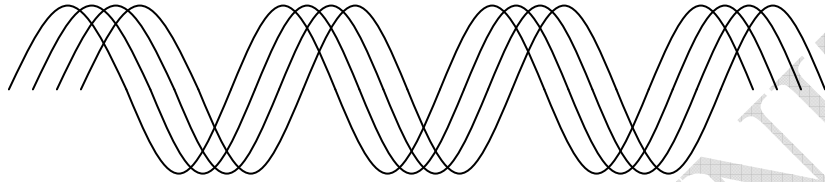


Şekil 11 Farklı fazlı işaretler

Yukarıda yine tipik olarak birbirleriyle faz farkları olan üç R, S, T işaretleri mevcuttur. T en geri fazlı işaret iken, ondan sonra S gelmektedir. Eğer aralarındaki faz farkları eşit biçimde 120° şer derece olarak düzenlenirse,

$$R(\omega t), \quad S(\omega t - 120^\circ), \quad T(\omega t + 120^\circ)$$

Elektrik devrelerindeki 3 fazlı işaretlerin yapısına benzer bir durum ortaya çıkar.



Şekil 12 Işın demeti : farklı fazlı işaretler

Görüldüğü gibi, farklı fazda aynı veya farklı genlikli işaretlerden oluşan bir ışın demeti görülmektedir. Farklı fazlardaki işaretlerden oluşan bu tür demetlerde, faz farklılığı ışın demetinin zayıflamasına sebep olur. Çünkü farklı fazların süperpozisyonunda zayıflamalar söz konusudur.

Anlık Faz

$A \sin(\omega t + \theta)$ gösteriminde anlık faz,

$$\phi(t) = \omega t + \theta = \text{anlık faz}$$

θ , anlık faz açısı olarak tanımlanır. Ve eğer $\phi(t) = \omega t + \theta(t)$ olarak düşünülürse bu kez de

$$\theta(t) = \text{anlık faz sapması}$$

olarak tanımlanır. Bu durumda anlık açısal hız ise,

$$\omega(t) = \phi'(t) = \frac{d}{dt} \phi(t)$$

olurken **anlık frekans** ise,

$$2\pi f(t) = \frac{d}{dt} \phi(t)$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d}{dt} \phi(t)$$

Görüldüğü gibi, faz kavramının direkt olarak açısal hız ve ona bağlı olarak frekansla da ilişkisi vardır. Anlık frekans ifadesi ile, birim çember üzerinde (2π) anlık fazdaki değişim vurgulanmaktadır. Anlık faz işaretin herhangi bir anda herhangi bir frekanstan ne kadar miktar içerdiğini belirlemeye yarayan önemli bir parametre olup, daha çok ileri işaret işleme teknikleri olan zaman-frekans analizlerinde (kısa zamanlı Fourier transformasyonu (short-term Fourier transform, STFT), dalgacık teorisi (wavelet theory) ve Hilbert transformasyonu...) yararlanılmaktadır. Yukarıda verilen anlık frekans Hilbert transformasyonundan yararlanılarak elde edilen analitik işaretten de elde edilebilmektedir. Eğer bir analitik işaret $z(t)$ olarak aşağıdaki gibiyse

$$z(t) = A(t) e^{j\phi(t)}$$

buradan $\phi(t)$ faz bilgisini kullanarak ani frekans

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d}{dt} \phi(t)$$

olarak hesaplanabilir. Analitik $z(t)$ işareti gerçekte bir $x(t)$ reel işareti üretilmektedir. Yani başlangıçta $x(t)$ gerçek işareti varken bundan kompleks $z(t)$ işareti elde edilmektedir.

$$z(t) = x(t) + jy(t)$$

$$y(t) = H\{x(t)\} = x\left(\frac{\pi}{2} - t\right)$$

$H\{x(t)\}$ ifadesi, Hilbert transformasyonunu göstermektedir. Anlık frekans ifadesinde yer alan $\phi(t)$ faz bilgisi $z(t)$ denkleminde

$$\phi(t) = \tan^{-1} \frac{y(t)}{x(t)}$$

olarak hesaplanabilecektir. Bu yaklaşımla oluşan $z(t)$ analitik işareti negatif frekansları içermeyen bir işaret görünümündedir. Bu şekilde gerçek bir işaretin anlık frekansı Hilbert transformasyonundan yararlanılarak elde edilen analitik işareti üretilmiştir. Buna göre bir işaretin içerdiği herhangi bir frekansının zaman olarak hangi anda hangi büyüklükte olduğu tespit edilmektedir. Bu özelliğiyle anlık frekans, ileri işaret işleme teknikleri içinde zaman – frekans analizlerinde (time – frequency analysis) kullanılan önemli bir yöntemdir. Temeli bahsedildiği gibi analitik işaret dolayısıyla da **Hilbert transformasyonuna** dayanmaktadır.

Anlık frekansın belirlenmesini sağlayan analitik işaret, negatif frekans bileşenlerini içermediğinden, bunu sağlayan Hilbert transformasyonu aynı zamanda filtreleme fonksiyonu olarak çalışmaktadır. Çünkü negatif frekansların bu yolla filtre edilmesiyle analitik işaret oluşmaktadır. Bu şekilde elde edilen analitik işaret haberleşme sistemlerinde, çift yan band modülasyonu yerine, tek yan band modülasyonunun kullanılmasında önemlidir. Bu şekilde hem geniş band hemde büyük güç kullanımından (harcanmasından) kaçınılmaktadır.

Negatif Frekans

Pozitif frekans normal frekans gibi bilinmesine rağmen, negatif frekans konusu biraz ilginçtir. Frekans saniyedeki salınım sayısını gösteren bir büyüklük veya miktar olduğuna göre, negatif frekansın karşılığını bu tanım içinde mantıksal açıdan bulmak güç iştir. Bu açıdan en azından fiziksel açıdan var olmayan bir frekans türüdür. Eğer frekans titreşim veya salınım olarak dönen dairesel bir harekete benzetilirse, bir tekerleğin saat yönünde ve saatin ters yönündeki hareketi gibi düşünüldüğünde, ters yöndekini negatif frekans olarak algılanabilir. Somutlaştırmaya çalışırsak, örneğin $\cos[(-\omega)t + \theta]$ ifadesindeki $(-\omega)$ şeklindeki negatif gibi görünen frekansın aslında $\cos(-\omega t + \theta)$ gibi düşünülerek bu ifadenin de

$$\cos[(-\omega)t + \theta] = \cos(-\omega t + \theta) = \cos(\omega t - \theta)$$

gibi düşünülmesinden dolayı $\cos[(-\omega)t + \theta]$ ifadesindeki $(-\omega)$ negatif frekansın $\cos(-\omega t + \theta) = \cos(\omega t - \theta)$ gösterimiyle pozitif olduğu görülecektir. Eğer Euler denkleminde normal $e^{j\omega t}$ ifadesinin eşleniği durumundaki negatif frekanslı $e^{-j\omega t}$ ($e^{-j\omega t} = e^{j(-\omega)t}$) exponensiyel formu göz önüne alırsak,

$$e^{j\omega t} = \cos \omega t + j \sin \omega t$$

$$e^{-j\omega t} = e^{j(-\omega)t} = \cos(-\omega)t + j \sin(-\omega)t = \cos \omega t - j \sin \omega t$$

durumunda $(-\omega)$ olarak $e^{-j\omega t}$ de görünen negatif frekans, elde edilen $\cos \omega t - j \sin \omega t$ ifadesinde direkt olarak $(-\omega)$ negatif frekans olarak görünmemektedir. Böyle bir gösterimin aslında $\cos(-\omega)t + j \sin(-\omega)t$ ifadesinden elde edildiğini görmekteyiz.

$$\cos(-\omega)t + j \sin(-\omega)t = \cos \omega t - j \sin \omega t$$

Bunu göstermek üzere $e^{j\omega t}$ genel gösterimindeki frekansı $(-\omega)$ biçiminde negatif olarak göz önüne alıp $e^{j(-\omega)t}$ olarak yazabiliriz. Bununla oluşacak ifade

$$e^{j\omega t} \big|_{\omega=-\omega} = e^{j(-\omega)t} = \cos(-\omega)t + j \sin(-\omega)t$$

şeklinde düşünüldüğünden bunun sonucunda negatif frekansın

$$\begin{aligned} e^{j(-\omega)t} &= \cos(-\omega)t + j \sin(-\omega)t \\ &= \cos \omega t - j \sin \omega t \end{aligned}$$

gösterimiyle ortadan kalktığı görülmektedir. Yani sonuçta negatif frekans $\cos \omega t - j \sin \omega t$ gösteriminde ortadan kalkarak bir tür pozitif duruma gelmiştir. Bundan dolayı negatif frekansın aslında bir tür pozitif, hatta mutlak pozitif frekans olduğunu söyleyebiliriz ve buna dayanarak,

$$\omega = |\omega_0|$$

olduğunu düşünebiliriz. Bunun yanında negatif frekansı daha belirgin göstermek üzere genellemek de mümkündür. Bunun için $e^{j\omega t}$ ifadesinde $\omega = \pm n \omega_0$ olarak alınırsa

$$e^{j\omega t} = e^{\pm jn\omega_0 t} = \cos n\omega_0 t \pm j \sin n\omega_0 t$$

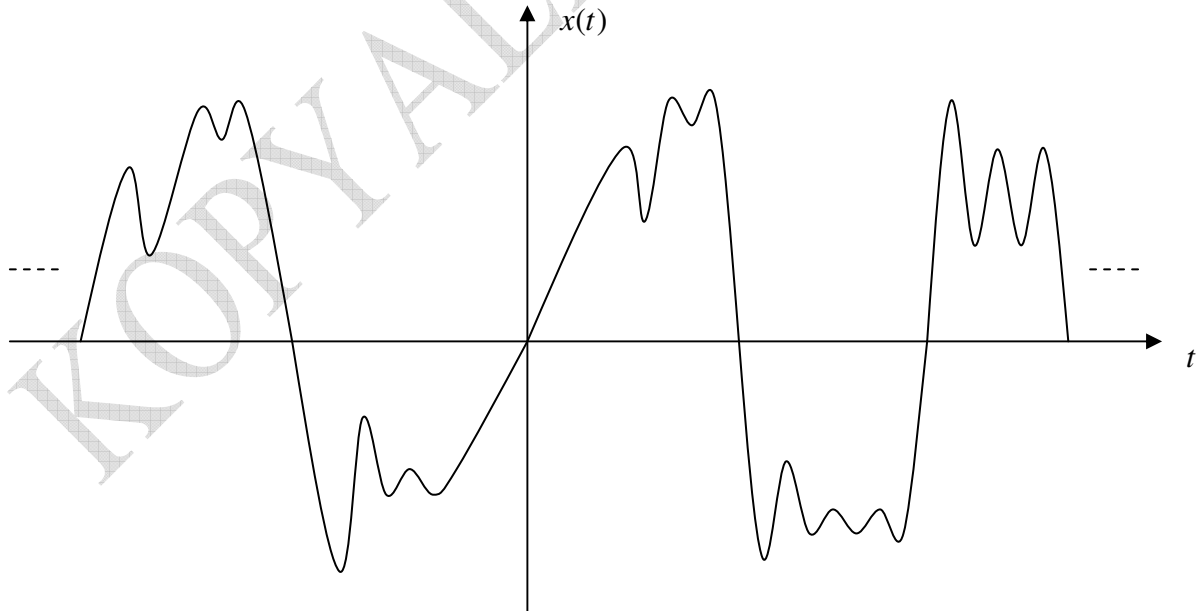
görülmektedir ki $-\omega$ şeklindeki negatif frekans aslında $\omega = -n\omega_0$ gösteriminden ibaret olup işlem sırasında doğal olarak pozitif olarak değerlendirilmektedir. Burada $e^{\pm jn\omega_0 t}$ şeklindeki gösterimin işaret analizinde oldukça önemli yeri olduğunu vurgulamamız gerekiyor. Periyodik işaretlerin analizini oluşturan Fourier serisi $e^{\pm jn\omega_0 t}$ şeklindeki kompakt gösterimlerle ifade edilmektedirler. Böyle bir gösterimi vermek üzere Fourier serisini gösterdiği düşünülen $f(t)$ fonksiyonunu

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n e^{jn\omega_0 t}$$

olarak ifade edilmektedir.

İŞARETİN ENERJİSİ

Sinyaller bir fiziksel sistemdeki güç ve enerjiyi tutan fiziksel niceliklerle ilgili gösterimlerdir. Şekil 2.1 deki temel bir işaretin yukarıdaki verilen tanımına göre hangi biçimde olursa olsun var olabilmesi için enerjisi veya frekansı olması gerekmektedir. Bundan yola çıkarak bir işaretin büyüklüğünün (size) bilinmesinde yarar vardır. Bunun içinde işaret enerjisi ve gücü önemli rol oynamaktadır. Bir işaretin enerjisini incelemek üzere aşağıdaki işareti göz önüne alalım.



Şekil 13 Sürekli işaret

İşaretin genliğinin zamanla değiştiğini bilmekteyiz. Enerjinin ölçülmesinde genlik dikkate alınmaktadır. $x(t)$ işaretinin altındaki kalan enerji olarak hesaplanır. Bu yöntemde eğri veya işaret altında işaretin genliğiyle belirlenen alan hesaplanmaktadır. Bu alanın genliği gösterdiği gibi aynı zamanda bir süre ile de sınırlı olduğunu görmekteyiz. Bu yüzden genliğin zamanla değişiminden söz edilir. Dolayısıyla enerji olarak işaretin altındaki alanın hesaplanması işaretin ölçülmesine yeterli olacaktır. İşte bu şekilde hesaplanan alana işaretin enerjisi denilmektedir. Ancak bu tür yaklaşımda eksik bir nokta vardır. O da işaretin enerjisini hesaplarken pozitif ve negatif alanlarının birbirlerini iptal etme gibi bir etkisi görülebilir, bu da doğru bir ölçüm için önemli bir handikap sayılır. Bunun önüne geçmek için işaretle kaplı alanlar hesaplanırken kareleri alınmaktadır bu şekilde alanların birbirlerini yok etme etkisi giderilmiş olunur. İşaretin büyüklüğünü veya kuvvetini göstermeye muktedir zamanla değişen genliğe sahip işaretişaretin enerjisini göstermek üzere aşağıdaki formda ifade edilir.

$$E = \langle x(t), x(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt$$

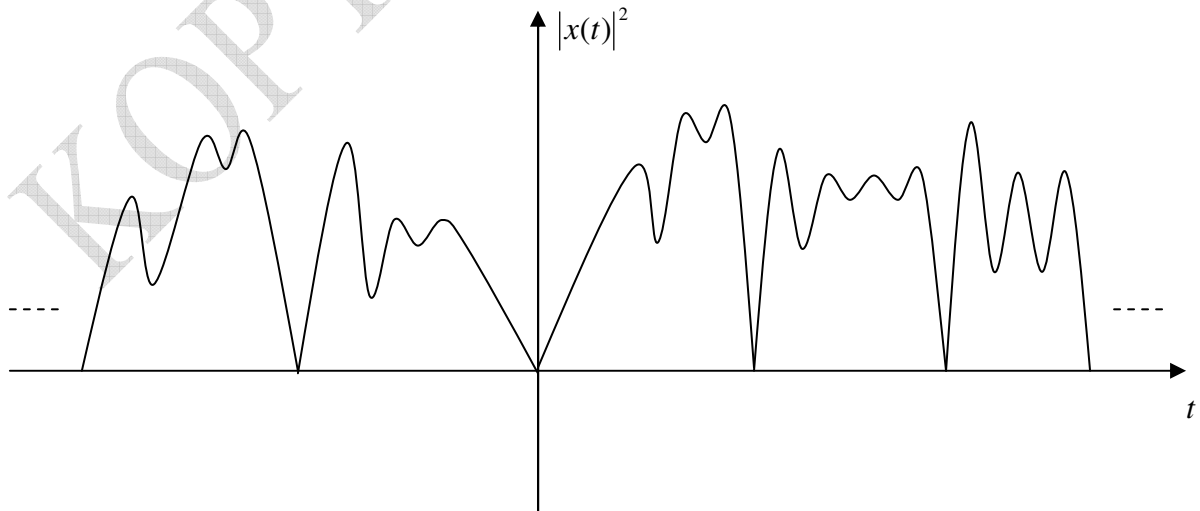
$\langle x(t), x(t) \rangle$ yaklaşımıyla aynı işaretin kendisiyle çarpımı gibi bir sonuç ortaya çıkarkı bunun sebebi, işaretin kendisinin (bir başkasının değil) enerji veya güç gibi bir özelliği ölçülmek istenmektedir. İşaret gerçek (real) olduğu sürece denklemlerde $x(t)$ kullanımı mümkün iken, eğer işaret kompleks ise,

$$x(t)x^*(t) = |x(t)|^2$$

yazımına uygun olarak ifade aşağıdaki formda yazılır.

$$E = \langle x(t), x^*(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt$$

Kareli gösterimin sebebinin açıklandığı gibi, karesiz integral altındaki alan sıfır olabilme riskidir. Bu da enerjinin gerçek miktarını göstermeyeceğinden bu handikap kareli ifade ile giderilmektedir. Bu aşağıdaki şekilde çok açık görülmektedir.



Şekil 14 İşaret Enerjisi

Kareli ifadenin sağladığı yarara benzer diğer bir etkin yaklaşımda işaretin örtülü alanların mutlak değerlerinin toplamını hesaplamaktır. Bu yaklaşımda da negatif alanlar pozitif olarak değerlendirileceği için pozitif ve negatif parçaların birbirlerini yok/iptal etme etkileri (cancellation) giderilmiş olmaktadır.

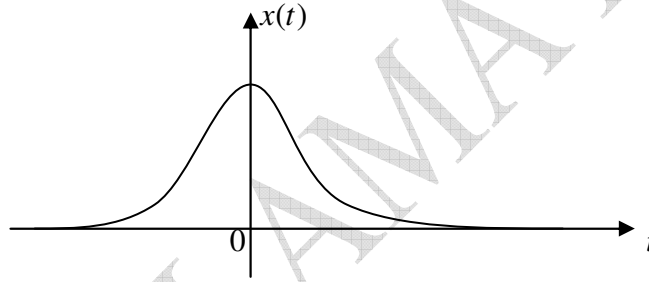
$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt$$

Verilen denklemi ayrık bir sistem olarak düşündüğümüzde ise enerji ifadesi

$$E = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N |x[n]|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2$$

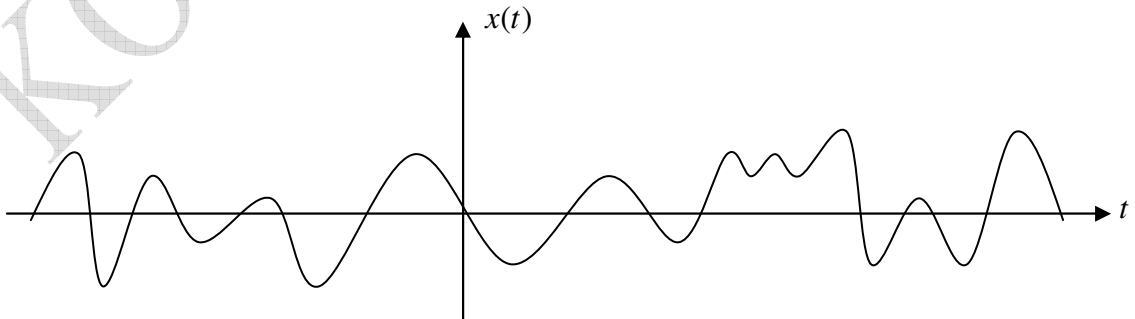
Bir işaretin enerjisini hesaplayabilmek için işaretin sonlu (finite) ve $t \rightarrow \infty$ için genliğinin sıfır olması koşulu aranır. Aksi takdirde, verilen integraller bir değere yakınsamayabilir.

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt < \infty$$



Şekil 15 Sonlu enerjili işaret

Burada işaretin genliği sıfıra yaklaştığı için işaretin sonlu $\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty$ olduğundan söz edebilir ve bu durumda enerjisi hesaplanabilir.

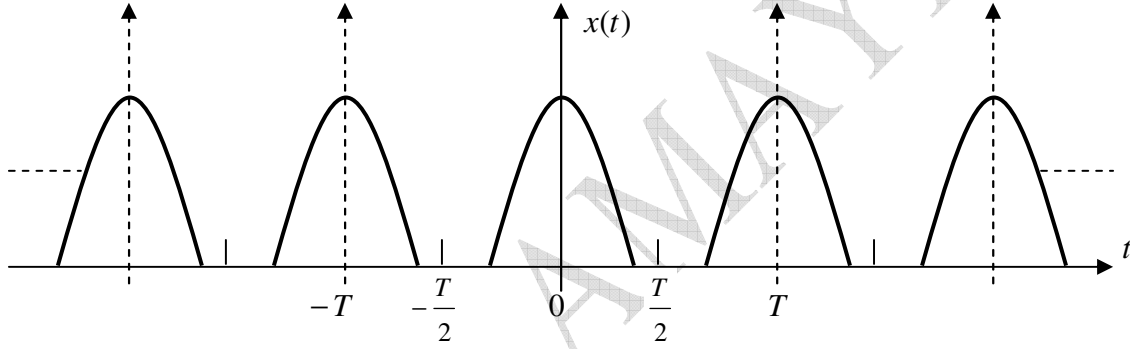


Şekil 16 Sonlu gücü (sonsuz enerjisi) olan işaret

Bu durumda diğerinin aksine işaretin $x(t)$ genliği $|t| \rightarrow \infty$ olduğu halde sifıra yaklaşmamakta ve sonsuza giden bir işaret söz konusu olduğundan bu durumda işaretin enerjisi sonsuz (∞) olacağından, hesaplanması mümkün olmayacaktır. Enerjisinin sonsuz olması, güç işaretinin sahip olması gereken kriterlerden biridir. Böyle bir şekil yukarıda görülmektedir. Bunun yanında işaretin sonsuz enerjiye sahip olması durumunda işaretin belirli aralıktaki veya birim zamandaki enerji miktarı olarak gücü, ortalama güç olarak hesaplanabilecektir. Bu durumda gücü sıfırdan farklı elde edilebilecek işaretin sonlu gücü sahip olduğu, ve kendisinin sınıf olarak güç işareti (power signal) olduğu belirtilir.

İşaretin Gücü

Bazen verilen bir işaretin enerjisi sonlu ve $t \rightarrow \infty$ için genliği sıfır olmayabilir (infinite). Bu durumda yine işaretin enerjisini hesaplanmasında bir güçlük olacaktır. Bu gibi durumlarda işaretin var olduğu bir süreç içerisindeki (aralık, period) ortalama enerjisinden söz edilir. Bu şekilde ölçülen miktar işaretin gücü (power) olarak anılır. Bu anlamda aşağıdaki gibi görülen $x(t)$ işaretinin



Şekil 17 Periyodik işaret

gücünü $x(t)x^*(t) = |x(t)|^2$ kompleks gösterimini göz önüne alarak daha genel anlamda

$$P = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt$$

olarak hesaplayabiliriz. Görüldüğü gibi güç, enerjinin zamanda ortalamasıdır, yani belli bir aralıkta o işaretin enerjisi hesaplanmaktadır. Şekil ve ifadelerden de görülebileceği gibi bu ortalama süre büyüdükçe gücünde azalacağı ortadadır. Bu sürenin sonsuz büyük olması halinde ise ($T \rightarrow \infty$) ortalama gücün daha da azalarak sıfır olacağı görülmektedir. Güç ile enerji arasında bağıntıdan da görülebileceği gibi yakın bir ilişki söz konusudur. İşaretin iş yapabilme yeteneğini belirleyen enerjisi, güç veya işaretin gücü olarak anılmaktadır. Öte yandan sonsuz enerjiye sahip bir büyüklüğün iş yapabilme yeteneğinden söz edilmesi normaldir. Çünkü ölçülemeyecek kadar büyük veya sonsuz bir büyüklüğün yeteneğini sonsuza kadar incelemek veya gözlemlemek mümkün olmayacağından, onun yerine belirli bir zaman dilimi içindeki davranışına bakarak hakkında bir bilgi edinilebilir. Sonsuz enerjide böyle bir kavramdır. Böyle bir işaretin enerjisinin veya kabiliyetinin belli bir zaman diliminde ölçmek daha makuldur ve böyle bir ölçümle elde edilen enerji miktarına güç denilmektedir. Buradan çok iyi biliyoruz ki bu anlamda periyodik işaretlerin enerjilerini ölçmek çok daha basit ve pratiktir. Çünkü zaman dilimi olarak periyodik süreleri yeterli olmaktadır.

$$P = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} |x(t)|^2 dt$$

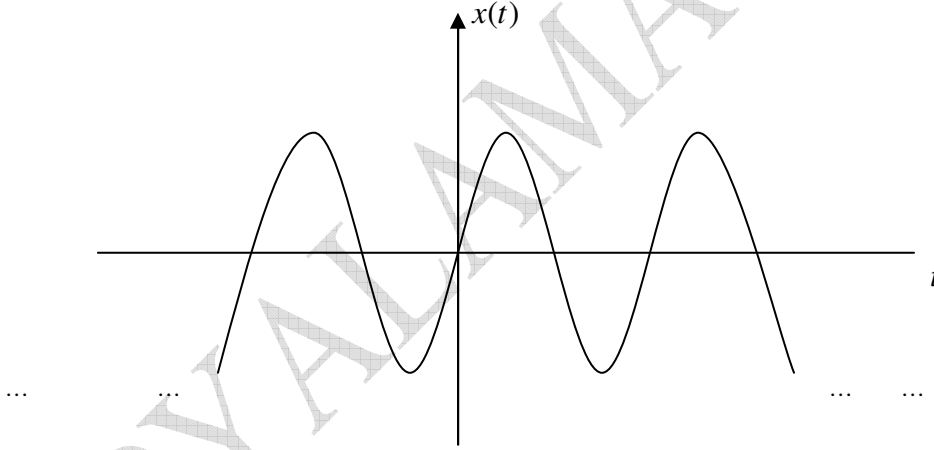
Eğer işaret T değerine bağlı periodik ise ortalama güç aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$P = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{T+t_0} |x(t)|^2 dt$$

Verilen ortalama güç ifadesinin ayırık modeli ise, aşağıdaki gibi alınacaktır.

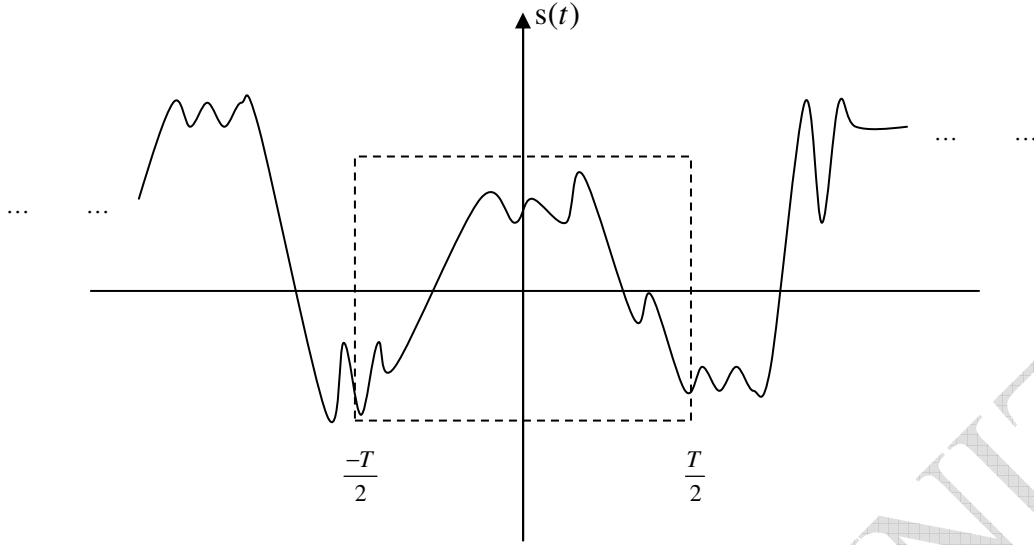
$$P = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2$$

Niye ortalama terimi kullanılmıştır onu açıklayalım. Eğer bir işaret aşağıdaki formda ise ,



Şekil 18 Sonsuz enerjili işaret

Görüldüğü gibi, sonsuz enerjili bir işaret söz konusudur. Bu durumda sonsuza giden bir işaretin etkinliğinin ölçülmesi gerekecektir. Sonsuz enerjili bir işaretin bir sisteme girişinden sonra, etkinliğinin sistem çıkışında da aynı olmayacağı prensibinden yola çıkarak, işaretin gücünden söz edilmektedir. Buna göre işaret gücü, belli bir zaman dilimindeki enerji olarak tanımlanmaktadır. Buna ait şekil aşağıda verilmiştir.



Şekil 19 Sonsuz enerjili işaretin belli zamandaki gücü

Enerji işareti – Güç işareti

Yukarıda ele edilen verilerin ışığında, verilen herhangi bir sistemi göstermek üzere işaretin enerji veya güç işareti olup olmadığı önemlidir. Burada mevcut bilgi ve ifadelere dayanarak bu iki tip sinyali analiz etmeye çalışacağız. Bunun için genel denklemleri aşağıdaki gibi ifade edilen enerji-güç ifadelerini göz önüne alalım.

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt$$

$$P_{AV} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt$$

Verilen E ve P_{AV} ifadeleri göz önüne alınarak enerji ve güç işaretleri analiz edilebilir.

Enerji işareti : ($E < \infty$) ve $P_{AV} = 0$

Buna göre eğer bir işaret sonlu enerjiye ve zamanın $T \rightarrow \infty$ olarak sonsuz büyük değeri için sıfır ortalama gücüne sahipse, işaret enerji işaretidir. Bununla beraber eğer zaman eksenini göstermek üzere, $|t| \rightarrow \infty$ için işaretin genliği sıfır değer alıyorsa, işaretin enerjisi hesaplanabilir.

$$\text{Enerji} = \{ \text{genlik} = 0 \quad -\infty < t < \infty \}$$

Güç işareti : $E \rightarrow \infty$ ve ($P_{AV} \neq 0$ veya $P_{AV} < \infty$)

Buna göre eğer bir işaret sonlu ve sıfırdan farklı ortalama güce sahip ve $T \rightarrow \infty$ sonsuz büyük değeri için enerjisi sıfır ise, işaret güç işaretidir. Periyodik işaretler tipik güç işaretleridir. Ancak tümü değildir. Bununla beraber eğer zaman eksenini göstermek üzere, $|t| \rightarrow \infty$ için işaretin genliği sıfır değilse, işaretin gücü hesaplanabilir.

$$\text{Güç} = \{\text{genlik} \neq 0 \quad -\infty < t < \infty\}$$

Enerji işareti güç işareti olabilir mi

Bunu biraz açmak adına gücün enerjinin zaman olarak ortalama değeri olduğu görüşünden hareket ederek enerji ve gücün

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt$$
$$P_{AV} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt$$

olduklarını göz önüne alarak, buna ek olarak enerji ile güç arasında basit anlamda

$$P_{AV} = \frac{E}{T}$$

ifadesinde göz önüne alarak u yorumu yapabiliriz: Bir işaretin enerji işareti olabilmesi için enerjinin sonlu

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt < \infty$$

veya

$$0 < E < \infty$$

olduğunu düşünürsek, sonlu bir işaretin zaman olarak $T \rightarrow \infty$ gibi sonsuz büyük bir değere bölünmesini yazarsak (mevcut enerjinin uzun zaman dilimindeki değeri),

$$P_{AV} = \frac{0 < E < \infty}{\infty} = 0$$

görüldüğü gibi ortalama güç sıfır çıkacaktır. Bu yüzden eğer bir işaret, enerji işaretiyse ortalama gücü sıfır çıkacaktır ($P_{AV} = 0$). Diğer bir deyişle enerjisi sınırlı (sonlu, $E < \infty$) ve ortalama gücü sıfır ($P_{AV} = 0$) olan işaret enerji işaretidir. Güç işareti ortalama değeri sonlu ve sıfırdan farklı ($P_{AV} \neq 0$ ve $0 < P_{AV} < \infty$). olan işaret olduğundan, buradan çıkarılacak sonuç şudur :

Sonuç : Enerji işareti güç işareti olamaz.

Güç işareti enerji işareti olabilir mi

Bunu cevaplamak adına güç-enerji arasındaki $P_{AV} = E/T$ ifadesinin aşağıdaki gibi düzenlendiğini düşünelim.

$$E = TP_{AV}$$

Buna göre bir işaret güç işaretiyse, ortalama güç değeri sonlu ve sıfırdan farklı olması gerekiyor ($P_{AV} \neq 0$ veya $0 < P_{AV} < \infty$). Buna göre eğer ($P_{AV} \neq 0$ veya $P_{AV} < \infty$) koşulunu sağlayan güç işaretinin zaman (period, T) olarak sonsuz büyük alınması durumunda enerjisi sonsuz büyük olabilecektir.

$$E = TP_{AV} = (\infty) \times (0 < P_{AV} < \infty) = \infty$$

Buradan eğer bir işaret güç işaretiyse ($P_{AV} \neq 0$ ve $0 < P_{AV} < \infty$), enerjisi $T \rightarrow \infty$ koşulu altında sonsuzdur ($E = \infty$) sonucu ortaya çıkmaktadır. Diğer bir deyişle, sonucundan dolayı enerji işareti olamayacaktır. Diğer bir deyişle enerjisi sonsuz ($E = \infty$) ve ortalama gücü sonlu ve sıfırdan farklı sıfır ($P_{AV} \neq 0$ veya $0 < P_{AV} < \infty$) olan işaret güç işaretidir. Enerji işareti değeri sonsuz olan ($E = \infty$) işaret olduğundan, buradan çıkarılacak sonuç şudur :

Sonuç : Güç işareti, enerji işareti olamaz.

Genel sonuç : Bir işaret enerji işaretiyse aynı zamanda güç işareti olamamaktadır. Bunun terside doğrudur. Bir işaret güç işaretiyse, aynı zamanda enerji işareti olamamaktadır. Bununla birlikte ne enerji nede güç işareti olamayan işaretlerde vardır, rampa $x(t) = t$ tipli işaretler tipik örnektir.

Enerji işaretine alternatif yaklaşım

Bahsedildiği gibi enerji işareti $0 < E < \infty$ olarak sonlu değerdeki bir işarettir. Diğer bir deyişle enerji işaretinin değerleri zaman limitli bir süreçte tanımlıdır. Bu açıdan enerji işaretleri periodik olmayan işaretler gibi düşünülebilir. Bundan dolayı periodik olmayan işaret analizindeki Fourier transformasyonu, enerji işaretiyle yakından ilgilidir. Dolayısıyla zamanda sınırlı işaret olarak bir darbe işareti veya sönümlü (sonlu) özellikteki bir eksponensiyel işaret örnek olarak gösterilebilir. Enerji işaretinin ortalama gücü için mevcut değer, $T \rightarrow \infty$ gibi sonsuz bir zaman değerine bölüneceğinden ortalama güç doğal olarak sıfır ($P_{AV} = 0$) elde edilecektir.

Enerji işaretine alternatif yaklaşım

Bahsedildiği gibi güç işareti ($P_{AV} \neq 0$ ve $0 < P_{AV} < \infty$) olarak sonlu ve sıfırdan farklı bir değerdeki işarettir. Diğer bir deyişle güç işaretinin değerleri zaman limitsiz bir süreçte tanımlıdır. Bu açıdan enerji işaretleri tipik periodik işaretler gibi düşünülebilir. Bundan dolayı periodik işaret analizindeki Fourier serisi yaklaşımı, enerji işaretiyle yakından ilgilidir.

Dolayısıyla zamanda sınırsız (başlangıç ve bitişi belli olmayan)ı işaret olarak $\cos \omega t$ veya $\sin \omega t$ gibi sinusoidal özellikteki bir işaret örnek olarak gösterilebilir. Çünkü bu tip periodik işaretlerin enerjisi sonsuz ($E = \infty$) olacağından, enerji işareti olamayacaktır. Bundan dolayı ortalama güç hesabında enerji değeri, sonlu güç değerinin ($P_{AV} < \infty$), $T \rightarrow \infty$ gibi sonsuz bir zaman değeriyle çarpımıyla oluşacağı güç işaretinin enerjisi sonsuz ($E = \infty$) elde edilecektir.

Özet

- Enerji işareti, değeri sonlu ve gücü sıfır olan işaretlerdir.
- Güç işareti, değeri sonlu, sıfırdan farklı ve enerjisi sonsuz olan işaretleridir.
- Enerji işareti, zamanda limitli işaretlerdir.
- Güç işareti, zamanda limitsiz işaretlerdir.
- Periodik işaretler, güç işaretleridir.
- Periodik olmayan işaretler, enerji işaretleridir.
- Eğer güç ve enerji işaretleri sonsuz ise, ne güç ne de enerji işareti olmazlar.

ÖRNEKLER

Örnek

$$x(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq 1 \\ 0 & \text{Diğer} \end{cases}$$

Verilen $x(t)$ işareti enerji/güç işaretimidir?

Çözüm

İşaret incelendiğinde, $x(t)$ nin zamanda sınırlı ($0 \leq t \leq 1$) bir işaret olduğu görülmektedir. Buradan enerji işareti olduğu ortaya çıkar. Ancak bunu ispat etmek için enerjisinin sonlu ($0 < E < \infty$) ve ortalama gücünün de sıfır ($P_{AV} = 0$) çıkması gerekiyor.

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_0^1 1^2 dt = 1 < \infty$$

$$P_{AV} = \frac{E}{T} = \frac{1}{\infty} = 0$$

Bunlardan enerji sonlu ($E < \infty$) ve güç sıfır ($P_{AV} = 0$) olduğundan verilen $x(t)$ işareti enerji işaretidir.

Örnek

$$u(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0 & \text{Diğer} \end{cases}$$

Verilen $u(t)$ birim basamak işareti enerji/güç işaretimidir?

Çözüm

İşaret incelendiğinde, $u(t)$ nin zamanda sınırsız ($t > 0$) bir işaret olduğu görülmektedir. Buradan enerji işareti olamayacağı, güç işareti olduğu ortaya çıkar. Ancak bunu ispat etmek için enerjisinin sonsuz ($E = \infty$) ve ortalama gücünün de sonlu ve sıfırdan farklı ($P_{AV} \neq 0$ ve $0 < P_{AV} < \infty$) olması gerekiyor.

$$P_{AV} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^{T/2} 1^2 dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \frac{T}{2} = \frac{1}{2}$$

$$P_{AV} \neq 0 \text{ ve } 0 < P_{AV} < \infty$$

$$E = TP_{AV} = (\infty) \times \left(\frac{1}{2}\right) = \infty$$

Bunlardan enerji sonsuz ($E = \infty$) ve güç sonlu ve sıfırdan farklı ($P_{AV} \neq 0$) olduğundan verilen $x(t)$ işareti güç işaretidir.

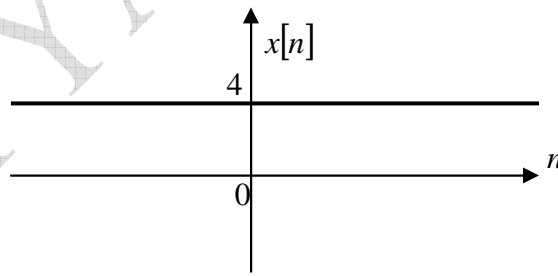
Örnek

$$x[n] = 4$$

Verilen $x[n] = 4$ işareti enerji/güç işaretimidir?

Çözüm

$$x[n] = \{4 \quad -\infty < n < \infty$$



Şekil 20 Güç işareti

İşaret incelendiğinde, $x[n]$ nin zamanda sınırsız ($-\infty < n < \infty$) bir işaret olduğu görülmektedir. Buradan enerji işareti olamayacağı, güç işareti olduğu ortaya çıkar. Ancak bunu ispat etmek için enerjisinin sonsuz ($E = \infty$) ve ortalama gücünün de sonlu ve sıfırdan farklı ($P_{AV} \neq 0$ ve $0 < P_{AV} < \infty$) olduğunu göstermemiz gerekiyor.

$$P_{AV} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N x[n]^2 = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N 4^2 = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{16N}{N} = 16$$

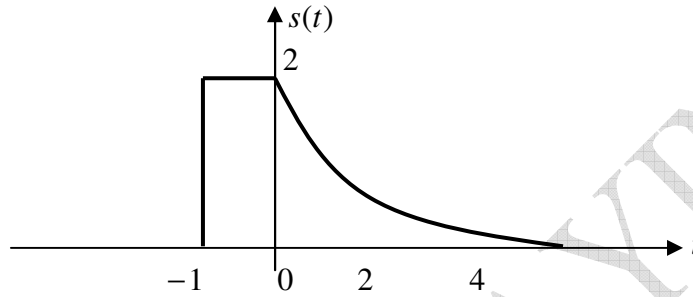
$$P_{AV} \neq 0 \text{ ve } 0 < P_{AV} < \infty$$

$$E = TP_{AV} = (\infty) \times (16) = \infty$$

Bunlardan enerji sonsuz ($E = \infty$) ve güç sonlu vesıfırdan farklı ($P_{AV} \neq 0$) olduğundan verilen $x[n]$ işareti güç işaretidir.

Örnek

Bunun yanı sıra eğer örnek işaret $s(t) = 2e^{-t/2}$ şeklindeyse değişimini

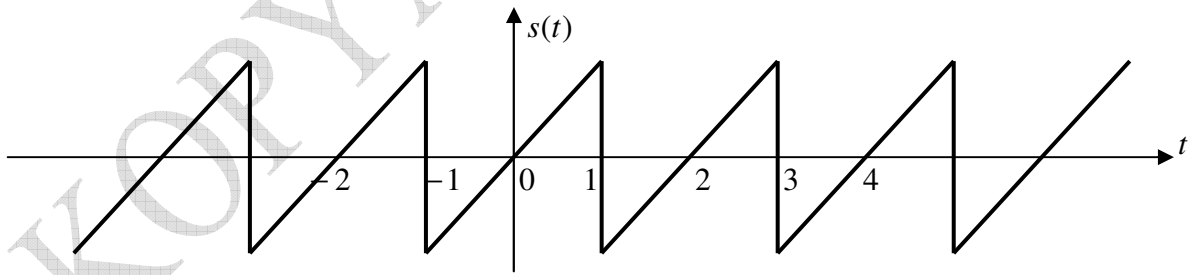


Şekil 21 Enerji sinyali : sonlu enerjili işaret

olarak düşünülürse verilen fonksiyonun enerjisinin sonlu olduğu görülmektedir. Dolayısıyla sonlu enerjiye sahip işaretin enerji işareti olduğunu bildiğimizden enerjisini hesaplayabiliriz.

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} s^2(t) dt = \int_{-1}^0 (2)^2 dt + \int_0^{\infty} (2e^{-t/2})^2 dt = \int_{-1}^0 4 dt + \int_0^{\infty} 4e^{-t} dt = 4t \Big|_{-1}^0 + 4e^{-t} \Big|_0^{\infty} = 4 - 4(0 - 1) = 8$$

Böylece sonlu enerjiye sahip bir işaret söz konusu olduğu için $s(t) = 2e^{-t/2}$ işareti enerji işareti olabilir. Bunun için muhtemelen aynı işaretin ortalama gücünün de sıfır olması gerekir ($P \rightarrow 0$). Eğer işaret $s(t) = t$ şeklindeyse, görünümü aşağıdaki gibi olacaktır.



Şekil 22 Sonsuz enerjili işaret : ortalama güç

Şekilden görüldüğü gibi, periodik sinyalin genliği sıfır olmamaktadır. Bu yüzden sonsuz enerjili işaret söz konusudur. Böyle bir sinyalin belirli bir süredeki enerjisi anlamına gelen ortalama gücü hesaplanabilir. Periodik görünen işaretin periodu $T = (-1, 1) = 2$ olarak düşünülürse, ortalama gücü

$$P_{AV} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s^2(t) dt = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (t)^2 dt = \frac{1}{2} \frac{t^3}{3} \Big|_{-1}^1 = \frac{1}{2} \left[\frac{1^3}{3} - \frac{(-1)^3}{3} \right] = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{3} + \frac{1}{3} \right] = \frac{1}{3}$$

gibi hesaplanabilir. Görüldüğü gibi sonsuz enerjili işaretin enerjisi ortalama güç olarak sonlu büyüklüktedir. Burada enterasan olan işaretin periyodikliğidir. Dolayısıyla periyodik işaretin ortalama gücü sonlu $(1/3)$ çıkmıştır. Buradan dolayısıyla periyodik işaretlerin güç işaretleri olduğu söylenebilir. Böyle bir $s(t) = t$ işaretinin enerjisini hesaplasaydık,

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} s^2(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} (t)^2 dt = \left[\frac{t^3}{3} \right]_{-\infty}^{\infty} = \infty$$

görüldüğü gibi sonsuz büyük enerji elde edilecekti. Bu periyodik işaretlerin tipik özelliğidir. Neticede $P_{AV} < \infty$ ve $E = \infty$ koşulundan dolayı $s(t) = t$ işareti güç sinyalıdır.

Örnek

$f(t) = \sin t$ işaretinin tipini belirleyin.

- a) Enerjisini
- b) Ortalama gücünü

hesaplayın.

Çözüm

a) Enerji

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |\sin t|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} \sin^2 t dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1 - \cos 2t}{2} \right) dt = \left(\frac{t}{2} - \frac{\sin 2t}{4} \right)_{-\infty}^{\infty} = \infty$$

b) Ortalama güç

$$\begin{aligned} P &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |f(t)|^2 dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |\sin t|^2 dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \sin^2 t dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \left(\frac{1 - \cos 2t}{2} \right) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left(\frac{t}{2} - \frac{\sin 2t}{4} \right)_{-T/2}^{T/2} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left(\frac{T}{4} - \frac{\sin T}{4} \right) - \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left(-\frac{T}{4} + \frac{\sin T}{4} \right) \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{4} - \frac{\sin T}{4} \right) + \lim_{T \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{4} + \frac{\sin T}{4} \right) = \left(\frac{1}{4} - 0 \right) + \left(\frac{1}{4} + 0 \right) \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

(a) daki enerji sonsuz ($E \rightarrow \infty$) ve (b) de ise ortalama güç sıfırdan farklı bir değer olarak sonlu $1/2$ değeriyle bulunduğu için verilen $f(t) = \sin t$ işareti güç yani power işaretidir. Buradan ortaya çıkan bir diğer tespit şudur, periyodik işaretler güç işaretleridir.

Örnek

$s(t) = A \cos(2\pi f t + \theta)$ sinyalinin enerjisini ve gücünü hesaplayınız.

Çözüm

a) Enerji

$$\begin{aligned} E &= \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |\cos(2\pi f t + \theta)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} \cos^2(2\pi f t + \theta) dt = \int_{-\infty}^{\infty} (2\cos^2(2\pi f t + \theta) - 1) dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1 + \cos(4\pi f t + \theta)}{2} \right) dt = \left(\frac{t}{2} + \frac{\sin(4\pi f t + \theta)}{8\pi f} \right) \Big|_{-\infty}^{\infty} = (\infty + 0 - (\infty - 0)) \\ &= \infty \end{aligned}$$

b) Ortalama güç

$$P = \frac{1}{T} \int_T |A \cos(2\pi f t + \theta)|^2 dt = \frac{A^2}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} \cos^2\left(\frac{2\pi}{T_0} t + \theta\right) dt$$

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2} [\cos(x - y) + \cos(x + y)]$$

$$P = \frac{A^2}{2T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} \left[1 + \cos\left(\frac{4\pi}{T_0} t + 2\theta\right) \right] dt = \frac{A^2}{2T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} dt + \frac{A^2}{2T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} \cos\left(\frac{4\pi}{T_0} t + 2\theta\right) dt$$

$$P = \frac{A^2}{2}$$

Sonuçta ortalama güç sonlu ve enerji sonsuz olduğundan verilen $s(t) = A \cos(2\pi f t + \theta)$ periodik işareti güç işaretidir.

Örnek

$f(t) = u(t)$ işaretinin tipini belirleyin.

- c) Enerjisini
- d) Ortalama gücünü

hesaplayın.

Çözüm

a) Enerji

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |u(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} u^2(t) dt = \int_0^{\infty} (1)^2 dt = t \Big|_0^{\infty} = \infty$$

a) Ortalama güç

$$\begin{aligned} P &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |f(t)|^2 dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |u(t)|^2 dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} u^2(t) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^{T/2} (1)^2 dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} t \Big|_0^{T/2} \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left[\frac{T}{2} - 0 \right] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \\ &= 1 \end{aligned}$$

(a) daki enerji sonsuz ($E \rightarrow \infty$) ve (b) de ise ortalama güç sıfırdan farklı bir değer olarak sonlu 1 değeriyle bulunduğu için verilen $f(t) = u(t)$ işareti güç yani power işaretidir.

Örnek

$f(t) = 1$ işaretinin tipini belirleyin.

Çözüm

a) Enerji

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |1|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} 1 dt = t \Big|_{-\infty}^{\infty} = \infty$$

a) Ortalama güç

$$\begin{aligned} P &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |f(t)|^2 dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |1|^2 dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} t \Big|_{-T/2}^{T/2} \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left[\frac{T}{2} - \left(-\frac{T}{2} \right) \right] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} T \\ &= 1 \end{aligned}$$

Görüldüğü gibi bir sabitin analizi yapıldığında işaret sonsuz enerjiye ($E \rightarrow \infty$) ve sonlu ortalama gücüne ($P_{AV} \rightarrow 1$) sahip olduğu için işaret, güç işaretidir.

Örnek

Verilen $a(t) = 3 \sin(2\pi t)$, $-\infty < t < \infty$, işaretinin

- a) Ortalama gücünü
- b) Enerjisini

hesaplayın.

Çözüm

a) İşarete bakıldığında $|t| = (-\infty, \infty)$ arasında periodik olduğu görülmektedir. İşaret periodik olduğundan power işareti olması gerekiyor. Buna göre bu işaretin gücü olarak ortalama gücünün sıfırdan farklı elde edilmesi gerekecektir. Bunu aşağıda gösterebiliriz. Öncelikle

$$P = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{T+t_0} |a(t)|^2 dt$$

bağıntısı gereği T periodunu belirleyelim. Verilen $a(t) = 3\sin(2\pi t)$, $-\infty < t < \infty$ işaretine bakıldığında

$$T = 2\pi/2\pi = 1 \text{ sn}$$

$$\begin{aligned} P_a &= \frac{1}{T} \int_{t_0}^{T+t_0} |a(t)|^2 dt \\ P_a &= \frac{1}{1} \int_0^1 |a(t)|^2 dt = \int_0^1 |3\sin(2\pi t)|^2 dt \\ &= 9 \int_0^1 \frac{1}{2} [1 - \cos(4\pi t)] dt \\ &= 9 \int_0^1 \frac{1}{2} dt - 9 \int_0^1 \cos(4\pi t) dt \\ &= \frac{9}{2} - \left[\frac{9}{4\pi} \sin(4\pi t) \right]_0^1 \\ &= \frac{9}{2} \text{ W} \end{aligned}$$

Görüldüğü gibi periodik bir işaret güç işareti olması dolayısıyla ortalama gücü sıfırdan farklı olarak sonlu bir değer olarak elde edilmiştir. Bu bile işaretin power işareti olduğunu göstermektedir.

b) İşarete bakıldığında $|t| = (-\infty, \infty)$ arasında periodik olduğu görülmektedir. İşaret periodik olduğundan power işareti olması gerekiyor. Öte yandan biliyoruz ki, eğer bir işaret güç işareti ise enerjisi sonsuzdur ($E \rightarrow \infty$). Bunu aşağıda gösterebiliriz.

$$\begin{aligned} E_a &= \int_{-\infty}^{\infty} |a(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |3\sin(2\pi t)|^2 dt \\ &= 9 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} [1 - \cos(4\pi t)] dt \\ &= 9 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} dt - 9 \int_{-\infty}^{\infty} \cos(4\pi t) dt \\ &= \infty \text{ J} \end{aligned}$$

görüldüğü gibi işaretin enerjisi sonsuz çıkmıştır. Sonuçta (a) ve (b) birlikte değerlendirildiğinde, verilen $a(t) = 3\sin(2\pi t)$, $-\infty < t < \infty$ işaretinin enerjisi sonsuz ($E_a \rightarrow \infty$) ve ortalama gücü $9/2$ bulunduğundan periodik işaretin aslında bir güç işareti olduğu gerçeği ortaya çıkar.

Örnek

$b(t) = 5e^{-|t|}$ $-\infty < t < \infty$, işaretinin

- a) Enerjisini
- b) Ortalama gücünü

gücünü hesaplayarak işaretin tipini (enerji/güç) belirleyin.

Çözüm

a) Enerji

$$\begin{aligned} E_b &= \int_{-\infty}^{\infty} |b(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |5e^{-|t|}|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} 25e^{-2|t|} dt = 25 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2|t|} dt = 25 \int_{-\infty}^0 e^{-2(-t)} dt + 25 \int_0^{\infty} e^{-2t} dt \\ &= 25 \int_{-\infty}^0 e^{4t} dt + 25 \int_0^{\infty} e^{-4t} dt = \frac{25}{4} [e^{4t}]_{-\infty}^0 - \frac{25}{4} [e^{-4t}]_0^{\infty} = \frac{25}{4} + \frac{25}{4} \\ &= \frac{25}{2} \end{aligned}$$

b) Ortalama güç

$$\begin{aligned} P_b &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |b(t)|^2 dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} 25e^{-2|t|} dt \\ &= 25 \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^0 e^{4t} dt + 25 \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^{T/2} e^{-4t} dt \\ &= \frac{25}{4} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} [e^{4t}]_{-T/2}^0 + \frac{25}{4} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} [e^{-4t}]_0^{T/2} \\ &= \frac{25}{4} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} [1 - e^{-2T}] + \frac{25}{4} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} [e^{-2T} - 1] \\ &= 0 + 0 = 0 \end{aligned}$$

Elde edilenlere bakıldığında işaretin enerjisi 25/2 olarak sonlu, ortalama gücü ise 0 olarak elde edildiğinden, işaretin enerji işareti olduğunu düşünebiliriz. Çünkü enerji işaretinin belirli aralıktaki ortalama gücü sıfır çıkabilmektedir.

Parseval's Teorem

Fransız bilim adamı Marc-Antoine Parseval tarafından geliştirilen ve Fourier özellikli işaretlerin enerjilerinin hesaplanması üzerine kurulu yaklaşımlar, kısaca Parseval teoremi olarak bilinir. İşaretin zaman domenindeki enerjisinin, işaretin frekans domenindeki enerjisine eşit olduğunu gösteren genel eşitliği, Parseval'in en iyi bilinen teoremidir.

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df$$

Buna göre zaman domenindeki işaretin enerjisi, frekans domenindeki (Fourier transformasyonu) enerjiye eşittir.

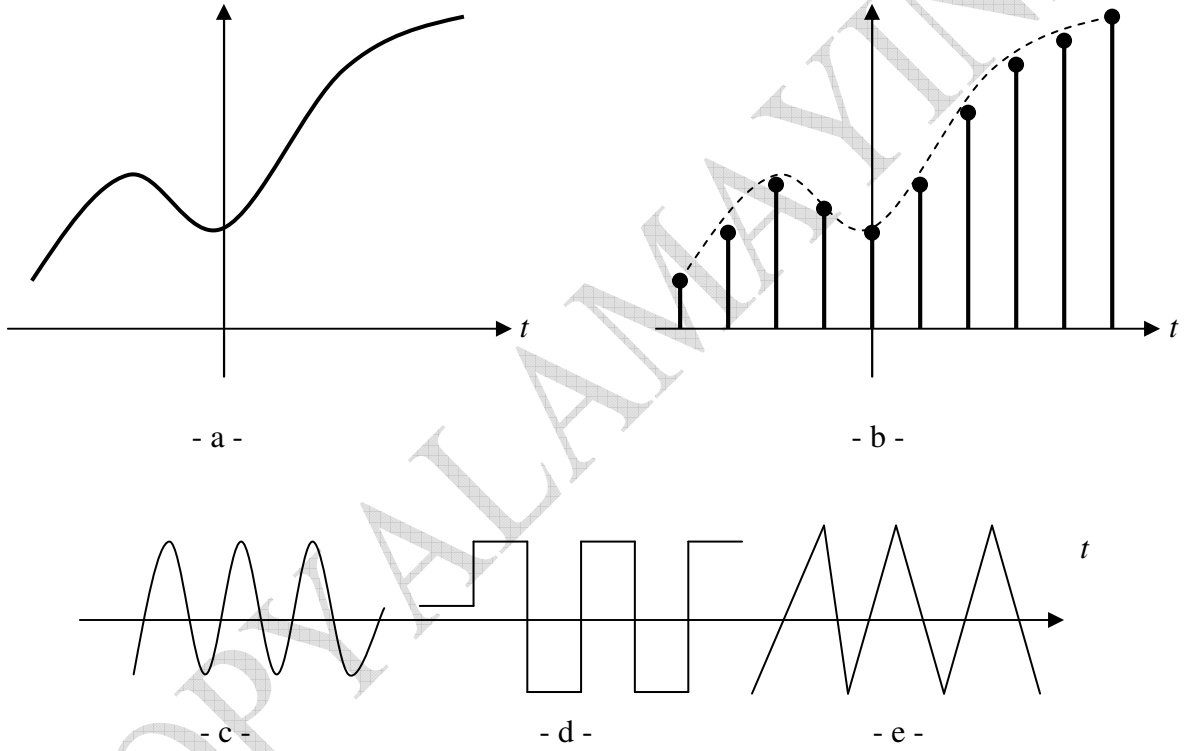
İŞARETLER

Frekansı olan dalgacık olarak tanımladığımız işaretler sürekli-zaman ve ayrık-zaman işaretleri olmak üzere iki temel başlıkta ele alınmaktadır. Pratikte küçük farklarla sürekli-zaman (veya yalnızca sürekli) işaretleri analog, ayrık-zaman (veya yalnızca ayrık) işaretleri de dijital işaretler olarak anılmaktadır.

Sürekli İşaretler

Analog işaretler olarak da anılan sürekli işaretler sonsuz büyük $(-\infty, \infty)$ aralığının her noktasında tanımlı ve herhangi bir genliğe sahip işaretlerdir. $s(t) = A \sin \omega t$,

$s(t) = A \tau \frac{\sin \pi f \tau}{\pi f \tau}$ ve $s(t) = A \tau \left(\frac{\sin \pi f \tau}{\pi f \tau} \right)^2$ yapısına benzer sürekli işaretlerdir.

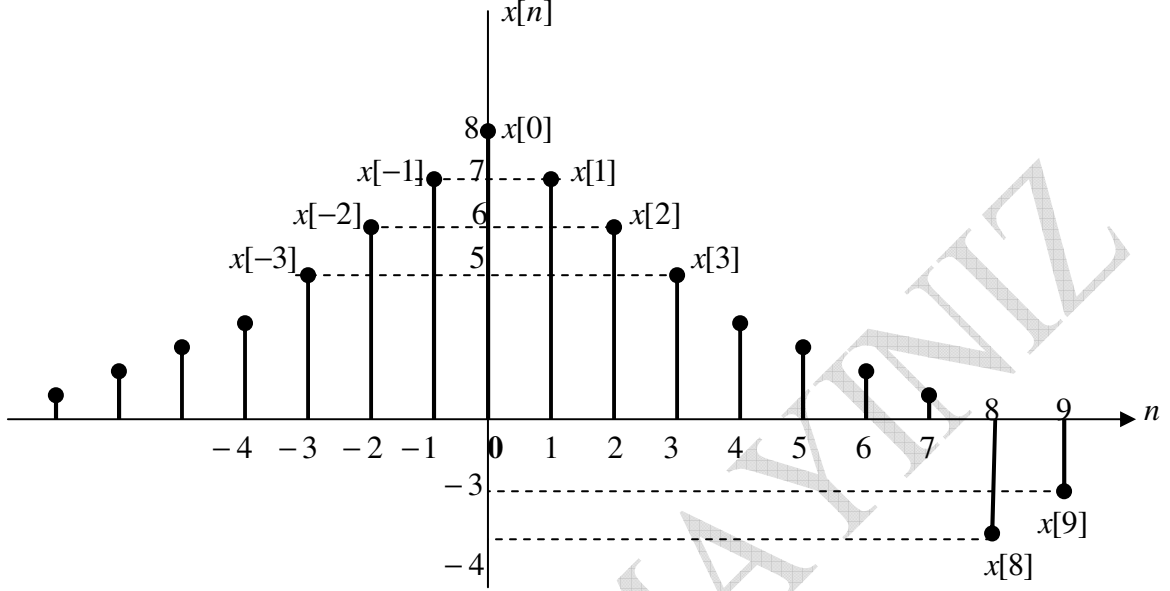


Şekil 23 Sürekli işaretler

Sürekli işaretler doğal işaretler olup üretilmeleri ve elde edilmeleri daha pratik olan işaretlerdir. Bunun yanı sıra hem analog, hem ayrık hemde dijital işaretlerin elde edilmesinde temel işaret olarak önemli işleve sahiptir.

Ayrık İşaretler

Zamanın belli değerlerinde tanımlanan işaretlerdir. Doğal işaretler olmayıp, sürekli-zaman işaretlerden özel yöntemlerle (örnekleme) elde edilirler.

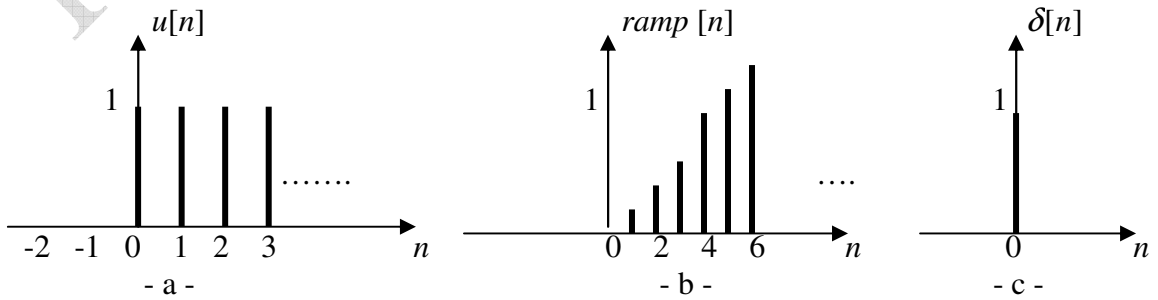


Şekil 24 Ayrık işaret

$$x[n] = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, -4, -3 \}$$

$$x[n] = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, -4, -3 \}$$

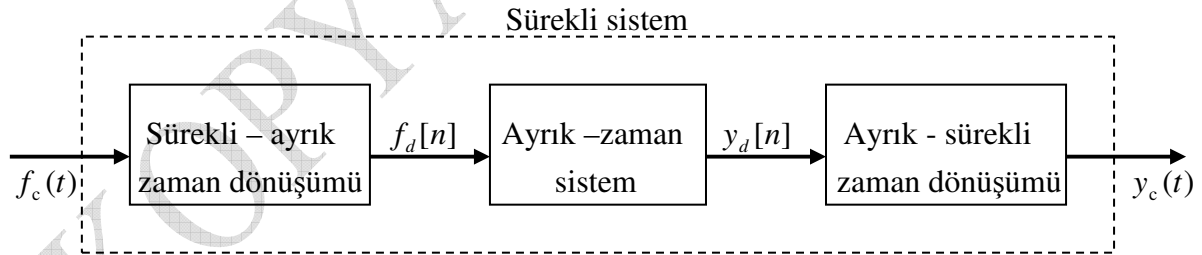
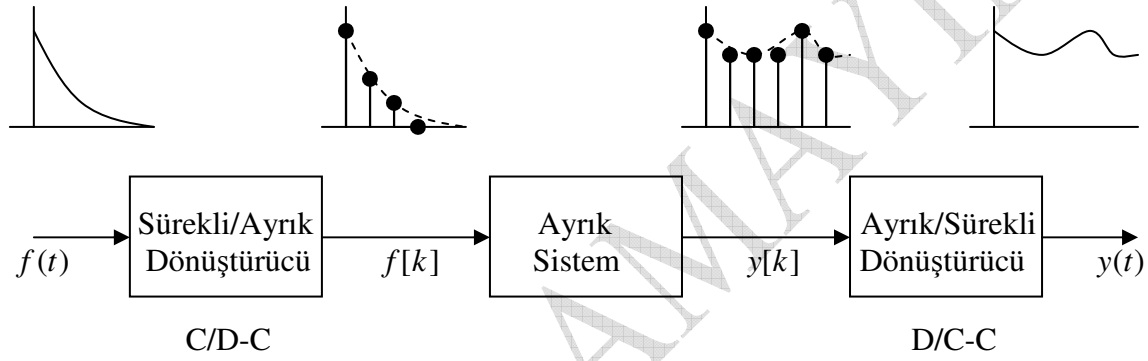
$x[-7] \quad x[-6] \quad x[-5] \quad x[-4] \quad x[-3] \quad x[-2] \quad x[-1] \quad x[0] \quad x[1] \quad x[2] \quad x[3] \quad x[4] \quad x[5] \quad x[6] \quad x[7] \quad x[8] \quad x[9]$



Şekil 25 Ayrık işaretler

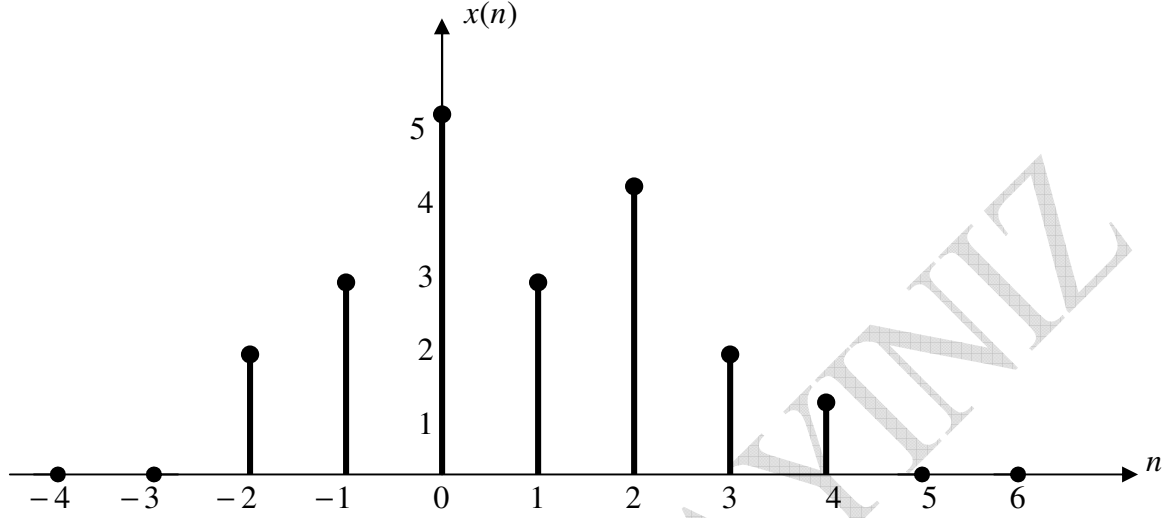
Ayrık işaretler sürekli-zaman işaretlerinden örnekleme (sampling) yöntemiyle elde edilen bir tür sayısal tabanlı işaret olarak aynı zamanda dijital işaretin elde edilmesinde kullanılan ikincil temel işaret olarak önemli bir işleve sahiptir.

Ayrık işaretlere ihtiyaç gelişen bilgisayar tabanlı sayısal işlemcilerin özelliklerinden yararlanılmak üzere doğmuştur. Sayısal tabanlı bilgi işleyicilerin yüksek hızlı işlem kapasitelerinden yararlanılmak üzere geliştirilen ayrık veya dijital sistemler, doğal sürekli-zaman işareti ayrık formda işlemek üzere tasarlanmışlardır. Bu yüzden bu tip sistemlerde sürekli-zaman işaretlerin ayrık-zaman formlara dönüştürülmesi gerekmektedir. Bu işlem yapıldıktan sonra sayısal işleyiciler girişlerindeki sayısal işaretleri işleyerek çıkışlarında başka bir formda ayrık işaret oluşturmaktadırlar. Sistemin son çıkışında ise işaret tekrar sürekli-zaman işarete dönüştürülmektedir. Aşağıda bu çerçeveyi baz alan ayrık-zaman işaret işleyici sistem örnekleri verilmiştir.



Ayrık İşaretin Impuls Dizisiyle Gösterimi

Bir ayrık işareti veya dizi impuls fonksiyonuna bağlı olarak daha farklı biçimde gösterilebilir. Bunun için aşağıdaki $x(n)$ ayrık işareti göz önüne alalım.



Şekil 28 Sonlu uzunluktaki ayrık işaret

Şekildeki ayrık işaretin aslında klasik bir sayı dizisi olarak

$$x(n) = \{2, 3, 5, 3, 4, 2, 1\}$$

düşünülebileceğini biliyoruz. Alternatif olarak ayrık işaret aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\begin{aligned} x(n) &= \dots + x(-4) + x(-3) + x(-2) + x(-1) + x(0) + x(1) + x(2) + x(3) + x(4) + x(5) + x(6) + \dots \\ &= \dots + 0 + 0 + 2 + 3 + 5 + 3 + 4 + 2 + 1 + 0 + 0 + \dots \end{aligned}$$

Bunun için $\delta(n)$ impuls fonksiyonunu tanımlamamız gerekiyor.

$$\delta(n) = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & \text{diğer} \end{cases}$$

Buna göre eğer genel olarak $\delta(n) = 1, \quad n = 0$ alınırsa

$$\delta(n+k) = 1, \quad n = -k$$

$$\delta(n+2) = 1, \quad n = -2$$

$$\delta(n+1) = 1, \quad n = -1$$

$$\delta(n-1) = 1, \quad n = 1$$

$$\delta(n-2) = 1, \quad n = 2$$

$$\delta(n-k) = 1, \quad n = k$$

olacağından

$$x(n) = \dots + x(-2) + x(-1) + x(0) + x(1) + x(2) + x(3) + x(4) + \dots$$

$x(n)$ dizisi, $\delta(n)$ impuls fonksiyonuna bağlı olarak aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$x(n) = 2\delta(n+2) + 3\delta(n+1) + 5\delta(n) + 3\delta(n-1) + 4\delta(n-2) + 2\delta(n-3) + \delta(n-4)$$

$\delta(n) = 1$, $n = 0$ kuralına göre daha açık yazılırsa,

$$\begin{aligned} x(n) &= \dots + 0 + 0 + \underbrace{2\delta(n+2)}_{n=-2} + \underbrace{3\delta(n+1)}_{n=-1} + \underbrace{5\delta(n)}_{n=0} + \underbrace{3\delta(n-1)}_{n=1} + \underbrace{4\delta(n-2)}_{n=2} + \underbrace{2\delta(n-3)}_{n=3} + \underbrace{\delta(n-4)}_{n=4} + 0 + 0 + \dots \\ &= \dots + 0 + 0 + 2 + 3 + 5 + 3 + 4 + 2 + 1 + 0 + 0 + \dots \end{aligned}$$

Buna göre $x(n)$ dizisi ağırlıklandırılmış impuls dizisinden oluşmaktadır. İmpuls yazımından yararlanılarak $x(n)$ dizisi aşağıdaki gibi de ifade edilebilir.

$$\begin{aligned} x(n) &= \dots + x(-2)\delta(n+2) + x(-1)\delta(n+1) + x(0)\delta(n) \\ &\quad + x(1)\delta(n-1) + x(2)\delta(n-2) + x(3)\delta(n-3) + x(4)\delta(n-4) + \dots \end{aligned}$$

Bu şekilde bir $x(n)$ dizisi impuls fonksiyonuna bağlı olarak yazılabilmektedir. Bu yazılan ifadenin daha toparlanmış biçimi $k = [-2, 4]$ aralığı için

$$x(n) = \sum_{k=-2}^4 x(k) \delta(n-k)$$

olarak yazılabilir. Buradan hareketle bu denklemin $k = (-\infty, \infty)$ aralığı için aşağıdaki gibi daha genel biçimine ulaşılır.

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) \delta(n-k)$$

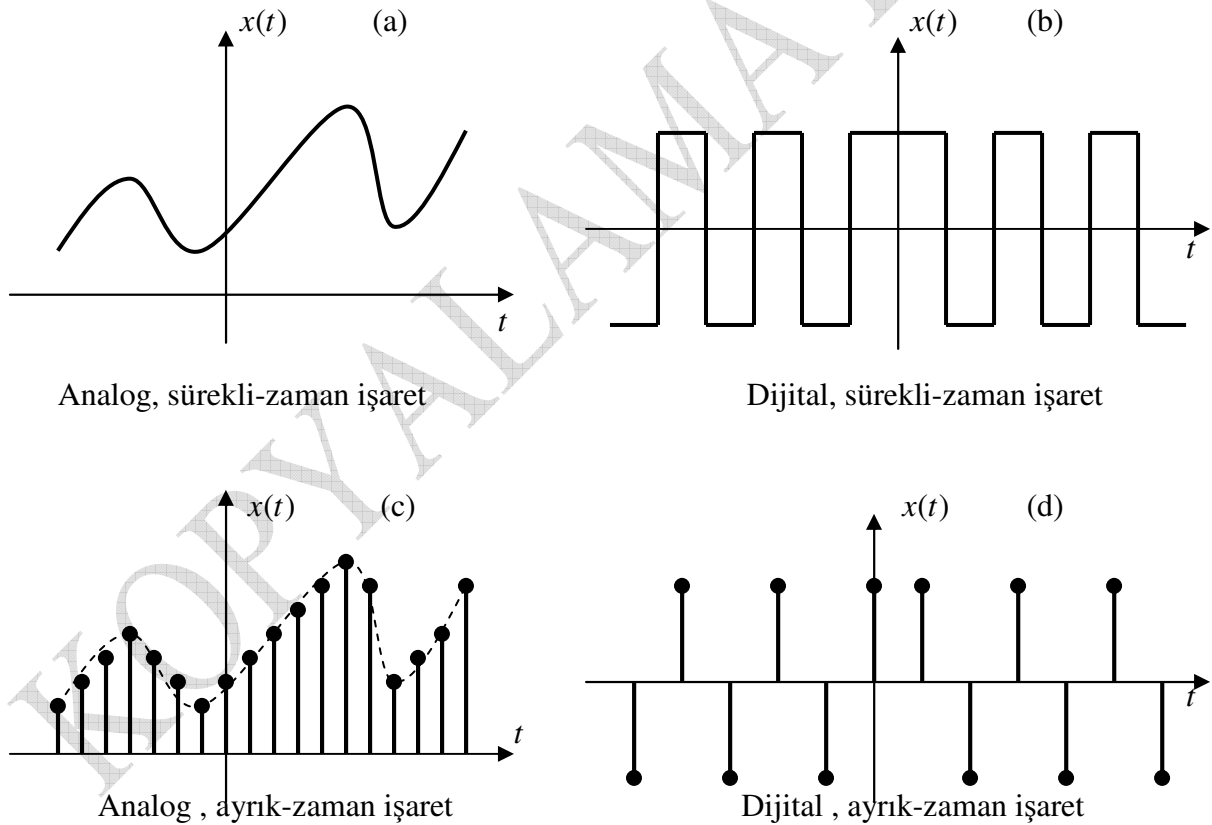
İfadeyi değerlendirecek olursak, $x(n)$ dizisinin her bir “ k ” anındaki değeri $n = k$ için $\delta(n-k) = 1$ ile alınmaktadır. Sonuçta bu şekilde dizinin tüm değerleri elde edilmektedir. Bu da, $x(n)$ ayrık işareti olduğundan, beklenildiği gibi dizinin impuls fonksiyonuyla gösterimi sağlanmış olmaktadır. Bir işaretin impuls fonksiyonuna bağlı bu tarzdaki gösterimi, işaret işlemede ve sistem analizlerinde sık kullanılan bir pratik yaklaşımdır.

İşaret tipleri

Bu bölümde temel işaret tipleri bulundukları kategori ve sınıflarına göre model ve işlevleriyle ele alınacaktır.

1 Analog ve Dijital İşaretler

Analog işaretlerle, sürekli-zaman işaretleri daima karıştırılır. Aynı şekilde ayrık-zamanlı işaretler ile de dijital işaretler birbirine karıştırılır. Eğer bir işaretin genliği (amplitude) sonsuz $(-\infty, \infty)$ aralığındaki sürekli-zaman işaretinin her anında bir değer alıyorsa, bu işarete analog işaret denilir. *Buna göre bir analog işaret genliği sonsuz sayıda olacaktır.* Bu analog işaretin en önemli ayrıtıdır. Bu anlamda bir analog işaretin illa da sürekli-zaman formunda olması gerekmiyor. Ayrık-zaman formundaki bir işaret de analog olabilir. Sonsuz sayıda genliğe sahip bir ayrık-zaman işaretide analog olabilir. Aynı şekilde bir dijital işaret genliği (amplitude) sonlu sayıda değer alan işarettir. Bu anlamda dijital bir işaretin illa da ayrık-zamanlı bir işaret olması gerekmez. Sürekli-zaman formunda olupda sonlu sayıda (bir kaç tane) genlik değeri olan sürekli-zaman işaretleride dijital işaretler olabilir. Aşağıdaki şekiller bu özellikleri açıklamaktadır.



Şekil 29 Analog – Dijital işaretler

Şekil (a) da sürekli-zaman işareti vardır ve bu işaretin her bir anında bir genlik değeri mevcuttur. Dolayısıyla sonsuz tane genlik değeri olduğundan bu işaret sürekli ve aynı zamanda analog bir işarettir (analog, sürekli-zaman). Şekil (c) incelendiği zaman bu kez işaret ayrık-zaman formda olmasına rağmen yine sonsuz tane genlik içerdiğinden bu işaret de analogdur (analog, ayrık-zaman).

Şekil (b) incelendiği zaman işaret sürekli-zaman formunda olmasına rağmen genliği sonlu sayıdadır (-1,0,1 gibi). Dolayısıyla bu işaret dijitaldir (dijital, sürekli-zaman). Nihayet şekil (d) incelendiği zaman, işaret ayrık formda ve genlikleri de yine sonlu sayıdadır (-1,0,1 gibi). Bu yüzden bu işaret yine dijitaldir (dijital, ayrık-zaman). Görüldüğü gibi analog bir işaret her zaman sürekli bir işaret anlamına gelmediği gibi, dijital bir işaret de her zaman ayrık işaret anlamına gelmez. Yine fark edildiği gibi analog ve dijital kavramları genlik değerleri olarak düşey eksenle ilgilirken, sürekli-zaman ve ayrık-zaman işareti ise yatay sütunla ilgili kavramlar olarak karşımıza çıkmaktadır. Analog-sürekli-zaman işaretine örnek olarak Fourier serisini verebiliriz:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n e^{jn \omega_0 t}$$

Analog, ayrık-zaman işareti içinse ayrık-zaman Fourier transformasyonu (DTFT) örnek gösterilebilir :

$$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\Omega n}$$

Sürekli-zaman ve Dijital işaretler üzerine

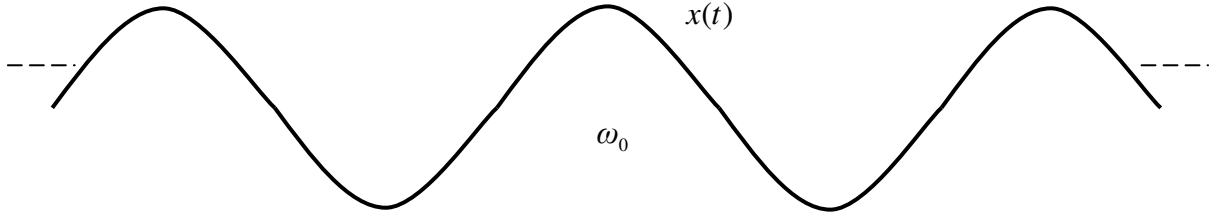
Sürekli-zaman işaretleri çoğu kez analog işaret olma özellikleriyle natural işaretler olarak kabul edilirler. Üretimleri ayrık veya dijital işarete nazaran daha kolay olan işaret türüdür. Öte yandan dijital işaretler ayrık işaretlerden elde edilmektedirler. Ayrık işaret de sürekli-zaman işaretinden üretildiği için, bir anlamda sürekli-zaman işareti ayrık ve dijital işaretlerin temelini oluşturmaktadır diyebiliriz. Dijital işaretler her ne kadar sürekli-zaman işaretlerinin örneklenmesiyle elde edilirlse de pratikte sürekli ve analog işarete göre önemli avantajları vardır. Dijital işaretler bir tür ayrık mod da üretildiklerinden sayısal formlarıyla depo edilebilme özelliğine sahiptirler ve bakımları daha kolay olup ayrıca bilgisayar ortamında tutulabildiklerinden bir tür yazılım gibi üzerinde kolay işlem yapılabilme imkanlarının oluşu itibarıyla da önemli avantaj sağlamaktadırlar. Bunların yanı sıra özellikle haberleşme mühendisliğinde sağladıkları büyük band genişlikleriyle büyük miktarlarda verinin iletilmesine imkan sağladıkları içinde de veri ve bilgisayar haberleşmesinde önemli bir yere sahiptirler.

2 Deterministik işaretler

Durağan işaretlerin en tipik şekli olup, sabit genlik ve frekans değerinde olan işaretlerdir. Bu yüzden zamana bağlı fonksiyon olarak ifade edilebilmektedirler $f(t), x(t), \sin t, \cos \omega t, \dots$ gibi. Periyodik veya periyodik varyasyonlu işaretler bu kategoriye örnek verilebilir. Bu yüzden analizleri daha kolay işaretlerdir.

3 Durağan (stationary) işaretler

Genlik dağılımları veya standart sapma gibi istatistiksel parametreleri değişmeyen işaretlere durağan (stationary) işaretler denilir. Bakıldığında değişimleri fark edilmeyen veya bir sonraki gözlem noktasında da yine aynı değerleri gösteren türden işaretlerdir. Durağan bir $x(t)$ işaretini aşağıdaki gibi düşünebiliriz.



Şekil 30 Durağan işaret : periodik işaretler

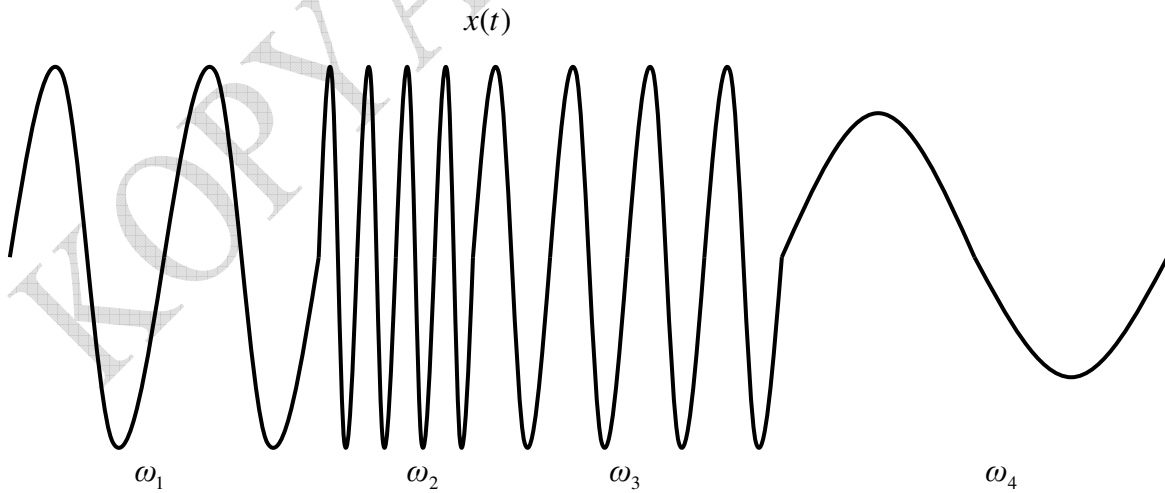
Görüldüğü gibi gözlemlendiklerinde değişmiyormuş gibi izlenim uyandıran bu tür işaretlerin en tipik örnekleri şekilde de görülen periodik işaretlerdir. Bu anlamda kesin (deterministik) ve rastgele (random) işaretler olarak iki kategoriye ayrılırlar.

Monokromatik İşaretler ve Periodik Sinusoidal İşaretler

Monokromatik işaretler tek frekanslı işaretlerdir. Bu açıdan tipik $\sin \omega_0 t$ veya $\cos \omega_0 t$ tipinde gösterilebilen sinusoidal periodik işaretleri, ω_0 tek frekanslı (monochromatic) işaretlerdir. Periodik sinusoidal işaretlerde (chirp işaretlerdeki gibi veya frekans modülasyonlu dalgadaki gibi) birden fazla frekans bileşeni bulunmaz. Bu formdaki periodik sinusoidal işaretlerin çok frekanslı (multiple frequency) hale getirilmesi, anlık frekans (instantaneous frequency) kavramıyla mümkün ve açıklanabilmektedir.

4 Durağan olmayan (nonstationary) işaretler

Durağan işaretlerin tersi olarak genlik veya frekans dağılımları sabit olmayan ve benzer istatistiksel parametrelerle gösterilemeyecek işaretlerdir. Basit bir durağan olmayan bir $x(t)$ işaret örneği aşağıda verilmiştir.



Şekil 31 Durağan olmayan işaret

Görüldüğü gibi değişimi fark edilebilen ve de periodik olması gerekmeyen bir işaret söz konusudur. Gözlemlendiğinde frekansı zamanla değişen bir $x(t)$ işaret söz konusudur. Dolayısıyla istatistiksel parametreleri değişen ve sabit olmayan bir işaret olduğundan, hangi zaman da hangi frekansta olduğuna dair bilgiler bu tür durağan olmayan işaretlerin zaman – frekans analizleri için önemlidir. Bu anlamda sürekli-durağan olmayan ve geçici-durağan (transient) işaretler olarak iki sınıfa ayrılırlar. Sürekli durağan olmayan forma örnek olarak matkap gürültüsü ve havai fişeklerin çıkardıkları gürültü verilebilir. Transient olarak ise bir çekicinin çıkardığı gürültü, yukarı aşağı çalışma şeklindeki makinelerin çıkardığı sesler ve çeşitli benzer titreşimler bu kategoriye girerler. Çünkü etki süreleri kısa veya uzun süre olup, bittikten sonra tekrar başlarlar. Kuş seslerine dayalı “chirp” olarak bilinen işaretlerde bir tür durağan olmayan işaretlere örnek verilebilir. Aşağıda bir chirp işaret örneği verilmiştir.

$$x(t) = \sin\left(2\pi f_0 t + \frac{k}{2} t^2\right)$$

Görüldüğü gibi zamanın karesiyle (t^2) değişen lineer olmayan terimler içermektedir. İfadedeki “ k ” chirp miktarı (chirp rate) olarak anılmakta, değeri anlık frekanstan elde edilmektedir. Eğer chirp işareti

$$x(t) = \sin(\phi(t))$$

olarak düşünülürse, buradan anlık frekans

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d\phi(t)}{dt}$$

olduğundan, aranan k chirp miktarı

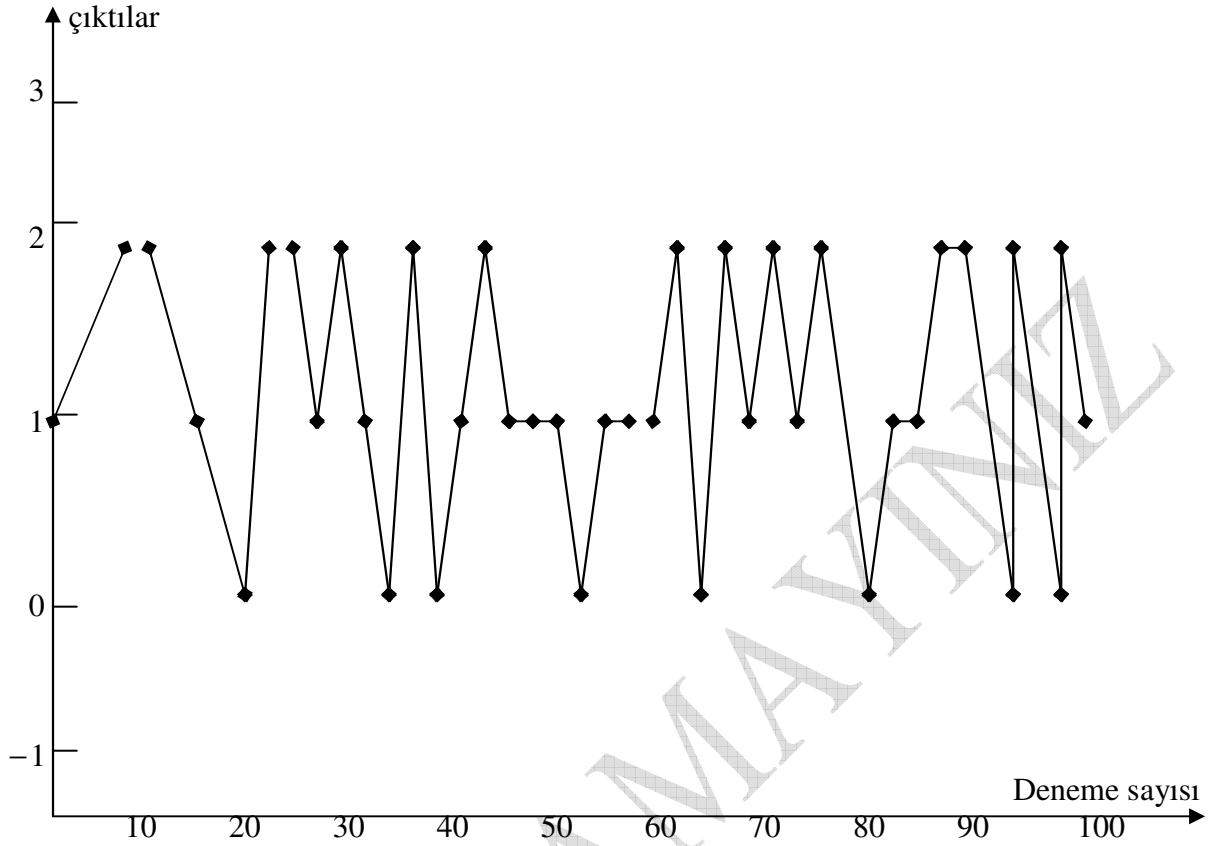
$$k = \frac{df(t)}{dt} = \frac{1}{2\pi} \frac{d^2\phi(t)}{dt^2}$$

Monokromatik Olmayan Sinusoidler ve Durağan olmayan (nonstationary) işaretler

Daha önce de gördüğümüz gibi tipik $\sin \omega_0 t$ veya $\cos \omega_0 t$ işaretleri tek frekanslı periodik sinusoid işaretlerdi. Durağan olmayan işaretler, monokromatik kavramıyla açıklanamamaktadır. Bu açıdan periodik sinusoidlerin chirp gibi çok frekanslı yaklaşımla ifade edilmeleri önemlidir. Bu tip monokromatik olmayan işaretlerin analizleri anlık frekansla (instantaneous frequency) yapılmaktadır. Chirp gibi diğer bir monokromatik olmayan işaret tipi, frekans veya faz modülasyonlu işaretlerdir. Bu tip işaretler birden fazla band (frekans) içerdiğinden, çok frekanslı (nonmonochromatic) işaretler olarak anılmaktadır.

5 Rastlantı (random) işaretler

Değeri deterministik işaretten farklı olarak önceden kestirilemeyen, değeri rastlantı deneyi ile belirlenen işarete, rastlantı (random) işaret denilmektedir. Bir jet motorunun gürültüsü düşünülebilir. Bir rastlantı deneyinde, bir olaya ilişkin çeşitli sayılarda gözlem yapılır. Her bir gözlem sonucu farklı olduğundan, rastlantısal çıktılar elde edilmektedir. Her bir gözleme dair rastlantısal çıktılarının (genlik) değerine göre rastlantı işareti elde edilmektedir. Aşağıdaki şekilde böyle bir rastlantı deneyi sonucu elde edilen rastlantı işareti görülmektedir.



Şekil 32 Rastlantı işareti

Bununla birlikte görüldüğü gibi, gözlemlenen olaya ait gözlem sayısı, deneme sayısı olarak verilmiştir. Her bir denemede (gözlemlerde) genellikle farklı değerler elde edilmektedir. Dolayısıyla değeri kesinleşmiş (deterministik) değerler söz konusu değildir. Diğer bir deyişle rastlantı işareti, sonucu önceden kestirilemeyen değerlerin elde edilmesiyle oluşturulmaktadır. Yani $v(t) = V \cos \omega_0 t$ gibi deterministik bir fonksiyonla her anı belirlenemeyecek bir işaret söz konusudur. Her bir gözlem (deneme) sonucu farklı bir değer elde edilmektedir. Oysa verilen $v(t) = V \cos \omega_0 t$ deterministik (kesin) modelde, her bir “ t ” anındaki $v(t)$ değeri bellidir, değişmez. Bu nedenle bu tipteki işaretlerin analizleri, olasılık teorisine dayalı tekniklerle çözülmektedir. Bununla beraber örneğin $v(t) = V \cos(\omega_0 t + \theta)$ ifadesinde gerek genlik olarak V gerekse faz olarak θ rastlantı değişkeni olabilirdi. Yukarıdaki şekildeki çıktılar böyle bir işaretin V genliğini gösterebilirdi. Yani işaretin genliği (veya fazı), gözlem sonuçlarına göre değişim içinde olabilirdi. Yukarıdaki şekle göre işaretin genliği (0,1,2) ile gösterilmek üzere 3 rassal değişkenle ifade edilmiştir. Diğer bir deyişle her bir çıktı örnek noktası (sample point) olmak üzere bu deneyde örnek uzayı (sample space) 100 tekrarlanan deney sonucunda 3 örnek noktasından oluşmuştur. Değerleri (çıktıları) rassal deneyle belirlenen bu tip işaretlerle ilgili olarak bu yöntemlerin uygulanmasında relatif frekans kavramı söz konusudur.

$$f_k(n) = \frac{N_k(n)}{n}$$

Bağıntısıyla gösterilen relatif frekans, toplam “ n ” gözlem (deneme) sonucu, gözlemi yapılan $0,1,2,3,\dots,k$ tane olayın dağılımını göstermektedir. İfadedeki $N_k(n)$ toplam gözlem içindeki, belirli bir olay veya değerin rastlanılan sayısıdır. Örneğin 2 değeri ile toplam 100 gözlem (deneme) sonucunda 9 kez karşılaşıyorsa, bunun relatif frekansı aşağıdaki gibi gösterilir.

$$f_2(100) = \frac{N_2(100)}{n = 100} = \frac{9}{100}$$

Olasılığı çağrıştıran bu yaklaşımda, deneme sayısının çok büyük tutulduğu $n \rightarrow \infty$ durumlarında, gözlemlenen “2” olayına dair relatif frekans, olasılık olarak elde edilir.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_k(n) = p_k$$

Buna göre bir “2” olayının relatif frekansından, onun olasılığına ulaşılır. Böylece 2 olayının olasılığı $p_2 = 9/100 = 0.09$ olarak elde edilir.

Bunların ışığında yukarıdaki rastlantı işaretini tekrar göz önüne aldığımızda, görülebileceği gibi (0,1,2) değerlerinin gözlemlenmesine yönelik bir durum söz konusudur. Bu değerlerin toplam 100 gözleme göre dağılımına bakıldığında her bir gözlemde (0,1,2) değerlerinin farklı farklı gözlemlendiği görülmektedir. Oysa $v(t) = 4\cos 0.6t$ modelinin ele alındığı deterministik modelde, örneğin $t = 100$ sn anındaki $v(t) = 2$ V değeri kesindir. Bunun anlamı Oysa rastlantı işaretinde $t = 100$ sn olduğu sürece $v(100) = 2$ V olacaktır. Oysa rastlantı işaretinde $v(t) = 2$ V değerinin her $t = 100$ sn de elde edileceği kesin değildir. Bunun ancak bir olasılık değeriyle verilmesi söz konusudur. Yani 100 deneme sonucunda 2 değeri $f_2(100) = 0.3$ olasılıkla elde edilmektedir.

Tüm bunların sonucunda (0,1,2) gibi değerlere dair yapılan gözlem sayısının oldukça büyük tutulması durumunda, her birinin relatif frekanslarının birbirlerine yaklaştığı görülmektedir. Bu şekilde $n \rightarrow \infty$ gözlem sonucunda, (0,1,2) olaylarının relatif frekansları eşit veya bir birine çok yakın olacaktır. Teorik anlamda gözlem sayısının $n \rightarrow \infty$ büyük tutulması durumunda (merkezi limit teoremi gereğince) dağılımları normal dağılıma yaklaşacağı için, sonuçta (0,1,2) olaylarının herbirinin ortalamaları yakın olacaktır.

Uygulamada rastlantı işaretlerinin geniş kullanım alanları vardır. Özellikle haberleşme sistemlerinde, olasılık teorisine dayalı rastlantı değişkeni, rastlantı işareti ve rastlantı prosesleri yaygın olarak kullanılmaktadır. Bir haberleşme sistemi göz önüne alındığında, gönderici tarafındaki işaretin gönderilmesi kesin iken, alıcı tarafında aynı işaretin alınması her zaman kesin değildir ve garanti edilemez. Çeşitli ortam koşullarından kaynaklanan sebeplerle, alıcı tarafındaki işaret aynen değil bozulmuş olarak elde edilir. Bu durumda olasılık teorisi tekniklerine dayanılarak, orijinal işaret elde edilmeye çalışılır. Bu yüzden olasılık teorisi üzerine kurulu, deterministik olmayan, rastlantı (random) işaretlerinin analizleri önemlidir. Bu yaklaşım haberleşme mühendisliğinde daha ziyade bilgi kuramı (information theory) kapsamında ele alınan geniş ve kompleks analizleri gerektirmektedir.

6 Analitik işaret

Negatif frekans bileşenlerini içermeyen işarete analitik işaret denilir. Alternatifi olarak, Fourier transformasyonu negatif frekanslar için sıfır olan işaret analitik işaret olarak anılır ve analitik işaretler aynı zamanda “anlık frekansa” sahip işaretlerdir. Analitik işaretin eşleniği de tam tersine negatif frekanslar içerir. Buna göre eğer gerçek bir işaret $x(t)$ ve onun Fourier transformasyonu $X(\omega)$ ile analitik işaret $z(t)$ ve onun Fourier transformasyonu $Z(\omega)$ arasında aşağıdaki bağıntı mevcuttur.

$$Z(\omega) = \begin{cases} 2X(\omega) & \omega \geq 0 \\ X(0) & \omega = 0 \\ 0 & \omega < 0 \end{cases}$$

Buna göre analitik işaret, gerçek işaretin yalnızca pozitif frekanslarını içerir, ve bu miktar gerçek işaretin pozitif miktarının iki katıdır. Herhangi gerçek bir işaret $x(t)$ bu anlamda pozitif frekanslardan oluşan analitik forma $z(t)$ dönüştürülebilir. Eğer analitik işareti aşağıdaki gibi yazarsak,

$$z(t) = x(t) + j y(t)$$

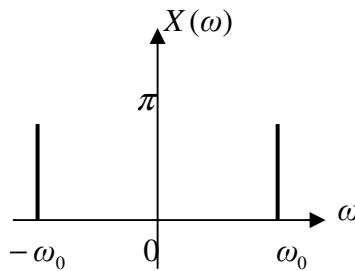
Burada $y(t)$ gerçek işaretin $[x(t)]$, **Hilbert transformasyonu** $H\{x(t)\}$ olarak anılır. Bilindiği gibi, Hilbert transformasyonu aynı zamanda anlık frekansı bulmaya yarayan bir ileri işaret işleme (zaman – frekans analizleri) tekniği idi. Analitik işaret kavramından haberleşme sistemlerinde “tek yan bandlı modülasyon (single side band modulation)” olarak yararlanılır. Bu şekilde spektrumun bir yarısı gönderilerek bir avantaj sağlanır. Sonuçta toplam bilgi veya veri açısından bir kayıp söz konusu değildir. Eğer gerçek işaretimiz aşağıdaki formdaysa

$$x(t) = \cos \omega_0 t$$

bunun Fourier transformasyonu ise

$$\begin{aligned} F\{\cos \omega_0 t\} &= \pi \delta(\omega + \omega_0) + \pi \delta(\omega - \omega_0) \\ &= X(\omega) \end{aligned}$$

$x(t)$ reel işaretine ait Fourier transformasyonun görünümü ise aşağıdaki gibi olacaktır.



Şekil 33 Gerçek işaret

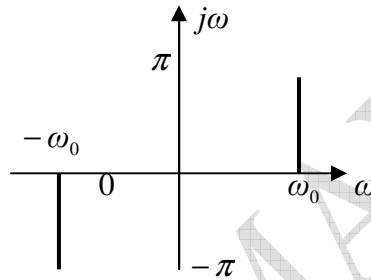
Şimdi $x(t) = \cos \omega_0 t$ işaretinin Hilbert trnasformasyonunu alalım.

$$\begin{aligned} H\{x(t)\} &= \cos(\omega_0 t - \frac{\pi}{2}) = \sin \omega_0 t \\ &= y(t) \end{aligned}$$

Hilbert transformasyonu alınmış $y(t)$ işaretin Fourir transformasyonu

$$\begin{aligned} F\{y(t)\} &= F\{\sin \omega_0 t\} = j\pi\delta(\omega + \omega_0) - j\pi\delta(\omega - \omega_0) \\ &= Y(\omega) \end{aligned}$$

Hilbert transformasyonunu gösteren $y(t)$ işarete ait Fourier transformasyonun görünümü ise aşağıdaki gibi olacaktır.



Şekil 34 $Y(\omega)$ Hilbert transformasyonunun spektrumu

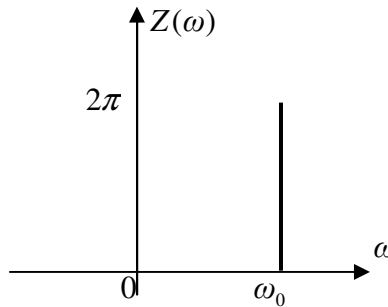
Şimdi elde edilenleri $z(t) = x(t) + j y(t)$ analitik işaret de yerine yazalım.

$$\begin{aligned} z(t) &= x(t) + j y(t) = \cos \omega_0 t + j \sin \omega_0 t \\ &= e^{j \omega_0 t} \end{aligned}$$

Analitik işaret $z(t) = e^{j \omega_0 t}$ olarak elde edildiğine göre, spektrumunu görmek için Fourier transformasyonunu düşünelim.

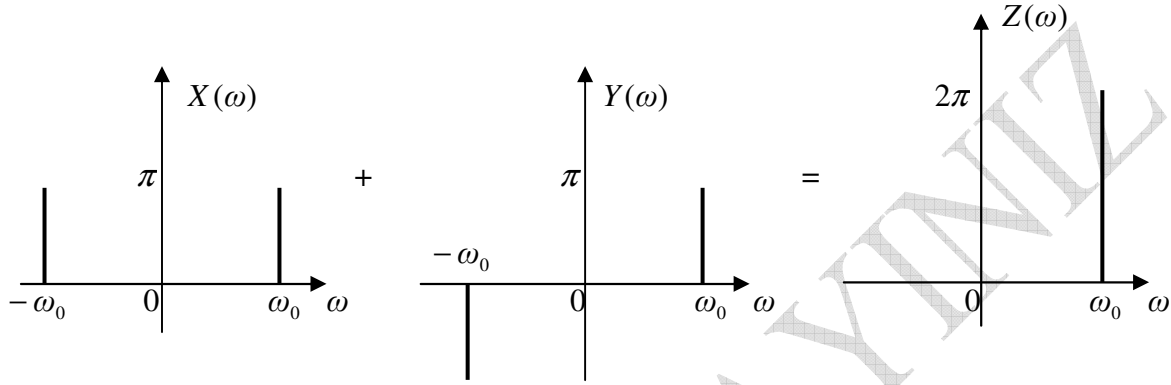
$$\begin{aligned} F\{z(t)\} &= 2\pi\delta(\omega - \omega_0) \\ &= Z(\omega) \end{aligned}$$

Analitik işaretin $Z(\omega)$ spektrumu aşağıdaki gibi olacaktır.



Şekil 35 Analitik işaretin spektrumu

Bunların ışığında $z(t) = x(t) + j y(t)$ formundaki analitik işareti spektrum yani Fourier transformasyonu olarak $Z(\omega) = X(\omega) + jY(\omega)$ biçiminde düşünürsek, $Z(\omega)$ analitik işaretin spektrumunun reel $X(\omega)$ işaretine göre tek taraflı olduğu, negatif frekansları içermediği ve spektrum genliği olarak da $X(\omega)$ nin iki katı oranında (2π) gerçekleştiği görülmektedir. Bu durumu grafik olarak da aşağıdaki şekil üzerinde teyit etmek mümkündür. Buna göre $z(t) = x(t) + j y(t)$ gereği iki işarete ait spektrumların $Z(\omega) = X(\omega) + jY(\omega)$ olarak toplanması ile oluşan analitik işaretin spektrumu aşağıdaki gibi elde edilecektir.



Şekil 36 Analitik $Z(\omega) = X(\omega) + jY(\omega)$ işaretin spektrumu

Spektrumdan da görüldüğü gibi, analitik işaretin oluşumu sırasında negatif frekanslar bastırılırlar toplamda kayıp söz konusu değildir. Çünkü yine işarete ait π genliği bu kez 2π gibi iki katına çıkarak, seviyesini muhafaza etmektedir. Haberleşme tekniği açısından, örneğin bu prosesin kullanıldığı tek yan bant modülasyonu ele alınacak olunursa, bant genişliği ω_M olan bir işaret için iletim bandının $2\omega_M$ olmasına karşın, analitik işaret yöntemiyle bu değer yarıya yani ω_M değerine düşmektedir. Böylece çift yan bant yerine tek yan bant kullanılması sonucu gönderilecek veri miktarında bir eksiklik veya kayıp söz konusu olmayacaktır. Çünkü $2\omega_M$ bant genişliğindeki iletim bandındaki enerjiyle, yarı miktarda bant genişliğinin kullanıldığı yukarıdaki son şekildeki sonuç işaretin enerji miktarı aynıdır. Bant genişliği sınırlı bir alandaki enerji yoğunlaşması olduğuna göre klasikteki ($2\omega_M$) gösterimindeki enerji miktarı, çift (simetrik) özellikten dolayı 2π iken, son şekilde tek yan bantlı gösterimdeki enerji miktarı da 2π olarak aynı olduğundan, gönderilen bilgi miktarında bir değişiklik olmaz. Bundan dolayı, çift band gösterimleri yerine, analitik işaret olarak elde edilmiş yarı kapasitedeki tek yan band gösterimler avantaj sağlamaktadır.

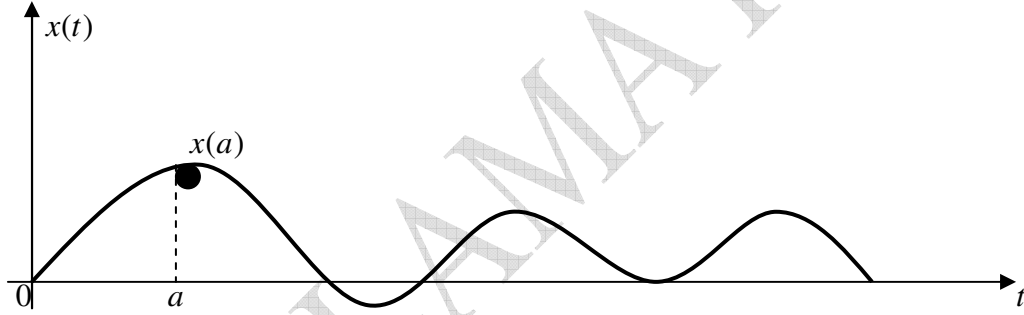
Analitik işaret çift taraflı spektrumu teke indirgediği için özellikle haberleşmede daha fazla bant genişliği isteyen çift yan band modülasyonu (double side band modulation, DSBM) yerine kullanılan tek yan bantlı işaretlerin modülasyonu (single side band modulation, SSBM) için önemli avantaj sağlar. Bu şekilde yarı bant genişliği ile daha az enerji harcanarak aynı işareti göndermek mümkün olur. Bunu temin edecek analitik işaretin elde edilmesinde önemli rola sahip Hilbert transformasyonu, çift yan bantı teke indirgediği için bir tür filtre olarak düşünülmekte, ve bu yüzden **Hilbert filtresi** olarak da anılmaktadır.

7 Reel işaretler

Gerçek işaretleri genel anlamda göz önüne alırsak, reel veya gerçek (real) işaretler kompleks olmayan, rasyonel ve irrasyonel değerlere sahip işaretlerdir. Basit olarak bir işaretin genel görünümüne bakarsak

$$s(t) = x(t) + jy(t)$$

kompleks tipinde olduğunu görürüz. Kompleks olarak vurgulanmak istenen işaretin $x(t)$ reel kısmının, $y(t)$ olarak da imajiner kısımdan oluşmasıdır. Dolayısıyla burada gerçek işaret olarak göz önüne alınan $y(t)=0$ için $x(t)$ dir. Diğer bir deyişle reel işaretin imajiner kısmının olmaması gerekiyor. İleride imajiner kısmın olması durumunda hangi tip işaretin söz konusu olacağını ve bu durumun işaretin gösterimine nasıl bir katkı sağladığı açıklanacaktır. Bu anlamda eğer genel bir $x(t)$ işareti reel (gerçek,real) işaretse bağımsız değişken “ t ” gerçek değer alır. Buna göre $x(t)$ gerçek işareti $x(a)$ olarak ($a = (-\infty, +\infty)$) koşuluna göre aşağıdaki gibi düşünülebilir.



Şekil 37 Gerçek işaret

Sonuç olarak gerçek $x(t)$ işaretinin ancak “ t ” nin gerçek değerler alabileceği ($t = a$) bir $x(a)$ formuyla ifade edilebileceği görülmektedir. Yani yatay eksenindeki bağımsız bir değişken (t) için dikey ekseninde bir $x(t)$ değeri elde edilmektedir. Şekilden de görüldüğü gibi gerçek bir işaret yalnızca reel eksen (yatay) üzerindeki değerlerle çalışan bir işarettir. Bu anlamda eğer böyle bir eksen $(-\infty, \infty)$ aralığında düşünülürse, sıfır noktasına göre simetriden dolayı reel (gerçek) işaretlerin aynı zamanda çift işaretler olabileceğinden de görmekteyiz. Daha önce ele alınan enerji ve güç işaretlerini aşağıdaki gibi düşündüğümüzde

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |s(t)|^2 dt$$

$$P_{AV} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |s(t)|^2 dt$$

söz konusu $s(t) = x(t) + jy(t)$ işaretinin imajiner kısmı $y(t) = 0$ olduğundan reel işaret olarak $s(t) = x(t)$ alınacağından, yukarıdaki denklemler yerine

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt$$

$$P_{AV} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x^2(t) dt$$

denklemleri alınacaklardır. Çünkü $s(t) = x(t) + jy(t)$ olarak düşünüldüğünde

$$|s(t)| = \sqrt{x^2(t) + y^2(t)}$$

olacağından, $y(t) = 0$ durumunda $s(t)$ işareti

$$|s(t)| = \sqrt{x^2(t) + 0^2} = x(t)$$

biçiminde yalnızca **reel işareten oluşacaktır**. Gerçek işaretlerin en önemli rolü analitik işaretlerin elde edilmesinde kullanılması olup, en önemli uygulama alanları ise analitik işaretlerin yoğun ihtiyaç duyulduğu haberleşme mühendisliğidir. Gerçek işareten hareketle Hilbert transformasyonu kullanılarak analitik işaret elde edilirken, bu yapıdaki analitik işaret ise haberleşme alanındaki çift yan band modülasyonun tek yan band modülasyona dönüştürülmesinde yararlanılması önemli özelliğidir. Daha önceki bölümlerden değinildiği gibi çift yan band tek yan banda indirgenirken hem fazla band hemde fazla enerji kullanımının önüne geçilmekteydi, ve bu amaçla yararlanılan Hilbert transformasyonunun Hilbert filtresi olarak anıldığını bilmekteyiz. Ayrıca önceki bilgilerimizden biliyoruz ki, elde edilen analitik işaretin faz açısından yararlanılarak ileri işaret işleme tekniklerinden “zaman-frekans” analizlerinden kabul edilen anlık frekansın hesaplanmasında bir şekilde gerçek ve analitik işaret işlemeyle mümkün olabilmektedir.

Gerçek işaretlerin pratikte en çok rastlanan işaret türü olduğunu söylemiştik. Bu nedenle gerçek işaretler uygulamada daha ziyade radar , sonar, benzeri özellikteki sensörlerle algılanıp, üzerinde analitik işaretlerdeki benzer işlemler daha revaçta olan kullanışlı formlara (kompleks işaretler gibi) getirilirler.

8 Kompleks İşaret

Reel işaretin tanımının ardından kompleks işaret daha iyi anlaşılabilir. Eğer genel olarak kompleks işareti

$$s(t) = x(t) + jy(t)$$

gibi düşünürsek, hem gerçek hem de imajiner kısmı içerdiğini görmekteyiz. Diğer bir deyişle kompleks bir işaret olarak $s(t)$ işareti iki gerçek işareten oluşmaktadır [$x(t)$ ve $y(t)$]. Ancak ikinci bileşen $y(t)$, bir “ j ” sayısı ile ($j = \sqrt{-1}$) çarpım durumundadır. Normalde gerek $x(t)$ gerekse $y(t)$ yukarıda ele alınan $t = (-\infty, +\infty)$ aralığındaki gerçek işaretlerdir. Ancak ikinci bileşen $y(t)$ düşey konumdaki “ j ” ile çarpılarak, düşey konumda hareket eden bir fonksiyon olarak davranır. Böyle bir davranışla $s(t)$ işaretine faz veya faz farkı özelliği kazandırılmaktadır. Kompleks işaretler bu açıdan fazör özelliğindedir. Fazör kavramını kısaca hatırlayalım ;

Fazör ($A e^{j\phi}$): fazör, sinusoidal bir işaretin genlik ve faz bilgisiyle birlikte gösterimidir.

$$f(t) = \tilde{A} e^{j\omega t}$$

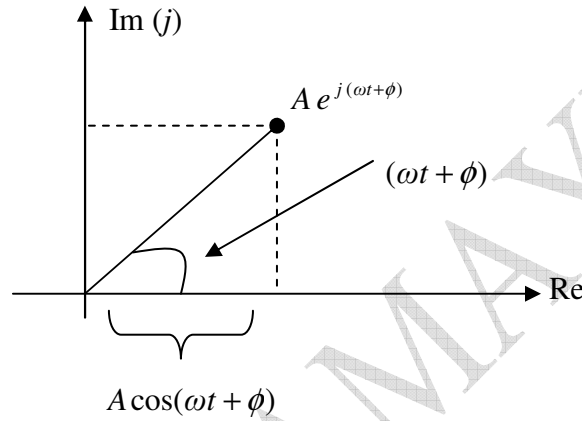
$$\tilde{A} = a + jb = A e^{j\phi} \quad \text{fazör (kompleks genlik)}$$

$$f(t) = \tilde{A} \cos(\omega t + \phi)$$

$$A = |\tilde{A}| = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \phi = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$$

$$f(t) = A e^{j(\omega t + \phi)}$$

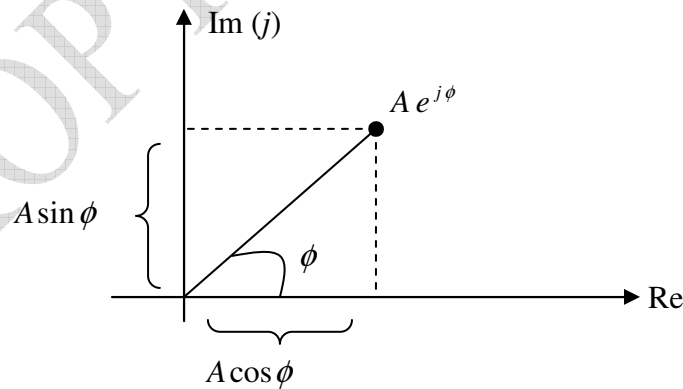
$$\text{Re}\{f(t) = A e^{j(\omega t + \phi)}\} = A \cos(\omega t + \phi)$$



Şekil 38 Kompleks gösterim

$f(t) = A e^{j(\omega t + \phi)}$: A genlikli (pozitif), ω frekanslı ve ϕ fazlı işaret.

Fazör gösterim : $f(t) = \underbrace{A e^{j\phi}}_{\text{fazör}} e^{j\omega t}$

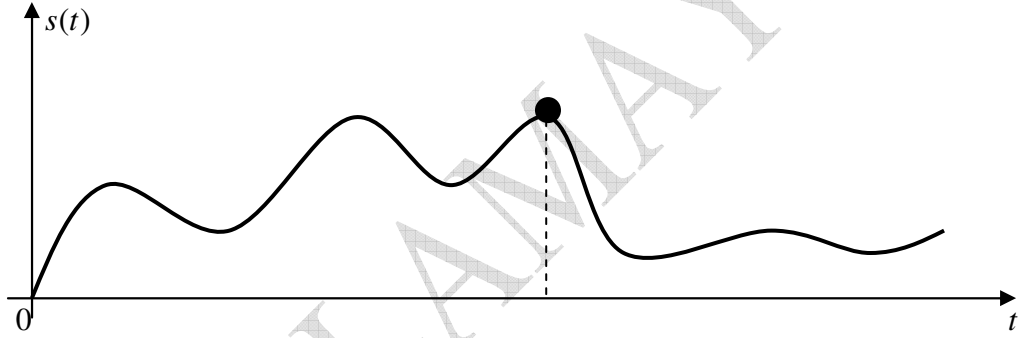


Şekil 39 Fazör gösterim

Fazör gösterimle, frekansa dayalı davranışı değişen (kapasite, endüktans) elemanlar üzerindeki faz farklılıkları rahatlıkla gösterilmektedir.

Eğer $s(t)$ işaretinin Hermitian olduğunu düşünürsek buna göre $x(t)$ gerçekte (ve çift) ve $jy(t)$ ise tek özellikli bir fonksiyon olacaktır. Bizim kabulümüzde $s(t)$ işareti $x(t)$ ve $y(t)$ gibi iki gerçekte fonksiyondan oluştuğuna ve, $jy(t)$ de imajiner olduğuna göre yaklaşımımız $s(t)$ nin Hermitian olduğunu sağlayacak yöndedir. Bundan dolayı $y(t)$ gerçekte işaretinin $jy(t)$ halindeki imajiner eksenindeki davranışı tek (odd) fonksiyon özelliğinde olduğu içinde, diğer $x(t)$ gerçekte (çift, even) işaretiyle birlikte toplanarak $s(t)$ toplam işaretini oluşturmaktadır. Vurgulandığı gibi kompleks işaretin imajiner kısmının tek özellikte oluşu Hermitian kuralıyla da sabittir.

Bunun sonucunda $s(t)$ işareti yatay ekseninde $x(t)$ düşey imajiner ekseninde ise $y(t)$ gerçekte fonksiyonlarının hareketinden oluşan iki boyutlu bir işaret olarak çalıştığı için kompleks işaret olarak anılmaktadır. Bu yolla kompleks işaret kullanılarak işaretlerin faz ve genlik bilgisi elde edilerek işaret hakkında daha detaylı bilgi elde edilmektedir. Bu önemli bir katkıdır. Bunların ışığında $s(t)$ kompleks işareti kompleks yapıda $s(t) = x(t) + jy(t)$ biçiminde düşünülerek aşağıdaki gibi değerlendirilecektir.



Şekil 40 Kompleks işaret

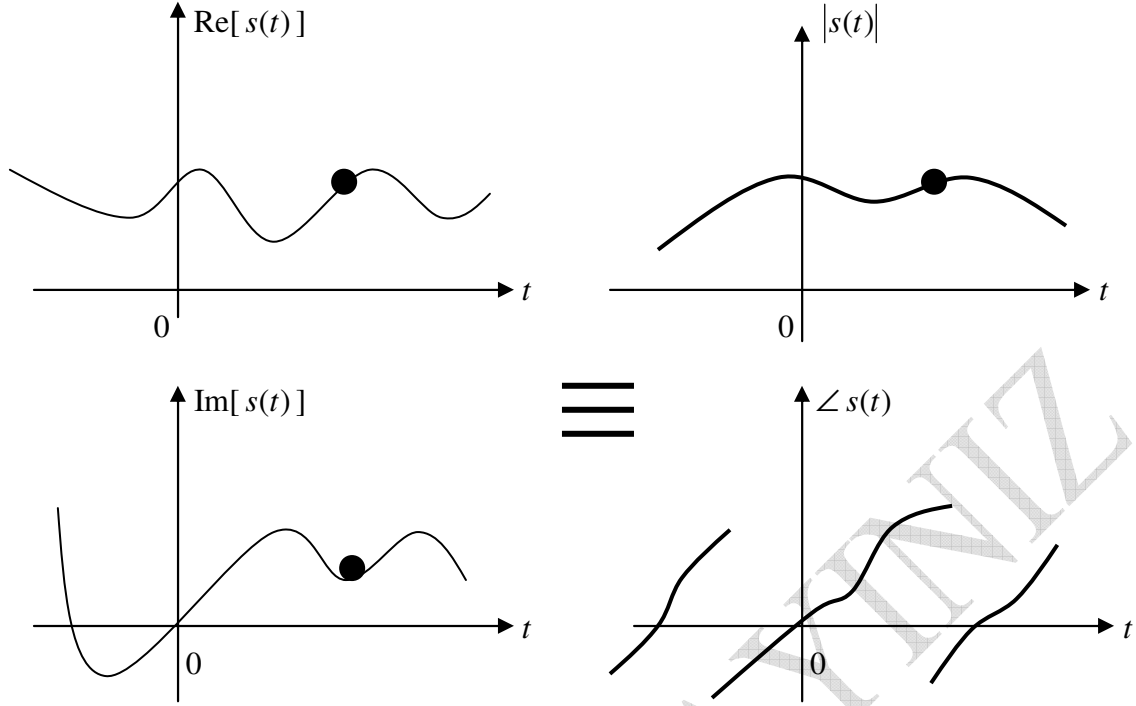
Eğer $s(t)$ işareti $s(t) = x(t) + jy(t)$ özelliğinde kompleks işaretse, yalnızca $x(t)$ gerçekte kısmı değil aynı zamanda kompleks kısmı da göz önüne alınarak

$$|s(t)| = \sqrt{x^2(t) + y^2(t)} \quad \text{genlik bilgisi}$$

$$\angle s(t) = \tan^{-1} \frac{y(t)}{x(t)} \quad \text{faz bilgisi}$$

$$s(t) = |s(t)| e^{j\angle s(t)} \quad \text{kompleks işaret}$$

biçiminde gösterilir. Bu bilgiler aşağıdaki şekil üzerinde şematize edilmiştir.



Şekil 41 Kompleks işaret : $s(t) = |s(t)|e^{j\angle s(t)}$

Görüldüğü gibi kompleks işaretler $|s(t)|$ genlik, $\angle s(t)$ faz bilgisini içerecek biçimde $s(t) = |s(t)|e^{j\angle s(t)}$ yapısındaki işaretlerdir. Pratikte kompleks işaretlerin özel hali gibi olan gerçek işaretler daha çok kullanılmalarına rağmen, teorik açıdan işaret analiz alanında kompleks işaretler daha genel bir yaklaşım sağlamaktadır. Sonuçta tek tek olarak ele alınan gerçek ve kompleks işaretlerin ayrı anlaşılması, aşağıda ele alınacak tek ve çift işaretlerin anlaşılmasında kolaylaştıracaktır.

Tespit : kompleks işaretler, genlik bilgisini içeren gerçek işaretlerden farklı olarak aynı zamanda faz bilgisinide içeren işaretlerdir. Bu açıdan yalnızca genlik bilgilerinin (magnitudes) göz önüne alındığı fotoğraf tekniği reel işaret gibi düşünülürken, genliğin yanı sıra faz bilgisinide göz önüne alan üç boyutlu fotoğraf teknolojisi olan hologram ise, kompleks işaret üzerine kuruludur.

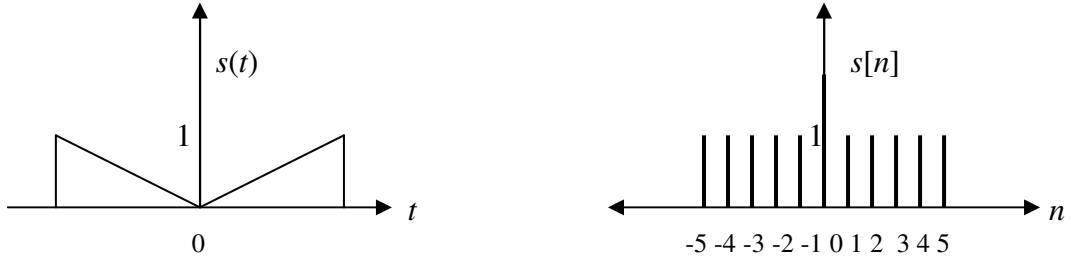
9 Tek ve çift işaretler

Yukarıda ele alınan gerçek ve kompleks işaretlerin ışığı altında, bu bölümde onları tamamlayacak tek ve çift işaretler ele alınmıştır. Öncelikle çift bir işaretten başlayalım. Eğer sürekli veya ayrık bir işaret

$$s(-t) = s(t)$$

$$s[-n] = s[n]$$

formunda ise, çift işaret söz konusudur.



Şekil 42 Çift işaretler

Görüldüğü gibi çift işaretler düşey eksene (sıfır noktasına) göre simetrik işaretlerdir. Verilen bir $s(t)$ işaretinin Hermitian kuralına göre çift fonksiyon olarak değerlendirilmesini biliyoruz. Buna göre eğer $s(t)$ bir **Hermitian fonksiyon** ise çift fonksiyon açısından aşağıdaki koşulları sağlaması gerekiyordu.

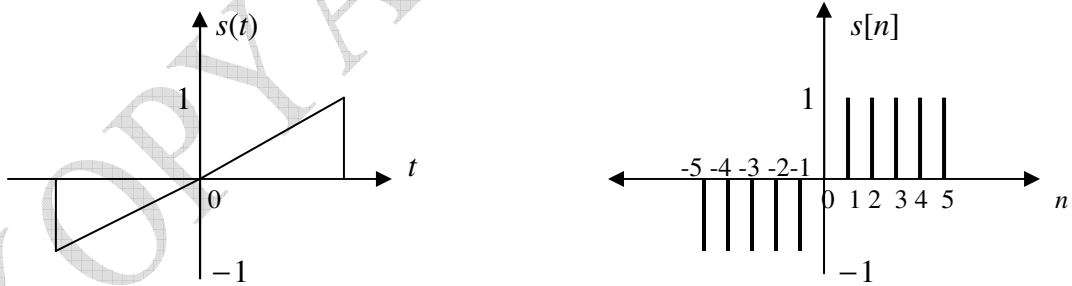
- reel kısmının çift olması gerekir , $\text{Re}\{X(-\omega)\} = \text{Re}\{X(\omega)\}$
- genliği çift , $|X(-\omega)| = |X(\omega)|$

Buna göre çift fonksiyon özelliğinin, aynı zamanda Hermitian fonksiyonundan gelen bir özellik olduğunu görmekteyiz. Eğer $s(t)$ ve $s[n]$ işaretleri

$$s(-t) = -s(t)$$

$$s[-n] = -s[n]$$

Formunda iseler tek işaretler söz konusudur.



Şekil 43 Tek işaretler

Görüldüğü gibi tek işaretler düşey eksene (sıfır noktasına) göre ters simetrik işaretlerdir. Verilen bir $s(t)$ işaretinin tek fonksiyon özelliğinin Hermitian kuralına göre değerlendirilmesi olduğunu biliyoruz. Buna göre eğer $s(t)$ bir Hermitian fonksiyon ise tek fonksiyon açısından aşağıdaki koşulları sağlaması gerekiyordu.

- imajiner kısmının tek olması gerekir , $\text{Im}\{X(-\omega)\} = -\text{Im}\{X(\omega)\}$
- fazı tek , $\angle X(-\omega) = -\angle X(\omega)$

Buna göre çift fonksiyon özelliğinin, aynı zamanda Hermitian fonksiyonundan gelen bir özellik olduğunu görmekteyiz. Ana işaret ile çift ve tek işaretler arasındaki var olan bağıntılar aşağıda verilmiştir. Ana işaret $s(t)$, çift işaret $s_e(t)$ ve tek işaret ise $s_o(t)$ olsun.

$$s(t) = s_e(t) + s_o(t)$$

$$s[n] = s_e[n] + s_o[n]$$

Ayrıca

$$s_e(t) = \frac{1}{2} \{s(t) + s(-t)\}$$

$$s_e[n] = \frac{1}{2} \{s[n] + s[-n]\}$$

$$s_o(t) = \frac{1}{2} \{s(t) - s(-t)\}$$

$$s_o[n] = \frac{1}{2} \{s[n] - s[-n]\}$$

Örnek

Aşağıdaki $s[n]$ işaretine göre, tek ve çift işaretleri bulun.

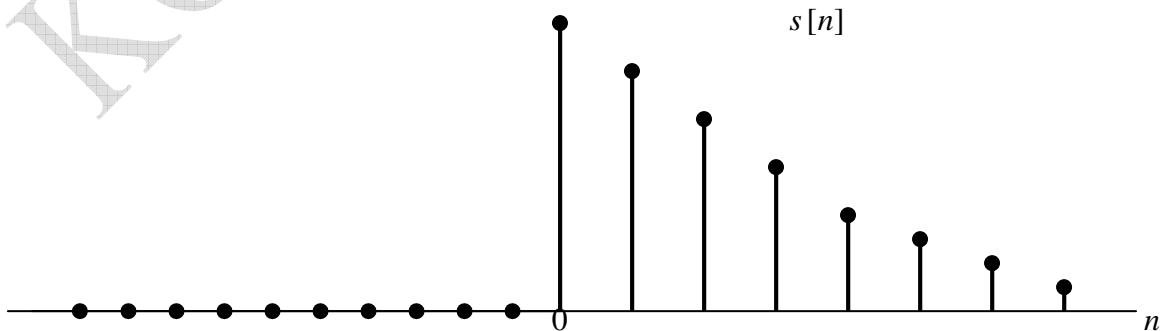
Çözüm

İlgili şekiller

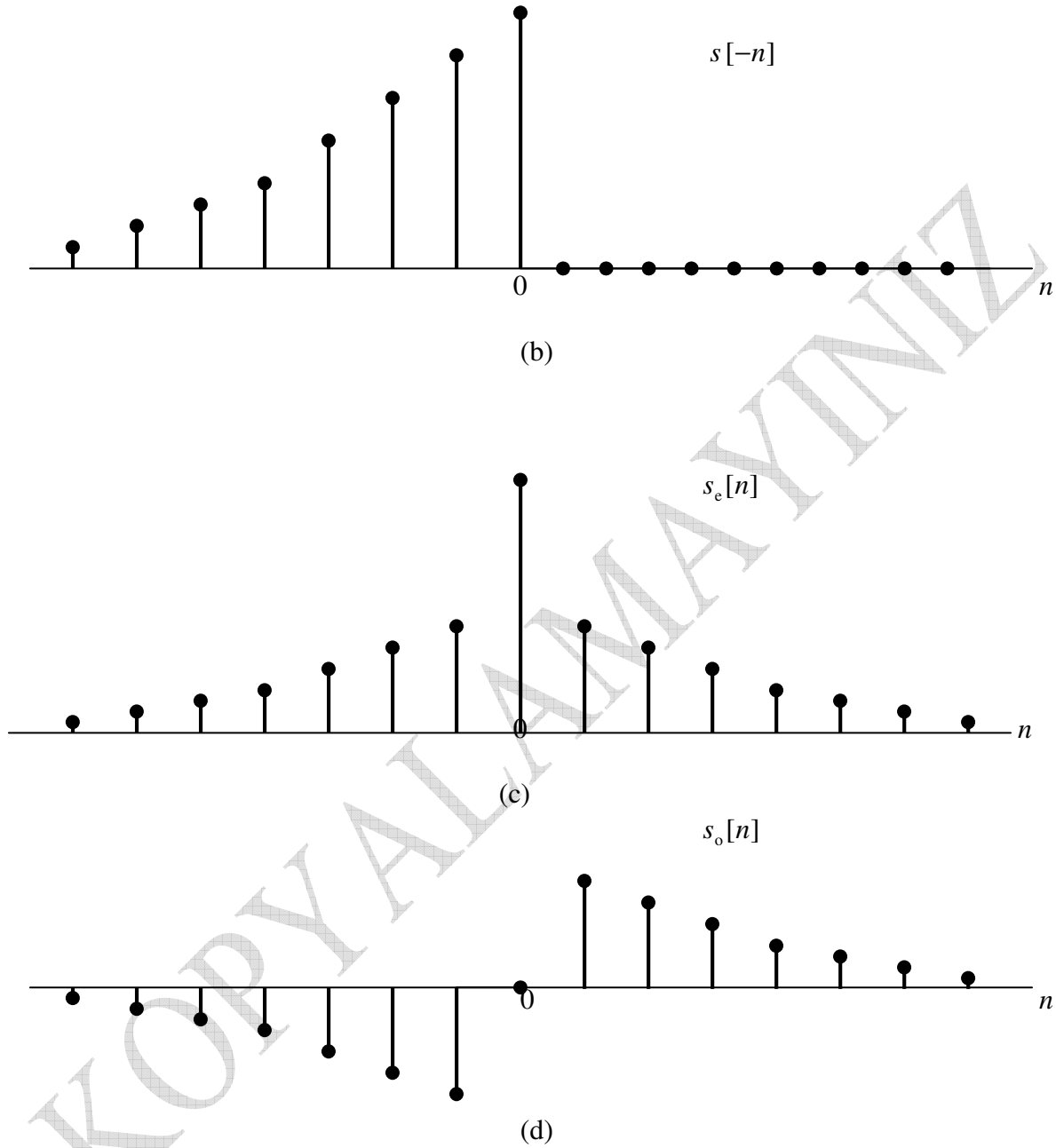
$$s_e[n] = \frac{s[n] + s[-n]}{2}$$

$$s_o[n] = \frac{s[n] - s[-n]}{2}$$

denklemlerine göre (b), (c) ve (d) aşağıdaki gibi oluşturularak tek ve çift analizler yapılır.



(a)



Şekil 44 Reel nedensel dizinin (ayrık işaretin) çift ve tek kısımları

Şekil (a) dan görüldüğü gibi nedensel bir ayrık işaret söz konusudur.

$$s[n] = 0, n < 0$$

veya

$$s[-n] = 0, n > 0$$

Eğer ayrık $s[n]$ işareti reel ise, tek ve çift kısımları mevcuttur. Buradan işaretin tek veya çift kısımları verilmişken, işaretin kendisinin bulunabileceğini görmekteyiz. Alternatif olarak işaretin $s[n]$ kendisi ve $s[-n]$ eşleniği ile de tek ve çift kısımlarının bulunabileceği görülmektedir. Bu yaklaşımla şekil (c) den çift bir işaretin tipik cosinüs, (d) den de tek bir işaretin sinüs gibi elde edildiğini görmekteyiz. Tek farklılık tek ve çift işaretlerin $s[n]$ işaretine göre genliklerinin denklemlerde belirtildiği üzere yarıya düşmesidir. Ayrıca $s[n]$ işaretinin $u[n]$ birim basamak ve $\delta[n]$ impuls fonksiyonuna bağlı ifadeleride aşağıdaki gibi olacaktır.

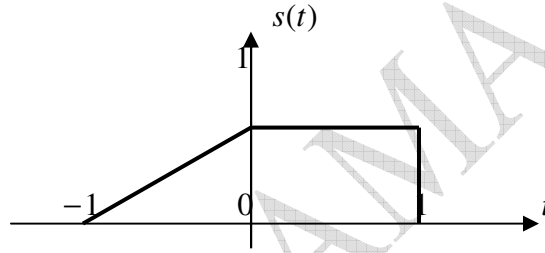
$$s[n] = 2s_e[n]u[n] - s_e[0]\delta[n]$$

veya

$$s[n] = 2s_o[n]u[n] + s[0]\delta[n]$$

Örnek

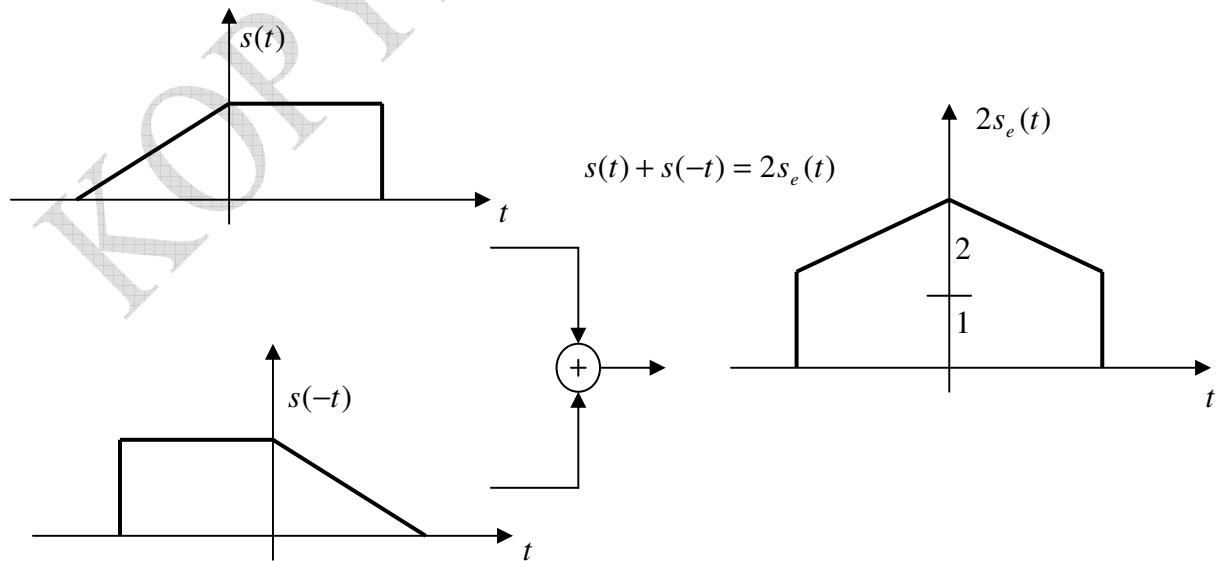
Aşağıda verilen $s(t)$ işaretinin tek ve çift fonksiyonlarını içeren $s(-t)$, $s(t) + s(-t)$, $s(t) - s(-t)$ ve $s_e(t) + s_o(-t)$ karşılıklarını bulun.



Şekil 45 $s(t)$ işareti

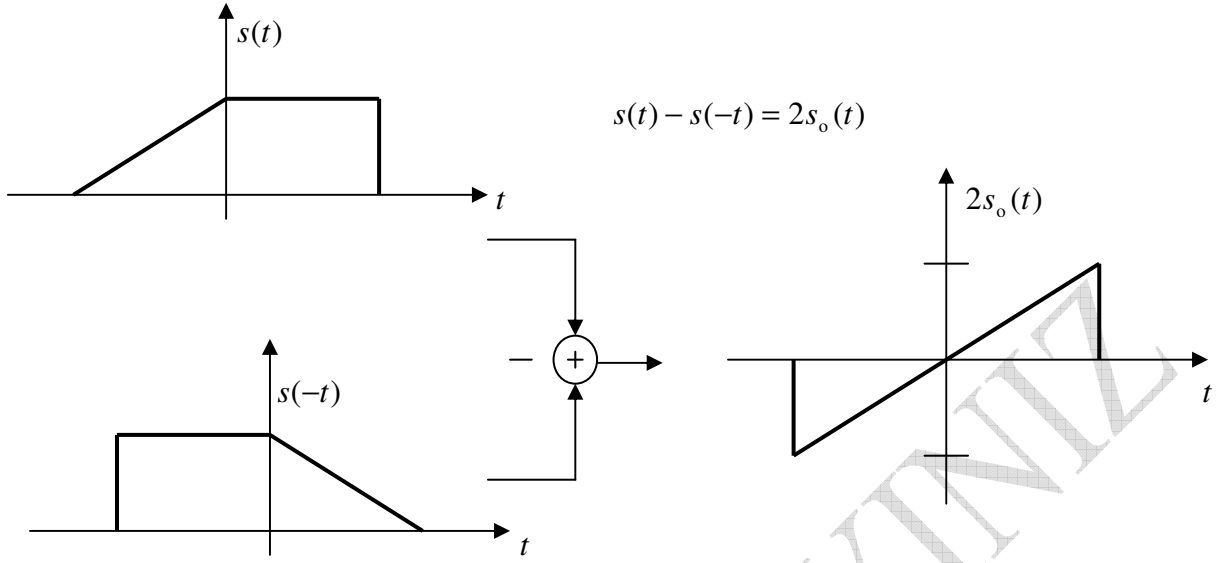
Çözüm

$$a) 2s_e(t) = \{s(t) + s(-t)\} = \{[s_e(t) + s_o(t)] + [s_e(t) - s_o(t)]\}$$



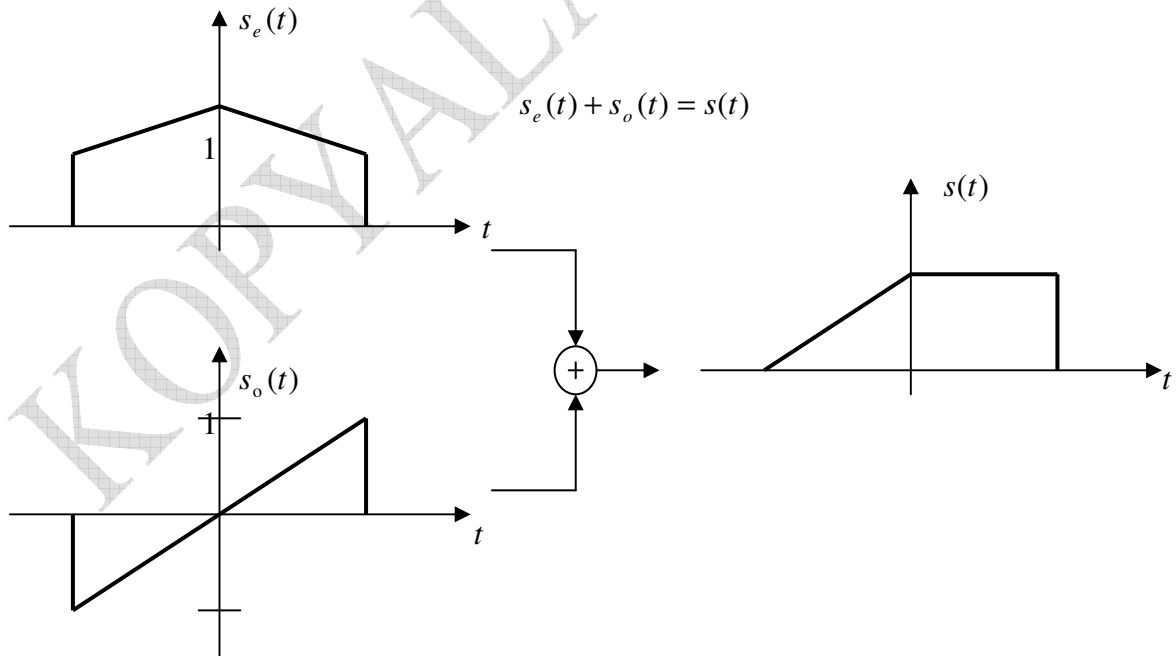
Şekil 46 $s(t) + s(-t) = 2s_e(t)$ işareti

b) $2s_o(t) = \{s(t) - s(-t)\} = \{[s_e(t) + s_o(t)] - [s_e(t) - s_o(t)]\}$



Şekil 47 $s(t) - s(-t) = 2s_o(t)$ işareti

c) $s_e(t) + s_o(t) = [\frac{1}{2}\{s(t) + s(-t)\}] + [\frac{1}{2}\{s(t) - s(-t)\}] = s(t)$



Şekil 48 $s_e(t) + s_o(t) = s(t)$ İşareti

Çift ve Tek Fonksiyonların İntegrasyonu

Eğer verilen $f(t)$ bir çift fonksiyonsa,

$$1) \int_{-a}^0 f(t)dt = \int_0^a f(t)dt$$

$$2) \int_{-a}^a f(t)dt = 2 \int_0^a f(t)dt$$

Eğer verilen $f(t)$ bir tek fonksiyonsa,

$$1) \int_{-a}^a f(t)dt = 0$$

özdeşlikleri mevcuttur. Ayrıca tek ve çift fonksiyonlar arasında

$$\text{tek} \times \text{çift} = \text{tek} \quad (t^3 \times t^2 = t^5) \rightarrow x \cos x$$

$$\text{tek} \times \text{tek} = \text{çift} \quad (t^3 \times t^5 = t^8) \rightarrow x \sin x$$

Örnek

$s(t) = \cos 2\pi t + \sin 2\pi t \cos 2\pi t$ işaretinin tek ve çift kısımlarını bulun.

Çözüm

Verilen işaretin çift olabilmesi için, $s(t) = s(-t)$ olması gerekeceğinden,

$$s_e(t) = \cos 2\pi t = \cos(-2\pi t)$$

Tek olması içinde, $-x(t) = x(-t)$ olacağından

$$s_o(t) = -\sin 2\pi t = \sin(-2\pi t)$$

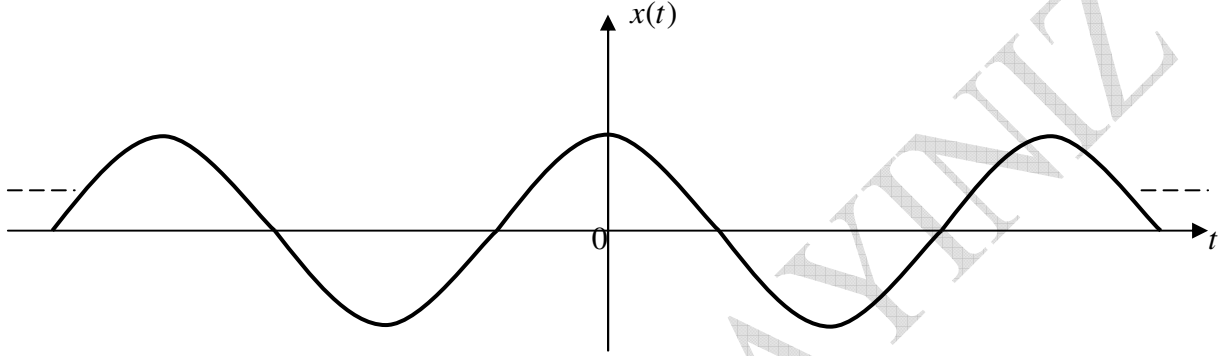
buna göre, $s(t) = s_e(t) + s_o(t)$ ise,

$$s_e(t) = \cos 2\pi t$$

$$s_o(t) = \sin 2\pi t \cos 2\pi t$$

10 Sinusoidal işaretler

Sinusoidal işaret, sabit genlik, sabit frekans ve sabit fazlı sonsuz uzunlukta (sonsuz devam eden) bir işarettir. Bu yüzden $A\cos(\omega t + \theta)$ veya $A\sin(\omega t + \theta)$ tipindeki 2π periodlu işaretler, sinusoidal işaretlerin tipik fonksiyonlarını oluşturmaktadır. Dikkat edilirse verilen fonksiyonlar, sabit genlikli, sabit frekanslı ve sabit fazlı olup, $(-\infty, \infty)$ arasında sonsuz uzunluktaki işaretler olarak, sinusoidal işaret tanımını sağlamaktadırlar. Bu özellikleri sağlamayan işaretler, sinusoidal işaret olarak kabul edilmeyecektir. Bu anlamda periodik özellikteki trigonometrik fonksiyonlar, tipik sinusoidal işaretlerdir.

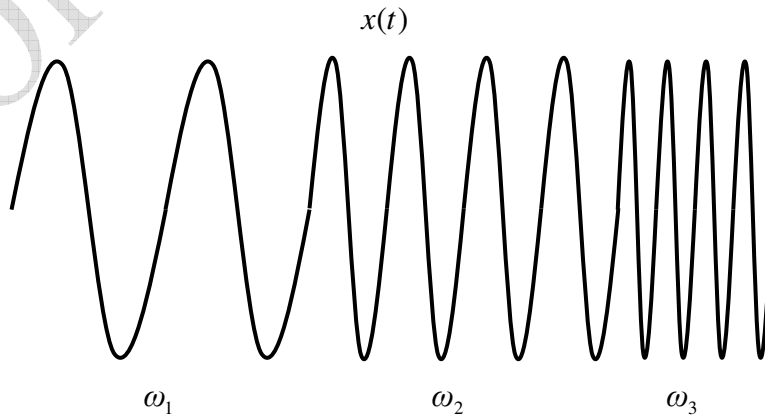


Şekil 49 Periyodik işaretler : sinusoidler

Sinusoidal Olmayan İşaretler : Değişken Genlik, Frekans Ve Fazlı Sinusoidal İşaretler

Sinusoidal olmayan işaretler olarak, sinusoidal işaretlerin klasik tanımından farklı olarak, değişken genlik, değişken frekans ve değişken fazlı özelliği sahip sinusoidal işaretler vurgulanmaktadır. Bu yüzden bunların matematiksel modellerini, klasik sinusoidal işaretler gibi yazmak mümkün değildir. Örnek olarak aşağıdaki gibi bir işaret, klasik sinusoid işaret yapısından farklı bir işarettir.

$$x(t) = \sin\left(\omega t + \frac{k}{2}t^2\right)$$



Şekil 50 ChirpDurağan olmayan işaret

Chirp (kuş sesi, ötüşü) olarak anılan $x(t)$ işareti görüldüğü gibi farklı anlarda farklı frekanslara sahip, çok frekanslı bir sinusoidal işarettir. Bu işaretin klasik sinusoid den farklı olarak, frekansının veya fazının, veya en genel halde $x(t) = \sin \theta(t)$ olarak düşünülebilecek işaret için $\theta(t)$ açı (anlık faz) fonksiyonunun zamanla değişir özellikte olduğu görülmektedir. Bu anlamda tipik sinusoidal olmayan işaretler olarak genlik, frekans ve faz modülasyonlu işaretler (dalgalar) örnek olarak gösterilebilir.

$$x_{GM}(t) = A_C \cos \omega_C t + \frac{\mu}{2} [\cos(\omega_C + \omega_m)t + \cos(\omega_C - \omega_m)t] \quad \text{genlik modülasyonlu işaret}$$

$$x_{FM}(t) = A \cos \theta(t) = A \cos \left[\omega_C t + k_f \int_{-\infty}^t m(\tau) d\tau \right] \quad \text{frekans modülasyonlu dalga}$$

$$x_{PM}(t) = A \cos \theta(t) = A \cos(\omega_C t + k_p m(t)) \quad \text{faz modülasyonlu dalga}$$

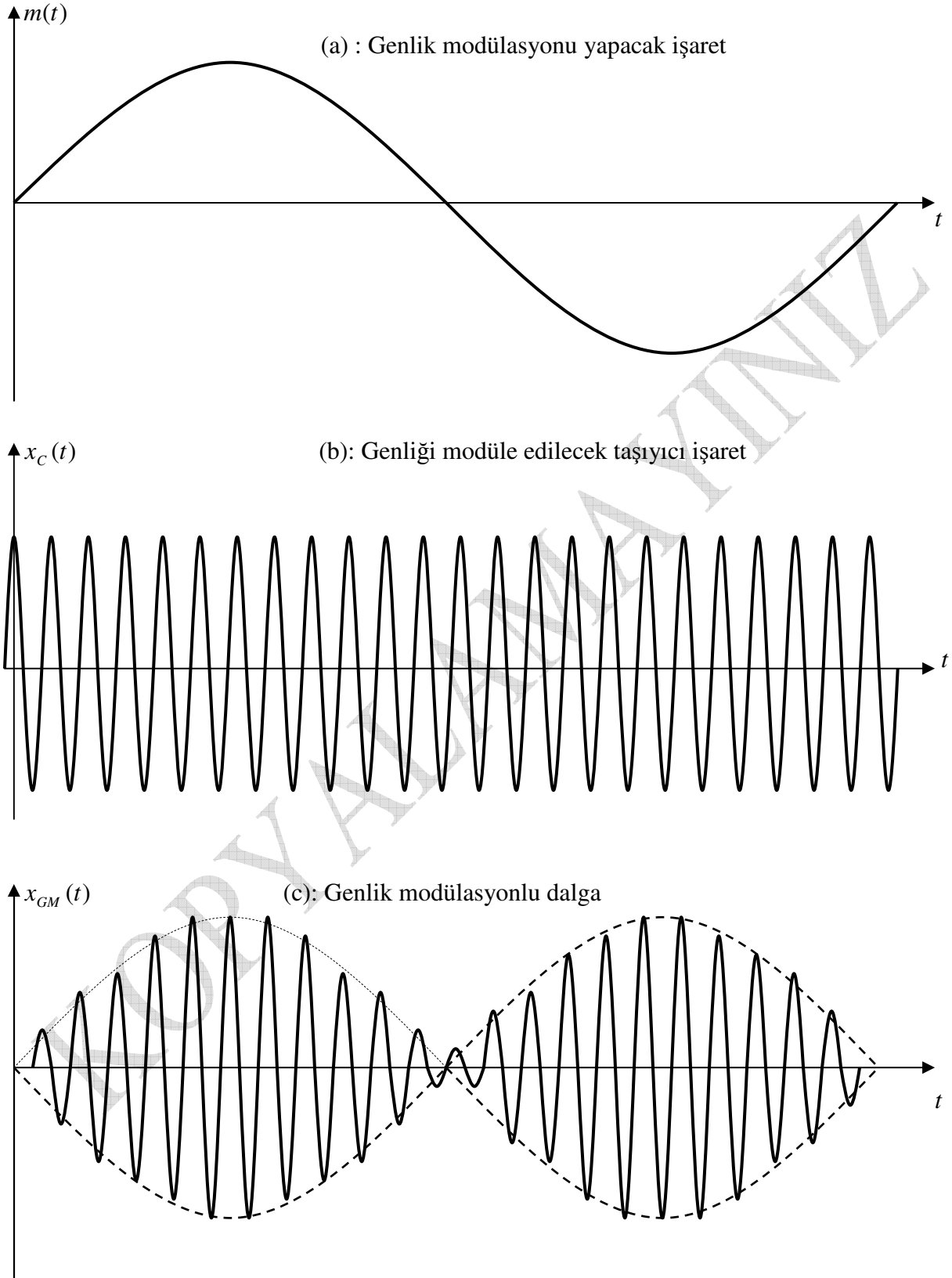
Tablo2.1 Değişken genlikli, frekanslı ve fazlı sinusoidal işaretler

referans alınabilecek klasik $A \cos(\omega t + \theta)$ sinusoid işarete göre, verilen her üç dalganın da genlikleri, frekansları ve dolaylı olarak da fazları zamanla değiştiğinden, sinusoidal işaretler değildirler. Bu yüzden bu tip işaretlerde zamanla değişen üç parametrenin analizi önem kazanmaktadır. Daha önce ele alındığı gibi bir sinusoidal işaret

$$x(t) = E_C \cos(\omega_C t + \theta)$$

formunda sonsuz aralıkta (periodik) sabit E_C genlikli, sabit ω_C frekanslı ve sabit θ fazıyla gösteriliyordu. Değişken genlik, değişken frekans veya değişken faz, sinusoidal işaretler için alışlageldik bir durum değildi. Yani bu üç parametrenin zamanla değişmezliği sinusoidal işaretlerin tipik özellikleri olarak bilinmektedir. Bu değişmezliğe ilişkin bağıntı $x(t) = E_C \cos(\omega_C t + \theta)$ ile ifade edilmekteydi. Şimdi klasik formattan farklı olarak genlik, frekans ve faz parametrelerinin zamanla değişir özellikteki durumları ele alınmak istenmektedir. İnceleme ve analizleri, klasik sinusoidlere göre farklı olan sinusoid olmayan işaretleri, diğer bir deyişle bu üç parametresi zamanla değişen sinusoidler grafik olarak aşağıda gösterilmişlerdir.

1. Genlik Modülasyonunun Grafik Gösterimi



Şekil 51 Genlik modülasyonu

Şekil (a) daki gönderilmek istenen (modülasyon yapacak) sinusoidal işaret tipik sabit genlikli, sabit ama düşük frekanslı ve sabit fazdaki bir sinusoidal işaret olarak görünmektedir. Şekil (b) daki yüksek frekanslı taşıyıcı işaret ise, (a) daki sinusoidal işaretin genliğine bağlı olarak genliği değiştirilecek işarettir. Değişimin yani modülasyonun öncesinde görüldüğü gibi bu işarete sabit genlikli, frekanslı ve fazlı başka bir sinusoidal işarettir. (a) ve (b) nin genlik modülasyonu sonucu (c) de, görülebileceği gibi genliği zamanla değişen bir işaret (dalga) elde edilmiştir. Bu kez sabit frekanslı ve fazlı ama değişken genlikli bir sinusoidal işaret söz konusudur. Dolayısıyla asıl karşılaştırılması gereken işaretler (b) ve (c) işaretleridir. Çünkü (b) de genliği sabit olan yüksek frekanslı sinusoidal işaretin (c) de genliği zamanla değişim göstermektedir. Diğer bir deyişle, (c) ye bakarak hala (b) daki sabit genlikli işareti artık göremiyoruz. Bu yüzden (c) daki işaret tipik sinusoidal olmayan bir işarettir. Bunun yerine genliği zamanla değişen sinusoidal işaret tanımı kullanılabilir. Haberleşme açısından, böyle bir işaret genlik modülasyonlu işaret (dalga) olarak anılmaktadır.

Buradan genlik modülasyonlu işarete (c) bakılırsa, zamana bağlı genliğindeki değişikliğin (a) daki $m(t)$ işaretinin genliğine bağlı olarak değiştiği görülmektedir. Buna göre (a) daki şeklin genliği pozitif tepe değerine ulaştıncı, (c) den görülebileceği gibi burada da taşıyıcının genliği aynı oranda en yüksek değerine ulaşmaktadır. Pozitif tepe noktasından sonra $m(t)$ işaretinin genliği azalınca, GM işaretinde genliği azalmaktadır. Modülasyon yapan işaretin negatif yöndeki genliği en küçük değerine düşünce, GM işaretinin de genliği en düşük seviyesindedir. Negatif tepe noktasından sonra $m(t)$ işaretinin genliği pozitif yönde artmaya başladığından, buna uygun olarak (c) daki GM işaretinde genliği tekrar yükselmeye devam etmektedir. Aslında (c) daki genlik modülasyonlu $x_{GM}(t)$ işareti, tahmin edileceği gibi, genliği zamanla değişime uğrayan (b) daki yüksek frekanslı taşıyıcı işarettir. Bu yüksek frekanslı işaretin genliği (a) daki sinusoidal işaretin genliğine bağlı olarak değişerek (c) daki genlik modülasyonlu işaret elde edilmiştir.

Genliği zamanla değişmiş olarak elde edilen $x_{GM}(t)$ işaretinin üzerinde orijinal $m(t)$ işaretini gösteren tepe noktalarının dağılımından oluşan kesik çizgili işarete **zarf** (envelope) denilmektedir. Bu anlamda bu işaret zarf olarak $m(t)$ olup bu işaretin tüm frekanslarını içermektedir. Vurgulandığı gibi, $x_{GM}(t)$ işarete bakıldığında, bu işaretin tepe noktalarından itibaren orijinal $m(t)$ işarete özdeş olduğu görülmektedir. Eğer (c) daki genlik modülasyonlu $x_{GM}(t)$ işareti incelenirse, $m(t)$ düşük frekanslı mesaj ve $x_c(t)$ ise yüksek frekanslı (sabit genlik, frekans ve fazlı) taşıyıcı olmak üzere, bu iki işaretin çarpımından (konvülasyonundan) elde edilir.

$$x_c(t) = A_c \cos \omega_c t$$

$$x_{GM}(t) = m(t) \times x_c(t) = A_c [1 + k_a m(t)] \cos \omega_c t$$

k_a genlik modülasyon sabitidir. Eğer $m(t) = A_m \cos \omega_m t$ olarak alınırsa buradan $x_{GM}(t)$ daha açık olarak

$$x_{GM}(t) = A_c [1 + k_a m(t)] \cos \omega_c t = A_c [1 + A_m \cos \omega_m t] \cos \omega_c t = A_c \cos \omega_c t + A_c A_m \cos \omega_m t \cos \omega_c t$$

$$\mu = A_c A_m$$

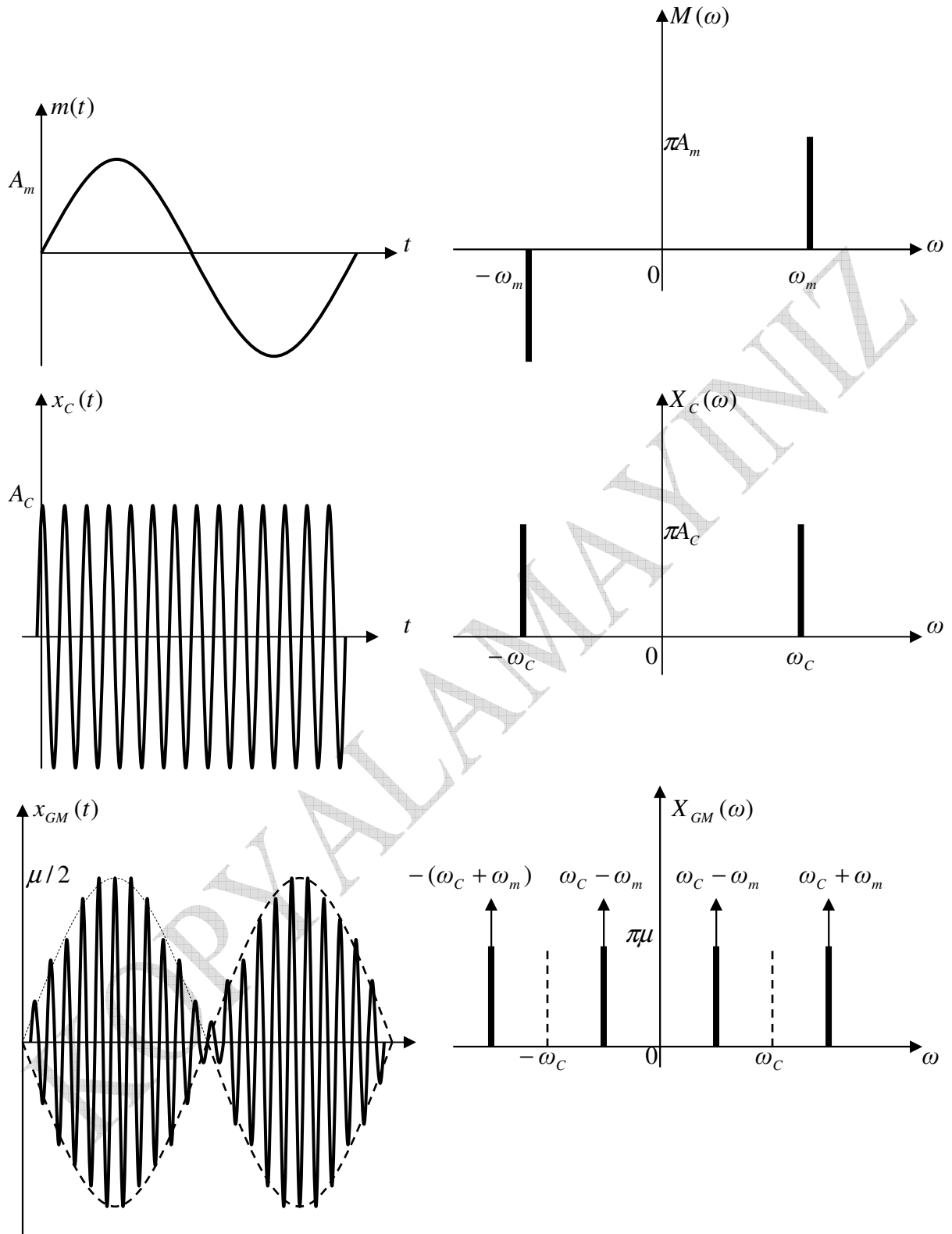
$$x_{GM}(t) = A_C \cos \omega_C t + \mu \cos \omega_m t \cos \omega_C t$$

$$\cos \omega_m t \cos \omega_C t = \frac{1}{2} [\cos(\omega_C + \omega_m)t + \cos(\omega_C - \omega_m)t]$$

$$x_{GM}(t) = A_C \cos \omega_C t + \mu \cos \omega_m t \cos \omega_C t = A_C \cos \omega_C t + \mu \frac{1}{2} [\cos(\omega_C + \omega_m)t + \cos(\omega_C - \omega_m)t]$$

$$x_{GM}(t) = A_C \cos \omega_C t + \frac{\mu}{2} [\cos(\omega_C + \omega_m)t + \cos(\omega_C - \omega_m)t]$$

Bu şekilde oluşan genlik modülasyonunda taşıyıcılı çift yan bant modülasyonun (double side band modulation, DSBM) söz konusu olduğunu görmekteyiz. Ayrıca taşıyıcısı olmayan (bastırılmış) tip genlik modülasyonunda mevcuttur. Taşıyıcılı genlik modülasyonuna ilişkin genlik modülasyonunun zaman ve frekans uzayı görünümleri aşağıda verilmiştir.



Şekil 52 Genlik modülasyonu zaman ve frekans domeni

İlgili spektrumların elde edilmesinde gerek $m(t)$ gerekse $x_c(t)$ işaretlerinin frekans domenlerinin

$$F[x(t) = \cos \omega_0 t] = \pi[\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)] = X(\omega)$$

biçimindeki genel Fourier transformasyonların göz önüne alınmıştır. Oluşan $x_{GM}(t)$ genlik modülasyonlu işaretin $\omega_c - \omega_m$ ve simetrik $\omega_c + \omega_m$ biçiminde çift yan bantları olduğu görülmektedir. Buna göre genlik modülasyonlu bir işaretin bant genişliği üst ve alt bantlar arasındaki farkın hesaplanmasından elde edilebilir.

$$B_{GM} = (\omega_c + \omega_m) - (\omega_c - \omega_m) = 2\omega_m$$

Buna göre maksimum frekansı ω_m olan bir $m(t)$ işaretinin genlik modülasyonundaki bant genişliği kendi frekansının iki kadardır ($B_{GM} = 2\omega_m$). Bunun anlamı aynı zamanda böyle bir işareti iletebilmek için $B_{GM} = 2\omega_m$ bant genişliğine ihtiyaç duyulduğu şeklindedir.

Yapılan genlik modülasyonun derecesini ölçmek amacıyla kullanılan m modülasyon indeksi tanımlanmaktadır.

$$m = \frac{A_m}{A_c} \quad \text{modülasyon indeksi}$$

A_m , $m(t)$ işaretinin A_c ise, $x_c(t)$ taşıyıcı işaretinin tepe genlik değerleridir. Modülasyon indeksi

$$0 \leq m \leq 1$$

arasında değerlendirilir. Verimli bir GM için index değerinin “1” e yakın olması beklenir. Buna göre genlik modülasyonu ile, klasik sinusoid tanımından farklı olarak, frekans ve fazı sabit ama genliği zamanla değişen sinusoidal bir işaretin söz konusu olduğunu görmekteyiz.

Genlik modülasyonlu işaret üzerine : Bu işaret türünde bilinmesi gereken, böyle bir işaretin ancak iki işaretin (düşük ve yüksek frekanslı işaretlerin) bir şekilde işleme (genlik modülasyon) tabii turulmasıyla elde edilebildiğidir. Bu yüzden işaret olarak değil birleşik işaret anlamında dalga olarak anılmaktadırlar. Diğer bir deyişle, natural olarak tek bir işareten elde edilebilecek bir işaret değildir. Bu tip modülasyonda, genliğin zamanla değiştirilmesi, frekansın sabit tutulmasının avantaj ve dezavantajları vardır. Basitlik açısından genlik modülasyonu en basit modülasyon biçimidir. İletilecek verinin uzun mesafeli ve içerik açısından kritik ve güvenli olması çok gerekmeyen durumlarda başvurulacak bir modülasyon biçimidir. Ancak öte yandan, bir işaretin gürültü gibi dış etkenlerden en çok etkilenen parametresinin genlik olduğu düşünülürse, yapılacak genlik modülasyonu risk taşıyabilir. Bu nedenle veri içeriği ve güvenliğinin ön planda olduğu durumlarda, genlik modülasyonu yerine, genliğin sabit ama frekansın değiştirildiği frekans modülasyonu (veya faz modülasyonu) tercih edilir. Bunun dışında, genlik modülasyonlu işaretin, iletilecek iletişim hattının band genişliğinin, yalnızca gönderilecek işaretin frekansının iki katı kadar olması da, büyük band gerektirmediği için avantaj olarak kabul edilir. Aşağıda göreceğimiz gibi, bu değer frekans modülasyonlu işaretler için çok daha yüksek olup, hatta teorik anlamda sonsuz band gerektirmektedir.

Örnek

Modüle edici işaret $m(t) = 9 \cos 10000\pi t$ ve taşıyıcı frekansı $x_c(t) = 10 \cos 200\pi Kt$ olan bir GM modülatörde

- Alt ve üst yan bantların frekans sınırlarını bulun.
- Eğer $9 \cos 6000\pi t$ modüle edici işaretle genlik modülasyonu yapılıyorsa, alt ve üst yan bantları bulun
- Bant genişliğini bulun.
- Modülasyon indeksini bulun.
- Çıkış frekans tayfını (spektrumunu) çiziniz.

Çözüm

$$x_{GM}(t) = A_c \cos \omega_c t + \frac{\mu}{2} [\cos(\omega_c + \omega_m)t + \cos(\omega_c - \omega_m)t]$$

Bağıntısı gereği modüle edici işaret

$$m(t) = 9 \cos 10000\pi t = 9 \cos 2\pi(5000)t$$
$$x_c(t) = 10 \cos 200\pi Kt = 10 \cos 2\pi(100 K)t$$

$$\text{Alt yan bant} = f_c - f_m = 100 - 5 = 95 \text{ kHz}$$

$$\text{Üst yan bant} = f_c + f_m = 100 + 5 = 105 \text{ kHz}$$

Buna göre üst yan bandı (USB) 105 kHz ve alt yan bandı (LSB) 95 kHz olan bir sistem söz konusudur. Diğer bir deyişle bu sistemde ancak 95-105 kHz bantları arasında GM (haberleşmesi) yapılabilir.

b) $m(t) = 9 \cos 6000\pi t$ işaretle GM yapılıyorsa, alt ve üst yan bantlar için

$$m(t) = 9 \cos 6000\pi t = 9 \cos 2\pi(3000)t$$

$$\text{Alt yan bant} = f_c - f_m = 100 - 3 = 97 \text{ kHz}$$

$$\text{Üst yan bant} = f_c + f_m = 100 + 3 = 103 \text{ kHz}$$

Bu duruma göre alt yan frekansı (LSF) 97 kHz ve üst yan frekansı (USF) 103 kHz olan bir işaret için GM yapılmak istenmektedir. Bu duruma göre bulunan bu değerler 97-103 kHz (bant genişliği 6 kHz), 95-105 kHz ana sistem bant genişliği arasında olduğundan, 97-103 kHz GM sağlıklı yapılabilir.

c) Bant genişliği olarak kastedilen 95-105 kHz GM sisteminin bant genişliğidir.

$$B = 2f_m = 2 \times 5 = 10 \text{ kHz}$$

Buna göre böyle bir sistemden 97-103 kHz işaret (bant genişliği 6 kHz) iletilir.

d) Modülasyon indeksi

$$m(t) = 9 \cos 2\pi(3000) t$$

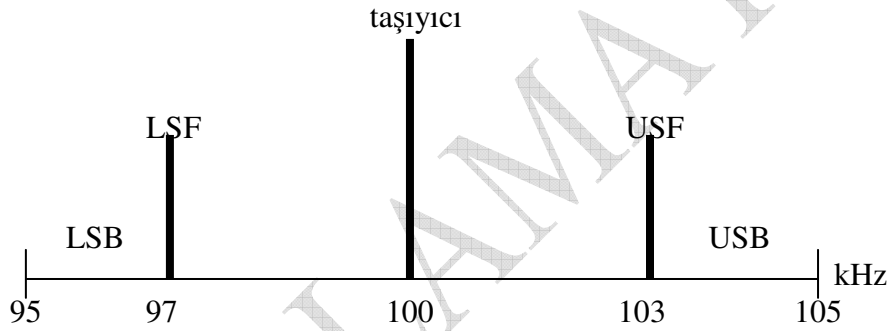
$$x_c(t) = 10 \cos 2\pi(100 K)t$$

$$m = \frac{A_m}{A_c} = \frac{9}{10} = 0.9$$

$$0 \leq m \leq 1$$

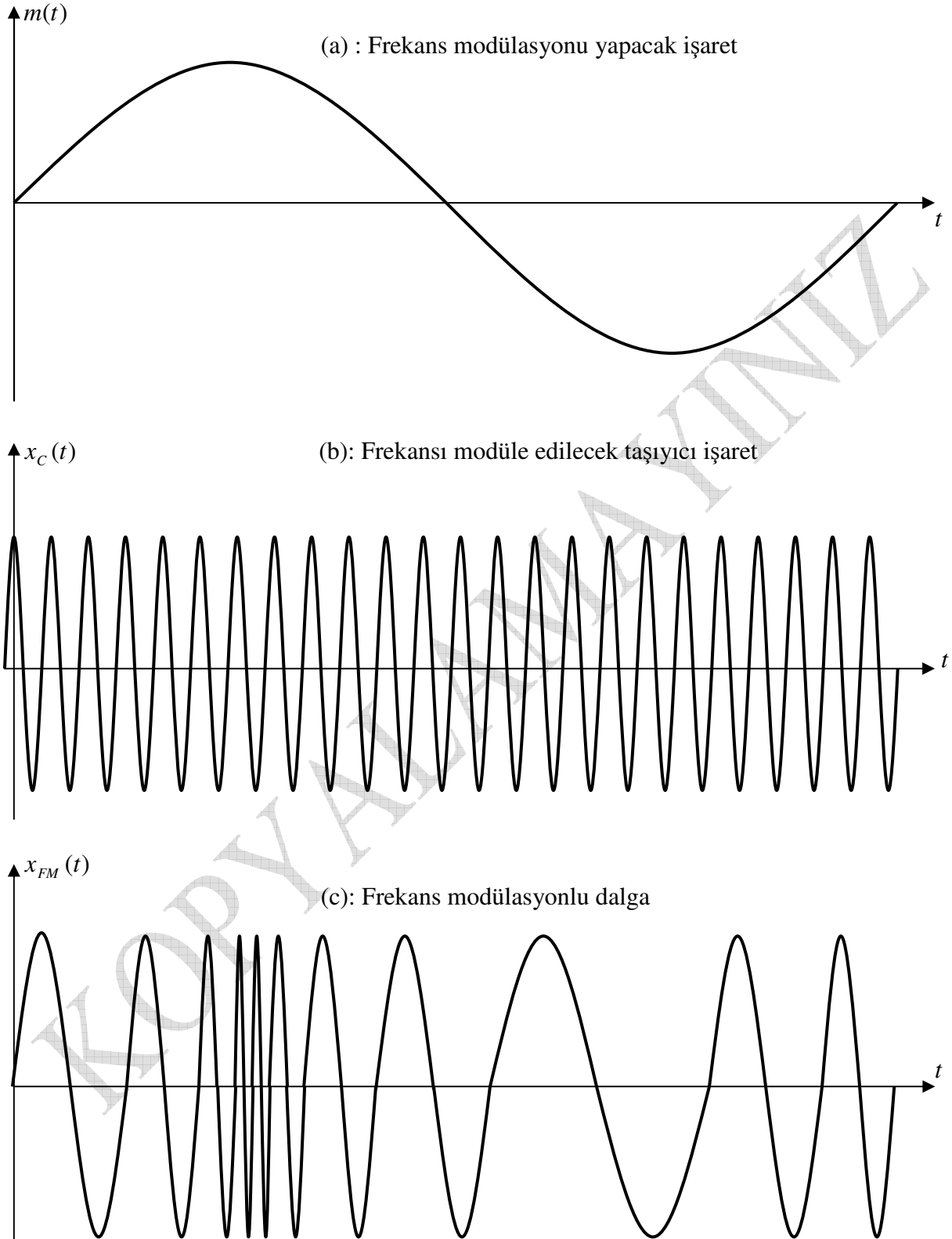
olduğundan, oldukça sağlıklı bir modülasyon söz konusudur.

e) Elde edilenlerin ışığında $m(t) = 9 \cos 2\pi(3000) t$ ile modüle edilen $x_c(t) = 10 \cos 2\pi(100 K)t$ işaretinin genliğinin zamanla değişimini gösteren, genlik modülasyonlu $x_{GM}(t) = m(t) \times x_c(t)$ dalganın, spektrumu ($X_{GM}(\omega)$) yani frekans tayfı aşağıdaki gibi olacaktır.



Şekil 53 10 kHz Band genişlikli GM spektrumu (tayfı)

2. Frekans Modülasyonunun Grafik Gösterimi



Şekil 54 Frekans modülasyonu

Şekil (a) daki gönderilmek istenen (modülasyon yapacak) sinusoidal işaret tipik sabit genlikli, sabit ama düşük frekanslı ve sabit fazdaki bir sinusoidal işaret olarak görünmektedir. Şekil (b) daki yüksek frekanslı taşıyıcı işaret ise, (a) daki sinusoidal işaretin genliğine bağlı olarak frekansı değiştirilecek işarettir. Görüldüğü gibi bu işarete sabit genlikli, frekanslı ve fazlı başka bir sinusoidal işarettir. (a) ve (b) nin frekans modülasyonu sonucu (c) de, görülebileceği gibi frekansı zamanla değişen bir işaret (dalga) elde edilmiştir. Şekil (c) ye göre bu kez sabit genlikli ama değişken frekanslı bir sinusoidal işaret söz konusudur.

Dolayısıyla asıl karşılaştırılması gereken işaretler yine (b) ve (c) işaretleridir. Çünkü (b) de genliği ve frekansı sabit olan yüksek frekanslı sinusoidal işaretin (c) de genliği sabit tutulup yalnızca frekansı (dolayısıyla fazı da) zamanla değişim göstermektedir. Diğer bir deyişle, (c) ye bakarak hala (b) daki sabit frekanslı işareti artık göremiyoruz. Bu yüzden (c) daki işaret tipik sinusoidal olmayan bir işarettir. Bunun yerine frekansı zamanla değişen sinusoidal işaret tanımı kullanılabilir. Haberleşme açısından, böyle bir işaret frekans modülasyonlu işaret (dalga) olarak anılmaktadır.

Frekans modülasyonlu işarete (c) bakılırsa, frekansındaki değişikliğin (a) daki işaretin genliğine bağlı olarak değiştiği görülmektedir. Buna göre (a) daki şeklin genliği pozitif tepe değerine ulaşıncı, (c) den görülebileceği gibi frekansta en yüksek değerine ulaşmaktadır. Pozitif tepe noktasından sonra işaretin genliği azalınca, FM işaretinde frekansı azalmaktadır. Modülasyon yapan işaretin negatif yöndeki genliği en küçük değerine düşünce, FM işaretinin de frekansı en düşük seviyesindedir. Negatif tepe noktasından sonra işaretin genliği pozitif yönde artmaya başladığından, buna uygun olarak (c) daki FM işaretinde frekansı tekrar yükselmeye devam etmektedir. Aslında (c) daki frekans modülasyonlu $x_{FM}(t)$ işareti, tahmin edileceği gibi, frekansı değişime uğrayan (b) daki yüksek frekanslı taşıyıcı işarettir. Bu yüksek frekanslı işaretin frekansı (a) daki sinusoidal işaretin genliğine bağlı olarak değişerek (c) daki frekans modülasyonlu işaret elde edilmiştir. Eğer (c) daki frekans modülasyonlu $x_{FM}(t)$ işareti incelenirse,

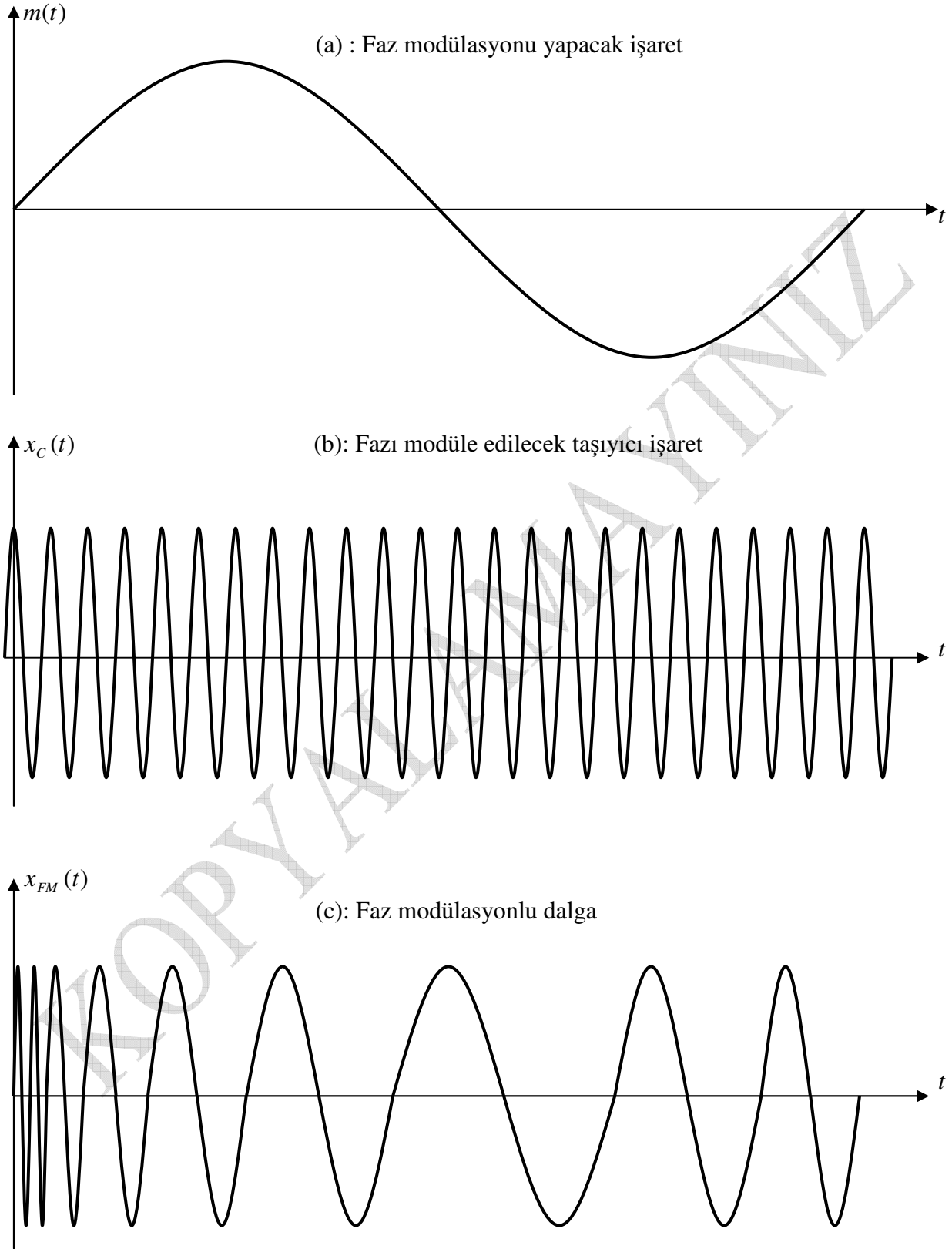
$$\theta(t) = \omega_c t + k_f \psi(t) = \omega_c t + k_f \int_{-\infty}^t m(\tau) d\tau$$

bağıntısına uygun olarak ve aynı zamanda

$$\omega_i(t) = \omega_c + k_f m(t)$$

biçimindeki anlık frekanstan görülebileceği gibi, frekans modülasyonlu işaretin frekansı, (a) daki $m(t)$ işaretinin genliğine bağlı olarak değişmektedir. Eğer $\theta(t)$ aç fonksiyonu göz önüne alınırsa, modülasyon dalgasının frekansının, $m(t)$ işaretinin integraliyle lineer değiştiği de düşünülebilir. Buna göre (a) daki işaretin genliğinin düşük olduğu aralıklarda frekans düşük, genliğin yüksek olduğu noktalarda ise frekansın yüksek olduğu görülmektedir. Bu şekilde $x_{FM}(t)$ işaretinin birden fazla frekanslı sinusoidal işareten oluştuğu düşünülebilir. Şekil (a) ve (b) daki tek frekanslı (monochromatic) sinusoidal işaretlerin tersine, (c) de çok frekanslı (komponentli) bir yapı söz konusudur. Birden fazla frekans bileşenini içeren $x_{FM}(t)$ işaretinin, frekans bileşenleri **anlık frekans** (instantaneous frequency) yaklaşımıyla tespit edilebilir.

3. Faz Modülasyonunun Grafik Gösterimi



Şekil 55 Faz modülasyonu

Şekil (a) daki gönderilmek istenen (modülasyon yapacak) sinusoidal işaret tipik sabit genlikli, sabit ama düşük frekanslı ve sabit fazdaki bir sinusoidal işaret olarak görünmektedir. Şekil (b) daki yüksek frekanslı taşıyıcı işaret ise, (a) daki sinusoidal işaretin genliğine bağlı olarak fazı (dolayısıyla frekansı) değiştirilecek işarettir. Görüldüğü gibi bu işarete sabit genlikli, frekanslı ve fazlı başka bir sinusoidal işarettir. (a) ve (b) nin faz modülasyonu sonucu (c) de, görülebileceği gibi fazı zamanla değişen bir işaret (dalga) elde edilmiştir. Bu kez sabit genlikli ama değişken fazlı bir sinusoidal işaret söz konusudur.

Dolayısıyla asıl karşılaştırılması gereken işaretler yine (b) ve (c) işaretleridir. Çünkü (b) de genliği ve fazı (dolayısıyla frekansı) sabit olan yüksek frekanslı sinusoidal işaretin (c) de genliği sabit tutulup yalnızca fazı (dolayısıyla frekansı) zamanla değişim göstermektedir. Diğer bir deyişle, (c) ye bakarak hala (b) daki sabit fazlı işareti artık göremiyoruz. Bu yüzden (c) daki işaret tipik sinusoidal olmayan bir işarettir. Bunun yerine fazı zamanla değişen sinusoidal işaret tanımı kullanılabilir. Haberleşme açısından, böyle bir işaret faz modülasyonlu işaret (dalga) olarak anılmaktadır.

Faz modülasyonlu işarete (c) bakılırsa, fazdaki değişikliğin (a) daki işaretin genliğine bağlı olarak değiştiği görülmektedir. Buna göre (a) daki şeklin genliği pozitif tepe değerine ulaşınca, (c) den görülebileceği gibi fazı da en yüksek (frekansı en düşük) değerine ulaşmaktadır. Pozitif tepe noktasından sonra işaretin genliği azalınca, PM işaretinde fazı azalmaktadır (frekansı iyice düşmektedir). Modülasyon yapan işaretin negatif yöndeki genliği en küçük değerine düşünce, FM işaretinin de fazı en büyük (frekansı en düşük) seviyesindedir. Negatif tepe noktasından sonra işaretin genliği pozitif yönde artmaya başladığından, buna uygun olarak (c) daki PM işaretinde fazı tekrar azalmaya (frekansı yükselmeye) devam etmektedir. Aslında (c) daki faz modülasyonlu $x_{PM}(t)$ işareti, tahmin edileceği gibi, fazı değişime uğrayan (b) daki yüksek frekanslı taşıyıcı işarettir. Bu yüksek ama sabit frekanslı işaretin sabit görünen fazı (a) daki sinusoidal işaretin genliğine bağlı olarak değişerek (c) daki faz modülasyonlu işaret elde edilmiştir. Eğer (c) daki faz modülasyonlu $x_{PM}(t)$ işareti incelenirse,

$$\theta(t) = \omega_c t + k\psi(t) = \omega_c t + k_p m(t)$$

bağıntısına uygun olarak ve aynı zamanda

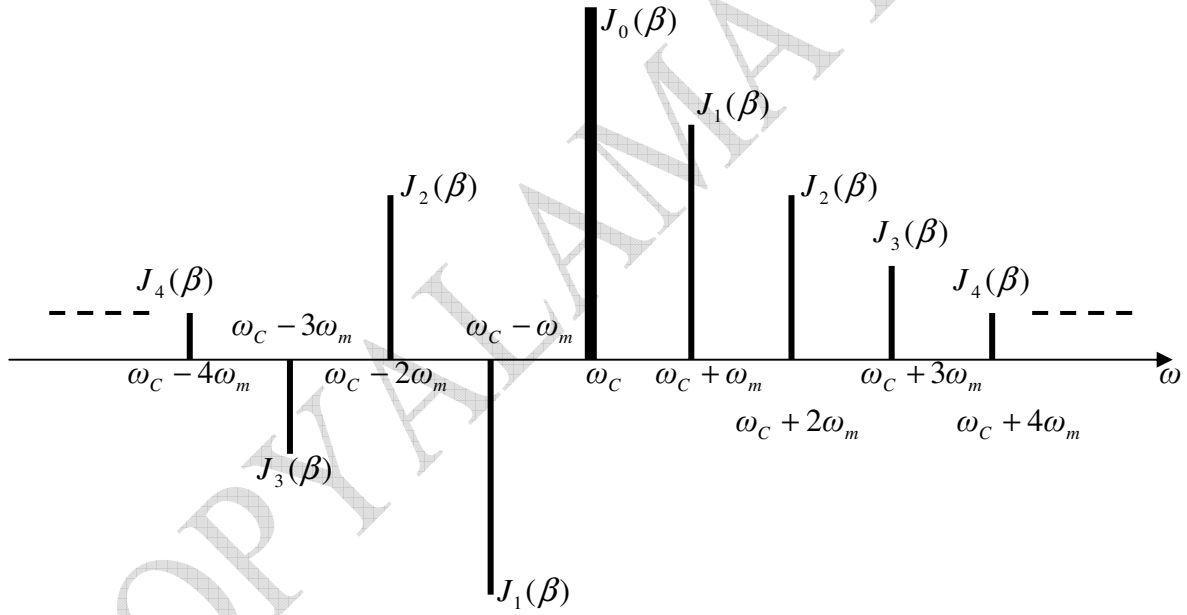
$$\omega_i(t) = \omega_c + k_p \dot{m}(t)$$

biçimindeki anlık frekanstan görülebileceği gibi, faz modülasyonlu işaretin frekansı, (a) daki $m(t)$ işaretinin genliğindeki değişime ($\dot{m}(t)$)e bağlı olarak değişmektedir. Eğer $\theta(t)$ açısı fonksiyonu göz önüne alınırsa, modülasyon dalgasının fazının, $m(t)$ işaretinin türeviyle lineer değiştiği düşünülebilir. Buna göre (a) daki işaretin genlik değişiminin düşük olduğu aralıklarda faz büyük (frekans düşük), genlik değişiminin yüksek olduğu noktalarda ise fazın düşük (frekansın yüksek) olduğu görülmektedir. Bu şekilde $x_{PM}(t)$ işaretinin birden fazla frekanslı sinusoidal işareten oluştuğu düşünülebilir. Bunun neticesinde $x_{PM}(t)$ işaretinin de $x_{FM}(t)$ gibi frekansı zamanla değişen çok frekanslı bir sinusoid olduğu görülmektedir. Şekil (a) ve (b) daki tek frekanslı (monochromatic) sinusoidal işaretlerin tersine, (c) de çok frekanslı (komponentli) bir yapı söz konusudur. Birden fazla frekans bileşenini içeren $x_{PM}(t)$ işaretinin, frekans bileşenleri $x_{FM}(t)$ de olduğu gibi **anlık frekans** (instantaneous frequency) yaklaşımıyla tespit edilebilir.

Ele alınan üç işaret içersinde yer alan frekans ve faz modülasyonlu sinusoidal olmayan işaretlerin analizi için **anlık frekans** (instantaneous frequency) olarak bilinen kavramdan yararlanılarak, işareti oluşturan farklı frekanslar belirlenmeye çalışılır.

Frekans Spektrumu Üzerine

Genlik modülasyonu frekans ve fazın sabit tutulduğu yalnızca genliğin zamanla değişimi üzerine kurulu bir modülasyon biçimi olduğundan basit yapıdadır. Buna karşın bir işaretin gürültü gibi dış etkenlerden en çok etkilenen parametresinin genlik oluşuda bu modülasyon biçiminin handikapıdır. Buna karşın B band genişliğindeki bir $x(t)$ işaretinin iletimi için, iki kat $(2B)$ band genişliğine ihtiyaç duyulduğunu bilmekteyiz. Öte yandan frekans modülasyonunda bu kez genliğin sabit tutularak frekansın zamanla değiştirildiğini görmekteyiz. Bu yolla işaretin dış etkenlere maruz kalabilecek genliğinin sabit tutulması önemlidir. Ancak frekans modülasyonlu işaretin iletimi için gereken band genişliği maalesef işaretin band genişliğinin iki katı kadar değildir, daha da fazladır. Bu açıdan bir örnek frekans spektrumu aşağıda verilmiştir.



Şekil 56 Frekans modülasyon spektrumu

Görüldüğü gibi spektrumda $x(t)$ işaretinin band genişliğinde ötesinde ekstra frekanslar söz konusudur. Yani beklenenden daha fazla frekans bileşeni söz konusudur. Bu durum doğal olarak frekans modülasyonlu işaretin band genişliğini artıracaktır. Bunu karşılamak üzere, iletim hattının band genişliğinin de büyük olması gerekecektir. Teorik anlamda frekans modülasyonlu işaretin spektrumunda sonsuz sayıda bileşen olduğu düşünülürse, band genişliği de sonsuz olacaktır. Bunu sağlayacak iletim hattının mümkün olmayışı, frekans modülasyonlu işaretlerin en önemli handikapıdır. Uygulamada Bessel fonksiyonlarıyla ifade edilebilecek frekans modülasyon spektrumunun, önem arzetmeyen frekans bileşenlerinin göz önüne alınmamasıyla daha pratik bir band genişliği belirlenebilmekte, ve haberleşme sağlanabilmektedir.

Sonuç : Üç modülasyon türündü de ortak özellik olarak mesaj işaretinin genlik değişimleri göz önüne alınmıştır. Genlik modülasyonunda, taşıyıcı işaretin genliği, frekans modülasyonunda taşıyıcı işaretin frekansı, ve nihayet faz modülasyonunda ise, taşıyıcı işaretin fazı, mesaj işaretinin genliğindeki değişimler göz önüne alınarak modülasyonlar yapılmıştır.

Frekans modülasyonlu işaret üzerine : Bu işaret türünde, genlik modülasyonlu işarete olduğu gibi ancak iki işaretin (düşük ve yüksek frekanslı işaretlerin) bir şekilde işleme (frekans modülasyon) tabii turulmasıyla elde edilebilmektedir. Bu yüzden işareten ziyade birleşik işaret anlamında dalga olarak anılmaktadırlar. Bu tip modülasyonda, yüksek frekanslı işaretin genliğinin sabit tutularak, frekansının değiştirilmesiyle, ilk olarak gürültüye maruz kalabilecek genlik değişim etkisinden uzaklaştırılmıştır. Bu açıdan genliği gürültüye daha dayanıklı bir işaret söz konusudur. Frekansın değiştirilme özelliği, hen yüksek kapasiteli hem de daha güvenli bir haberleşme sistemini gündeme getirmektedir.

Ayrıca, genlik modülasyonundaki iletilecek hattın bant genişliğinin gönderilecek işaretin iki katı olmasına rağmen, frekans modülasyonlu iletimde, yukarıda da görüldüğü gibi çok daha yüksek hatta teorik olarak sonsuz bant genişliği gerektirmesi, bu yaklaşımın handikapı olarak görünmektedir. Diğer yanda, frekans modülasyonlu işaret, içeriğinde çok sayıda frekans bileşeni içermesi açısından da önemlidir. Mevcut frekansların varlığının belirlenmesi gerekmektedir. Bu açıdan, sinusoidal olmayan (frekans modülasyonlu) işaretin hangi anda (zamanda) hangi frekansları içerdiğinin bilinmesi gerekmektedir. Bunu sağlamak üzere, anlık frekans kavramı geliştirilmiştir.

Anlık Frekans ve Sinusoidler

Anlık frekanslar, zamanla değişen çoklu frekans içeren işaretler olduğundan, klasik sinusoidlerin analizinde de yararlanır. Bu yolla, frekansı zamanla değişen işaretin hangi tek frekanslı sinusoidlerden oluştuğu tespit edilebilir.

Klasik sinusoid işaretler $\cos \omega t$ veya $\sin \omega t$ gibi işaretler, periodik, durağan ve tek frekanslı (monochromatic) işaretlerdir. İlgili bağıntılar göz önüne alındığında bu tür işaretlerin anlık frekansları sabit olup, eğer işaret

$$x(t) = A \cos(\omega_c t + \theta_0) = A \cos \theta(t)$$

gibi düşünülürse, bağıntısından $\theta(t)$ genelleştirilmiş açının, zamana göre türevinden bulunur.

$$\omega_i(t) = \frac{d\theta(t)}{dt}$$

$$2\pi f_i(t) = \frac{d\theta(t)}{dt}$$

veya

$$f_i(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d\theta(t)}{dt}$$

olarak bulunur. Buna göre eğer tek frekanslı sinusoid $\theta(t) = \omega_c t + \theta_0$ olarak düşünülürse

$$\omega_i(t) = \frac{d\theta(t)}{dt} = \frac{d}{dt}(\omega_c t + \theta_0) = \omega_c \text{ rad/sn}$$

$$f_i(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d\theta(t)}{dt} = \frac{1}{2\pi} \frac{d}{dt}(\omega_c t + \theta_0) = \frac{\omega_c}{2\pi} = \frac{2\pi f_c}{2\pi} = f_c \text{ Hz}$$

elde edilir. Görüldüğü gibi gerek $\omega_i(t) = \omega_c$ gerekse $f_i(t) = f_c$ ifadelerinden, klasik sinusoidlerin sabit tek frekanslı oldukları görülür, veya bu tür işaretlerin fazı $\theta(t) = \omega_c t + \theta_0$ ifadesinden de görülebileceği gibi, faz zamanla lineer olarak değişir.

Verilen bilgilerin ışığında, anlık frekans tek frekanslı sinusoide göre elde edilmiştir. Tanım olarak anlık frekans, frekansı zamanla değişen işaretteğe değere karşılık gelmektedir. Klasik sinusoidler tek frekanslı olduklarına göre, acaba çok frekanslı olarak düşünülebilirlermi sorusu önem kazanıyor. Bu ilk bakışta mümkün görünmüyor. Ancak tek frekanslı olmayan bir işaretin analizi, tek frekanslıymış gibi yapılabilir. Böyle çok frekanslı ve durağan olmayan bir işaretin eğer içeriyorsa, tek frekanslı sinusoidlere açılımı yapılabilir. Diğer bir deyişle çok frekanslı bir işaretin tek frekanslı hangi klasik sinusoidleri içerdiği araştırılabilir. Örneğin

$$x(t) = A e^{j(2\pi\mu t^2 + 2\pi f_0 t + \theta)}$$

işaretini göz önüne alalım. Bu işaretin reel kısmını oluşturarak analiz edelim.

$$\theta(t) = 2\pi\mu t^2 + 2\pi f_0 t + \theta$$

$$x(t) = A e^{j\theta(t)}$$

$$\text{Re}\{x(t)\} = A \cos \theta(t) = A \cos(2\pi\mu t^2 + 2\pi f_0 t + \theta)$$

Görüldüğü gibi faz olarak $\theta(t) = 2\pi\mu t^2 + 2\pi f_0 t + \theta$ ifadesi t^2 gibi lineer olmayan bir terim içermektedir. Buna göre fazın zamanla lineer değiştiğini söyleyemeyiz. Dolayısıyla burada $x(t) = A \cos(2\pi\mu t^2 + 2\pi f_0 t + \theta)$ ifadesi klasik tek frekanslı sinusoidten farklıdır. Ancak verilen $x(t)$ işaretinden, klasik tek frekanslı sinusoidler elde edilebilir. Yani, $x(t)$ işaretinde sinusoidin hangi bileşeni varsa görülebilir. Bunu anlık frekans yöntemiyle yapmaktayız. Anlık frekans olarak daha önceki $\omega_i(t)$ veya $f_i(t)$ bağıntılarından biri kullanılarak kastedilen sinusoidlere ait tekli frekanslar tespit edilebilir.

11 Periyodik işaretler

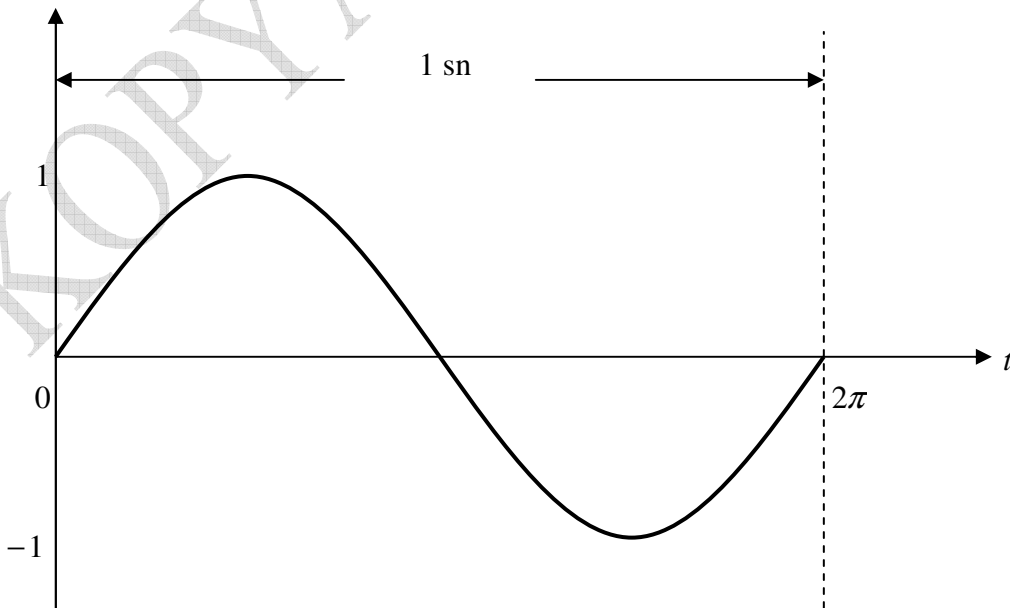
Periyodiklik gerek sürekli gerekse ayrık işaret işlemede önemli bir kavramdır. En bilinen yaklaşım eğer bir işaret periyodik ise, periyodunun $-\infty$ başlayıp $+\infty$ a kadar kendisini aynı genlik, frekans ve faz olarak tekrarlayarak devam etmesidir. Bu tanıma en uygun işaretlerin **sinusoidal işaretler** olduğunu gördük. Ancak bu genel kural sonsuz büyük işaret uzayında değilde daha sınırlı uzunluktaki işaretler için göz önüne alındığında tanım aralığı kısıtlanabilmektedir. İşaret $(-\infty, +\infty)$ aralığında olmamasına rağmen yine de periyodik olabilmektedir. Ayrık işaretler olarak sınıflayabileceğimiz ve daha çok dijital bilgisayarlarda hesaplanmak üzere sonlu aralıkta ama periyodik özellikte ayrık işaretler vardır. Genel olarak ayrık Fourier transformasyonu (DFT) ve “fast Fourier transformasyonu (FFT)” olarak bilinen transformasyonlarla bahsedilen sonlu ama periyodik ayrık işaretler hesaplanabilmektedir. Bu bölümde sürekli ve ayrık formattaki işaretlerin periyodikliği tanıtılacaktır.

Sürekli Periyodik Sinusoid İşaretler

Sürekli periyodik işaretler $t = (-\infty, \infty)$ aralığında kendisini belirli bir periyod, dolayısıyla da frekansa göre tekrarlayan işaretlerdir (sinusoidal işaretler). Bu nedenler sürekli periyodik işaretleri daha çok sinusoidal formatta ele alarak incelemek daha yararlı olacaktır. Bunun içinde sürekli sinusoid işaretlerde periyod ve frekans kavramları ön plana çıkmaktadır.

Frekans : Periyodik bir işaretin bir saniyedeki (birim zamandaki) sayıl sayısıdır. Diğer bir deyişle işaretin saniyede kendisini tekrar etme sayısı, yani işaretin bir saniyedeki periyod sayısıdır. Bazen kısaca salınım sayısı olarak da bilinir. Birimi sayıl/sn veya kısaca Hz dir.

Periyod : Bir işaretin bir saniyede veya birim zamanda kendisini tekrar eden her bir sayılın süresi veya periyodik bir işarettaki bir sayıllık süre. Birimi saniye dir.



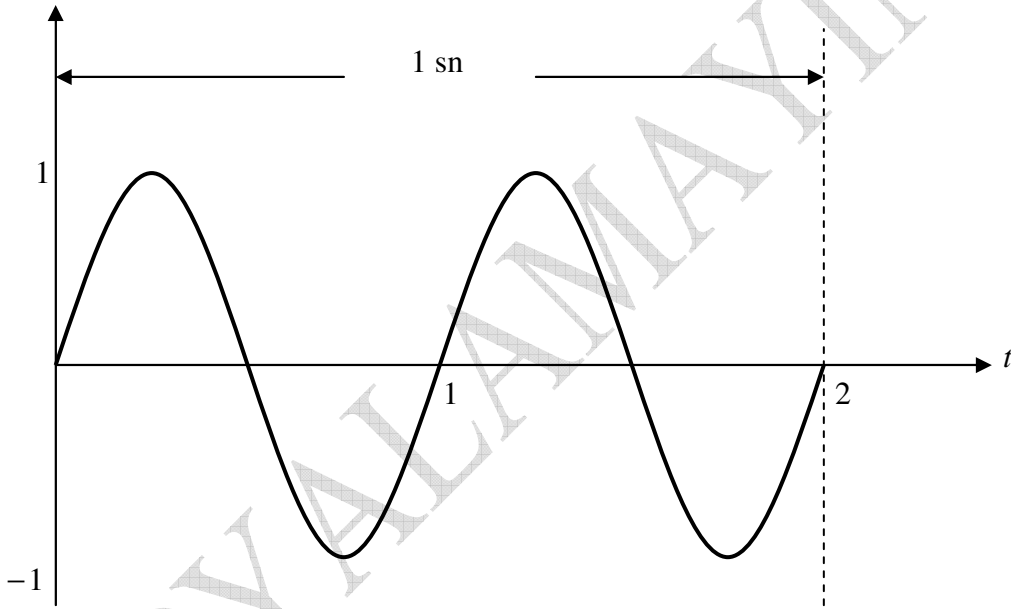
Şekil 57 Frekans :saniyede 1 sayıl (1 Hz)

$$\text{Period} = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{2\pi f} = \frac{1}{f} = \frac{1}{1} = 1 \text{ sn}$$

$$\text{Frekans} = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{2\pi f}{2\pi} = f = 1 \frac{\text{saykil}}{\text{sn}} = 1 \text{ Hz}$$

$$f(t) = \sin \omega t = \sin \left(\underbrace{\text{dairenin cevresi (rad)}}_{2\pi} \times \underbrace{\text{saykil sayisi}}_f t \right)$$

$$f(t) = \sin \omega t = \sin(2\pi \times f) t = \sin(2\pi \times 1) t = \sin 2\pi t$$

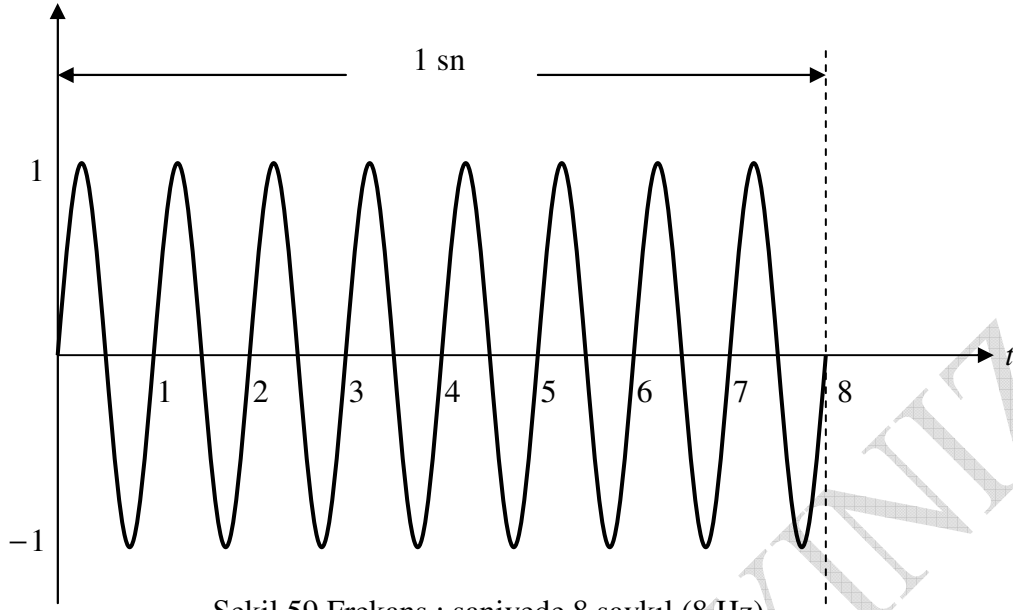


Şekil 58 Frekans : saniyede 2 saykıl (2 Hz)

$$\text{Period} = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{2\pi f} = \frac{1}{f} = \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \text{ sn}$$

$$\text{Frekans} = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{2\pi f}{2\pi} = f = 2 \frac{\text{saykil}}{\text{sn}} = 2 \text{ Hz}$$

$$f(t) = \sin \omega t = \sin(2\pi \times f) t = \sin(2\pi \times 2) t = \sin 4\pi t$$



Şekil 59 Frekans : saniyede 8 saykıl (8 Hz)

$$\text{Period} = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{2\pi f} = \frac{1}{f} = \frac{1}{8} = \frac{1}{8} \text{ sn}$$

$$\text{Frekans} = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{2\pi f}{2\pi} = f = 8 \frac{\text{saykıl}}{\text{sn}} = 8 \text{ Hz}$$

$$f(t) = \sin \omega t = \sin(2\pi \times f) t = \sin(2\pi \times 8) t = \sin 16\pi t$$

Sürekli periodik işaret $s(t) = A \sin(\omega t + \theta)$ olsun. Eğer T_0 temel period olmak üzere

$$\begin{aligned} \sin \omega t &= \sin \omega(t + T_0) \\ &= \sin(\omega t + \omega T_0) \\ &= \sin \omega t \end{aligned}$$

Denklemleri sağlanıyorsa, verilen sinusoid işaretin periodik olduğu kabul edilir. Sinüs işareti 2π periedolu fonksiyonlar olduğundan buradan period

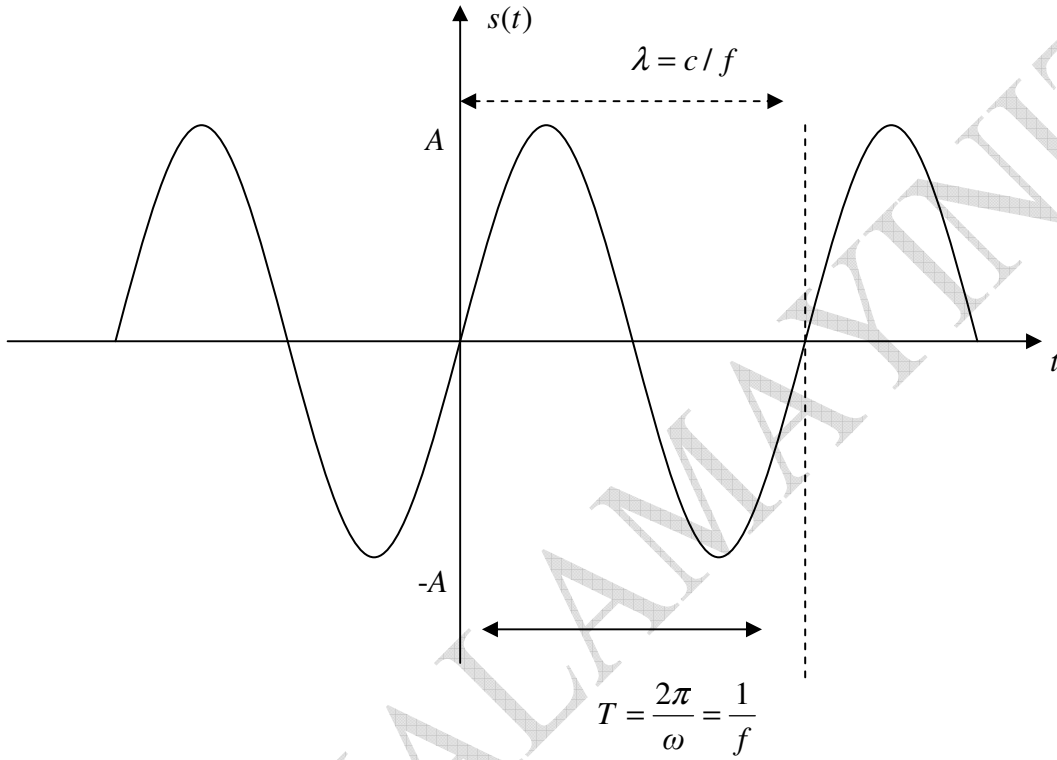
$$\omega T_0 = 2\pi m$$

ve

$$T_0 = m \left(\frac{2\pi}{\omega} \right)$$

olarak hesaplanır. Bu bağıntıdan periodikliğin ω açısal frekanstan bağımsız olduğu görülmektedir. Dolayısıyla sonuçta ulaşılan tespit vardır.

Tespit : Sürekli sinusoid işaretler ω açısal frekanstan bağımsız olmak üzere daima periodiktirler. Söz konusu açısal frekansın $-\infty < \omega < \infty$ aralığında olduğunu düşünürsek, T periodunun tam bir değer alması gerekmemekte, herhangi bir gerçel veya gerçel sayı olabileceğini görmekteyiz. Oysaki bu durum ayırık sinusoidlerde farklıdır. Her ayırık sinusoid periodik değildir. Ayırık sinusoidlerin periodikliği için Ω ayırık açısal frekansın $-\pi < \Omega < \pi$ gibi toplam $(0, 2\pi)$ aralığında bulunma zorunluluğu vardır. Bu ayırık işaret bölümünde detaylarıyla ele alınacaktır.



Şekil 60 Periyodik sinusoidal işaret

görüldüğü gibi işaret

$$\sin \omega t = \sin \omega(t + T_0) = \sin(\omega t + \omega T_0)$$

$$= \sin \omega t$$

özellikinde olduğundan periodiktir.

Trigonometrik fonksiyonların periodu

1. $\sin(ax + b), \cos(ax + b), \sec(ax + b), \csc(ax + b)$

$$T = \frac{2\pi}{|a|}$$

$$\sin(ax + 2\pi), \cos(ax + 2\pi), \sec(ax + 2\pi), \csc(ax + 2\pi)$$

2. $\tan(ax + b), \cot(ax + b)$

$$T = \frac{\pi}{|a|}$$

$$\tan(ax + \pi), \cot(ax + \pi)$$

3. $\sin^m(ax+b), \cos^m(ax+b)$ $m = \text{tek}$

$$T = \frac{2\pi}{|a|}$$

$\sin^m(ax+b), \cos^m(ax+b)$ $m = \text{çift}$

$$T = \frac{\pi}{|a|}$$

4. $\tan^m(ax+b), \cot^m(ax+b)$ $m = \text{tek ve çift}$

$$T = \frac{\pi}{|a|}$$

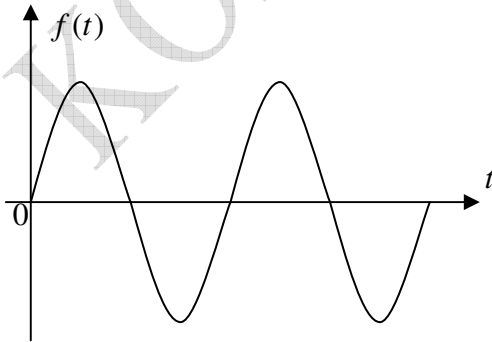
5. $f + g$ fonksiyonlarının periodu = O.K.E.K(T_1, T_2)

Periodik işaretler üzerine

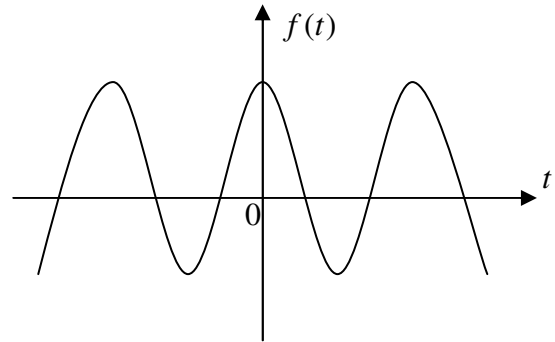
Periodik işaretlerin başlangıç noktaları tartışılan bir konudur. Acaba zamanın herhangi bir anından başlamaları yoksa örneğin yaygın gösterimle $t = 0$ dan mı başlamalı. Hesaplamalar açısından periodik olduğu sürece başlangıç noktası çok önemli değildir. Hesaplamaya tabii olacak period veya uzunluğu kolaylıkla tespit edilebilmektedir. Ancak fiziksel ve içerik açıdan periodik işaretlerin başlangıç noktalarının $-\infty$ dan başladıkları ve $+\infty$ a gittikleri kabul edilir. Ancak hesaplama amacıyla pratik açıdan belirli aralıkta periodikmiş gibi düşünülmekte ve ona göre hesaplamalar yapılmaktadır. Bilgilerin ışığında makul anlamda $(-\infty, \infty)$ aralığındaki periodikliğin yaratacağı bazı sıkıntılar da yok değildir. Özellikle sistem analizde bu önemlidir. Casual olarak adlandırılan sistemleri düşünürsek, bu sistemlerin çıkışları giriş işaretinin mevcut andaki veya geçmişteki değerine göre çalışmaktadır. Bu anlamda sistem girişin gelecekteki bir değerine göre çıkış üretememektedir. Bu sistemlere de casual olmayan (noncasual) sistemler denilmektedir. Buradan “casual” işaret kavramını da göz önüne alabiliriz. **Casual işaret** $t = 0$ dan önce başlamayan işaretlerdir. Diğer bir deyişle bir işaret fonksiyonu $f(t)$

$$f(t) = 0, \quad t < 0$$

Bu tür işaretlere aşağıdaki (a) da görülen işaret örnek gösterilebilir.



- a -



- b -

Şekil 61 (a): Casual ve (b) : casual olmayan işaretler

Bunun tersi olarak $t=0$ dan önce başlayan işaretlere de casual olmayan işaretler denilmektedir. Şekil (b) deki işaret buna örnek gösterilebilir. Bu açıdan periodik işaretin $-\infty$ den başlıyor olması bu açıdan casual işaret gerçeği ile çelişiyor görünmektedir. Bu teorik yaklaşım, pratikte periodik işaretin $t=0$ dan alınmasının büyük hata olmamasıyla sıkıntı aşılr. Normal koşullar altında casual olmayan sistemlerin gerçekleşmeleri zordur. Çünkü girişin gelecekteki değerini bilmesi veya tahmin etmesi mümkün olmayacağından buna yönelik çıkış üretmesi de beklenemeyeceğinden bu tür noncasual sistemlerin realize edilmeleri zordur.

KOPYALAMAYINIZ