ELEKTRONİK VE HABERLEŞME MÜHENDİSLİĞİ

Devre ve Sistem Analizleri
(EHM-2005)

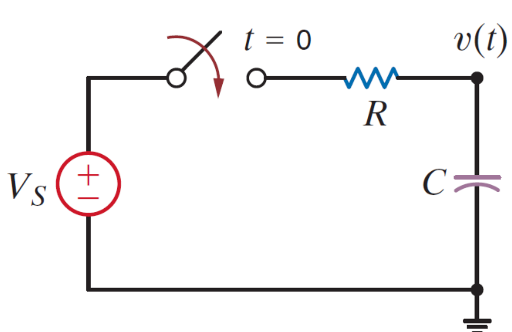
Dersin Sorumlusu: Dr. Cenk ALBAYRAK

Birinci Dereceden Devreler

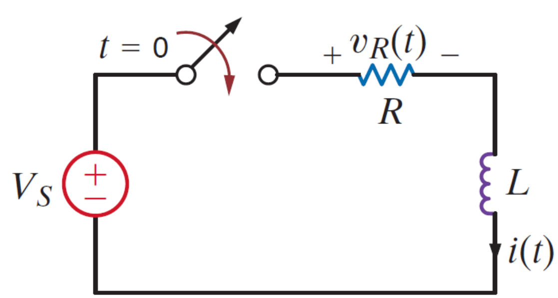
Eğer bir elektrik devresi **yalnızca direnç (R)** elemanlarının çeşitli kombinasyonları tarafından oluşturulmuş ise bu devredeki çeşitli akım ve gerilim değerlerini hesaplayabilmek için **doğrusal denklem takımlarını** çözmek yeterli olmaktadır.
Fakat bir elektrik devresinde **kondansatör (C)** veya **indüktans (L)** elemanları bulunuyorsa, bu devredeki akım veya gerilim bilgilerini hesaplayabilmek için **diferansiyel denklemlerin** çözülmesi gerekmektedir.

Yalnızca **RC** veya yalnızca **RL** eleman türlerinden oluşan elektrik devrelerinin çözümünde **birinci dereceden diferansiyel denklemler** ile karşılaşılır. Bu nedenle bu tür devrelere **birinci dereceden devreler** denir.

Birinci dereceden devreler (RC veya RL devreleri) üzerinde yapılacak analizler, yani bir gerilim ya da akım değerinin hesabı, aşağıdaki gibi birinci dereceden bir diferansiyel denklemi çözmeyi gerektirmektedir;



RC Devresi



RL Devresi

$$\boxed{\frac{dx(t)}{dt} + ax(t) = f(t)}$$

$$\frac{dx(t)}{dt} + ax(t) = f(t)$$

Bu tipte bir denklemin çözümü için, önce genel bir çözüm elde edip sonra da devre analizlerimizde iki farklı yaklaşım uygulayacağız.
Diferansiyel denklemler için temel teoremlerden biri şu şekildedir;

Eğer $x(t) = x_p(t)$ yukarıdaki diferansiyel denklemin herhangi bir çözümü ise ve $x(t) = x_c(t)$ 'de aşağıdaki homojen denklemin herhangi bir çözümü ise;

$$\frac{dx(t)}{dt} + ax(t) = 0$$

Aşağıdaki gibi her ikisinin toplamı da bu diferansiyel denklemin bir çözümüdür;

$$x(t) = x_p(t) + x_c(t)$$

Burada, $x_p(t)$ terimi **özel çözüm**, $x_c(t)$ terimi ise **homojen çözüm** olarak adlandırılır.

Ele alınan diferansiyel denklemi $\mathrm{f(t)} = \mathrm{A}$ (A herhangi bir sabit) durumu için incelenirse, bu diferansiyel denklemin tam çözümü aşağıdaki iki denklemin çözümüyle elde edilebilen iki kısımdan oluşmaktadır.

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{dx_p(t)}{dt} + ax_p(t) &= A \\ \frac{dx_c(t)}{dt} + ax_c(t) &= 0 \end{aligned}}$$

Özel çözüm için yazılan denklemin sağ tarafı bir sabit olduğu için $x_p(t)$ çözümü de bir **sabit olmak zorundadır**. Dolayısıyla $\boldsymbol{x_p(t) = \mathrm{K}_1}$ sabit sayısına eşit olduğu kabulü yapılırsa ve denklemde yerine yazılırsa, $\mathbf{K_1}$ değeri aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$\boxed{x_p(t) = K_1 = \frac{A}{a}}$$

Homojen çözüm için yazılan denklem aşağıdaki forma dönüştürülerek çözülürse;

$$\boxed{\frac{dx_c(t)/dt}{x_c(t)} = -a} \Rightarrow \frac{d}{dt}\left[\ln x_c(t)\right] = -a \Rightarrow \ln x_c(t) = -at + c$$

$$\boxed{x_c(t) = K_2 e^{-at}}$$

Not:

$\mathrm{y} = \log_a \mathrm{f(x)}$ ise

$$\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}} = \frac{\mathrm{f'(x)}}{\mathrm{f(x)}} * \log_a \mathrm{e}$$

Dolayısıyla ele alınan diferansiyel denklemin tam çözümü aşağıdaki gibi olur;

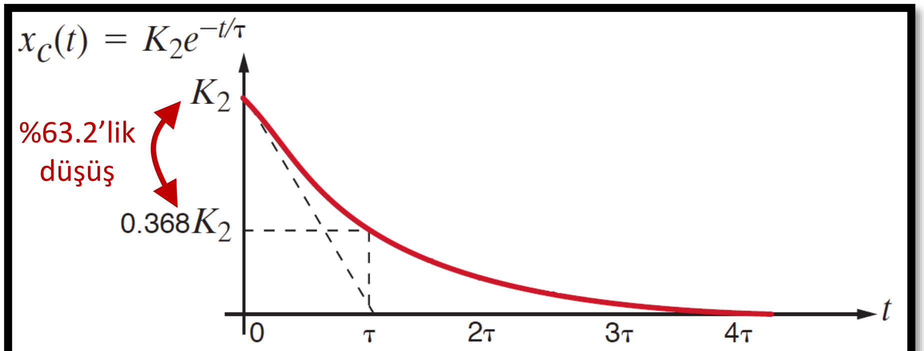
$$\boxed{\begin{aligned} x(t) &= x_p(t) + x_c(t) \\ x(t) &= \frac{A}{a} + K_2 e^{-at} \end{aligned}} \Rightarrow \boxed{x(t) = K_1 + K_2 e^{-t/\tau}}$$

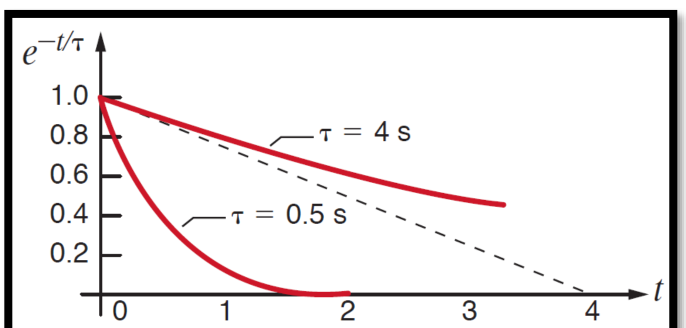
Tam çözüm; $\boxed{x(t) = K_1 + K_2 e^{-t/\tau}}$

Bu çözüm, birinci dereceden RC ve RL devreleri için kabul edilen genel bir çözüm ifadesidir. Ele alınan probleme bağlı olarak K_1, K_2 ve τ değerlerinin hesaplanması gerekmektedir.

Burada $\boldsymbol{K_1}$ terimine kalıcı durum ya da **sürekli durum çözümü** adı verilir. Çünkü $t \to \infty$ iken ikinci terim sıfıra gitmektedir ve $x(t)$ ‘nin sonucu K_1 terimine indirgenmektedir.

τ terimi ise devrenin **zaman sabiti** olarak adlandırılır. Tam çözümdeki ikinci terim üstel olarak azalmaktadır. $\tau > 0$ ‘da $t = 0$ için ikinci terim K_2 ‘ye $t \to \infty$ için de sıfıra eşit olmaktadır. Üstel azalmanın hızını τ zaman sabiti belirlemektedir. Devrenin zaman sabiti, devrenin **sürekli hal durumuna** ulaşma hızını belirlemektedir. Devre tepkisinin 5τ sürede sürekli hal durumuna ulaştığı kabul edilir.





Not: Devrenin zaman sabiti küçükse, devre sürekli hal durumuna **hızlı** bir şekilde ulaşırken, zaman sabiti büyükse devre sürekli hal durumuna daha **yavaş** bir şekilde ulaşmaktadır.

1) Diferansiyel Denklem Yaklaşımı

Şuana kadar birinci dereceden bir RC ve RL devresinin herhangi bir noktasındaki akım ya da gerilimi tanımlamak için kullanılan aşağıdaki **diferansiyel denklem yapılarının tam çözümü** yine aşağıda verildiği gibi olduğundan bahsedilmiştir.

$$\boxed{\frac{dx(t)}{dt} + ax(t) = f(t)}$$

$$\boxed{\frac{dx(t)}{dt} + ax(t) = 0}$$

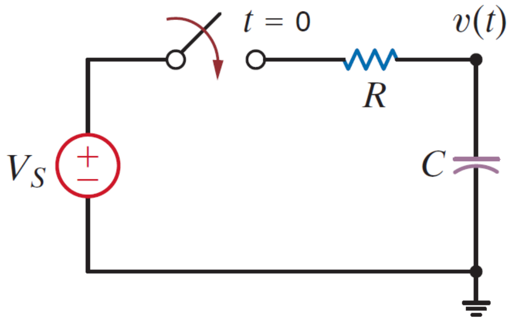
$$\boxed{x(t) = K_1 + K_2 e^{-t/\tau}}$$

Diferansiyel denklem eşittir sıfır ise ele alınan çözüm

Diferansiyel denklem eşittir sıfır değilse ele alınan çözüm

Diferansiyel denklem yaklaşımında, bir elektrik devresindeki herhangi bir elemanın akım veya gerilimin elde edilebilmesi için çözümü yapılması gereken denklem, yukarıda solda verilen yapıya benzer hale getirilir ve yukarıda sağda verilen çözüm bu denklemde yerine koyularak K_1, K_2 ve τ değerleri hesaplanır.

RC Devresi



Yanda verilen devrede, $t = 0$ anında anahtar kapatıldığına göre, $t > 0$ için kondansatör gerilimini hesaplayınız.

Çözüm: Tam çözümü bilinen diferansiyel denklem yapısına benzer olabilmesi için, $v(t)$ düğümü için düğüm denklemi yazılacak olursa;

$$C\frac{dv(t)}{dt} + \frac{v(t) - V_S}{R} = 0$$

$$\boxed{\frac{dv(t)}{dt} + \frac{v(t)}{RC} = \frac{V_S}{RC}}$$

Bu diferansiyel denklemin çözümünün aşağıdaki gibi olduğunu biliyoruz;

$$v(t) = K_1 + K_2 e^{-t/\tau}$$

Çözüm ifadesini diferansiyel denklemde yerine yazarak K_1, K_2 ve τ değerlerini hesaplayalım.

$$\frac{d(K_1 + K_2 e^{-t/\tau})}{dt} + \frac{K_1 + K_2 e^{-t/\tau}}{RC} = \frac{V_s}{RC} \Rightarrow -\frac{K_2}{\tau} e^{-t/\tau} + \frac{K_2}{RC} e^{-t/\tau} + \frac{K_1}{RC} = \frac{V_s}{RC}$$

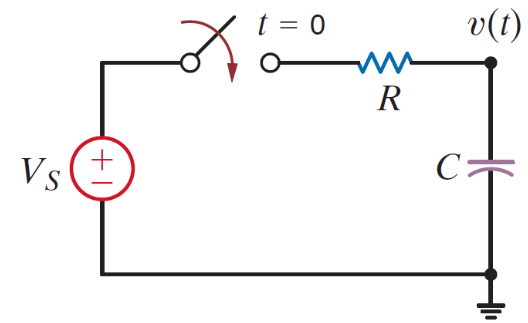
Üstel ve sabit terimler kendi aralarında birbirine eşitlenerek aşağıdaki değerler hesaplanabilir.

$$\frac{K_2}{\tau} e^{-t/\tau} = \frac{K_2}{RC} e^{-t/\tau} \Rightarrow \boxed{\tau = RC} \quad \text{ve} \quad \frac{K_1}{RC} = \frac{V_s}{RC} \Rightarrow \boxed{K_1 = V_s}$$

Çözümün devamı...

$$\boxed{\tau = RC}$$

$$\boxed{K_1 = V_s}$$



Hesaplanan değerler çözümde yerine yazılırsa, kondansatör gerilimi aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$\boxed{v(t) = V_S + K_2 e^{-t/RC}}$$

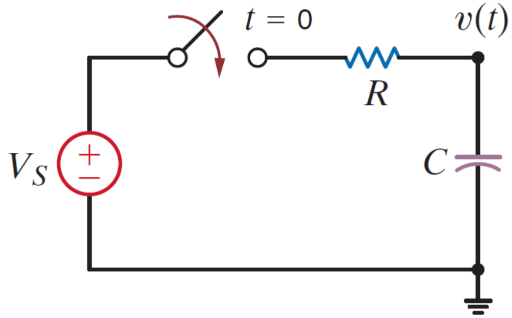
Burada V_s kalıcı durum $(t \to \infty)$ değeridir, RC 'de devrenin zaman sabitidir, K_2 ise kondansatörün başlangıç koşulu tarafından belirlenmektedir. Örnek olarak, başlangıçta ($t = 0$ 'da) kondansatörün boş ya da yüksüz olduğunu ($V_{c_0} = 0\text{V}$ ya da $V_{c_{\text{ilk}}} = 0\text{V}$) olduğunu varsayarsak;

$$0 = V_s + K_2 \Rightarrow \boxed{K_2 = -V_s}$$ olarak hesaplanır.

Dolayısıyla kondansatör gerilimi $v(t)$'nin tam çözümü aşağıdaki gibi bulunmuş olur;

$$\boxed{v(t) = V_S - V_S e^{-t/RC}}$$

Çözümün devamı…



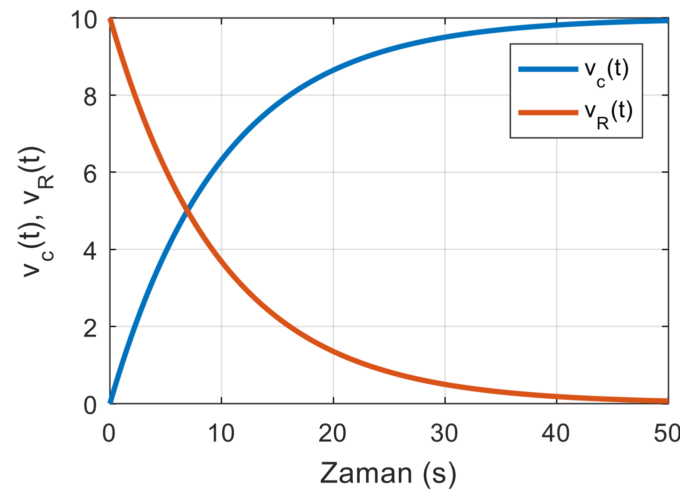
$$\boxed{v(t) = V_S - V_S e^{-t/RC}}$$

Bu devrede direnç üzerine düşen gerilim;

$$v_R(t) = V_S - v_C(t) = V_S - (V_S - V_S e^{-t/RC})$$

$$\boxed{v_R(t) = V_S e^{-t/RC}}$$

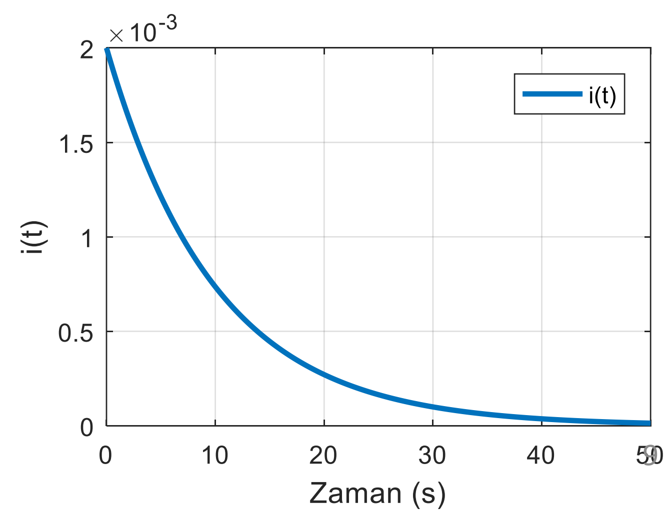
$V_s = 10\mathrm{V}, \mathrm{R} = 5\mathrm{k}\Omega$, $\mathrm{C} = 2\mathrm{mF}$ değerleri için $v_c(t)$ ve $v_R(t)$ 'nin zamana göre değişimleri yanda verilmiştir.



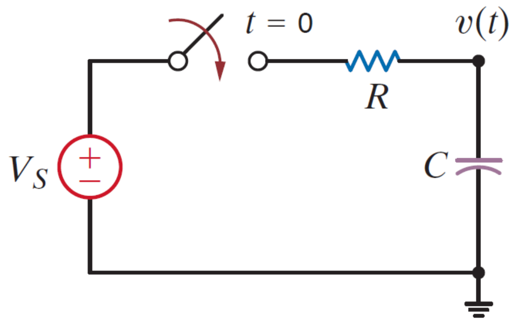
Bu devrede devreden geçen akım;

$$\boxed{i(t) = \frac{v_R(t)}{R} = \frac{V_S}{R} e^{-t/RC}}$$

olarak hesaplanır ve yukardaki değerlerin aynıları için devre akımının zamana göre değişimi yanda verilmiştir.



RC Devresi



Yanda verilen RC devresindeki kondansatörün gerilimi için düğüm denklemi yazılarak çözüme gidilmiştir. Benzer şekilde devredeki kondansatör gerilimi, çevre denklemi yazılarak aşağıdaki gibi de hesaplanabilir.

Çözüm: Çevre denklemi yazılacak olursa; $V_s = V_R(t) + V_c(t) \Rightarrow V_s = Ri(t) + \frac{1}{C}\int i(t)\,dt$

Her iki tarafın türevi alınırsa;

$$0 = R\frac{di(t)}{dt} + \frac{i(t)}{C}$$

$$\boxed{\frac{di(t)}{dt} + \frac{i(t)}{RC} = 0}$$

Bu homojen diferansiyel denklemin çözümünün aşağıdaki gibi olduğunu biliyoruz;

$$i(t) = K_2 e^{-t/\tau}$$

Çözüm ifadesini diferansiyel denklemde yerine yazarak K_2 ve τ değerlerini hesaplayalım.

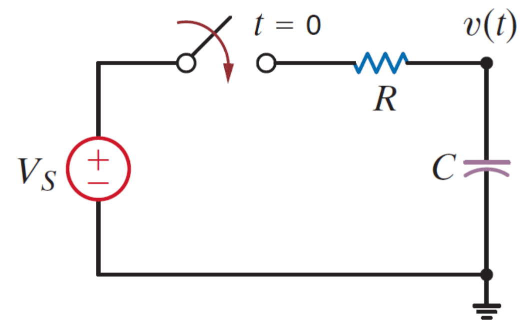
$$\frac{d(K_2 e^{-t/\tau})}{dt} + \frac{K_2 e^{-t/\tau}}{RC} = 0 \Rightarrow -\frac{K_2}{\tau}e^{-t/\tau} + \frac{K_2}{RC}e^{-t/\tau} = 0$$

Üstel terimler birbirine eşitlenerek τ sabiti aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$\frac{K_2}{\tau}e^{-t/\tau} = \frac{K_2}{RC}e^{-t/\tau} \Rightarrow \boxed{\tau = RC}$$

Çözümün devamı…

$$\boxed{\tau = RC}$$



Hesaplanan τ değerleri çözümde yerine yazılırsa, devre akımı (aynı zamanda kondansatör akımı) aşağıdaki gibi elde edilir.

$$i(t) = K_2 e^{-t/RC}$$

Düğüm denklemi üzerinden yapılan çözümde olduğu gibi kondansatörün başlangıçta yüksüz olduğu varsayılırsa, kondansatör başlangıç durumunda ($t = 0$ anında) kısa devre durumunda olacaktır. Bu durumda devreden geçen akım V_s/R olacaktır. Dolayısıyla $t = 0$ anında $K_2 = V_s/R$ olacaktır. Buna göre devre akımı aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\boxed{i(t) = \frac{V_s}{R} e^{-t/RC}}$$

Çevre denkleminden kondansatör gerilimi; $v_c(t) = v(t) = V_s - V_R$

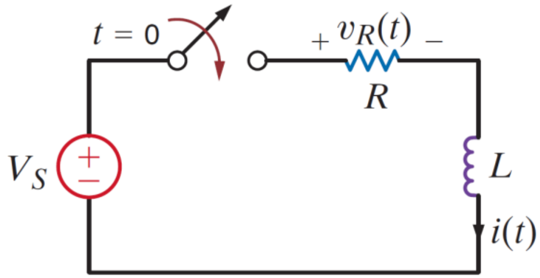
$$v_c(t) = V_s - Ri(t)$$

$$v_c(t) = V_s - R\frac{V_s}{R} e^{-t/RC}$$

Not: Sonuçta görüldüğü gibi, düğüm denklemi üzerinden elde edilen sonucun aynısı hesaplanmıştır.

$$\boxed{v_c(t) = V_s - V_s e^{-t/RC}}$$

RL Devresi



Yanda verilen devrede, $t = 0$ anında anahtar kapatıldığına göre, $t > 0$ için endüktans akımı $i(t)$'yi hesaplayınız.

Çözüm: Tam çözümü bilinen diferansiyel denklem yapısına benzer olabilmesi için çevre denklemi yazılacak olursa;

$$L\frac{di(t)}{dt} + Ri(t) = V_S$$

$$\boxed{\frac{di(t)}{dt} + \frac{R}{L}i(t) = \frac{V_s}{L}}$$

Bu diferansiyel denklemin çözümünün aşağıdaki gibi olduğunu biliyoruz;

$$i(t) = K_1 + K_2e^{-t/\tau}$$

Çözüm ifadesini diferansiyel denklemde yerine yazarak K_1, K_2 ve τ değerlerini hesaplayalım.

$$\frac{d(K_1 + K_2e^{-t/\tau})}{dt} + \frac{R}{L}(K_1 + K_2e^{-t/\tau}) = \frac{V_s}{L} \Rightarrow -\frac{K_2}{\tau}e^{-t/\tau} + \frac{RK_2}{L}e^{-t/\tau} + \frac{RK_1}{L} = \frac{V_s}{L}$$

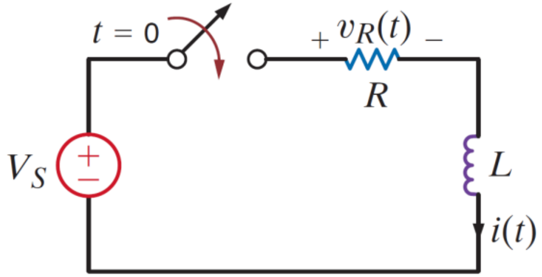
Üstel ve sabit terimler kendi aralarında birbirine eşitlenerek aşağıdaki değerler hesaplanabilir.

$$\frac{K_2}{\tau}e^{-t/\tau} = \frac{RK_2}{L}e^{-t/\tau} \Rightarrow \boxed{\tau = \frac{L}{R}} \quad \text{ve} \quad \frac{RK_1}{L} = \frac{V_s}{L} \Rightarrow \boxed{K_1 = \frac{V_s}{R}}$$

Çözümün devamı…

$$\boxed{\tau = \frac{L}{R}}$$

$$\boxed{K_1 = \frac{V_s}{R}}$$



Hesaplanan değerler çözümde yerine yazılırsa, endüktans akımı aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$\boxed{i(t) = \frac{V_S}{R} + K_2 e^{-\left(\frac{R}{L}\right)t}}$$

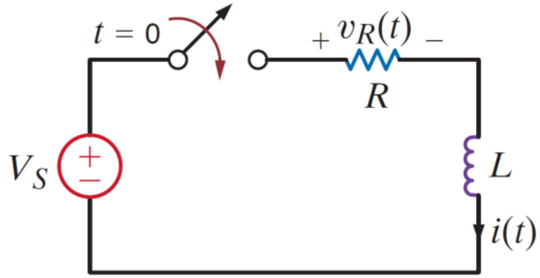
Burada (V_s/R) kalıcı durum $(t \to \infty)$ değeridir, (L/R) oranı da devrenin zaman sabitidir, K_2 ise endüktansın başlangıç koşulu tarafından belirlenmektedir. Örnek olarak, başlangıçta ($t = 0$ 'da) endüktans boş ya da yüksüz olduğunu ($i_{L_0} = 0\text{A}$ ya da $i_{L_{\text{ilk}}} = 0\text{A}$) olduğunu varsayarsak;

$$0 = \frac{V_s}{R} + K_2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{K_2 = -\frac{V_s}{R}}$$ olarak hesaplanır.

Dolayısıyla endüktans akımı $i(t)$'nin tam çözümü aşağıdaki gibi elde edilmiş olur;

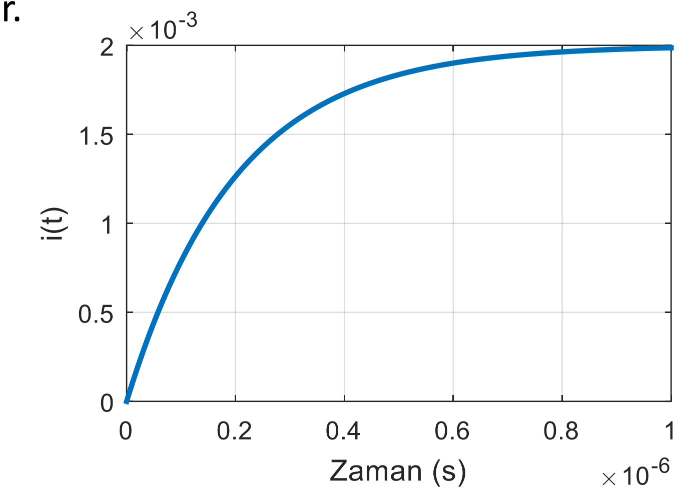
$$\boxed{i(t) = \frac{V_S}{R} - \frac{V_S}{R} e^{-\frac{R}{L}t}}$$

Çözümün devamı…



$$\boxed{v_L(t) = V_S - v_R(t)}$$

$\mathrm{V_s} = 10\mathrm{V}, \mathrm{R} = 5\mathrm{k\Omega},\ \mathrm{L} = 1\mathrm{mH}$ değerleri için $i(t)$ akımının zamana göre değişimi aşağıda verilmiştir.



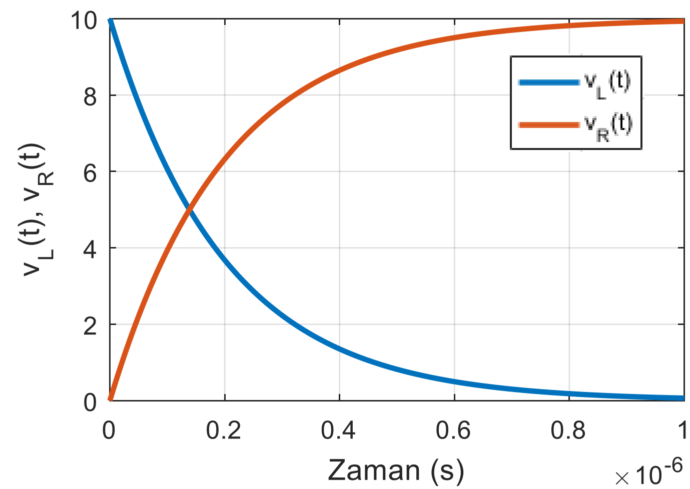
Bu devrede direnç üzerine düşen gerilim;

$$v_R(t) = R * i(t) \quad \Rightarrow \quad \boxed{v_R(t) = V_S - V_S\, e^{-\frac{R}{L}t}}$$

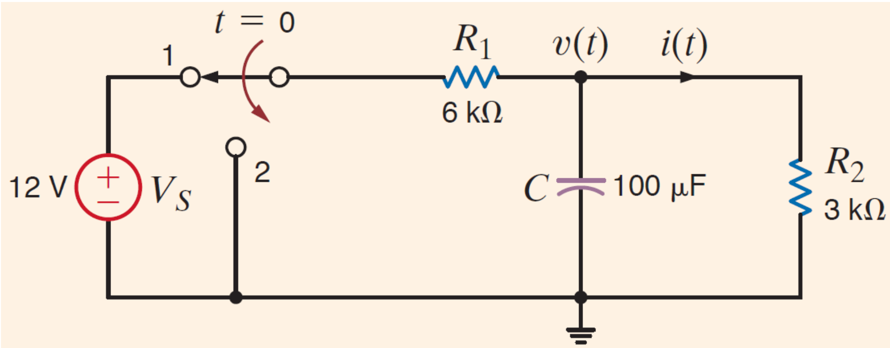
Endüktans üzerine düşen gerilim ise;

$$v_L(t) = V_S - v_R(t) \quad \Rightarrow \quad \boxed{v_L(t) = V_S\, e^{-\frac{R}{L}t}}$$

olarak hesaplanır ve yukardaki değerlerin aynıları için endüktans ve direnç elemanları üzerine düşen gerilim değerlerinin zamana göre değişimi yanda verilmiştir.

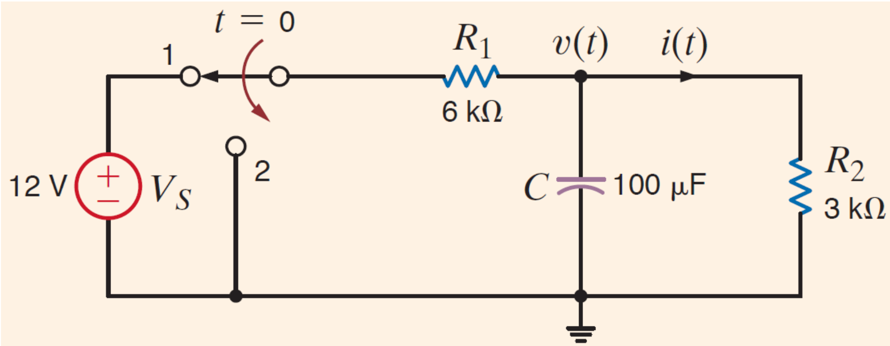


Örnek: Aşağıda verilen devrede anahtar 1 konumunda uzun süre kalmaktadır. Anahtar, $t = 0$ anında konum 2'ye getirilirse, $t > 0$ için $i(t)$ akımını hesaplayınız.



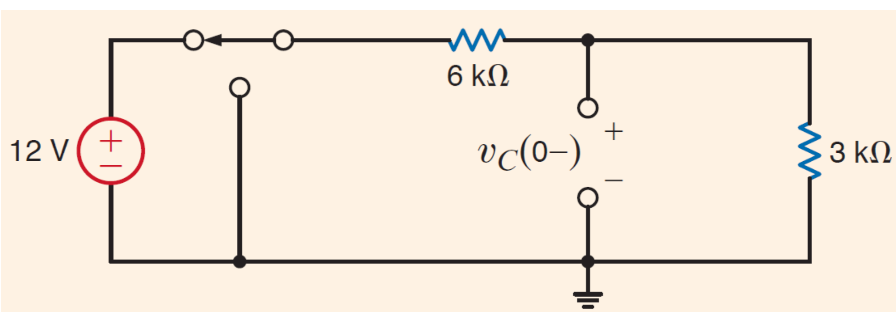
Not: $t(0-)$, anahtar konum değiştirmeden hemen önceki zamanı, $t(0+)$ ise, anahtar konum değiştirdikten hemen sonraki zamanı ifade etmektedir. Bu ifade akım veya gerilim için de kullanılmaktadır. Anahtar konum değiştirmeden hemen önceki akım veya gerilim, anahtar konum değiştirdikten hemen sonraki akım veya gerilim anlamına gelmektedir.

Örnek: Aşağıda verilen devrede anahtar 1 konumunda uzun süre kalmaktadır. Anahtar, $t = 0$ anında konum 2'ye getirilirse, $t > 0$ için $i(t)$ akımını hesaplayınız.



Not: $t(0-)$, anahtar konum değiştirmeden hemen önceki zamanı, $t(0+)$ ise, anahtar konum değiştirdikten hemen sonraki zamanı ifade etmektedir. Bu ifade akım veya gerilim için de kullanılmaktadır. Anahtar konum değiştirmeden hemen önceki akım veya gerilim değeri, anahtar konum değiştirdikten hemen sonraki akım veya gerilim değeri anlamına gelmektedir.

Çözüm: Anahtar 1 konumunda uzun süre bekletildiğine göre kondansatöre tamamen dolmuş demektir ve açık devre davranışı göstereceği için kondansatör üzerinden bir akım akmamaktadır. Devrenin bu durumu, yani $t = 0$- anındaki durumu, aşağıdaki şekilde gösterilmektedir.



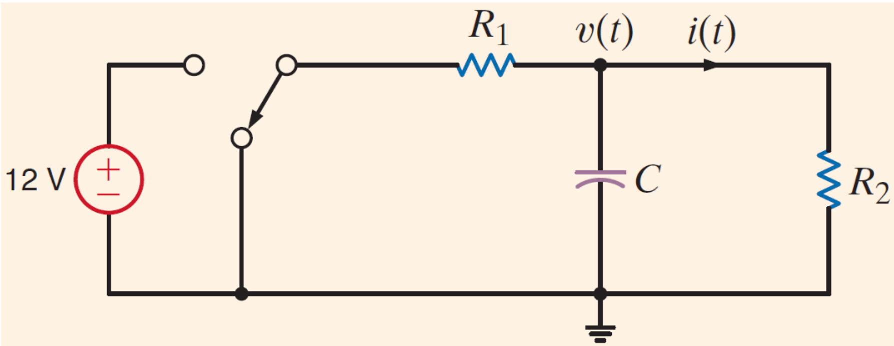
Kondansatörün başlangıç gerilimi, yani anahtar 2 konumuna alındığı andaki gerilimi, aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$v_C(0-) = 12\left(\frac{3k}{6k + 3k}\right) = 4\ \text{V}$$

Not: Bilindiği üzere, kondansatör ve endüktans elemanları gerilim ve akımlarını hızlı bir şekilde değiştiremedikleri için $v_c(0-) = v_c(0+)$ olacaktır.

Çözümün devamı…

$t > 0$ için geçerli devre aşağıda verilmiştir ve devrenin bu durumu için $v(t)$ düğüm denklemi, aşağıdaki gibi yazılmaktadır.



Düğüm denklemi;

$$\frac{v(t)}{R_1} + C\frac{dv(t)}{dt} + \frac{v(t)}{R_2} = 0$$

Devre elemanlarının değerleri yerine yazılarak denklem düzenlenirse;

$$\frac{dv(t)}{dt} + 5v(t) = 0$$

Bu homojen diferansiyel denklemin çözümünün aşağıdaki gibi olduğunu bilinmektedir.

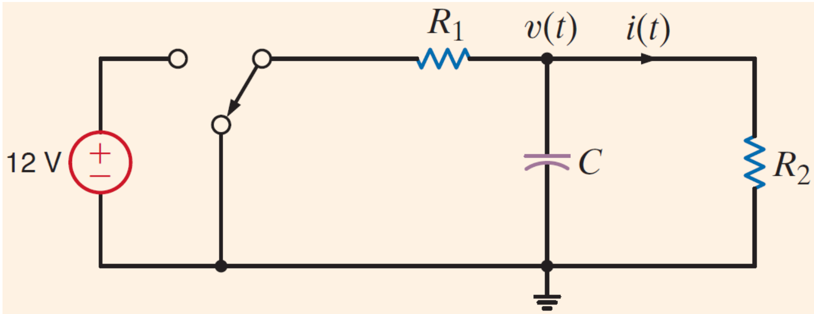
$$v(t) = K_2 e^{-t/\tau}$$

Bu çözüm diferansiyel denklemde yerine koyulursa;

$$\frac{d(K_2\, e^{-t/\tau})}{dt} + 5K_2\, e^{-t/\tau} = 0 \quad \Rightarrow \quad -\frac{K_2}{\tau} e^{-t/\tau} + 5K_2\, e^{-t/\tau} = 0$$

Buradan, $\tau = \frac{1}{5} = 0.2s$ olarak hesaplanır.

Çözümün devamı…

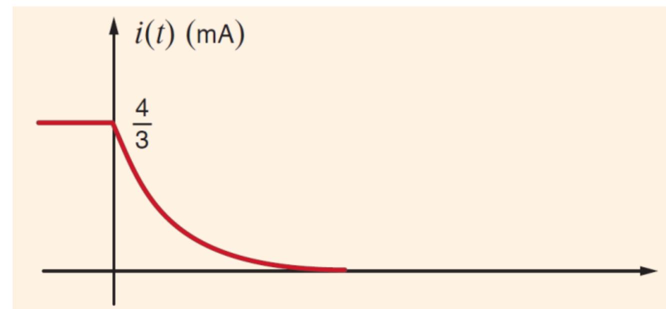


$$\tau = 0.2s$$

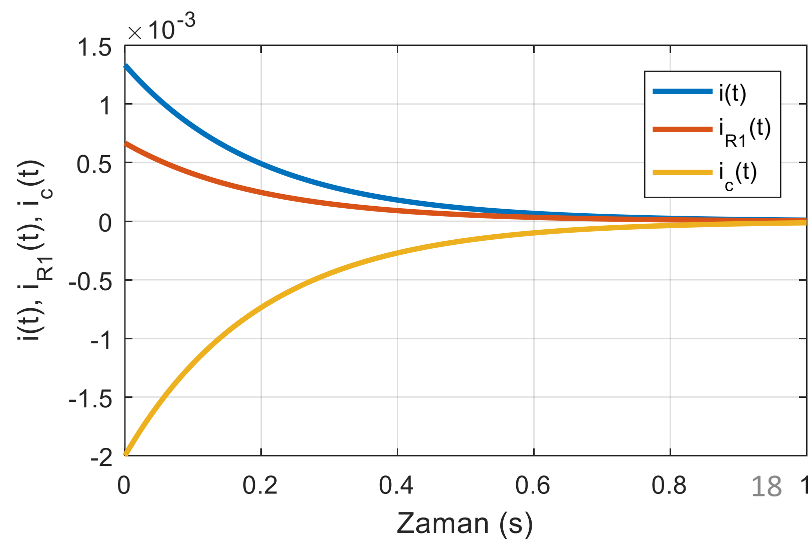
K_2'nin hesabı için kondansatörün başlangıç koşulu kullanılır. $t = 0$ anında, yani $v_c(0-) = v_c(0+) = 4\text{V}$ olduğuna göre, $K_2 = 4$ olarak hesaplanır. Buna göre;

$$\boxed{v(t) = 4e^{-t/0.2}\ \text{V}}$$

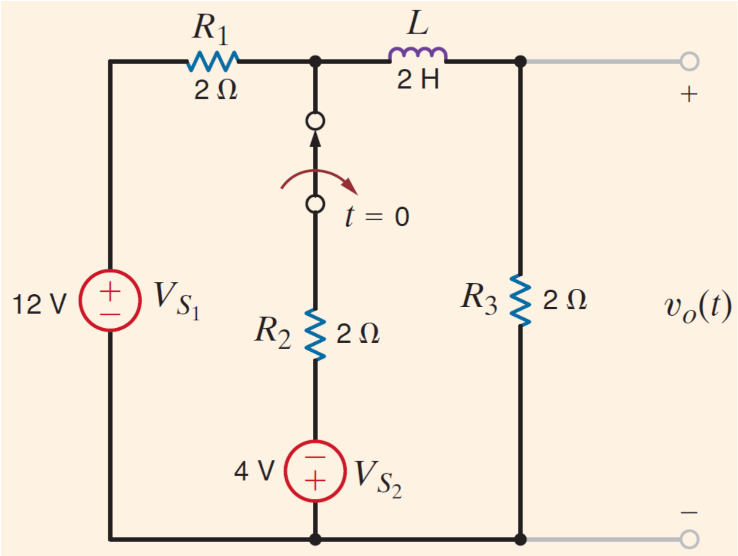
$$\boxed{i(t) = v(t)/R_2 = \frac{4}{3}e^{-t/0.2}\ \text{mA}}$$



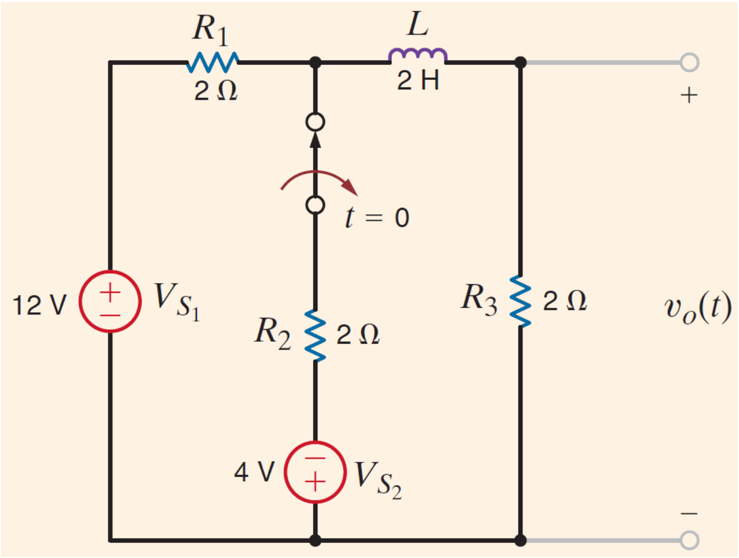
Bu devrede, $i_{R_1}(t) = v(t)/R_1$ ve $i_c(t) + i_{R_1}(t) + i(t) = 0$ olduğuna göre $i_c(t) = -(i_{R_1}(t) + i(t))$ olarak hesaplanabilir. Bütün dal akımlarının zamana göre değişimi yandaki şekilde verildiği gibi olmaktadır.



Örnek: Aşağıda verilen devrede anahtar kapalı konumda uzun süre kalmaktadır. Anahtar, $t = 0$ anında açılırsa, $t > 0$ için çıkış gerilimi $v_0(t)$ 'yi hesaplayınız.



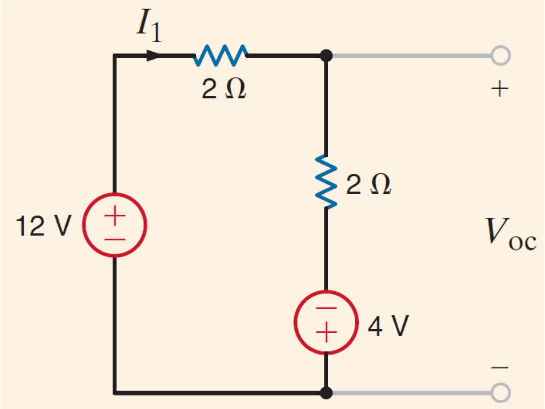
Örnek: Aşağıda verilen devrede anahtar kapalı konumda uzun süre kalmaktadır. Anahtar, $t = 0$ anında açılırsa, $t > 0$ için çıkış gerilimi $v_0(t)$ 'yi hesaplayınız.



Çözüm: $t = 0$- anında kalıcı (sürekli hal) durumunda olan devrede, endüktans kısa devre davranışı gösterecektir. Başlangıç anında endüktanstan akan akım farklı şekillerde hesaplanabilir. Thevenin teoreminden faydalanarak başlangıç koşullarında endüktanstan akan akımı hesaplayalım. Bunun için devrenin çıkışına bağlı olan 2Ω'luk dirençten görülen devrenin Thevenin eşdeğerini hesaplayıp bu direnç üzerinden akan akımı hesaplayalım. Bu akım değeri aynı zamanda başlangıçta endüktanstan akan akım değeridir. Sonrasında ise, $t > 0$ için oluşacak devrede çevre denklemi yazarak çözümü yapılacak olan diferansiyel denklemi oluşturalım.

Çözümün devamı...

2Ω'luk dirençten devreye bakıldığında, Thevenin eşdeğeri hesaplanacak devre aşağıda verilmiştir.



Burada;

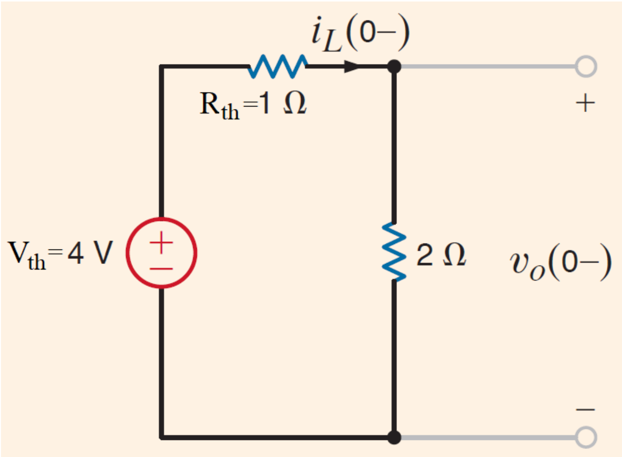
$$I_1 = \frac{16V}{4\Omega} = 4A$$

$$V_{oc} = I_1 2\Omega - 4V$$

$$\mathbf{V_{th}} = V_{oc} = 4V$$

$$\mathbf{R_{th}} = 1\Omega$$

Buna göre, aşağıda verilen Thevenin eşdeğer devresi üzerinden, başlangıç anında endüktanstan akan akım $i_L(0-)$ hesaplanabilir.

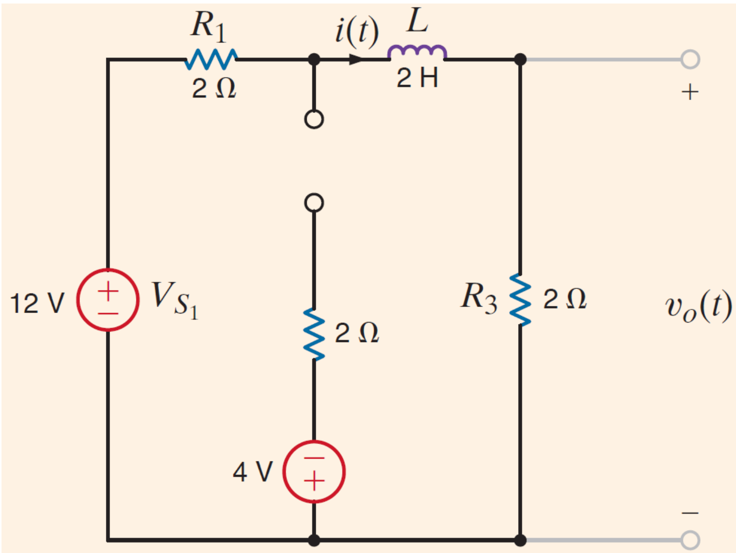


$$i_L(0-) = \frac{4V}{3\Omega}$$

$$\boxed{i_L(0-) = \frac{4}{3}A}$$

Çözümün devamı…

$t > 0$ anahtar konum değiştirdiğindeki durum için devrenin son hali aşağıda verilmiştir.



Çevre denkleminden;

$$-V_{S_1} + R_1 i(t) + L\frac{di(t)}{dt} + R_3 i(t) = 0$$

Eleman değerleri yerine koyarak denklem, çözümü bilinen diferansiyel denklem yapısına benzer hale getirilirse;

$$\frac{di(t)}{dt} + 2i(t) = 6$$

Bu denklemin çözümünün aşağıdaki gibi olduğu biliniyor;

$$i(t) = K_1 + K_2 e^{-t/\tau}$$

Bu çözüm diferansiyel denklemde yerine yazılırsa;

$$\frac{d(K_1 + K_2 e^{-t/\tau})}{dt} + 2K_1 + 2K_2 e^{-t/\tau} = 6$$

$$\frac{-K_2}{\tau} e^{-t/\tau} + 2K_1 + 2K_2 e^{-t/\tau} = 6$$

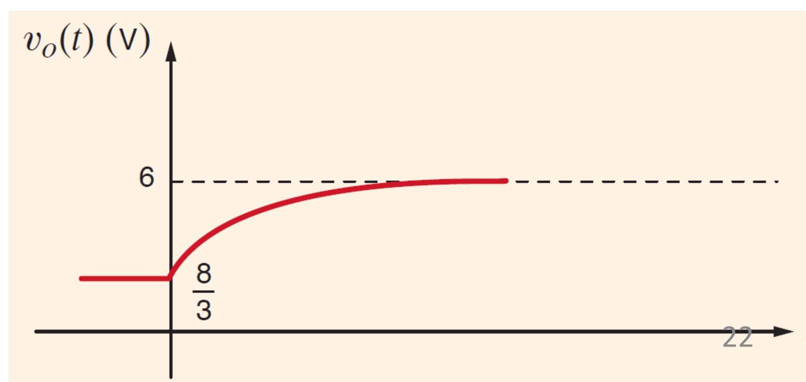
Buna göre K_1 ve τ değerleri aşağıdaki gibi hesaplanır;

$K_1 = 3, \quad \tau = 1/2$ ⇒ $i(t) = (3 + K_2 e^{-2t})\ \text{A}$

Başlangıç koşulu $i_L(0-) = i_L(0+) = 4/3\text{A}$ için, $\boldsymbol{K_2 = -5/3}$ olarak hesaplanır.

Hesaplanan değerler yerine koyulduğunda;

$$i(t) = \left(3 - \frac{5}{3} e^{-2t}\right)\ \text{A} \qquad v_o(t) = 6 - \frac{10}{3} e^{-2t}\ \text{V}$$



2) Adım Adım İlerleme Yaklaşımı

Bu yaklaşımda da, diferansiyel denklem yaklaşımında olduğu gibi, çözümün $\boldsymbol{x(t) = K_1 + K_2 e^{-t/\tau}}$ yapısında olduğu gerçeği kullanılacaktır ve devrenin sürekli hal durumlarına geldiği durumlar ele alınarak devre analiz teknikleri ile $\boldsymbol{K_1, K_2}$ ve **τ** değerleri hesaplanacaktır.

$\boldsymbol{K_1}$ sabiti:

$t \to \infty$ için çözüm $x(t) = K_1$ olmaktadır ve kalıcı durumda, yani $t \to \infty$ ‘da, devredeki kondansatör açık devre, endüktans ise kısa devre davranışı göstermektedir. Dolayısıyla devrenin sürekli hal durumu için kondansatör açık devre veya endüktans kısa devre yapılarak devreyi çözülürse elde edilen çözüm sonucunda K_1 değeri hesaplanmış olur.

$\boldsymbol{K_2}$ sabiti:

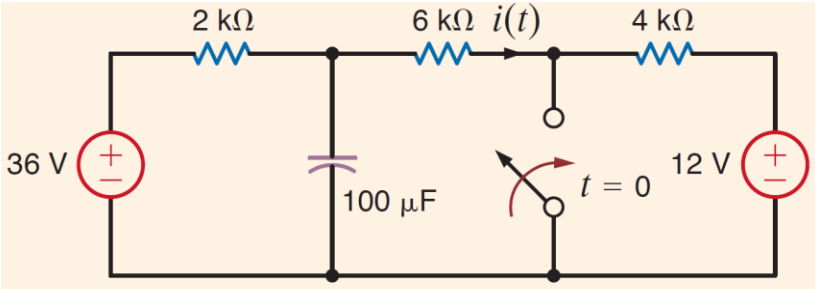
K_2 sabiti, devrenin başlangıç koşulları için, kondansatör yerine gerilim kaynağı veya endüktans yerine bir akım kaynağı koyulup oluşan devre çözülerek elde edilebilir. Çünkü başlangıç koşulu için, $t = 0$ anında endüktansın akımı ya da kondansatörün gerilimi için $x(t = 0-) = x(t = 0+)$ olacağından, elde edilen çözüm $x(t) = K_1 + K_2$ olmaktadır. Buna göre $K_1 = x(\infty)$ ve $K_2 = x(0+) - x(\infty)$ olarak hesaplandığı için çözüm, aşağıdaki gibi olacaktır;

$$\boxed{x(t) = x(\infty) + [x(0+) - x(\infty)]e^{-t/\tau}}$$

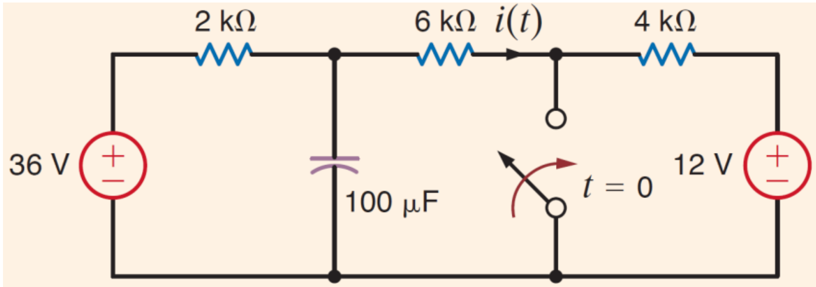
τ zaman sabiti:

τ zaman sabiti ise, devrede enerji depolayan elemanın (kondansatör veya endüktansın) uçları arasından bakıldığında görülen devrenin Thevenin eşdeğer direnci belirlenerek hesaplanabilir. Buna göre, bir RC devresi için $\tau = R_{th}C$ ve bir RL devresi için $\tau = L/R_{th}$ olmaktadır.

Örnek: Aşağıda verilen devre, anahtarın kapatıldığı $t = 0$ anından önceki zamanda sürekli hal durumundadır. $t > 0$ için $i(t)$ akımını hesaplayınız.



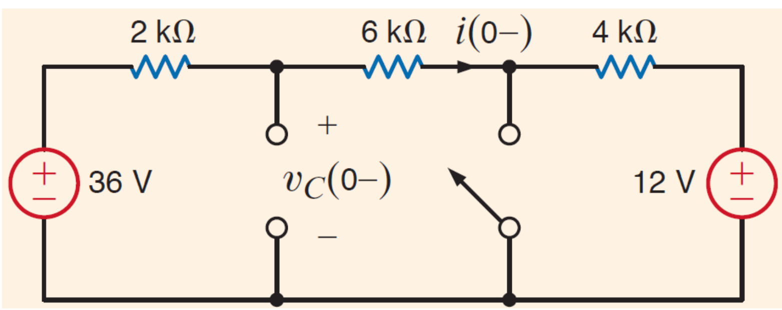
Örnek: Aşağıda verilen devre, anahtarın kapatıldığı $t = 0$ anından önceki zamanda sürekli hal durumundadır. $t > 0$ için $i(t)$ akımını hesaplayınız.



Çözüm: Devreyi adım adım ilerleme yaklaşımı ile çözelim.

Adım 1: $i(t) = K_1 + K_2 e^{-t/\tau}$ biçimindedir.

Adım 2: Anahtar kapatılmadan önceki devrenin sürekli hal durumu için aşağıdaki devreyi çözerek kondansatörün başlangıç gerilimi $v_c(0-)$'yi hesaplayalım.

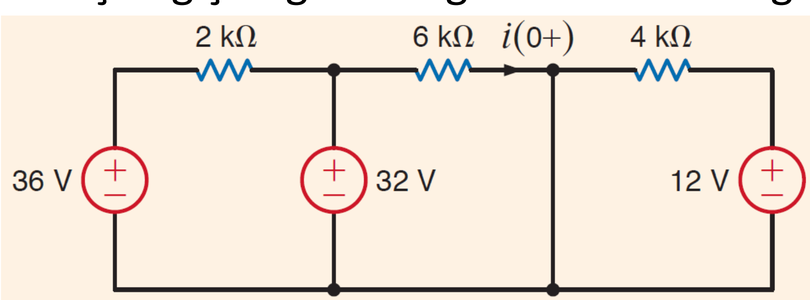


Çevre denkleminden;

$$\mathrm{i}(0-) = \frac{36-12}{2\mathrm{k}+6\mathrm{k}+4\mathrm{k}} = 2\mathrm{mA}$$

$$\mathrm{v_c}(0-) = 36 - 2\mathrm{m} * 2\mathrm{k} = 32\mathrm{V}$$

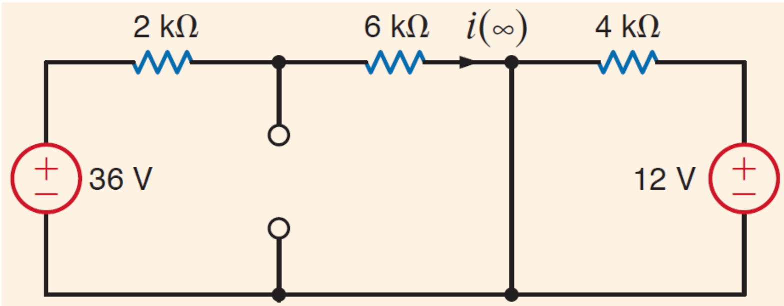
Adım 3: Devrenin sadece $t = 0+$ için geçerli hali aşağıda görüldüğü gibi olup, kondansatör yerine başlangıç değerinde gerilimi sabit bir gerilim kaynağı koyulmuştur.



$$\boxed{\mathrm{i}(0+) = \frac{32}{6\mathrm{k}} = \frac{16}{3}\mathrm{mA}}$$

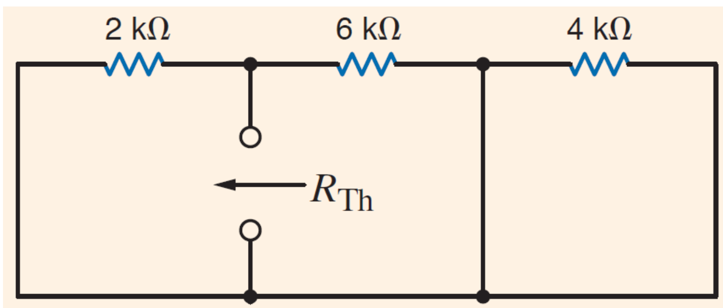
Çözümün devamı...

Adım 4: $t > 5\tau$ için geçerli eşdeğer devre aşağıda verildiği gibidir.



$$\boxed{i(\infty) = \frac{36}{2k+6k} = \frac{9}{2}\,\mathrm{mA}}$$

Adım 5: Kondansatör elemanının uçları arasından bakıldığında elde edilen devrenin Thevenin eşdeğer direncinin hesabı için aşağıdaki devreden R_{th} hesaplanır.



$$\boxed{R_{th} = \frac{2k*6k}{2k+6k} = \frac{3}{2}\,k\Omega}$$

Dolayısıyla devrenin zaman sabiti;

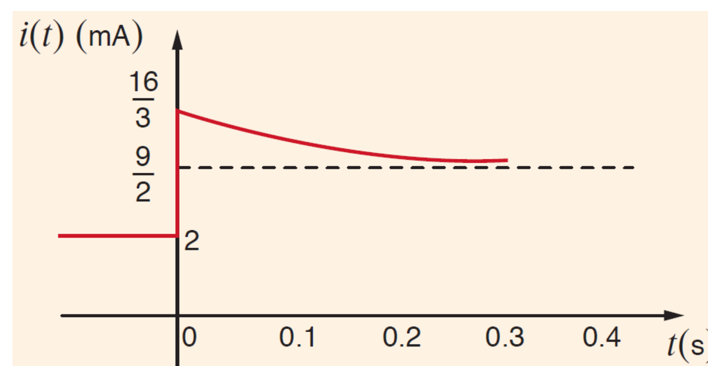
$$\boxed{\tau = R_{th}C = \frac{3}{2}k * 100\mu = 0.15s}$$

Adım 6: Hesaplanan değerler yerine koyularak çözüm aşağıdaki gibi elde edilir.

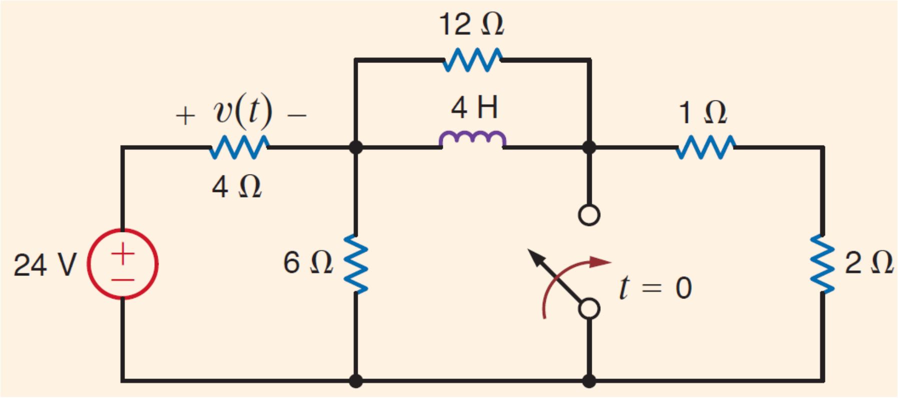
$$K_1 = i(\infty) = \frac{9}{2}\,\mathrm{mA} \qquad K_2 = i(0+) - i(\infty) = i(0+) - K_1$$

$$K_2 = \frac{16}{3} - \frac{9}{2} = \frac{5}{6}\,\mathrm{mA}$$

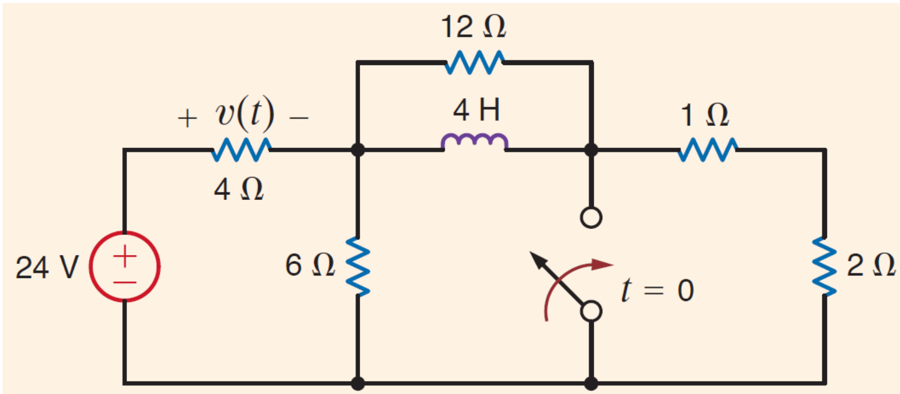
$$i(t) = \frac{36}{8} + \frac{5}{6}e^{-t/0.15}\,\mathrm{mA}$$



Örnek: Aşağıda verilen devrenin anahtar $t = 0$ anında kapatılmadan önce sürekli hal durumunda olduğu varsayılmaktadır. $t > 0$ için $v(t)$ gerilimini hesaplayınız.



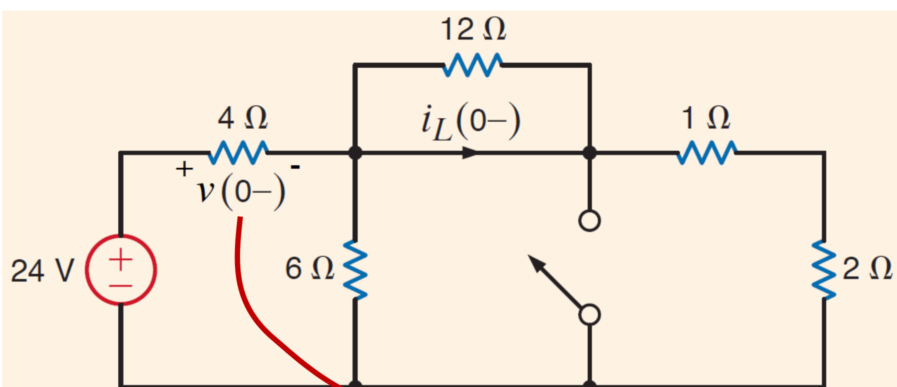
Örnek: Aşağıda verilen devrenin anahtar $t = 0$ anında kapatılmadan önce sürekli hal durumunda olduğu varsayılmaktadır. $t > 0$ için $v(t)$ gerilimini hesaplayınız.



Çözüm: Devreyi adım adım ilerleme yaklaşımı ile çözelim.

Adım 1: $v(t) = K_1 + K_2 e^{-t/\tau}$ biçimindedir.

Adım 2: Anahtar kapatılmadan önceki devrenin sürekli hal durumu için aşağıdaki devreyi çözerek endüktans başlangıç akımını $i_L(0-)$'yi hesaplayalım.

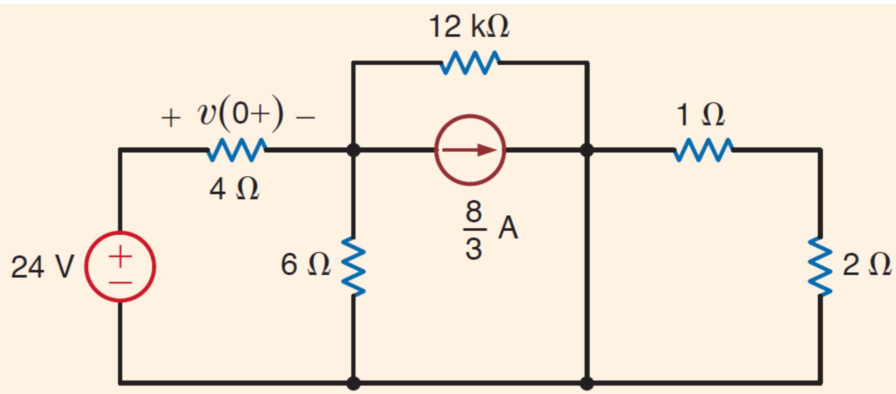


$$i_L(0-) = \frac{24}{4 + \dfrac{(6)(3)}{6+3}} \left(\frac{6}{6+3} \right) = \frac{8}{3}\,\text{A}$$

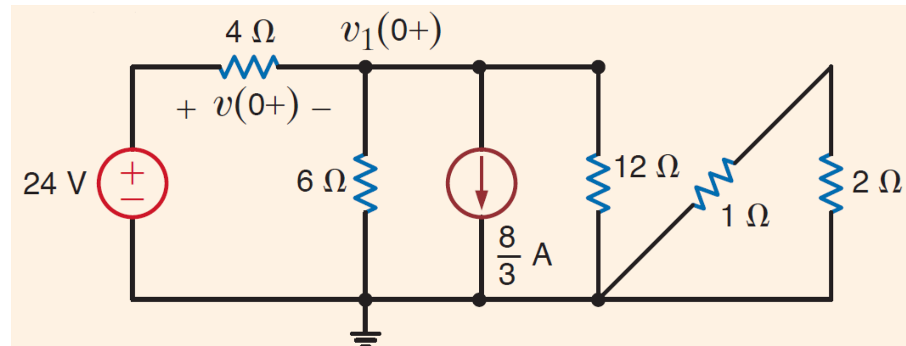
$$\boxed{v(0-) = 4\text{A} * 4\Omega = 16\text{V}}$$

Çözümün devamı…

Adım 3: Devrenin sadece $t = 0+$ için geçerli hali aşağıda görüldüğü gibi olup, endüktans yerine başlangıç değerinde akıma sabit bir akım kaynağı koyulmuştur. Burada $v(0+) = 24 - v_1(0+)$ denklemiyle hesaplanabilmektedir ve $v_1(0+)$ düğüm geriliminin hesabı için de aşağıdaki düğüm denklemi yazılmıştır.



≡



$$\frac{v_1(0+) - 24}{4} + \frac{v_1(0+)}{6} + \frac{8}{3} + \frac{v_1(0+)}{12} = 0$$

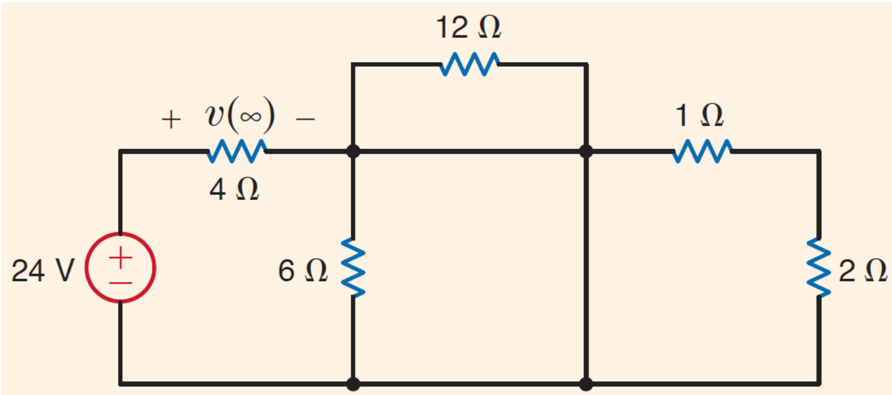
$$v_1(0+) = \frac{20}{3}\ \mathrm{V}$$

$$v(0+) = 24 - v_1(0+)$$

$$v(0+) = \frac{52}{3}\ \mathrm{V}$$

Çözümün devamı...

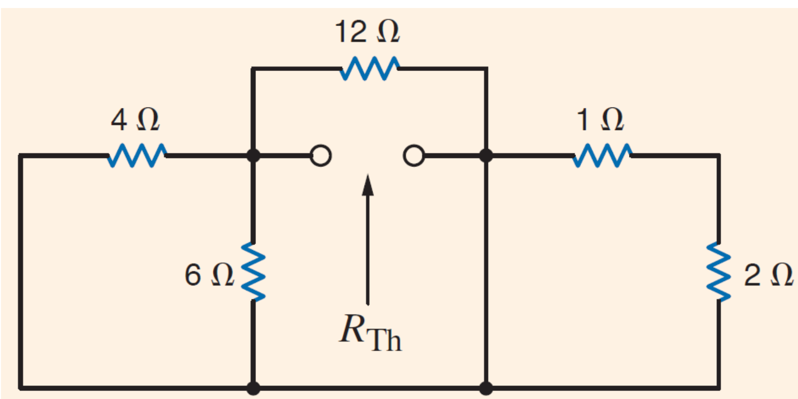
Adım 4: Anahtar kapatıldıktan sonra, $t > 5\tau$ (sürekli hal durumu) için geçerli eşdeğer devre aşağıda verildiği gibidir.



6Ω, 12Ω, 1Ω ve 2Ω ‘luk dirençler kısa devre olduğu için;

$v(\infty) = 24\ \mathrm{V}$ olarak hesaplanır.

Adım 5: Endüktans elemanının uçları arasından bakıldığında elde edilen devrenin Thevenin eşdeğer direncinin hesabı için aşağıdaki devreden R_{th} hesaplanır.



1Ω ve 2Ω ‘luk dirençler kısa devre olduğu için;

$R_{th} = 4\Omega \,//\, 6\Omega \,//\, 12\Omega$

$$R_{th} = \frac{1}{\frac{1}{4\Omega} + \frac{1}{6\Omega} + \frac{1}{12\Omega}} = 2\Omega$$

Dolayısıyla devrenin zaman sabiti;

$$\boxed{\tau = \frac{L}{R_{th}} = \frac{4}{2} = 2s}$$

Adım 6: Hesaplanan değerler yerine koyularak çözüm aşağıdaki gibi elde edilir.

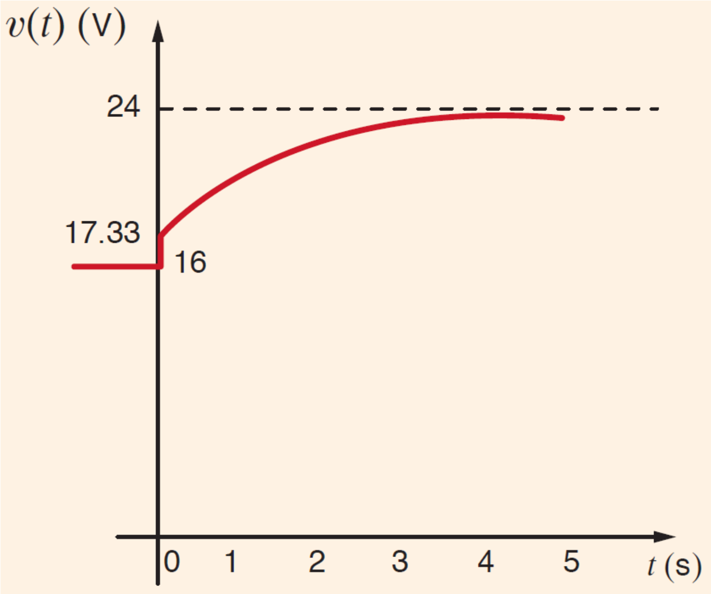
$$K_1 = v(\infty) = 24$$

$$K_2 = v(0+) - v(\infty) = -\frac{20}{3}$$

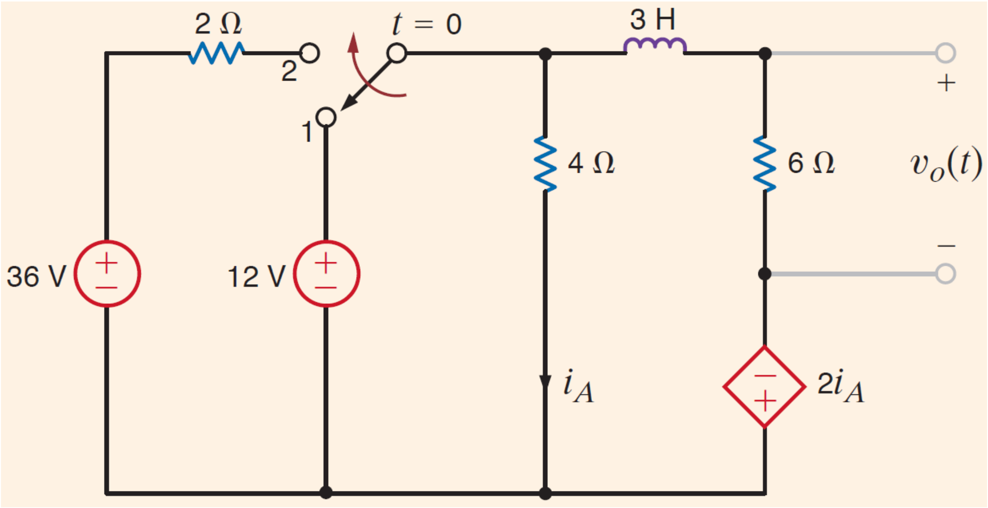
$$\boxed{\tau = \frac{L}{R_{th}} = \frac{4}{2} = 2s}$$

$$\Rightarrow \quad v(t) = 24 - \frac{20}{3} e^{-t/2} \text{ V}$$

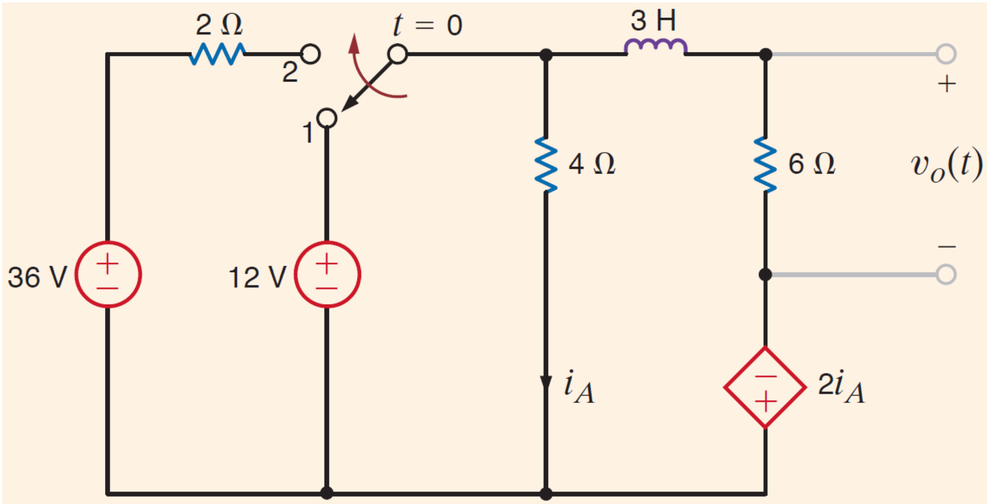
Buna göre, $v(t)$ geriliminin zamana göre değişimi aşağıdaki gibi olmaktadır.



Örnek: Aşağıda verilen devrede anahtar 1 konumunda iken kalıcı duruma ulaşmıştır. $t = 0$ anında anahtar konum 1'den konum 2'ye hareket ettirildiğine göre, $t > 0$ için $v_0(t)$ gerilimini hesaplayınız.



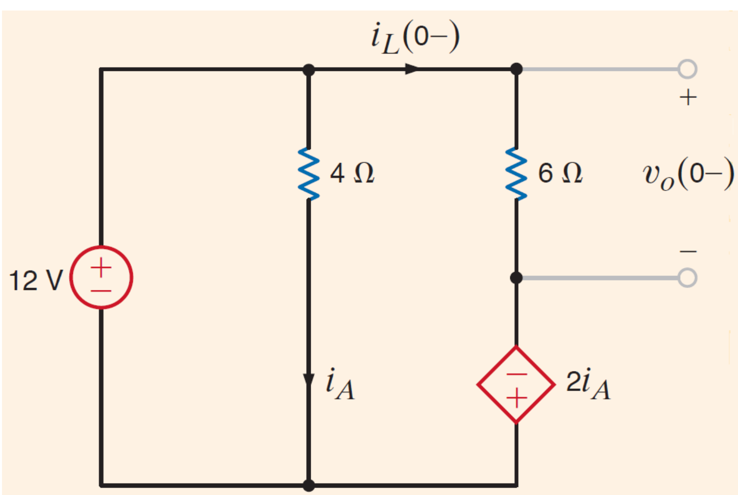
Örnek: Aşağıda verilen devrede anahtar 1 konumunda iken kalıcı duruma ulaşmıştır. $t = 0$ anında anahtar konum 1'den konum 2'ye hareket ettirildiğine göre, $t > 0$ için $v_0(t)$ gerilimini hesaplayınız.



Çözüm: Devreyi adım adım ilerleme yaklaşımı ile çözelim.

Adım 1: $v_0(t) = K_1 + K_2 e^{-t/\tau}$ biçimindedir.

Adım 2: Anahtar konum 1'de iken devrenin sürekli hal durumu için aşağıdaki devreyi çözerek endüktans başlangıç akımını $i_L(0-)$'yi hesaplayalım.



$$i_A = \frac{12}{4} = 3\text{ A}$$

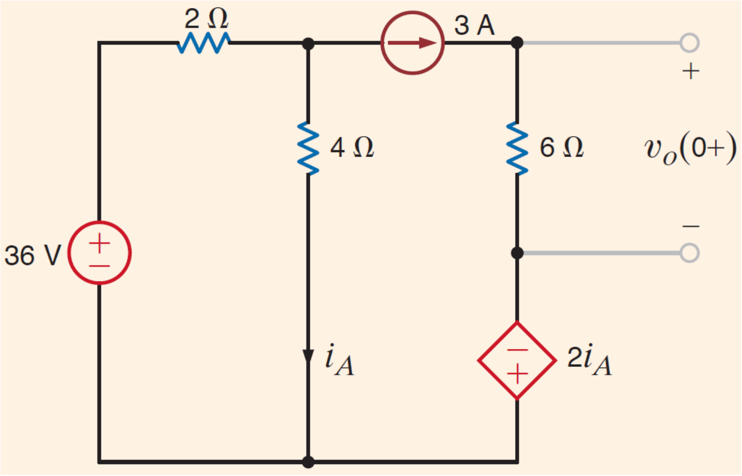
$$i_L(0-) = \frac{12 + 2i_A}{6} = \frac{18}{6} = 3\text{ A}$$

Buna göre;

$$\boxed{v_0(0-) = i_L(0-) * 6\Omega = 18\text{V}}$$

Çözümün devamı…

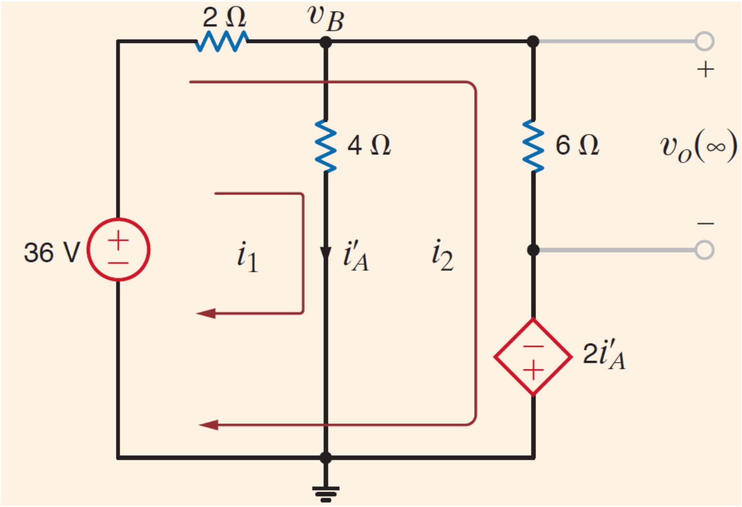
Adım 3: Devrenin sadece $t = 0+$ için geçerli hali aşağıda görüldüğü gibi olup, endüktans yerine başlangıç değerinde akıma sabit bir akım kaynağı koyulmuştur. Akım kaynağının değeri $i_L(0-) = i_L(0+) = 3\text{A}$ olmaktadır.



Akım kaynağından dolayı;

$$v_o(0+) = (3)(6) = 18\ \text{V}$$

Adım 4: Anahtar kapatıldıktan sonra, $t > 5\tau$ (sürekli hal durumu) için geçerli eşdeğer devre aşağıda verildiği gibidir.



$$36 = 2(i_1 + i_2) + 4i_1$$

$$+\quad -1/\ 36 = 2(i_1 + i_2) + 6i_2 - 2i_1$$

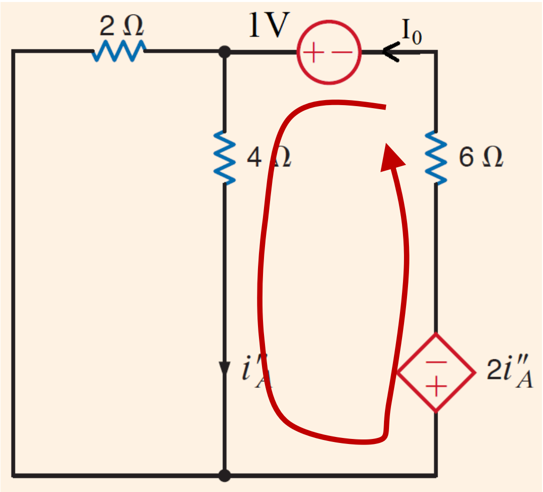
$$0 = 4i_1 - 6i_2 + 2i_1 \quad \Rightarrow \quad i_1 = i_2$$

$$8i_2 = 36 \quad \Rightarrow i_2 = 9/2\text{A}$$

$$\boxed{v_0(\infty) = 6\Omega * i_2 = 27\text{V}}$$

Çözümün devamı…

Adım 5: Devrede bağımlı kaynak olduğundan, endüktans elemanının uçları arasından görülen Thevenin eşdeğer direncinin hesabı için, çıkarılan endüktans elemanının yerine 1V değerinde bir bağımsız gerilim kaynağı bağlanmıştır. Sonuçta 1V'luk gerilim kaynağı üzerinden geçen I_0 akımı hesaplanarak Thevenin eşdeğer direnci $R_{th} = 1\text{V}/I_0$ denklemiyle elde edilir.



Bu durumda, 4Ω'luk direnç üzerinden geçen akım i''_A ise 2Ω'luk direnç üzerinden $2i''_A$ akımı akacaktır ve dolayısıyla $I_0 = i''_A + 2i''_A = 3i''_A$ olacaktır.

Kırmızı ile çizilen çevre denkleminden;

$$\left.\begin{aligned} 1 - 4i''_A - 2i''_A - 6I_0 &= 0 \\ 1 - 4i''_A - 2i''_A - 6 * 3i''_A &= 0 \end{aligned}\right\} \quad i''_A = \frac{1}{24}\text{A}$$

$$\boxed{R_{th} = \frac{1}{I_0} = \frac{1}{3i''_A} = 8\Omega}$$

Dolayısıyla devrenin zaman sabiti; $\boxed{\tau = \frac{L}{\text{R}_{\text{th}}} = \frac{3}{8}\text{s}}$

Adım 6: Hesaplanan değerler yerine koyularak çözüm aşağıdaki gibi elde edilir.

$$K_1 = v_o(\infty) = 27$$
$$K_2 = v_o(0+) - v_o(\infty) = 18 - 27 = -9$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{v_o(t) = 27 - 9e^{-t/(3/8)}\ \text{V}}$$

Örnek: Aşağıdaki devrede gerilim kaynağı $\mathrm{v_k(t)}$'nin gerilimi, aşağıda verildiği gibi değişmektedir. Anahtar $t = 0$ anında kapatılmadan önce devredeki kapasite, belirtilen yönde -2V ile doludur. Buna göre, kondansatör geriliminin [0 2] saniye arasındaki değişimini hesaplayınız ve çiziniz. Burada, $R = 1\Omega$ ve $C = 1\mathrm{F}$ değerindedir.