

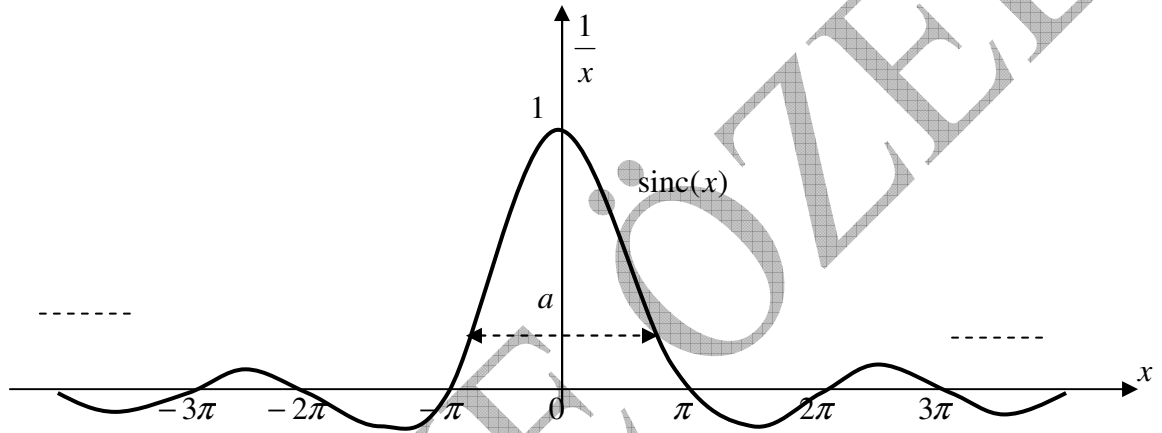
BÖLÜM 5.2

FOURIER TRANSFORMASYONU

Fourier Transformasyonunda Kullanılan Önemli Fonksiyonlar

1. sinc(x) Fonksiyonu

Darbe fonksiyonu işaret işlemede oldukça önemlidir. Fourier transformasyonu, genel halde $\text{sinc}(x)$ veya $\text{sinc}(\omega)$ olarak düşünülebilecek, bu fonksiyonun değişimi aşağıdaki gibidir.



Şekil 1a $\text{sinc}(x)$ İşaretinin görünümü

$$\text{sinc}(x) = \frac{\sin x}{x}$$

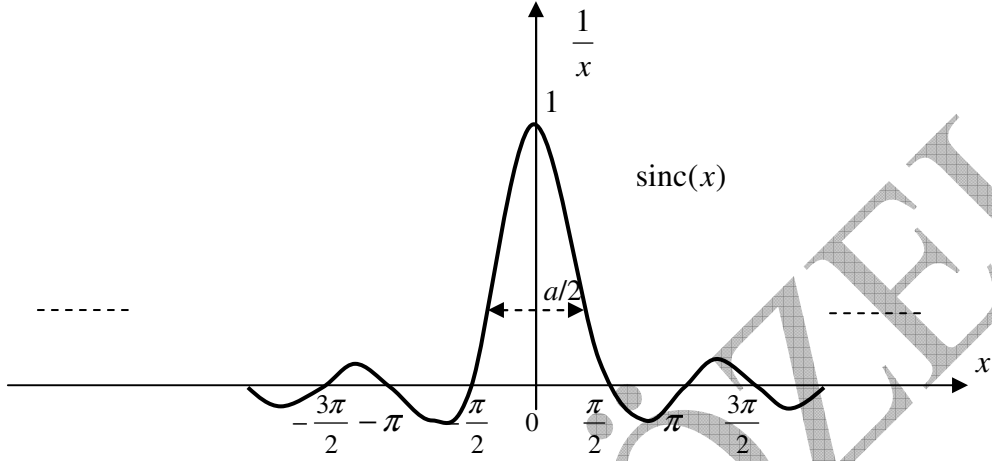
veya

$$\text{sinc}(x) = \frac{\sin \pi x}{\pi x}$$

Şekilden görüldüğü gibi $\text{sinc}(x)$ darbe fonksiyonu yalnızca $x=0$ anında 1 değerini alan ($\delta(x)=1=\delta(0)$ gibi), π nin tam sayı katlarında ($x=\pm\pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi, \dots, \pm k\pi$) ise sıfır değerini almakta diğer bütün durumlarda ise, $\frac{\sin x}{x}$ değerini almaktadır. Durum özetle aşağıdaki gibidir.

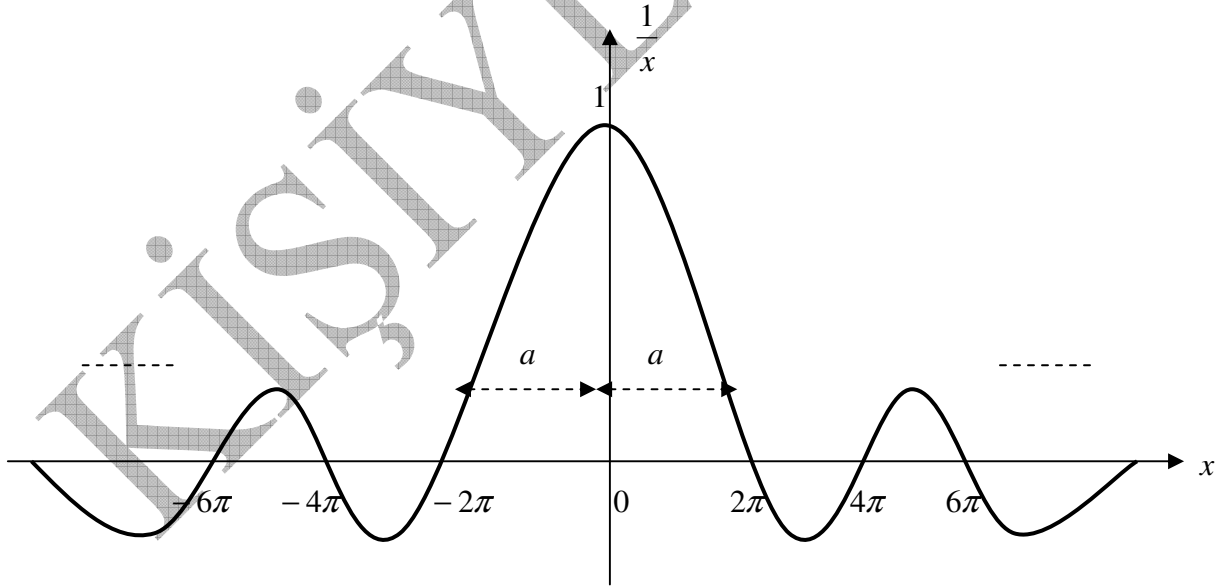
$$\text{sinc}(x) = \begin{cases} 1 & x = 0 \\ 0 & x = \pm\pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi, \dots, \pm k\pi \\ \frac{\sin x}{x} & x \neq 0 \text{ ve } x \neq \pm k\pi \end{cases}$$

$$\text{sinc}(\tau x) = \text{sinc}(2x) = \begin{cases} 1 & x = 0 \\ 0 & x = \pm \frac{\pi}{2}, \pm \frac{2\pi}{2}, \pm \frac{3\pi}{2}, \pm \frac{4\pi}{2}, \dots, \pm \frac{k\pi}{2} \end{cases}$$



Şekil 1b $\text{sinc}(2x)$ İşaretinin görünümü

$$\text{sinc}\left(\frac{x}{\tau}\right) = \text{sinc}\left(\frac{x}{2}\right) = \begin{cases} 1 & x = 0 \\ 0 & x = \pm 2\pi, \pm 4\pi, \pm 6\pi, \pm 8\pi, \dots, \pm k\pi \end{cases}$$

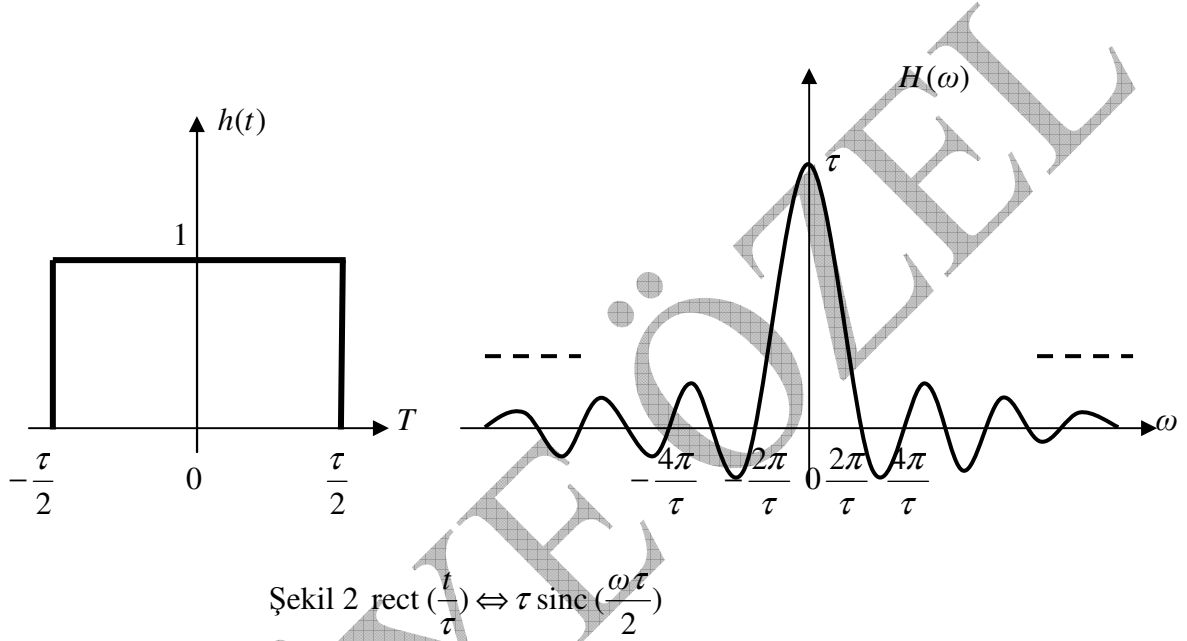


Şekil 1c $\text{sinc}\left(\frac{x}{2}\right)$ İşaretinin görünümü

Her üç şekilden de görüldüğü gibi $\text{sinc}(x)$ fonksiyonunun ana bölümü sıfırdan itibaren ki ilk $\pm k\pi$ değerine karşı gelen noktada toplanmıştır. Bu anlamda ilgili şekillerde $(-\pi, \pi), (-\pi/2, \pi/2), (-2\pi/2, 2\pi)$ aralıklarının işaretin ana bandını oluşturduğunu görmekteyiz. İlk şekildeki $\text{sinc}(x)$ fonksiyonunun band aralığı (b) de görüldüğü gibi

$\text{sinc}(2x)$ ile yarıya düşürülürken, (c) de ise $\text{sinc}(\frac{x}{2})$ ile ana band iki katına çıkarılmıştır. Tüm bunlardan genel bir $\text{sinc}(x)$ işaretinin band genişliklerinin nasıl ayarlanabileceğini görmekteyiz. $\text{sinc}(x)$ işaretinin band genişliği $\tau > 1$ olmak üzere $\text{sinc}(\tau x)$ ile daraltılırken, $\text{sinc}(\frac{x}{\tau})$ ile genişletilmektedir.

Örnek



Şekil 2 $\text{rect}(\frac{t}{\tau}) \Leftrightarrow \tau \text{sinc}(\frac{\omega\tau}{2})$

Örnek

$F(\omega) = \text{sinc}\left(\frac{5\omega}{9}\right)$ olarak verilen darbe fonksiyonunun grafik gösterimini yapın

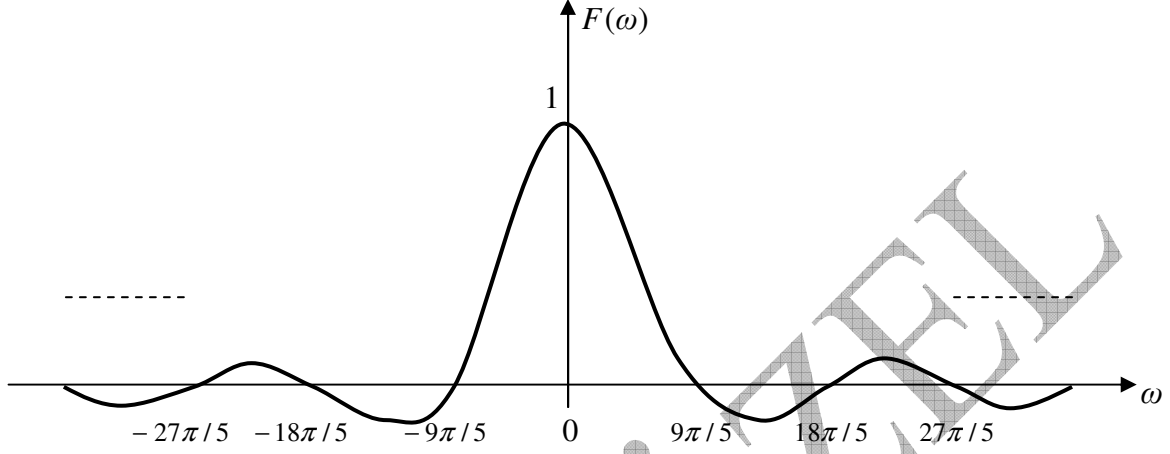
Çözüm

Bunun için yukarıda alınan referans $\text{sinc}(x)$ işaretinin $F(\omega) = \text{sinc}\left(\frac{5\omega}{9}\right)$ fonksiyonuna karşılık gelen değerlerini tespit etmemiz gerekiyor. Öncelikle $\omega = 0$ için $F(\omega) = 1$ olduğunu biliyoruz. Ardından $F(\omega) = 0$ gibi sıfır noktalarını tayin etmeye çalışalım. Bunun için $\text{sinc}(x) = 0$, $x = \pm\pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi, \dots, \pm k\pi$ noktalarını göz önüne almamız gerekiyor.

$$\frac{5\omega}{9} = \pi, \quad \frac{5\omega}{9} = 2\pi, \quad \frac{5\omega}{9} = 3\pi$$

$$\omega = \frac{9\pi}{5}, \quad \omega = \frac{18\pi}{5}, \quad \omega = \frac{27\pi}{5}$$

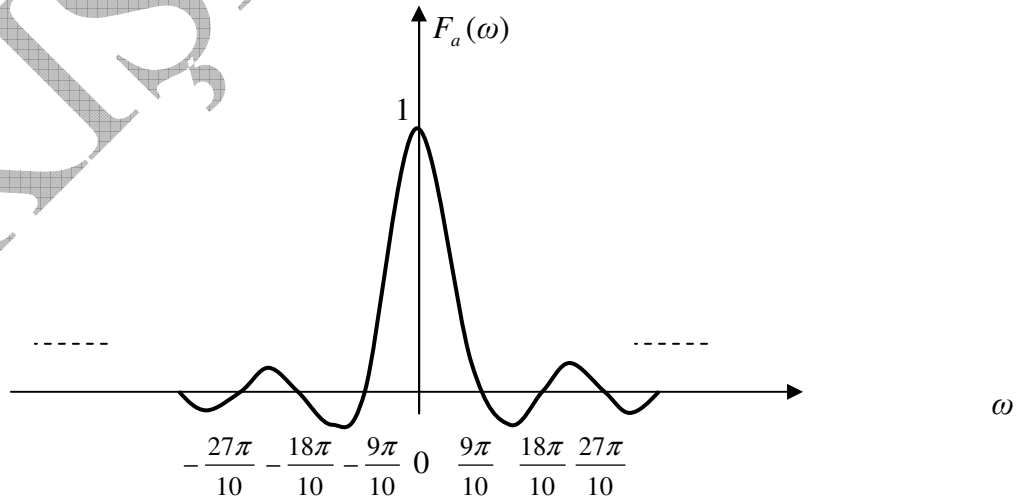
Tüm bunların ışığında $F(\omega) = \text{sinc}\left(\frac{5\omega}{9}\right)$ fonksiyonunun değişimi aşağıdaki gibi olacaktır.



Şekil 3 $F(\omega) = \text{sinc}\left(\frac{5\omega}{9}\right)$ İşaretinin görünümü

Görüldüğü gibi işaretin band genişliği simetriden dolayı $\omega = 9\pi/5$ rad/sn dir. Aslında spektrumdan görüldüğü gibi asıl band genişliği sonsuzdur ($\omega = \infty$), ancak $\text{sinc}(x)$ işaretinin belli bir band da yoğunlaşması söz konusu olduğundan ki, burada $\omega = (-9\pi/5, 9\pi/5)$ aralığıdır, ancak Fourier transformasyonunun simetri özelliğinden dolayı aranan band genişliği bir yarı düzlemdeki olarak $\omega = 9\pi/5$ rad/sn değerindedir. Verilen işaretin band genişliğinin yarıya indirilmiş hali $F_a(\omega) = \text{sinc}\left(\frac{10\omega}{9}\right)$ olacaktır. Çünkü

$$\frac{10\omega}{9} = \pm k\pi \rightarrow \omega = \pm \frac{9k\pi}{10}. \text{ Bunun değişimide aşağıdaki gibi olacaktır.}$$

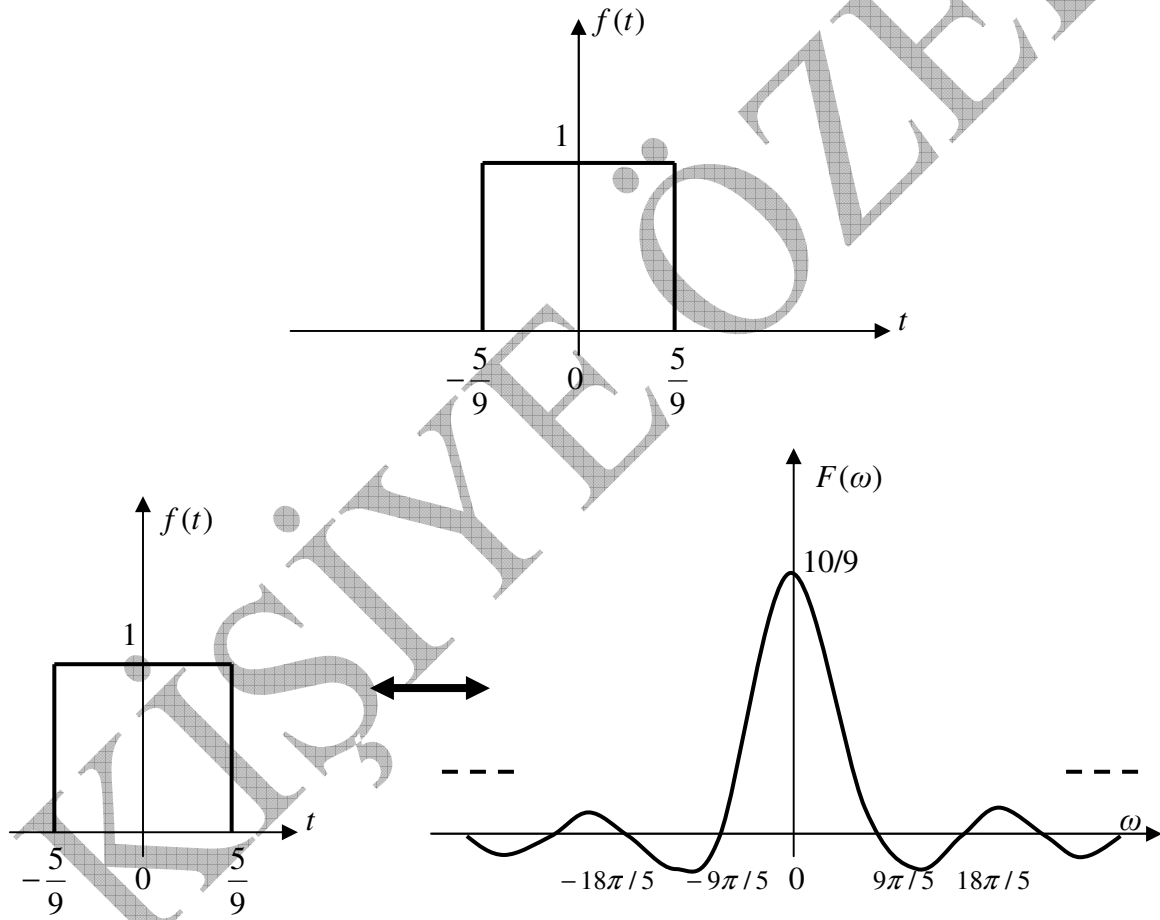


Şekil 4 $F(\omega) = \text{sinc}\left(\frac{10\omega}{9}\right)$ İşaretinin görünümü

Görüldüğü gibi işaretin band genişliği yarıya yani $\omega = \frac{9\pi}{10}$ rad/sn düşmüştür. Bu anlamda $F_a(\omega) = F(2\omega)$ olarak düşünülebilir. Bunların ardından, $\text{sinc}(x)$ fonksiyonuyla ilintili olduğu darbe işaret arasındaki bağıntıyı araştırabiliriz. $F(\omega) = \text{sinc}\left(\frac{5\omega}{9}\right)$ Fonksiyonunu sağlayan darbe fonksiyonunun t domenindeki karşılığı ise

$$\text{rect}\left(\frac{9t}{10}\right) \Leftrightarrow \frac{10}{9} \text{sinc}\left(\frac{5\omega}{9}\right)$$

ifadesinden $f(t) = \text{rect}\left(\frac{9t}{10}\right)$ olarak bulunur. Bunun görüntüsü



Şekil 5 $\text{rect}\left(\frac{9t}{10}\right) \Leftrightarrow \frac{10}{9} \text{sinc}\left(\frac{5\omega}{9}\right)$ Dönüşümünün görünümü

Görüldüğü gibi zaman domenindeki genişliği $\tau = \frac{10}{9}$ sn olan darbe frekans domeninde $\frac{10}{9} \text{sinc}\left(\frac{5\omega}{9}\right)$ olarak elde edilirken, $f(t)$ işaretinin band genişliğinin frekans domeninden

$\omega = 9\pi/5$ rad/sn olduğunu görmekteyiz. Bunu basitçe periodu τ olan bir işaretin band genişliğinin $\omega = \frac{2\pi}{\tau}$ rad/sn biçiminde düşünebiliriz. Zira, $\tau = \frac{10}{9}$ sn iken, band genişliği

$$\omega = \frac{2\pi}{\tau} = \frac{2\pi}{(\frac{10}{9})} = \frac{18\pi}{10} = \frac{9\pi}{5} \text{ rad/sn veya } f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{\frac{9\pi}{5}}{2\pi} = \frac{9\pi}{10\pi} = \frac{9}{10} \text{ Hz.}$$

sinc(x) Fonksiyonunun Genlik ve Faz Cevabı

Bir işaretin $|F(\omega)|$ genlik ve $\angle F(\omega)$ faz frekans cevaplarına bağlı ifadesi aşağıdaki gibi gösterilir.

$$F(\omega) = |F(\omega)| e^{j\angle F(\omega)}$$

Buna göre $f(t) = \text{rect}\left(\frac{9t}{10}\right)$ olarak ele aldığımız, işaretin genlik ve faz frekans cevabını verilen denklem itibariyle değerlendirelim. Aşağıda buna dair bir örnek söz konusudur.

Örnek

Daha önce ele alınan $F(\omega) = \frac{10}{9} \text{sinc}\left(\frac{5\omega}{9}\right)$ fonksiyonunun genlik ve faz frekans cevaplarına bağlı ifadesini yazalım.

Genlik spektrumu

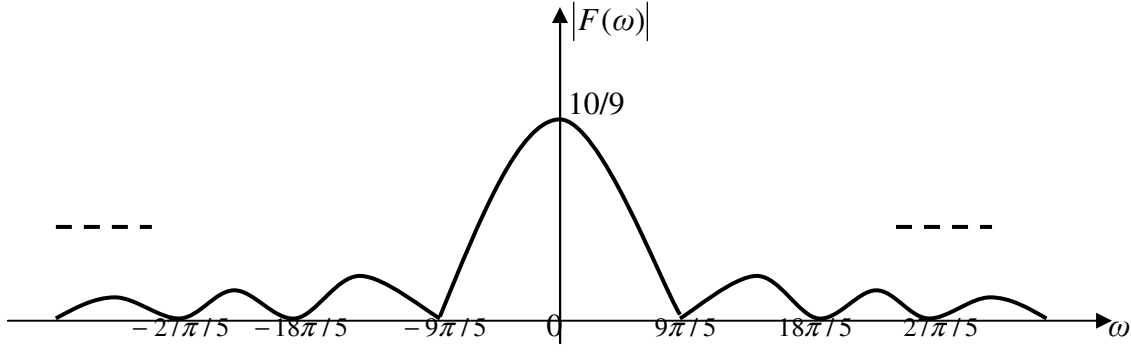
$$F(\omega) = \left| \frac{10}{9} \text{sinc}\left(\frac{5\omega}{9}\right) \right| e^{j\angle \text{sinc}\left(\frac{5\omega}{9}\right)}$$

$$D_n = \frac{1}{2}(a_n - jb_n)$$

$$|F(\omega)| = |D_n| = \sqrt{\frac{1}{4}(a^2 + b^2)}$$

$$\left| \frac{10}{9} \text{sinc}\left(\frac{5\omega}{9}\right) \right| = |F(\omega)|$$

Daha önceki Fourier serisi bölümünden $D_n = \frac{1}{2}(a_n - jb_n)$ bağıntısından $|F(\omega)| = |D_n|$ olarak düşünülürse, elde edilen $|F(\omega)|$ negatif bölümleri, pozitif alınmış şekilde düşünülürse, $|F(\omega)|$ genlik cevabının değişimi aşağıdaki gibi düşünülebilir.



Şekil 6 $|F(\omega)| = \left| \frac{10}{9} \text{sinc}\left(\frac{5\omega}{9}\right) \right|$ spektrumu

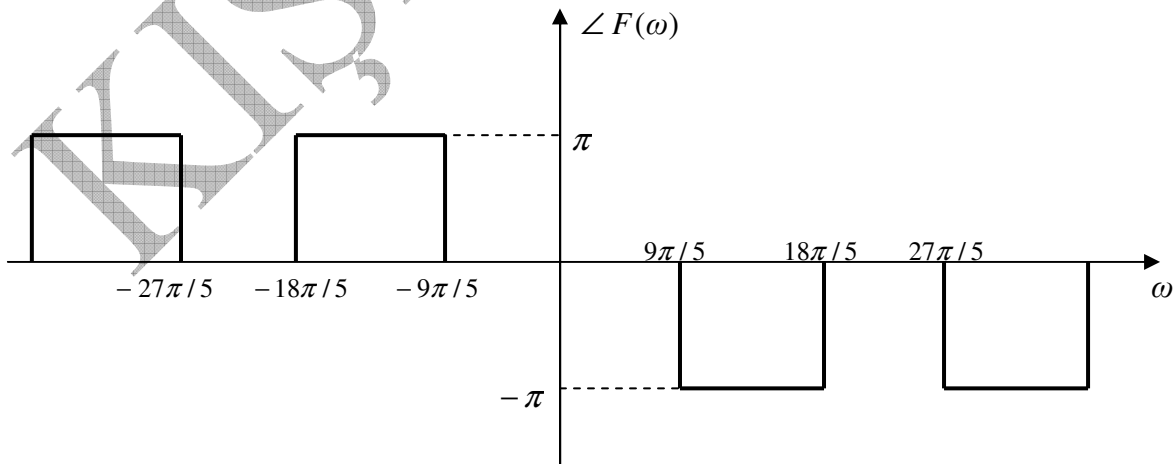
Burada ilginç bir husu açığa çıkmaktadır. Bu ilişki $\sin c(x)$ ile $\Delta(x) = \sin c(x) \times \sin c(x)$ arasındaki ilişkiyi ortaya koymaktadır. Buna göre $\sin c(x)$ fonksiyonunun genlik frekans cevabı $|F(\omega)| = |\sin c(x)|$ ile $\Delta(x)$ arasında doğrudan bir ilişki vardır. Bu ilişki aşağıdaki gibidir.

$$|F(\omega)| = |\sin c(x)| = \Delta(x) = \sin c(x) \times \sin c(x)$$

Çünkü gerek $|F(\omega)| = |\sin c(x)|$ gerekse $\Delta(x)$, klasik $\sin c(x)$ fonksiyonunun, negatif bölümlerinin pozitif yapılmasıyla oluşturulmaktadır. Aşağıda $\Delta(x)$ üçgen fonksiyonun incelenmesi aşamasında da bu noktalar açıkça görülecektir.

Faz spektrumu

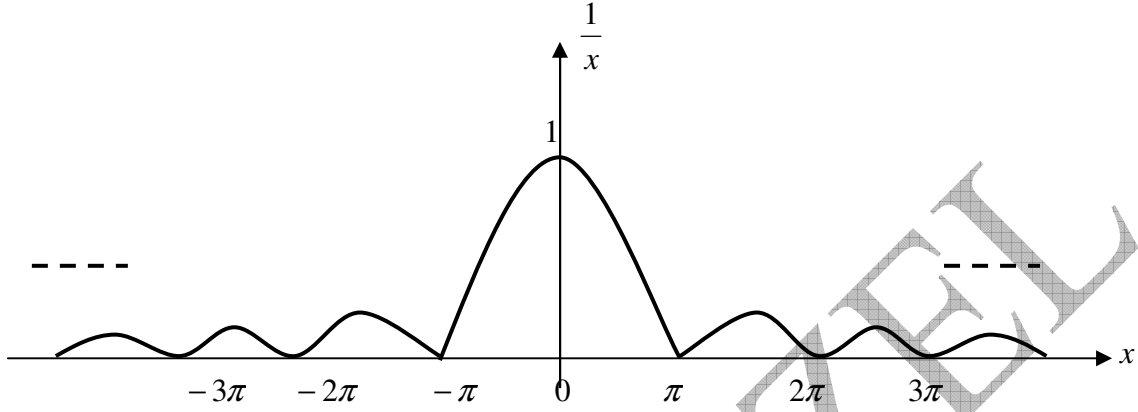
$F(\omega) = \frac{10}{9} \text{sinc}\left(\frac{5\omega}{9}\right)$ ifadesi bir tür tek fonksiyon olma özelliğinden dolayı, darbe fonksiyonunun $\angle F(\omega)$ faz cevabı, buna uygun olarak aşağıdaki gibi düşünülebilir.



Şekil 7 $\angle \frac{10}{9} \text{sinc}\left(\frac{5\omega}{9}\right)$ Faz spektrumu

2. $\text{sinc}^2(x)$ Fonksiyonu

Bu fonksiyon işaret işlemede $\text{sinc}(x)$ darbe fonksiyonu gibi önemlidir. Bu, aralarındaki $\text{sinc}^2(x) = \text{sinc}(x) * \text{sinc}(x)$ bağıntısından kaynaklanmaktadır. $\text{sinc}(x)$ özellikli bu fonksiyonun genel değişimi aşağıdaki gibidir.

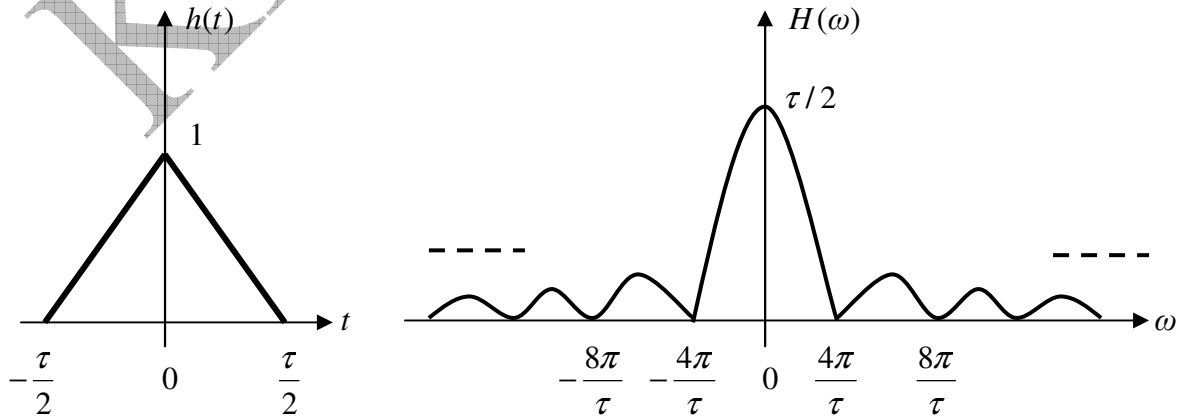


Şekil 8 $\text{sinc}^2(x)$ gösterimi

$$\text{sinc}^2(x) = \begin{cases} 1 & x = 0 \\ 0 & x = \pm\pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi, \dots, \pm k\pi \\ \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 & x \neq 0 \text{ ve } x \neq \pm k\pi \end{cases}$$

Şekilden görüldüğü gibi $\text{sinc}^2(x)$ fonksiyonu yalnızca $x = 0$ anında 1 değerini alan, π nin tam sayı katlarında ($x = \pm\pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi, \dots, \pm k\pi$) ise sıfır değerini almakta diğer bütün durumlarda ise, $\frac{\sin x}{x}$ değerini almaktadır. $\text{sinc}(x)$ - $\text{rect}(x)$ ilişkisine benzeyen durum $\text{sinc}^2(x)$ ile $\Delta(x)$ üçgen fonksiyonu arasında mevcuttur.

Örnek



Şekil 9 $\Delta\left(\frac{t}{\tau}\right) \Leftrightarrow \frac{\tau}{2} \text{sinc}^2\left(\frac{\omega\tau}{4}\right)$

Örnek

$F(\omega) = \Delta\left(\frac{\omega}{9}\right)$ olarak verilen fonksiyonunun grafik gösterimini yapın

Çözüm

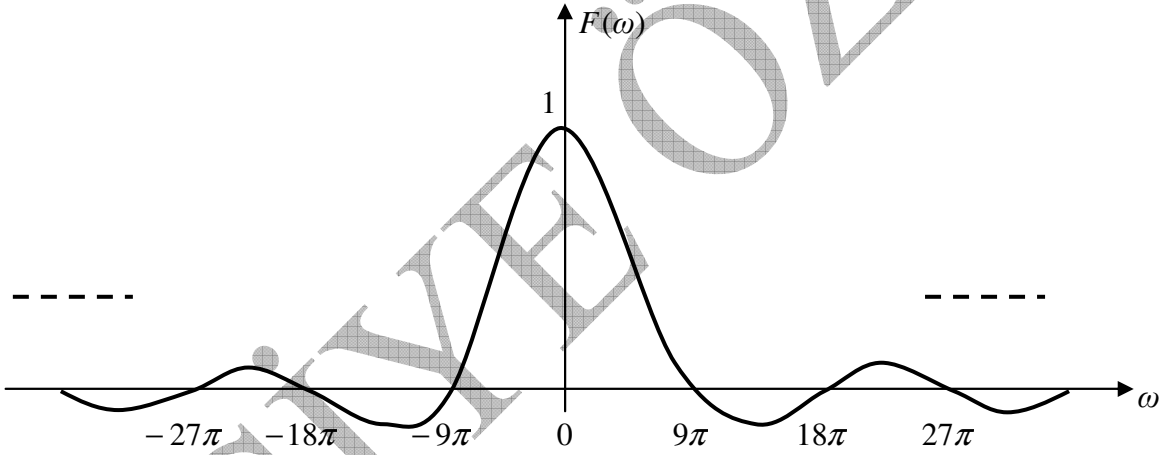
$\omega = 0$ için $F(\omega) = 1$

$$\frac{\omega}{9} = \pi, \quad \frac{\omega}{9} = 2\pi, \quad \frac{\omega}{9} = 3\pi$$

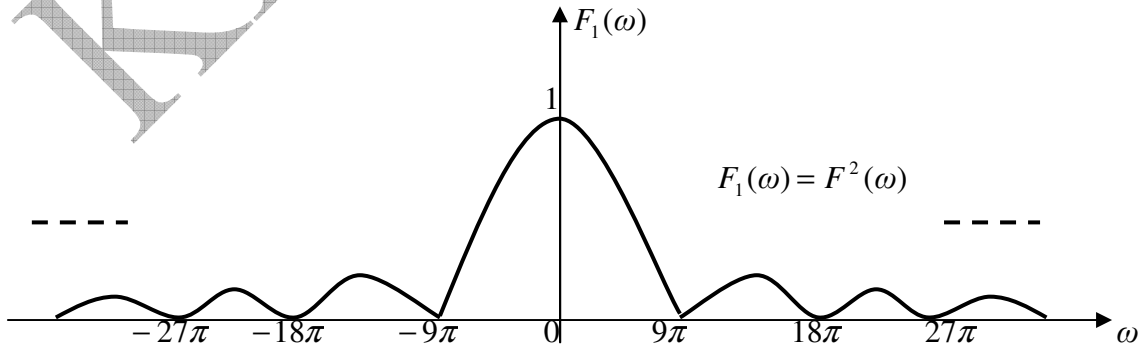
$$\omega = 9\pi, \quad \omega = 18\pi, \quad \omega = 27\pi$$

Örnek

Tüm bunların ışığında $F(\omega) = \text{sinc}\left(\frac{\omega}{9}\right)$ fonksiyonunun değişimi aşağıdaki gibi olurdu.



Şekil 10 $F(\omega) = \text{sinc}\left(\frac{\omega}{9}\right)$ İşaretinin görünümü



Şekil 11 $F_1(\omega) = \Delta\left(\frac{\omega}{9}\right)$ gösterimi

Her iki şekil incelendiğinde, ikinci işaret $F_1(\omega)$ ile $F(\omega)$ arasında yakın ilişki görülmektedir. $F_1(\omega)$ işareti, $F(\omega)$ işaretinin negatif bölümlerinin pozitif alınmasıyla oluşturulmuştur. Buna göre

$$F_1(\omega) = F^2(\omega)$$

veya kompleks durumda,

$$F_1(\omega) = |F(\omega)|^2$$

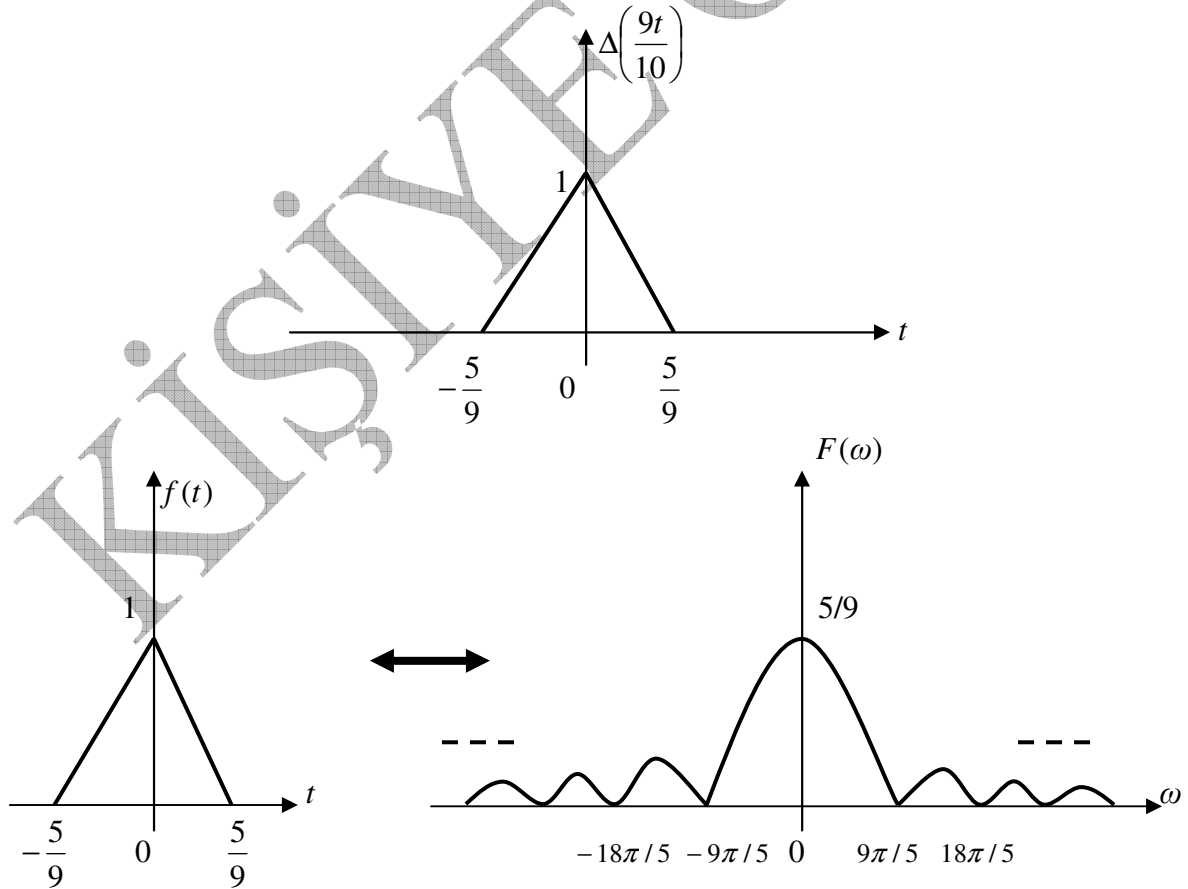
sinc(x) Fonksiyonu Genlik Spektrumu ve $\Delta(x)$ Fonksiyonu

Şu ana kadar ki verilerin ışığında, $\sin c(x)$ fonksiyonunun genlik frekans cevabının, $\Delta(x)$ üçgen fonksiyonuna denk olduğu sonucu ortaya çıkmıştır.

$$|F(\omega)| = |\sin c(x)| = \Delta(x) = \sin c(x) \times \sin c(x)$$

Örnek

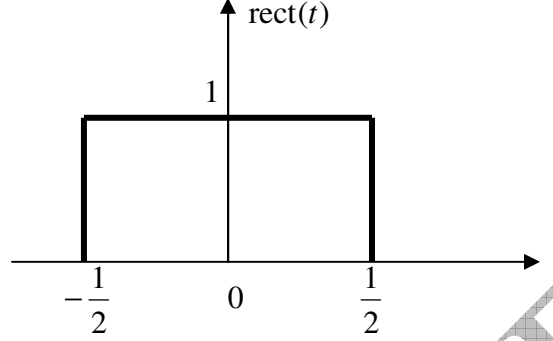
$$\Delta\left(\frac{9t}{10}\right) \Leftrightarrow \frac{5}{9} \text{sinc}^2\left(\frac{5\omega}{18}\right)$$



Şekil 12 $\Delta\text{ect}\left(\frac{9t}{10}\right) \Leftrightarrow \frac{5}{9} \text{sinc}^2\left(\frac{5\omega}{18}\right)$ Dönüşümünün görünümü

Örnek-1

Aşağıda verilmiş dikdörtgenin Fourier transformasyonunu hesaplayalım.



Şekil 13 Darbe işareti

Çözüm

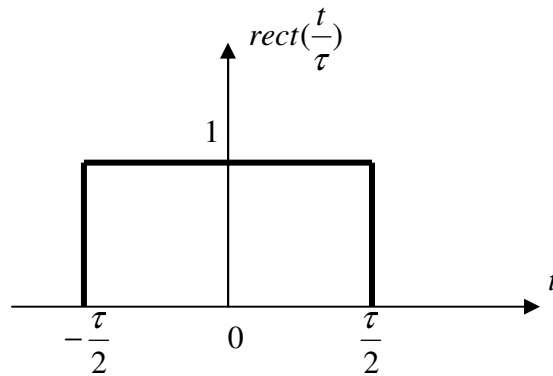
Verilen şeklin değişim aralıkları aşağıdaki gibi olacaktır.

$$rect(t) = \begin{cases} 0 & |t| > \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & |t| = \frac{1}{2} \\ 1 & |t| < \frac{1}{2} \end{cases}$$

Fourier transformasyonuna gelince,

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

Yukarıdaki şekil aşağıdaki gibi düzenlenir.



Şekil 14 Darbe işareti

Bu şekliyle genişliği τ olan darbe parametrik hale getirilir. Şimdi Fourier çözümü için giriş fonksiyonu $f(t) = \text{rect}(\frac{t}{\tau})$ olarak göz önüne alındığında, Fourier transformasyonu aşağıdaki gibi hesaplanacaktır.

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \text{rect}(\frac{t}{\tau}) e^{-j\omega t} dt$$

burada

$$\text{rect}(\frac{t}{\tau}) = \begin{cases} 0 & |t| > \frac{\tau}{2} \\ 1 & |t| < \frac{\tau}{2} \end{cases}$$

olacağından Fourier transformasyonu

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int_{-\tau/2}^{\tau/2} 1 \times e^{-j\omega t} dt = -\frac{1}{j\omega} (e^{-j\omega \tau/2} - e^{-j\omega (-\tau/2)}) \\ &= \frac{2 \sin(\frac{\omega \tau}{2})}{\omega} = \tau \frac{\sin(\frac{\omega \tau}{2})}{(\frac{\omega \tau}{2})} \\ &= \tau \text{sinc}\left(\frac{\omega \tau}{2}\right) \end{aligned}$$

Buna göre $f(t) = \text{rect}(\frac{t}{\tau})$ olduğundan bunun dualite özelliğinden Fourier transformasyonu

$$f(t) = \text{rect}(\frac{t}{\tau}) \leftrightarrow \tau \text{sinc}(\frac{\omega \tau}{2})$$

olduğundan Fourier transformasyonu

$$F(\omega) = \tau \text{sinc}\left(\frac{\omega \tau}{2}\right)$$

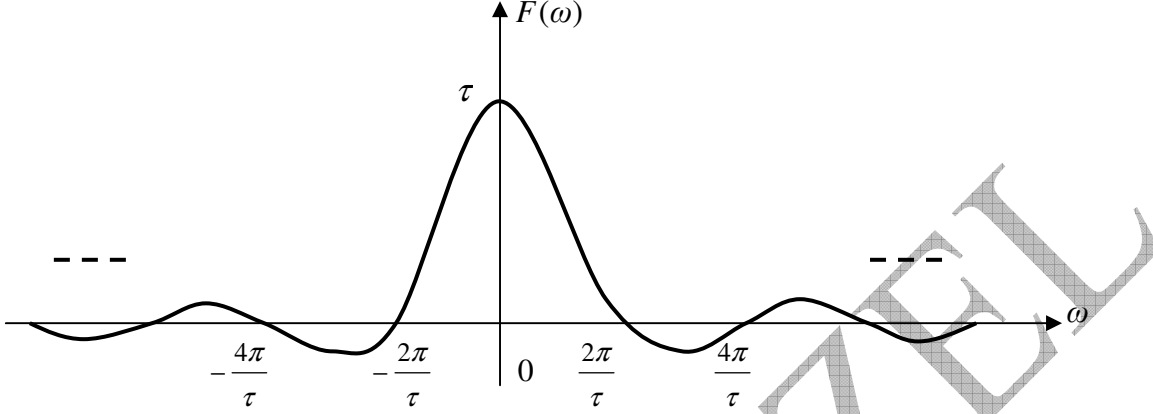
çözümünden önce $\text{sinc}(t)$ fonksiyonuna biraz göz atmamız yararlı olacaktır. $\text{sinc}(t)$ ile $\sin t$ arasında bazı benzerlikler vardır. $\sin t = 0$ ise $\text{sinc}(t) = 0$ dır. Yalnız tek fark $t = 0$ için $\sin t = 0$ olmasına rağmen, $\text{sinc}(t) = 1$ dir. Buna göre $t = \pm \pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi, \dots, \pm n\pi$, için $\text{sinc}(t) = 0$ olacaktır. Bu anlamda her iki $\text{sinc}(t)$ fonksiyonlarının argümanlarının eşitliğinden hareketle aşağıdaki ifade yazılabilecektir.

$$\frac{\omega \tau}{2} = \pm n\pi$$

Buradan frekans eksenini ω üzerindeki yalnızca sıfır noktalarında yer alacak değerler

$$\omega = \pm \frac{2n\pi}{\tau}$$

olarak elde edilecektir. Buna göre şimdi $F(\omega) = \tau \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$ çizerek aşağıdaki değişim ortaya çıkacaktır.

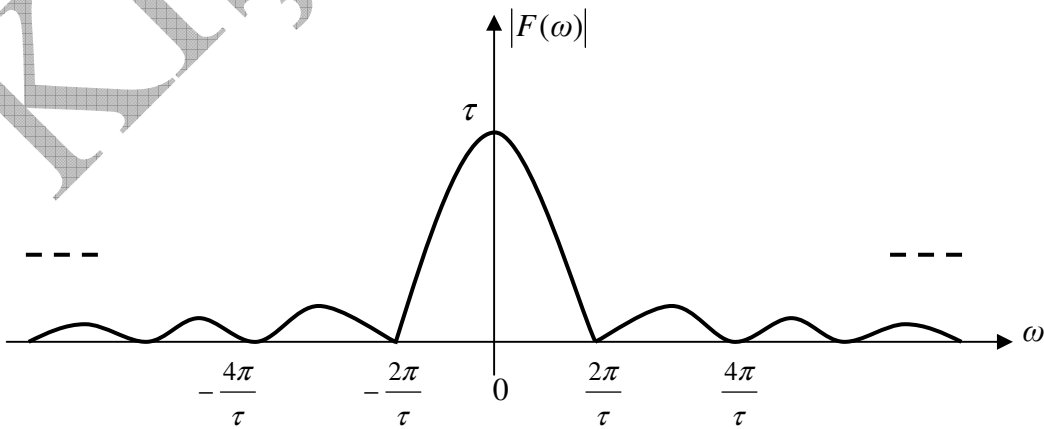


Şekil 15 $f(t) = \operatorname{rec}\left(\frac{t}{\tau}\right)$ Dörtgen işaretin Fourier gösterimi : $F(\omega) = \tau \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$

Şekilden de görüldüğü gibi, $\dots, -\frac{4\pi}{\tau}, -\frac{2\pi}{\tau}, \frac{2\pi}{\tau}, \frac{4\pi}{\tau}, \dots$ noktaları $F(\omega) = \tau \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$ in sıfır noktalarıdır. Buradan Fourier transformasyonunun genlik spektrumunu $|F(\omega)|$ düşünersek,

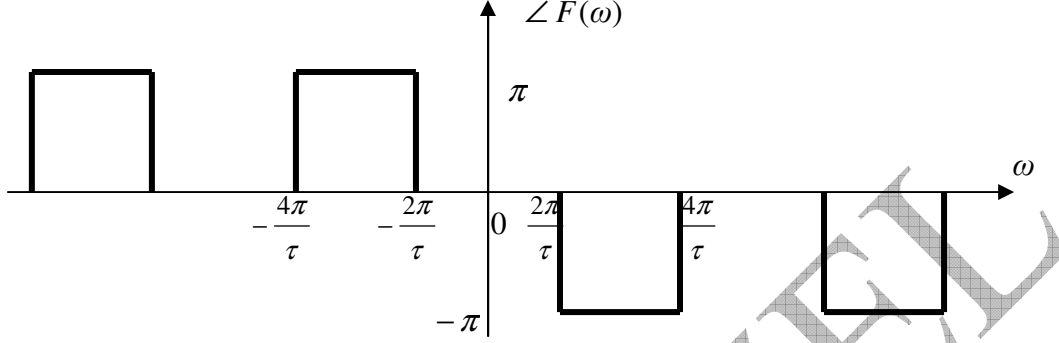
$$|F(\omega)| = \left| \tau \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) \right|$$

olduğunu görmekteyiz. Bunun anlamı yukarıda $F(\omega)$ olarak verilen şeklin negatif parçalarında pozitif olacaktır. Çünkü biliyoruz ki $|F(\omega)|$ bir çift fonksiyondur. Buna göre yukarıdaki şekil aşağıdaki gibi değişecektir.



Şekil 16 $|F(\omega)| = \left| \tau \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) \right|$ genlik spektrumu

Son sırada Fourier transformasyonunun faz spektrumunu $\angle F(\omega)$ göz önüne alırsak bunun Fourier transformasyonunda tek bir fonksiyon olduğunu biliyoruz. Bu yüzden $\angle \tau \text{sinc}\left(\frac{\omega \tau}{2}\right)$ aşağıdaki gibi değişecektir.

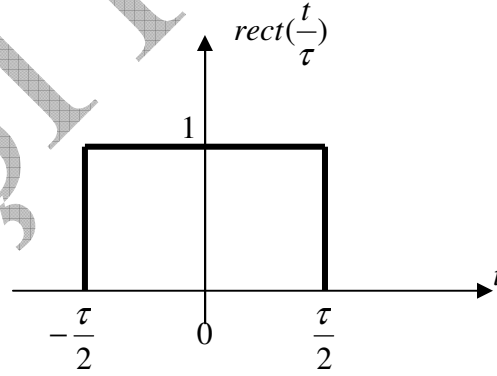


Şekil 17 $\angle F(\omega)$ Faz spektrumu

Örnek-2

$$\text{rect}\left(\frac{t}{\tau}\right) = \begin{cases} 0 & |t| > \frac{\tau}{2} \\ 1 & |t| < \frac{\tau}{2} \end{cases}$$

olarak verilen $\text{rec}\left(\frac{t}{\tau}\right)$ fonksiyonunu



Şekil 18 Darbe işareti

şeklini göz önüne alarak başka bir yöntemle çözeceğiz.

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\tau/2}^{\tau/2} \text{rec}\left(\frac{t}{\tau}\right) e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-\tau/2}^{\tau/2} \text{rec}\left(\frac{t}{\tau}\right) (\underbrace{\cos \omega t}_{\text{çift}} + j \underbrace{\sin \omega t}_{\text{tek}}) dt \end{aligned}$$

Bu duruma bakılırsa “çift” ve “tek” fonksiyonlardan oluşmaktadır. Diğer yandan zaten şekli de incelendiği zaman $\text{rec}(\frac{t}{\tau})$ fonksiyonunun çift olması dolayısıyla yalnızca “çift” kısmının işleme alınması söz konusu olacağından, işlem aşağıdaki gibi basitleşir.

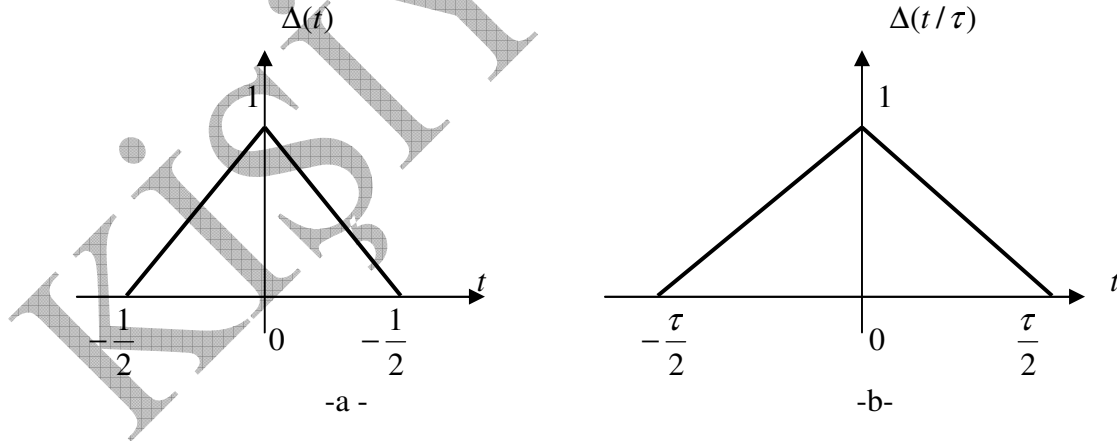
$$F(\omega) = \int_{-\tau/2}^{\tau/2} \text{rec}(\frac{t}{\tau}) \cos \omega t \, dt$$

bunun çözümü de,

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int_{-\tau/2}^{\tau/2} \text{rec}(\frac{t}{\tau}) \cos \omega t \, dt = \int_{-\tau/2}^{\tau/2} 1 \times \cos \omega t \, dt = \int_{-\tau/2}^{\tau/2} \cos \omega t \, dt \\ &= \frac{1}{\omega} \sin \omega t \Big|_{-\tau/2}^{\tau/2} = \frac{1}{\omega} \left[\sin \frac{\omega \tau}{2} - \sin \left(-\frac{\omega \tau}{2} \right) \right] = \frac{2 \sin \frac{\omega \tau}{2}}{\omega} \\ &= \frac{\tau \sin \frac{\omega \tau}{2}}{\frac{\omega \tau}{2}} \\ &= \tau \sin c \left(\frac{\omega \tau}{2} \right) \end{aligned}$$

Örnek-3

Aşağıdaki (a) da verilen üçgen fonksiyonun Fourier transformasyonu hesaplayınız.



Şekil 19 Üçgen (Δ) fonksiyonu

Çözüm

Şekil (a) da verilen $\Delta(t)$ üçgen fonksiyonu τ ile parametrize edilerek $\Delta(\frac{t}{\tau})$ olarak (b) de verilmiştir. Çözüm (b) ye göre yapılacaktır. Önce üçgen fonksiyonun tanım aralığı verilecektir.

$$\Delta(\frac{t}{\tau}) = \begin{cases} 0 & |t| > \frac{\tau}{2} \\ 1 - 2|t| & |t| < \frac{\tau}{2} \end{cases}$$

Bu denklemin nasıl ortaya çıkarıldığını basit iki noktadan geçen doğrunun denklemi olan

$$\frac{x - x_1}{x_1 - x_2} = \frac{y - y_1}{y_1 - y_2}$$

denkleminde, $x_1 = -1/2$, $x_2 = 0$ ve $y_1 = 0$, $y_2 = 1$

$$y = 1 \pm 2x \equiv 1 - 2|t|$$

$$F(\omega) = \int_{-\tau/2}^{\tau/2} \Delta(\frac{t}{\tau}) \cos \omega t dt$$

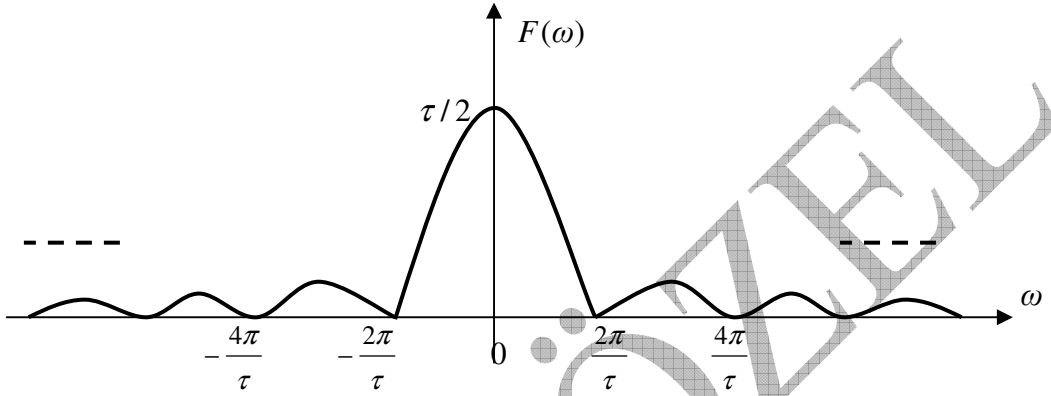
Şekilden de görüldüğü gibi üçgen $\Delta(t)$ fonksiyon da çift özellik taşıdığı için bunun çözümü içinde $(\underbrace{\cos \omega t}_{\text{çift}} + j \underbrace{\sin \omega t}_{\text{tek}})$ deki çift fonksiyon özelliğinden yararlanarak $\cos \omega t$ türünden aşağıdaki gibi yazabiliriz.

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int_{-\tau/2}^{\tau/2} \Delta(\frac{t}{\tau}) \cos \omega t dt = \int_{-\tau/2}^{\tau/2} (1 - 2t) \times \cos \omega t dt = \int_{-\tau/2}^{\tau/2} \cos \omega t dt - 2 \int_{-\tau/2}^{\tau/2} t \cos \omega t dt \\ &= \frac{1}{\omega} \sin \omega t \Big|_{-\tau/2}^{\tau/2} - \frac{2}{(\omega)^2} [\cos \omega t + \omega t \sin \omega t] \Big|_{-\tau/2}^{\tau/2} = -\frac{2}{(\omega)^2 \tau} [2 \cos \frac{\omega \tau}{2} - 2] = -\frac{2}{(\omega)^2 \tau} [2(1 - 2 \sin^2 \frac{\omega \tau}{4}) - 2] \\ &= \frac{8}{(\omega)^2 \tau} \sin^2(\frac{\omega \tau}{4}) = \frac{2\tau}{2\tau} \frac{8}{(\omega)^2 \tau} \sin^2(\frac{\omega \tau}{4}) = \frac{\tau}{2} \left(\frac{4}{\omega \tau} \right)^2 \sin^2(\frac{\omega \tau}{4}) = \frac{\tau}{2} \frac{\sin^2(\frac{\omega \tau}{4})}{\frac{\omega \tau}{4}} \times \frac{\sin^2(\frac{\omega \tau}{4})}{\frac{\omega \tau}{4}} \\ &= \frac{\tau}{2} \sin c(\frac{\omega \tau}{4}) \sin c(\frac{\omega \tau}{4}) \\ &= \frac{\tau}{2} \sin^2 c(\frac{\omega \tau}{4}) \end{aligned}$$

sonucu toparlarsak,

$$\Delta\left(\frac{t}{\tau}\right) \Leftrightarrow \frac{\tau}{2} \text{sinc}^2\left(\frac{\omega\tau}{4}\right)$$

Buradan $F(\omega)$ in değişimi çizilirse,

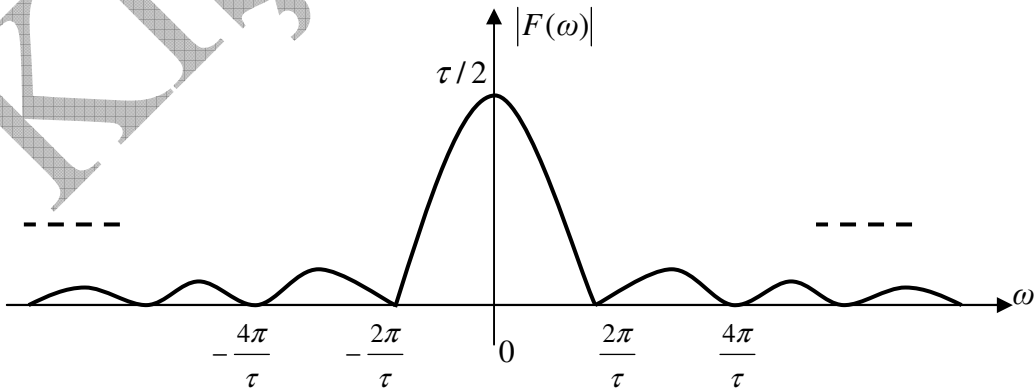


Şekil 20 Üçgen işaretin $\Delta\left(\frac{t}{\tau}\right)$ Fourier gösterimi : $F(\omega) = \frac{\tau}{2} \text{sinc}^2\left(\frac{\omega\tau}{4}\right)$

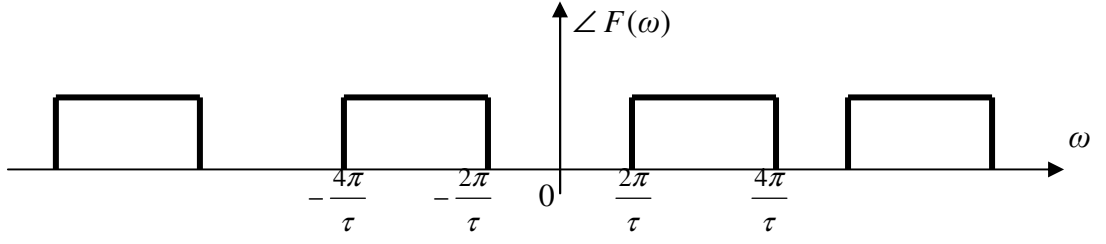
Buradan Fourier fonksiyonu genlik ve faz spektrumu olarak

$$F(\omega) = |F(\omega)| e^{j\angle F(\omega)}$$

düşünülecek olursa, burada genlik spektrumunun $|F(\omega)|$ değişmeyeceği $\frac{\tau}{2}$ olarak kalacağı, faz spektrumunun ise $\angle F(\omega) = \angle \text{sinc}^2\left(\frac{\omega\tau}{4}\right)$ den dolayı değişmeyeceği simetrik olacağı görülmektedir. Buna göre genlik ve faz spektrumları aşağıda verilmiştir.



Şekil 21 Üçgen işaretin $\Delta\left(\frac{t}{\tau}\right)$ genlik $|F(\omega)|$ spektrumu



Şekil 22 Üçgen işaretin $\Delta(\frac{t}{\tau})$ faz $\angle F(\omega)$ spektrumu

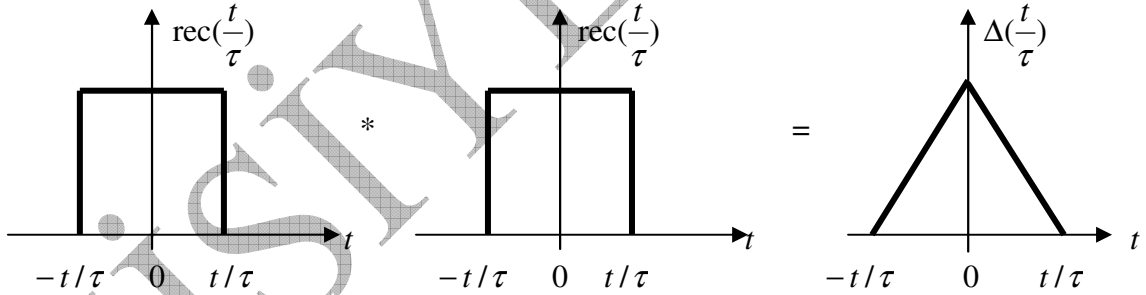
Şekillerden görüldüğü gibi kare dalga fonksiyonu $\text{rec}(\frac{t}{\tau})$ ile üçgen fonksiyon $\Delta(\frac{t}{\tau})$ arasında bir ilişki hemen fark edilmektedir. Buradan

$$\Delta(\frac{t}{\tau}) = \text{rec}(\frac{t}{\tau}) * \text{rec}(\frac{t}{\tau})$$

bağıntısı dikkat çekmektedir. Buna göre

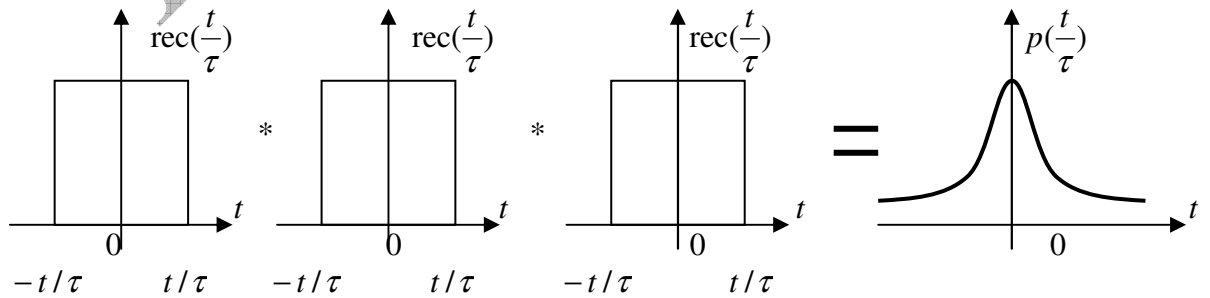
$$F(\omega) = \int_{-\tau/2}^{\tau/2} \Delta(\frac{t}{\tau}) e^{-j\omega t} dt = \text{rec}(\frac{t}{\tau}) * \text{rec}(\frac{t}{\tau})$$

Buradan zaten iki özdeş dörtgen dalganın konvülasyonunun $\text{rec}(\frac{t}{\tau}) * \text{rec}(\frac{t}{\tau})$ üçgen dalgaya karşılık geleceğini görebiliriz.



Şekil 23 Dörtgen $\text{rec}(\frac{t}{\tau})$ fonksiyonların konvülasyonu : üçgen fonksiyon $\Delta(\frac{t}{\tau})$

Örnek : üç kare dalganın konvülasyonunun normal dağılım gösteren Gauss fonksiyonu olduğunu gösterin.



Şekil 24 Dörtgen $\text{rec}(\frac{t}{\tau})$ fonksiyonların üçlü konvülasyonu : Gauss fonksiyonu

$$t = \frac{t}{\tau}$$

$$p\left(\frac{t}{\tau}\right) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\left(\frac{t}{\tau}-\mu\right)^2}{2\sigma^2}}$$

σ = standart sapma

μ = aritmetik ortalama

$$t = \frac{t}{\tau}$$

$$p(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$\sigma = 1$$

$$\mu = 0$$

$$p(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$$

Fourier Transformasyonunun Özellikleri

1. Simetri

Fourier transformasyonu simetri özelliğine sahiptir. $f(t) \Leftrightarrow F(\omega)$ temel özelliğinden hareketle simetri özelliğinde bir işaret çift ve tek fonksiyonların toplamı olarak ifade edilebilmektedir. Çift fonksiyon olma özelliğinden

$$f(-t) = f(t)$$

ve

$$f(-\omega) = f(\omega)$$

tek fonksiyon özelliğinden ise,

$$f(-t) = -f(t)$$

ve

$$f(-\omega) = -f(\omega)$$

olduğunu biliyoruz. Ayrıca bu verilerin ışığında reel kısım çift ve imajiner kısım tek olmak üzere aşağıdaki özdeşlikler simetri özelliğinden yazılabilir.

$$F\{f_{\text{cift}}(t)\} = F_{\text{cift}}(\omega)$$

ve

$$F\{f_{\text{tek}}(t)\} = F_{\text{tek}}(\omega)$$

ispat :

$$\begin{aligned} F\{f_{\text{cift}}(t)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{\text{cift}}(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\text{cift}}(t) [\cos \omega t - j \sin \omega t] dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{\text{cift}}(t) \cos \omega t dt - j \int_{-\infty}^{\infty} f_{\text{cift}}(t) \sin \omega t dt = 2 \int_0^{\infty} f_{\text{cift}}(t) \cos \omega t dt - \underbrace{j \int_{-\infty}^{\infty} f_{\text{cift}}(t) \sin \omega t dt}_0 \\ &= 2 \int_0^{\infty} f_{\text{cift}}(t) \cos \omega t dt \end{aligned}$$

2. Simetri ve Dualite

Simetri prensibinden yararlanarak dualite olarak anılan özellik geliştirilmiştir. Bunun için, eğer

$$f(t) \Leftrightarrow F(\omega)$$

özelligi mevcut ise

$$F(t) \Leftrightarrow 2\pi f(-\omega)$$

dualite koşulu olarak anılmaktadır.

İspat :

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(x) e^{jxt} dx$$

buradan,

$$2\pi f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(x) e^{jxt} dx$$

elde edilir. $t = -t$ için

$$2\pi f(-t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(x) e^{-jxt} dx$$

$t = \omega$

değişikliği yapılırsa

$$2\pi f(-\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} F(x) e^{-jx\omega} dx$$

elde edilir ki buda

$$F(t) \Leftrightarrow 2\pi f(-\omega)$$

dualite koşulunu sağlar.

Örnek

$$\text{rec}\left(\frac{t}{\tau}\right) \Leftrightarrow \tau \text{sinc}\left(\frac{\omega \tau}{2}\right) \text{ ise}$$

$$F\left\{\tau \text{sinc}\left(\frac{\tau t}{2}\right)\right\} = ?$$

Çözüm

$$F(t) \Leftrightarrow 2\pi f(-\omega)$$

dualite koşulundan.

$$\text{rec}\left(\frac{t}{\tau}\right) \Leftrightarrow \tau \text{sinc}\left(\frac{\omega \tau}{2}\right)$$

bilindiğine göre

$$\tau \text{sinc}\left(\frac{\tau t}{2}\right) \Leftrightarrow 2\pi \text{rect}\left(\frac{\omega}{\tau}\right)$$

ardından $t = -t$

$$\tau \text{sinc}\left(\frac{\tau t}{2}\right) \Leftrightarrow 2\pi \text{rect}\left[\frac{(-t)}{\tau}\right] = 2\pi \text{rect}\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

çift fonksiyon özelliğinden $\text{rect}\left(-\frac{t}{\tau}\right) = \text{rect}\left(\frac{t}{\tau}\right)$

$$\tau \text{sinc}\left(\frac{\tau t}{2}\right) \Leftrightarrow 2\pi \text{rect}\left(\frac{t}{\tau}\right)$$

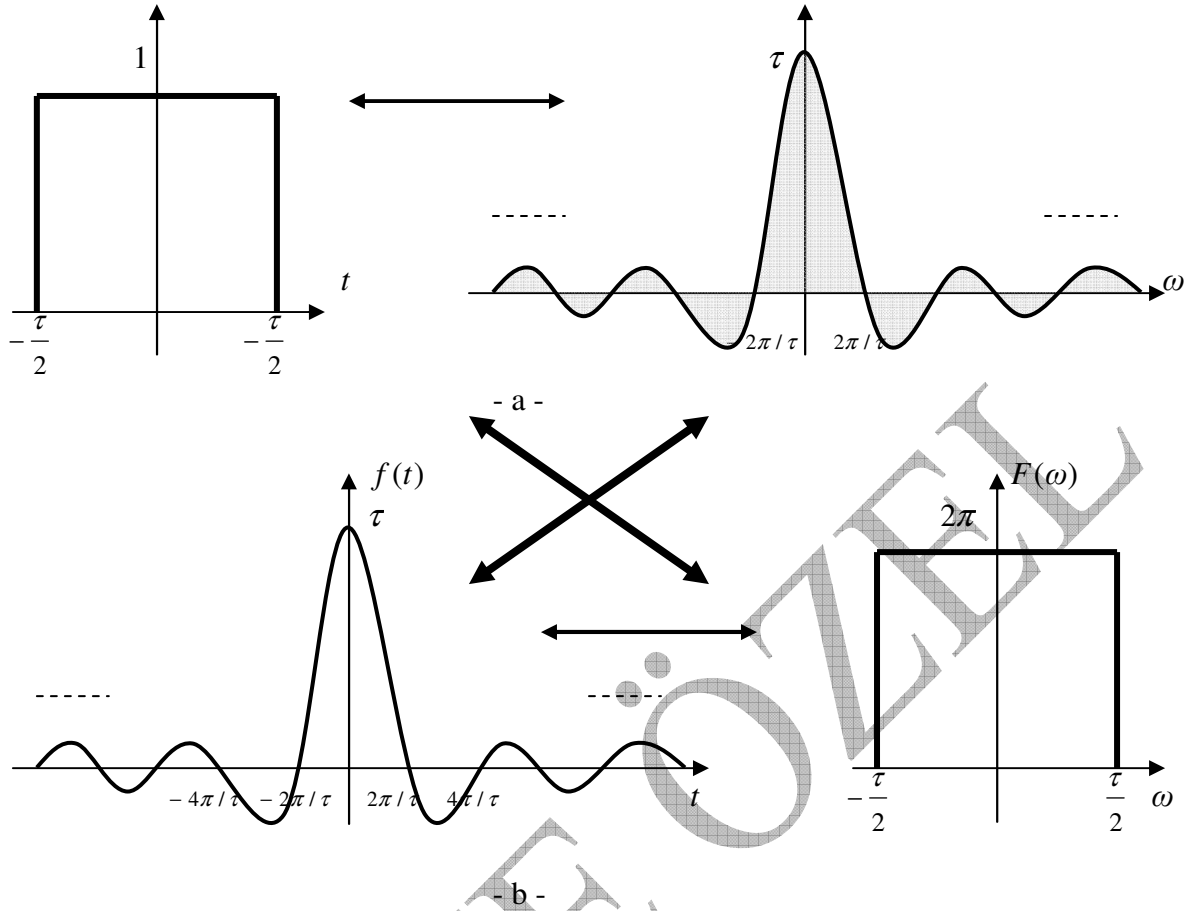
ardından $t = \omega$ alınır, nihai fonksiyon

$$\tau \text{sinc}\left(\frac{\tau t}{2}\right) \Leftrightarrow 2\pi \text{rect}\left(\frac{\omega}{\tau}\right)$$

olarak sonuçlanır. Verilen $\text{rec}\left(\frac{t}{\tau}\right) \Leftrightarrow \tau \text{sinc}\left(\frac{\omega \tau}{2}\right)$ ve bulunan $\tau \text{sinc}\left(\frac{\tau t}{2}\right) \Leftrightarrow 2\pi \text{rect}\left(\frac{\omega}{\tau}\right)$ ifadelerinin dual özelliği aşağıda gösterilmiştir.

$$f(t)$$

$$F(\omega)$$



Şekil 25 Fourier transformasyonunun dualite özelliği

Şekilden de görüldüğü gibi (a) da

$$\text{rec}\left(\frac{t}{\tau}\right) \Leftrightarrow \tau \text{sinc}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$

(b) de ise

$$\tau \text{sinc}\left(\frac{\tau t}{2}\right) \Leftrightarrow 2\pi \text{rect}\left(\frac{\omega}{\tau}\right)$$

ifadelerinin söz konusu olduğu görülmektedir.

Örnek

Aşağıdaki işaretlerin Fourier ve ters Fourier transformasyonlarını bulun.

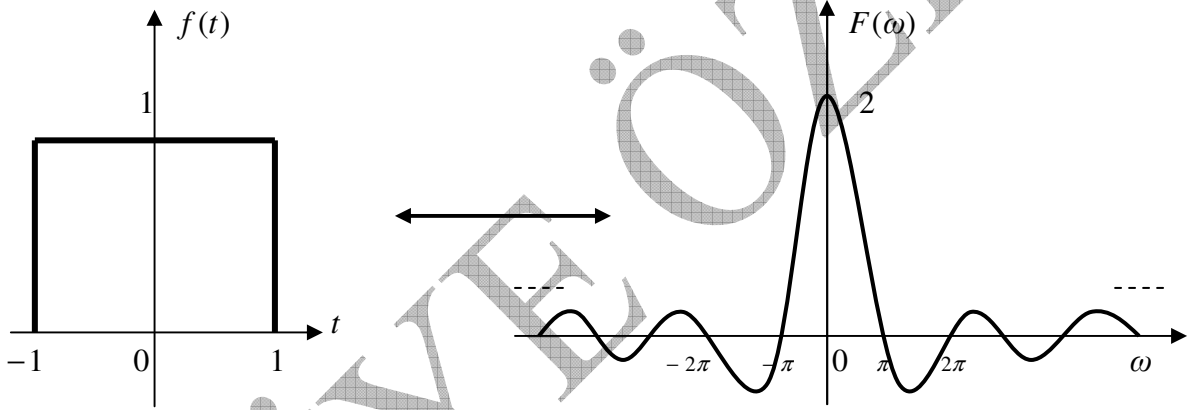
a) $f(t) = \text{rect}\left(\frac{t}{2}\right)$ b) $F(\omega) = \Delta\left(\frac{3\omega}{100}\right)$ c) $f(t) = \text{rect}\left(\frac{t-10}{8}\right)$ d) $F(\omega) = \text{sinc}\left(\frac{\pi\omega}{5}\right)$

Çözüm

a) $f(t) = \text{rect}\left(\frac{t}{2}\right)$

$\text{rect}\left(\frac{t}{\tau}\right) \Leftrightarrow \tau \text{sinc}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$ ise,

$\text{rect}\left(\frac{t}{2}\right) \Leftrightarrow 2 \text{sinc}\left(\frac{2\omega}{2}\right) = 2 \text{sinc}(\omega)$



Şekil 26 $\text{rect}\left(\frac{t}{2}\right) \Leftrightarrow 2 \text{sinc}(\omega)$

$f(t)$ işaretinin band genişliği de $F(\omega)$ spektrumundan $\omega = \pi$ rad/sn olarak görülmektedir. Dikkat edilirse $F(\omega) = \text{sinc}(\omega)$ işareti $\omega = \pm n\pi$ noktaları için sıfır olduğundan bizim örneğimizdeki $F(\omega) = 2 \text{sinc}(\omega)$ işareti de $\omega = \pm n\pi$ noktalarında sıfır olacaktır.

b) $F(\omega) = \Delta\left(\frac{3\omega}{100}\right)$ Dualite prensibinden

$f(t) \Leftrightarrow F(\omega)$

$F(t) \Leftrightarrow 2\pi f(-\omega)$

olduğuna göre

$\Delta\left(\frac{t}{\tau}\right) \Leftrightarrow \frac{\tau}{2} \text{sinc}^2\left(\frac{\omega\tau}{4}\right)$

$\frac{\tau}{2} \text{sinc}^2\left(\frac{t\tau}{4}\right) \Leftrightarrow 2\pi \Delta\left(-\frac{\omega}{\tau}\right) = 2\pi \Delta\left(\frac{\omega}{\tau}\right)$

$$2\pi \Delta\left(\frac{\omega}{\tau}\right) \Leftrightarrow \frac{\tau}{2} \text{sinc}^2\left(\frac{t\tau}{4}\right)$$

veya

$$\Delta\left(\frac{\omega}{\tau}\right) \Leftrightarrow \frac{\tau}{4\pi} \text{sinc}^2\left(\frac{t\tau}{4}\right)$$

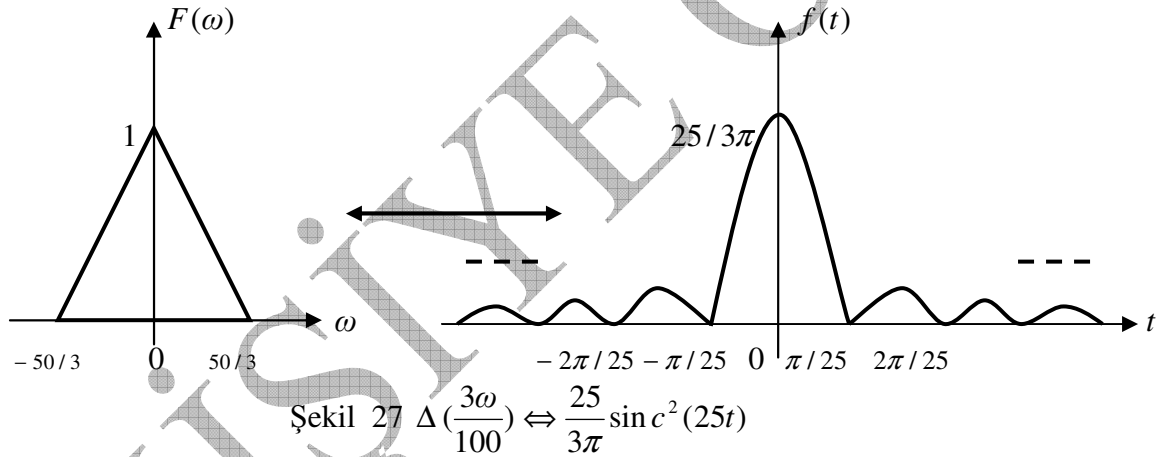
$F(\omega) = \Delta\left(\frac{3\omega}{100}\right)$ örneğini göz önüne alırsak,

$$\tau = \frac{100}{3},$$

$$\Delta\left(\frac{3\omega}{100}\right) \Leftrightarrow \frac{100/3}{4\pi} \text{sinc}^2\left(\frac{t(100/3)}{4}\right) = \frac{25}{3\pi} \text{sinc}^2(25t)$$

$$\Delta\left(\frac{3\omega}{100}\right) \Leftrightarrow \frac{25}{3\pi} \text{sinc}^2(25t)$$

Elde edilenlerin ışığında oluşan $\Delta\left(\frac{3\omega}{100}\right) \Leftrightarrow \frac{25}{3\pi} \text{sinc}^2(25t)$ dönüşümü aşağıdaki gibi gösterilir.



Dikkat edilirse $f(t) = \text{sinc}^2(t)$ işareti $t = \pm n\pi$ noktaları için sıfır olduğundan bizim örneğimizdeki $f(t) = \frac{25}{3\pi} \text{sinc}^2(25t)$ işareti de $t = \pm n\pi/25$ noktalarında sıfır olacaktır.

Grafik buna göre oluşturulmuştur. Ayrıca $F(\omega)$ spektrumundaki üçgenin sınırları görüldüğü gibi $(-50/3)$ ve $(50/3)$ olup, $f(t)$ işaretinin band genişliği de $F(\omega)$ spektrumundan $\omega = 50/3$ rad/sn olarak görülmektedir.

c) $f(t) = \text{rect}\left(\frac{t-10}{8}\right)$

$\text{rect}\left(\frac{t}{\tau}\right) \Leftrightarrow \tau \text{sinc}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$ ise,

$\text{rect}\left(\frac{t-a}{b}\right) \Leftrightarrow ?$

$\text{rect}\left(\frac{t}{b}\right) \Leftrightarrow b \text{sinc}\left(\frac{\omega b}{2}\right)$ ise, $\text{rect}\left(\frac{t-a}{b}\right) = \text{rect}\left(\frac{t}{b} - a\right)$ eğer $a = 10$ alınırsa,

$\text{rect}\left(\frac{t-ab}{b}\right) = \text{rect}\left(\frac{t}{b} - a\right)$. Bunun için öncelikle $\text{rect}\left(\frac{t}{b}\right)$, ardından $\text{rect}\left(\frac{t-a}{b}\right)$ hesaplanmalıdır.

$\text{rect}\left(\frac{t}{b}\right) \Leftrightarrow b \text{sinc}\left(\frac{\omega b}{2}\right)$

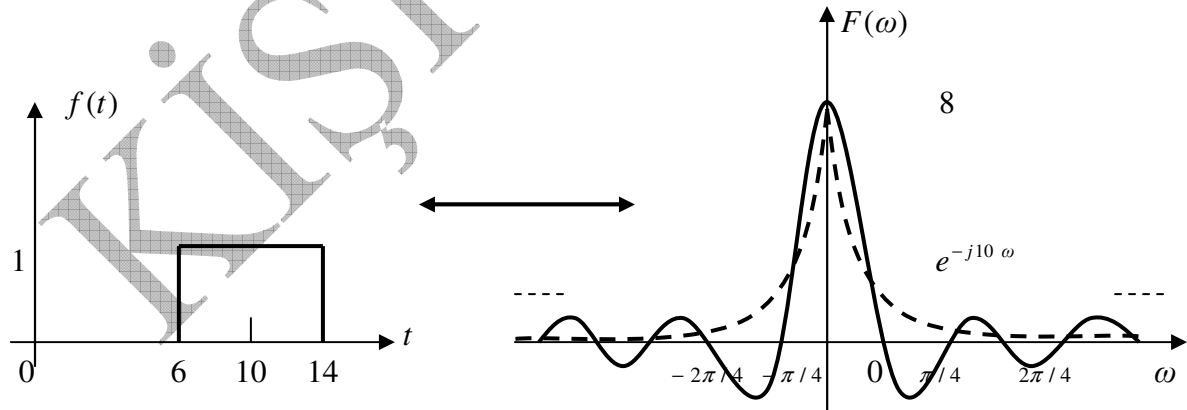
$f(t) \Leftrightarrow F(\omega)$

$f(t-a) \Leftrightarrow e^{-j\omega a} F(\omega)$

$\text{rect}\left(\frac{t}{b} - a\right) \Leftrightarrow b e^{-j\omega a} \text{sinc}\left(\frac{\omega b}{2}\right)$

$\text{rect}\left(\frac{t-10}{8}\right) \Leftrightarrow 8 e^{-j10\omega} \text{sinc}\left(\frac{8\omega}{2}\right) = 8 e^{-j10\omega} \text{sinc}(4\omega)$

$\text{rect}\left(\frac{t-10}{8}\right) \Leftrightarrow 8 e^{-j10\omega} \text{sinc}(4\omega)$



Şekil 28 $\text{rect}\left(\frac{t-10}{8}\right) \Leftrightarrow 8 e^{-j10\omega} \text{sinc}(4\omega)$

Dikkat edilirse $F(\omega) = \text{sinc}(\omega)$ işareti $\omega = \pm n\pi$ noktaları için sıfır olduğundan bizim örneğimizdeki $F(\omega) = 8 e^{-j10\omega} \text{sinc}(4\omega)$ işareti de $\omega = \pm n\pi/4$ noktalarında sıfır olacaktır.

$f(t)$ işaretinin band genişliği de $F(\omega)$ spektrumundan $\omega = \pi/4$ rad/sn olarak görülmektedir.

d) $F(\omega) = \text{sinc}\left(\frac{\pi \omega}{5}\right)$

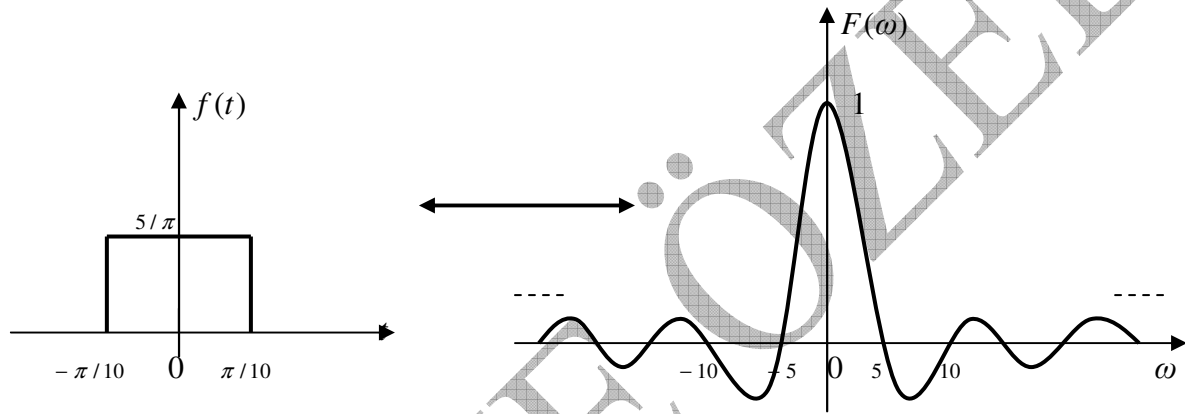
$\text{rect}\left(\frac{t}{\tau}\right) \Leftrightarrow \tau \text{sinc}\left(\frac{\omega \tau}{2}\right)$ ise,

$\tau = \frac{\pi}{5}$

$\frac{1}{\tau} \text{rect}\left(\frac{t}{\tau}\right) \Leftrightarrow \text{sinc}\left(\frac{\omega \tau}{2}\right)$

$f(t) = \frac{1}{\tau} \text{rect}\left(\frac{t}{\tau}\right) = \frac{1}{(\pi/5)} \text{rect}\left(\frac{t}{(\pi/5)}\right) = \frac{5}{\pi} \text{rect}\left(\frac{5t}{\pi}\right) \Leftrightarrow \text{sinc}\left(\frac{\pi \omega}{5}\right)$

$\frac{5}{\pi} \text{rect}\left(\frac{5t}{\pi}\right) \Leftrightarrow \text{sinc}\left(\frac{\pi \omega}{5}\right)$



Şekil 29 $\frac{5}{\pi} \text{rect}\left(\frac{5t}{\pi}\right) \Leftrightarrow \text{sinc}\left(\frac{\pi \omega}{5}\right)$

Dikkat edilirse $F(\omega) = \text{sinc}(\omega)$ işareti $\omega = \pm n\pi$ noktaları için sıfır olduğundan bizim örneğimizdeki $F(\omega) = \text{sinc}\left(\frac{\pi \omega}{5}\right)$ işareti de $\omega = \pm 5n$ noktalarında sıfır olacaktır. $f(t)$ işaretinin band genişliği de $F(\omega)$ spektrumundan $\omega = 5$ rad/sn olarak görülmektedir.

Örnek

$f(t) = \frac{\omega_0}{\pi} \text{sinc}(\omega_0 t)$ Fonksiyonunun Fourier transformasyonunu bulun.

Çözüm

Verilen fonksiyon $f(t) = \frac{\omega_0}{\pi} \text{sinc}(\omega_0 t)$

$\tau \text{sinc}\left(\frac{\tau t}{2}\right) \Leftrightarrow 2\pi \text{rect}\left(\frac{\omega}{\tau}\right)$

kuralı göz önüne alınırsa, problemimiz buna uygun olarak aşağıdaki gibi düzenlenir

$$\frac{\omega_0}{\pi} \text{sinc}(\omega_0 t) = \frac{1}{2\pi} [2\omega_0 \text{sinc}(\omega_0 t)]$$

$$\tau \text{sinc}\left(\frac{\tau t}{2}\right) \Leftrightarrow 2\pi \text{rect}\left(\frac{\omega}{\tau}\right) \text{ dönüşümü gereği } \tau = 2\omega_0$$

$$2\omega_0 \text{sinc}(\omega_0 t) \Leftrightarrow 2\pi \text{rect}\left(\frac{\omega}{2\omega_0}\right)$$

$$\frac{1}{2\pi} [2\omega_0 \text{sinc}(\omega_0 t)] \Leftrightarrow \frac{1}{2\pi} \left[2\pi \text{rect}\left(\frac{\omega}{2\omega_0}\right) \right]$$

$$\frac{\omega_0}{\pi} \text{sinc}(\omega_0 t) \Leftrightarrow \text{rect}\left(\frac{\omega}{2\omega_0}\right)$$

Örnek

Dualite koşulundan yararlanarak $f(t) = \frac{\omega_0}{2\pi} \text{sinc}^2\left(\frac{\omega_0 t}{2}\right)$ ifadesinin Fourier transformasyonunu hesaplayın.

Çözüm

$$F(t) \Leftrightarrow 2\pi f(-\omega)$$

dualite koşulundan.

$$\Delta\left(\frac{t}{\tau}\right) \Leftrightarrow \frac{\tau}{2} \text{sinc}^2\left(\frac{\omega\tau}{4}\right)$$

sonucunu bildiğimize göre

$$\Delta\left(\frac{t}{\tau}\right) \Leftrightarrow \frac{\tau}{2} \text{sinc}^2\left(\frac{\omega\tau}{4}\right) \Leftrightarrow \frac{\tau}{2} \left[2\pi \Delta\left(\frac{-t\tau}{4}\right) \right] = \tau \pi \left[\Delta\left(\frac{t\tau}{4}\right) \right] = \tau \pi \left[\Delta\left(\frac{\omega\tau}{4}\right) \right]$$

$$\text{sinc}^2\left(\frac{\omega}{\tau}\right) = \text{sinc}^2\left(\frac{t}{\tau}\right)$$

$$\text{sinc}^2\left(\frac{t}{\tau}\right) \Leftrightarrow \tau \pi \left[\Delta\left(\frac{\omega\tau}{4}\right) \right]$$

Bunu elde ettiğimize göre problemde sorulan $f(t) = \frac{\omega_0}{2\pi} \text{sinc}^2\left(\frac{\omega_0 t}{2}\right)$ ifadesinin Fourier transformasyonunu hesaplayabiliriz.

$$\tau = \frac{2}{\omega_0}$$

$$f(t) = \frac{\omega_0}{2\pi} \text{sinc}^2\left(\frac{\omega_0 t}{2}\right) = \frac{\omega_0}{2\pi} \left[\text{sinc}^2\left(\frac{\omega_0 t}{2}\right) \right]$$

$$\left[\text{sinc}^2\left(\frac{\omega_0 t}{2}\right) \right] \Leftrightarrow \frac{2\pi}{\omega_0} \left[\Delta\left(\frac{\omega \frac{2}{\omega_0}}{4}\right) \right] = \frac{2\pi}{\omega_0} \left[\Delta\left(\frac{\omega}{2\omega_0}\right) \right]$$

$$\frac{\omega_0}{2\pi} \left[\text{sinc}^2\left(\frac{\omega_0 t}{2}\right) \right] = \frac{\omega_0}{2\pi} \left[\frac{2\pi}{\omega_0} \left[\Delta\left(\frac{\omega}{2\omega_0}\right) \right] \right] = \Delta\left(\frac{\omega}{2\omega_0}\right)$$

Dolayısıyla sonucu genelleyerek aşağıdaki gibi yazabiliriz.

$$\frac{\omega_0}{2\pi} \left[\text{sinc}^2\left(\frac{\omega_0 t}{2}\right) \right] \Leftrightarrow \Delta\left(\frac{\omega}{2\omega_0}\right)$$

Bunun ışığında dualite prensibinden yararlanılarak bulunan diğer üçgen işlemlerinde aşağıdaki gibi yazabiliriz.

- $\Delta\left(\frac{t}{\tau}\right) \Leftrightarrow \frac{\tau}{2} \text{sinc}^2\left(\frac{\omega \tau}{4}\right)$
- $\text{sinc}^2\left(\frac{t}{\tau}\right) \Leftrightarrow \tau \pi \left[\Delta\left(\frac{\omega \tau}{4}\right) \right]$
- $\frac{\omega_0}{2\pi} \left[\text{sinc}^2\left(\frac{\omega_0 t}{2}\right) \right] \Leftrightarrow \Delta\left(\frac{\omega}{2\omega_0}\right)$

Örnek

$f(t) = \text{sinc}(100\pi t)$ işaretinin a) Fourier transformasyonunu, b) band genişliğini bulun

Çözüm

a) $f(t) = \text{sinc}(100\pi t)$ işaretinin Fourier transformasyonunu önceki bilgilerimizden

$$\frac{W}{\pi} \text{sinc}(W t) \Leftrightarrow \text{rect}\left(\frac{\omega}{2W}\right)$$

olduğunu bildiğimize göre, $\text{sinc}(100\pi t)$ fonksiyonunun Fourier transformasyonunu $\text{rect}\left(\frac{\omega}{2W}\right)$ gibi bulmamız gerekiyor. Bunun için $\text{sinc}(100\pi t)$ fonksiyonunu önce $\frac{W}{\pi} \text{sinc}(W t)$ gibi düzenlememiz gerekecek. Bunun için

$$\begin{aligned} \text{sinc}(100\pi t) &= \frac{\pi}{100\pi} \left[\frac{100\pi}{\pi} \text{sinc}(100\pi t) \right] = \frac{\pi}{100\pi} \left[\text{rect}\left(\frac{\omega}{200\pi}\right) \right] \\ &= 0.01 \text{rect}\left(\frac{\omega}{200\pi}\right) \end{aligned}$$

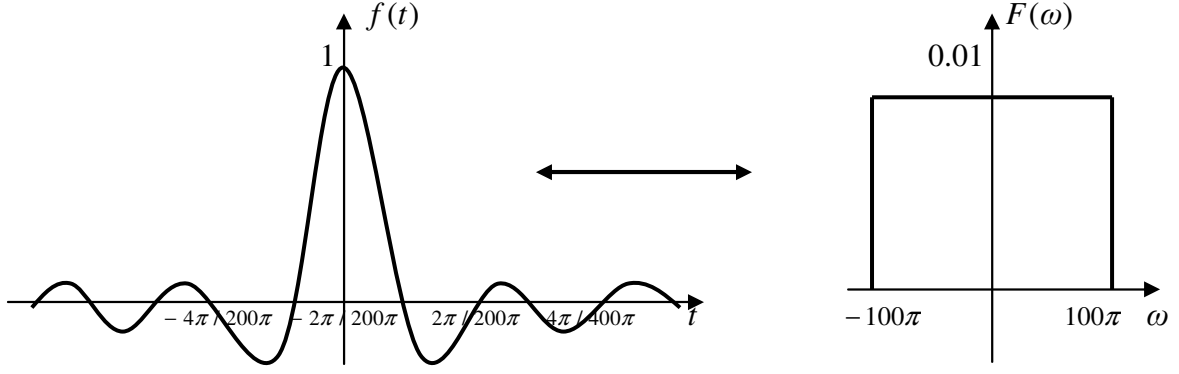
$$0.01 \text{rect}\left(\frac{\omega}{200\pi}\right) \Leftrightarrow \text{rect}\left(\frac{\omega}{2W}\right)$$

b) Band genişliği bulmak için $f(t) = \text{sinc}(100\pi t)$ işareti $\frac{W}{\pi} \text{sinc}(W t) \Leftrightarrow \text{rect}\left(\frac{\omega}{2W}\right)$ ile karşılaştırılır. W değişkeni, rad/sn olarak frekans veya band genişliğini göstermektedir. Buna göre band genişliği

$$\text{sinc}(100\pi t) = \frac{W}{\pi} \text{sinc}(W t)$$

$$W = 100\pi \text{ rad/sn veya } f = 50 \text{ Hz}$$

Elde edilenlerin ışığında oluşan $\text{sinc}(100\pi t) \Leftrightarrow 0.01 \text{rect}\left(\frac{\omega}{200\pi}\right)$ dönüşümü aşağıdaki gibi gösterilir.



Şekil 30 Fourier transformasyonunun dualite özelliği

Örnek

$f(t) = \sin^2(5\pi t)$ işaretinin a) Fourier transformasyonunu bulun, b) band genişliğini bulun.

Çözüm

a) Verilen $f(t) = \sin^2(5\pi t)$ işaretinin Fourier transformasyonunu önceki bilgilerimizden

$$\frac{W}{2\pi} \sin^2\left(\frac{Wt}{2}\right) \Leftrightarrow \Delta\left(\frac{\omega}{2W}\right)$$

Verilen $f(t) = \sin^2(5\pi t)$ fonksiyonunun Fourier transformasyonunu bulmamız gerekiyor. Daha önceden

$$\frac{W}{2\pi} \sin^2\left(\frac{Wt}{2}\right) \Leftrightarrow \Delta\left(\frac{\omega}{2W}\right)$$

olduğunu bildiğimize göre, $\sin^2(5\pi t)$ fonksiyonunun Fourier transformasyonunu $\Delta\left(\frac{\omega}{2W}\right)$ gibi bulmamız gerekiyor. Denklemden görülen “ Δ ” üçgen fonksiyonu operatörüdür. Bunun için $\Delta\left(\frac{\omega}{2W}\right)$ fonksiyonunu önce $\frac{W}{2\pi} \sin^2\left(\frac{Wt}{2}\right)$ gibi düzenlememiz gerekecek. Bunun için

$$\begin{aligned} \sin^2(5\pi t) &= 30 \frac{2\pi}{10\pi} \left[\frac{10\pi}{2\pi} \sin^2\left(\frac{10\pi t}{2}\right) \right] = \left[\Delta\left(\frac{\omega}{2 \times 10\pi}\right) \right] \\ &= \Delta\left(\frac{\omega}{20\pi}\right) \end{aligned}$$

$$\Delta\left(\frac{\omega}{20\pi}\right) \Leftrightarrow \Delta\left(\frac{\omega}{2W}\right)$$

b) Band genişliği bulmak için $f(t) = \sin^2(5\pi t)$ işareti $\frac{W}{2\pi} \sin^2\left(\frac{Wt}{2}\right) \Leftrightarrow \Delta\left(\frac{\omega}{2W}\right)$

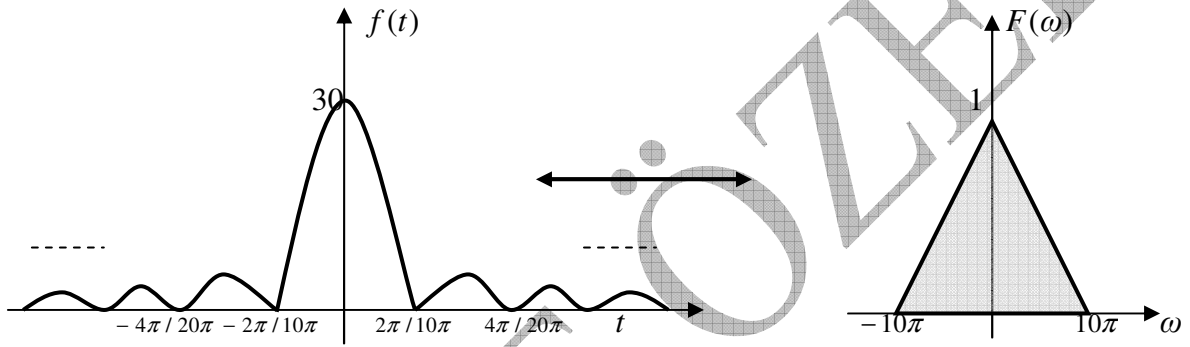
ile karşılaştırılır. W değişkeni, rad/sn olarak frekans veya band genişliğini göstermektedir. Buna göre band genişliği

$$30 \sin^2(5\pi t) = \frac{W}{\pi} \sin^2\left(\frac{Wt}{2}\right)$$

$$\frac{W}{2} = 5\pi$$

$$W = 10\pi \text{ rad/sn veya } f = 5 \text{ Hz}$$

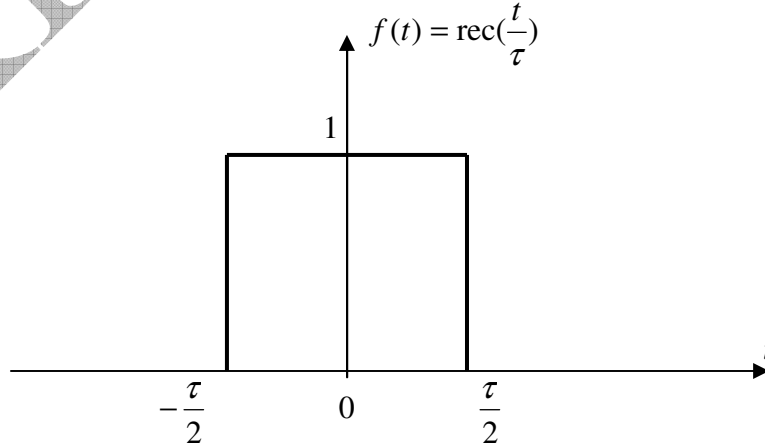
Elde edilenlerin ışığında oluşan $30 \sin^2(5\pi t) \Leftrightarrow \Delta\left(\frac{\omega}{20\pi}\right)$ dönüşümü aşağıdaki gibi gösterilir.



Şekil 31 Fourier transformasyonunun dualite özelliği

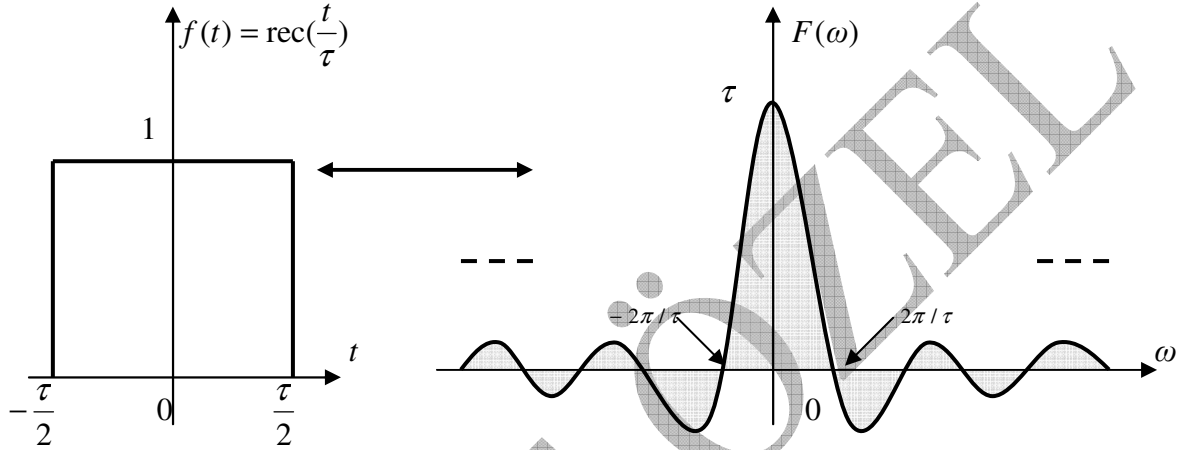
DARBE İŞARETLER VE FİLTRE ÖZELLİKLERİ

Burada dikdörtgen görünümündeki başta sıfır genişlikli impuls, ardından belli genişlikteki darbe, hatta darbe dizisi biçimindeki işaretlerin farklı ve önemli özellikleri mevcuttur. Bunlarla sık olarak gerek işaret işleme konularında gerekse sistem analizlerinde karşılaşmaktayız. Haberleşme sistemleri açısından duruma bakarsak, aşağıdaki gibi bir darbe işaretinin tek başına fazla anlamı olmadığını görmekteyiz.



Şekil 32 Darbe işareti

Zaman domenindeki böyle bir darbe işaretinin τ genişliğindeki bilgisinden daha fazlasını elde etmek zor görünüyor. Örneğin böyle görüntedeki bir işaret için, bilgi veya mesajı temsil etme özelliğindeki böyle bir işareti veya bilgiyi bir haberleşme sisteminden iletmek mümkün olabilir mi?, sorusunu, yalnızca mevcut şekle bakarak cevaplandırmak zordur. Bunun sebebi cevabı kolaylaştıracak detayların, zaman domenindeki gösterimde mevcut olmayışıdır. Zaten Fourier serisi veya Fourier transformasyonunu ele almamızın sebebi, işaretin zaman domenindeki davranışından fazla bilgi edinilemeyeceğidir. Bu yüzden yukarıdaki darbe işaretini anlamlı kılmak adına, onun daha ziyade frekans domenindeki davranışını incelemek daha yararlı olacaktır. Bu anlamda aşağıdaki görüntü daha faydalı olacaktır.

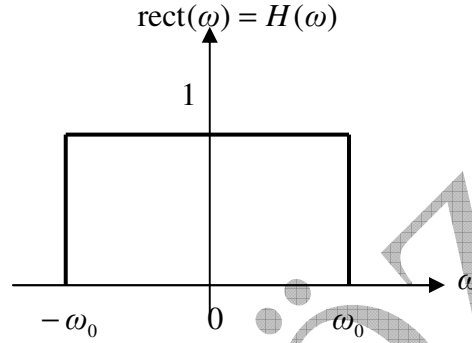


Şekil 33 Darbe işareti ve spektrumu $\text{rec}(\frac{t}{\tau}) \Leftrightarrow \tau \text{sinc}(\frac{\omega \tau}{2})$

Şekile bakıldığında, $F(\omega)$ spektrumunun $f(t)$ işaretini daha tamamlayıcı özellikte olduğunu görmekteyiz. Bunu, şimdi yukarıda abhsedilen haberleşme sistemleri açısından değerlendirmek daha sağlıklı olacaktır. Çünkü yukarıda sorulan, $f(t)$ darbesini bir iletim kanalından gönderebilir miyiz sorusuna, yalnızca orada mevcut olan zaman domenindeki davranışına bakarak değerlendirmemiz veya analiz etmemiz mümkün değildir. Zaman domeni davranışı, sınırlı bilgi sağlayan bir domendir. Ama şu anda verilen $F(\omega)$ spektrumuyla sorunun cevabını verebilecek durumdayız. Çünkü ekstra verilen $F(\omega)$ spektrumu bize bu imkanı sağlamaktadır. Buna göre $F(\omega)$ spektrumuna bakıldığında $F(\omega) = \tau \text{sinc}(\frac{\omega \tau}{2})$ özellikli spektrumun sonsuz banda sahip olduğunu görmekteyiz. Yani zaman domenindeki $f(t) = \text{rec}(\frac{t}{\tau})$ darbe işaretinin band genişliğinin sonsuz olduğunu Fourier transformasyonu ile belirlenen $F(\omega)$ spektrumundan görebilmekteyiz. Buna göre genelde band sınırlı olan iletim kanalından, band limitsiz olan darbe işaretini iletemeyeceğimiz ortaya çıkmaktadır. Dolayısıyla bize bu önemli bilgiyi, zaman domeni değil, frekans domeni sağlamıştır. Bu yüzden hem haberleşme dahil bir çok alanda karşılaşılabileceğimiz darbe işaretinin bu özelliğini, spektrumundan elde etmiş bulunmaktayız. Darbe işaretinin bir çok görüntüsünün ve özelliğinin yanısıra teorik olarak, sonsuz band gösterme özelliği, önemlidir. Bu anlamda bunu anlamış bulunmaktayız.

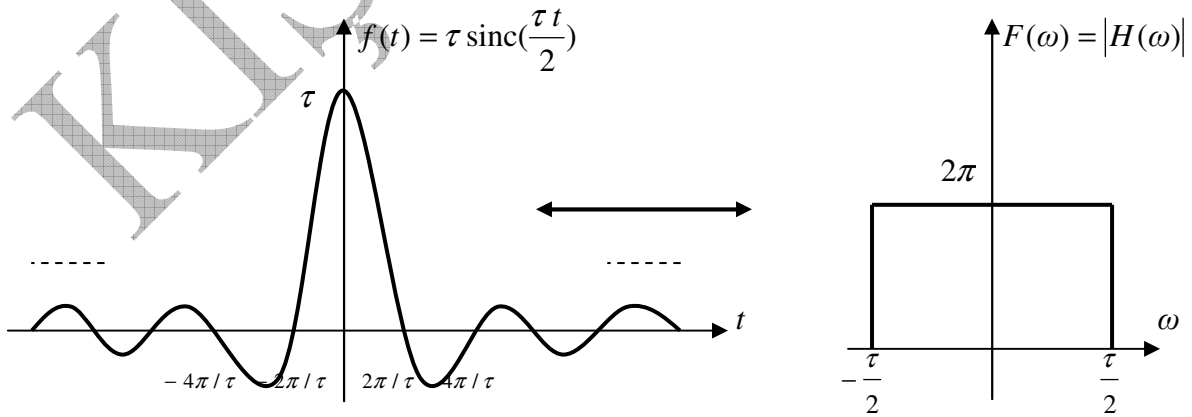
Bunun yanısıra darbe tipli dikdörtgen veya kare dalga gibi işaretlerin sayısal işaret işlemede, sayısal bilgilerin gösteriminde de önemlidir.

Bunlara ek olarak, darbe işaretinin bir diğer özelliği ve önemli uygulama alanında ideal filtreler üzerinedir. Aslında sistem açısından bir bakıma en önemli özelliklerinin filtreleme üzerine olduğunu da düşünebiliriz. Darbe fonksiyonunun gerek zaman gerese frekans domenindeki görüntüsü bile tipik filtrasyon özelliğindedir. Çünkü belli aralıkta, örneğin merkezde olan bir dörtgen işaretin, genliği veya daha bilinen biçimiyle kazancının sıfır veya orijin civarındaki değerler için var olduğu düşünülürse, bunun filtre karşılığı olarak, alçak geçiren filtrenin karşılığı olduğu hemen anlaşılır. Eğer yukarıda ele alınan darbe işaretine sistem fonksiyonu açısından aşağıdaki gibi düzenlersek, darbe işaretinin filtre özelliği daha net olarak ortaya çıkar.



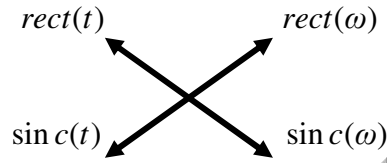
Şekil 34 Darbe işareti ve ideal alçak geçiren filtre özelliği

Bu şekil biraz daha farklı değerlendirilebilir. Örneğin kesim frekansları $-\omega_0$ ve ω_0 olan sıfır (0) merkezli bir ideal alçak geçiren filtre bu aralığı geçirme özelliğinde ve $H(\omega)$ kazancına (genlik frekans cevabı) sahip bir alçak geçiren filtre olarak düşünülebilir. $(-\omega_0, \omega_0)$ aralığı sıfır civarında daha ziyade düşük frekansları içerdiğinden ve bu aralık için filtre kazancı $|H(\omega)| = 1$ olduğundan (ideal filtre), aralık içindeki düşük frekanslar geçirilirken, aralık dışında kalan yüksek frekanslar geçirilmemektedirler ($|H(\omega)| = 0$). Bu yüzden darbe işareti sahip olduğu spektrumuyla sistem açısından önemli bir filtre örneğidir. Burada darbe spektrumunu sağlayan işaretin zaman domenindeki karşılığı da elbette önemlidir. Bunun yukarıda verilen örnek gereği bir $\sin c(t)$ fonksiyonu şeklinde olduğunu biliyoruz. Buna göre

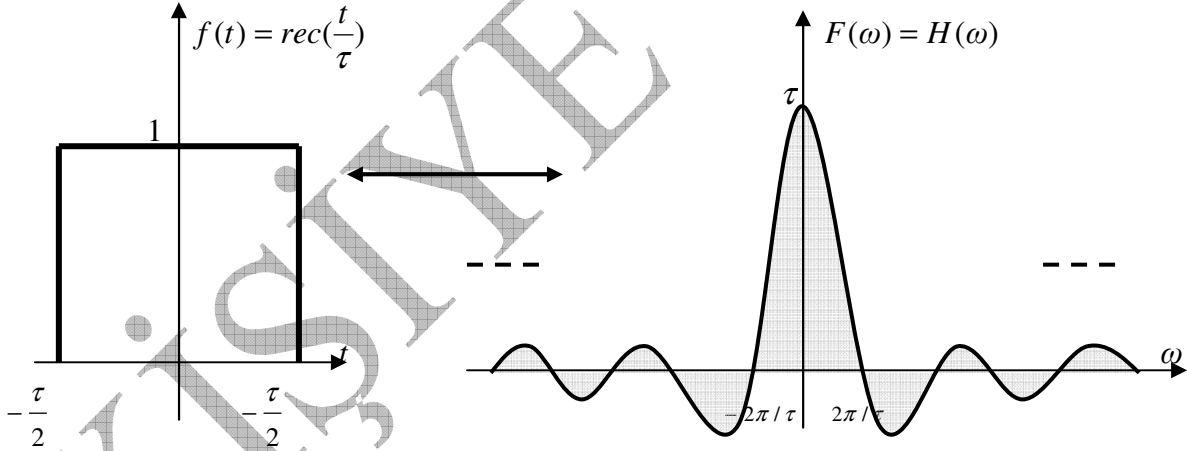


Şekil 35 Alçak geçiren filtre : darbe işareti : $\tau \text{sinc}(\frac{\tau t}{2}) \Leftrightarrow 2\pi \text{rect}(\frac{\omega}{\tau})$

Şekilden, bir “ $\text{sinc}(t)$ ” fonksiyonunun spektrumunun ideal bir alçak geçiren filtre olduğunu görmekteyiz. Burada $f(t) = \tau \text{sinc}(\frac{\tau t}{2})$ fonksiyonunun spektrumunun aynı zamanda bir ideal alçak geçiren filtrenin frekans cevabı yani genlik frekans cevabı özelliğinde olduğunu görmekteyiz. Böyle bir spektrumdan ilgili filtrenin kazanç karakteristiği analiz edilebilir. Bununla kastedilen, filtrenin hangi yönde geçirme hangi yönde durdurma özelliğinde oluşu $|H(\omega)|$ kazancıyla kolaylıkla tespit edilebilmektedir. Diğer yandan spektrumu $\text{sinc}(\omega)$ şeklinde olan fonksiyonlarında filtre özelliği olduğunu düşünebiliriz. Çünkü

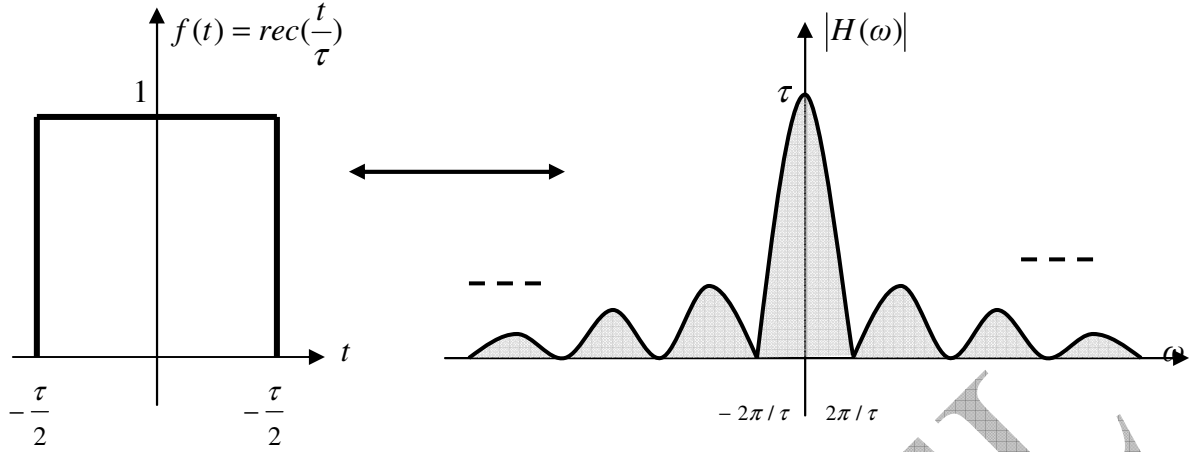


gibi simetri ve dualite özelliğinden dolayı $\text{rect}(t)$ ve $\text{sinc}(t)$ fonksiyonlarının spektrumları $\text{sinc}(\omega)$ ve $\text{rect}(\omega)$ olarak filtre özelliğinde olacaktır. Bu açıdan $\text{sinc}(\omega)$ fonksiyonunu incelersek grafiğinin aşağıdaki gibi olacağını önceki deneyimlerimizden biliyoruz.



Şekil 36 Alçak geçiren filtre : $F(\omega) = \tau \text{sinc}(\frac{\omega \tau}{2})$

Spektrum tarafında yer alan $F(\omega) = H(\omega)$ fonksiyonunu $|H(\omega)|$ filtre kazancını gösterecek şekilde değiştirirsek, aşağıdaki şekil ortaya çıkacaktır.



Şekil 37 Alçak geçiren filtre kazancı

Görüldüğü gibi $\text{sinc}(\omega)$ fonksiyonu özelliğindeki $\tau \text{sinc}(\frac{\omega\tau}{2})$ fonksiyonunun spektrumundan veya $|H(\omega)|$ kazancından bir tür alçak geçiren filter (LPF) davranışı gözlemlemekteyiz. Kazanç spektrumdan LPF gibi sıfıra yakın düşük frekansların bulunduğu $(-2\pi/\tau, 2\pi/\tau)$ aralığındaki bileşenler için sistem kazancının büyük oluşu, verilen aralıktaki düşük frekansları geçirme, aralığın dışında kalan yüksek frekansları ise durdurma yönünde hareket ettiğini göstermektedir. Bu nedenle $\text{rect}(t) \Leftrightarrow \text{sinc}(\omega)$ ve $\text{sinc}(t) \Leftrightarrow \text{rect}(\omega)$ simetrisindeki darbe ve “sinc” fonksiyonlarını, ayrıca filter özellikleri açısından da bilmemiz faydalı olacaktır.

Tespit : Bu verilerin ışığında bir $f(t)$ işaretine ait genlik frekans cevabının önemi ortaya çıkmaktadır. Genliğin frekansla değişimini vurgulayan bu özellik, **sistem frekans cevabı** veya **genlik frekans cevabı** gibi isimlerle bilinmektedir. Verilen işareti göz önüne aldığımızda $|F(\omega)|$ olarak ifade edilebilen bu kavramların tümünün ortak özelliği, aynı zamanda filtrelerin davranışlarını analiz etmeye yarayan önemli bir parametre olduğudur. Bir filtrenin özelliği $|F(\omega)|$ genlik frekans cevabı göz önüne alınarak analiz edilmektedir. Bu yüzden filtre analizinde **filtre kazancı** veya **sistem kazancı** veya kısaca **kazanç** olarak da anılmaktadır. Durumu genellersek aslında

$$f(t) \leftrightarrow |F(\omega)|$$

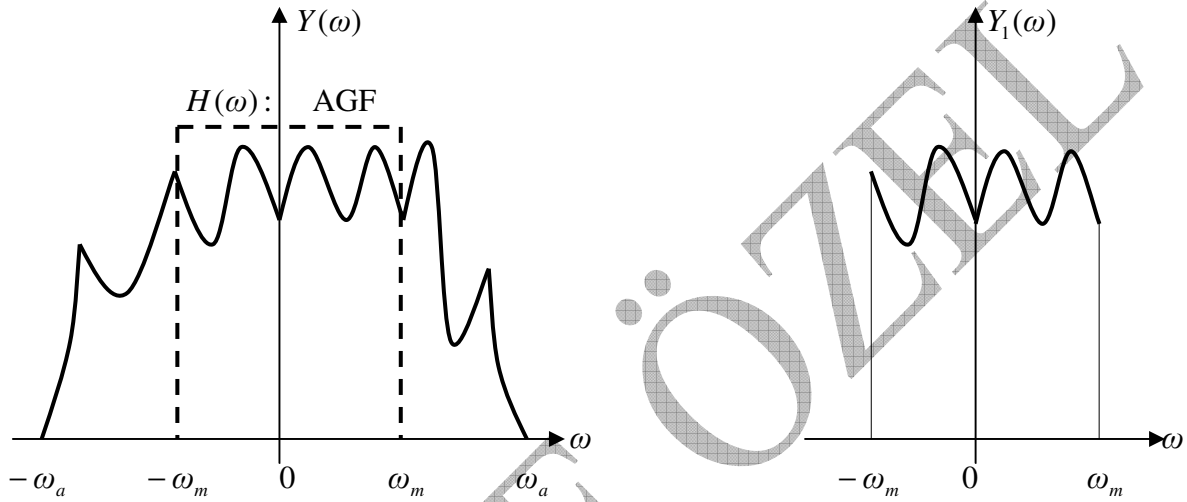
ifadesiyle filtre analizini mümkün kılmaktayız. Filtre bir sistem olduğuna göre aslında bir sistemi en iyi şekilde temsil edecek fonksiyonun sistem transfer fonksiyonu olduğu göz önüne alınırsa, $f(t) \leftrightarrow |F(\omega)|$ filtre analiz ifadesinde $H(\omega)$ transfer fonksiyonu dolayısıyla da $|H(\omega)|$ biçimi göz önüne alındığında, filtre analizi olarak kullanılabilecek doğru ifadenin

$$h(t) \leftrightarrow |H(\omega)| \quad \text{filtre analizi}$$

olduğu ortaya çıkar. Bu yeni durumda aslında filtre analizini yapmaya yarayan kazanç değerini, transfer fonksiyonundan gelen $|H(\omega)|$ ifadesi olduğu görülmektedir. Böylelikle $|H(\omega)|$ kazancı göz önüne alınarak filtrenin davranışı analiz edilir.

Örnek

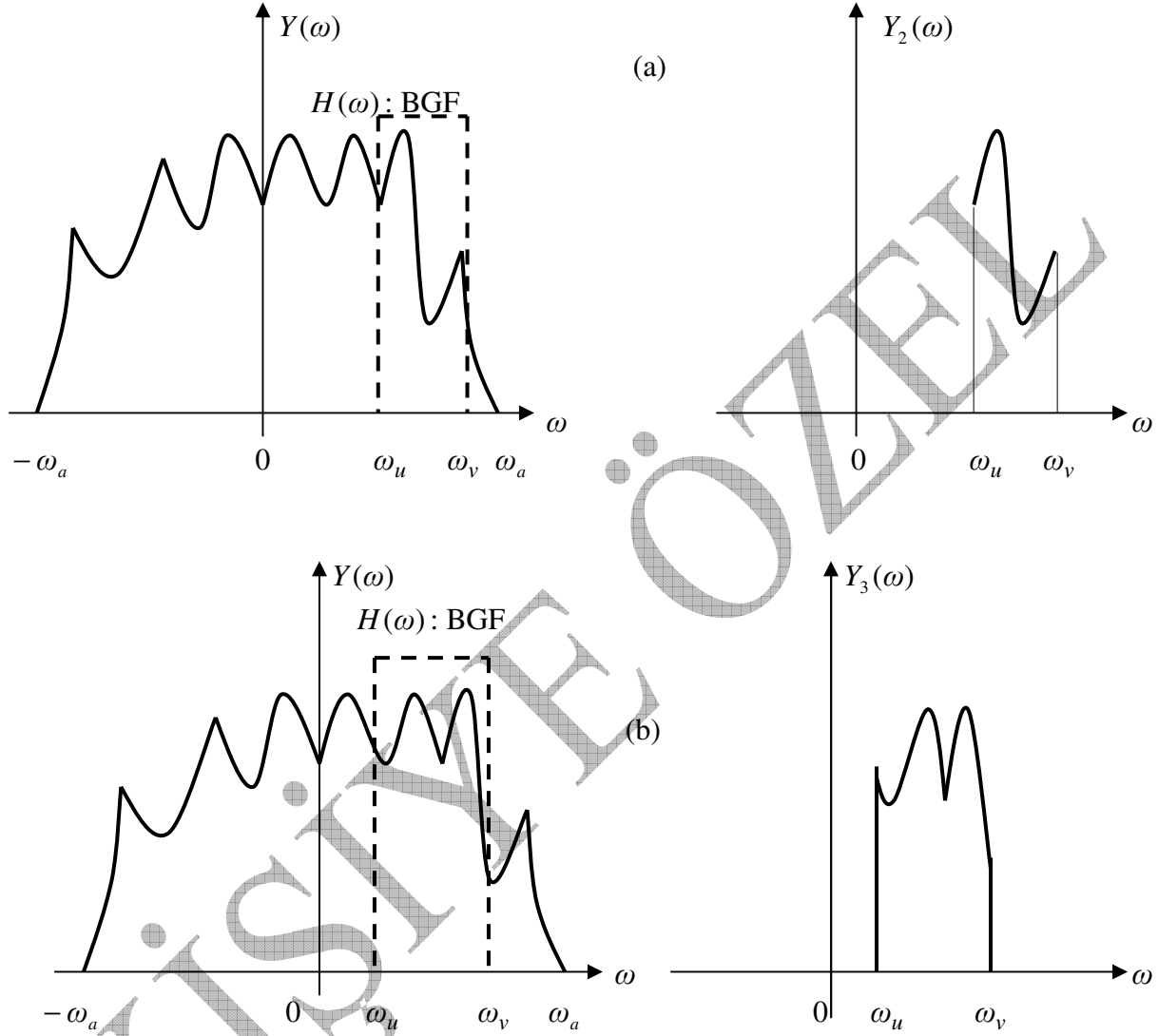
Aşağıda $Y(\omega)$ işaretinin $H(\omega)$ alçak geçiren filtreden (AGF) geçirilmesiyle oluşan parçası $Y_1(\omega)$ de gösterilmiştir.



Şekil 38 Alçak geçiren filtrenin cevabı : $Y_1(\omega) = Y(\omega)H(\omega)$

Örnek

Aşağıda $Y(\omega)$ işaretinin $H(\omega)$ band geçiren filtreden (BGF) geçirilmesiyle oluşan parçası $Y_2(\omega)$ ve $Y_3(\omega)$ de gösterilmiştir.



Şekil 39 Band geçiren filtrenin cevabı : $Y_2(\omega) = Y(\omega)H(\omega)$ ve $Y_3(\omega) = Y(\omega)H(\omega)$

Örnek

Aşağıdaki işaretlerin Fourier ve ters Fourier transformasyonlarını bulun. $f_1(t) = 10^4 \text{rect}(10^4 t)$ ve $f_2(t) = \delta(t)$ işaretleri ideal bir alçak geçiren filtrenin girişleri,

$H_1(\omega) = \text{rect}\left(\frac{\omega}{40.000\pi}\right)$ ve $H_2(\omega) = \text{rect}\left(\frac{\omega}{20.000\pi}\right)$ filtrenin transfer fonksiyonlarıdır.

Filtrenin sistem çıkışı $y_1(t)$ ve $y_2(t)$ çıkışlarının $y(t) = y_1(t)y_2(t)$ biçimindeki ifadesinden oluşmaktadır.

- a) $F_1(\omega)$ ve $F_2(\omega)$ işaretlerinin değişimlerinin çizin
b) $H_1(\omega)$ ve $H_2(\omega)$ işaretlerinin değişimlerinin çizin
c) $Y_1(\omega)$ ve $Y_2(\omega)$ işaretlerinin değişimlerinin çizin
d) $y_1(t)$, $y_2(t)$ ve $y(t)$ işaretlerinin band genişliklerini belirleyin.

a)

1) $f_1(t) = 10^4 \text{rect}(10^4 t)$

$\text{rect}\left(\frac{t}{\tau}\right) \Leftrightarrow \tau \text{sinc}\left(\frac{\omega \tau}{2}\right)$ ise,

$10^4 \text{rect}\left(\frac{t}{10^{-4}}\right) \Leftrightarrow (10^{-4} \times 10^4) \text{sinc}\left(\frac{\omega 10^{-4}}{2}\right) = \text{sinc}\left(\frac{\omega}{20.000}\right)$

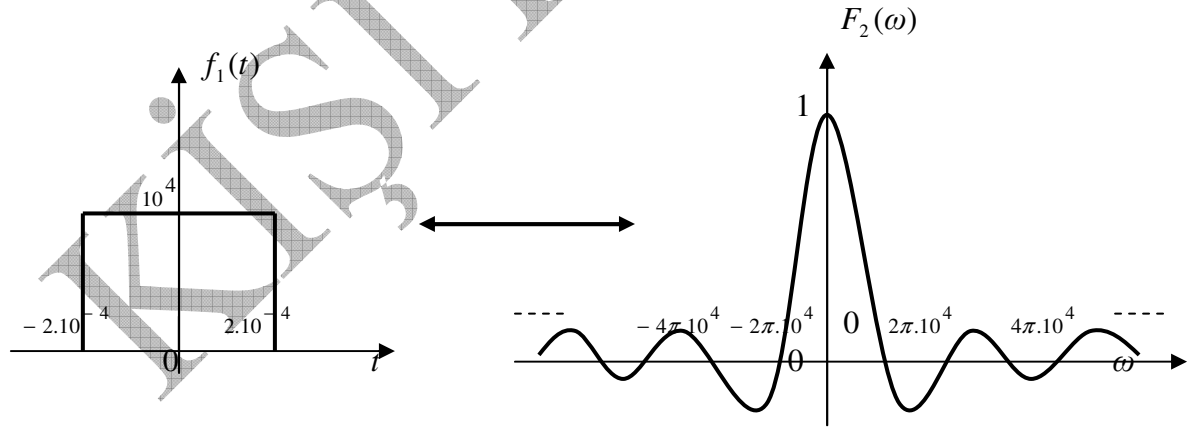
$10^4 \text{rect}\left(\frac{t}{10^{-4}}\right) \Leftrightarrow \text{sinc}\left(\frac{\omega}{20.000}\right)$

$F_1(\omega) = \text{sinc}\left(\frac{\omega}{20.000}\right)$

2) $f_2(t) = \delta(t)$

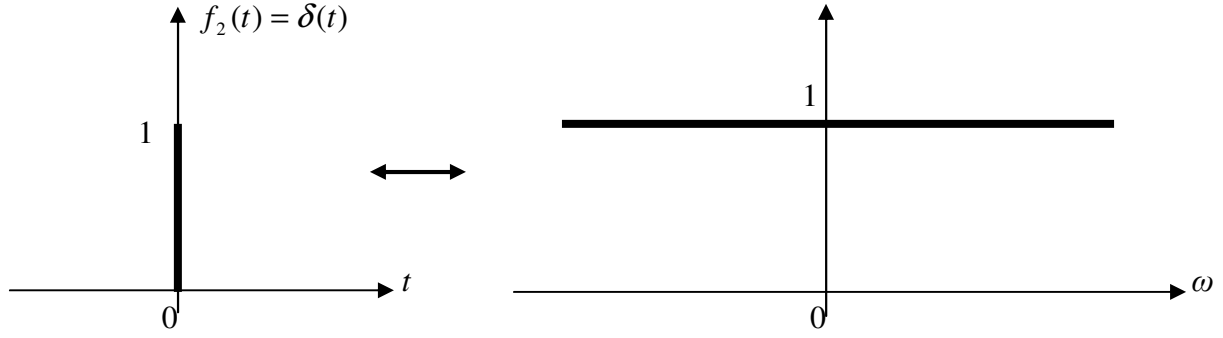
$\delta(t) \Leftrightarrow 1$

$F_2(\omega) = 1$



Şekil 40 $10^4 \text{rect}\left(\frac{t}{10^{-4}}\right) \Leftrightarrow \text{sinc}\left(\frac{\omega}{20.000}\right)$

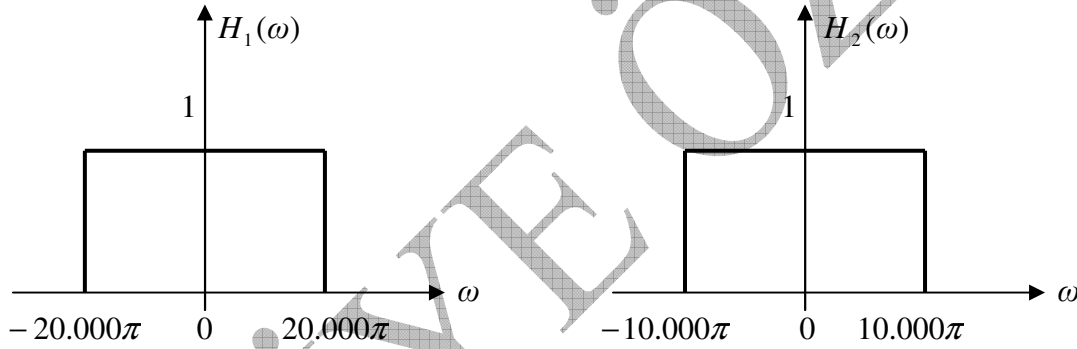
$F_2(\omega) = 1$



Şekil 41 $\delta(t) \Leftrightarrow 1$

b) $H_1(\omega)$ ve $H_2(\omega)$ işaretlerinin değişimlerinin çizin

$H_1(\omega) = \text{rect}(\frac{\omega}{40.000\pi})$ ve $H_2(\omega) = \text{rect}(\frac{\omega}{20.000\pi})$ filtrenin transfer fonksiyonlarıdır.



Şekil 42 Filtreler : $H_1(\omega) = \text{rect}(\frac{\omega}{40.000\pi})$ ve $H_2(\omega) = \text{rect}(\frac{\omega}{20.000\pi})$

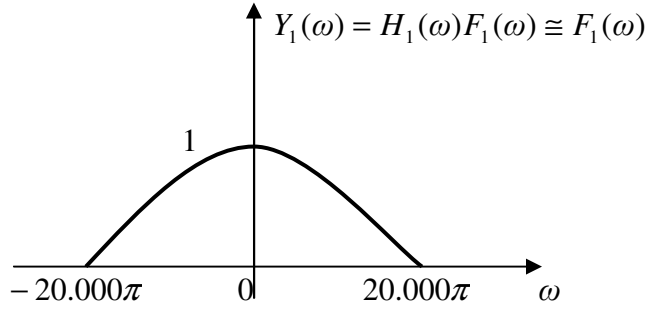
c) $Y_1(\omega)$ ve $Y_2(\omega)$ işaretlerinin değişimlerinin çizin

$$F_1(\omega) = \text{sinc}(\frac{\omega}{20.000}), F_2(\omega) = 1, H_1(\omega) = \text{rect}(\frac{\omega}{40.000\pi}), H_2(\omega) = \text{rect}(\frac{\omega}{20.000\pi})$$

$$1) Y_1(\omega) = H_1(\omega)F_1(\omega) = \text{rect}(\frac{\omega}{40.000\pi}) \text{sinc}(\frac{\omega}{20.000\pi}) = \text{sinc}(\frac{\omega}{20.000\pi})$$

$Y_1(\omega)$ olarak filtrenin ilk çıkışı için band genişliği $\omega_{11} = 10.000\pi$ olan $F_1(\omega)$ olan giriş işareti band genişliği $\omega_{12} = 20.000\pi$ olan $H_1(\omega)$ sisteminden tam geçirileceği için çıkışta

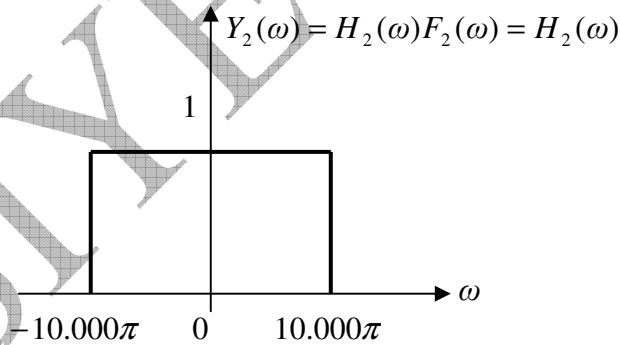
$F_1(\omega) = \text{sinc}(\frac{\omega}{20.000})$ işaretinin kuyruk kısımları hariç, ana beam filtreden tam geçirilmiş olarak görünür.



Şekil 43 $Y_1(\omega) = \text{rect}\left(\frac{\omega}{40.000\pi}\right) \text{sinc}\left(\frac{\omega}{20.000\pi}\right) = \text{sinc}\left(\frac{\omega}{20.000\pi}\right)$

2) $Y_2(\omega) = H_2(\omega)F_2(\omega) = \text{rect}\left(\frac{\omega}{20.000\pi}\right) \cdot 1 = \text{rect}\left(\frac{\omega}{20.000\pi}\right)$

$Y_2(\omega)$ olarak filtrenin ikinci çıkışı için band genişliği $\omega_{21} = \infty$ olan $F_2(\omega)$ (impuls) olan giriş işareti band genişliği $\omega_{22} = 10.000\pi$ olan $H_2(\omega)$ sisteminden ancak $H_2(\omega)$ kadarlık kısmın ($H_2(\omega) = \text{rect}\left(\frac{\omega}{20.000\pi}\right)$) geçirilmesine müsaade edeceğinden filtrenin $Y_2(\omega)$ çıkışında yalnızca $H_2(\omega)$ görünecektir.



Şekil 44 $Y_2(\omega) = \text{rect}\left(\frac{\omega}{20.000\pi}\right) \cdot 1 = \text{rect}\left(\frac{\omega}{20.000\pi}\right)$

d) $y_1(t)$, $y_2(t)$ ve $y(t)$ işaretlerinin band genişliklerini belirleyin.

Şekil (c) den $y_1(t)$ yani $Y_1(\omega)$ işaretinin band genişliğinin $H_1(\omega) = \text{rect}\left(\frac{\omega}{40.000\pi}\right)$ sisteminin band genişliği olan $\omega_1 = 20.000\pi$ rad/sn veya $f_1 = 10$ kHz olduğunu görmekteyiz.

Şekil (c) den $y_2(t)$ veya $Y_2(\omega)$ işaretinin band genişliğinin $H_2(\omega) = \text{rect}\left(\frac{\omega}{20.000\pi}\right)$ sisteminin band genişliği olan $\omega_2 = 20.000\pi$ rad/sn veya $f_2 = 5$ kHz olduğunu görmekteyiz.

Sonuçta $y(t) = y_1(t)y_2(t)$ olarak toplam $y(t)$ veya $Y(\omega)$ işaretinin band genişliği ise, konvülyasyon gereği ($y_1(t)y_2(t) = Y_1(\omega) * Y_2(\omega)$), $Y_1(\omega)$ ve $Y_2(\omega)$ işaretlerinin band genişliklerinin toplamı olan $\omega = \omega_1 + \omega_2 = 20.000\pi + 10.000\pi = 30.000\pi$ rad/sn veya $f = f_1 + f_2 = 10 + 5 = 15$ kHz olduğu görülmektedir.

2. Ölçekleme

Ölçekleme özelliği işaretin periodunun ve dolayısıyla frekansının büyümesi veya küçülmesi anlamına gelir. Sonuç, işaretin $F(\omega)$ sıkıştırılması (compress) $F(2\omega)$ veya bunun tersi genişletilmesi (expanding) $F(\frac{\omega}{2})$ durumu ortaya çıkarkı bunlar işaret işlemede önemli kavramlardır. Eğer

$$f(t) \Leftrightarrow F(\omega)$$

ise, ölçekleme özelliği

$$f(at) \Leftrightarrow \frac{1}{a} F\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

bunun ispatı için,

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

denkleminde

$$F\{f(at)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(at) e^{-j\omega t} dt$$

$$u = at \Leftrightarrow t = \frac{u}{a}$$

$$\frac{du}{dt} = a \text{ ve } dt = \frac{du}{a}$$

$$F\{f(at)\} = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-(j\omega/a)u} du$$

$$v = \omega/a$$

olarak alınırsa,

$$\begin{aligned} F\{f(at)\} &= \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-jvu} du \\ &= \frac{1}{a} F(v) \\ &= \frac{1}{a} F\left(\frac{\omega}{a}\right) \end{aligned}$$

sonuçta

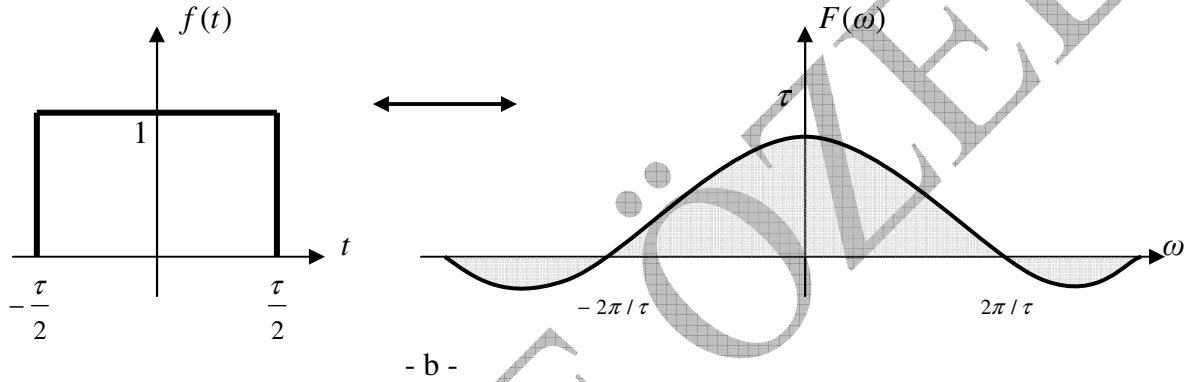
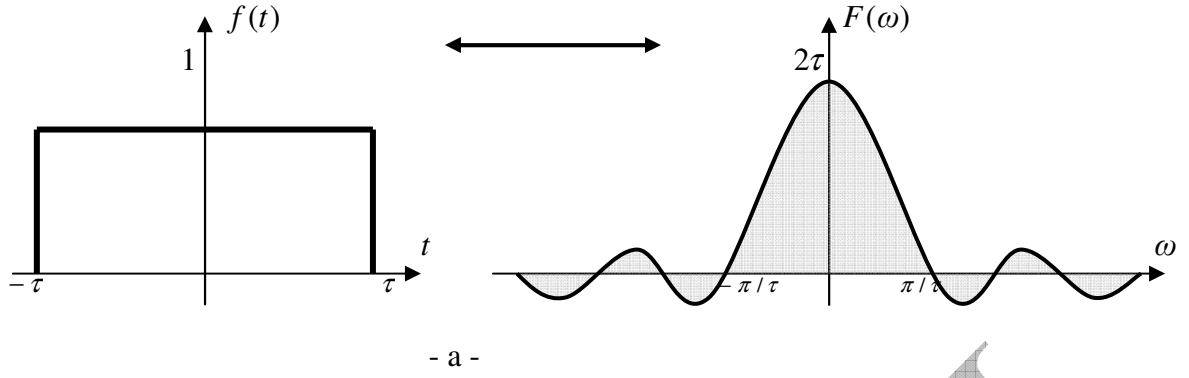
$$f(at) \Leftrightarrow \frac{1}{a} F\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

$f(at)$ = zaman domeninde sıkıştırma (compressing)

$F\left(\frac{\omega}{a}\right)$ = frekans domeninde genişleme (expanding)

Zaman domeninde sıkıştırma, frekans domenindeki genişlemeye karşılık gelirken, genlik açısından da tersi bir durum söz konusudur. Genleşmiş spektrumun genliği, sıkıştırılmış domendeki işaretin $\frac{1}{a}$ oranında azalma ile gerçekleştiğini görmekteyiz.

Tespit : Bu verilerden sonra şu sonuca ulaşırız ; zaman domeninde sıkıştırma, frekans domeninde genişlemeye denktir. Yani zaman domenindeki daralma, frekans domeninin daha da genişlemesini ve daha fazla frekans bileşeni içermesini sağlar. Bu yüzden impuls gibi zaman domenindeki sıkıştırılmış işaretlerin, spektrumu yani frekans uzayı neredeyse sonsuz kabul edilir. Bu aynı zamanda period ve frekans arasındaki ters orantılı ilişkisinde bir neticesidir. Bunu aşağıdaki şekil üzerinde açıkça görebilmekteyiz.

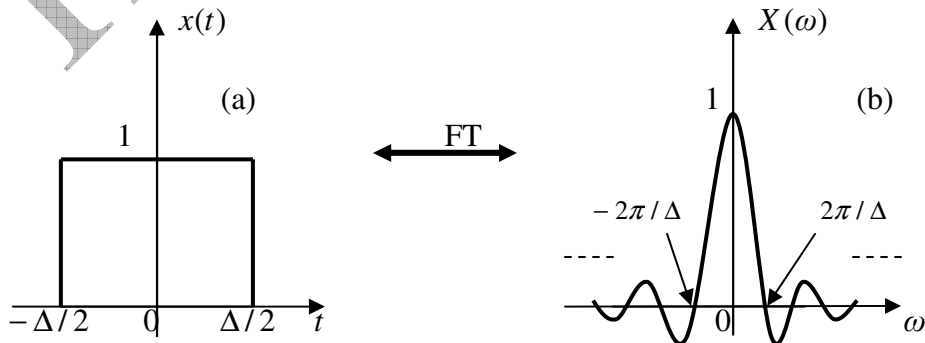


Şekil 45 Fourier transformasyonu ölçekleme özelliği

Görüldüğü gibi, (a) da zaman domeninde $(-\tau, \tau)$ aralığındaki işaret (b) deki gibi $(-\tau/2, \tau/2)$ aralığına sıkışmasına rağmen, spektrumu $(-\pi\tau, \pi\tau)$ den $(-2\pi\tau, 2\pi\tau)$ gibi ika kat daha geniş aralığa (spektruma) genişlemektedir. Şekilden ayrıca genlikler açısından da ters yönde olmak üzere yarı yarıya bir değişimin söz konusu olduğu görülmektedir. Sıkışık domendeki işaretin spektrumunun genliği 2τ iken, genişletilmiş spektrumun genliğinin ise bunun yarısı olan τ değerinde olduğunu görmekteyiz.

Zaman Domenindeki Sıkışma-Frekans Domenindeki Genleşme

Yukarıda ele alınan zaman ve frekans domenlerindeki işaretlerin genişlik ve spektrum davranışları daha belirgin olarak aşağıda ele alınmıştır.



Şekil 46 $x(t)$ - $X(\omega)$ Domenlerinde sıkışma ve genişleme

Şekilden Δ genişliğinde bir dikdörtgen $x(t)$ işareti ile bunun frekans içeriğini gösteren $X(\omega)$ spektrumuna, Fourier transformasyonu (FT) gereği bakıldığında verilen,

$$x(t) = \text{rect}\left(\frac{t}{\Delta}\right) \leftrightarrow X(\omega) = \Delta \sin c\left(\frac{\omega\Delta}{2}\right)$$

dönüşüm denklemi gereği şekil (a) ve (b) nin oluştuklarını görmekteyiz. Buna göre şekil (a) daki $\Delta \rightarrow 0$ limit hali için yani darbe genişliğinin zaman domeninde yeterince dar alınması durumunda frekans domeninde $(1/\Delta) \rightarrow \infty$ olduğu görülecektir. Bunun anlamı, zaman domeninde dar alınan bir işaretin frekans veya band genişliği sonsuz olabilecektir. Öte yandan eğer $\Delta \rightarrow \infty$ olarak darbe oldukça geniş alınırsa bu kez frekans domeni $(1/\Delta) \rightarrow 0$ olarak sıfır band genişliğinde oluşacaktır. Buna göre zaman domeni ile frekans domeninin ters orantılı olarak çalıştığını görmekteyiz. Buradan, zaman domeninde

$$\Delta \rightarrow 0 \text{ için } x(t) = \delta(t) \text{ ve } X(\omega) = 1$$

olarak zaman domeninde genişliği oldukça dar olan $x(t) = \delta(t)$ biçiminde impuls fonksiyonunun ve frekans domeni olarak da sonsuz band anlamına gelen $X(\omega) = 1$ fonksiyonunun söz konusu olduğunu görmekteyiz. Diğer yandan

$$\Delta \rightarrow \infty \text{ için } x(t) = 1 \text{ ve } X(\omega) = \delta(\omega)$$

olarak zaman domeninde genişliği nerdeyse sonsuz olan $x(t) = 1$ biçiminde impuls fonksiyonunun ve frekans domeni olarak da çok dar bir banda karşılık gelen $X(\omega) = \delta(\omega)$ fonksiyonunun söz konusu olduğunu görmekteyiz.

Örnek

$f(3t)$ İşaretinin Fourier transformasyonunu bulun.

Çözüm

Görüldüğü gibi zaman domeninde 3 kat oranında ölçeklenmiş, yani sıkıştırılmış bir işaret söz konusudur. Bunun spektrumunun da ters orantılı olarak 3 kat genişletilmiş bir band genişliğine sahip olması beklenir. Bunu çözerek görmeye çalışalım.

$f(t) \Leftrightarrow F(\omega)$ ise,

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(3t) e^{-j\omega t} dt$$

$$u = 3t, \quad t = u/3 \\ dt = du/3$$

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(3t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-j\omega \frac{u}{3}} \frac{du}{3} = \frac{1}{3} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-j\left(\frac{\omega}{3}\right)u} du$$

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j(\omega)t} dt \text{ olduğundan,}$$

$$F(\omega) = \frac{1}{3} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-j(\frac{\omega}{3})u} du = \frac{1}{3} F\left(\frac{\omega}{3}\right)$$

$$f(3t) \Leftrightarrow \frac{1}{3} F\left(\frac{\omega}{3}\right)$$

Son ifadeden görüldüğü gibi, zaman domeninde üç kat oranında sıkıştırılmış işaretin spektrumunda ters orantılı olarak, genliği üçte bir oranında azalırken band genişliği üç katına genişlemiş olarak elde edilmiştir.

Örnek

Frekanslı ölçeklenmiş $F\left(\frac{2\omega}{3}\right)$ işaretinin zaman domenindeki davranışını inceleyin.

Çözüm

Bu örnekte daha önce ele alınan zaman domenindeki genişletme/sıkıştırma işlemlerinin, frekans domenindeki davranışlarının alternatif biçimi olan, frekans domeninden zaman domenine geçiş söz konusudur. Örnekten görüldüğü gibi frekans domeninde 2/3 oranında sıkıştırılmış bir işaret söz konusudur. Bunun zaman domenindeki davranışı ters orantılı olarak 3/2 oranında artmış, yani genişletilmiş olarak elde edilmelidir. Bunu çözümden gözlemlemeye çalışalım.

$$f(t) \Leftrightarrow F(\omega) \text{ ise,}$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F\left(\frac{2\omega}{3}\right) e^{j\omega t} d\omega$$

$$u = \frac{2\omega}{3}, \quad \omega = \frac{3u}{2}$$

$$d\omega = \frac{3}{2} du$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F\left(\frac{2\omega}{3}\right) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(u) e^{j\left(\frac{3u}{2}\right)t} \left(\frac{3}{2} du\right)$$

$$= \frac{3}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(u) e^{j\left(\frac{3t}{2}\right)u} du$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j(t)\omega} d\omega \text{ olduğundan,}$$

$$f(t) = \frac{3}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(u) e^{j\left(\frac{3t}{2}\right)u} du = \frac{3}{4\pi} f\left(\frac{3t}{2}\right)$$

$$F\left(\frac{2\omega}{3}\right) \Leftrightarrow \frac{3}{4\pi} f\left(\frac{3t}{2}\right)$$

Sonuçtan görüldüğü gibi frekans domeninde 2/3 oranında sıkıştırılmış bir işaret, zaman domeninde ters orantılı olarak 3/2 oranında genişletilmiş olarak elde edilmiştir.

Örnek

$f(t) = \cos 5\omega_0 t$ işaretinin Fourier transformasyonunu hesaplayın.

Çözüm

$$f(t) \Leftrightarrow F(\omega)$$

$$\cos \omega_0 t \Leftrightarrow \pi \delta(\omega + \omega_0) + \pi \delta(\omega - \omega_0)$$

ise $f_2(t) = \cos 5\omega_0 t = f(5t)$, olacaktır.

$$f(at) \Leftrightarrow \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

kuralını hatırlarsak, verilen $f(t) = \cos 5\omega_0 t$ ifadesinde $a = 5$ olacağından,

$$\cos 5\omega_0 t \Leftrightarrow \frac{1}{|5|} F\left(\frac{\omega}{5}\right) = \frac{1}{5} \left[\pi \delta\left(\frac{\omega}{5} + \omega_0\right) + \pi \delta\left(\frac{\omega}{5} - \omega_0\right) \right] = \frac{1}{5} \left[\pi \delta(\omega + 5\omega_0) + \pi \delta(\omega - 5\omega_0) \right]$$

$$\cos 5\omega_0 t \Leftrightarrow \frac{\pi}{5} [\delta(\omega + 5\omega_0) + \delta(\omega - 5\omega_0)]$$

3. Zaman öteleme özelliği

“*time-shifting*” olarak bilinen bu durumda işaretin zaman olarak ötelenmesi işaret işlemede ve özellikle haberleşme sistemlerinde önemli bir kavramdır.

Eğer

$$f(t) \Leftrightarrow F(\omega)$$

ise, zaman öteleme özelliği

$$f(t - t_0) \Leftrightarrow F(\omega) e^{-j\omega t_0}$$

Bunun ispatı için,

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

denkleminde

$$F\{f(t-t_0)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-t_0) e^{-j\omega t} dt$$

$$u = t - t_0 \Leftrightarrow t = u + t_0$$

$$dt = du$$

$$\begin{aligned} F\{f(t-t_0)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-j\omega(u+t_0)} du \\ &= e^{-j\omega t_0} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-j\omega u} du \\ &= e^{-j\omega t_0} F(\omega) \end{aligned}$$

Buna göre

$$f(t-t_0) \Leftrightarrow e^{-j\omega t_0} F(\omega)$$

Bu sonuç bir sistemdeki $f(t-t_0) \Leftrightarrow e^{-j\omega t_0} F(\omega)$ zamanlık bir gecikmenin (ötelenmenin) sistem genliğinde bir değişim oluşturmadığı, fazında doğrusal (linear, $-\omega t_0$) bir değişim meydana geldiğini göstermesi açısından önemlidir. Haberleşme sistemlerinde $y(t) = \alpha x(t-\tau)$ olarak elde edilen çıkış bu şekliyle “*distorsiyonsuz iletim*” özelliği ile örtüştüğü için, zaman kaydırmalı (ötelemeli veya gecikmeli) sistemler genel, özellikle de haberleşme sistemleri için önemlidir.

Not :

$$f(t-t_0) \Leftrightarrow e^{-j\omega t_0} F(\omega)$$

$$f(t+t_0) \Leftrightarrow e^{j\omega t_0} F(\omega)$$

$$f(t-t_0) + f(t+t_0) \Leftrightarrow e^{-j\omega t_0} F(\omega) + e^{j\omega t_0} F(\omega)$$

$$\Leftrightarrow F(\omega) [e^{j\omega t_0} + e^{-j\omega t_0}] = \frac{2F(\omega)}{2} [e^{j\omega t_0} + e^{-j\omega t_0}] = 2F(\omega) \left[\frac{e^{j\omega t_0} + e^{-j\omega t_0}}{2} \right]$$

$$\Leftrightarrow 2F(\omega) \cos \omega_0 t$$

Örnek

$f(\frac{t}{2}-3)$ İşaretinin Frekans domeni davranışını inceleyin.

Çözüm

Örnekten görüldüğü gibi, zaman domenindeki bir kaydırma (shift) işlemi söz konusudur. Bunun frekans domenindeki davranışını incelemeye çalışalım.

$$f(t) \Leftrightarrow F(\omega) \text{ ise,}$$

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f\left(\frac{t}{2} - 3\right) e^{-j\omega t} dt$$

$$u = \frac{t}{2} - 3, \quad t = 2u + 6$$

$$dt = 2du$$

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f\left(\frac{t}{2} - 3\right) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-j\omega(2u+6)} (2du) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{(-j\omega 2u - j6\omega)} (2du) \\ &= 2 \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-j(2\omega)u} e^{-j6\omega} du = 2e^{-j6\omega} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-j(2\omega)u} du \end{aligned}$$

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-j(2\omega)u} du = F(2\omega)$$

$$F(\omega) = 2e^{-j6\omega} F(2\omega)$$

$$f\left(\frac{t}{2} - 3\right) \Leftrightarrow 2e^{-j6\omega} F(2\omega)$$

Görüldüğü gibi zaman domeninde öteleme, frekans domeninde gecikme ve örneğin özelliğinden dolayı sıkıştırma (iki kat) biçiminde elde edilmiştir.

Örnek

Giriş

$$x(t) = 10 e^{j0.25\pi} e^{j200\pi t}$$

olan sistemde $\tau = 0.001$ sn'lik gecikme mevcuttur. Bu durumdaki sistem çıkışını hesaplayın.

Çözüm

Sistem çıkışı

$$y(t) = x(t)H(\omega_0)$$

ise giriş bilgisinden $\omega_0 = 200\pi$ rad/sn olduğu görülür. Buna göre sistem çıkışı tekrar düzenlenirse

$$y(t) = x(t)H(200\pi)$$

$$H(200\pi) = e^{-j200\pi\tau} = e^{-j200\pi(0.001)}$$

$$x(t) = 10 e^{j0.25\pi} e^{j200\pi t}$$

ise sistem çıkışı,

$$y(t) = x(t)H(\omega_0) = 10 e^{j0.25\pi} e^{j200\pi t} e^{-j200\pi(0.001)} = 10 e^{j(200.2\pi t + 0.25\pi)}$$

Burada sistemdeki tek değişiklik $\tau = 0.001$ sn gecikmesidir. Sistemin girişine göre frekansı, genliği ve fazı değişime uğramamıştır.

Örnek

Bir filtre de $p(t) = \Delta(\frac{t}{10^{-6}})$ girişine, darbe formundaki sistemin cevabı (zaman sabiti)

$t = 10^{-3}$ sn ise, bu sistemin çıkışını değerlendirin. Sistemden veya kanaldan sağlıklı veri iletimi için minumum kanal band genişliğini belirleyin.

Çözüm

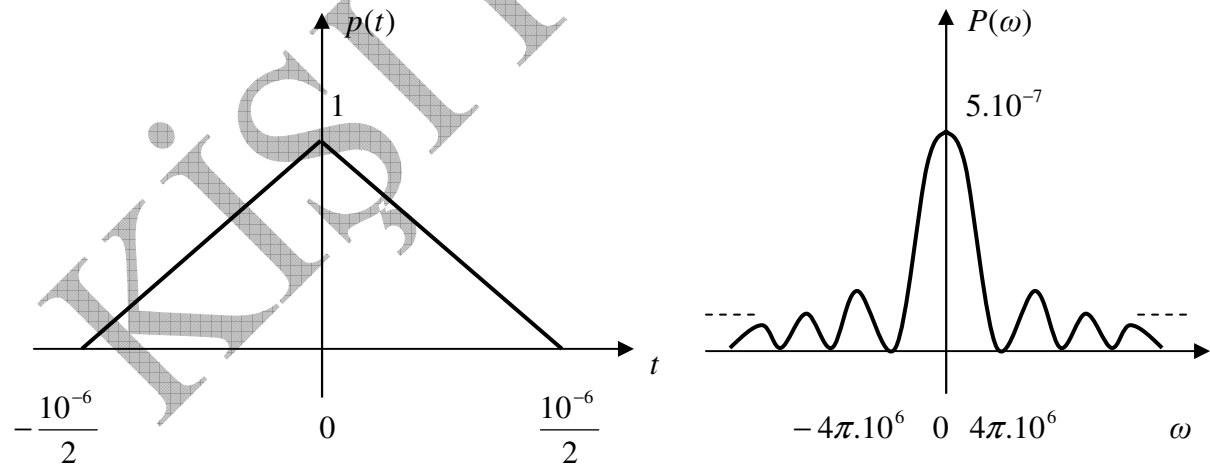
Önce $p(t)$ giriş işaretinin zaman ve frekans domenini düzenleyelim.

$$\Delta(\frac{t}{\tau}) \Leftrightarrow \frac{\tau}{2} \text{sinc}^2(\frac{\omega\tau}{4})$$

$$\Delta(\frac{t}{10^{-6}}) \Leftrightarrow \frac{10^{-6}}{2} \text{sinc}^2(\frac{10^{-6}\omega}{4}) = 5 \cdot 10^{-7} \text{sinc}^2(25 \cdot 10^{-8}\omega)$$

$$P(\omega) = 5 \cdot 10^{-7} \text{sinc}^2(25 \cdot 10^{-8}\omega)$$

Giriş işaretinin band genişliğinin $P(\omega)$ spektrumundan $\omega_p = 4\pi \cdot 10^6$ rad/sn veya $f_p = 2 \cdot 10^6$ Hz ($2 \cdot 10^6$ MHz) olduğunu görmekteyiz.



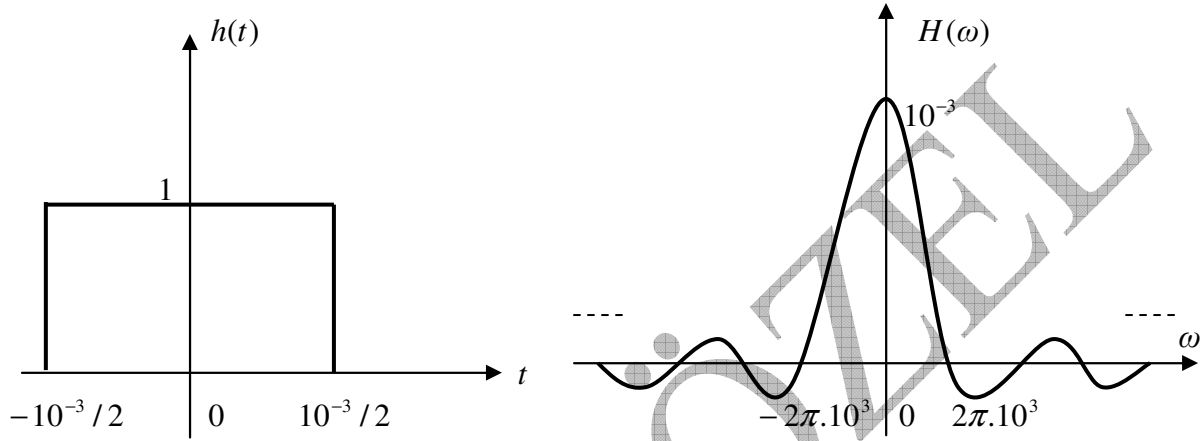
Şekil 47

Şimdi de $p(t)$ işaretini içinden geçirecek olan kanalın (filtre) zaman ve frekans domenini düzenleyelim.

$$\text{rect}\left(\frac{t}{\tau}\right) \Leftrightarrow \tau \text{sinc}\left(\frac{\omega \tau}{2}\right)$$

$$\Delta\left(\frac{t}{10^{-3}}\right) \Leftrightarrow 10^{-3} \text{sinc}\left(\frac{10^{-3} \omega}{2}\right) = 10^{-3} \text{sinc}(5 \cdot 10^{-4} \omega)$$

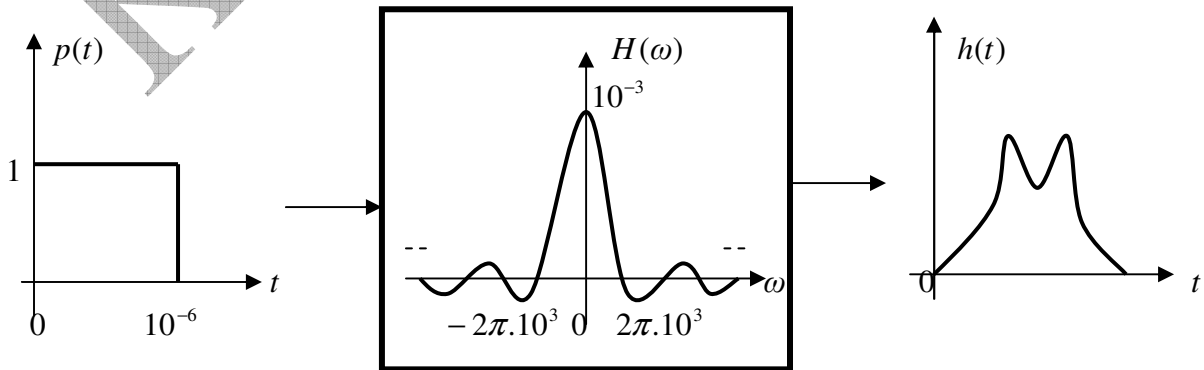
$$H(\omega) = 10^{-3} \text{sinc}(5 \cdot 10^{-4} \omega)$$



Şekil 48 Kanal görünümü

Kanalın band genişliğinin $\omega_h = 2\pi \cdot 10^3$ rad/sn olduğunu görmekteyiz. Elde edilen $H(\omega)$ spektrumunun band genişliğinin $\omega_h = 2\pi \cdot 10^3$ rad/sn olduğu görülmektedir. Gerek zaman domeni gerekse frekans domeni analizlerinden sağlıklı bir iletim yapılamayacağını gözlemlemekteyiz. Çünkü $t_h = 10^{-3}$ sn lik kanalın zaman sabiti iken, $p(t)$ giriş işaretinin zaman sabiti $t_p = 10^{-6}$ sn verilmiştir.

Buna göre kanalın sistem cevabı, girişinkinden daha uzundur. Bu sistemin daha yavaş olduğu anlamına gelir. Bu haliyle sistem girişine uygulanan işarete cevap verebilecek hızda olmadığı görülmektedir. Böylece giriş $p(t)$ işareti, $h(t)$ kanalından sorunsuz olarak **iletilemeyecektir**. Aşağıdaki şekilde bu durum şematize edilmiştir. Kanal band genişliği iletilecek (giriş) işaretine kıyasla yetersiz olduğu zaman kanal (filtre) çıkışında bilgi (giriş işareti) bozulacak, yani distorsiyona uğrayacaktır. Bunu her iki işaretin band genişliklerinden de teyid edebiliriz.



Şekil 49 Yetersiz kanal görünümü

Buna göre bu kanaldan sağlıklı bir iletim yapılabilmesi için $t_p \geq t_h$ olması gerekir. Bu durumdayken ($t_h = 2 \cdot 10^{-6}$ sn) kanal (filtre) fonksiyonu tekrar düzenlenirse

$$\text{rect}\left(\frac{t}{\tau}\right) \Leftrightarrow \tau \text{sinc}\left(\frac{\omega \tau}{2}\right)$$

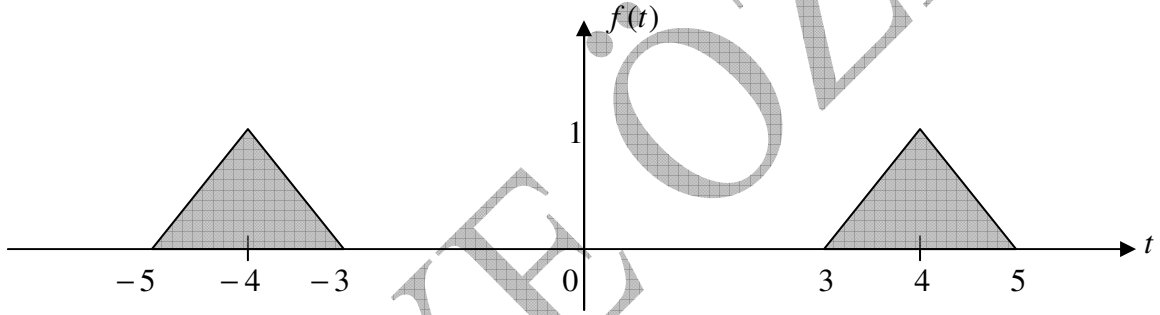
$$\Delta\left(\frac{t}{\frac{10^{-6}}{2}}\right) \Leftrightarrow \frac{10^{-6}}{2} \text{sinc}\left(\frac{10^{-6} \omega}{4}\right) = 5 \cdot 10^{-7} \text{sinc}(25 \cdot 10^{-8} \omega)$$

$$H(\omega) = 5 \cdot 10^{-7} \text{sinc}(25 \cdot 10^{-8} \omega)$$

Buradan yeni durumdaki kanal band genişliğinin $\omega_h = 4\pi \cdot 10^6$ olarak $\omega_p = 4\pi \cdot 10^6$ işaretini geçirebileceği görülmektedir.

Örnek

Verilerden $F(\omega)$ yi hesaplayın.



Şekil 50

Çözüm

Veriler incelendiğinde zaman öteleme durumunun söz konusu olduğunu görmekteyiz. Buradan Fourier transformasyonu hesaplanacaktır. Önce üçgen fonksiyon aşağıdaki gibi yazılır.

$$f(t) = f(t-4) + f(t+4) = \Delta\left(\frac{t-4}{2}\right) + \Delta\left(\frac{t+4}{2}\right)$$

Buradan $f(t) \Leftrightarrow F(\omega)$ dönüşümü için

$$\Delta\left(\frac{t}{\tau}\right) \Leftrightarrow \frac{\tau}{2} \text{sinc}^2\left(\frac{\omega \tau}{4}\right)$$

özdeşliklerinden $\tau = 2$ ve $\omega_0 = 4$ olduğundan

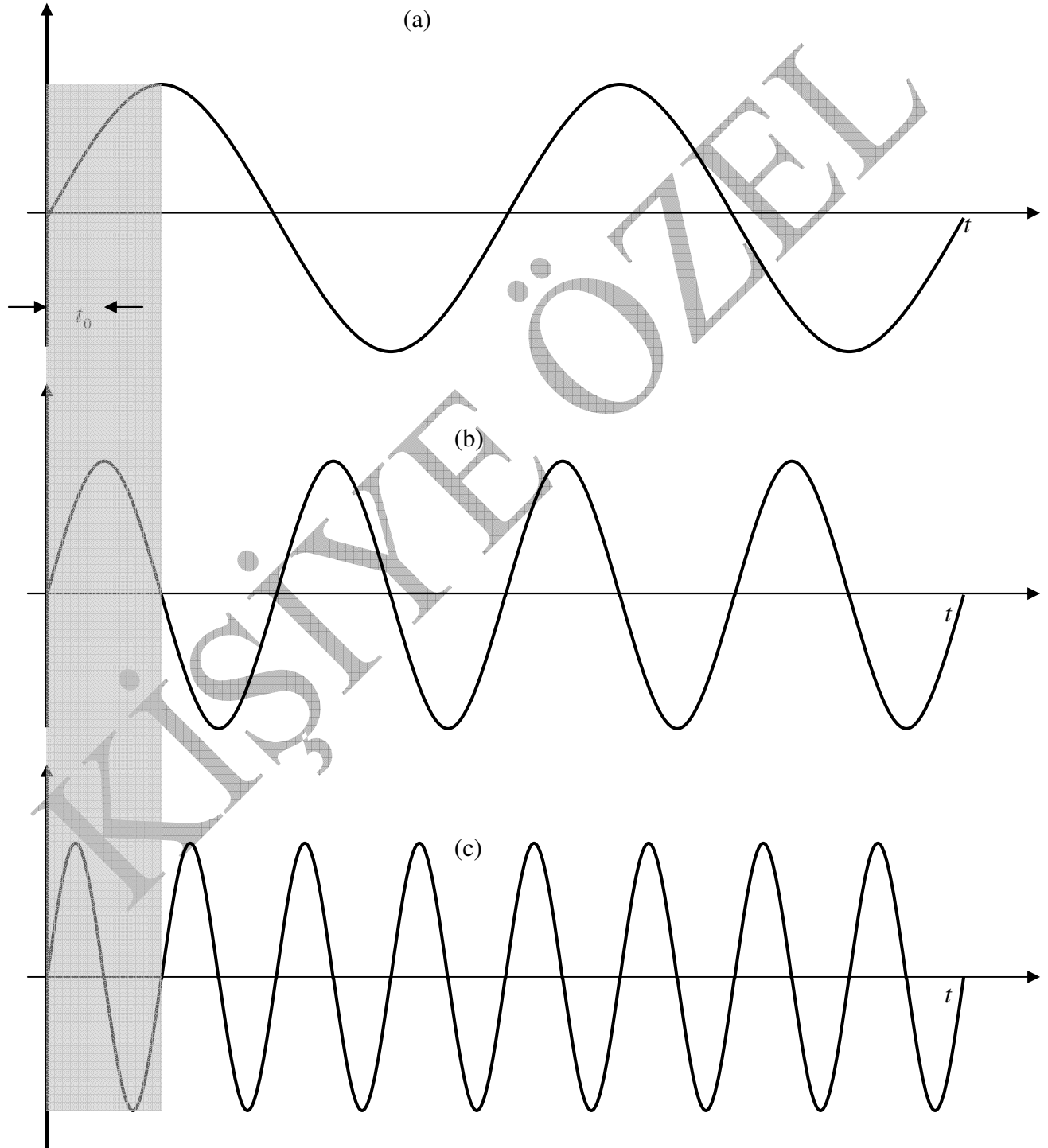
$$f(t-4) + f(t+4) \Leftrightarrow 2F(\omega) \cos 4t$$

$$F(\omega) = \frac{\tau}{2} \text{sinc}^2\left(\frac{\omega \tau}{4}\right) = \frac{2}{2} \text{sinc}^2\left(\frac{2\omega}{4}\right) = \text{sinc}^2\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

$$f(t-4) + f(t+4) \Leftrightarrow 2 \text{sinc}^2\left(\frac{\omega}{2}\right) \cos 4t$$

Zaman Öteleme Özelliği ve Lineer Faz

Aşağıda farklı frekanslardaki sinusoidal işaretler verilmiştir. Bu işaretlerden frekans ve faz arasındaki ilişki ortaya konulacaktır. Bunun için her hangi bir işaretteki zaman olarak gecikmenin, diğerlerinde nasıl ve ne biçimde faz kaymasına karşılık geldiği araştırılmıştır. Bunu çözümleyebilmek için frekans ve faz gibi grift kavramların birbirleri üzerine olan tesirlerine vurgu yapılarak, sonuca gidilecektir.



Şekil 51 Zaman kaydırmanın faz (frekans) etkisi

Şekillerden aynı zaman kaymasına rağmen, aynı genlikli ama farklı fazlı (frekanslı) işaretlerin oluştuğu görülmektedir. Bu yaklaşımımızı daha iyi açıklayabilmek için, her biri farklı frekansta olan işaretleri içersinde barındıran bir işaret veya fonksiyon düşünmemiz yararlı olacaktır. Buna en yakın durum bildiğimiz gibi Fourier serisiyle mümkündür. Aşağıdan da görebileceğimiz gibi

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \cos(n\omega_0 t + \theta_n) + b_n \sin(n\omega_0 t + \theta_n)$$

Fourier serisi temel bir harmoniğin etrafında oluşturulmuş farklı frekans ve genlikteki sinusoidal bileşenlerden oluşmaktadır. Bu yolla şekillerdeki her bir işareti farklı frekanstaki Fourier serisine ait bileşenler gibi düşünebiliriz.

Şekillerden görüldüğü gibi, zaman domenindeki örneğin bir $f(t)$ işaretindeki gecikme, işaretin spektrumunda lineer faz kaymasına sebep olur. Şekiller incelendiğinde (a) da t_0 zamanlık aynı gecikmenin (faz olarak 90°), (b) de 180° , (c) de ise 360° lik bir faz kaymasına karşılık geldiğini görmekteyiz. Fourier serisi açısından yaklaşırsak, aşağıda görüldüğü gibi

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \cos(n\omega_0 t + \theta_n) + b_n \sin(n\omega_0 t + \theta_n)$$

her bir bileşenin belli genlik (a_n, b_n) ve fazlardan (θ_n) oluştuğunu görmekteyiz. Eğer $f(t)$ işareti $f(t - t_0)$ olarak t_0 gecikmesine maruz kalmışsa,

$$f(t - t_0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \cos(n\omega_0(t - t_0) + \theta_n) + b_n \sin(n\omega_0(t - t_0) + \theta_n)$$

ifadesinden görülebileceği gibi $\cos(n\omega_0(t - t_0) + \theta_n)$ ve $\sin(n\omega_0(t - t_0) + \theta_n)$ gibi terimlerde (a_n, b_n) genliklerinin değişmediği (aynı kaldığı), buna karşın bu gecikmenin faz kayması üzerinde etkili olduğunu gözlemleyebilmekteyiz. Eğer basit olması açısından terimlerden birine örneğin $\cos(n\omega_0(t - t_0))$ olarak eğilirsek,

$$\cos(n\omega_0(t - t_0)) = \cos(n\omega_0 t - n\omega_0 t_0)$$

veya Fourier transformasyonu durumunda $\omega = n\omega_0$ olduğunu göz önüne alırsak, oluşan

$$\cos \omega(t - t_0) = \cos(\omega t - \omega t_0)$$

ifadeden t_0 zaman gecikmenin faz olarak ωt_0 kayma oluşturduğu görülmektedir. Buradan ωt_0 faz kaymasının, t_0 zaman sabitinden etkilendiğini görmekteyiz. Aynı zamanda daha önemli bir tespit olarak faz kaymasının ω frekansıyla lineer değiştiğini görmekteyiz. t_0 gecikme miktarı, ω frekansının etkisini de artırmaktadır. Bunun anlamı gecikme (t_0) büyük tutuldukça, faz kaymasında orantılı olarak artacaktır.

Buradan ωt_0 faz kaymasının ω frekansı ile lineer değişmesinden dolayı, frekans arttıkça, ona bağlı olarak faz kaymasının da artacağını görmekteyiz. Zamanda t_0 gecikmesini Fourier serisiyle düşündüğümüzde, $\cos \omega(t - t_0) = \cos(\omega t - \omega t_0)$ yaklaşımı gereği, serideki değişik frekanslardaki her bir bileşenin aynı t_0 gecikmesine uğrayacağını biliyoruz. Her bir bileşendeki zaman olarak aynı gecikmenin spektrum olarak hangi oranda faz kaymasına sebebiyet vereceği, bizim için önemlidir.

Bu bilgilerin ışığında, faz kaymasının Fourier serisini oluşturan her bir sinusoid bileşende farklı şekilde ortaya çıktığını görmekteyiz. Her bir bileşen doğal olarak farklı frekanslardan oluştuğu için, faz kaymasının aynı zamanda frekansla da lineer değişmesinden dolayı, her bir bileşenin faz kayması da farklı olacaktır. Yani frekans arttıkça (yüksek frekanslı bileşenlerde), frekansla orantılı olarak, fazında büyüdüğünü görmekteyiz. Çünkü aynı zaman içerisindeki titreşimlerin sayısı, frekansa bağlı ve lineer olarak farklı olacağından, farklı faz kaymalarının oluşması kaçınılmazdır. Buradan frekans ve fazın grift (birbirlerine yakından bağlı) olarak bilinen özellikleri önemli rol oynadığını görmekteyiz. Dolayısıyla seri içindeki bileşenlerden yüksek frekanslı olanlar, aynı t_0 gecikmesiyle, daha fazla faz kaymasına uğramaktadır. Bunların sonucunda zaman domenindeki gecikme, aynı genlikli ama faz olarak kaymış bir spektrum gösterecektir.

Şekillerden aynı gecikmenin (a) daki ilk bileşende faz olarak 90° , biraz daha yüksek frekanslı (b) bileşeninde 180° , ikisinden de daha yüksek frekanstaki (c) bileşeninde ise 360° lik kaymaların oluştuğunu gözlemlemekteyiz. Bu durum, temel harmoniğin katları üzerine kurulu sinusoidlerden oluşan Fourier teorisinin (seri/transformasyon) tipik sonucudur. Buna göre serideki her bir bileşen zaman olarak aynı t_0 gecikmesine uğramakla beraber, bu gecikmenin spektrumda (frekans domeninde) frekansla lineer değişen faz kaymalarına (farklılıklarına) sebebiyet verdiğini görmekteyiz.

Bunu yukarıdaki şekillerden de anlayabilmekteyiz. Şekil (a) daki t_0 zaman veya faz olarak 90° lik gecikme, (b) de 180° , (c) de ise 360° lik gecikmelere veya kaymalara karşılık gelmektedir. Tüm bunların neticesinde, Fourier serisinin tüm bileşenleri aynı miktarda gecikmelere uğramış olacaklardır. Ancak bu gecikmenin spektrumda aynı zamanda faz olarak kaymalara sebebiyet vermektedir. Diğer bir deyişle Fourier serisinin tüm bileşenleri frekansla orantılı (lineer) olarak faz kaymalarına maruz kalacaktır. Aynı gecikme ama farklı faz kaymaları, seri bileşenlerinin farklı hızlarından (frekanslarından) kaynaklanmaktadır. Burada önemli olan tüm bileşenlerin netice itibarıyla, farklı fazlara rağmen aynı gecikmeyi sağlamalarıdır. Bunun sağlanamaması durumunda önemli bir sorunla karşı karşıya kalınırdı. Her bir bileşeni farklı gecikmelere sahip bir işaretin neyi veya hangi bilgiyi gösterdiğini tespiti, dolayısıyla bilginin bütünlüğünden söz etmek mümkün olmazdı, sonucunda da bilgi kaybedilebilirdi. Bunun için her bir harmoniğin veya bileşenin aynı gecikmeyi bir biçimde sağlaması gerekiyor. Bu yüzden, düşük frekanslı bileşen düşük faz kaymalarıyla, yüksek frekanslı bileşenler ise aynı gecikmeyi sağlama adına yüksek faz kaymalarına uğrayacaktır. Çünkü bir haberleşme sistemi göz önüne alındığında, gönderilmek istenen orijinal bilginin alıcı tarafta (çıkışta) yalnızca t_0 gecikmeli ama orijinalin aynısı (kopyası) olması beklenir. Bu **distorsiyonsuz iletim** olarak bilinen kavramın en önemli özelliğidir. Distorsiyonsuz iletimde bir $f(t)$ giriş işaretinin t_0 kadar geciktirilmiş işaretin “ k ” sabitiyle çarpılmış versiyonundan oluşan $y(t)$ çıkış işareti (iletimdeki dalga), distorsiyonsuz iletimi sağlar.

$$y(t) = k f(t - t_0)$$

Bunun Fourier transformasyonunu oluşturursak,

$$Y(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} k f(t - t_0) e^{-j\omega t} dt$$

distorsiyonsuz iletim denem kavram, girişin belli bir sabitle oluşturduğu çıkış veya dalga biçimi olarak tanımlanmaktadır. Bu halde iken giriş ile çıkış işaretlerinin özdeş olabileceği belirtilmektedir. Bir önemli nokta şudur, bu bağlamdaki girişin belli bir değerle geciktirilmiş halde distorsiyonsuz iletimi sağlamaktadır. Buna göre $f(t)$ giriş işaretinin t_0 kadar geciktirilmiş işaretin “ k ” sabitiyle çarpılmış versiyonundan oluşan $y(t)$ çıkış işareti (iletimdeki dalga), distorsiyonsuz iletimi sağlar.

$$y(t) = k f(t - t_0)$$

Bunun Fourier transformasyonunu oluşturursak,

$$\begin{aligned} Y(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} k f(t - t_0) e^{-j\omega t} dt \\ Y(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} k f(t - t_0) e^{-j\omega t} dt = k \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-j\omega(u+t_0)} du = k e^{-j\omega t_0} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-j\omega u} du \\ &= k e^{-j\omega t_0} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-j\omega u} du}_{F(\omega)} \\ Y(\omega) &= k F(\omega) e^{-j\omega t_0} \end{aligned}$$

Buradan eğer

$$H(\omega) = k e^{-j\omega t_0} ; \quad h(t) = k \delta(t - t_0)$$

sistem transfer fonksiyonu olarak alınırsa, distorsiyonsuz iletimdeki işaret

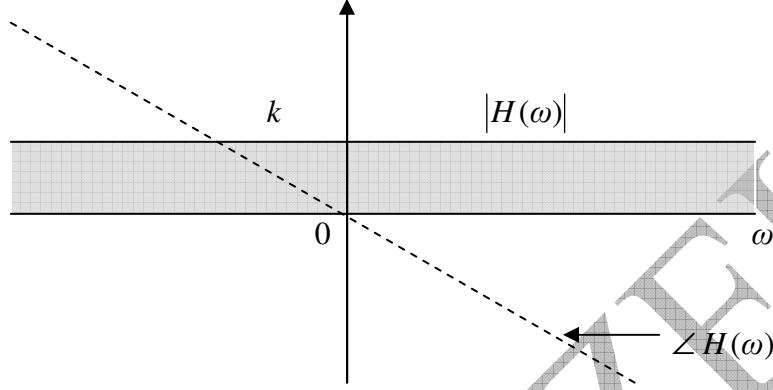
$$Y(\omega) = F(\omega) H(\omega)$$

oluşur. Buradaki $H(\omega)$ sistem transfer fonksiyonu distorsiyonsuz iletim prensibiyle çalışmaktadır. Transfer fonksiyonun polar formdaki genlik ve faz bileşenleri göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned} |H(\omega)| &= k \\ \angle H(\omega) &= -\omega t_0 \end{aligned}$$

buna göre distorsiyonsuz bir iletim için transfer fonksiyonun genlik cevabı $|H(\omega)|$, iletim boyunca sabit kalmalıdır ($|H(\omega)| = k$). Bunun anlamı, Fourier seri veya transformasyonu içerisindeki bileşenlerin katsayıları (a_n, b_n) aynı k değeriyle değişmelidir (zayıflatılmalı veya kuvvetlendirilmelidir). Bu lineer değişimin neticesinde bileşenlerin genliklerinin frekansla değişmediği ve sabit kalması sağlanmaktadır.

Faz cevabı $\angle H(\omega)$ olarak da $-\omega t_0$ gereğince frekansla ω doğrusal (lineer) değişmelidir. Faz ifadesindeki $-t_0$ terimi giriş ile çıkış arasındaki gecikmeyi ve negatif eğimi göstermektedir. Distorsiyonsuz iletimin koşulları olan genlik ve faz kavramları aşağıdaki şekil üzerinde gösterilmiştir.



Şekil 52 LTIC Sistemde distorsiyonsuz iletimin sistem frekans cevabı

Şekilden de görüldüğü gibi, sistem genlik cevabı $|H(\omega)|$ frekansın ω yani iletimin her noktasında sabit (k) ve fazı da $\angle H(\omega)$ yine frekansla ω doğrusal (lineer) değişmektedir.

Bunların sonucunda, bileşenler itibariyle t_0 gecikmesinin sağlanamaması durumunda, **gecikme miktarı frekansla değişen bir durum** ($t_0(\omega)$) oluşur ki, bu sorunun üstesinden gelmek zor, hatta mümkün olmazdı. Bu yüzden tüm bileşenlerin aynı gecikmeye sahip olması, **grup gecikmesi** olarak düşünülür. Grup gecikmesinde faz

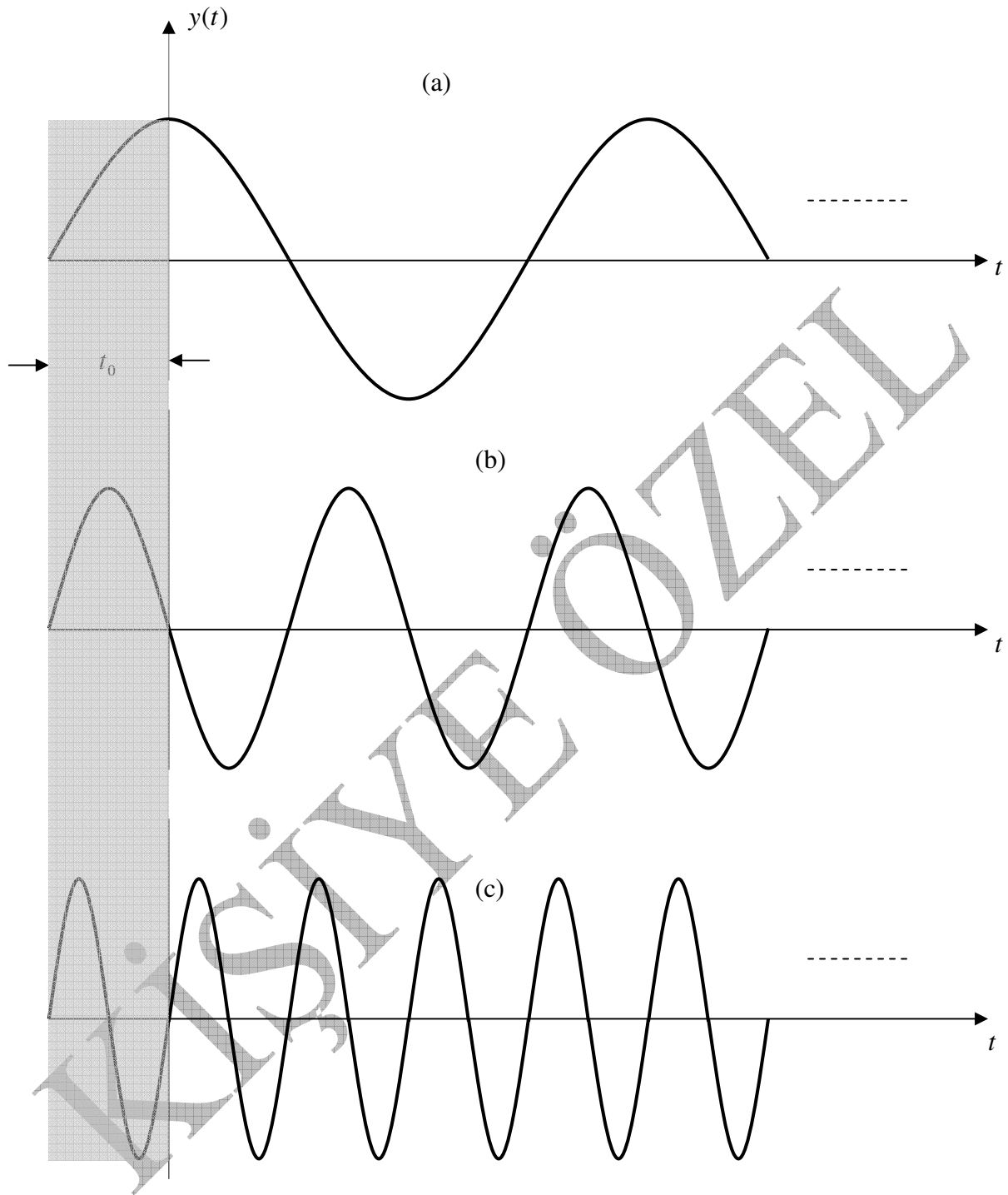
$$\angle H(\omega) = -\omega t_0$$

olarak düşünülürse,

$$t_0(\omega) = -\frac{d}{d\omega} \angle H(\omega)$$

fazın frekansla değişimini gösteren $t_0(\omega)$ sabit olduğu takdirde, **tüm bileşenlerin aynı gecikmeye sahip olduğu, ve grup gecikmesinin sağlandığı düşünülür.** Eğer bu olmayıp, frekansın zamanla değiştiği gecikmeler söz konusu olursa, çıkış hiçbir zaman, girişin gecikmiş kopyalarından oluşmayacaktır, bunun sonucu olarak da, hiçbir zaman sistem çıkışı, girişin aynısı veya kopyalarından oluşamayacaktır. Distorsiyonsuz iletim olarak bilinen bu yaklaşımda, bilginin bozulması ve kaybedilmesi riski vardır.

Tüm bunların neticesinde Fourier serisi veya transformasyonu yaklaşımlarında, ilgili fonksiyonlar sinusoidlerden oluşan harmonik bileşenlerden oluştuğundan, zaman domenindeki gecikmeler için spektrumda sabit genlikli, negatif eğimli ama fazı frekansla orantılı değişen faz kaymalarının olması gerektiği göz önüne alınmalıdır. Bunların neticesinde girişi Fourier serisi tipindeki işaret olan sistem çıkışının zaman olarak t_0 miktarında kaydırılmış görünümü aşağıdaki gibi olacaktır.



Şekil 53 Girişi Fourier serisi olan sistemin t_0 kaydırılmış çıkışı

Şekilden her bir harmonik frekansla doğru orantılı olarak, değişen fazlardaki kaymalara uğrarken, genliklerinin sabit kaldığı görülmektedir. Bununla $|H(\omega)| = k$ genlik stabilitesi ve $\angle H(\omega) = -\omega t_0$ olarak lineer faz değişimini gösteren distorsiyonsuz iletimi sağladığı görülmektedir.

4. Frekans öteleme özelliği

“frequency-shifting” olarak bilinen bu durum yukarıdaki “time-shifting” e benzer özellikler taşımaktadır. Bu durumda işaretin zaman olarak ötelenmesi işaret işlemede ve özellikle haberleşme sistemlerinde önemli bir kavramdır. Eğer

$$f(t) \Leftrightarrow F(\omega)$$

ise, zaman öteleme özelliği

$$f(t) e^{j\omega_0 t} \Leftrightarrow F(\omega - \omega_0)$$

Bunun ispatı için,

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

denkleminde

$$F\{f(t) e^{j\omega_0 t}\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{j\omega_0 t} e^{-j\omega t} dt$$

$$\begin{aligned} F\{f(t) e^{j\omega_0 t}\} &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j(\omega - \omega_0)t} dt \\ &= F(\omega - \omega_0) \end{aligned}$$

buna göre

$$f(t) e^{j\omega_0 t} \Leftrightarrow F(\omega - \omega_0)$$

elde edilirki, bu frekans spektrumunda ω_0 kadarlık bir frekansın ötelenmesi anlamına gelir.

Buradan $f(t)$ ile belirlenmiş $F(\omega)$ spektrumunun ω_0 kadar kaydırılmasını sağlamak üzere zaman domenindeki $f(t)$ fonksiyonunu $e^{j\omega_0 t}$ fonksiyonuyla çarpılması gerektiğini görmekteyiz.

Tespit

$f(t) e^{j\omega_0 t} \Leftrightarrow F(\omega - \omega_0)$ bağıntısı şunu ima etmektedir ; $f(t)$ ile belirlenmiş $F(\omega)$ frekans spektrumunu (domenini) ω_0 kadar kaydırmak için, zaman domenindeki $f(t)$ fonksiyonunu $e^{j\omega_0 t}$ fonksiyonuyla çarpmak gerekmektedir. Bu işlem **frequency translation** (frekans kaydırması) olarak bilinir. Bu yolla, düşük bir frekansın daha yüksek frekans üzerine bindirilmesi tesmin edilmiş olunur. Modülasyon olarak bilinen bu yolla aynı zamanda işaretin daha yüksek bantlı bir iletim kanalına uygun hale getirilmesi işlemide sağlanır.

Örnek

Frekans ötelenmiş $F(\frac{\omega}{3} - 5)$ işaretin zaman domenindeki davranışını inceleyin.

Çözüm

Modülasyon yani frekans ötelenmesi olarak görülen problemin çözümü için gereken zaman domeni davranışın aslında ters Fourier transformasyonudur. Bunu elde etmeye çalışalım.

$f(t) \Leftrightarrow F(\omega)$ ise,

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F\left(\frac{\omega}{3} - 5\right) e^{j\omega t} d\omega$$

$$u = \frac{\omega}{3} - 5, \quad \omega = 3u + 15$$

$$d\omega = 3du$$

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F\left(\frac{\omega}{3} - 5\right) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(u) e^{j(3u+15)t} (3du) = \frac{3}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(u) e^{j3ut} e^{j15t} du \\ &= \frac{3e^{j15t}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(u) e^{j3ut} du \end{aligned}$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega \text{ olduğundan,}$$

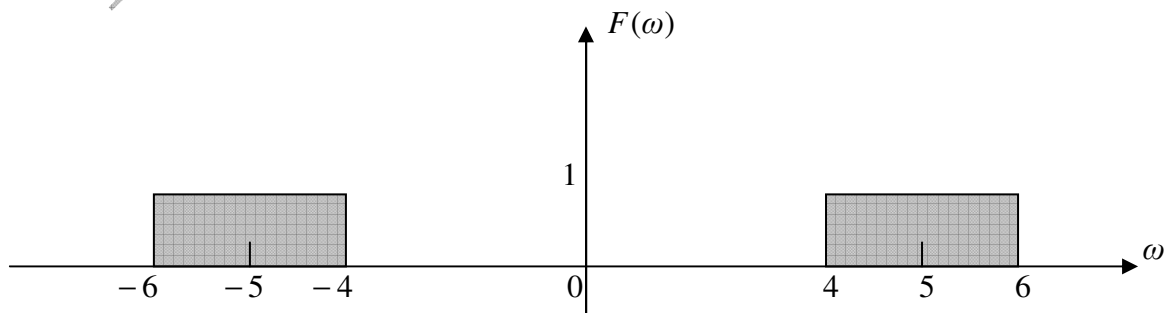
$$f(t) = \frac{3e^{j15t}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(u) e^{j(3u)t} du = \frac{3e^{j15t}}{2\pi} f(3t)$$

$$F\left(\frac{\omega}{3} - 5\right) \Leftrightarrow \frac{3e^{j15t}}{2\pi} f(3t)$$

Görüldüğü gibi frekans domeninde öteleme (frequency translation), aslında üç kat genişleme ve öteleme olduğundan, bunun sonucu olarak da zaman domeninde farklı bir genlikte ama üç kat sıkışmış bir işaret elde edilmiştir.

Örnek

Verilerden $f(t)$ yi hesaplayın.



Şekil 54

Çözüm

Veriler incelendiğinde frekans öteleme durumunun söz konusu olduğunu görmekteyiz. Buradan ters Fourier transformasyonu hesaplanacaktır. Öncelikle dörtgen fonksiyonların toplamı aşağıdaki gibi yazılacaktır.

$$F(\omega) = \text{rect}\left(\frac{\omega+5}{2}\right) + \text{rect}\left(\frac{\omega-5}{2}\right)$$

Buradan $f(t) \Leftrightarrow F(\omega)$ dönüşümü için

$$\tau \text{sinc}\left(\frac{\tau t}{2}\right) \Leftrightarrow 2\pi \text{rect}\left(\frac{\omega}{\tau}\right) \text{ ve } f(t) e^{j\omega_0 t} \Leftrightarrow F(\omega - \omega_0)$$

özdeşliklerinden $\tau = 2$ ve $\omega_0 = 5$ olduğundan

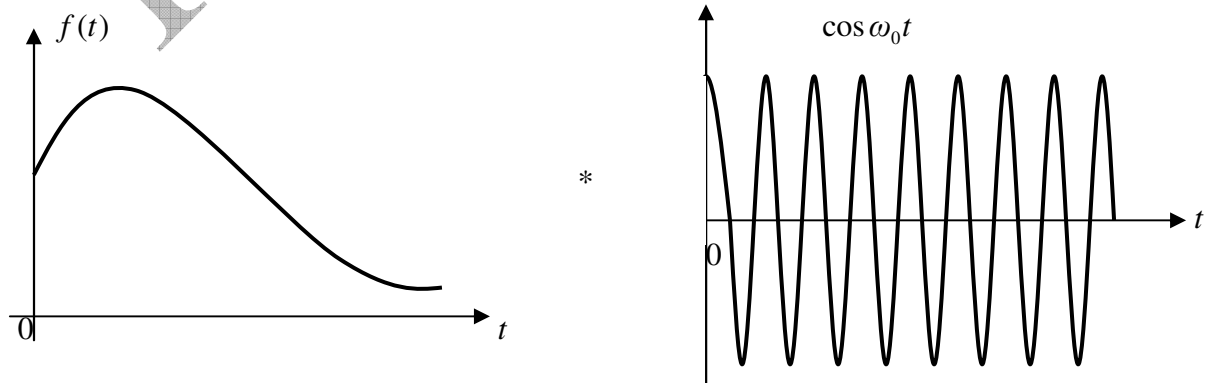
$$\text{rect}\left(\frac{\omega+5}{2}\right) = \frac{1}{\pi} \text{sinc}(t) e^{-j5t}$$

$$\text{rect}\left(\frac{\omega-5}{2}\right) = \frac{1}{\pi} \text{sinc}(t) e^{j5t}$$

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \text{rect}\left(\frac{\omega+5}{2}\right) + \text{rect}\left(\frac{\omega-5}{2}\right) = \frac{1}{\pi} \text{sinc}(t) e^{-j5t} + \frac{1}{\pi} \text{sinc}(t) e^{j5t} = \frac{2}{2\pi} \text{sinc}(t) [e^{j5t} + e^{-j5t}] \\ &= \frac{2}{\pi} \text{sinc}(t) \left[\frac{e^{j5t} + e^{-j5t}}{2} \right] = \frac{2}{\pi} \text{sinc}(t) \cos 5t \end{aligned}$$

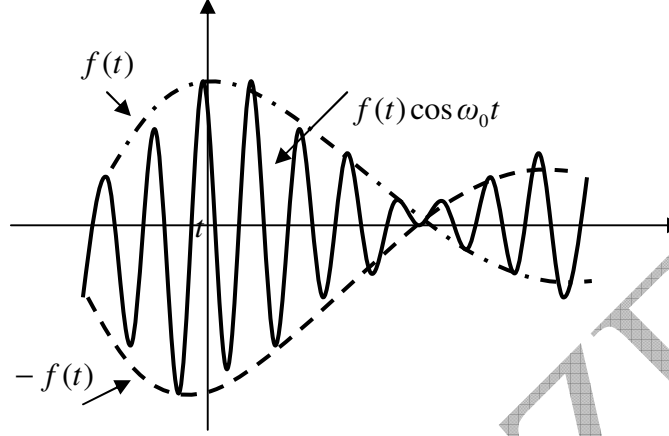
Frekans Ötelenmesi ve Modülasyon

Frekans domenindeki kaymanın veya ötelenmenin, zaman domeninde modülasyon (çarpma) işlemine karşılık geldiğini gördük. İki fonksiyonun çarpımı veya modülasyonu işlemi, zaman domeninde, yüksek frekanslı işaretin, tepe noktalarından itibaren zayıf frekanslı işareti göstermesi işlemi olarak gözlemlenir. Böylece modülasyon sayesinde, zayıf işaret, taşıyıcı olan kuvvetli işaret tarafından taşınmaktadır. Diğer bir deyişle düşük frekanslı işaret spektrumunda daha yüksek frekansa ötelenir (translation).



Şekil 55 $f(t)$ Bilgi (modüle eden) ve $\cos \omega_0 t$ taşıyıcı (modüle edile edilen) işaretler

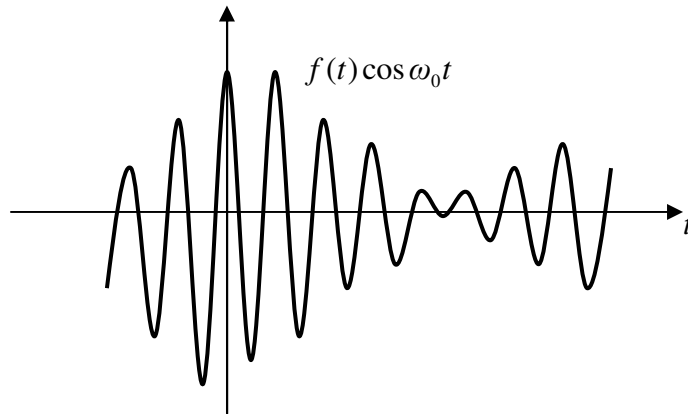
Görüldüğü gibi $f(t)$ düşük frekanslı işaret, $\cos \omega_0 t$ tipli yüksek frekanslı işaret ile modüle edilmek istenmektedir. Modüle eden $f(t)$ ve modüle edilen (kodlanan) $\cos \omega_0 t$ işaretin modülasyonu aşağıdaki gibi olacaktır.



Şekil 56 Zaman domeninde modülasyon: $f(t)\cos \omega_0 t$ modüle edilmiş dalga

Şekilden görüldüğü gibi, ω_m frekanslı $f(t)$ işareti ω_0 frekanslı sinusoid ile modüle edilmektedir. Bunun anlamı, ω_0 frekanslı işaret, kendisinden daha düşük frekanstaki ($\omega_0 \gg \omega_m$) $f(t)$ işaretini, taşımaktadır. Bu yüzden ω_0 frekanslı $\cos \omega_0 t$ tipindeki sinusoide, taşıyıcı işaret, ω_0 frekansına da taşıyıcı frekans denilmektedir.

Burada yapılan, aslında taşıyıcı durumundaki $\cos \omega_0 t$ işareti kodlanmaktadır. Çünkü $f(t)\cos \omega_0 t$ modüle edilmiş uzaya bakıldığında, $f(t)$ işareti aynen duruken, değişiklik yalnızca $\cos \omega_0 t$ işaretinde görülmektedir. Yüksek frekanslı bu işaret, değişime uğramıştır. Ancak değişime uğrarken diğer $f(t)$ işaretini aynen oluşturmuştur. Eğer $\cos \omega_0 t$ işaretinin tepe noktalarına bakılırsa $\cos \omega_0 t$ işareti, aynen $f(t)$ gibi görünmektedir. Bununla, yüksek frekanslı $\cos \omega_0 t$ işareti, düşük frekanslı $f(t)$ işareti olarak kodlanmıştır (şifrelenmiştir) denilir. Oluşan görüntü aşağıdaki gibi göz önüne alındığında,



Şekil 57 Zaman domeninde $f(t)\cos \omega_0 t$ modüle edilmiş işaret

$f(t)$ görünümünde ama ω_0 olarak ondan daha yüksek hızlı (frekanslı) ($\omega_0 \gg \omega_m$) işaretinin (dalgasının) söz konusu olduğunu görmekteyiz. Sonuçta daha düşük hızlı işaret, daha yüksek hızlı işaretin biçimine bürünerek, daha hızlı hareket etme imkanını elde etmiştir. Haberleşme anlamında, daha düşük hızlıdaki (frekans) bir bilgiyi, çok daha kısa sürede gönderebilmek için, bu tür işlemler önemli ve kaçınılmazdır. Modülasyon olarak yapılması gereken, daha yüksek hızlıdaki işaretin, mevcut düşük hızlıdaki işaret olarak kodlanmasıdır. Ele alınan örnekte, yüksek frekanslı işaretin genliği değiştirilerek kodlama yapıldığından, modülasyon türüne, genlik modülasyonu denilmektedir. Eğer frekansına göre yapılsaydı, frekans, fazına göre yapılsaydı, faz modülasyonları söz konusu olurdu.

Eğer taşıyıcı durumundaki sinusoid ω_0 frekanslı olarak $e^{j\omega_0 t}$ formundaysa, $f(t)$ mesaj işareti ile modüle edilmiş işaret $f(t)e^{j\omega_0 t}$ formunda olacaktır. Zaman domenindeki bu işlemin, spektrumdaki karşılığı

$$f(t)e^{j\omega_0 t} \Leftrightarrow F(\omega - \omega_0)$$

Veya frekans domenindeki ω_0 kaymanın zaman domenindeki karşılığı, $f(t)e^{j\omega_0 t}$ olacaktır.

5. Modülasyon özelliği

Modülasyon, haberleşme sistemlerinin en önemli özelliği olarak bilinir. Zaman domeninde genel anlamda iki fonksiyonun bir tür çarpımı üzerine kurulu bu özellik, spektrum açısından, anımsal olup, frekans olarak kaymayı işaret etmektedir. Zaman domeninde modülasyon prensip olarak düşük ve yüksek frekanslı iki fonksiyonun çarpımı olarak da düşünülebilir. Bu işlemle teknik olarak yapılmak istenen, düşük frekanslı işareti yüksek frekanslı işaretin üzerine bindirmektir. Bununla amaçlanan, kodlamadır. Modülasyonun en genel özelliği kodlama (encoding) olarak bilinir. Yüksek frekanslı işaret, düşük frekanslı işareti içerik ve şekil olarak temsil edecek şekilde kodlanır. Kodlama yani modülasyon yüksek frekanslı işaretin genlik, frekans veya faz parametrelerinden birinin değiştirilmesi yoluyla yapılır. Eğer genliğe göre yapılacaksa genlik modülasyonu, frekansa veya faza göre de yapılacaksa frekans ve faz modülasyonu olarak anılır. Yukarıda verilen

$$f(t)e^{j\omega_0 t}$$

ifadesi bir tür düşük frekanslı $f(t)$ ile yüksek frekanslı $e^{j\omega_0 t}$ işaretinin çarpımıyla oluşan modülasyon olarak düşünülebilir. Bununla yapılmak istenen $f(t)$ işaretinin $e^{j\omega_0 t}$ işareti üzerine bindirilmesi ya da yüksek frekanslı $e^{j\omega_0 t}$ işaretinin düşük frekanslı $f(t)$ işaretini taşımasıdır. Frekans kayması (frequency translation) olarak anılan bu işlemde, düşük frekanslı işaret spektrumunda daha yüksek frekansa ötelenmektedir. Bu yolla aynı zamanda işaret iletilecek haberleşme kanalından iletilmeye uygun hale getirilir. Burada $e^{j\omega_0 t}$ işareti taşıyıcı (veya modüle edilen işaret), $f(t)$ ise orijinal (modülasyon işareti) iletilmek istenen mesaj işareti olarak düşünüyoruz. Bu anlamda taşıyıcı işaretin, mesaj işareti temsil edebilmesi için değişime uğraması kodlama veya modülasyon olarak anılmaktadır. Modülasyon dalgası $f(t)e^{j\omega_0 t}$ şeklindeyse, bunun Fourier transformasyonunu veya spektrumunu yukarıdaki frekans öteleme özelliğinden yararlanarak

$$f(t)e^{j\omega_0 t} \Leftrightarrow F(\omega - \omega_0)$$

şeklinde düşünebiliriz.

Örnek

Öteleme özelliğinden yararlanarak $f(t) e^{-j\omega_0 t}$ karşılığını bulmaya çalışalım.

Çözüm

Eğer ω_0 yerine $-\omega_0$ alınırsa $\omega_0 = -\omega_0$ yukarıdaki ifade,

$$\begin{aligned} f(t) e^{-j\omega_0 t} &\Leftrightarrow F(\omega - (-\omega_0)) \\ &\Leftrightarrow F(\omega + \omega_0) \end{aligned}$$

olacaktır.

Örnek

$f(t) e^{j\omega_0 t} \Leftrightarrow F(\omega - \omega_0)$ Özelliğinden yararlanarak $F\{f(t) \cos \omega_0 t\}$ karşılığını bulmaya çalışalım.

Çözüm

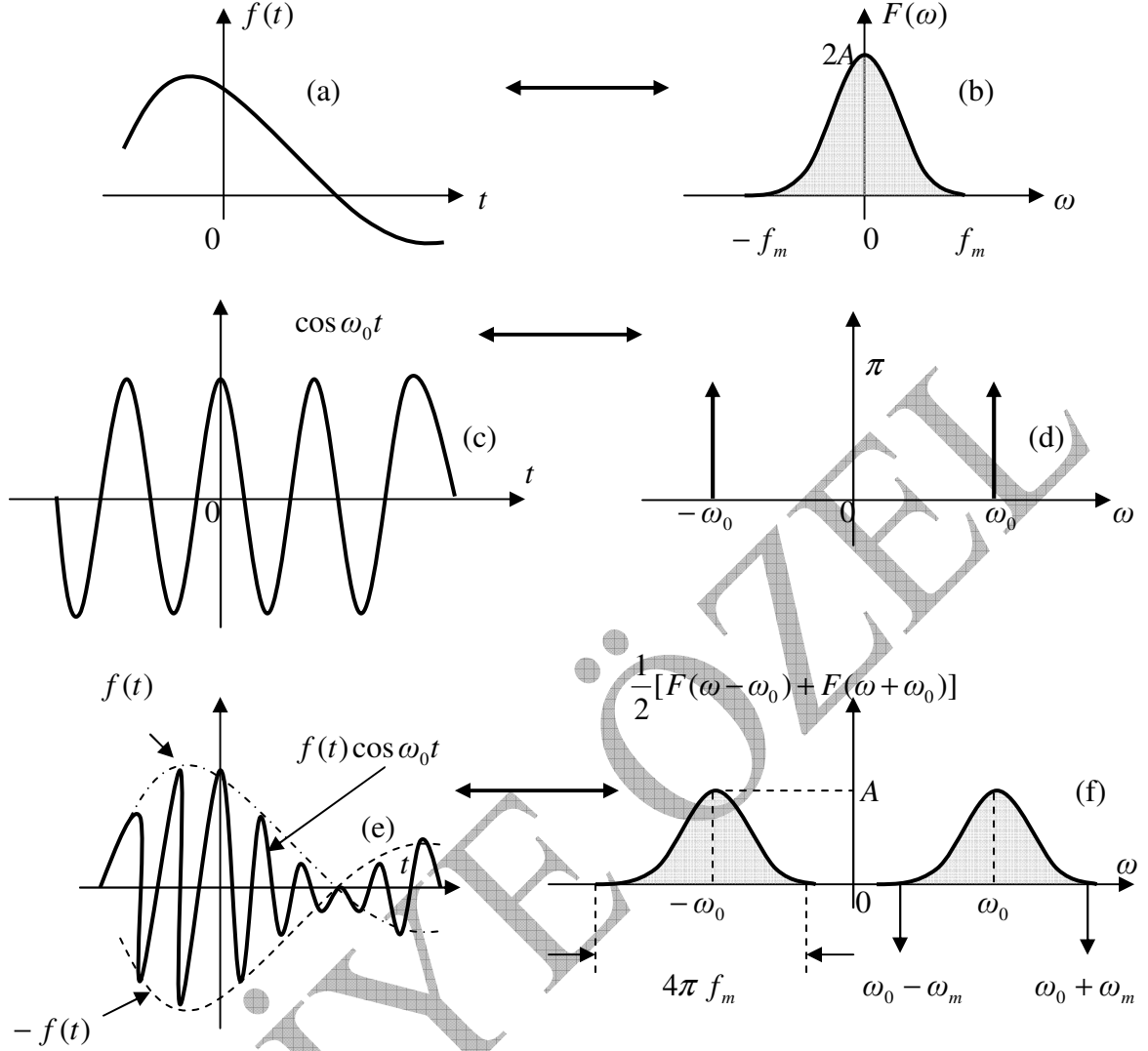
$f(t) e^{j\omega_0 t} \Leftrightarrow F(\omega - \omega_0)$ deki üstel fonksiyon $e^{j\omega_0 t}$ yerine $\cos \omega_0 t$ alırsak, ve $\cos \omega_0 t$ Euler denklemiyle

$$\cos \omega_0 t = \frac{1}{2} [e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}]$$

olarak düşünülürse, $f(t) e^{j\omega_0 t}$ ifadesi bilindiği gibi **modülasyon işlemi** olarak bilinir. Fourier transformasyonu aşağıdaki gibi oluşturulur.

$$\begin{aligned} F\{f(t) \cos \omega_0 t\} &= \frac{1}{2} f(t) [e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}] \\ &= \frac{1}{2} [f(t) e^{j\omega_0 t} + f(t) e^{-j\omega_0 t}] \\ &= \frac{1}{2} [F(\omega - \omega_0) + F(\omega + \omega_0)] \end{aligned}$$

Aşağıda böyle bir modülasyon şeması gösterilmiştir.



Şekil 58 $f(t)$ işaretinin modülasyon $f(t)\cos\omega_0 t$ spektrumu

Şekil (b) de $F(\omega)$ de işaretin band genişliği f_m Hz veya ω_m rad/sn iken modülasyonlu dalganın yer aldığı (f) de band genişliği $=(\omega_0 + \omega_m) - (\omega_0 - \omega_m) = 2\omega_m$ veya $4\pi f_m$ olarak görülmektedir. Buna göre aynı ω_m bandlı işaret için gereksiz yere iki kat daha fazla $2\omega_m$ band kullanılmaktadır. Ayrıca oluşan çift yan bandların orijine olan bölgelerinde herhangi bir bileşen yoktur. Orijinin sol ve sağında Fourier transformasyonu sıfırdır. Bu anlamda bu bölgede herhangi bir sızıntı (leak) olmadığı kabul edilir. Bu anlamda sağlıklı bir modülasyondan söz edilebilir.

Öte yandan kesik çizgilerle verilen $f(t)$ ve $-f(t)$ işaret fonksiyonu olmakla beraber haberleşme mühendisliğindeki terminolojiye uygun olarak **işaretin zarfı** olarak adlandırılırlar. Şekilden görüldüğü gibi modülasyon spektrumunda her biri orijinal periodik olmayan işaretin yarı genliğinde olan **çift yan bandlar** oluşmuştur. Bundan dolayı yapılan işlem modülasyon açısından aynı zamanda çift yan band genlik modülasyonu olarak da bilinir. Genlik modülasyonu denilmesinin sebebi, taşıyıcı durumundaki $\cos\omega_0 t$ işaretinin genliği, orijinal $f(t)$ işaretinin aynısını gösterecek şekilde değişime uğramıştır (module edilmiştir, kodlanmıştır). Burada yapılan modülasyonla ilgili bir tespit ortaya çıkmaktadır ki, önemlidir:

Tespit : İkinci şekilde verilen $\frac{1}{2}[F(\omega - \omega_0) + F(\omega + \omega_0)]$ spektrumuna bakıldığında $(-\pi/2f_m, \pi/2f_m)$ aralığındaki $\omega = 4\pi f_m$ uzunluğundaki her bir yan bandın bir biriyle örtüşmemesi gerekmektedir. Aksi taktirde bilgi kaybı kaçınılmaz olur. Bunun önüne geçmek için $\omega_0 \geq 2\pi f_m$ olması gerekmektedir. Eğer $\omega_0 < 2\pi f_m$ alınır, modüle edilmiş $\frac{1}{2}[F(\omega - \omega_0) + F(\omega + \omega_0)]$ spektrumundaki orijinal işarete ait $F(\omega)$ bandlar örtüşeceğinden (aliasing) bilgi kaybı kaçınılmaz olur. Bu durum daha sonraki bölümlerde ele alınacak örnekleme olayı ile yakından alakalıdır. Bu anlamda örneklenecek sürekli $f(t)$ işaretinin en yüksek frekansı f_m olarak düşünülürse modülasyonda göz önüne alınan $\omega_0 \geq 2\pi f_m$ modülasyon kriterinin, ω_s örnekleme frekansı ile belirlenen $\omega_s \geq 2\pi f_m$ örnekleme kriteriyle uyumlu olduğu görülmektedir.

Alıcı tarafında demodülasyon işlemi sırasında bu zarfların algılanmasıyla işleme başlanır. Bu işlem sırasında işaretin $(f(t), -f(t))$ algılanması için modüle edilmiş işarete $(f(t) \cos \omega_0 t)$ aşağıdaki basit algoritma uyarlanır

$$f(t) \cos \omega_0 t = \begin{cases} f(t) & \cos \omega_0 t = 1 \\ -f(t) & \cos \omega_0 t = -1 \end{cases}$$

Bunun neticesinde modüle edilmiş işaretin zarfı algılanır. Burada fark edildiği gibi algılamada $f(t) \cos \omega_0 t$ işaretine ait $\cos \omega_0 t$ fonksiyonunun alacağı maksimum (peak, tepe) değerlere göre bir yaklaşım söz konusudur.

Örnek

$\cos 10t$ ile modüle edilmiş dikdörtgen dalga işaretinin $f(t)$ (aşağıdaki şekil) modüle edilmiş formu $f(t) \cos 10t$ olan modüle edilmiş işaretin Fourier spektrumunu gösteriniz.

Çözüm

Burada modülasyon mantığı açısından taşıyıcı işaret durumunda $\cos 10t$ ve modüle edilecek (kodlanacak) mesaj işareti durumunda ise kare bir dalga söz konusudur. Bu anlamda sinusoid işaret, kare dalgayı taklit edecek bir biçimde değişime uğrayacak veya kodlanacaktır (modüle edilecektir), bir anlamda darbe modülasyonu yapılacaktır. Bu yöntem periyodik darbe işaretinin elde edilmesi için önemlidir. Yukarıdaki örneklerde alınan Fourier transformasyonundan

$$\begin{aligned} F\{f(t) \cos 10t\} &= \frac{1}{2}[F(\omega - \omega_0) + F(\omega + \omega_0)] \\ &= \frac{1}{2}[F(\omega - 10) + F(\omega + 10)] \end{aligned}$$

Burada $f(t) \cos 10t$ yi tam hesaplayabilmek için $f(t)$ işaretine ait dikdörtgen dalgaya ait fonksiyonu hesaplamamız gerekir. Bunun için

$$f(t) = \text{rec}\left(\frac{t}{4}\right)$$

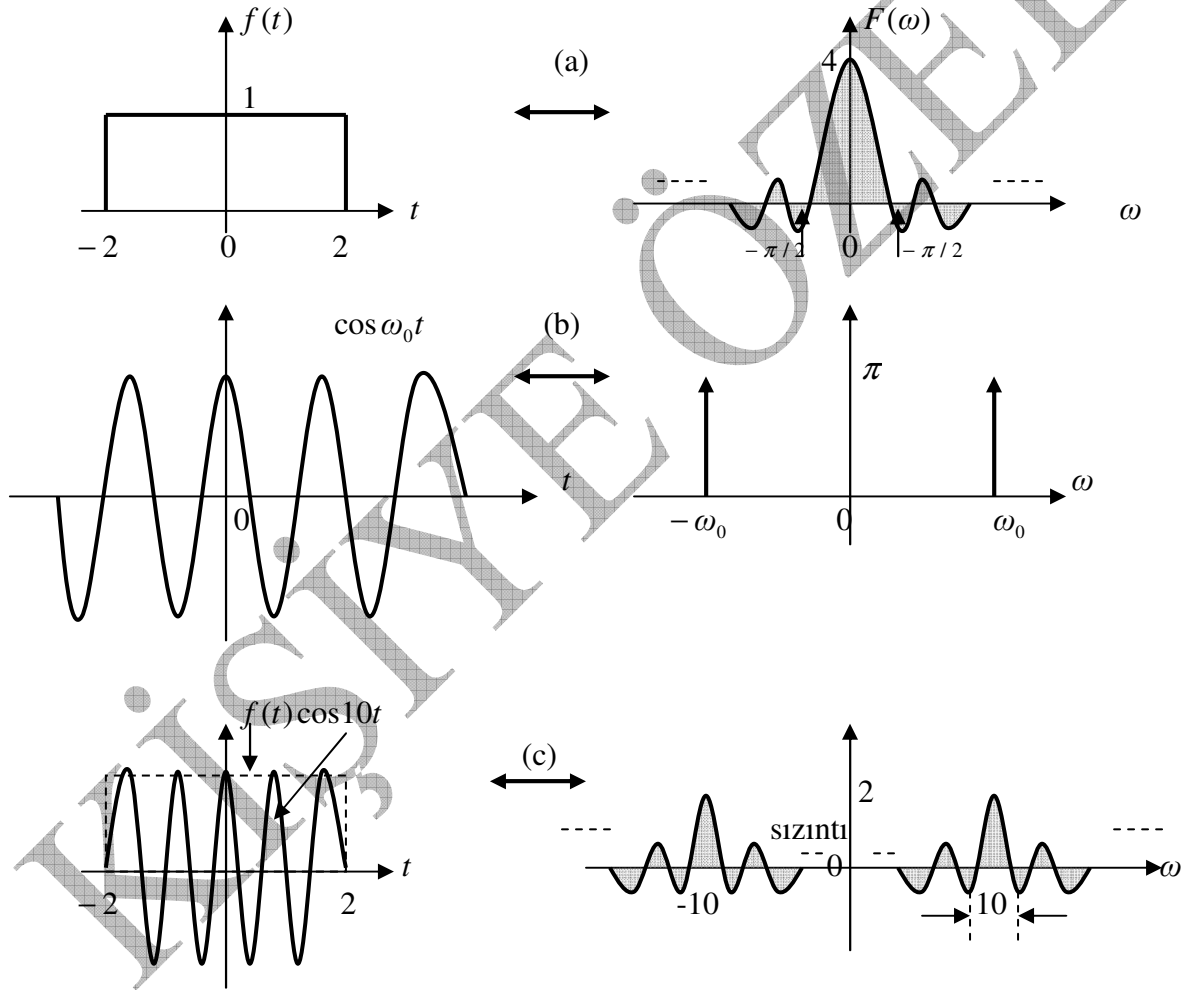
ise, Fourier transformasyonu

$$F\left\{\text{rec}\left(\frac{t}{4}\right)\right\} = 4 \sin c(2\omega) \\ = F(\omega)$$

bulunur. Şimdi artık bu değeri $f(t) \cos 10t$ de yerine koyarak tam çözümü elde edebiliriz.

$$f(t) \cos 10t = 2 \sin c[2(\omega + 10)] + 2 \sin c[2(\omega - 10)]$$

olarak bulunacaktır. Tüm aşamalar aşağıdaki şekillerde gösterilmiştir.



Şekil 59 $f(t) \cos 10t$ İşaretinin modülasyonu

Şekil (c) nin sol tarafında darbe işaretinin elde edildiği görülmektedir. Bu mantık dijital darbe işaretlerinin elde edilmesinin de temelini oluşturmaktadır. Dijital anlamda bir darbe dizisi, yüksek frekanslı bir sinusoidin bu şekilde kodlanmasıyla (modülasyonu) elde edilebilmektedir. Şekilden $\cos 10t$ işaretinin (yüksek frekanslı olduğu kabul edilmektedir) modülasyon yoluyla, kesik çizgilerle gösterilen darbe işaretine dönüştüğünü görmekteyiz. (c) deki sağ spektrumda işaretin çift yan bandlarının orijine olan bölgelerinde bileşen mevcut olduğundan (kesikli çizgi ile yan bandlar sağa ve sola birbirleriyle girişerek sızıntıya yol açtıklarından, bu anlamda sağlıklı bir modülasyondan söz edilemez.

Oysaki şekil (b) deki spektrumda $\omega = (-\omega_0, 0)$ ve $(0, \omega_0)$ aralığı temiz olup, herhangi bir bileşen yoktur. Bu nedenle bu sızıntı (leak) probleminin çözümlenmesi gerekmektedir. Bunun çözümüne yönelik pencereleme (windowing) teknikleri kullanılmaktadır.

Devam edecek olursak, her üç şekildeki (a), (b), ve (c) den görüldüğü gibi $\sin c(\omega)$ spektrumu kuyruk kısımlarıyla (kesikli çizgi ile) $\pm\infty$ a devam eden, sonsuz bantdaki bir spektrumu göstermektedir. Bunun sonucunda özellikle (c) deki spektrumun aynı zamanda örtüşmüş bir spektrum olarak, distorsiyonlu bir duruma işaret etmektedir. Haberleşmede önemli bir husus olan bir durum, **simgeler arası girişim** (intersymbol interference) kavramı ile açıklanmaktadır. Bu yaklaşım, sonlu banda sahip iletim hattından, sonsuz bantdaki bir işaretin ($\sin c(\omega)$) iletimi durumunda karşılaşılan soruna çözüm üretmektedir.

Öte yandan, görüldüğü gibi modüle edilmiş $f(t)\cos 10t$ işareti, kesikli çizgilerle gösterilen kare dalga görünümündedir. Yani taşıyıcı işaret kare dalga şeklinde kodlanmıştır (modüle edilmiştir). Ayrıca farkedildiği gibi modüle edilmiş $f(t)\cos 10t$ işareti spektrumda sağa ve sola doğru 10 kaydırılmış (ötelenmiş) olarak görünmektedir. Burada dikkat edilmesi gereken bu yan bantların her biri kare dalganın Fourier transformasyonu biçimi olan $\sin c\omega_0 t$ fonksiyonu özelliğinde olmasıdır. Ve asıl mesaj yani gönderilmek istenen bilgi bu yan bantlarla gösterilendir. Bu şekliyle böyle bir haberleşme sisteminde gönderilmek istenen işaretin ihtiyaç duyduğu olması gereken minimum band genişliği de

$$\text{Band Genisligi} = \omega_{\max} - \omega_{\min} = 10 - (-10) = 20 \text{ brHz}$$

Yani band genişliği mesaj işaretinin frekansının en az iki katıdır.

Tespit : $f(t)\cos 10t$ modülasyonlu dalganın frekans domenine bakıldığında şekilden görünmesede aslında $F\{f(t)\cos 10t\}(\omega)$ spektrumun band-limitsiz olduğu görülmektedir. Bunun örnekleme anlamında önemi vardır. Buna göre eğer $f(t)\cos 10t$ işaretini örnekleme istersek, örnekleme kuralı gereği, işaretin band sınırlı olması gerekeceğinden, $f(t)\cos 10t$ modülasyonlu işaretin bu kuralı sağlamamasından dolayı örneklenmesi mümkün olmaz. Örnekleme, Fourier transformasyonunun var olduğu (yoğunlaşılabilir band, spektral yoğunluk) banda mümkündür. Eğer Fourier transformasyonu $-\infty < F(\omega) < \infty$ gibi sonsuz aralıkta ise, modülasyon mümkün olmayacaktır. Buna göre özetle bu yapıdaki modülasyonlu dalgaların örneklenmesi doğal koşullarda mümkün olmaz. Çünkü şekle bakıldığında kare dalga olan $f(t)$ işaretinin spektrumunun $\text{Sinc}(\omega)$ fonksiyonu gereği kuyruk kısımlarındaki sürekli salınımlardan dolayı hiçbir **zaman band sınırlı olmadığı görülmektedir**. Neticede bu toplam modülasyonlu dalganın band-sınırsız olmasını etki yapacağından, modülasyon spektrumu band-sınırsız bir spektrum olarak karşımıza çıkmaktadır.

Kare dalga gibi, **üçgen** ve **Gauss** işaretleriyle de yapılacak modülasyonlarda spektrumların benzer olarak sonsuz (band limitsiz) olacağını bilmemiz gerekiyor, ilerleyen bölümlerde buna dair bilgiler verilecektir.

Haberleşme sistemlerinde veya sinyal işlemede böyle bir spektrumu band-sınırlı yapabilmek için ön filtreleme olarak bir band-geçiren, alçak geçiren veya amaca uygun bir filtreden geçirilme zorunluluğu vardır.

Genlik Modülasyonu

$$m(t)f(t) = m(t) \cos \omega_c t$$

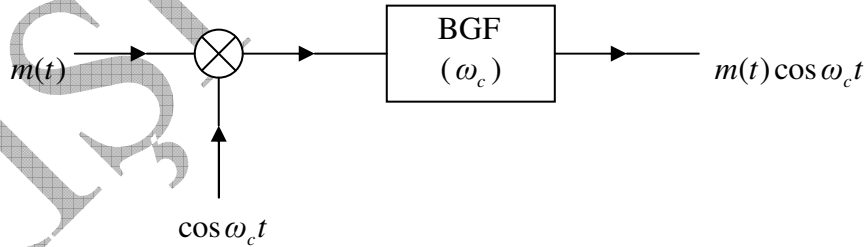
$$\begin{aligned} Y(\omega) &= \frac{1}{2\pi} F(\omega) * M(\omega) = \frac{1}{2\pi} (\pi [\delta(\omega - \omega_c) + \delta(\omega + \omega_c)]) * M(\omega) \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} M(\tau) \delta(\omega - \omega_c - \tau) d\tau \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} M(\tau) \delta(\omega + \omega_c - \tau) d\tau \\ &= \frac{1}{2} M(\omega - \omega_c) + \frac{1}{2} M(\omega + \omega_c) \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2\pi} M(\omega) * F(\omega) = \frac{1}{2} M(\omega - \omega_c) + \frac{1}{2} M(\omega + \omega_c)$$

$$Y(\omega) = \frac{1}{2} M(\omega - \omega_c) + \frac{1}{2} M(\omega + \omega_c)$$

Eğer $m(t)$ mesaj işaretinin band genişliği ω_m ise, $Y(\omega)$ modülasyon ifadesi aşağıdaki gibi olacaktır.

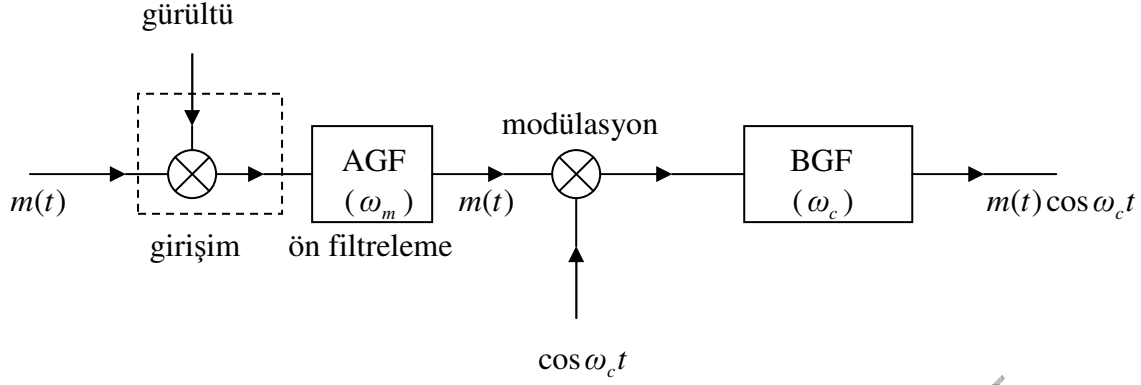
$$Y(\omega) = \frac{1}{2} [M(\omega - (\omega_m - \omega_c)) + M(\omega - (\omega_m + \omega_c))] + \frac{1}{2} [M(\omega + (\omega_m - \omega_c)) + M(\omega + (\omega_m + \omega_c))]$$



Şekil 60 Modülasyon ve filtreleme

BGF : band geçiren filtre

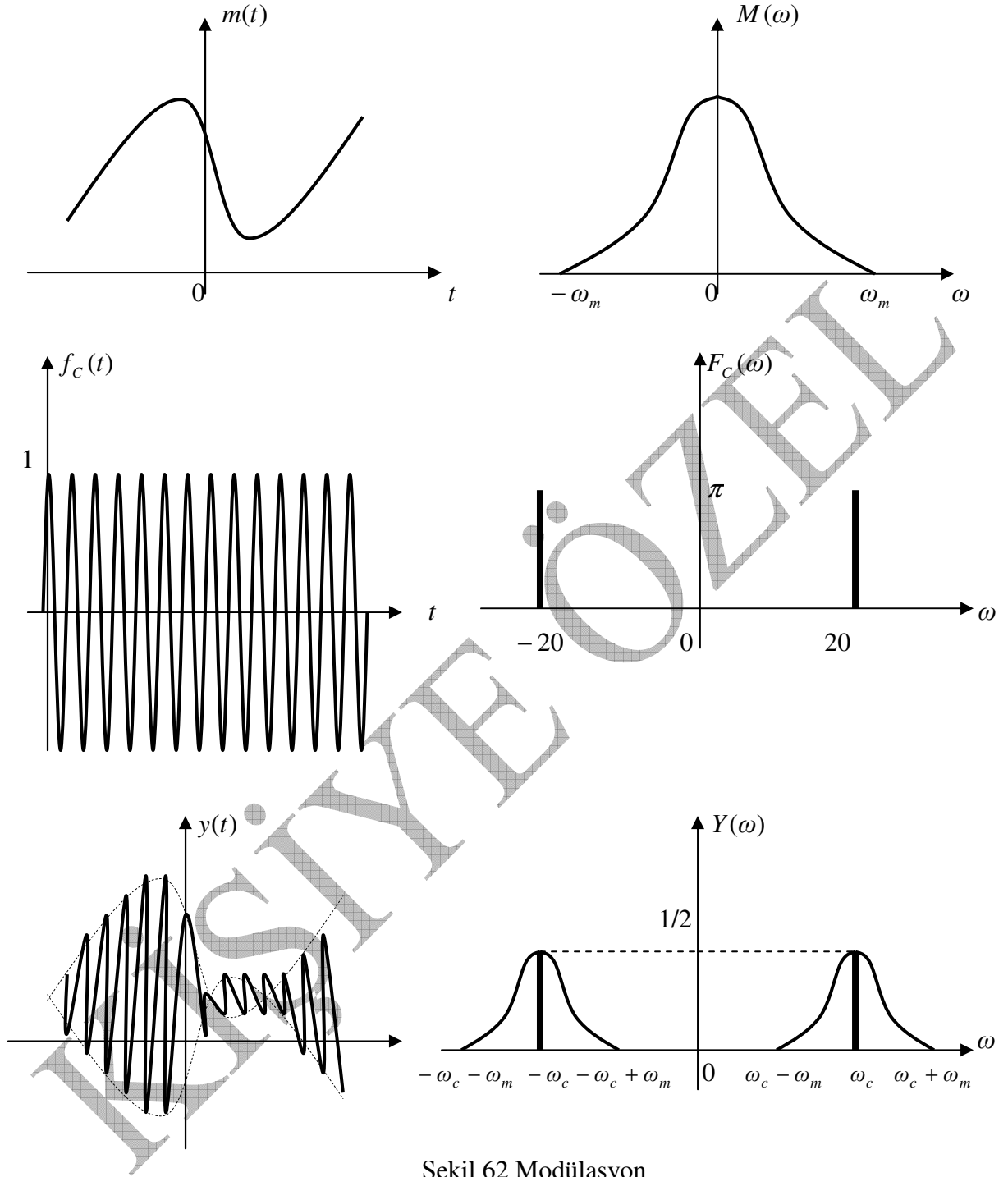
veya



Şekil 61 Ön filtrelemeli Modülasyon

AGF : alçak geçiren filtre

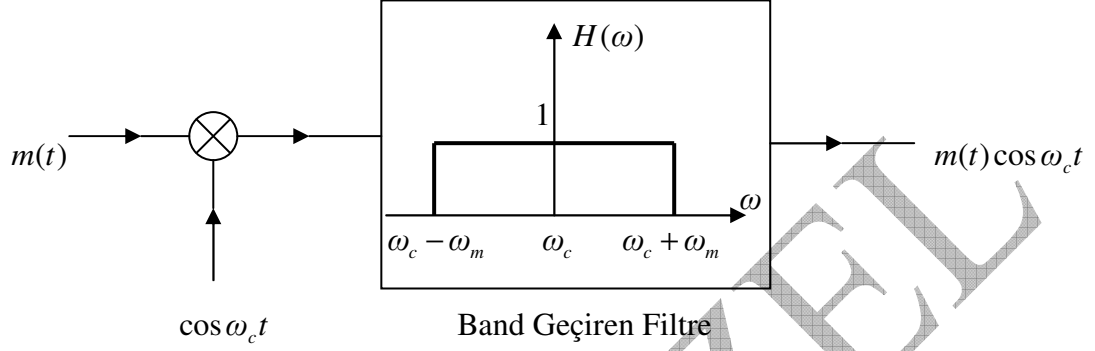
Görüldüğü gibi bu modülasyon şemasında giriş işareti bir ön filtreleme (pre-filter) işleminden sonra taşıyıcı işaret ile modüle ediliyor. Ön filtreleme bir tür alçak geçiren (AGF) filtre özelliğindedir. Modülasyondan önce iletilecek $m(t)$ mesaj işareti bir biçimde ortamdan veya herhangi bir sebepten oluşabilecek gürültüyle girişim halinde olabilir. Diğer bir deyişle mesaj işareti üzerinde istenmeyen bozucu bir işaret söz konusu olabilir. Modülasyondan önce mesaj işaretini garanti altına almak adına bir ön filtreleme işlemine tabi tutulması doğrudur. Şekilde gösterildiği gibi kesik çizgilerle gösterilen bölümdeki gibi bir gürültü mevcut ise bu, mesaj işaretiyle girişim yaparak asıl işareti bastırarak özelliğindedir. Gürültü genellikle tüm frekansları içeren yüksek band genişlikli bir işaret olarak kabul edildiğinden, modülasyondan önce bunun kaldırılması gerekir. Ortamda gürültü olmasa bile her ihtimale karşın bir ön filtreleme işlemi faydalıdır. Ön filtrenin alçak geçiren filtre özelliğinde seçilmesinin sebebi, mesaj işareti üzerine binen istenmeyen gürültünün yüksek frekanslı işaret olmasıdır. Bu filtrenin şekilden görüldüğü gibi mesaj işaretinin frekansı olan ω_m merkezli olması, bu filtrenin yalnızca $m(t)$ işaretini geçireceğini göstermektedir. Böylece gürültü bloke edilerek mesaj işaretinin modülasyon işlemine aktarılması sağlanmış olur.



Şekil 62 Modülasyon

Modülasyon sonucu oluşan $m(t)\cos\omega_c t$ ifadesinin, ω_c merkezli bir filtreden geçirilmesinin anlamı filtrenin sol tarafının sınırı $(\omega_c - \omega_m)$ ve sağ tarafının sınırı $(\omega_c + \omega_m)$ olacağından sonuçta bu band aralığını geçirebilecektir. Bu band aralığını sağlayan sistemin $(\omega_c + \omega_m) - (\omega_c - \omega_m) = 2\omega_m$ boyutundaki bir Band Geçiren Filtre (BGF) olduğunu görmekteyiz. Sonuçta $m(t)$ veya $M(\omega)$ mesaj işaretini içeren $F\{m(t)\cos\omega_c t\}$ bilgisi sağlıklı biçimde iletilmiş olacaktır.

Bu nedenle band geçiren filtre olarak modülasyonlu dalganın $(\omega_c - \omega_m)$ ve $(\omega_c + \omega_m)$ aralığındaki bandının geçirilmesi sağlanmalıdır, çünkü bu aynı zamanda $m(t)$ bilgisinin de iletilmesi anlamına gelmektedir. Bu nedenle modülasyonlu dalganın ω_c merkezli ve ω_m bandlı ($\pm \omega_m$ olarak) mesaj işaretini iletmesi için bir band geçiren filtreye (BGF) ihtiyaç vardır.



Şekil 63 Modülasyon ve filtreleme

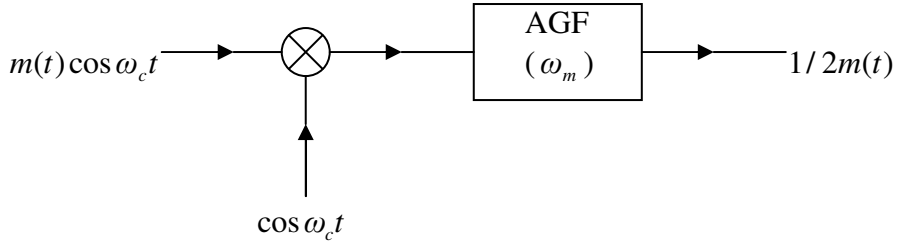
Genlik Demodülasyonu

$$y_1(t) = [m(t) \cos \omega_c t] \cos \omega_c t = \frac{1}{2} [m(t) + m(t) \cos 2 \omega_c t]$$

$$\begin{aligned} Y_1(\omega) &= \frac{1}{2\pi} [m(t) \cos \omega_c t] * \cos \omega_c t = \frac{1}{2\pi} [\cos \omega_c t \cos \omega_c t] * m(t) \\ &= \frac{1}{2\pi} [\cos^2 \omega_c t] * m(t) = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{1 + \cos 2 \omega_c t}{2} \right] * m(t) = \frac{1}{4\pi} [1 + \cos 2 \omega_c t] * m(t) = \frac{1}{4\pi} [1 + \cos 2 \omega_c t] * m(t) \\ &= \frac{1}{4\pi} [2\pi \delta(\omega) + \pi \delta(\omega - 2 \omega_c) + \pi \delta(\omega + 2 \omega_c)] * M(\omega) \\ &= \frac{1}{4\pi} [2\pi \delta(\omega) * M(\omega) + \pi \delta(\omega - 2 \omega_c) * M(\omega) + \pi \delta(\omega + 2 \omega_c) * M(\omega)] \\ &= \frac{1}{2} [\delta(\omega) * M(\omega)] + \frac{1}{4} [\delta(\omega - 2 \omega_c) * M(\omega)] + \frac{1}{4} [\delta(\omega + 2 \omega_c) * M(\omega)] \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} M(\tau) \delta(\omega - \tau) d\tau + \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{\infty} M(\tau) \delta(\omega - 2 \omega_c - \tau) d\tau + \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{\infty} M(\tau) \delta(\omega + 2 \omega_c - \tau) d\tau \\ &= \frac{M(\omega)}{2} + \frac{1}{4} M(\omega - 2 \omega_c) + \frac{1}{4} M(\omega + 2 \omega_c) \end{aligned}$$

$$Y_1(\omega) = \frac{M(\omega)}{2} + \frac{1}{4} M(\omega - 2 \omega_c) + \frac{1}{4} M(\omega + 2 \omega_c)$$

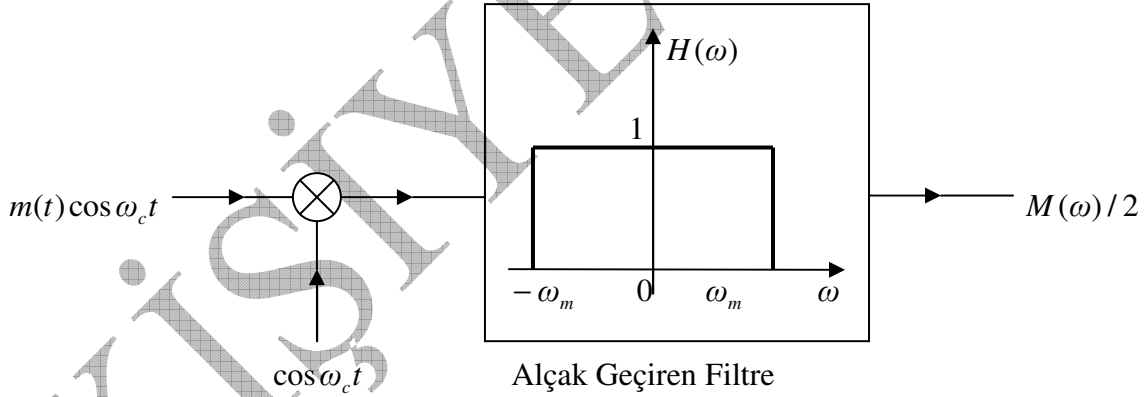
$$y_1(t) = \frac{1}{2} [m(t) + m(t) \cos 2 \omega_c t]$$



Şekil 64 Demodülasyon ve filtreleme

AGF : alçak geçiren filtre

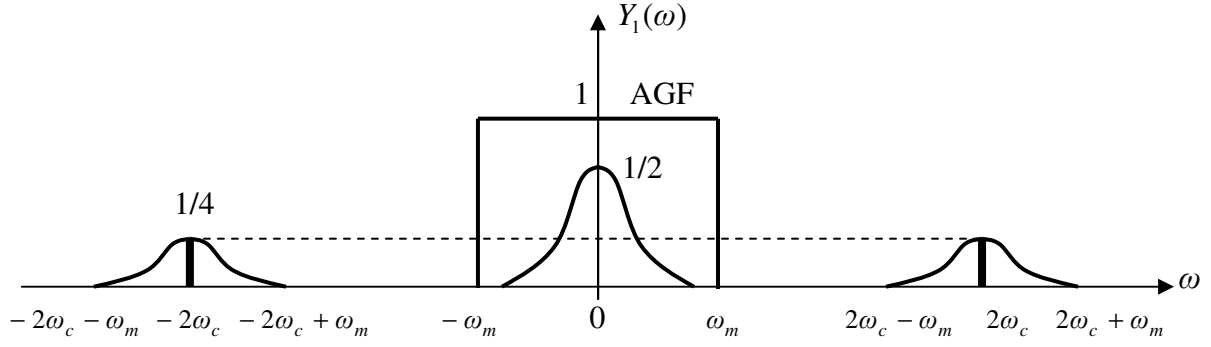
Demodülasyon sonucu oluşan $m(t) \cos^2 \omega_c t$ ifadesinin, 0 merkezli bir filtreden geçirilmesinin anlamı filtrenin sol tarafının sınırı $(-\omega_m)$ ve sağ tarafının sınırı $(+\omega_m)$ olacağından sonuçta $(+\omega_m) - (-\omega_m) = 2\omega_m$ boyutundaki $m(t)$ veya $M(\omega)$ mesajı sağlıklı biçimde iletilmiş olacaktır. Bu nedenle alçak geçiren filter olarak demodülasyonlu dalganın ω_m aralığındaki bandının geçirilmesi sağlanmaktadır. Bu nedenle demodülasyonlu dalganın 0 merkezli ve ω_m bandlı $(\pm \omega_m)$ olarak mesaj işaretini elde edilmesi için alçak geçiren filtreye (AGF) ihtiyaç vardır.



Şekil 65 Demodülasyon ve filtreleme

Eğer $m(t)$ mesaj işaretinin band genişliği ω_m ise, $Y_1(\omega)$ demodülasyon ifadesi aşağıdaki gibi olacaktır.

$$Y_1(\omega) = \frac{M(\omega)}{2} + \frac{1}{2} [M(\omega - (\omega_m - 2\omega_c)) + M(\omega - (\omega_m + 2\omega_c))] + \frac{1}{2} [M(\omega + (\omega_m - 2\omega_c)) + M(\omega + (\omega_m + 2\omega_c))]$$

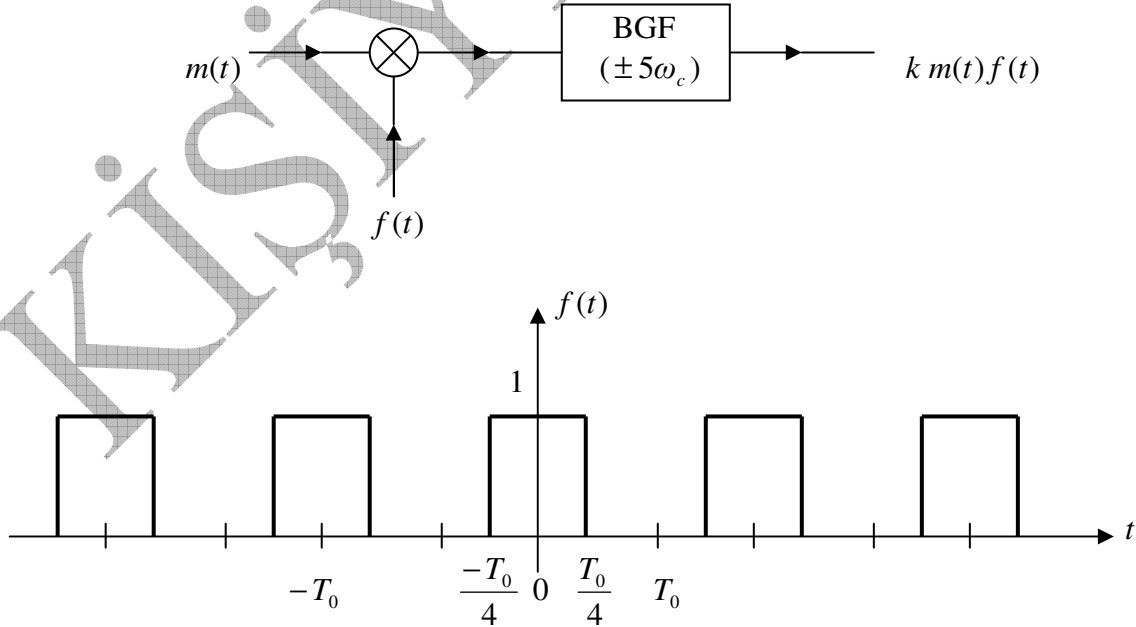


Şekil 66 Demodülasyon ve filtreleme

Şekilden de görüldüğü gibi mesaj işareti merkezde, yüksek frekanslı işaretler ise $\pm 2\omega_c$ de konumlanmışlardır. Eğer orijin merkezli ve mesaj işaretinin ω_m band genişliğinde bir alçak geçiren filtre kullanılması durumunda, $Y_1(\omega)$ spektrumundan $\frac{M(\omega)}{2}$ mesaj işareti elde edilecektir.

Örnek

Bir $m(t)$ mesaj işareti, aşağıdaki şekilde görüldüğü gibi darbe dizisi formundaki $f(t)$ taşıyıcı işaretiyle genlik modülasyonuna tabi tutuluyor. Modülasyonu analiz ederek çıkıştaki $f(t)$ işaretini ve “ k ” değerini bulun.



Şekil 67 Darbe dizisiyle modülasyon

Çözüm

Daha önce hatırlayacağımız gibi $T_0 = 2\pi$ periodlu periodik darbe dizisinin fourier serisini

$$f(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \left[\cos t - \frac{1}{3} \cos 3t + \frac{1}{5} \cos 5t - \frac{1}{7} \cos 7t - \frac{1}{9} \cos 9t + \dots \right]$$

olarak bulmuştuk. Burada temel frekansın $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{2\pi}{2\pi} = 1$ olduğunu görüyoruz. Ele alınan

örneğimiz genel olduğundan, temel frekans olarak taşıyıcının frekansının alındığını

görüyoruz, $\omega_c = \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$. Daha önce hesaplanan $f(t)$ işaretinin temel frekansını ω_c

taşıyıcıya göre düzenlersek,

$$f(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \left[\cos \omega_c t - \frac{1}{3} \cos 3\omega_c t + \frac{1}{5} \cos 5\omega_c t - \frac{1}{7} \cos 7\omega_c t - \frac{1}{9} \cos 9\omega_c t + \dots \right]$$

Modülasyon gereği

$$\begin{aligned} y(t) = m(t)f(t) &= m(t) \left[\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \left[\cos \omega_c t - \frac{1}{3} \cos 3\omega_c t + \frac{1}{5} \cos 5\omega_c t - \frac{1}{7} \cos 7\omega_c t - \frac{1}{9} \cos 9\omega_c t + \dots \right] \right] \\ &= \left[\frac{m(t)}{2} + \frac{2}{\pi} \left[m(t) \cos \omega_c t - \frac{1}{3} m(t) \cos 3\omega_c t + \frac{1}{5} m(t) \cos 5\omega_c t - \frac{1}{7} m(t) \cos 7\omega_c t - \dots \right] \right] \end{aligned}$$

$m(t)$ mesaj işareti $m(t) \cos \omega_c t, \frac{1}{3} m(t) \cos 3\omega_c t, \frac{1}{5} m(t) \cos 5\omega_c t, \frac{1}{7} m(t) \cos 7\omega_c t$ tipinde

frekansları $\omega_c, 3\omega_c, 5\omega_c, 7\omega_c$ gibi sonsuz taşıyıcı işareti module etmektedir. Bunların içinde

hangisinin uygun olduğuna amaç ve system özellikleri doğrultusunda karar verilmelidir.

Haberleşme kanalı olarak şekilde kullanılan band geçiren filtrenin özelliği hangi taşıyıcı

frekansının seçilmesi gerektiğini belirler. Haberleşme sistemlerinde modülasyonla beraber

kullanılan band geçiren filtrenin önemi burada açığa çıkmaktadır. Böyle periodic bir işaretle

yapılan modülasyonda teorik anlamda harmoniklerden kaynaklanan mümkün sonsuz tane

module edilmiş dalga mevcuttur. Gönderilecek mesaj işaretinin bunlardan hangisiyle

iletileceğine bir anlamda band geçiren filtre karar vermektedir. Bu nedenle modülasyon

tarafında mesaj haberleşme kanalına verilmeden mutlaka bir band geçiren filtreden

geçirilmelidir. Taşıyıcının genellikle periodic olduğu modülasyon tiplerinde bu önemlidir.

Örneğimizdeki band geçiren filtrenin (BGF) $\pm 5\omega_c$ merkezli seçilmesi, işlem hakkında fikir

verebilmektedir. Buna göre Fourier serisine açılan $f(t)$ darbe dizisinin içinde yalnızca

$\frac{1}{5} \cos 5\omega_c t$ bileşeni veya $y(t)$ modülasyonun içinde yalnızca $\frac{1}{5} m(t) \cos 5\omega_c t$ modülasyon

dalgasının iletimine izin verilecektir. Bunun dışında kalan tüm terimler band geçiren filtre

tarafından bastırılacaktır. Sonucunda $m(t)$ bilgi işareti, genlik modülasyonu olarak

$\frac{1}{5} m(t) \cos 5\omega_c t$ işlemini görecektir. Dolayısıyla $y(t)$ modülasyon çıkışı da bu dalgadan

ibaret olacaktır.

$$y(t) = \frac{1}{5} m(t) \cos 5\omega_c t$$

Buna göre örnekteki modülasyon çıkışı $k m(t) f(t)$ ise, bir anlamda

$$y(t) = k m(t) f(t)$$

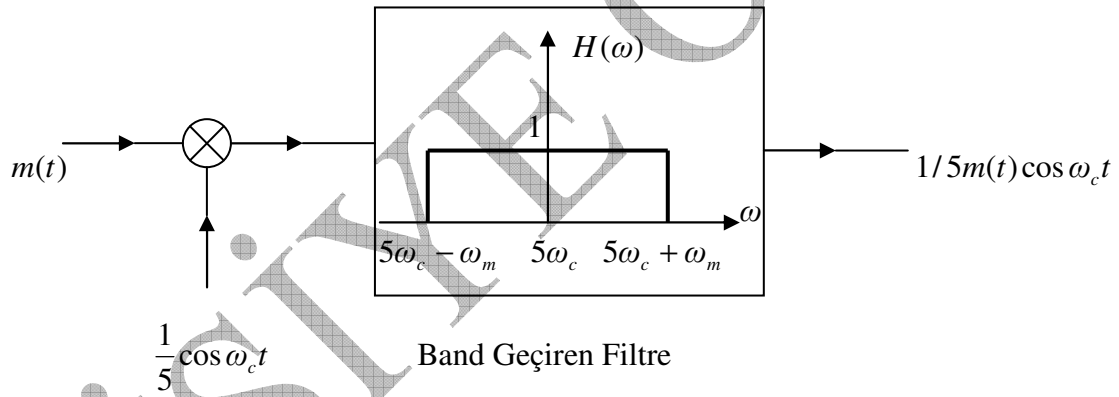
olacağından buradan,

$$y(t) = \frac{1}{5} m(t) \cos 5\omega_c t = k m(t) f(t)$$

ifadesinden

$$k = \frac{1}{5} \text{ ve } f(t) = \cos 5\omega_c t$$

olacaktır.



Şekil 68 Darbe dizisiyle modülasyon ve filtreleme

Buna göre $y(t) = \frac{1}{5} m(t) \cos 5\omega_c t$ modülasyonu

$$Y(\omega) = \frac{1}{5} \left[\frac{1}{2} M(\omega - 5\omega_c) + \frac{1}{2} M(\omega + 5\omega_c) \right] = \frac{1}{10} M(\omega - 5\omega_c) + \frac{1}{10} M(\omega + 5\omega_c)$$

veya $m(t)$ mesaj işaretinin ω_m band genişliğini dikkate alan aşağıdaki gibi olacaktır.

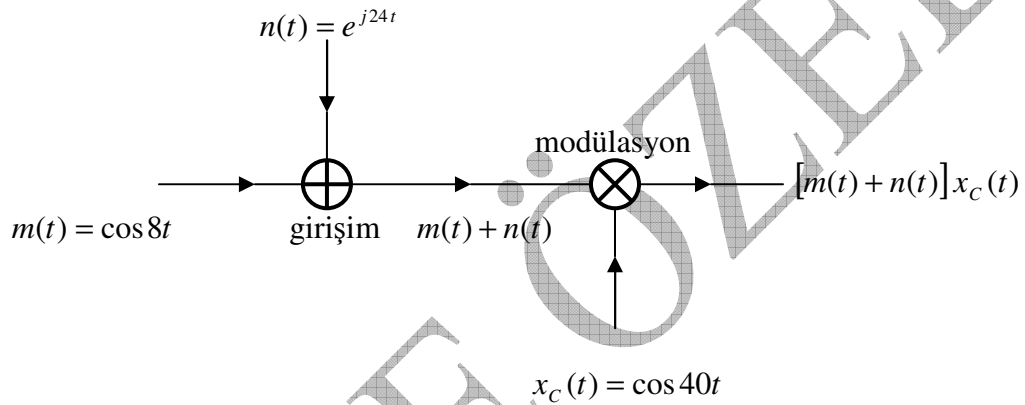
$$Y(\omega) = \frac{1}{10} [M(\omega - (\omega_m - 5\omega_c)) + M(\omega - (\omega_m + 5\omega_c))] + \frac{1}{2} [M(\omega + (\omega_m - 5\omega_c)) + M(\omega + (\omega_m + 5\omega_c))]$$

Örnek

Bir $m(t) = \cos 8t$ işareti bir haberleşme kanalından $x_c(t) = \cos 40t$ taşıyıcıyla genlik modülasyonuna tabi tutularak iletilmek istenmektedir. Ortamdan kaynaklanan $n(t) = e^{j25t}$ gürültüsü, gönderilmek istenen işaretle girişim halindedir. Sağlıklı bir veri iletiminin sağlayacak genlik modülasyonunun analizini yapın.

Çözüm

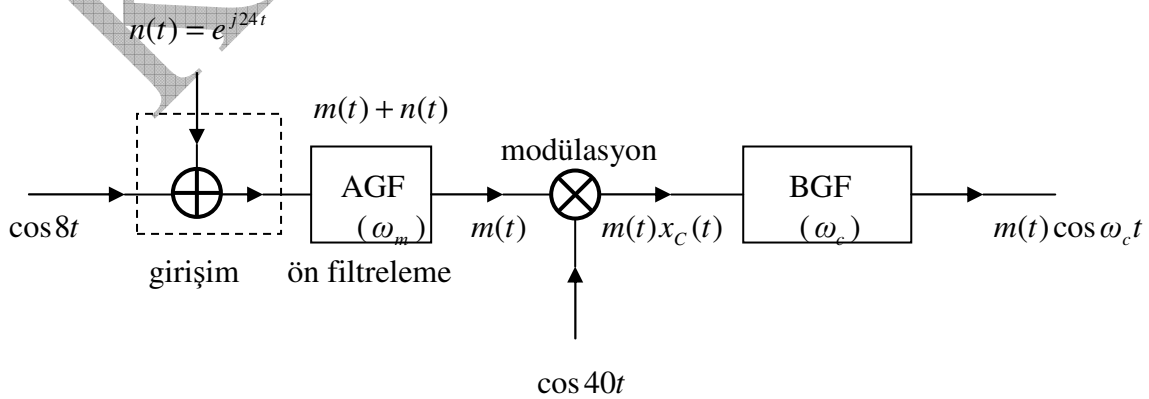
Verileri aşağıdaki blok diagram üzerine yerleştirelim.



Şekil 69 Genlik modülasyonu

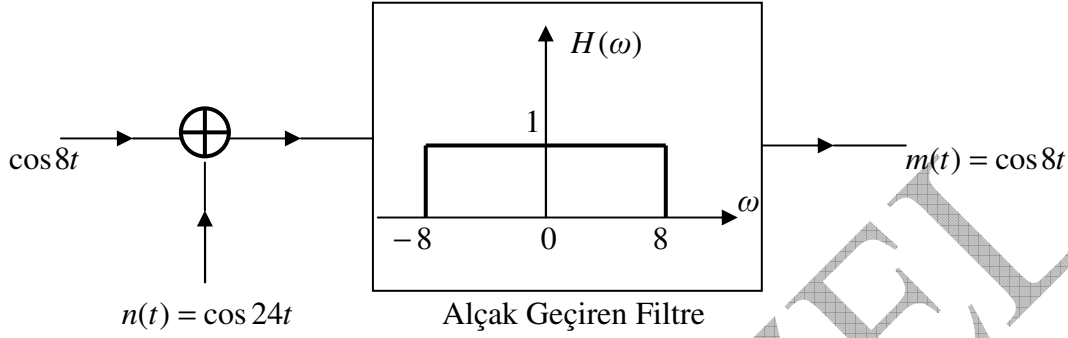
Görüldüğü gibi $m(t)$ işaretinin iletimine engel ortamdan kaynaklanan $n(t)$ gürültüsü vardır. Modülasyon ve iletimden önce algılanan (algılanmasa bile) bu gürültünün işaretin üzerinden kaldırılması yani temizlenmesi gerekmektedir. Bunun için hemen modülasyondan önce alçak geçiren özellikli bir ön filtre kullanılması gerekmektedir. Buna yönelik dizayn aşağıdaki gibi olmalıdır.

önfiltreleme bölümü



Şekil 70 Ön filtrelemeli Modülasyon

Şekilden görüldüğü gibi gürültüyle girişim halinde ve mesajı da içeren gürültülü işaret $m(t) + n(t)$ biçiminde bir alçak geçiren filtrenin girişine uygulanmaktadır. Önfiltrenin sıfır merkezli ve mesaj işaretinin frekansı olan ω_m band genişlikli bir filtre olduğunu görmekteyiz. Eğer $\text{Re}\{n(t) = e^{j24t}\} = \cos 24t$ olarak düşünülürse, önfiltreleme aşağıdaki gibi gerçekleşir.



Şekil 71 Önfiltreleme

Görüldüğü gibi önfiltre sıfır merkezli ve mesaj işaretinin $\omega_m = \pm 8$ rad/sn band genişliğinde olduğundan filtrenin çıkışında $m(t) = \cos 8t$ işaretinin elde edildiğini görmekteyiz. Bu haliyle işaret artık modülasyona ve iletme hazırdır. Öncelikle filtre girişindeki $m(t) + n(t) = \cos 8t + \cos 24t$ gürültülü işarete bakalım.

$$m(t) + n(t) = \cos 8t + \cos 24t = 2 \cos \frac{24t + 8t}{2} \cos \frac{24t - 8t}{2} = 2 \cos 16t \cos 8t$$

Bu sonucun spektrumuna bakmak istersek konvülyasyon kuralının söz konusu olduğunu görmekteyiz.

$$2 \cos 16t \cos 8t = \frac{1}{2\pi} F_M(\omega) * F_N(\omega)$$

$$f_m(t) = \cos 8t \text{ ve } f_n(t) = \cos 24t$$

$$\cos \omega_0 t \Leftrightarrow \pi [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]$$

$$F_N(\omega) = \pi [\delta(\omega - 16) + \delta(\omega + 16)]$$

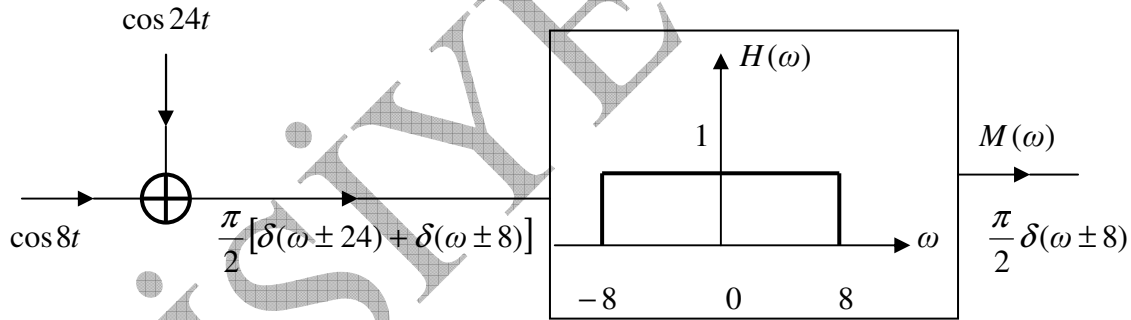
$$F_M(\omega) = \pi [\delta(\omega - 8) + \delta(\omega + 8)]$$

Bunların ışığında $2 \cos 16t \cos 8t = \frac{1}{2\pi} F_M(\omega) * F_N(\omega)$ ifadesini elde etmeye çalışalım.

$$\begin{aligned}
 2 \cos 16t \cos 8t &= \frac{1}{2\pi} F_M(\omega) * F_N(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_M(\tau) F_N(\omega - \tau) d\tau \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \pi [\delta(\tau - 8) + \delta(\tau + 8)] \pi [\delta(\omega - \tau - 16) + \delta(\omega - \tau + 16)] d\tau \\
 &= \frac{\pi}{2} \int_{-\infty}^{\infty} [\delta(\tau - 8) + \delta(\tau + 8)] [\delta(\omega - \tau - 16) + \delta(\omega - \tau + 16)] d\tau \\
 &+ \frac{\pi}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau - 8) \delta(\omega - \tau - 16) d\tau + \frac{\pi}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau - 8) \delta(\omega - \tau + 16) d\tau \\
 &+ \frac{\pi}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau + 8) \delta(\omega - \tau - 16) d\tau + \frac{\pi}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau + 8) \delta(\omega - \tau + 16) d\tau \\
 &= \frac{\pi}{2} [\delta(\omega - 24) + \delta(\omega + 8) + \delta(\omega - 8) + \delta(\omega + 24)]
 \end{aligned}$$

$$2 \cos 16t \cos 8t = \frac{1}{2\pi} F_M(\omega) * F_N(\omega) = \frac{\pi}{2} [\delta(\omega - 24) + \delta(\omega + 8) + \delta(\omega - 8) + \delta(\omega + 24)]$$

Bunun önfiltreye uygulamasına bakalım.



Şekil 72 Önfiltreleme

Görüldüğü gibi önfiltre $\omega = 8$ rad/sn band genişliğinde olduğundan yalnızca $\frac{\pi}{2} \delta(\omega \pm 8)$ işaretinin geçmesine izin verecektir. Bu işaretin de

$$m(t) = \cos 8t \Leftrightarrow M(\omega) = \pi [\delta(\omega - 8) + \delta(\omega + 8)]$$

biçiminde $M(\omega)$ işareti olduğunu görmekteyiz. Böylece başlangıçta gürültüye maruz kalan $m(t) = \cos 8t$ işaretinin filtre çıkışında, gürültüsüz elde edildiğini görmekteyiz. Bunun anlamı, gürültü filtre edilmiştir, ve işaret modülasyona hazır demektir. Şimdi $m(t) = \cos 8t$ mesaj işareti $x_c(t) = \cos 40t$ taşıyıcı işaretle modüle edilebilir.

Modülasyon bölümü

$$m(t)x_c(t) = \frac{1}{2\pi} M(\omega) * X_c(\omega)$$

$$\cos 8t \cos 40t = \frac{1}{2\pi} M(\omega) * X_c(\omega)$$

$$\begin{aligned} Y(\omega) &= \frac{1}{2\pi} X_c(\omega) * M(\omega) = \frac{1}{2\pi} (\pi [\delta(\omega - \omega_c) + \delta(\omega + \omega_c)]) * M(\omega) \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} M(\tau) \delta(\omega - \omega_c - \tau) d\tau \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} M(\tau) \delta(\omega + \omega_c - \tau) d\tau \\ &= \frac{1}{2} M(\omega - \omega_c) + \frac{1}{2} M(\omega + \omega_c) \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2\pi} M(\omega) * F(\omega) = \frac{1}{2} M(\omega - \omega_c) + \frac{1}{2} M(\omega + \omega_c)$$

$$Y(\omega) = \frac{1}{2} M(\omega - \omega_c) + \frac{1}{2} M(\omega + \omega_c)$$

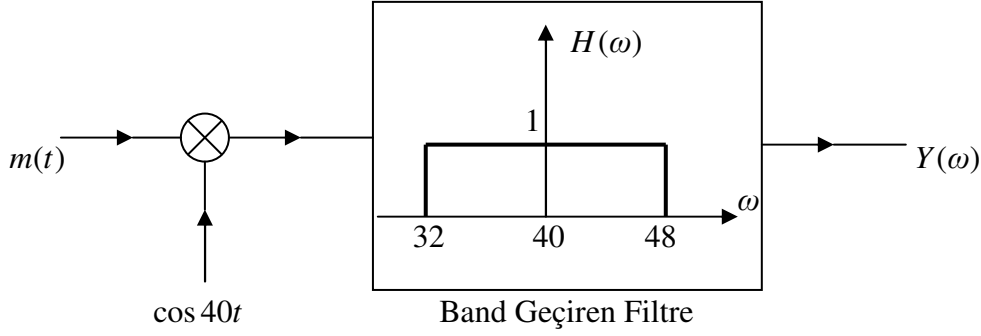
Eğer $m(t)$ mesaj işaretinin band genişliği ω_m ise, $Y(\omega)$ modülasyon ifadesi aşağıdaki gibi olacaktır.

$$Y(\omega) = \frac{1}{2} [M(\omega - (\omega_m - \omega_c)) + M(\omega - (\omega_m + \omega_c))] + \frac{1}{2} [M(\omega + (\omega_m - \omega_c)) + M(\omega + (\omega_m + \omega_c))]$$

$$Y(\omega) = \frac{1}{2} [M(\omega - (8 - 40)) + M(\omega - (8 + 40))] + \frac{1}{2} [M(\omega + (8 - 40)) + M(\omega + (8 + 40))]$$

$$Y(\omega) = \frac{1}{2} [M(\omega + 32) + M(\omega - 48)] + \frac{1}{2} [M(\omega - 32) + M(\omega + 48)]$$

Genel blok şemaya bakıldığında modülasyon dalgasının merkezi $\omega_c = 40$ rad/sn olan bir band geçiren filtreden oluştuğunu görmekteyiz.



Şekil 73 $\cos 8t \cos 40t$ işaretinin modülasyonu ve kanal filtrelemesi

Bunun sonucunda band genişliği $\omega_m = 8 \text{ rad/sn}$ olan $m(t) = \cos 8t \Leftrightarrow M(\omega) = \pi [\delta(\omega - 8) + \delta(\omega + 8)]$ mesaj işaretini üzerinde taşıyan modülasyonlu dalganın haberleşme kanalına iletilmek üzere hazır hale getirildiğini görmekteyiz.

Demodülasyon bölümü

$$\begin{aligned}
 y_1(t) &= [m(t) \cos \omega_c t] \cos \omega_c t = \frac{1}{2} [m(t) + m(t) \cos 2 \omega_c t] \\
 Y_1(\omega) &= \frac{1}{2\pi} [m(t) \cos \omega_c t]^* \cos \omega_c t = \frac{1}{2\pi} [\cos \omega_c t \cos \omega_c t]^* m(t) \\
 &= \frac{1}{2\pi} [\cos^2 \omega_c t]^* m(t) = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{1 + \cos 2 \omega_c t}{2} \right]^* m(t) = \frac{1}{4\pi} [1 + \cos 2 \omega_c t]^* m(t) \\
 &= \frac{1}{4\pi} [2\pi \delta(\omega) + \pi \delta(\omega - 2 \omega_c) + \pi \delta(\omega + 2 \omega_c)]^* M(\omega) \\
 &= \frac{1}{4\pi} [2\pi \delta(\omega) * M(\omega) + \pi \delta(\omega - 2 \omega_c) * M(\omega) + \pi \delta(\omega + 2 \omega_c) * M(\omega)] \\
 &= \frac{1}{2} [\delta(\omega) * M(\omega)] + \frac{1}{4} [\delta(\omega - 2 \omega_c) * M(\omega)] + \frac{1}{4} [\delta(\omega + 2 \omega_c) * M(\omega)] \\
 &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} M(\tau) \delta(\omega - \tau) d\tau + \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{\infty} M(\tau) \delta(\omega - 2 \omega_c - \tau) d\tau + \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{\infty} M(\tau) \delta(\omega + 2 \omega_c - \tau) d\tau \\
 &= \frac{M(\omega)}{2} + \frac{1}{4} M(\omega - 2 \omega_c) + \frac{1}{4} M(\omega + 2 \omega_c)
 \end{aligned}$$

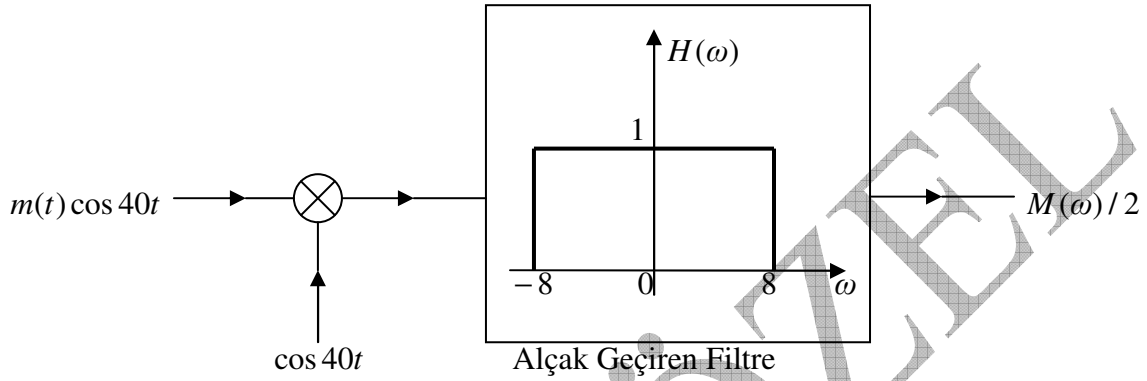
$$Y_1(\omega) = \frac{M(\omega)}{2} + \frac{1}{4} M(\omega - 2 \omega_c) + \frac{1}{4} M(\omega + 2 \omega_c)$$

$$Y_1(\omega) = \frac{M(\omega)}{2} + \frac{1}{4} M(\omega - 2 \cdot 40) + \frac{1}{4} M(\omega + 2 \cdot 40)$$

$$Y_1(\omega) = \frac{M(\omega)}{2} + \frac{1}{4} M(\omega - 80) + \frac{1}{4} M(\omega + 80)$$

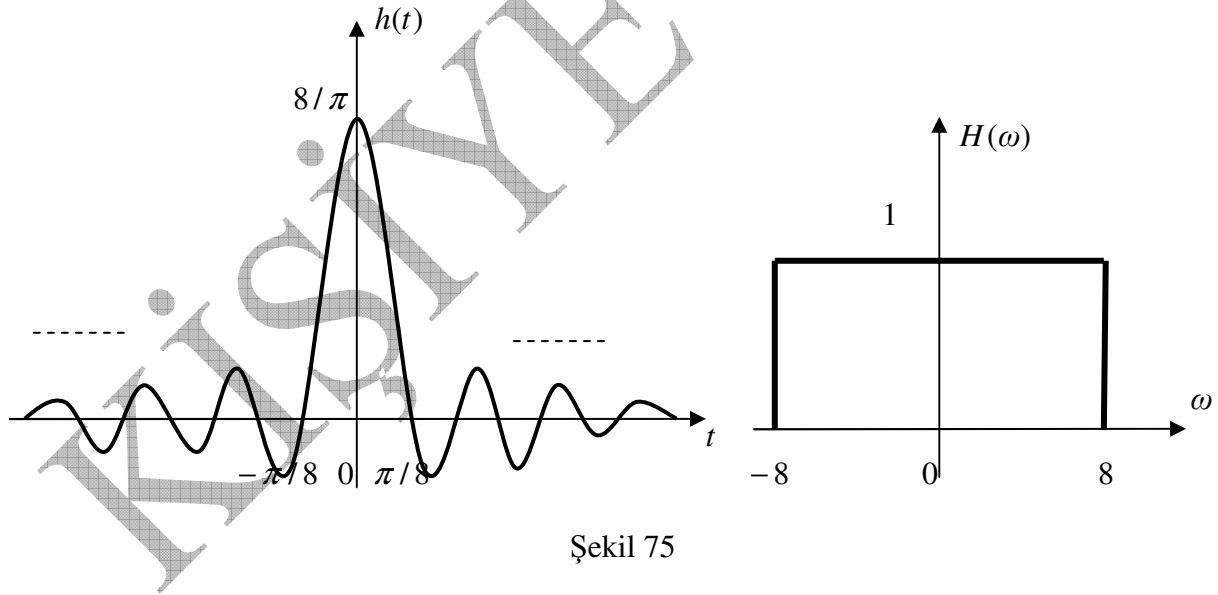
çıkış filtreleme bölümü

Elde edilen demodülasyonda $M(\omega)$ işaretinin ekinde görülen $M(\omega \pm 80)$ yüksek frekanslı bileşenlerin bastırılması gerekmektedir. Bunun içinde işaretin band genişliği olan $\omega_m = 8 \text{ rad/sn}$ band genişlikli bir alçak geçiren filtre kullanılması gerekmektedir.



Şekil 74 Demodülasyon ve filtreleme

mesaj işaretinin çıkışta zaman domeninde elde edilmesi



Şekil 75

Görüldüğü gibi $H(\omega)$ spektrumu $H(\omega) = \text{rect}(\frac{\omega}{16})$ tipindeki bir alçak geçiren filtredir.

Çünkü bu filtre $\omega = 8 \text{ rad/sn}$ band genişliğinde seçilmiştir. Bizim iletilecek işaretin band genişliğide aynı olduğundan $H(\omega)$ filtresi, $Y_1(\omega)$ de görülen terimlerden yalnızca $M(\omega)$ mesaj işaretini geçirecektir (süzecektir). $M(\omega \pm 80)$ gibi yüksek bileşenler olduğundan bunlar geçirilmeyecek sonuçta $Y_1(\omega)$ sisteminin çıkışından mesajı içeren $KM(\omega)$ gibi bir

bilgi elde edilebilecektir. Şimdi tasarlanan $H(\omega) = \text{rect}(\frac{\omega}{16})$ filtresinin $h(t)$ karşılığını

$$f(t) \Leftrightarrow F(\omega)$$

$$F(t) \Leftrightarrow 2\pi f(-\omega)$$

dualite prensibinden elde etmeye çalışalım.

$$\text{rect}\left(\frac{t}{\tau}\right) \Leftrightarrow \tau \text{sinc}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) \text{ ise dualite prensibinden,}$$

$$\tau \text{sinc}\left(\frac{\tau t}{2}\right) \Leftrightarrow 2\pi \text{rect}\left(\frac{-\omega}{\tau}\right) = 2\pi \text{rect}\left(\frac{\omega}{\tau}\right)$$

olacağından $H(\omega) = \text{rect}\left(\frac{\omega}{16}\right)$ nin $h(t)$ karşılığı aşağıdaki gibi elde edilir. Dualite gereğince,

$$\frac{1}{2\pi} \left[2\pi \text{rect}\left(\frac{\omega}{16}\right) \right] = \frac{1}{2\pi} \left[16 \text{sinc}\left(\frac{16t}{2}\right) \right] = \frac{8}{\pi} \text{sinc}(8t)$$

$$\frac{8}{\pi} \text{sinc}(8t) \Leftrightarrow \text{rect}\left(\frac{\omega}{16}\right)$$

$$H(\omega) = \text{rect}\left(\frac{\omega}{16}\right)$$

$$h(t) = \frac{8}{\pi} \text{sinc}(8t)$$

Buna göre zaman domeninde filtreleme işlemi

$$([m(t) \cos 40t] \cos 40t) h(t)$$

biçiminde yapılacaktır. Bunun konvülasyon olarak karşılığının da

$$([m(t) \cos 40t] \cos 40t) h(t) = \frac{1}{2\pi} Y_1(\omega) * H(\omega)$$

olduğunu görmekteyiz. Bunun için eğer

$$([m(t) \cos 40t] \cos 40t) \frac{8}{\pi} \text{sinc}(8t) = \frac{1}{2\pi} Y_1(\omega) * H(\omega)$$

olarak düşünersek, $M(\omega)$ mesaj işareti elde edilebilecektir. Bunun için $h(t)$ ifadesi $h(t) = 8/\pi \text{sinc}(8t)$ olarak tasarlanmıştır. Yukarıdaki şekillerden $h(t)$ işaretinin $\tau = \pi/4 = 0.25\pi$ sn genişliğinde ve $\omega_h = 10\pi$ rad/sn band genişliğindeki alçak geçiren filtre olduğunu görmekteyiz. Alçak geçiren filtre kullanılmasının sebebinin $\omega_m = 8$ rad/sn band genişliğindeki mesaj işaretinin orijinde yer almasıdır (böyle kabul edilmesidir, $8 = \omega_m < 40 = \omega_c$). ω_c frekansı, $f(t) = \cos 8t$ taşıyıcı işaretinden frekansıdır. Bunun için

$$([m(t) \cos 40t] \cos 40t) h(t) = \frac{1}{2\pi} [Y_1(\omega) * H(\omega)]$$

$$y_1(t) = \frac{1}{2} [m(t) + m(t) \cos 2.40t]$$

bilgilerinin ışığında $m(t)$ mesaj işaretini zaman domeninde elde etmeye çalışalım.

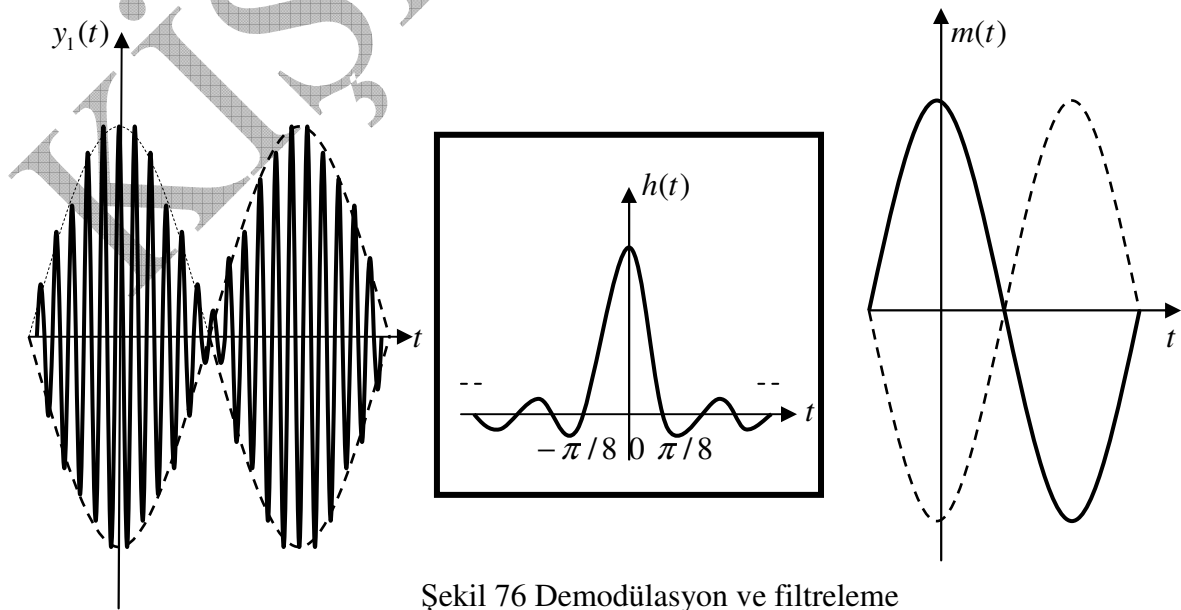
$$\begin{aligned} ([m(t) \cos 40t] \cos 40t) * h(t) &= \frac{1}{2} [m(t) + m(t) \cos 2.40t] * \frac{8}{\pi} \text{sinc}(8t) \\ &= \frac{4}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [m(\tau) + m(\tau) \cos 2.40\tau] \text{sinc}(t - \tau) d\tau \\ &= \frac{4}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} m(\tau) \text{sinc}(t - \tau) d\tau + \int_{-\infty}^{\infty} m(\tau) \cos 80\tau \text{sinc}(t - \tau) d\tau \\ &= \frac{4}{\pi} m(t) + 0 \end{aligned}$$

$$\frac{4}{\pi} m(t) = \frac{4}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} m(\tau) \text{sinc}(t - \tau) d\tau$$

görüldüğü gibi $h(t) = 8/\pi \text{sinc}(8t)$ gibi uygun alçak geçiren filtre kullanımı durumunda mesaj işareti elde edilmiştir. Zaman domeninde $m(t)$ mesaj işaretinin yanı sıra filtre çıkışında

görülen $\int_{-\infty}^{\infty} m(\tau) \cos 80\tau \text{sinc}(t - \tau) d\tau$ ifadesindeki $\omega > 80$ ve $-80 > \omega$ gibi yüksek değerler, alçak geçiren filtre kullanımından dolayı geçirilmeyeceğinden sıfır alınmıştır. Bunun sonucunda alçak geçiren filtrenin çıkışından $\frac{4}{\pi} m(t)$ mesaj işareti elde edilmiştir. Elde

edilen işaret kazancı $4/\pi$ olan bir filtreden geçirilerek $\frac{\pi}{4} \left[\frac{4}{\pi} m(t) \right] = m(t)$ elde edilir.



Şekil 76 Demodülasyon ve filtreleme

6. Konvülsiyon özelliği

Zaman domenindeki konvülsiyon prosesi, frekans domenindeki çarpma işlemine denktir.

$$1) f_1(t) * f_2(t) \Leftrightarrow F_1(\omega) F_2(\omega)$$

Bu durumu ispatlamak için

$$\begin{aligned} F\{f_1(t) * f_2(t)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau \right] dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) \left[\int_{-\infty}^{\infty} f_2(t-\tau) e^{-j\omega t} dt \right] d\tau \end{aligned}$$

Buradan “zaman öteleme özelliğinden “

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_2(t-\tau) e^{-j\omega t} dt = F_2(\omega) e^{-j\omega \tau}$$

olduğunu hatırlıyorsak yukarıdaki ifade,

$$F\{f_1(t) * f_2(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) \left[\int_{-\infty}^{\infty} f_2(t-\tau) e^{-j\omega t} dt \right] d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) \underbrace{\left[\int_{-\infty}^{\infty} f_2(t-\tau) e^{-j\omega t} dt \right]}_{F_2(\omega)} d\tau$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_2(t-\tau) e^{-j\omega t} dt$$

$$u = t - \tau \rightarrow t = u + \tau$$

$$du = dt$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_2(t-\tau) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f_2(u) e^{-j\omega(u+\tau)} du = e^{-j\omega \tau} \int_{-\infty}^{\infty} f_2(u) e^{-j\omega u} du = F_2(\omega) e^{-j\omega \tau}$$

$$\begin{aligned} F\{f_1(t) * f_2(t)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) \underbrace{\left[\int_{-\infty}^{\infty} f_2(t-\tau) e^{-j\omega t} dt \right]}_{F_2(\omega)} d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) F_2(\omega) e^{-j\omega \tau} d\tau = F_2(\omega) \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) e^{-j\omega \tau} d\tau = F_2(\omega) \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) e^{-j\omega \tau} d\tau}_{F_1(\omega)} \\ &= F_1(\omega) F_2(\omega) \end{aligned}$$

$$f_1(t) * f_2(t) = F_1(\omega) F_2(\omega)$$

Bu özellik işaret işlemede önemli kolaylıklar sağlamaktadır. Bununla zaman domenindeki biraz daha kompleks işlemler yerine daha basit işlemlerle sonuca gitmek mümkün olacaktır. Bunun terside doğrudur.

$$2) f_1(t) f_2(t) = \frac{1}{2\pi} F_1(\omega) * F_2(\omega)$$

Konvülyasyon prosesi daha önceden de bildiğimiz gibi özellikle sistem cevabının bulunması için önemli bir işlemdir. Eğer sistem giriş fonksiyonu $f(t)$ ve sistem impuls cevabı da $h(t)$ ise, sistem toplam çıkış cevabı $y(t)$

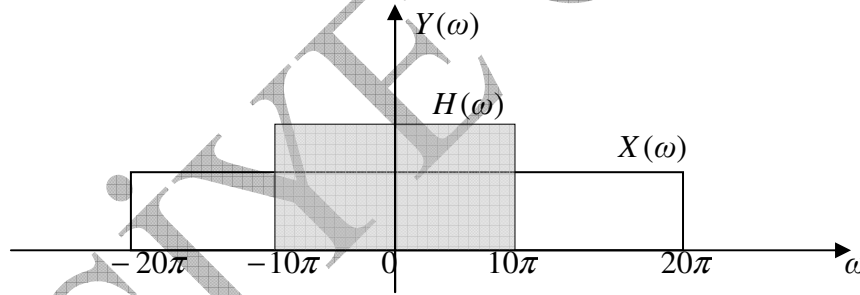
$$\begin{aligned} y(t) &= f(t) * h(t) \\ &= F(\omega) H(\omega) \\ &= Y(\omega) \end{aligned}$$

Konvülyasyon ve Filtrasyon

Konvülyasyon bir sistem cevabını hesaplamak üzere kullanılan önemli bir operatördür. Eğer konvülyasyon mevcut

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau = X(\omega) H(\omega)$$

gibi düşünülürse konvülyasyonun filtre özelliği aşağıdaki şekil gibi şematiz edilebilir.



Şekil 77 Konvülyasyon ve filtre özelliği

Buna göre, sistem girişi olan $x(t)$ işaretinin, $h(t)$ sistem fonksiyonundan

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau$$
 kuralına uygun olarak konvülyasyon yoluyla geçirildiğini

görmekteyiz. Bu geçiş esnasında $h(t)$ sistemi, filtre olarak $x(t)$ girişinin bazı özelliklerini değiştirebilir. Bu değiştirme $h(t)$ sisteminin alçak, yüksek veya band geçiren filtre gibi davranmasıyla ortaya çıkar. Bu nedenle konvülyasyon işlemi, önemli bir filtre yöntemidir. Zaman domenine ek olarak $y(t) = x(t) * h(t) = H(\omega)$ ile frekans domeninde de benzer işlem gerçekleştirilmektedir.

Örnek

Yukarıda verilen şekile göre giriş işareti $x(t) = \frac{2\sin(20\pi t)}{\pi t}$ ve sistem fonksiyonu

$h(t) = \frac{5\sin(10\pi t)}{\pi t}$ alınırsa, sistem çıkışını hesaplayın.

Çözüm

Verilenleri sistem olarak filtreye uyarlırsak, aşağıdaki genel denklemden hareket etmemiz gerekiyor.

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2\sin(20\pi \tau)}{\pi \tau} \frac{5\sin(10\pi (t-\tau))}{\pi (t-\tau)} d\tau$$

Görüldüğü gibi konvülasyon yöntemiyle oldukça karmaşık olabilecek işlem, onun yerine

$$y(t) = x(t) * h(t) = X(\omega)H(\omega)$$

yaklaşımındaki $y(t) = X(\omega)H(\omega)$ olan frekans domeninde işlemin yapılmasını daha basit kılmaktadır. Buna göre işlemi düzenlersek,

$$F\left\{\frac{\sin(\omega_0 t)}{\pi t}\right\} = [u(\omega + \omega_0) - u(\omega - \omega_0)]$$

Bu kurala göre $x(t)$ ve $h(t)$ fonksiyonlarının Fourier tranasformasyonları hesaplanabilir.

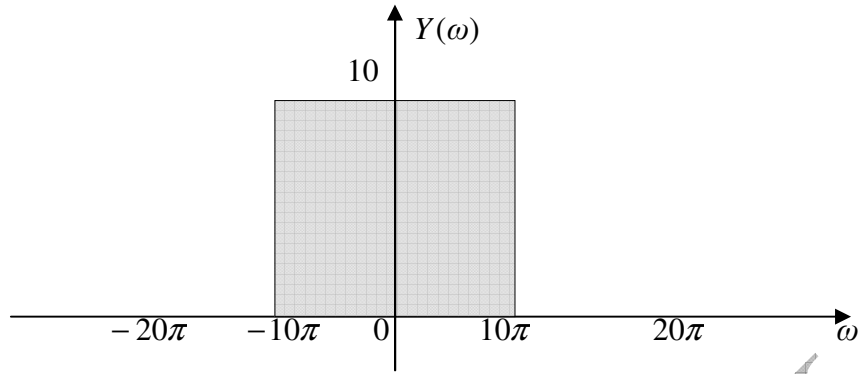
$$F\left\{x(t) = \frac{2\sin(20\pi t)}{\pi t}\right\} = 2[u(\omega + 20\pi) - u(\omega - 20\pi)] = X(\omega)$$

$$F\left\{h(t) = \frac{5\sin(10\pi t)}{\pi t}\right\} = 5[u(\omega + 10\pi) - u(\omega - 10\pi)] = H(\omega)$$

Elde edilenlere göre filter çıkışı hesaplanabilir.

$$\begin{aligned} y(t) = x(t) * h(t) &= X(\omega)H(\omega) = 2[u(\omega + 20\pi) - u(\omega - 20\pi)]5[u(\omega + 10\pi) - u(\omega - 10\pi)] \\ &= 10[u(\omega + 20\pi)u(\omega + 10\pi) - u(\omega + 20\pi)u(\omega - 10\pi)] \\ &\quad + 10[-u(\omega - 20\pi)u(\omega + 10\pi) + u(\omega - 20\pi)u(\omega - 10\pi)] \\ &= 10[u(\omega + 10\pi) - u(\omega - 10\pi)] + 10[u(\omega + 10\pi) - u(\omega - 10\pi)] \\ &= 10[u(\omega + 10\pi) - u(\omega - 10\pi)] \end{aligned}$$

Görüldüğü gibi $H(\omega)$ filtre fonksiyonunun band genişliği $(0,10\pi)$ ve kesim frekansı 10π rad/sn olduğundan, $(0,20\pi)$ olarak daha geniş banda sahip olan $X(\omega)$ giriş işaretinin $(10\pi,20\pi)$ aralığını geçirmeyecektir. Sonuçta filtre çıkışı olarak sistem çıkışı, $H(\omega)$ system fonksiyonunun band genişliği ile sınırlı olacak şekilde elde edilecektir.

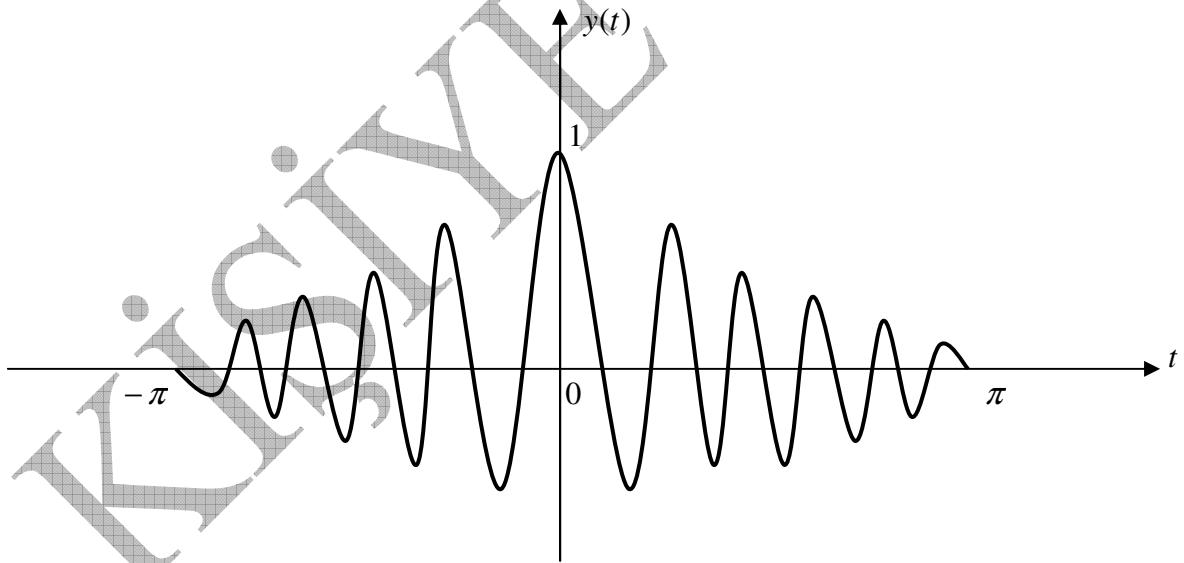


Şekil 78 Konvüasyon ve filtre özelliği

Görüldüğü gibi sonuçta $(0,10\pi)$ aralığında elde edilen $Y(\omega)$, simetrik durumdan dolayı $(-10\pi,10\pi)$ aralığında değerlendirilmiştir. Diğer bir farklılık ise, çıkışın genliği girişten farklı olarak 2 yerine 10 olarak artmıştır.

Örnek

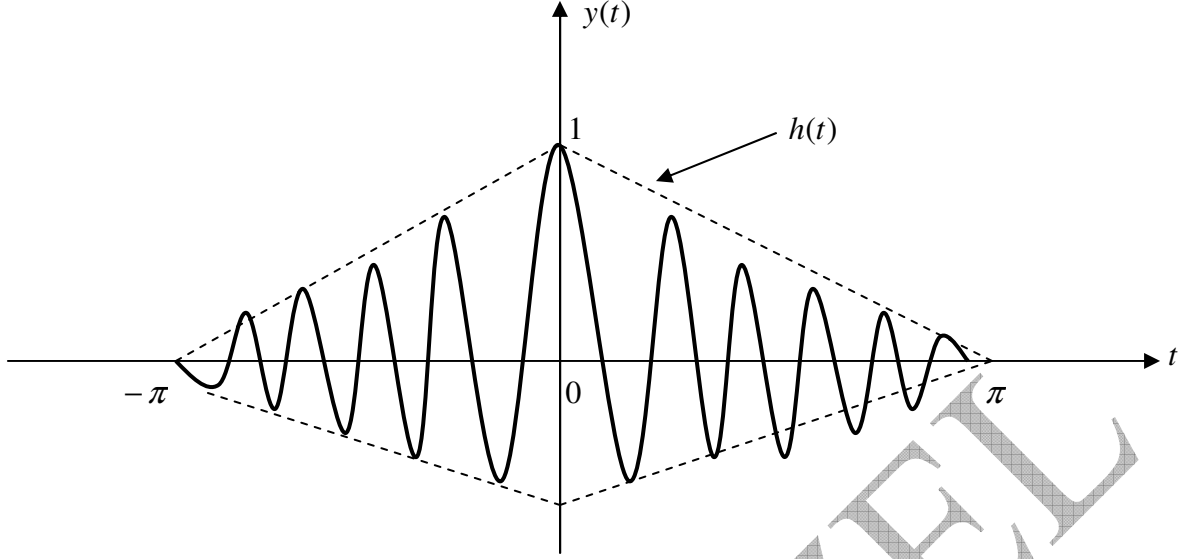
Bir $h(t)$ işareti $f(t) = \cos 10t$ taşıyıcı işareti ile module edilmektedir. Aşağıda genlik modülasyonlu dalga görülmektedir. Bu dalganın Fourier transformasyonunu bulun.



Şekil 79 Modülasyonlu dalga

Çözüm

Verilen şeklin modülasyonlu bir işaret olduğunu görüyoruz. Taşıyıcı konumundaki yüksek hızlı $f(t) = \cos 10t$ sinusoidi, düşük hızlı $h(t)$ işaretle module edilmiştir. Module edilmiş $f(t)h(t)$ dalgasının Fourier transformasyonunu bulmadan önce, ikinci yani düşük hızlı $h(t)$ işaretin ne olabileceğine bir bakalım. Bunu aslında module edilmiş sinusoidin zarfından (tepe noktalarından izleyerek) görebiliriz. Verilen şekli aşağıdaki gibi düzenleyelim.



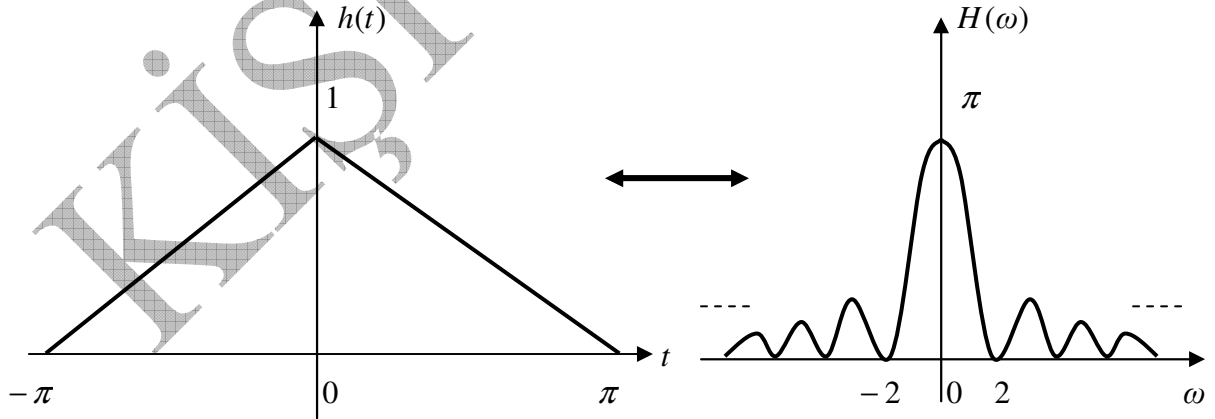
Şekil 80 Modülasyonlu dalga

Düzenlenen şekilden kesik çizgiler takip edildiğinde $h(t)$ işaretinin üçgen işaret olduğu görülmektedir. Hatta zaman domeninde $\tau = 2\pi$ sn uzunluğundadır. Böyle bir üçgen işaretin grafiği ve fonksiyonu aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$h(t) = \Delta\left(\frac{t}{2\pi}\right)$$

$$\Delta\left(\frac{t}{\tau}\right) \Leftrightarrow \frac{\tau}{2} \text{sinc}^2\left(\frac{\omega\tau}{4}\right)$$

$$\Delta\left(\frac{t}{2\pi}\right) \Leftrightarrow \frac{2\pi}{2} \text{sinc}^2\left(\frac{\omega 2\pi}{4}\right) = \pi \text{sinc}^2\left(\frac{\pi\omega}{2}\right)$$



Şekil 81

Band genişliği $\frac{\pi\omega}{2} = \pi \rightarrow \pi\omega = 2\pi \rightarrow \omega = 2 \text{ rad/sn.}$

Buna göre genlik modülasyonu $f(t)h(t)$ veya $h(t)\cos 10t$ biçimindedir. Buradan $h(t)\cos 10t$ modülasyon ifadesinin Fourier transformasyonunu bulabiliriz. Buna göre bu işaretin $f(t) = \cos 10t$ taşıyıcı işaretle modülasyonu

$$y(t) = f(t)h(t)$$

biçiminde bir konvülyasyondur. Bu konvülyasyonun amacının modülasyonun yanısıra, $h(t)$ işaretini filtrelemek olduğunu bilmemiz gerekiyor. Bu anlamda filtreleme amacıyla bir üçgen tipli kanal kullanıldığı düşünülebilir. Problem bu boyutuyla tipik bir filtreleme problem olarak görülebilir. Filtreleme amacıyla üçgen işaretin kullanılması son derece mantıklıdır. Çünkü daha soft (smooth) bir fonksiyondur. Darbe işareti gibi ani yükselen veya ani düşen süreksizlik noktaları yoktur. Kademeli bir çıkış ve iniş davranışı gösterir. Şimdi modülasyon sonucunu veya filter çıktısı olan $y(t)$ işaretini zaman ve frekans domeninde elde etmeye çalışalım. Bunun için

$$f(t)h(t) = \frac{1}{2\pi} F(\omega) * H(\omega)$$

konvülyasyon kuralını hatırlamamız gerekiyor (zaman domenindeki çarpma, frekans domenindeki konvülyasyon işlemine eşittir). Bunun için tek tek $f(t) = \cos 10t$ ve $h(t) = \Delta(\frac{t}{2\pi})$ işaretlerinin Fourier transformasyonlarını (dönüşümlerini) hatırlamamız gerekiyor.

$$\cos \omega_0 t \Leftrightarrow \pi [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]$$

$$\cos 10t \Leftrightarrow \pi [\delta(\omega - 10) + \delta(\omega + 10)]$$

$$F(\omega) = \pi [\delta(\omega - 10) + \delta(\omega + 10)]$$

Band genişliği $\omega = 10$ rad/sn

$$\Delta(\frac{t}{\tau}) \Leftrightarrow \frac{\tau}{2} \text{sinc}^2(\frac{\omega \tau}{4})$$

$$\Delta(\frac{t}{2\pi}) \Leftrightarrow \frac{2\pi}{2} \text{sinc}^2(\frac{\omega 2\pi}{4}) = \pi \text{sinc}^2(\frac{\pi \omega}{2})$$

$$H(\omega) = \pi \text{sinc}^2(\frac{\pi \omega}{2})$$

Band genişliği $\frac{\pi \omega}{2} = \pi \rightarrow \pi \omega = 2\pi \rightarrow \omega = 2$ rad/sn.

Burada band genişliği hesaplanırken $\text{sinc}(x)$ fonksiyonunun $x = \pm k\pi$ noktalarındaki $\text{sinc}(x) = 0$ değeri göz önüne alınmıştır. Band genişliği ilk ana beam yani ana işaretin orijin etrafında yoğunlaştığı bölüm olduğu göz önüne alınmıştır. Aslında teorik olarak $\text{sinc}(x)$ tipli işaretlerin band genişliğinin sonsuz olduğunu biliyoruz.

Ancak bu işaretin enerjisinin yoğunlaştığı ana bölüm orijin etrafındaki simetrik bölümlerden biridir. Bu bölümlerde $x = \pm\pi$ noktaları olduğu için band genişliği olarak $\omega = (0, k\pi)$ olarak, “k” değeri belirlenmeye çalışılmaktadır. Bu yüzden $\text{sinc}(x)$ veya $\text{sinc}^2(x)$ tipli işaretlerin band genişliklerinin hesaplanmasında bu yol takip edilmektedir.

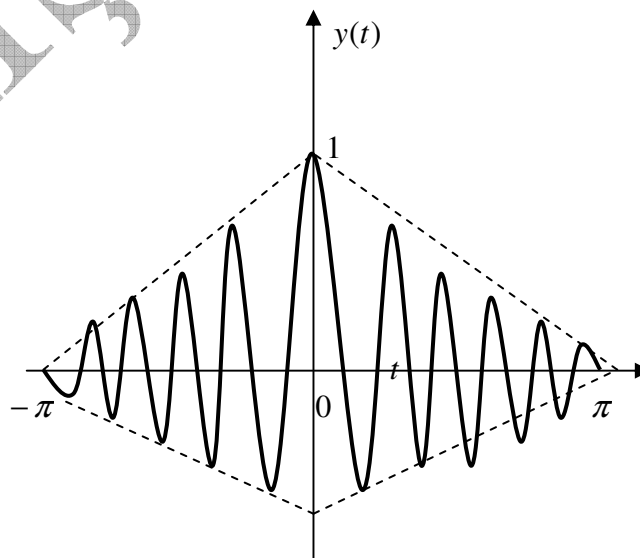
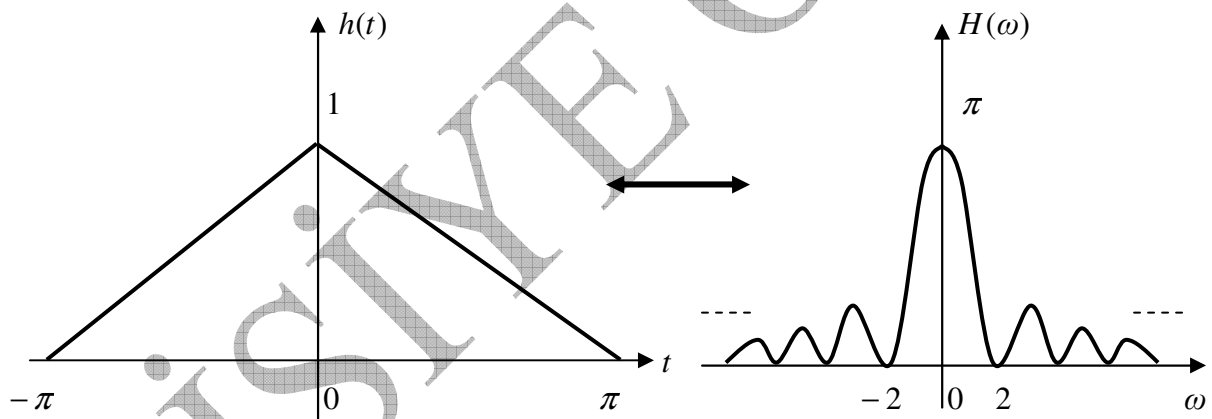
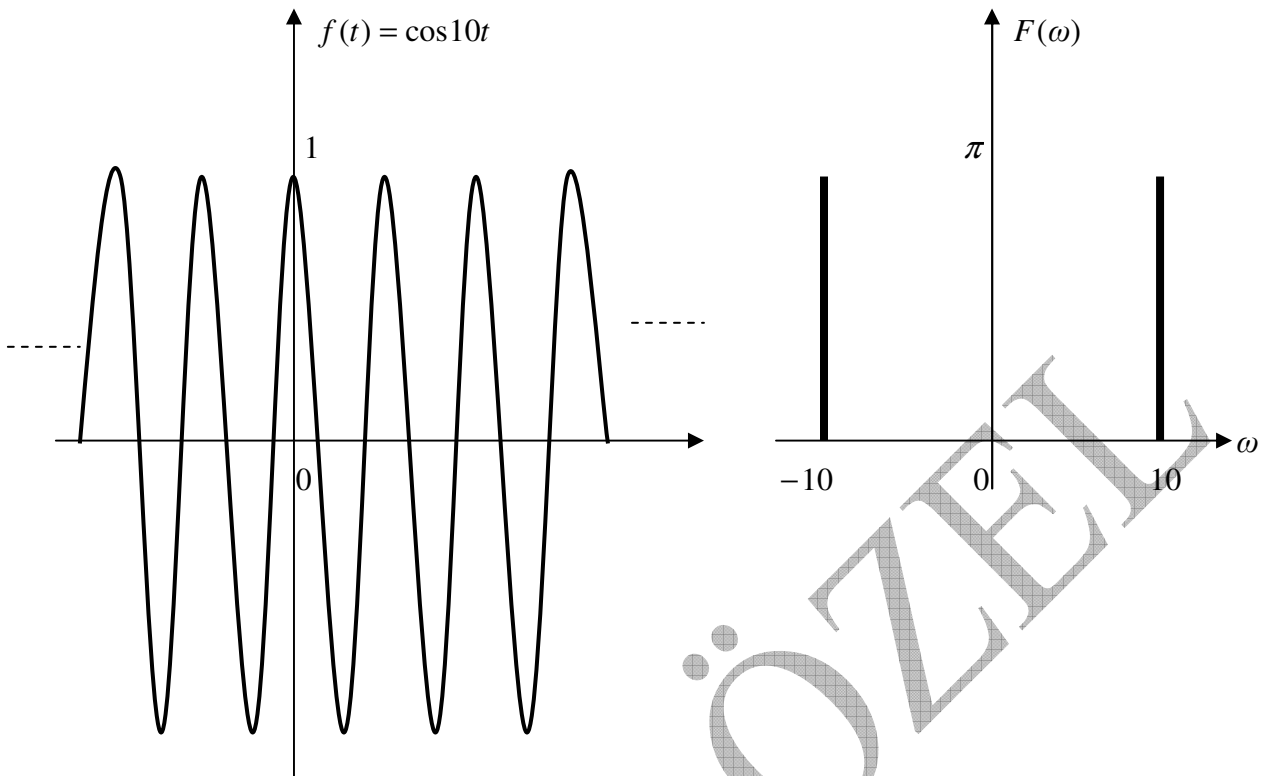
$$\begin{aligned} F(\omega) * H(\omega) &= \frac{1}{2\pi} (\pi [\delta(\omega - 10) + \delta(\omega + 10)]) * \pi \text{sinc}^2\left(\frac{\pi \omega}{2}\right) \\ &= \frac{\pi^2}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \text{sinc}^2\left(\frac{\pi \tau}{2}\right) \delta(\omega - 10 - \tau) d\tau + \frac{\pi^2}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \text{sinc}^2\left(\frac{\pi \tau}{2}\right) \delta(\omega + 10 - \tau) d\tau \\ &= \frac{\pi}{2} \text{sinc}^2\left(\frac{\pi(\omega - 10)}{2}\right) + \frac{\pi}{2} \text{sinc}^2\left(\frac{\pi(\omega + 10)}{2}\right) \end{aligned}$$

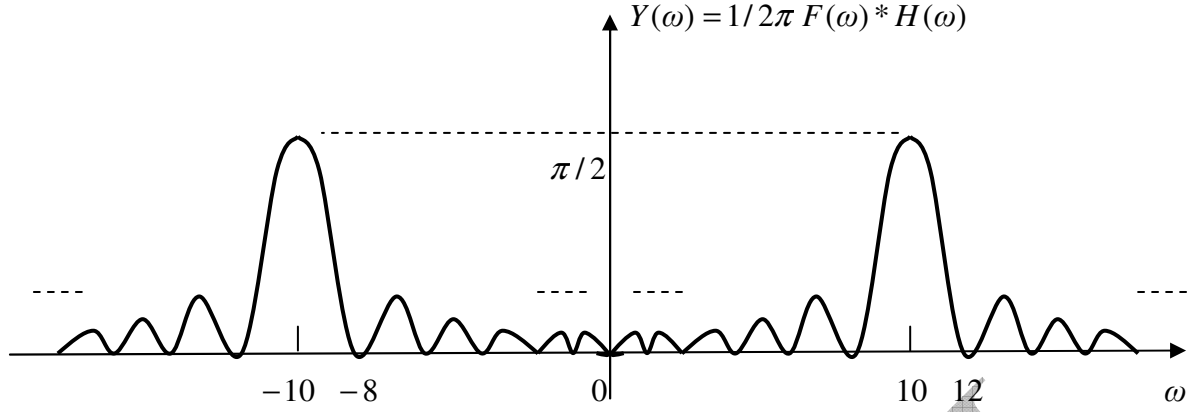
$$f(t)h(t) = \frac{\pi}{2} \text{sinc}^2\left(\frac{\pi(\omega - 10)}{2}\right) + \frac{\pi}{2} \text{sinc}^2\left(\frac{\pi(\omega + 10)}{2}\right)$$

$$\begin{aligned} y(t) = f(t)h(t) &= \frac{1}{2\pi} F(\omega) * H(\omega) \\ &= \frac{\pi}{2} \text{sinc}^2\left(\frac{\pi(\omega - 10)}{2}\right) + \frac{\pi}{2} \text{sinc}^2\left(\frac{\pi(\omega + 10)}{2}\right) \end{aligned}$$

$$Y(\omega) = \frac{\pi}{2} \text{sinc}^2\left(\frac{\pi(\omega - 10)}{2}\right) + \frac{\pi}{2} \text{sinc}^2\left(\frac{\pi(\omega + 10)}{2}\right)$$

$$\begin{aligned} \text{Band genişliği} \quad \frac{\pi(\omega - 10)}{2} &= \pi \\ \pi(\omega - 10) &= 2\pi \\ \omega &= 10 \text{ rad/s} \end{aligned}$$



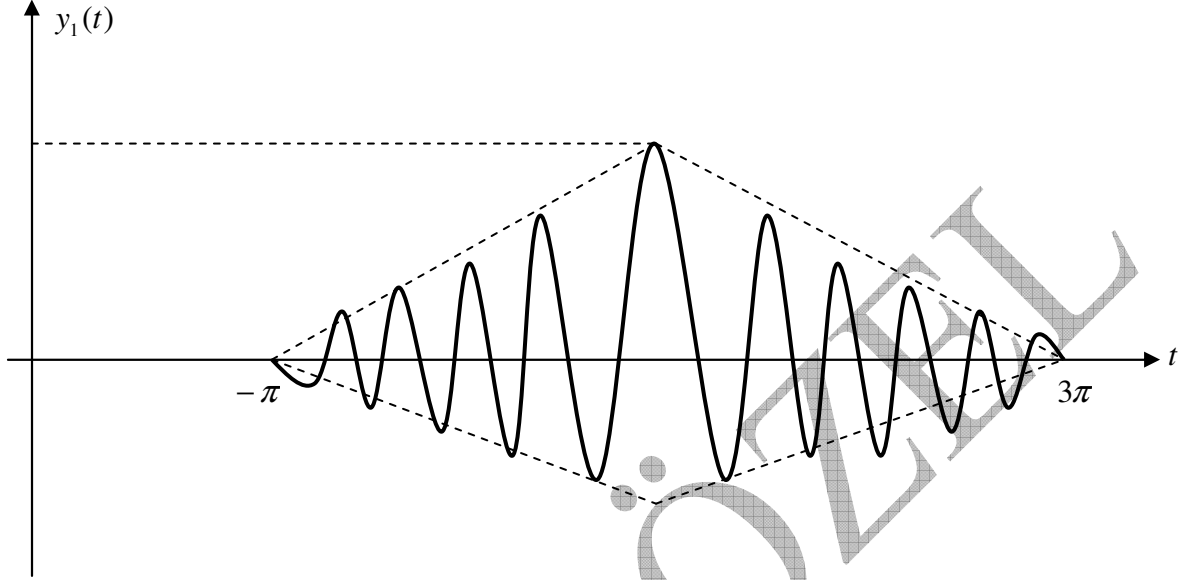


Şekil 82

Görüldüğü gibi $Y(\omega)$ modülasyon sonucunda $F(\omega)$ spektrumunda daha önce boş olan $\omega = (0-10)$ aralığında şimdi $\text{sinc}^2(x)$ işaretinin $(-\infty, \infty)$ aralığında salınımından dolayı sızıntı olduğu görülmektedir. Bu işleme filtrasyon sistemi açısından bakılamayacağını da ayrıca görmekteyiz. Çünkü $\omega = 2$ rad/sn band genişliğindeki üçgen işaretin, $\omega = 10$ rad/sn lik band genişliğindeki sinusoidi filter edemeyeceği açıktır. Problem $\omega = 10$ rad/sn lik frekansa sahip yüksek frekanslı taşıyıcı işaretin, $\omega = 2$ rad/sn lik band genişliğindeki zayıf bir işareti module etme yaklaşımı olarak görülmelidir. Bu amaca uygun genlik modülasyonu yapılmıştır. Ancak modülasyonlu dalganın spektrumundaki sızıntı, halledilmesi gereken önemli bir sorun olarak ortaya çıkmaktadır. Çünkü daha önceki $F(\omega)$ spektrumunun $\omega = (-10, 10)$ aralığında herhangi bir frekans bileşeni olmadığı halde, $Y(\omega)$ spektrumunda $\text{sinc}^2(\omega)$ ifadesinin sonsuz band genişliğinden dolayı (kuyruk kısımlarının sonsuzdan gelip sonsuza giden özelliğiyle) sızıntı oluşmuştur. Sızıntı bu anlamıyla olmaması gereken $F(\omega)$ de oluşmuş, bir anlamda onu kirletmiştir. Oluşan sızıntının, ana beam dışındaki yan loblarının (sidelobes) etkisi minimum olmalıdır. Aksi taktirde, başarılı bir modülasyon söz konusu olamayacaktır. Burada modülasyon amacıyla kullanılan üçgen işaretin bir tür pencereleme (windowing) fonksiyonu olarak görev yaptığını görmekteyiz. İşlem, bir anlamda kesme (truncation) olarak da düşünülebilir.

Örnek

$f(t) = \cos 10t$ taşıyıcı işareti ile module edilmiş genlik modülasyonlu işaretin değişimi aşağıda verilmiştir. Bu dalga'nın Fourier transformasyonunu bulun.



Şekil 83 Modülasyonlu dalga

Çözüm

Verilen şekilden kesik çizgiler takip edildiğinde $f(t) = \cos 10t$ taşıyıcı işaretle module edilmiş işaretin yine $\tau = 2\pi$ sn uzunluğunda $h_1(t)$ gibi bir üçgen işaret olduğu görülmektedir. Hatta $h_1(t)$ işaretinin bir önceki örnekte verilen $h(t)$ işaretinin $t_0 = 2\pi$ sn kaydırılmış versiyonu olduğu farkedilmektedir.

$$h_1(t) = h(t - 2\pi)$$

Bunun dışında problemde bir değişiklik söz konusu değildir. Yalnızca $h(t) \Leftrightarrow H(\omega)$ belli iken, $h(t - \tau_0) \Leftrightarrow ?$ Fourier transformasyonu kuralını hatırlamamız gerekiyor. Bu dönüşümün önceki bilgilerimizden

$$h(t - t_0) \Leftrightarrow H(\omega) e^{-j\omega t_0}$$

önceki örnekten $h(t) = \Delta\left(\frac{t}{2\pi}\right)$ nin Fourier transformasyonu $H(\omega) = \pi \text{sinc}^2\left(\frac{\pi \omega}{2}\right)$ olarak elde edilmişti. Bundan yararlanarak

$$h(t - t_0) = \Delta\left(\frac{t - t_0}{2\pi}\right) \Leftrightarrow \pi \text{sinc}^2\left(\frac{\pi \omega}{2}\right) e^{-j\omega t_0}$$

uzunluğundadır. Böyle bir üçgen işaretin fonksiyonu aşağıdaki gibi yazılabilir. $t_0 = 2\pi$ olduğundan

$$F\{h(t-t_0)\} = \Delta\left(\frac{t-t_0}{2\pi}\right) \Leftrightarrow \pi \operatorname{sinc}^2\left(\frac{\pi \omega}{2}\right) e^{-j\omega 2\pi}$$

$$H_1(\omega) = \pi \operatorname{sinc}^2\left(\frac{\pi \omega}{2}\right) e^{-j 2\pi \omega}$$

buna göre diğer işlemler aynen devam edecektir. Buna göre bu işaretin $f(t) = \cos 10t$ taşıyıcı işaretle modülasyonu

$$y_1(t) = f(t)h_1(t)$$

biçiminde bir konvülyasyondur. Şimdi modülasyon sonucunu veya filtre çıkışı olan $y_1(t)$ işaretini zaman ve frekans domeninde elde etmeye çalışalım. Bunun için

$$f(t)h_1(t) = \frac{1}{2\pi} F(\omega) * H_1(\omega)$$

konvülyasyon kuralını hatırlamamız gerekiyor(zaman domenindeki çarpma, frekans domenindeki konvülyasyon işlemine eşittir). Bunun için tek tek $f(t) = \cos 10t$ ve $h(t) = \Delta\left(\frac{t}{2\pi}\right)$ işaretlerinin Fourier transformasyonlarını (dönüşümlerini) hatırlamamız gerekiyor.

$$\cos \omega_0 t \Leftrightarrow \pi [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]$$

$$\cos 10t \Leftrightarrow \pi [\delta(\omega - 10) + \delta(\omega + 10)]$$

$$F(\omega) = \pi [\delta(\omega - 10) + \delta(\omega + 10)]$$

Band genişliği $\omega = 10$ rad/sn

$$\Delta\left(\frac{t}{\tau}\right) \Leftrightarrow \frac{\tau}{2} \operatorname{sinc}^2\left(\frac{\omega \tau}{4}\right)$$

$$\Delta\left(\frac{t}{2\pi}\right) \Leftrightarrow \frac{2\pi}{2} \operatorname{sinc}^2\left(\frac{\omega 2\pi}{4}\right) = \pi \operatorname{sinc}^2\left(\frac{\pi \omega}{2}\right)$$

$$H_1(\omega) = \pi \operatorname{sinc}^2\left(\frac{\pi \omega}{2}\right) e^{-j 2\pi \omega}$$

Band genişliği $\frac{\pi \omega}{2} = \pi \rightarrow \pi \omega = 2\pi \rightarrow \omega = 2$ rad/sn

$$\begin{aligned}
 F(\omega) * H_1(\omega) &= \frac{1}{2\pi} (\pi [\delta(\omega - 10) + \delta(\omega + 10)]) * \pi \text{sinc}^2\left(\frac{\pi \omega}{2}\right) e^{-j2\pi \omega} \\
 &= \frac{\pi^2 e^{-j2\pi \omega}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \text{sinc}^2\left(\frac{\pi \tau}{2}\right) \delta(\omega - 10 - \tau) d\tau \\
 &\quad + \frac{\pi^2 e^{-j2\pi \omega}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \text{sinc}^2\left(\frac{\pi \tau}{2}\right) \delta(\omega + 10 - \tau) d\tau \\
 &= \frac{\pi}{2} \text{sinc}^2\left(\frac{\pi(\omega - 10)}{2}\right) e^{-j2\pi \omega} + \frac{\pi}{2} \text{sinc}^2\left(\frac{\pi(\omega + 10)}{2}\right) e^{-j2\pi \omega} \\
 f(t)h(t) &= \frac{\pi}{2} \text{sinc}^2\left(\frac{\pi(\omega - 10)}{2}\right) e^{-j2\pi \omega} + \frac{\pi}{2} \text{sinc}^2\left(\frac{\pi(\omega + 10)}{2}\right) e^{-j2\pi \omega} \\
 y_1(t) = f(t)h_1(t) &= \frac{1}{2\pi} F(\omega) * H_1(\omega) \\
 &= \frac{\pi}{2} \text{sinc}^2\left(\frac{\pi(\omega - 10)}{2}\right) e^{-j2\pi \omega} + \frac{\pi}{2} \text{sinc}^2\left(\frac{\pi(\omega + 10)}{2}\right) e^{-j2\pi \omega} \\
 Y_1(\omega) &= \frac{\pi}{2} \text{sinc}^2\left(\frac{\pi(\omega - 10)}{2}\right) e^{-j2\pi \omega} + \frac{\pi}{2} \text{sinc}^2\left(\frac{\pi(\omega + 10)}{2}\right) e^{-j2\pi \omega}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Band genişliği} \quad \frac{\pi(\omega - 10)}{2} &= \pi \\
 \pi(\omega - 10) &= 2\pi \\
 \omega &= 10 \text{ rad/sn}
 \end{aligned}$$

Örnek

Bir filtre de $p(t) = \Delta\left(\frac{t}{10^{-6}}\right)$ girişine, darbe formundaki sistemin cevabı (zaman sabiti) $t = 10^{-3}$ sn ise, bu sistemin çıkışı değerlendirin. Sistemden veya kanaldan sağlıklı veri iletimi için minimum kanal band genişliğini belirleyin.

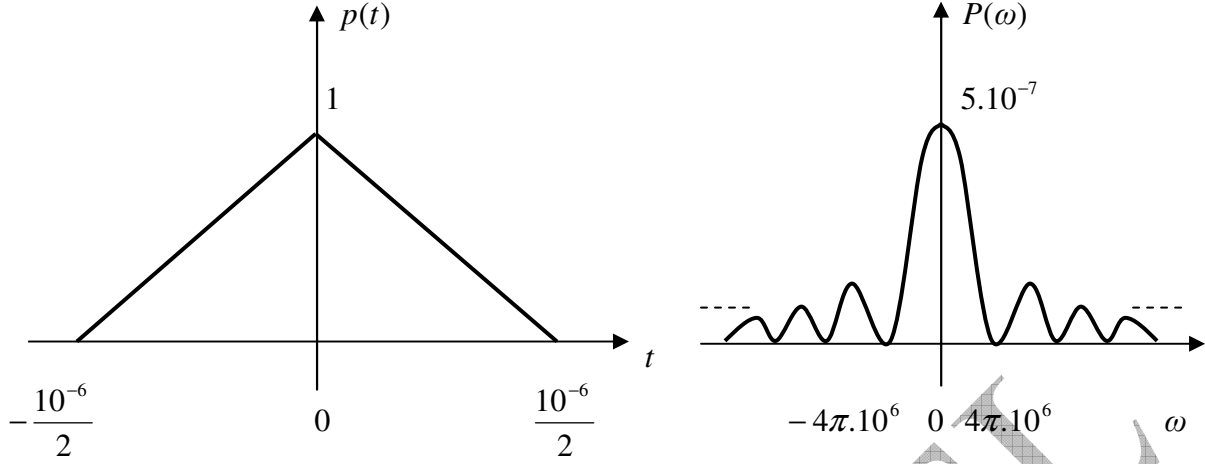
Çözüm

Önce $p(t)$ giriş işaretinin zaman ve frekans domenini düzenleyelim.

$$\begin{aligned}
 \Delta\left(\frac{t}{\tau}\right) &\Leftrightarrow \frac{\tau}{2} \text{sinc}^2\left(\frac{\omega \tau}{4}\right) \\
 \Delta\left(\frac{t}{10^{-6}}\right) &\Leftrightarrow \frac{10^{-6}}{2} \text{sinc}^2\left(\frac{10^{-6} \omega}{4}\right) = 5 \cdot 10^{-7} \text{sinc}^2(25 \cdot 10^{-8} \omega)
 \end{aligned}$$

$$P(\omega) = 5 \cdot 10^{-7} \text{sinc}^2(25 \cdot 10^{-8} \omega)$$

Giriş işaretinin band genişliğinin $P(\omega)$ spektrumundan $\omega_p = 4\pi \cdot 10^6$ rad/sn veya $f_p = 2 \cdot 10^6$ Hz ($2 \cdot 10^6$ MHz) olduğunu görmekteyiz.



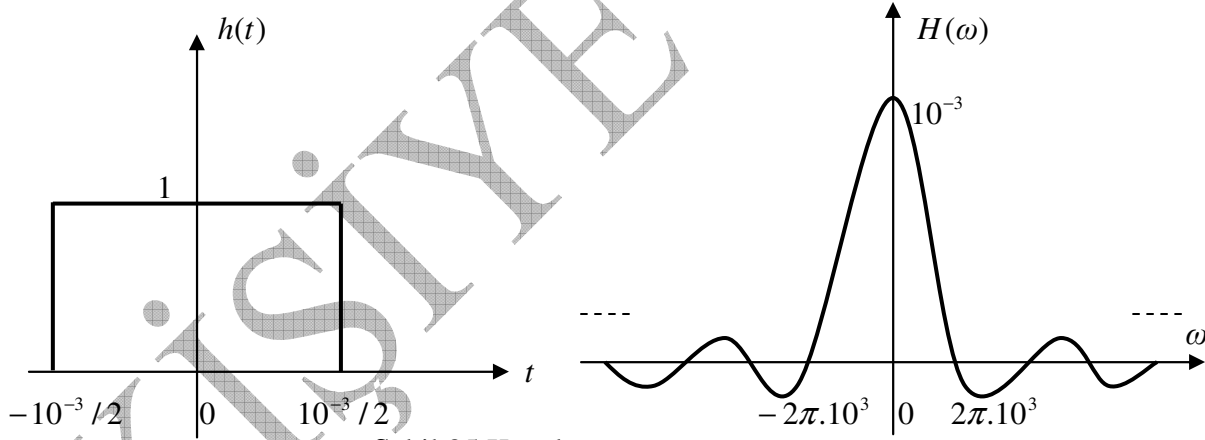
Şekil 84

Şimdi de $p(t)$ işaretini içinden geçirecek olan kanalın (filtre) zaman ve frekans domenini düzenleyelim.

$$\text{rect}\left(\frac{t}{\tau}\right) \Leftrightarrow \tau \text{sinc}\left(\frac{\omega \tau}{2}\right)$$

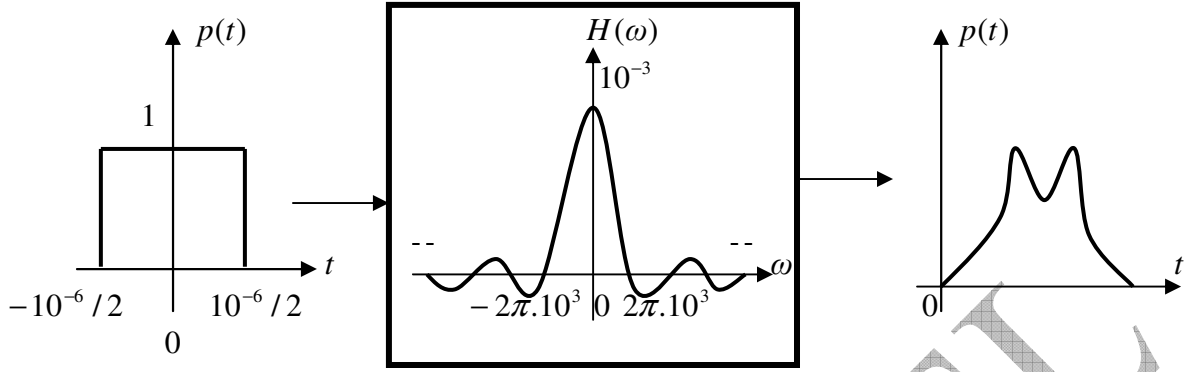
$$\Delta\left(\frac{t}{10^{-3}}\right) \Leftrightarrow 10^{-3} \text{sinc}\left(\frac{10^{-3} \omega}{2}\right) = 10^{-3} \text{sinc}(5 \cdot 10^{-4} \omega)$$

$$H(\omega) = 10^{-3} \text{sinc}(5 \cdot 10^{-4} \omega)$$



Şekil 85 Kanal görünümü

Kanalın band genişliğinin $\omega_h = 2\pi \cdot 10^3$ rad/sn olduğunu görmekteyiz. Elde edilen $H(\omega)$ spektrumunun band genişliğinin $\omega_h = 2\pi \cdot 10^3$ rad/sn olduğu görülmektedir. Gerek zaman domeni gerekse frekans domeni analizlerinden sağlıklı bir iletim yapılamayacağını gözlemlemekteyiz. Çünkü $t_h = 10^{-3}$ sn lik kanalın zaman sabiti iken, $p(t)$ giriş işaretinin zaman sabiti $t_p = 10^{-6}$ sn verilmiştir. Buna göre kanalın sistem cevabı, girişinkinden daha uzundur. Bu sistemin daha yavaş olduğu anlamına gelir. Bu haliyle sistem girişine uygulanan işarete cevap verebilecek hızda olmadığı görülmektedir. Böylece giriş $p(t)$ işareti, $h(t)$ kanalından sorunsuz olarak **iletilemeyecektir**. Aşağıdaki şekilde bu durum şematize edilmiştir. Kanal band genişliği iletilecek (giriş) işarete kıyasla yetersiz olduğu zaman kanal (filtre) çıkışında bilgi (giriş işareti) bozulacak, yani distorsiyona uğrayacaktır. Bunu her iki işaretin band genişliklerinden de teyid edebiliriz.



Şekil 86 Yetersiz kanal görünümü

Buna göre bu kanaldan sağlıklı bir iletim yapılabilmesi için $t_p \geq t_h$ olması gerekir. Bu durumdayken ($t_h = 2 \cdot 10^{-6}$ sn) kanal (filtre) fonksiyonu tekrar düzenlenirse

$$\text{rect}\left(\frac{t}{\tau}\right) \Leftrightarrow \tau \text{sinc}\left(\frac{\omega \tau}{2}\right)$$

$$\Delta\left(\frac{t}{10^{-6}}\right) \Leftrightarrow \frac{10^{-6}}{2} \text{sinc}\left(\frac{10^{-6} \omega}{4}\right) = 5 \cdot 10^{-7} \text{sinc}(25 \cdot 10^{-8} \omega)$$

$$H(\omega) = 5 \cdot 10^{-7} \text{sinc}(25 \cdot 10^{-8} \omega)$$

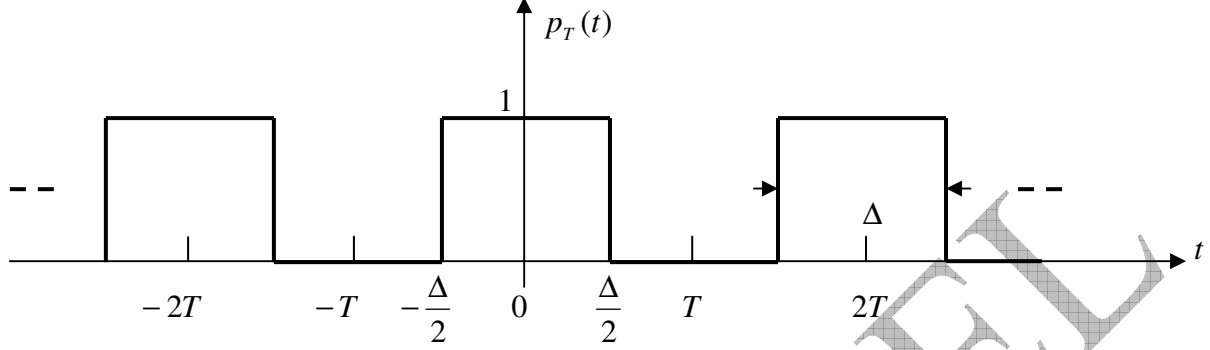
Buradan yeni durumdaki kanal band genişliğinin $\omega_h = 4\pi \cdot 10^6$ olarak $\omega_p = 4\pi \cdot 10^6$ işaretini geçirebileceği görülmektedir.

PERİYODİK DARBE DİZİSİ VE SPEKTRUMU

Periodik veya periodik olmayan işaretlerin gerek zaman gerekse frekans domeni davranışları gerek sistem gerekse işaret analiz açısından oldukça önemli kavramlardır. Beraberinde bir çok ayrıntısının da olduğu bu kavramların iyi anlaşılması, işaret, sistem (özellikle haberleşme ve kontrol sistemleri) için büyük önem taşımaktadır. Sistem açısından haberleşme sistemleri kapsamında, darbe dizilerinin en tipik uygulama alanı olarak filtre analiz ve tasarımları gösterilebilir. Darbe veya darbe dizilerinin filtrasyon özellikleri genel veya haberleşme sistemleri açısından büyük önem taşımaktadır. Bu anlamda daha önceden yalnızca darbe işaretini, sonrasında da genişliği sıfır kabul edilen impuls ve impuls dizileri ele alınmış, zaman ve spektrumları hakkında ön bilgiler verilmişti. Bu bölümde genişliği sıfırdan farklı olan (ideal impuls olmayan) periodik darbe dizisinin zaman ve frekans domeni davranışları ele alınacaktır.

Darbe dizisinin Fourier Transformasyonu

Yukarıda Fourier serisi kapsamında ele alınan darbe genişliği Δ ve periyodu T olan $p(t)$ darbe dizisini hatırlayalım.



Şekil 87 Periyodik darbe işareti

Verilen ifadenin Fourier transformasyonunu elde etmek için zaman domeninde $p(t)$ dizisinin periyodunu $T \rightarrow \infty$ olarak ele almanın yeterli olduğunu biliyoruz. Bunun için öncelikle verilen periyodik dizinin Fourier serisi karşılığının

$$p_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

olduğunu biliyoruz. Buradan $T \rightarrow \infty$ için periyodik Fourier serisinin periyodik olmayan forma dönüştüğünü aşağıdaki ifade ile biliyoruz.

$$p(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} p_T(t)$$

$$p_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

$$a_k = \frac{1}{T} \int_{-\Delta/2}^{\Delta/2} p_T(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} p(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

$$a_k = \frac{1}{T} P(\omega) = \frac{1}{T} P(k\omega_0) = \frac{1}{T} P(k \frac{2\pi}{T})$$

$$P(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} p(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$\begin{aligned} p(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} P(k \frac{2\pi}{T}) e^{jk\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(2\pi/\omega_0)} P(k\omega_0) e^{jk\omega_0 t} \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} P(k\omega_0) e^{jk\omega_0 t} \omega_0 \end{aligned}$$

$\omega_0 = \tau \omega$ gibi küçük artımlar halinde alınırsa,

$$p(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} P(k\omega_0) e^{jk\omega_0 t} \omega_0 = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} P(k\tau\omega) e^{jk\tau\omega t} \tau\omega$$

$$T_0 \rightarrow \infty \text{ için } \tau\omega \rightarrow 0$$

$$\begin{aligned} p(t) &= \lim_{T \rightarrow \infty} p_T(t) = \lim_{\tau\omega \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} P(k\tau\omega) e^{jk\tau\omega t} \tau\omega = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} P(k\tau\omega) e^{jk\tau\omega t} \tau\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} P(\omega) e^{j\omega t} d\omega \end{aligned}$$

$$p(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} P(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

Bu yolla darbe dizisinin ters Fourier transformasyonu elde edilir. Buna ek olarak klasik Fourier transformasyonu da elde edilebilir. Bunun için aşağıdaki adımların izlenmesi gerekiyor.

$$p(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} p_T(t)$$

$$p_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

$$a_k = \frac{1}{T} \int_{-\Delta/2}^{\Delta/2} p_T(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} p(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

$$a_k = \frac{1}{T} P(\omega) = \frac{1}{T} P(k\omega_0) = \frac{1}{T} P(k \frac{2\pi}{T})$$

$$P(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} p(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$\begin{aligned} P(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} p(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} p_T(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} p_T(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} e^{-j\omega t} dt \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(j\omega - k\omega_0) t} dt \right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (2\pi \delta(\omega - k\omega_0)) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi a_k \delta(\omega - k\omega_0) \end{aligned}$$

$$P(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi a_k \delta(\omega - k\omega_0) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \delta(\omega - k\omega_0)$$

Buradan ayırık a_k spektrum veya katsayı ifadesinin

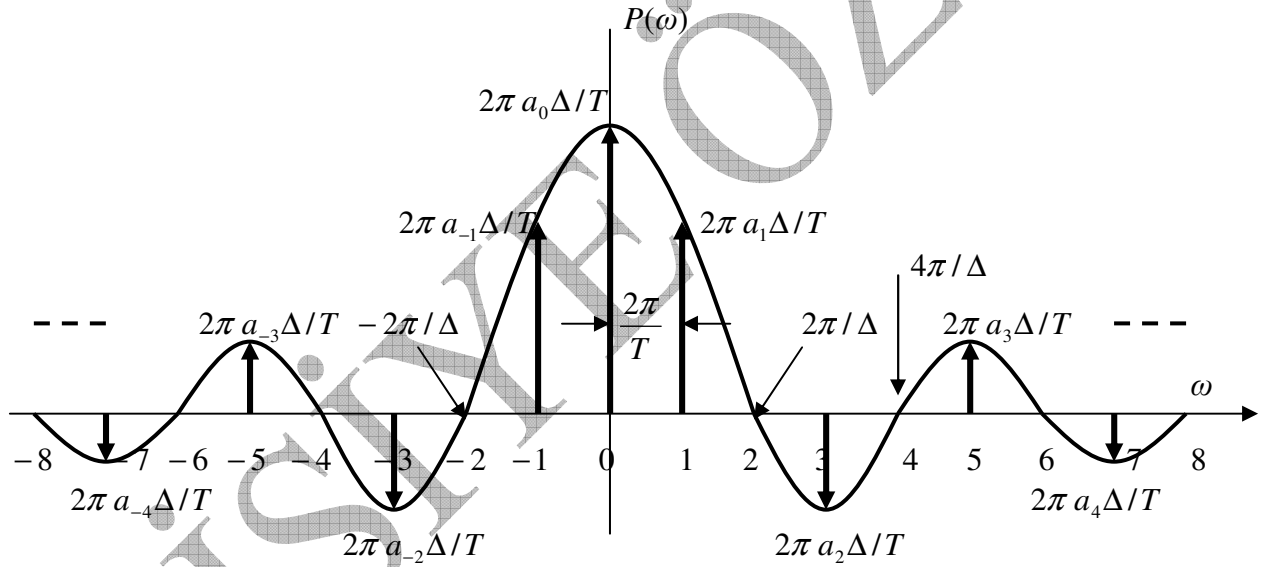
$$a_k = \frac{\sin(k\pi\Delta/T)}{k\pi} \text{ veya } a_k = \frac{\Delta}{T} \text{sinc}(k\omega_0\Delta/2) \text{ veya } a_k = \frac{\Delta}{T} \text{sinc}(k\pi\Delta/T) \text{ veya}$$

$$a_k = \frac{\Delta \sin(k \omega_0 \Delta / 2)}{T k \omega_0 \Delta / 2}$$

bağıntılarından herhangi biri $P(\omega)$ de yerine yazılabilir.

$$\begin{aligned} P(\omega) &= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \delta(\omega - k\omega_0) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\Delta \sin(k \omega_0 \Delta / 2)}{T k \omega_0 \Delta / 2} \delta(\omega - k\omega_0) = \frac{2\pi\Delta}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\sin(k \omega_0 \Delta / 2)}{k \omega_0 \Delta / 2} \delta(\omega - k\omega_0) \\ &= \frac{2\pi \Delta}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \text{sinc}(k \omega_0 \Delta / 2) \delta(\omega - k\omega_0) \end{aligned}$$

Böylece başlangıçta verilen $p_T(t)$ darbe dizisinin Fourier transformasyonu istenilen formlardan biri olarak elde edilebilir. Böyle bir Fourier transformasyonunun görüntüsü aşağıdaki gibi olacaktır.

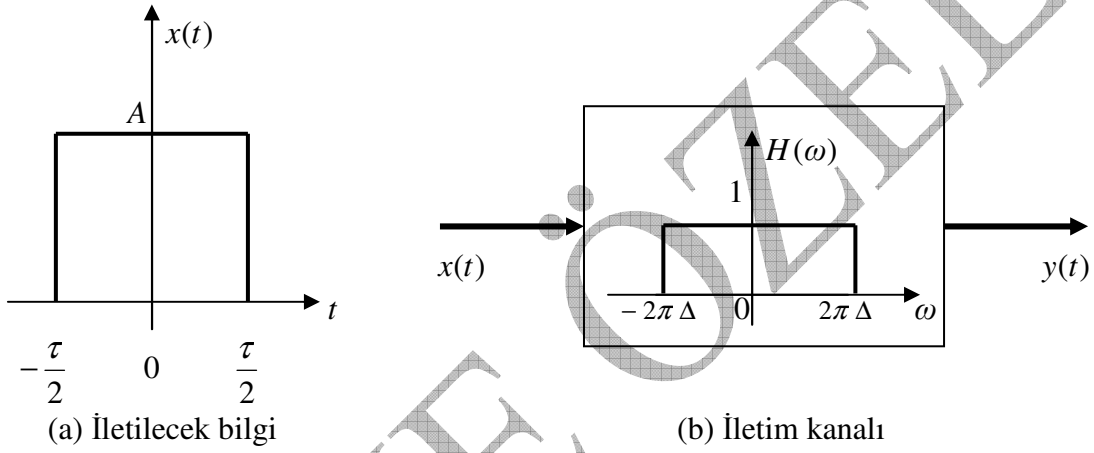


Şekil 88 Periyodik darbe dizisinin Fourier transformasyonu

Görüldüğü gibi, periodic darbe dizisinin spektrumu, $T \rightarrow \infty$ yaklaşımından dolayı Fourier serisinden farklı olarak, sürekli formda oluşmuştur. Fourier serisindeki gibi $P(\omega)$ spektrumu band sınırsız olup, enerji yoğunluğunun $(0 - (1/\Delta))$ bandında yoğunlaşması sonucu, band genişliği $1/\Delta$, ve bu band içerisindeki Fourier serisindeki harmonikler $\omega_0 = 2\pi/T$ aralıklarla dizilidirler. Bu yaklaşım aynı zamanda, Fourier serisinin katsayılarının (spektrumu), Fourier transformasyonundan elde edilmesini mümkün kılar.

Alçak Geçiren Filtre Özellikli Haberleşme Kanalından Bilgi (darbe dizisi) İletimi

Mevcut bilgilerin ışığında, haberleşme kanalı bir alçak geçiren filtre olan bir sistemden bir darbe dizisinin bozulmadan, sağlıklı olarak iletim koşullarını inceleyelim. Bunun için iletilmek istenen bilginin aşağıda (a) da verilen dörtgen tipli τ sn genişliğindeki bir darbe olduğunu ve bunun iletileceği haberleşme sisteminin ise Δ Hz band genişliğindeki bir alçak geçiren filtre özellikli kanal olduğunu (b) den görmekteyiz. Haberleşme kanalının alçak geçiren filtre olarak seçimi, uygulamada daha yoğun olarak tercih edilmesiyle ilişkilendirilebilir. Günümüz telefon haberleşmesini göz önüne alırsak, 4 kHz lik daha ziyade düşük band genişlikli bir kanalı gerektirmektedir.



Şekil 89 haberleşme kanalından bilgi iletimi

Burada araştırılmak istenen, böyle bir darbeyi verilen kanaldan iletebilmek için τ genişliğini minimum değerini (τ_{\min}) elde etmektir. Bunun için, genel τ ve kritik τ_{\min} ifadelerinin karşılığını kanalın Δ band genişliği türünden hesaplamamız gerekmektedir. Bunun için gönderilecek bilgini önce, tek bir darbe, çözüm yapıldıktan sonra, darbe dizisini içerecek biçimde yaklaşım genelleştirilecektir. Verilen bilgilere bakıldığında darbenin genişliği, dolayısıyla periodu τ görünüyor. Bu durumda frekansı yani band genişliği $\frac{1}{\tau}$ olacaktır. Böyle bir işaretin iletileceği haberleşme sisteminin band genişliği en az $1/\tau$ olmalıdır. Haberleşme sisteminin band genişliğini Δ olarak düşünülürse (zaman genişliği genişliği $1/\Delta$ olacağından) bu durumda, $1/\tau$ band genişliğindeki işaretin bozulmadan gönderilmesi için haberleşme sistemiyle aralarında

$$\Delta \geq \frac{1}{\tau} \text{ veya}$$

$$\tau \geq \frac{1}{\Delta}$$

bağıntısının sağlanması zorunluluğu vardır. Minimum halde bu değer

$$\tau = \frac{1}{\Delta}$$

olmalıdır ki, bu aynı zamanda kritik değer olarak adlandırılır ($\tau_{\text{kritik}} = 1/\Delta$). Kritik andaki bu bağıntıyı biraz geliştirmeye çalışalım. Kritik durumu dikkate aldığımızda aslında gönderilecek darbe işaretinin genişliğiyle haberleşme sisteminin genişliği aynı τ kadar düşünülebilir. Bu durumda zaman domenindeki τ genişliğindeki işaretin genişliği Δ olan bir haberleşme sisteminden gönderilmesi

$$\tau * \Delta = \tau * \tau$$

tipindeki konvülyasyon işlemini gerektirmektedir. Konvülyasyonun tanımından, haberleşme sisteminin çıkışının uzunluğu (çıkışında oluşacak işaretin uzunluğu) her iki işaretin toplamı kadar olacağından, zaman domeninde aslında

$$\tau + \tau = 2\tau$$

uzunluğundaki zaman dilimine ihtiyaç olduğu ortaya çıkar. Bu durumda $\tau * \Delta = \tau * \tau$ konvülyasyonuyla haberleşme sistemi çıkışındaki işaretin genişliği artık 2τ olarak düşünülmesi gerekeceğinden, böyle bir işaretin bir haberleşme sisteminden sağlıklı iletilebilmesi için

$$\frac{1}{\Delta} \leq 2\tau$$

olması gerekir, çünkü zaman domenindeki işaretin genişliği arttıkça, frekans domenindeki band genişliği azalmaktaydı. Bu nedenle haberleşme sisteminin (Δ) olan band genişliğinin $1/\Delta$ zaman domeni karşılığı, konvülyasyonla oluşan 2τ uzunluğundaki kanal çıkışındaki işaretin uzunluğundan küçük olmalıdır ($(1/\Delta) \leq 2\tau$). Buna göre yukarıda elde edilen ifadeyi alternatif olarak aşağıdaki gibi de yazabiliriz.

$$\tau \geq \frac{1}{2\Delta}$$

Kritik yani minimum durumda bu değer

$$\tau_{\text{kritik}} = \frac{1}{2\Delta}$$

olmasını gerektiğini biliyoruz. Buradan,

$$\Delta \tau_{\text{kritik}} = \frac{1}{2}$$

elde edilir ki, bu oranın sağlanmasının tek yolunun ancak ve ancak

$$\tau_{\text{kritik}} = \frac{1}{2\Delta}$$

ile mümkün olabileceğini görmekteyiz.

$$\Delta \tau_{\text{kritik}} = \frac{1}{2}$$

$$\Delta \frac{1}{2\Delta} = \frac{1}{2}$$

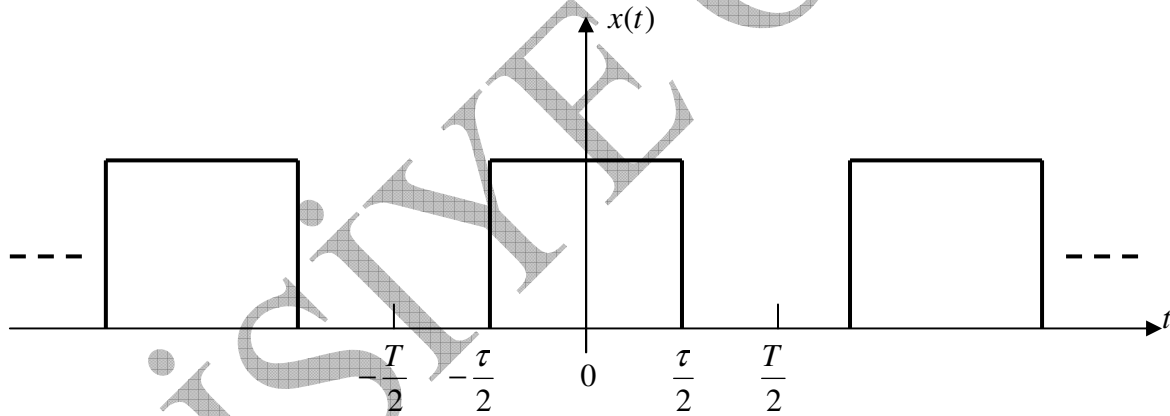
Bundan dolayı, zaman genişliği τ (band genişliği $1/\tau$) olan bir işaretin band genişliği Δ olan bir haberleşme sisteminden geçirilmesi için τ ve Δ arasında,

$$\tau \geq \frac{1}{2\Delta}$$

veya minimum olarak kritik durumda en az

$$\tau_{\text{kritik}} = \frac{1}{2\Delta}$$

bağıntısının olması gerektiğini görmekteyiz. Eğer yukarıda verilen darbe yerine aynı özellikleri taşıyan fakat aşağıdaki gibi darbe dizisini biçimindeki işareti dikkate alırsak,



Şekil 90 darbe dizisi

böyle bir darbe dizisinin band genişliği Δ olan bir haberleşme kanalından sağlıklı iletilebilmesi için de minimum

$$\tau_{\text{kritik}} = \frac{1}{2\Delta}$$

bağıntısı gereklidir. Minimum olarak bu değer sağlandığı sürece darbeler bir birleriyle örtüşme (**aliasing**) veya **simgeler arası girişim** (InterSymbolInterference (**ISI**)) problemi yaşamadan sağlıklı olarak iletilebileceklerdir. Aslında problemin çözümünün, $y(t)$ haberleşme sisteminin girişi $x(t)$ ve impuls cevabı olarak da Δ band genişliğindeki $h(t)$ fonksiyonunun $y(t) = x(t) * h(t)$ tipindeki konvülyasyonuyla mümkün olduğunu görmekteyiz. Çünkü böyle bir konvülyasyon gereği zaman domenindeki her iki işaretin genişliklerinin toplamı dikkate alınarak sonuca ulaşılmıştır.

Örnek

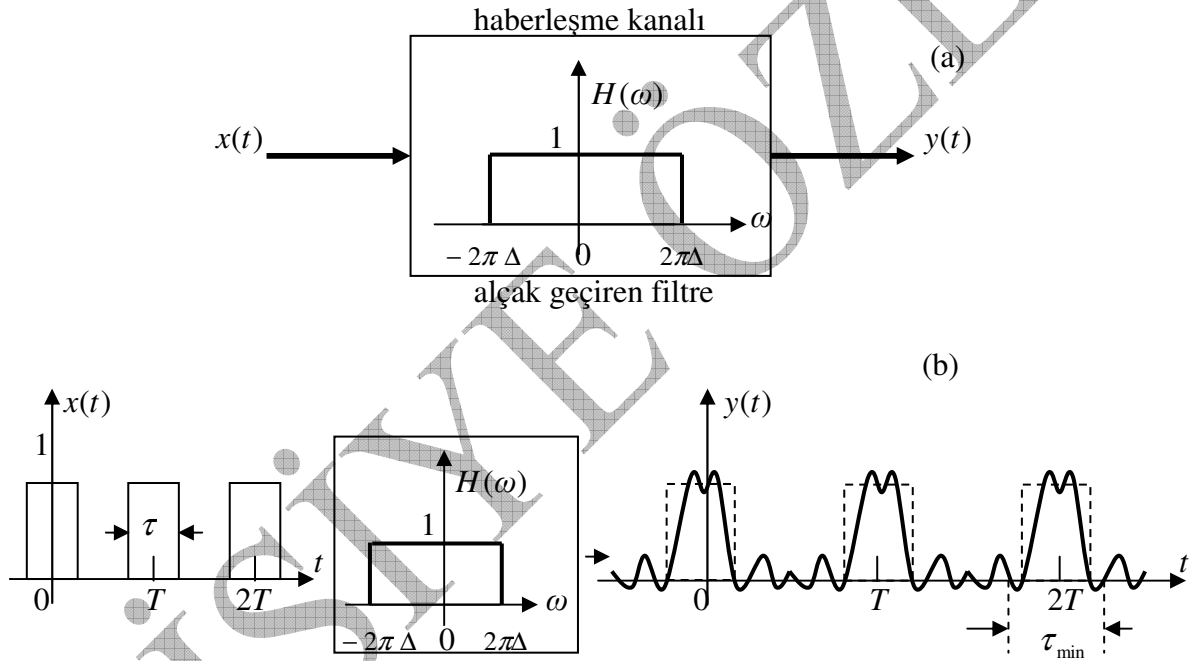
Band genişliği $\Delta = 5$ kHz olan bir haberleşme kanalından, bir darbe dizisi iletilmek istenmektedir. Bir biriyle örtüşmeyecek biçimde gönderilecek minimum darbe sayısını bulun.

Çözüm

Yukarıdaki bağıntıları göz önünde bulundurursak,

$$\tau_{\min} = \tau_{\text{kritik}} = \frac{1}{2\Delta} = \frac{1}{2.5000} = \frac{1}{10.000} = 0.1 \text{ ms}$$

buna göre birbiriyle örtüşmeyecek biçimde **en az** $\tau = 0.1$ ms genişliğindeki ($\tau_{\min} = 0.1$ ms) darbelerden 10.000 tanesi iletilebilir. Durum aşağıdaki şekil üzerinde şematize edilmiştir.



Şekil 91 Darbe dizisinin alçak geçiren filtreden iletimi

Görüldüğü gibi haberleşme kanalı $H(\omega)$ biçiminde Δ Hz lik bir alçak geçiren filtre olarak göz önüne alınmıştır. Normalde sağlıklı ve örtüşmesiz bir iletim için söz konusu darbe genişliği $\tau > 0.1$ ms olmalıdır. Darbe genişliği arttıkça, band genişliği düşeceğinden, hem gönderilecek darbelerin verilen $\Delta = 5$ kHz bandına sığması daha kolay olacak hemde verilen band, daha fazla darbeyi alacağından, iletim kapasitesi de artmış olacaktır.

Periodik Olmayan İşaretin Enerjisi

Periodik olmayan bir işaretin E_f olan enerjisi daha önceden

$$E_f = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt$$

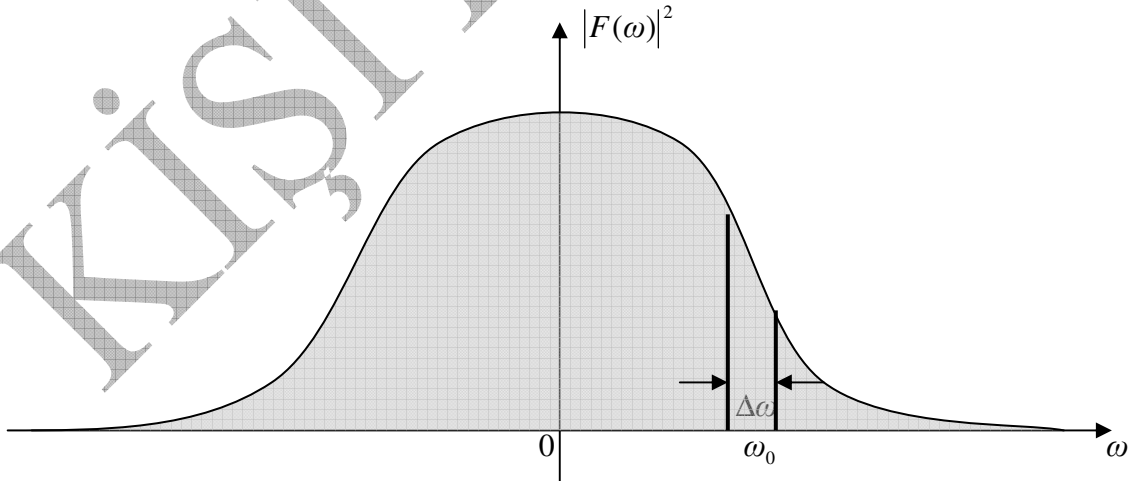
Bu ifadeyi frekansa bağlı spektrum üzerinde yazarsak,

$$\begin{aligned} E_f &= \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) f^*(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F^*(\omega) e^{-j\omega t} d\omega \right] dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F^*(\omega) \underbrace{\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \right]}_{F(\omega)} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) F^*(\omega) d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega \end{aligned}$$

Buradan enerji ve spektral enerji yoğunluğu aşağıdaki şekil üzerinde gösterilmiştir. Bu bağıntıdan yararlanarak “ t ” yani zaman domenindeki enerji ifadesiyle spektrum ifadesinin denkliliğini

$$E_f = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega$$

Yazabiliriz. Bu bağıntıya aynı zamanda **Parseval's teoremi** denilmektedir. Zaman domenindeki enerjinin frekans domenine eşit olduğunu tanımlayan önemli bir kuraldır.



Şekil 92 İşaret Enerji spektral yoğunluğu

Periodik işaretin enerjisinin ele alındığı Fourier serisi hatırlanırsa, serinin spektrumu ayrık olduğundan, Parseval kuralına göre frekans domenindeki enerji, harmoniklerin enerjilerinin toplamından oluşmaktaydı. Eğer D_i her bir ayrık harmoniğin genliği olarak düşünülürse, ilgili enerji ifadesi aşağıdaki gibi düşünülebilir.

$$P_{AV} = \sum_{i=1}^n |D_i|^2$$

Ancak periodik olmayan işaretin spektrumu olan Fourier transformasyonunun spektrumu ayrık değil, sürekli. Spektrum temel frekansın ideal anlamda sıfır, $\omega \rightarrow 0$ alınması dolayısıyla sonsuz tane harmoniğin bitişik bir görüntüyle sürekli formdadır. Eğer

$$E_f = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega$$

bağıntısı göz önüne alınırsa, sürekli spektrumda $\omega = \omega_0$ gibi bir nokta frekansın (harmoniğin) enerjisi yerine $\Delta\omega = \omega_n - \omega_{n-1} = d\omega$ gibi frekans veya harmonik aralığındaki enerji söz konusudur. Bu da integral altındaki alan olarak Fourier transformasyonu ile elde edilir. Sürekli spektrumda tek bir noktadaki değer anlamlı değildir, çünkü sıfırdır. Buna göre $\omega = \omega_0$ için $F(\omega) = 0$ olabilirken, $\Delta\omega = \omega_n - \omega_{n-1} = d\omega$ için $F(\omega) \neq 0$ olduğu düşünülür. Tek bir noktadaki değerin veya integralin sıfır elde edilmesinin sebebi, tek bir nokta sıfır genişliğinde düşünüldüğünden, sıfır genişliğindeki herhangi bir nokta veya geometrik objenin alanı olmayacağından (sıfır olacağından), $\omega = \omega_0$ gibi tek bir nokta için integralden sıfır elde edilir. Bu nedenle tek bir nokta yerine, $\Delta\omega = d\omega$ değişimini gösteren bir aralığın değeri aranır. Bu nedenle Fourier transformasyonu ile ifade edilen bir işaretin enerjisi, sürekli spektrumdan dolayı Fourier serisindeki gibi belli sayıdaki harmoniğin değil, sonsuz sayıdaki harmoniğin enerjileri toplamı olarak düşünülür. Sonsuz tane frekans veya harmoniğin aralarında sıfır mesafe olacak biçimde bitişik olduklarını düşüneceğimizi, bölümün başında açıklamıştık. Bu nedenle sürekli spektrumda herhangi bir ayrık gibi noktadaki enerjiden ziyade, $\Delta\omega = d\omega$ ile gösterilen belli bir aralıktaki enerji yoğunluğundan söz edilir. Bu nedenle Fourier transformasyonunun spektrumundaki enerjiyi göstermek üzere *enerji yoğunluk fonksiyonundan* (spectral density function) söz edilir. Bu şekilde ayrık ve sürekli spektrum farkı daha iyi anlaşılır. Açıklanan bu sebeplerden dolayı periodik olmayan bir işaretin spektrumu sürekli olduğundan bunun anlamı, spektrum her ω frekans değeri için tanımlı olmasına rağmen, spektrumdaki her ω frekansın genliğinin sıfır olduğu gerçeği (tek tek noktalar için genlik sıfır olduğundan) şimdi daha net olarak anlaşılmaktadır.

Enerji İşareti ve Fourier Transformasyonu

Fourier transformasyonu $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty$ kuralıyla var olduğu sürece, band sınırlı işareti oluşturacağından, Fourier transformasyonu kapsamındaki periodik olmayan ve spektrumda band sınırlı olan görüntüsündeki işaretler, daha ziyade enerji işaretleridir ($E < \infty$, $P_{ort} = 0$). Diğer bir deyişle Fourier serisi kapsamındaki periodik özellikli işaretler güç işaretleriyken ($E = \infty$, $P_{ort} < \infty$), Fourier transformasyonu kapsamında periodik olmayan özellikli işaretlerinde enerji işaretleri olduğunu düşünebiliriz..

Örnek

$f(t) = e^{-at} u(t)$ işaretinin enerjisini bulalım.

Çözüm

$$E_f = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |e^{-at} u(t)|^2 dt = \int_0^{\infty} e^{-2at} dt = -\frac{1}{2a} e^{-2at} \Big|_0^{\infty} \\ = \frac{1}{2a}$$

$f(t) = e^{-at} u(t)$ işaretinin Fourier transformasyonu ise

$$F(\omega) = \frac{1}{a + j\omega}$$

Parseval teoremine göre zaman-frekans domenindeki denkliği de aşağıdaki gibi

$$E_f = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega = \frac{2}{2\pi} \int_0^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left| \frac{1}{a + j\omega} \right|^2 d\omega = \frac{1}{\pi} \left[\frac{1}{a^2 + \omega^2} \right]_0^{\infty} \\ = \frac{1}{\pi a} \tan^{-1} \frac{\omega}{a} \\ = \frac{1}{2a}$$

teyit edilir. Eğer işaret bandının $\omega = 0$ ile $\omega = W$ arasında $(0, W)$ enerjinin %95'i bulunuyorsa bunun anlamı

$$\frac{1}{2a} \times 0.95 = \frac{0.95}{2a}$$

olur. Bu daha formal olarak aşağıdaki ifade de olduğu gibi ifade edilebilir.

$$E_f = \frac{0.95}{2a} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega = \frac{2}{2\pi} \int_0^W |F(\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left| \frac{1}{a + j\omega} \right|^2 d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{d\omega}{a^2 + \omega^2} \\ = \frac{1}{\pi} \left[\frac{1}{a^2 + \omega^2} \right]_0^W \\ = \frac{1}{\pi a} \tan^{-1} \frac{W}{a}$$

Buradan

$$\frac{0.95\pi}{a} = \tan^{-1} \frac{W}{a} \Rightarrow W = 12.706 a \text{ rad/s}$$

olarak bulunur. Bunun anlamı enerjinin %95 i $(0, 12.76 a)$ bandındadır (aralığında).

Örnek

Parseval teoremini kullanarak $f(t) = \frac{2a}{t^2 + a^2}$ işaretinin enerjisini bulunuz.

Çözüm

Daha önceden simetri özelliğinden

$$f(t) \Leftrightarrow F(\omega)$$

$$F(t) \Leftrightarrow 2\pi f(-\omega)$$

bağıntılarını biliyoruz. Yine daha önceden

$$f(t) = e^{-a|t|} \Leftrightarrow \frac{1}{a + j\omega} + \frac{1}{a - j\omega} = \frac{2a}{a^2 + \omega^2}$$

olduğunu da bildiğimize göre soruyu bunlardan yararlanarak simetri özelliğine göre çözebiliriz. Buna göre $f(t)$ verildiğine göre simetri özelliğini kullanarak eğer $F(\omega)$ bulunursa, aranan enerji E_f de buna bağlı olarak Parseval teoreminden bulunabilecektir. Önce simetri özelliğini tekrar hatırlatalım. Daha önceki çözümlerden

$$\underbrace{e^{-a|t|}}_{f(t)} \Leftrightarrow \underbrace{\frac{2a}{a^2 + \omega^2}}_{F(\omega)}$$

$$\underbrace{\frac{2a}{a^2 + t^2}}_{F(t)} \Leftrightarrow \underbrace{e^{-a|\omega|}}_{2\pi f(-\omega)} = 2\pi e^{-a|\omega|}$$

olduğunu simetri kuralına göre yazabiliyoruz. Buradan Fourier transformasyonu

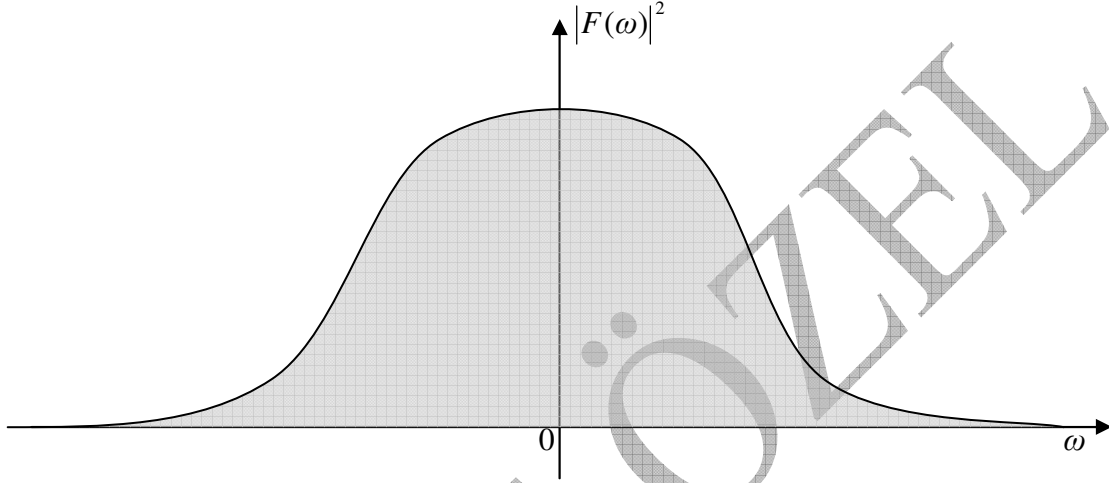
$$F(\omega) = 2\pi e^{-a|\omega|}$$

olarak bulunduktan sonra enerji ifadesi ve çözümü aşağıdaki gibi yapılabilir

$$\begin{aligned} E_f &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega = \frac{2}{2\pi} \int_0^{\infty} |2\pi e^{-a|\omega|}|^2 d\omega \\ &= \frac{4\pi^2}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-2a|\omega|} d\omega = \frac{4\pi}{2a} \\ &= \frac{2\pi}{a} \end{aligned}$$

Enerji ve Band genişliği

Daha önce açıklandığı üzere, enerji ile band genişliği arasında yakın bir ilgi vardır. Band genişliği olarak bilinen kavram aslında belirli bir aralıktaki enerji yoğunluğudur. Enerjinin belirli bir band da birikmiş olması o aralık veya band için işaretin band genişliğini oluşturur. İşaretin frekans bileşenlerine ait enerji belli bir bölgede yoğunlaşır. Bu aralık veya band yaklaşık enerjinin %95'nin toplandığı aralıktır. Bu yoğunlaşılan aralık belirli bir B Hz bandında olduğu için bu band aynı zamanda “**asıl band genişliği**” (essential bandwidth) olarak anılır.



Şekil 93 İşaret Enerji spektral yoğunluğu

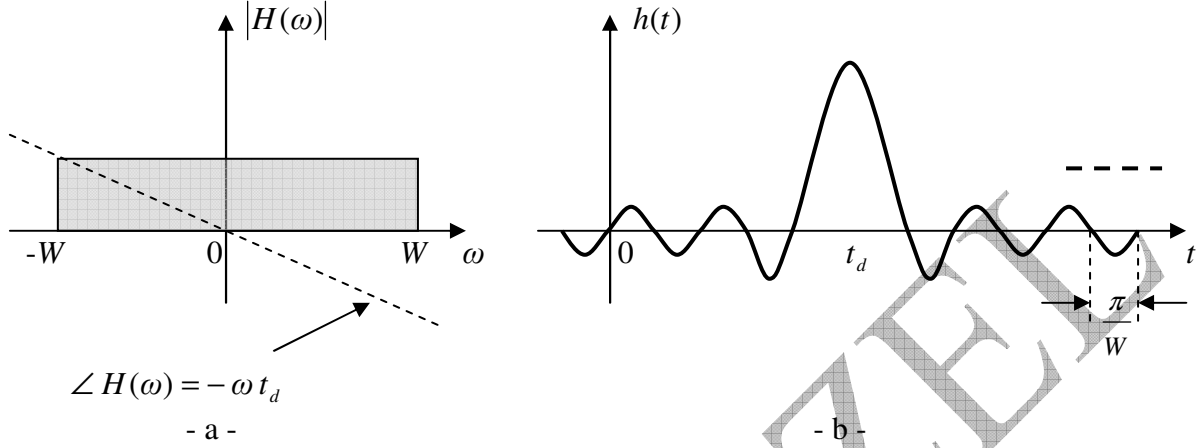
Yukarıdaki enerji spektral yoğunluk şekline bakıldığında, enerji ile Fourier transformasyonu arasında da ilginç bir benzerlik göze çarpmaktadır. Şekilden enerji kaplı alanın aslında Fourier transformasyonuna uygun periodik olmayan işaret görünümünde olduğundan, bir işaretin enerjisinin frekans spektrumunda Fourier transformasyonu ile hesaplanması oldukça tutarlı bir yaklaşım olmuştur. Diğer bir deyişle, Fourier transformasyonu doğası gereği işaretin enerjisinin ölçülmesindeki en uygun yöntem olarak öne çıkmaktadır.

Filtreler

Sistem frekans cevabı dahilinde ele alınabilecek bir diğer önemli LTIC sistemi olarak filtreleri düşünebiliriz. Fourier analizlerine uygun filtre çözümleri ideal ve pratik açıdan ele alınacaktır. Bir işaretin amaca uygun olarak sisteme bir noktadan giriş yapıp, çıkışından elde edilmesi de bir tür işaretin iletildiği iletim sistemi veya kanalı olarak görülebilir. Bu açıdan filtre analizinde de distorsiyonsuz iletimin kuralları geçerlidir.

Girişteki bilgiye ait işareti $f(t)$ bir başka noktaya aynen aktarmak istiyorsak, iletimdeki form olarak $y(t)$ nin üzerinde onu etkileyen veya bozan sebeplerden kaynaklanan vade olması istenmeyen gürültü olarak anılan ek işaretler oluşabilir. Bunların $y(t)$ üzerindeki etkisini kaldırmak veya minimize etmek için filtreler kullanılabilir. Bu anlamda uygulamaya dönük ideal filtreleri ele alacağız.

İdeal filtreler distorsiyonsuz iletimi sağlayan sistemlerdir. Belli bandaki işaretlerin geçişine izin verilmekte, diğerleri ise bastırılmaktadır. Belli bandaki işaretlerin geçişi zaten başlı başına iletim, haberleşme ve de sonuçta distorsiyonsuz iletimin şartlarını gerektirir. Aşağıda ideal bir alçak geçiren filtrenin (low pass filter :LPF) frekans cevabı ve impuls cevabı verilmiştir.



Şekil 94 İdeal alçak geçiren filtre : frekans cevabı ve impuls cevabı

$$H(\omega) = \begin{cases} 1 & |\omega| \leq W \\ 0 & |\omega| > W \end{cases}$$

Aslında (a) da görülen filtre karakteristiğinden genlik frekans cevabının yani genliğin frekansla değişiminin sabit ve fazın frekansla değişiminin ise gecikme miktarı üzerinden lineer olduğunu görülmektedir. Buradan filtre karakteristiğinin de distorsiyonsuz sistemin özellikleriyle örtüştüğünü görmekteyiz. Çünkü bir iletim sistemi sınırlı bir band dahilinde düşünüldüğü zaman filtre veya alçak geçiren filtre özelliğine yakın olduğu fark edilmektedir. Denklemden görüldüğü gibi alçak geçiren filtre $\omega = 0$ $(-W, W)$ civarında band geçiren, bunun dışında band durdurucu özellikte gibi çalışmaktadır. Diğer yandan yine şekilden ve de denklemden görüldüğü gibi alçak geçiren filtre distorsiyonsuz iletim kuralına göre çalışmaktadır (a).

Giriş işaretine ait tüm bileşenlerin frekansı doğrusal $-t_d$ eğimiyle ve sabit t_d zaman gecikme miktarıyla iletilmektedirler. Diğer bir deyişle $(-W, W)$ band aralığındaki işaretin tüm bileşenleri frekansla doğrusal olarak değişen t_d gecikmesi ile geçerler veya iletilirler. Buradaki alçak geçiren filtre kavramı olarak W frekansından küçük olanların geçirilmesi, büyük olanların ise geçirilmemeleri veya bastırılmasıdır. Buna göre eğer filtrede $(-W, W)$ bandında geçirilecek işaret $f(t)$ band limitli (bandlimited) W (rad/s) bir işaret ise, doğal olarak distorsiyonsuz iletim için çıkış $y(t)$, girişin t_d zaman gecikmiş versiyonu olacaktır.

$$y(t) = f(t - t_d)$$

Yukarıdaki şekilde verilen filtre örneği için

$$|H(\omega)| = \text{rect}\left(\frac{\omega}{2W}\right)$$

ve,

$$\angle H(\omega) = e^{-j\omega t_d}$$

ise, sistem transfer fonksiyonu

$$H(\omega) = |H(\omega)| e^{j\angle H(\omega)}$$

$$H(\omega) = \text{rect}\left(\frac{\omega}{2W}\right) e^{-j\omega t_d}$$

olacaktır. Buradan sistemin birim impuls cevabı $h(t)$ ise, sistem transfer fonksiyonu $H(\omega)$ nun invers Fourier transformasyonundan elde edilir.

$$\begin{aligned} h(t) &= F^{-1}\left[\text{rect}\left(\frac{\omega}{2W}\right) e^{-j\omega t_d}\right] \\ &= \frac{W}{\pi} \text{sinc}[W(t - t_d)] \end{aligned}$$

Burada aitem impuls cevabı $h(t)$ nın uygulanan $\delta(t)$ impuls girişine cevap olduğunu biliyoruz. Ve yine biliyoruz ki bu impuls giriş $t = 0$ anında uygulanmaktadır. Eğer $t = 0$ dan önce giriş uygulanmış ise, bu durumda filtremiz “casual” değildir (noncasual) ve daha önemlisi bu durumda filtre realize edilemez veya gerçekleştirilemez (unrealizable). Bu durumun diğer ideal filtreler (yüksek geçiren, band geçiren, band durduran) içinde geçerli olduğunu ve onların realize edilemeyeceklerini söyleyebiliriz. Buradan karşımıza “realize edilebilir” veya “realize edilemez” kavramları çıkmaktadır ki, filtre tasarımları için oldukça önemlidirler. Hangi halde realize edilebilirler veya edilemezler, bunların varsa kriter veya koşullarını belirtmemiz lazım. Eğer genellersek bir sistemin fiziksel olarak realize edilebilmesi için gerek ve yeter koşul

$$h(t) = 0 \quad t < 0$$

olmalıdır. Yani bir sistemin gerçekleştirilebilmesi için sisteme giriş $t = 0$ dan önce uygulanmayacak, diğer bir deyişle $t < 0$ için sistem impuls cevabı olmayacak veya sıfır olacaktır ($h(t) = 0$). Buna rağmen pratikte tam anlamıyla ($t < 0$ için $h(t) = 0$) koşulunun sağlanmasında bazı sıkıntılar vardır. O da **casual olmayan işaretler** den kaynaklanmaktadır. Bu tür işaretler $(-\infty, +\infty)$ aralığındaki periyodik işaretler olduğundan $t = 0$ dan önce başladıkları görülmektedir. Bazı özel filtrasyon teknikleriyle aşılabilen bu problemin özellikle örnekleme teorisindeki aliasing adı verilen örtüşme olayındaki benzer sebeple etkisinin giderilmesi için, gecikme zamanını fazla büyütmeden örnekleme frekansını Nyquist oranından biraz büyük almakla önlenemediği görülmektedir. Bunların getirdiği bir sonuç ortaya çıkar ki, o da eğer sistem “casual” değilse realize edilemez veya gerçekleştirilemez.

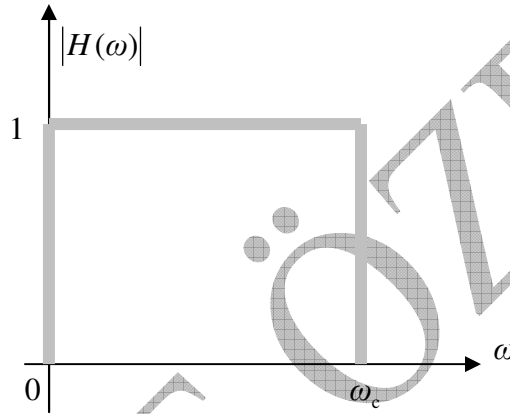
Öne sürülen bu koşul frekans domeninde, **Paley-Wiener kriteri** olarak anılan prensibe denk düşer. Paley-Wiener kriteri fiziksel bir sistemin realize edilebilmesi için gerek ve yeter koşulu sistem genlik cevabına göre aşağıdaki bağıntıdaki gibi tanımlamaktadır.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\ln|H(\omega)||}{1+\omega^2} d\omega < \infty$$

Eğer $H(\omega)$ bu koşulu sağlamıyorsa system realize edilemez. Yalnız burada temel kısıt şudur; eğer filtre kazancı olan $H(\omega) = 0$ alınırsa, yani filter kazancı sıfır olursa, integral ifadesi sonsuz çıkar. Çünkü $H(\omega) = 0$ için

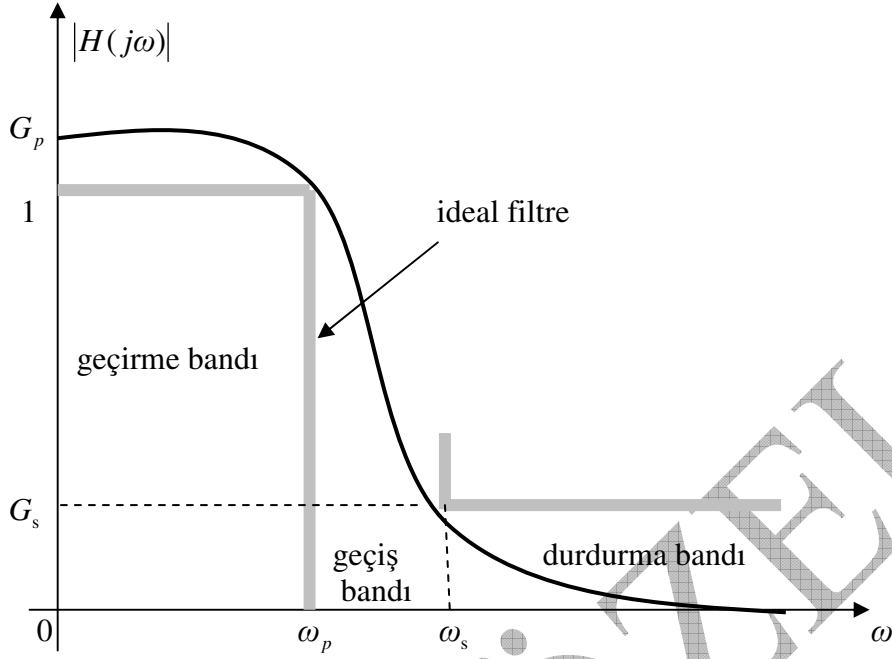
$$\ln|H(\omega)| = \ln(0) = \infty$$

bu durumda yukarıdaki integrasyondaki sonlu bir değeri gösteren $< \infty$ ifadesi sağlanamaz. Bunun anlamı nadir. Şöyle açıklayabiliriz. İdeal bir alçak geçiren filtreyi göz önüne alırsak,



Şekil 95 İdeal alçak geçiren filtre

görüldüğü gibi $|H(\omega)|$ kazancı “1”, $|H(\omega)| = 1$ ve kesim frekansı ω_c olan ve yalnızca $(0, \omega_c)$ aralığındaki düşük frekansları geçiren bir alçak geçiren filtre söz konusudur. İdeal denilmesinin anlamı, kazancı ω_c kesim frekansında hemen sonra aniden sıfıra düşmesidir ($|H(\omega)| = 0$). Ancak yukarıda açıklamaya çalıştığımız **Paley-Wiener kriteri ışığında** $|H(\omega)| = 0$ gibi bir kazancın alınmasının mümkün olmadığını gördük. Öyleyse bu yeni duruma göre ideal filtre veya ideal alçak geçiren filtre nasıl yorumlanabilecektir. Yorumun aşağıdaki şekil gibi olacağı düşünülebilir.



Şekil 96 Realize edilebilir alçak geçiren filtre

Pratikte **Paley-Wiener** kriterine göre realize edilebilecek alçak geçiren filtreye baktığımızda, idealden farklı olarak ω_p geçirme bandının sonunda kazanç hemen sıfıra düşmemektedir. Tam aksine G_p kazanç noktasından itibaren ω_p geçirme frekansına kadar kazancını sabit tutarken, bu noktadan itibaren ω_s durdurma frekansına kadar hafif ve yumaşak bir eğimle düşmeye başladığını görmekteyiz. Nitekim hiç bir zaman ω_s frekansında kazanç sıfır olmayıp G_s gibi sabit bir kazancında (muhtemelen çok düşük) sabit kalmaktadır. Yani ω_s durdurma frekansının ötesinde görünen durdurma bandında kazanç hiç bir zaman idealdeki gibi sıfır olmamaktadır. Bununla beraber ideal bir filtreye göre en original nokta, geçirme ile durdurma yani söndürme bandı arasında kalan bir üçüncü ara band olan geçiş bandının varlığıdır. **Geçiş bandı**, pratik veya **Paley-Wiener** kriterinin bir sonucudur. Buradan ideal filtrenin benzemekle beraber pratik filtreden farklı bir içerikte olduğunu gözlemlemekteyiz. Diğer yandan **Paley-Wiener** kriterine göre her pratik sistemin frekans cevabı band limitsizdir (nonbandlimited) ve bunun sonucunda da özellikle ayırık işaretlerin elde edilmesinde baş vurulacak örnekleme prosesinde, örneklerin örtüşmesi neredeyse kaçınılmaz olmaktadır.

Örnek

Transfer fonksiyonu $H(\omega) = e^{-(k\omega^2 + j\omega t_0)}$ olan filtrenin gerçekleştirilebilir olup olmadığını inceleyin.

Çözüm

Verilen transfer fonksiyonunun zaman domenindeki karşılığını bulmaya çalışalım.

$$e^{-t^2/2\sigma^2} \Leftrightarrow \sigma\sqrt{2\pi} e^{-\sigma^2\omega^2/2}$$

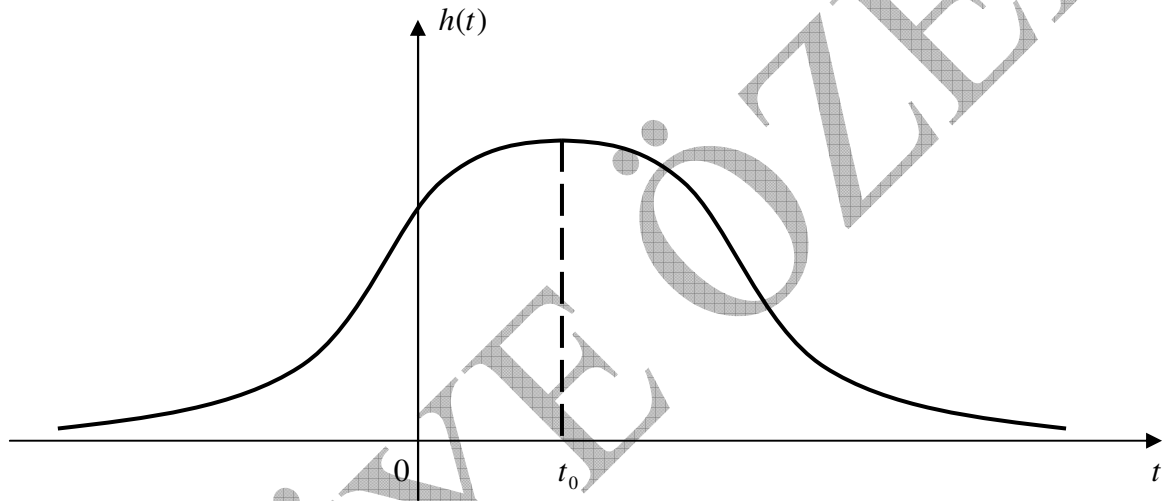
$$H(\omega) = e^{-k\omega^2} e^{-j\omega t_0}$$

$$h(t-t_0) \Leftrightarrow H_1(\omega) e^{-j\omega t_0}$$

$$H_1(\omega) = e^{-k\omega^2}$$

$$\frac{\sigma^2\omega^2}{2} = k\omega^2, \quad \sigma = \sqrt{2k}$$

$$h(t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi k}} e^{-(t-t_0)^2/4k}$$



Şekil 97

$h(t)$ Fonksiyonuna bakıldığında sistemin (filtrenin) nedensel (causal) olmadığı görülmektedir ($h(t) \neq 0, t < 0$). Filtre impuls cevabının $t < 0$ için değer ürettiğinden sistem nedensel değildir. Diğer taraftan bir filtrenin realize edilebilir yani tasarlanabilir olması için Paley-Wiener kuralı gereğince

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\ln |H(\omega)| |}{\omega^2 + 1} d\omega < \infty$$

olduğunu biliyoruz. Bu ifadeyi test edelim.

$$|H(\omega)| = \left| e^{-k\omega^2} \right| \left| e^{-j\omega t_0} \right| = e^{-k\omega^2}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\ln |H(\omega)| |}{\omega^2 + 1} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\ln e^{-k\omega^2}|}{\omega^2 + 1} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{k\omega^2}{\omega^2 + 1} d\omega = \infty$$

görüldüğü gibi sonucun sonsuz olması da verilen filtrenin gerçekleştirilebilir olmadığını gösterir. Eğer t_0 gecikme değeri çok büyük (ideal anlamda sonsuz büyük) seçilirse ($t_0 = 3\sqrt{2k}$ sn gibi), sistem nedensel ve gerçekleştirilebilir olabilir. t_0 değerinin büyük seçilmesi sonucu $h(t)$ işaretinin (kuyrukları) iyice sağa kayacağından, filtrenin sol taraftaki kısımlarının (kalan kuyruk kısmının) ağırlığı azalacağından, daha rasyonel ve tasarlanabilir bir filtre söz konusu olur.

Örnek

Filtre transfer $H(\omega) = \frac{1}{j\omega + 2}$ fonksiyonu olan filtrenin gerçekleştirilebilir olup olmadığını inceleyin.

Çözüm

Verilen filtre fonksiyonunun ters Fourier transformasyonu veya impuls cevabı

$$e^{-2jt} \Leftrightarrow \frac{1}{j\omega + 2}$$

$$h(t) = e^{-2jt} u(t)$$

$h(t)$ Fonksiyonuna bakıldığında bu kez sistemin (filtrenin) nedensel (causal) ($h(t) = 0, t < 0$) olduğu görülmektedir. Dolayısıyla filtre tasarlanabilir. Diğer taraftan bir filtrenin realize edilebilir yani tasarlanabilir olması için Paley-Wiener kuralı gereğince

$$H(\omega) = \frac{1}{j\omega + 2} = \frac{2 - j\omega}{-(j\omega) + 2^2} = \frac{2 - j\omega}{\omega^2 + 4} = \frac{2}{\omega^2 + 4} - \frac{j\omega}{\omega^2 + 4}$$
$$|H(\omega)| = \sqrt{\left(\frac{2}{\omega^2 + 4}\right)^2 + \left(-\frac{\omega}{\omega^2 + 4}\right)^2} = \sqrt{\frac{\omega^2 + 4}{(\omega^2 + 4)^2}} = \frac{\sqrt{\omega^2 + 4}}{\omega^2 + 4} = \frac{1}{\sqrt{\omega^2 + 4}}$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\ln |H(\omega)||}{\omega^2 + 1} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\left| \ln \frac{1}{\sqrt{\omega^2 + 4}} \right|}{\omega^2 + 1} d\omega < \infty$$

görüldüğü gibi sonucun sonlu olması, filtrenin nedensel ve aynı zamanda gerçekleştirilebilir olduğunu göstermektedir.