

BÖLÜM 5.1

FOURIER TRANSFORMASYONU

Spektrum Kavramı ve Fourier Transformasyonu

Fourier transformasyonu üzerine kurulu bu bölüm, bir önceki bölümün devamı olup **periodik olmayan** işaretlerin, özellikle de **durağan işaretlerin** (stationary signals) işaretlerin frekans içeriklerini ve özelliklerini analiz etmek üzere geliştirilmiştir. Bu bölüm aynı zamanda Fransız bilimci, Jean Baptista Joseph Fourier in 1800 li yıllarda ortaya koyduğu Fourier teori kapsamında, Fourier serisinden sonra ortaya koyduğu ikinci bölümdür. Bu amaçla, durağan ama periodik olmayan işaretlerin analizi için Fourier transformasyonu ele alınacaktır. İşaretlerin yalnızca zaman domenindeki davranışlarına bakılarak, gerekli analizlerinin yapılamayacağından yola çıkılarak, daha fazla bilgi ve detayı içeren frekans domenindeki davranışlara yönelinmektedir. Gerçekten de işaretin zaman domenindeki davranışı, çok sınırlı bilgi sağlamaktadır. İşaret hakkında daha sağlıklı bilgilendirme, frekans domenindeki davranışının incelenmesiyle mümkün olur. Bu anlamda işaretlerin frekans domenindeki davranışını mümkün kılan tekniklere ihtiyaç duyulmaktadır. Bu yüzden böyle bir imkanı sağlayan teknik olarak Fourier serisinin ardından, bu bölümde benzer, hatta daha fazla özellikteki Fourier transformasyonu ele alınacaktır.

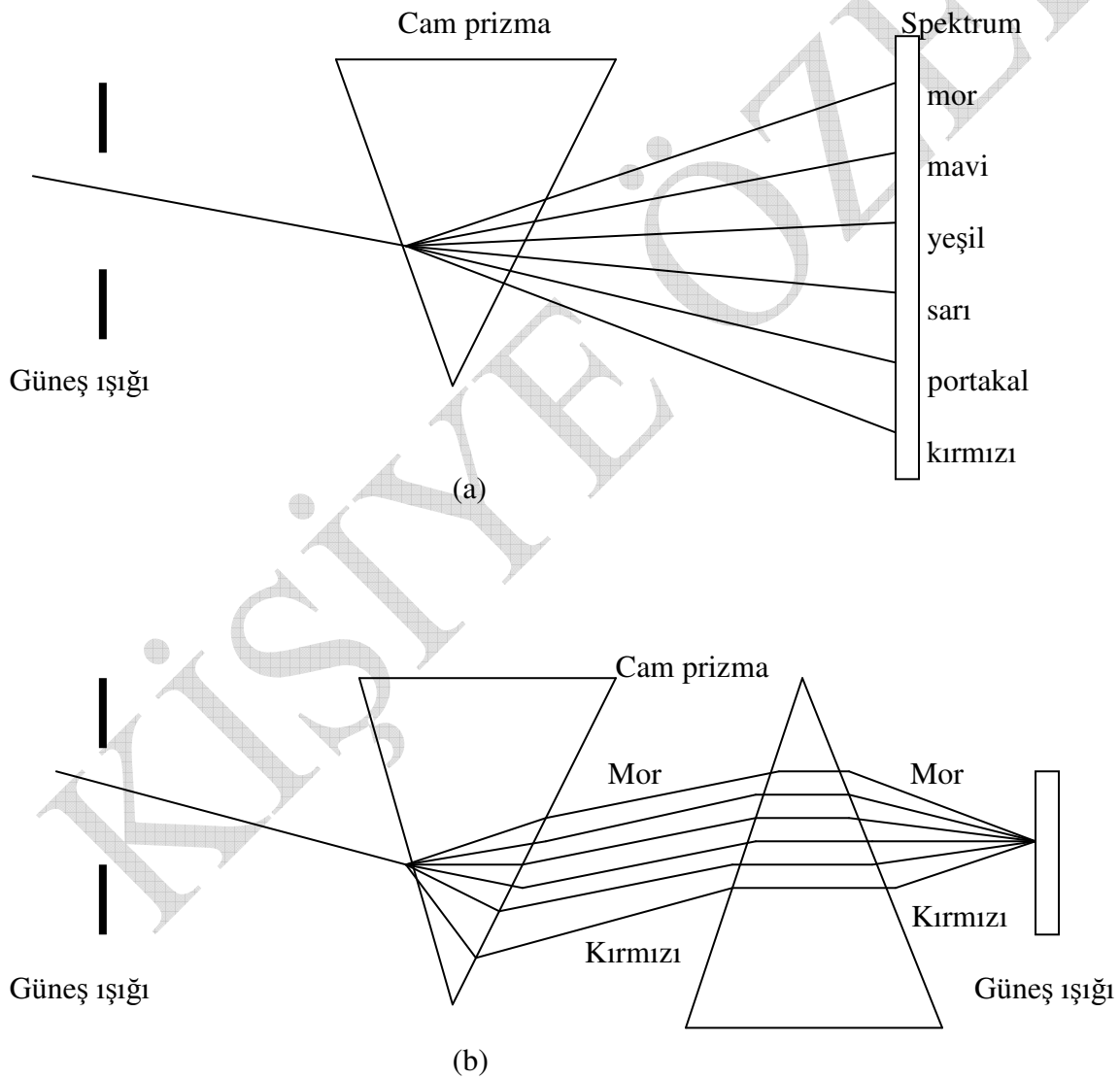
Değindiği gibi Fourier transformasyonu işaretlerin frekans domenindeki davranışı üzerine yararlı bir tekniktir. Bu anlamda sistem analiz ve incelemelerinde yoğun başvuru alan yöntemlerdendir. Özellikle sistem olarak **tam kararlı sistemlerin** analizlerinde kullanılan yararlı bir tekniktir. Bu özelliğiyle sistem olarak frekans filtrelerinin analizlerinde, sistem frekans cevabı altında incelenen Fourier transformasyonu çok önemlidir. Sistem olarak filtreler, frekans domenindeki davranışlarına göre analiz ve dizayn edilirler. Gerek analog gerekse dijital (ayrık) filtre tasarımlarında Fourier transformasyonunun rolü önemlidir.

Fourier serisinin anlatıldığı bölümde çeşitli periodik işaretler, bir temel frekansa sahip sinusoid işaretlerin çeşitli katlı harmoniklerini toplamı olarak ifade edildiği, periodik bir işaret çeşitli frekanstaki (sinusoid) işaretlerin toplamından oluştuğuna göre, toplam işaretin içerdiği işaretlerin veya frekans bileşenlerinin analiz edilmesi gerekmektedir.

Buna göre herhangi bir periodik işaret çeşitli harmonikteki sinusoidlerin toplamından oluştuğundan, periodik işaretlerin bu sinusoidlerin frekansları ve frekansların ağırlıkları cinsinden analiz edilmesi gerekmektedir. Periodik bir işaretin hangi frekanstaki sinusoidlerden oluştuğunu analiz etmek amacıyla kullanılan tekniklerin mevcut olduğunu bunlardan birinde Fourier transformasyonu olduğu vurgulanmıştı. Burada bundan dolayı Fourier serisinin aksine, bu kez periodik olmayan işaretlerin hangi frekans ve ağırlıktaki $\sin \omega t$ ve $\cos \omega t$ gibi **periodik, durağan** aynı zamanda **ortogonal** özellikteki sinusoidlerden elde edildiği analiz edilecektir. Bunun için bu tekniklere ışık tutacak, ön bilgileri inceleyerek analize başlamak yararlı olacaktır.

İşaretlerin analiz ve sentezleri çok eski yıllarda yapılan, ortaya konulan ve ispat edilen teorilerdir. Fourier transformasyon ve Fourier serisi LTI sistemlerin dizayn ve analizlerindeki en önemli teorilerdendir. Bu teorilerde işaretler sinusoidal veya exponeysiyel dekompozisyonlardan oluşurlar. Yani işaretler sinusoidal harmoniklerin süperpozisyonundan oluşmaktadır. Bu şekilde işaretler frekans domeninde gösterilirler. İşaretler gerek sürekli gerek ayırık olmak üzere bu yapıda frekans domeninde gösterilmektedirler.

Frekans analiz yönteminde 1672 de Isaac Newton güneş ışığının gök kuşağını oluşturan renklerle ortaya çıkmasıyla ilk “spektrum” kavramını ortaya atmıştır. Buna göre spektrum gök kuşağında ortaya çıkan her bir rengin sahip olduğu sürekli renk bandları olarak tanımlanmıştır. Buna göre fizikten de biliyoruz ki, gök kuşağı örneğinde olduğu gibi her bir renk görünür şekildeki bir frekansa karşılık gelmektedir. Böylece güneş ışığının oluşturduğu renkler, frekans analizini oluşturmaktadır. Buna ilişkin yapı aşağıdaki şekilde verilmiştir.



Şekil 1 (a):Güneş ışığının renklere ayrılımı(dekompozisyon), ve (b):renklerinden oluşumu

Şekil (a) da güneş ışığının (beyaz ışık) kendisini oluşturan renklere dağılımı (dekompozisyon) görülmektedir. Burada güneş ışığı ters duran bir cam prizmadan geçirilmesiyle kendisini oluşturan işaretlere ayrıldığı görülmektedir. Bu renkler (violet, mavi, yeşil, sarı, portakal ve kırmızı) biçiminde oluşmuştur. Her biri görünür olan bu renklerin her biri farklı frekanslara karşılık gelmektedir. Bu renklerin yer aldığı uzaya spektrum adı verilmektedir. Bu işlem analiz olarak anılmaktadır. Burada güneş ışığı $f(t)$ işareti, cam prizma Fourier transformasyonu ve spektrum da $F(\omega)$ olarak düşünülürse olan işlem

spektrum = Fourier transformasyon {gunes isigi}

$$F(\omega) = F\{f(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

Şekil (b) de ise bu kez, birinci ters durumdaki prizmadan geçen ilgili renklerin (işaretlerin) frekans olarak ikinci düz durumdaki bir cam prizmadan tekrar geçirilmesiyle bu kez de orijinal işaretin (güneş ışığının) renklerinden elde edildiği görülmektedir. Burada ikinci prizma invers Fourier transformasyon özelliğindedir. Bu işlem sentez olarak anılmaktadır. Bunu da yukarıdaki gösterime uygun ifade edersek

Gunes isigi = invers Fourier transformasyon {Fourier transformasyon {gunes isigi}}

veya

Gunes isigi = invers Fourier transformasyon {spektrum}

$$f(t) = F^{-1}\{F\{f(t)\}\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

FOURIER TRANSFORMASYONU

Bu bölümde işaret spektrum analizinin ikinci adımına geçmiş bulunuyoruz. Fourier serisi ile periodik işaretlerin spektrum analizi yapılmıştı. Şimdi periodik olmayan işaret analiz üzerine yoğunlaşmaya çalışacağız. Bunun için periodik işaret analizdeki birikimlerimizden yararlanmaya çalışacağız. Hatırlayacağımız gibi, periodik ve durağan işaret analiz yöntemini, sinusoidleri içeren trigonometrik seriler üzerine kurulu ve bir tür harmonik analiz yöntemi olarak gördüğümüz Fourier serisi aracılığıyla yapmıştık. Bu analiz periodik dolayısıyla durağan işaret üzerine üzerineydi. Bu bölümde ek olarak durağan gibi algılanabilecek ama periodik olmayan işaretlerin analizi yapılmaya çalışılacaktır. Bu anlamda kullanılan yöntem **Fourier transformasyonu** olarak bilinir. Fourier isminin önce seri sonra da burada transformasyon adı altında ortak bir kavram olarak ortaya çıktığını görmekteyiz. Daha önce periodik fonksiyonlar için Fourier serisini geliştiren Fransız Jean Baptiste Joseph Fourier, bu kez benzer yaklaşımı periodic olmayan fonksiyonlara uyarlayarak Fourier transformasyonunu geliştirmiştir.

Fourier transformasyonunda da amaç, verilen orijinal periodik olmayan bir fonksiyonun harmonikleri dolayısıyla çeşitli frekanslardaki hangi $\sin \omega t$ ve $\cos \omega t$ gibi periodik, durağan aynı zamanda ortogonal sinusoidlerden oluştuğunu ortaya koymaktır. Bu teoremin geliştirilmesi, Fourier serisi ile çok yakından alakalıdır. Fourier transformasyonu bu yapılırken, aynı zamanda burada da bir şekilde harmonik ve katsayı analizi yapılmaktadır. Sonucunda Fourier transformasyonu verilen işaretin hangi aralıktaki (bantdaki) frekanslardan (harmonikler gibi) oluştuğunu incelemek mümkün olduğu gibi, ek olarak periodik olmayan orijinal işaretin hangi sinusoidlerden oluştuğunu da Fourier serisindeki gibi bulmak mümkün olmaktadır.

Fourier Serisi ve Transformasyonu İlişkisi

Birbiriyle adeta içi içe olan seri ve transformasyon kavramlarını açmakta ve farklarını belirlemek faydalı olacaktır. Hatırlayacağımız gibi, Fourier serisinin amacı kare, rampa, impuls veya üçgen dalga gibi orijinal bir $f(t)$ işaretinin karşılığını gerek

$$f_s(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t$$

gerekse

$$f_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n e^{j\omega_0 n t}$$

formlarından biriyle gösterebilmek üzerine kurulmuştur. Her iki gösterimle elde edilen $f_s(t)$ işaretinin ideal yaklaşımda orijinal $f(t)$ işaretine eşit olduğu kabul edilir veya beklenir.

$$f(t) = f_s(t)$$

Bunu sağlamak üzere $(-\infty, \infty)$ veya $(0, \infty)$ aralığında sonsuz tane sinusoid terim dolayısıyla harmonik göz önüne alınmaktaydı. Hatta pratikte bunun zorluğundan dolayı $f(t) = f_s(t)$ yerine ancak

$$f(t) \cong f_s(t)$$

olabildiği kabul edilmektedir. Dolayısıyla her zaman ikisi arasında küçük de olsa, optimize de edilse bir hata değerinin olduğu kaçınılmazdır.

$$f(t) - f_s(t) = \text{hata}$$

Bunların ideal yapılması durumunda da Fourier serisi en mükemmel halde bile ancak orijinal işaretin aynısını verecek harmonik yapıdaki sinusoidlerin süperpozisyonunu gösteren bir seridir. Önemli ayrıntı, burada orijinal işaret başka bir forma dönüştürülmemektedir. Yani orijinal işaretin eşiti veya dengi durumundaki Fourier serisi frekansa dayalı harmoniklerden oluşsa bile, aslında orijinal işaret frekans uzayına (domenine) dönüştürülmemiştir. Yani $f(t)$ işareti, başka bir uzaya yada domene örneğin frekans uzayındaki $f_s(t)$ Fourier serisine dönüştürülmemiştir. Dikkat edilirse $f(t)$ ve $f_s(t)$ arasındaki $f(t) \Rightarrow f_s(t)$ yazımı hiçbir

zaman dönüşüm değildir. Transformasyonun varlığını aşağıdaki ifadelerle de gösterebiliriz. Fourier serisinin geçerli olduğu yani transformasyonun olmadığı durum

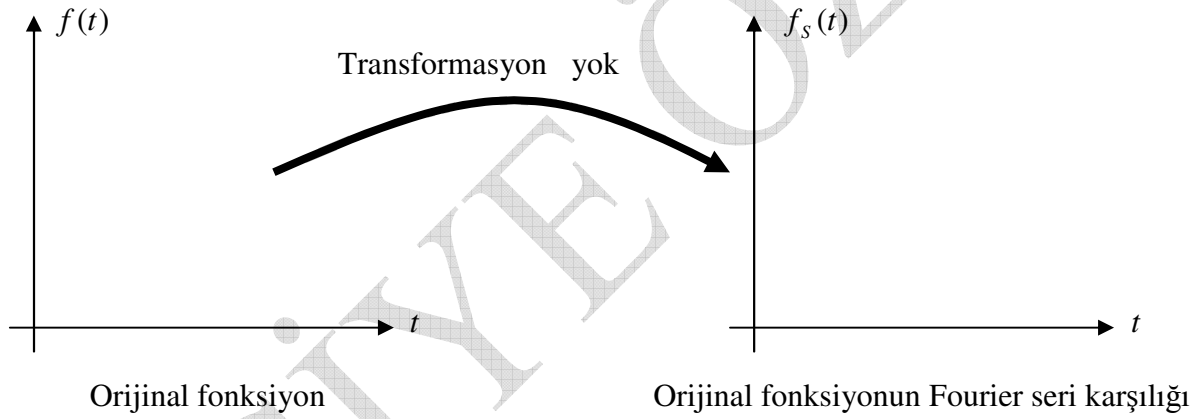
$$f(t) \Rightarrow f_s(t) \neq \text{transformasyon}$$

ile gösterilebilir. Çünkü dönüşüm olabilmesi için örneğin

$$f(t) \Rightarrow F(\omega) = \text{transformasyon}$$

benzeri bir ifadenin varlığı gerekir. Böyle bir yazımda zaman domeninden frekans domenine olan dönüşüm vurgulanmaktadır ($t \Rightarrow \omega$). Dolayısıyla Fourier serisindeki $f(t) \Rightarrow f_s(t)$

ifadesi bu nedenle dönüşümü yani transformasyonu göstermez. $f(t)$ işareti, yine aynı zaman (t) domeninde, tek farkla frekans bilgisini içeren harmoniklerle gösterilmiştir.



Şekil 2 Fourier serisi : $f(t) \Rightarrow f_s(t)$

Şekilden görüldüğü gibi Fourier serisi iki aynı domende bir ifadenin başka bir alternatifle gösterilmesidir. Yani orijinal $f(t)$ fonksiyonu, yeni hali olan $f_s(t)$ ile farklı bir içeriği veya fonksiyonu göstermemektedir. Dolayısıyla bir transformasyon veya dönüşümden söz etmemiz mümkün değildir. Oysaki Fourier transformasyonunda $f(t)$ işareti başka bir uzay olarak frekans domenine dönüştürülmektedir.

$$f(t) \Rightarrow F(\omega)$$

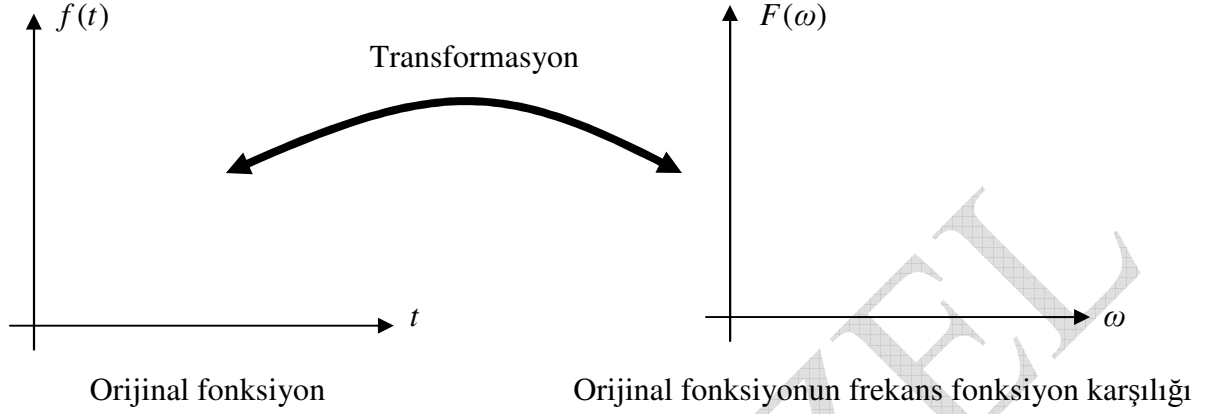
Hatta bu dönüşüm çift yönlüdür. Yani aynı zamanda frekans domeninden, zaman domenine dönüşüm söz konusudur.

$$f(t) \Leftarrow F(\omega)$$

Dolayısıyla dönüşüm çift yönlü olduğundan

$$f(t) \Leftrightarrow F(\omega)$$

Fourier transformasyonu olarak anılmaktadır. Bunu şeklen aşağıda da görmekteyiz.



Şekil 3 Fourier transformasyonu : $f(t) \Leftrightarrow F(\omega)$

Görülebileceği gibi bir $f(t)$ fonksiyonu içeriği frekans olan $F(\omega)$ gibi başka bir fonksiyona dönüştürülmektedir ($f(t) \Rightarrow F(\omega)$). Bununla da yetinilmeyip tersinin de mümkün olduğu vurgulanmaktadır ($f(t) \Leftarrow F(\omega)$). Her ikisinin sonucunda yapılan işlemin karşılıklı bir dönüşümü içermesi dikkati çekmektedir ($f(t) \Leftrightarrow F(\omega)$). Fourier serisinde bu karşılıklılığı yani tersi durumu çağrıştıracak bir mekanizma söz konusu değildir.

Karşılıklı dönüşümün ilk adımı zaman domeninden, frekans domenine geçiş şeklindedir. Bunu sağlayan ifade ise örneğin zaman domenindeki işareti frekansa dönüştürecek $f(t) \Rightarrow F(\omega)$ formunun

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

denklemleriyle sağlandığı görülmektedir. Bununla zaman domenindeki $f(t)$ işaretinin $F(\omega)$ frekans karşılığı elde edilmiştir. Ters dönüşüm yani $F(\omega) \Rightarrow f(t)$ durumunun ise

$$f(t) = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

denklemleriyle mümkün olduğunu görmekteyiz. Bununla da tam tersi olarak bu kez $F(\omega)$ frekans domenindeki işaretinin $f(t)$ zaman karşılığı elde edilmiştir. Bu şekilde zaman veya frekansa bağlı bir ifadeyi her iki halde de bir birine dönüştürebilmekteyiz. Böyle bir amaç veya ihtiyaç Fourier serisinde söz konusu değildir.

Fourier transformasyonu bu yolla hem dönüşüm yapmakta, hema Fourier serisi gibi orijinal işaretin hangi frekansları içerdiğini, hem de işaretin hangi sinusoidlerden oluştuğuna dair bilgide vermektedir. Hangi frekansları içermesi Fourier serisinde harmonik yaklaşımıyla verilirken burada harmoniklerin karşılığı, ω_0 temel frekans (temel harmonik) olmak üzere

$$\omega = n\omega_0$$

teriminin içersinde saklıdır. Diğer yandan Fourier serisindeki sinusoidlerin varlığı da yine $F(\omega)$ denklemindeki $e^{-j\omega t}$ teriminin içersinde saklıdır. Çünkü Euler denkleminden

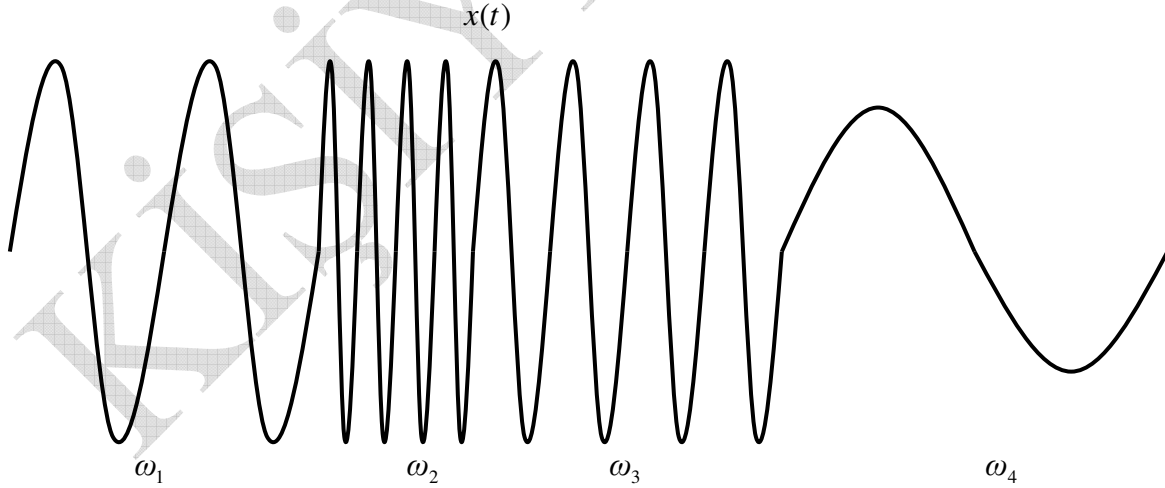
$$e^{j\omega t} = \cos \omega t + j \sin \omega t$$

$$e^{-j\omega t} = \cos \omega t - j \sin \omega t$$

ifadelerinin Fourier serisindeki sinusoidleri $e^{-j\omega t}$ ile içerdığını biliyoruz. Dolayısıyla Fourier transformasyonu her ne kadar Fourier serisinden ana fark olarak periodic olmayan işaretler için geliştirilmesi gösterilse de, bununla beraber özünde aralarında bir çok ortak ve güçlü noktaların da var olduğu görülmektedir. Benzerlikler sinusoid ve harmonikleri kullanmaları, farklılık ise Fourier serisinin transformasyon özelliği olmaması düşünülebilir. Bunların yanı sıra aralarında vurgulanabilecek bir de avantaj durumu vardır. Fourier transformasyonunun farklı bir amaç olarak periodic olmayan işaretler için düşünülmesine karşın, aynı zamanda bunu gerçeklemek üzere periodic işaretlerin özelliklerinden faydalanması, önemli bir avantajdır.

Fourier Transformasyonuna Uygun Olmayan İşaretler

Eğer bir işaret periodic, dolayısıyla durağan değilse, Fourier transformasyonu yöntemiyle zaman ve frekans analizlerinin yapılması mümkün değildir. En azından yapılmaya çalışılsa bile sağlıklı bir analizden söz edilmesi mümkün olmayacaktır. Buna uygun olarak aşağıdaki işaret örnek gösterilebilir.

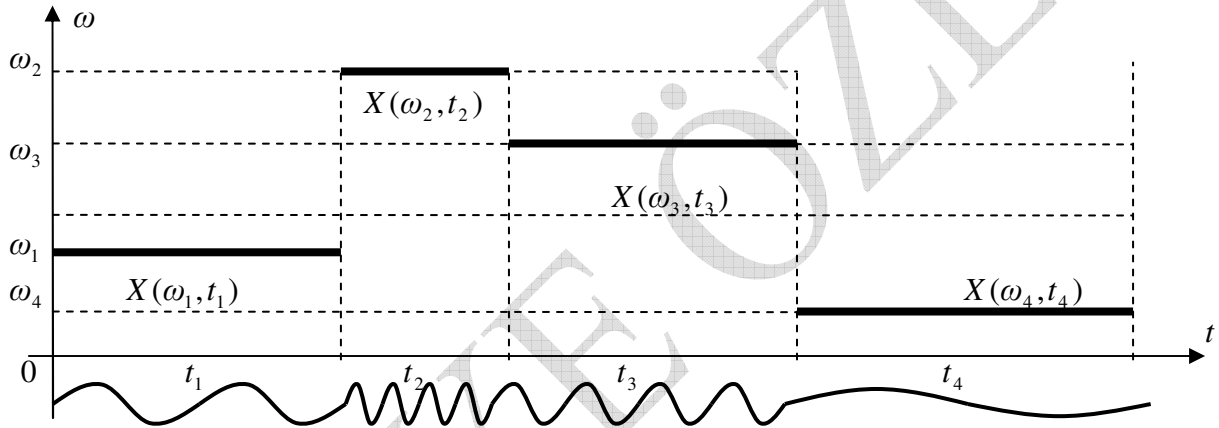


Şekil 4 Durağan olmayan işaret

Görüldüğü gibi $x(t)$ işareti belki görünüm itibariyle toplam olarak periodic olmadığından, Fourier transformasyonuna uygun düşünülebilir. Ancak işaretin aynı zamanda durağan olmayan (nonstationary) özelliği, Fourier transformasyonu ile analizini mümkün kılmaz.

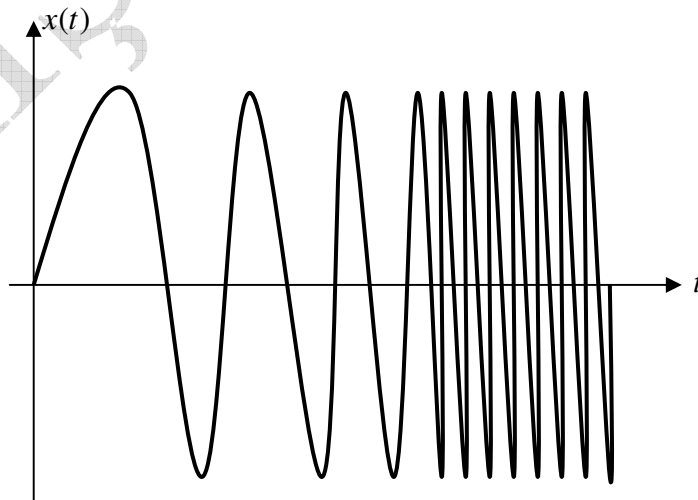
Görüldüğü gibi bu tip işaretin frekansı zamanla değişmektedir. Oysa, sorun sayılabilecek bu durumla, $\sin \omega t$ ve $\cos \omega t$ gibi periodik ve durağan sinusoidler kapsamında karşılaşılmadığı için, klasik sinusoidlerin her tür analizi mümkün olmuştur. Bundan dolayı, periodik ve durağan işarettaki gibi sabit frekans ve fazın zamanla değişmediği klasik sinusoidlere uygulanan analiz teknikleri, yukarıdaki şekildeki gibi parametreleri zamanla değişen, diğer bir deyişle durağan olmayan işaretler için yeterli olmayacaktır.

Bu tip işaretlerin analizleri Fourier transformasyonundan ziyade, $X(t, \omega)$ özellikli aynı anda hem zaman hem frekans analizini yapabilen, daha önce de vurgulandığı gibi **Hilbert transformasyonu**, “**kısa zamanlı Fourier transformasyonu** (short-term Fourier transform, STFT)”-spektrogram, **Gabor teori**, “**Wigner-Wille yöntemi**” ve “**Wavelet teori**”-skologram tipli ileri işaret işleme teknikleriyle mümkün olmaktadır. Bunlara ek olarak anlık frekansında kullanılabileceğini söyleyebiliriz. Bunların uygulanmasını mümkün kılan $X(t, \omega)$ spektrumunun aşağıdaki gibi olacağını önceki bölümden biliyoruz.



Şekil 5 Durağan olmayan $x(t)$ işaretinin $X(t, \omega)$ zaman-frekans domeni

Buna uygun durağan olmayan işaret olarak sıkça duyduğumuz **chirp** tipli işareti örnek gösterebiliriz.



Şekil 6 Chirp işareti : $x(t) = \sin\left(2\pi\left(f_0 + \frac{k}{2}t\right)t\right)$

Görüldüğü gibi durağan olmayan, diğer bir deyişle frekansı zamanla değişen bu işaretin analizi için Fourier serisi ve transformasyonu yetersiz kalmaktadır. Daha ziyade yukarıda sayılan ileri işaret işleme tekniklerinden biri uygulanabileceği gibi, anlık frekans yaklaşımından da yararlanılabilir. Bu açıdan frekans veya faz modülasyonlu işaretlerin durağan olmayan işaretlere örnek olabileceğini biliyoruz.

Fourier Transformasyonu Ön Bilgileri

Şu ana kadar sürekli formdaki periodik işaretlerin frekans analizleri yapıldı. Periodik bir işareti pratik olarak

$$(x + kT) = x(t)$$

biçiminde gösterebilmekteyiz. Şimdi yine sürekli ama periodik olmayan

$$(x + kT) \neq x(t)$$

özelliğindeki işaretlerin frekans yada spektrum analizleri üzerinde duracağız. Bunun için Fourier serisi bölümündeki bazı bilgilerimizi kısaca hatırlamaya çalışalım. Sürekli T_0 periodlu işaretlerin frekans analizleri yapılırken işaretin,

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega_0 t + \theta_n) + b_n \sin(n\omega_0 t + \theta_n)$$

$$f(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(n\omega_0 t + \theta_n)$$

veya kompakt form olarak

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n e^{j\omega_0 n t}$$

Frekans spektrumunu gösteren katsayıların da

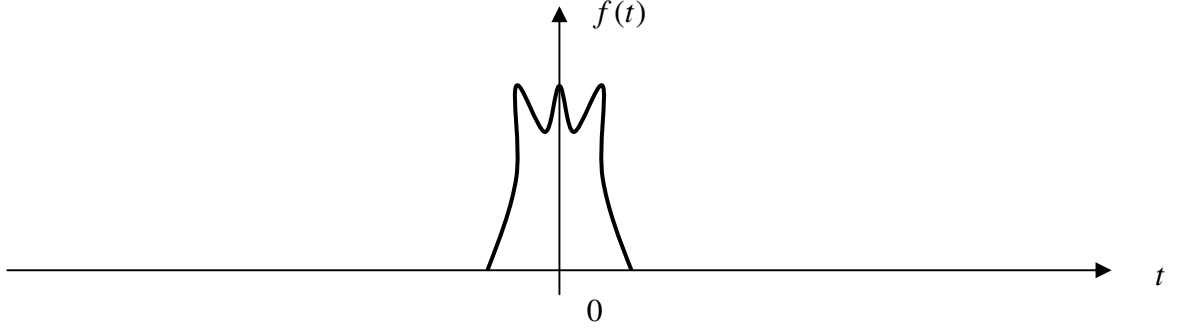
$$a_n = \frac{2}{T_0} \int f(t) \cos n\omega_0 t dt$$

$$b_n = \frac{2}{T_0} \int f(t) \sin n\omega_0 t dt$$

veya kompakt formdaki karşılığı olarak

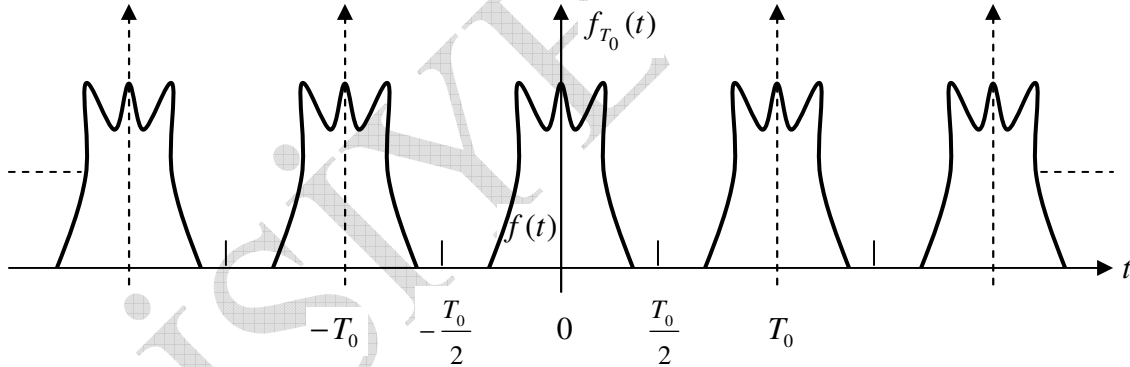
$$D_n = \frac{1}{T_0} \int f(t) e^{-j\omega_0 n t} dt$$

olduğunu Fourier serilerinden biliyoruz. Burada eksponensiyel ifadenin $e^{j\omega_0 n t}$, ω_0 temel frekanslı trigonometrik sinusoidal fonksiyon tabanlı basis ama orthogonal basis fonksiyon olduğunu biliyoruz. Bu yaklaşımların hepsi periodic sürekli fonksiyon veya linear zamandan bağımsız (LTI) sistemler için geçerli olduğunu biliyoruz. Şimdi aşağıdaki gibi periodic olmayan sürekli bir $f(t)$ işareti alalım.



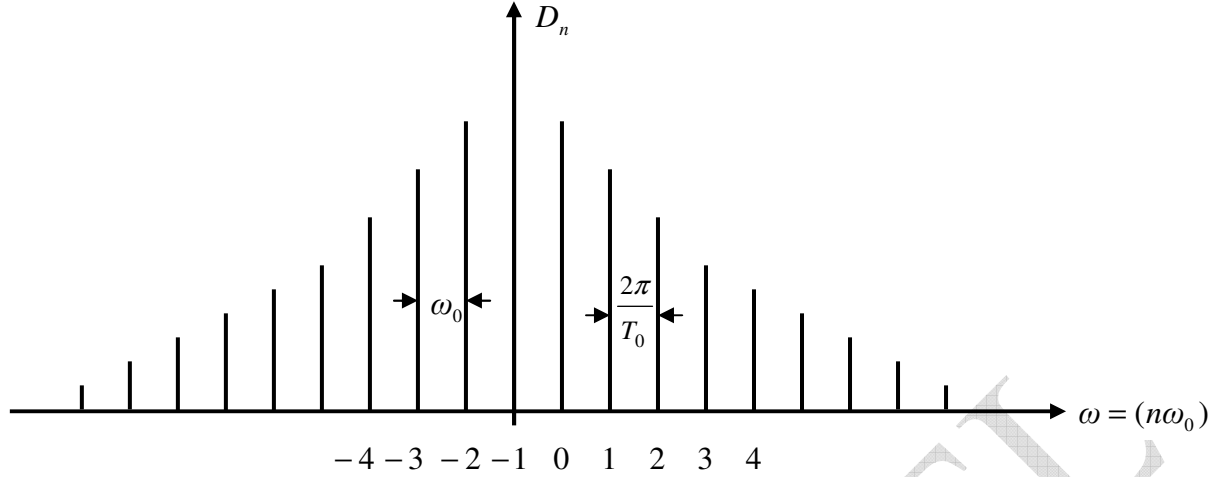
Şekil 7 Periodik olmayan sürekli işaret

Görüldüğü gibi $f(t)$ periodic değildir. Ancak bu işareti başka bir yaklaşımla periodic biçimde Fourier serisine uygun olarak görmek mümkündür. Periodic olmayan $f(t)$ işaretinin, T_0 periodlu $f_{T_0}(t)$ işareti içinde tekrarlandığı yeni bir $f_{T_0}(t)$ işareti tanımlayalım. Diğer bir deyişle $f_{T_0}(t)$ işareti, $f(t)$ periodic olmayan işareti, T_0 zaman aralıklarıyla tekrar eden periodic bir işarettir. Buna göre $f(t)$ işareti, $f_{T_0}(t)$ işareti içerisinde T_0 aralıklarıyla tekrarlanacak ve $f_{T_0}(t)$ periodic biçime sokulmuş $f(t)$ lerden meydana gelmiş olacaktır. Fourier serisini yukarıda verilen ilk şekile göre baz alan yaklaşımın grafik görüntüsü aşağıdaki gibi olacaktır.



Şekil 8 Periodik olmayan sürekli işaretin periodic görüntüsü

Görüldüğü gibi $f_{T_0}(t)$ işareti T_0 periodlu $f(t)$ işaretinin tekrarlarından oluşmaktadır. Bu yapı işaret periodik olmamasına rağmen Fourier serisini çağrıştırmaktadır. Bu yüzden periodik olmayan işaretlerin analizinde de Fourier seri yaklaşımı kullanılabilir. Diğer yandan $f_{T_0}(t)$ Fourier serisinin olası D_n spektrumu da aşağıda verilmiştir.



Şekil 9 Fourier serisinde ayırık D_n spektrumu ($\omega_0 = 2\pi/T_0$)

Spektrum incelendiğinde D_n spektrumunun doğal olarak ayırık olduğu görülmektedir. Yine, yatay eksenin ω_0 temel frekansın harmonikleri olan $\omega = (n\omega_0)$ olarak gösterildiği dikkati çekmektedir. Bununla beraber yine gördüğümüz gibi spektrumda yer alan harmonikler bir birlerinden ω_0 veya $\omega_0 = 2\pi/T_0$ lık frekans farklarıyla ayrılmaktadır. Zaten bu yüzden yani olması gereken ω_0 farkından dolayı, Fourier serisinin spektrumu ayırık çıkmıştır. Biz bu bölümde Fourier serisine ait gerek zaman domenindeki $f_{T_0}(t)$ ve frekans domenindeki D_n domenlerinin nasıl değiştiğini araştıracağız.

Buna göre yukarıda verilen periodik $f_{T_0}(t)$ Fourier serisinin, periodik olmayan $f(t)$ işaretini oluşturacak yaklaşımın, aşağıdaki denklem üzerine kurulu olduğunu görmekteyiz.

$$\lim_{T_0 \rightarrow \infty} f_{T_0}(t) = f(t)$$

Bu ifadeden de görüldüğü gibi, perioditenin sonsuza gitmesi durumunda asıl $f(t)$ işaretinin dışındaki tekrarları söz konusu olmayacağından $f_{T_0}(t)$ Fourier serisine rağmen $f(t)$ elde edilecektir veya böyle bir Fourier serisi $f(t)$ yi oluşturacaktır. Buradan

$$\left. \begin{array}{l} T_0 \rightarrow \infty \\ \lim_{T_0 \rightarrow \infty} \end{array} \right\} \text{periodiksizleştirme}$$

olarak düşünülebilir. Çünkü $f_{T_0}(t)$ Fourier serisi bu yolla periodiksizleştirilmektedir. Bunun anlamı Fourier serisindeki her bir periodik işaretin periodu o kadar büyük seçilir ki, işaret uzayı sanki bir tane periodik olmayan işaretten oluşuyormuş gibi görünür. Bu durumda işaretin perioditesi $(-T_0/2, T_0/2)$ aralığında olacaktır. Bu durumda $\lim_{T_0 \rightarrow \infty}$ için $f_{T_0}(t)$ Fourier serisi

$$f_{T_0}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n e^{j\omega_0 n t}$$

ve buna uygun D_n katsayısı

$$D_n = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} f_{T_0}(t) e^{-j\omega_0 n t} dt$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \text{spektrumdaki harmonikler arası frekans mesafesi}$$

Buna göre birinci şekildeki $f(t)$ işareti, $\lim_{T_0 \rightarrow \infty}$ için $(-T_0/2, T_0/2)$ aralığında $f_{T_0}(t)$ ile gösterilen integrasyonun aynısı olur. Diğer bir deyişle $(-\infty, \infty)$ aralığındaki $f(t)$ nin integrasyonu, $(-T_0/2, T_0/2)$ aralığındaki $f_{T_0}(t)$ nin integrasyonuna denktir.

$$\frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} f_{T_0}(t) e^{-j\omega_0 n t} dt = \frac{1}{T_0} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega_0 n t} dt$$

Çünkü söz konusu fonksiyonumuz $f(t)$ bu aralıktadır. Bu haliyle durum yalnızca “sıfır” değeri için var olan impuls fonksiyonunun $\delta(t)$ dar bir aralık yerine daha geniş $(-\infty, \infty)$ aralığına rağmen değerinin aynı “1” olması durumuna benzemektedir ($\int \delta(t) dt = 1$). Bu durumda katsayı ifadesi artık aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$D_n = \frac{1}{T_0} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega_0 n t} dt$$

Bu bağıntıdan biliyoruz ki D_n nin spektrumu ayrıktır. Her bir bileşenin frekans genişliği düzgün ama harmoniklerden dolayı belli mesafedeki frekanslara göre spektrumdaki yerlerini almışlardır. Dolayısıyla bu da D_n katsayısını ayrık formda oluşturur. Aynı bağıntıdan frekansa (ω) bağlı bir ifade olarak $F(\omega)$ aşağıdaki gibi sürekli formda yazılabilir.

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

Bunun anlamı Fourier serisini oluşturan bileşenlerin harmonikleri sıfıra çok yakın olacak kadar küçük değerlerden oluşmaktadır. Diğer bir deyişle harmonikler arasındaki fark sıfır denebilecek kadar küçüktür ($n\omega_0 \rightarrow 0$ veya $\Delta n\omega_0 \cong 0$). $n\omega_0$ değerleri arasındaki fark veya değişimi sıfıra çok yakın değerlerden oluştuğu için sürekli bir frekans yoğunluğu $\omega (\omega \rightarrow n\omega_0)$ varmış gibi bir durum hasıl olduğundan bu durum $F(\omega)$ fonksiyonuyla gösterilmiştir. Buna göre katsayı ifadesi D_n aşağıdaki gibi olacaktır.

$$D_n = \frac{1}{T_0} F(\omega) = \frac{1}{T_0} F(n\omega_0) = \frac{1}{T_0} F\left(n \frac{2\pi}{T_0}\right)$$

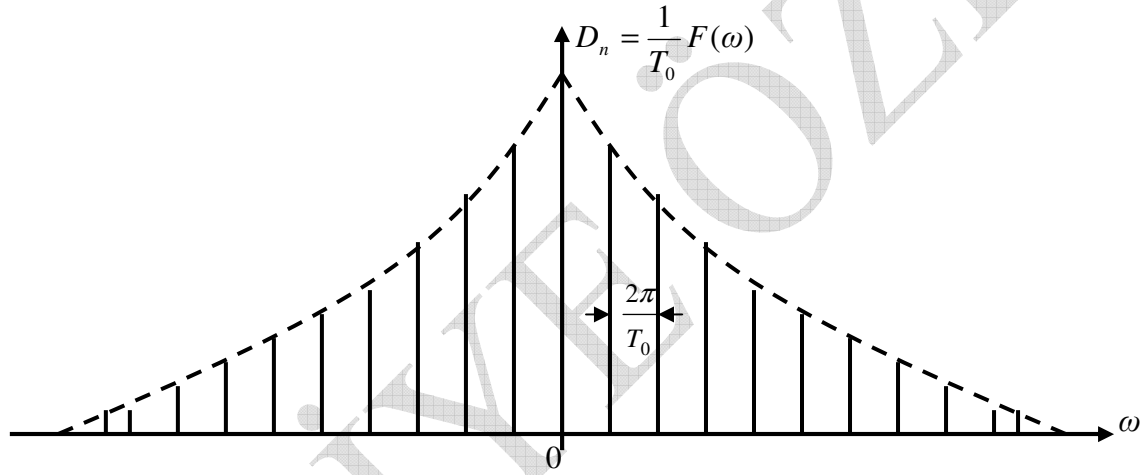
Bu oldukça önemli bir bağıntıdır. Acaba buradaki D_n hala ayrık formunu koruyormu yoksa bir değişim sözkonusudur, bunu irdelememiz gerekiyor. Çünkü periyodik işaret uzayı $T_0 \rightarrow \infty$ yaklaşımıyla yalnızca periyodik olmayan işareten oluşuyormuş gibi görünecektir.

Üstelik bununla D_n spektrumunun genliği $\frac{1}{T_0}$ ile azalırken, $T_0 \rightarrow \infty$ ile ayrık spektrumdaki

bileşenler arasındaki mesafe $\omega \rightarrow n \frac{2\pi}{T_0}$ ile gittikçe azalmakta (sıfır aralık) ve yoğunlaşan bir spektrum görüntüsü ortaya çıkmaktadır.

Görüldüğü gibi D_n katsayısı hem periyot T_0 hemde frekansla ω_0 değişim göstermektedir.

D_n Fourier serisi katsayısı, $F(\omega)$ nin $1/T_0$ katı ($\frac{1}{T_0} F(\omega)$) ve ω_0 frekansına göre düzgün (uniform) aralıklarla ($n\omega_0$) yerleştirilmiş örneklerinden meydana gelmektedir. Aşağıdaki şekil bunları teyit etmektedir.



Şekil 10 Fourier serisinde D_n spektrumunun $D_n = \frac{1}{T_0} F(\omega)$ ile gösterimi

Şekildeki ayrık noktaların uçlarından itibaren takip edildiğinde kesik çizgilerle ve $\frac{1}{T_0} F(\omega)$

değeri ile gösterilen eğri ; ki “zarf “ olarak adlandırılır, ayrık formdadır. Bu düzgün yerleştirilmiş bileşen frekansları arasındaki boşluklardan kaynaklanmaktadır. Görüldüğü gibi D_n katsayısına ait ayrık değerler ($n\omega_0$) değerine bağlı olarak ($n = 0, 1, 2, 3, \dots$) için $(\omega_0, 2\omega_0, 3\omega_0, \dots, n\omega_0, \dots, \omega)$ şeklinde düzgün olarak frekans ekseninde yerleşmişlerdir.

Buradaki ($n = 0, 1, 2, 3, \dots$) değerlerinin Fourier serisindeki harmonikleri temsil ettiğini

biliyoruz. Eğer $D_n = \frac{1}{T_0} F(n\omega_0)$ ifadesini göz önüne alınırsa katsayının aynı zamanda

periyot T_0 ile de değiştiğini görmekteyiz. Buradan,

$T_0 \rightarrow \infty$ için

$$\omega_0 = 0$$

ve

$$D_n = 0$$

olduğunu görmekteyiz. Büyük bir period ($T_0 \rightarrow \infty$) için işaretin frekansının sıfır

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0 \rightarrow \infty} = 0$$

olacağı ve bunlardan dolayıda katsayısının sıfır ($D_n = 0$) olacağı görülmektedir. Demek ki, işaretin aynı zamanda periodu D_n katsayıları üzerinde etkili bir parametredir. Burada önemli bir çelişki göze batmaktadır. Periodun $T_0 \rightarrow \infty$ hali için hem frekans $\omega_0 \rightarrow 0$ hemde katsayılar sıfır $D_n \rightarrow 0$ olmaktadır. Düz bir mantıkla bu durumda işaretin varlığından veya herhangi bir analizden bahsetmek mümkün değildir.

Bu ilginç durumun üzerinde durulması gerekiyor. Burada periodun sonsuz büyük veya limit olarak $T_0 \rightarrow \infty$ olmasının anlamını kavramamız gerekiyor. Periodun sonsuz olması veya limit olarak sıfıra yakınsaması $T_0 \rightarrow \infty$

1. Frekans spektrumunun genişliğini ve dolayısıyla bu spektrumda yer alacak bileşen sayısını artırmı?
2. Frekans spektrumunda artan bileşen sayısı ne tür bir aralıkla veya yoğunlukla dizileceklerdir?
3. Frekans spektrumundaki bileşenlerin genliği nasıl değişecektir?
4. Sonuçta hem frekans hem genlik aynı nasıl değişim gösterecektir?

Bu sorunun cevabı periodik olmayan işaretlerin Fourier serileriyle analizinde oldukça önemli ip uçları verecektir. Bunları sırasıyla cevaplamaya çalışalım.

1. Frekans aralığının küçülmesi veya frekans değişiminin ($\Delta\omega$) küçülmesi halinde daha fazla bileşenin kapsanacağı veya göz önüne alınacağı doğaldır. Buna göre $T_0 \rightarrow \infty$ durumunun yavaş yavaş oluşacağını göz önüne alırsak(periodun sonsuz limite yakınsaması), buna uygun frekansdaki değişimlerde yavaş azalacağından, $\Delta\omega \rightarrow 0$ durumu gerçekleşeceğinden dolayı çok elemanlı bir frekans spektrumu elde edilir.

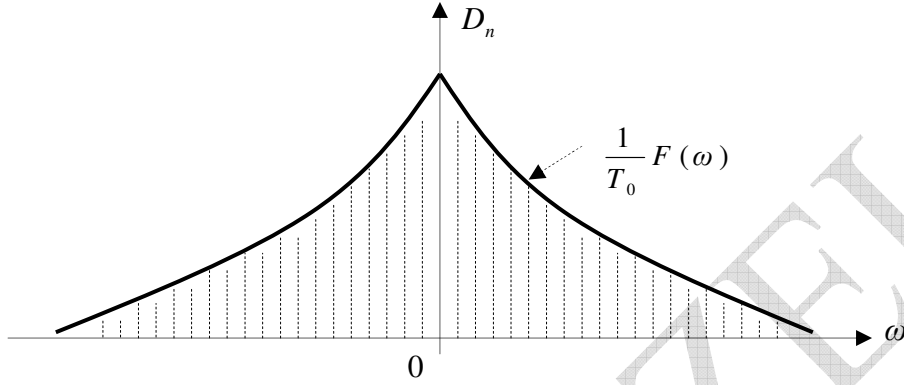
2. Artan bileşen sayısı frekansdaki yavaş değişimlerden kaynaklandığı için $\Delta\omega \rightarrow 0$, küçük/dar aralıklı ama çok elemanlı neticede yoğunluğu yüksek olan bir frekans spektrumu elde edilir.

3. Fourier serisinden biliyoruzki bileşen (harmonik) frekansı ile genliği arasında ters bir orantı vardır. Bileşen genliği artan harmoniklere kıyasla azalan bir seyir göstermektedir. Burada da

D_n katsayısı $D_n = \frac{1}{T_0} F(n\omega_0)$ bağıntısı gereği $T_0 \rightarrow \infty$ için $\frac{1}{T_0}$ değeri ile azalan bir seyir

içinde olacaktır.

4. Buradaki analizimizde en ilginç noktalardan biride hem frekansın hemde genliğin aynı anda değişmesidir. Her ikisindeki değişim klasik olarak ayrık formdaki D_n katsayısını bu kez sürekli forma dönüştürür. Genlik küçülerek, frekans birbirine yaklaşarak daha kompakt ve yoğun, sonuçta sürekli bir D_n veya daha doğru gösterim olan $F(\omega)$ biçimindeki sürekli form görüntüsünü oluşturular.



Şekil 11 Fourier dönüşümü: $T_0 \rightarrow \infty$ ve $\Delta\omega \rightarrow 0$ ile yoğunlaştırılmış Fourier seri spektrumu

Fourier serisindeki $\omega = n\omega_0$ harmoniklerinin D_n spektrumunun $T_0 \rightarrow \infty$ için yoğunlaştırılmış sürekli bir görüntüye yaklaştırdığını şekilden görmekteyiz. Bu şekilden de görüldüğü gibi $T_0 \rightarrow \infty$ ile dolaylı olarak spektrum bileşenleri arasındaki mesafe sıfıra $\omega \rightarrow n \frac{2\pi}{T_0} \rightarrow 0$ yaklaşmaktadır. Bu yolla mevcut spektruma küçük genlikli yeni bileşenlerin katıldığı görülmektedir. Bu yeni katılan bileşenler, sıfıra yakın çok sık aralıklarla dizildikleri için sonuçta şekildeki gibi ayrık yerine sürekli bir spektrum ortaya çıkmıştır.

Fourier transformasyonu spektrumu

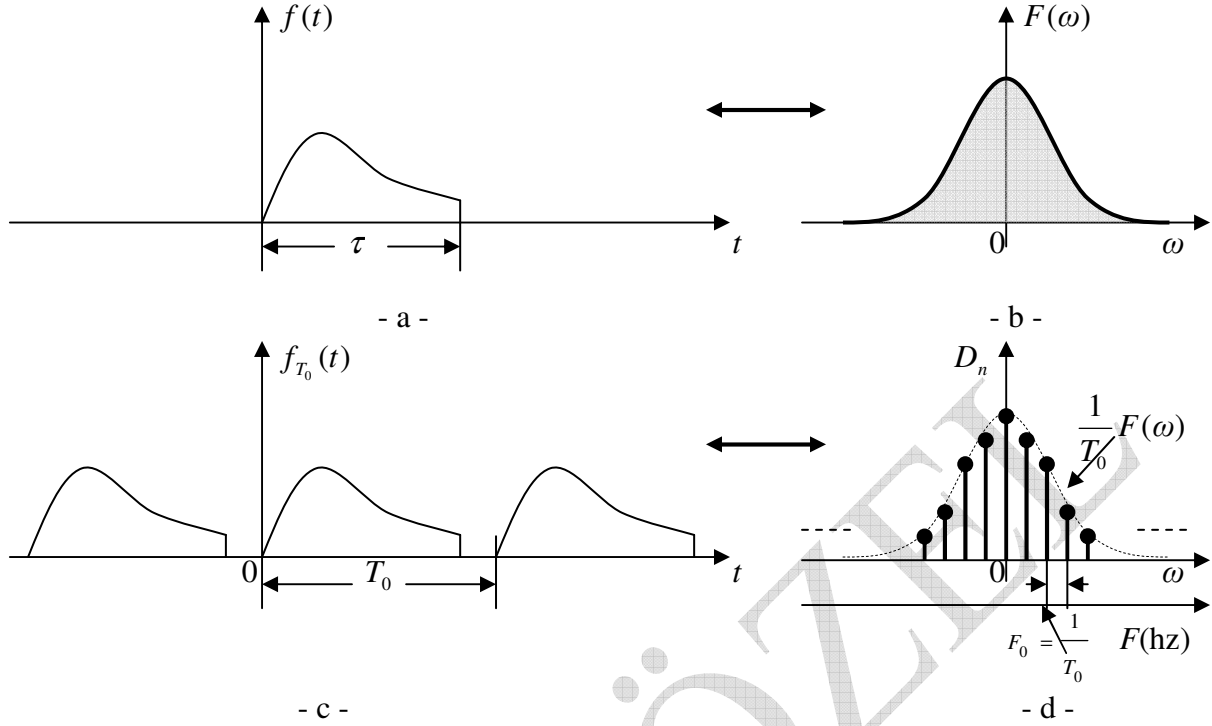
$$f_{T_0}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n e^{jn\omega_0 t}, \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$D_n = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$$

$$D_n = \frac{1}{T_0} F(n\omega_0)$$

Bağıntılarıyla oluşturulan Fourier serisi ve Fourier transformasyonunun aşağıdaki değişimlerine bakılarak bazı tespitlerde bulunabilir.



Şekil 12 Ayırık D_n Spektrumu : sürekli $F(\omega)$ spektrumunun örneklenmesi

Tespit 1: Periyodik olmayan sürekli-zaman işaretleri Fourier transformasyonunda $F(\omega)$ spektrumu, şekilden de görüldüğü gibi ayırık formattaki Fourier serisine ait spektrumunun harmonikler arası meafe olan $n\omega_0 \rightarrow \Delta\omega \rightarrow 0$ için $D_n = \frac{1}{T_0} F(n\omega_0)$ bağıntısıyla sürekli formda elde edilmiştir.

Tespit 2: D_n Fourier serisi spektrumu ayırık ve band sınırsız (unbandlimited). Buna karşın $F(\omega)$ Fourier transformasyonu spektrumu sürekli, ancak band sınırlı veya sınırsız olabilmektedir.

Tespit 3: $f(t)$ zaman domenî, zaman limitli iken, $f_{T_0}(t)$ domenî periyodiktir. Zaman limitli veya zaman limitsiz işaretlerin spektrumu $F(\omega)$ gibi band sınırlı (band limited) olabilir iken, periyodik işaretlerin spektrumu, D_n spektrumundan da görülebileceği gibi band sonsuzdur.

Tespit 4: Periyodik işaret olarak verilen Fourier serisine ait D_n ayırık spektrumun, sürekli formdaki $F(\omega)$ Fourier transformasyonunun örneklenmesi ile elde edildiğini görmekteyiz. Diğer bir deyişle, $F(\omega)$ kendisinin örneklenmiş verisypnu olan D_n spektrumundaki örneklerden tekrar elde edilebilmektedir. Spektrum örneklenmesi olarak tanımlanan bu yaklaşım, örnekleme bölümünde tekrar ele alınacaktır.

Tespit 5: D_n spektrumu ile $F(\omega)$ spektrumu arasındaki ilişkiyi gösteren $D_n = \frac{1}{T_0} F(n \frac{2\pi}{T_0})$ bağıntısındaki $\frac{2\pi}{T_0}$ rad/sn veya $\frac{1}{T_0}$ Hz, örnekler veya harmonikler arasındaki mesafeyi göstermesinin yanısıra, çözünürlük (resolution) kavramıyla da yakından ilgilidir. Sayısal veri işlemede $\frac{1}{T_0}$ Hz değerinin küçük turulması (T_0 büyük) sonucu, çözünürlük iyileşmektedir.

$T_0 \rightarrow \infty$ Üzerine ekstra yaklaşım

Bu durumda biliyoruz ki

1. $f_{T_0}(t)$ ile gösterilen Fourier serisi, $f(t)$ ile gösterilen periodik olmayan ve aranan fonksiyona yakınsayacaktır ($\lim_{T_0 \rightarrow \infty} f_{T_0}(t) = f(t)$).
2. Bu $f_{T_0}(t)$ yi bir tür elimine edip $f(t)$ ye indirgerken, $f(t)$ içinde yeni durumlar ortaya çıkarmaktadır. Artık sonsuz büyük aralıkta küçük kabul edebileceğimiz indirgenmiş Fourier serisini temsilen $f(t)$ nin hesaplanması söz konusudur. Böyle bir seride period büyüdüğü için zaman olarak düşünürsek bu periodik zaman dilimi içersine doğal olarak daha fazla bileşen sığacaktır, yer alacaktır. Fourier serisinden biliyoruz ki harmoniklerle onların katsayıları arasında ters bir orantı vardır. Harmonikler artan, katsayılar ise azalan bir seyir gösterirler. Burada da buna benzer bir durum söz konusudur. Tek fark aynı period içersinde bu kez daha fazla bileşen yer alacaktır.

Bu bileşenlerin nasıl bir düzen veya aralıkla frekans ekseninde dizildikleri veya yerleştikleri önemlidir. Bu anlamda $f(t)$ işareti artık frekansa (ω) bağlı olarak değişmektedir diye de düşünebiliriz. Diğer bir deyişle frekans dağılımı $f(t)$ nin elde edilmesinde önemlidir. Çünkü artık dar bir aralıkta sonlu sayıdaki harmonik değerine bağlı olarak sonlu sayıdaki frekanstan oluşan bir durum yerine, daha geniş bir period da ve sonsuz sayıdaki frekans bileşeninden oluşan bir frekans spektrumu söz konusudur. Bu da frekans spektrumunun artık ayrık olamayacağı, sürekli bir formda olmasının ve gösterilmesinin daha makul olduğuna işaretir.

Fourier serisine göre düşünülürse, fazla bileşenin frekans spektrumunda yer alması bir yoğunluk veya sıklık şeklinde daha sıkışık hatta sürekli diyebileceğimiz bir görüntü oluşturacaktır. Periodun böylesine büyük bir değer alması durumunda $D_n = \frac{1}{T_0} F(n\omega_0)$ ve

$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$ ifadelerine göre hem genlik hemde frekans ekseninde değişimler olacaktır. Genlik

değerleri küçülürken, daha fazla ve daha az aralıklı bileşen frekans ekseninde yer alacaktır. Bu daha az aralık, gitgide daha da küçülerek sıfır denebilecek bir değere eriştiğinde, frekans spektrumundaki yoğunluk artacak hatta bu yoğunluktan kaynaklanan bitişik veya sürekli denebilecek bir forma dönüşebilecektir.

Bu anda artık D_n nin klasikte ayırık olan formu artık sürekli forma kaymıştır. Buna göre örneğin $D_n = \frac{1}{T_0} F(n\omega_0)$ bağıntısı gereği işaretin periodunu iki katına çıkarırsak

$$T \rightarrow 2T_0$$

Bu durumda yeni frekans ω , temel frekansın ω_0

$$\omega = \frac{2\pi}{2T_0} = \frac{\omega_0}{2}$$

yarısı kadar olacaktır. Diğer bir deyişle

$$\omega_0 \rightarrow 2\omega$$

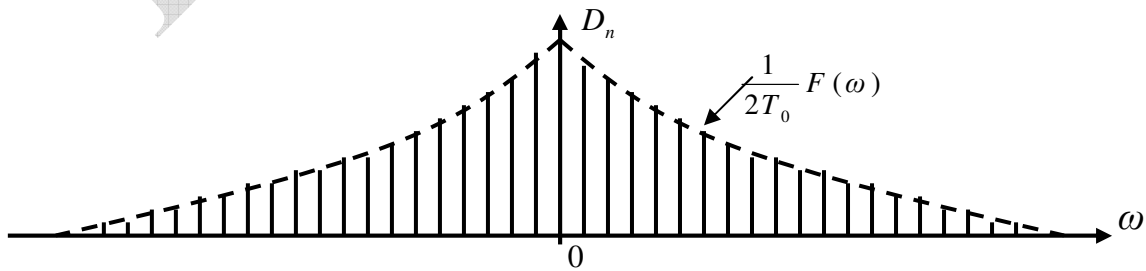
yaklaşımıyla ω olan frekans spektrumu iki katına 2ω çıkacaktır. Bunun anlamı frekans ekseninde ilkinin göre iki kat daha fazla D_n katsayısına ait bileşen olacaktır. Yani Fourier serisine göre düşünersek, seride göz önüne alınacak bileşen sayısı iki katına çıkmış olacaktır.

Diğer yandan $D_n = \frac{1}{T_0} F(n\omega_0)$ ifadesine bakarsak, eğer temel periodu $T \rightarrow 2T_0$ olarak iki

katına çıkardıysak acaba D_n katsayısının bu durumda genliği nasıl değişecektir. Bunu basitçe analiz edebiliriz.

$$D_n = \frac{1}{2T_0} F(n\omega_0)$$

Bu durumda katsayı genlik olarak ilkinin yarısına $\frac{1}{2T_0}$ düşmüştür. Sonuç olarak işaretin periodunu iki katına çıkardığımızda ($2T_0$), işaretin frekans spektrumu iki katına (2ω), iki kat fazla bileşen), genliğide yarısına ($1/2T_0$) düşmektedir. Bu durum yukarıdaki T_0 periodlu şekle göre aşağıdaki gibi şematize edilmiştir.



Şekil 13 Fourier serisinde $2T_0$ periodlu D_n spektrumu

Buna göre periodu arttırdıkça frekans spektrumu büyüyecek, yani daha dar aralıklıda daha fazla (∞) bileşen dikkate alınırken, işaretin genlik spektrumu olarak da sıfıra yaklaşacaktır. Yani genlik değerleri sıfıra yaklaşan, yoğunluğu yüksek (dar aralıklı bileşenler) daha fazla bileşenli bir yapı söz konusu olacaktır.

$$T_0 \rightarrow \infty \text{ için } \omega_0 = 0 \text{ ve } D_n = 0$$

Durumu bir gerçeği vurgulamaktadır. Periodun artırılmasıyla daha fazla bileşen demek frekans spektrumundaki yoğunluğun (density) fazla olması ve sıfır veya ona yakın (infinitesimal) aralıkla bileşenlerin (genlikleri sıfıra yakın) yer alması demektir. Bu iki duruma işaret etmektedir.

1. Bu durumda katsayıları gösteren D_n ifadesi sıfır aralıkla yerleşik olduğundan sürekli bir fonksiyon yapısındadır.

2. Ortada yukarıda detayları açıklanan bir çelişki vardır. $T_0 \rightarrow \infty$ için tüm bileşenler sıfır veya ona çok yakın $D_n = 0$ seyirdedir. Bu sıfır durumu işareti ortadan kaldıran ve analize imkan vermeyen bir durum olduğu için çelişkilidir. Bunun altında yatan ve onu geçersiz kılan yaklaşım aşağıda verilmektedir.

$D_n = \frac{1}{T_0} F(n\omega_0)$ ifadesi ile ortaya konan katsayı $f_{T_0}(t)$ ile daha önce verilen Fourier serisinde yerine yazılırsa

$$f_{T_0}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{F(n\omega_0)}{T_0} e^{jn\omega_0 t}$$

Bu ifadede $T_0 \rightarrow \infty$ için temel frekansın sıfıra çok yakın küçük bir değer (sonsuz küçük, infinitesimal, $\omega_0 \rightarrow 0$) olduğu ortaya çıkar. Çünkü yukarıdaki örnekten de ($T \rightarrow 2T_0$) görülebileceği gibi period T_0 arttıkça, frekans hemen sıfır olmamaktadır. Aniden sıfır olma yerine frekans spektrumu gittikçe azalan değerlerle sıfıra yaklaşmaktadır. Bu yüzden frekansın sonsuz bir küçük değere yaklaşması söz konusudur $\omega_0 \rightarrow 0$. Bu durumda temel frekans yerine, küçük adımlarla değişimini gösteren $\Delta\omega$ notasyonunu kullanırsak,

$$\Delta\omega = \frac{2\pi}{T_0}$$

ifadesi daha makul olacaktır. Çünkü frekans spektrumu gerçekte hemen değil azalan bir seyirle sıfıra yaklaşmaktadır. Bu sıfıra yaklaşma, frekanstaki azalan bir değişime karşı geldiğinden de $\Delta\omega$ gösterimi daha uygundur. Devam edecek olursak yukarıdaki $f_{T_0}(t)$

serisinde T_0 periodu yerine $T_0 = \frac{2\pi}{\Delta\omega}$ yazılırsa,

$$f_{T_0}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{F(n\Delta\omega) \Delta\omega}{2\pi} \right] e^{j(n\Delta\omega)t}$$

Bu ifadeninde $n\Delta\omega$ değerine bağlı olarak $(0, \pm\Delta\omega, \pm2\Delta\omega, \pm3\Delta\omega, \dots)$ değerleri için Fourier serisi oluşturulabilir. Her bir bileşenin miktarı/genliği (katsayısı) da $F(n\Delta\omega)\Delta\omega / 2\pi$ ile bellidir. Periodun sonsuz büyük olduğu limit durumunda,

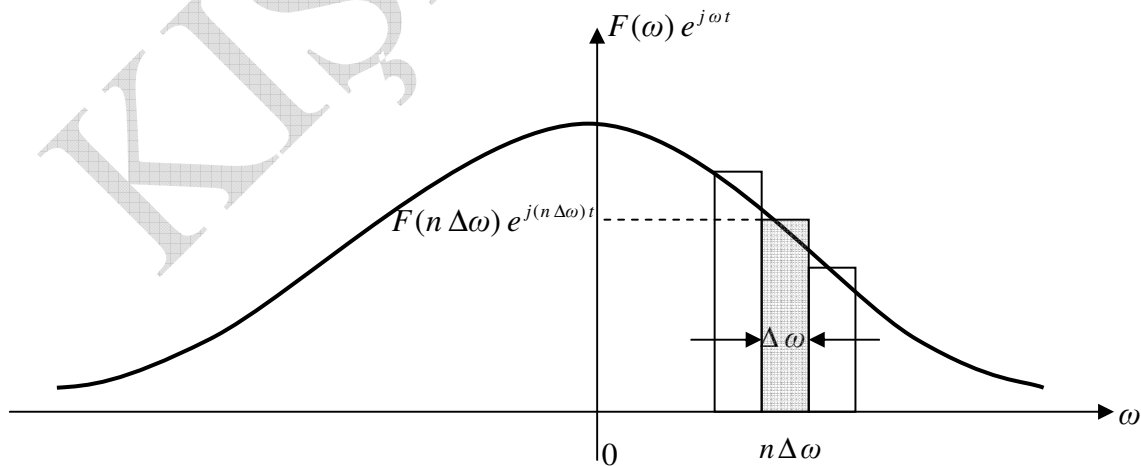
$$T_0 \rightarrow \infty \text{ için } \Delta\omega \rightarrow 0$$

yukarıdaki ifade

$$f(t) = \lim_{T_0 \rightarrow \infty} f_{T_0}(t) = \lim_{\Delta\omega \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(n\Delta\omega) e^{j(n\Delta\omega)t} \Delta\omega$$

olur. Yani limit durumunda $T_0 \rightarrow \infty$, $\Delta\omega \rightarrow 0$, $f_{T_0}(t) \rightarrow f(t)$ olarak $f_{T_0}(t)$ Fourier serisinden asıl fonksiyon olan $f(t)$ elde edilmektedir. Dikkat edilecek olunursa neredeyse sıfır aralıklı $\Delta\omega$ frekanslarından oluşan çok yoğunluklu $F(n\Delta\omega)$ genliklerinden dolayı, sol tarafta verilen sürekli bir işaret $f(t)$ formu elde edilmiştir. $e^{j(n\Delta\omega)t}$ exponensiyel gösterimin sinus ve cosinüs fonksiyonlarının kombinasyonlarına karşılık geldiğini bilmekteyiz. Böylelikle bu tip sinusoidal fonksiyonlardan oluşan basis fonksiyonunun neredeyse tüm noktaları göz önüne alındığından sonuçta sürekli $f(t)$ işarete ulaşılmaktadır. Burada $\Delta\omega \rightarrow 0$ okadar küçük (sonsuz küçük, infinitesimal) aralıklardan oluşuyorki, işareti oluşturan her noktanın dikkate alındığı tezinden hareketle, sürekli bir form elde edilebilmiştir. Bu haliyle durum tamamiyle Fourier serisinin aynısıdır.

Sağ taraftaki ifade incelenecek olursa sanki düşeydeki $F(n\Delta\omega) e^{j(n\Delta\omega)t}$ fonksiyonu ile yataydaki küçük $\Delta\omega$ aralıklarının çarpımlarının toplamı alınmaktadır. Bu bir tür büyük bir parçanın tamamının küçük parçalardan oluştuğu bir durumu çağrıştırmaktadır. Bu açıdan yaklaşıldığında son yazılan denklemin sağ tarafının $F(\omega) e^{j\omega t}$ ile gösterilebilecek fonksiyonun altındaki alanın integrasyonu olduğu görülmektedir.



Şekil 14 Fourier serisinden Fourier integralinin oluşumu

Şekilden de görüldüğü gibi Fourier serisinden yararlanılarak alan integrasyon hesabı yapılmaktadır. Bu anlamda gri renkli “ n .” parçanın (harmoniğin) $\Delta\omega$ genişliğinde ve $F(n\Delta\omega)e^{j(n\Delta\omega)t}$ yüksekliği ile verilmiş parçanın alanı $F(n\Delta\omega)e^{j(n\Delta\omega)t}\Delta\omega$ olarak hesaplanmaktadır. Bu alan ifadesini daha genel olarak $F(\omega)e^{j\omega t}$ fonksiyonunun altındaki alanının integrasyonu olarak aşağıdaki gibi ifade edebiliriz.

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

Bulunan bu ifade **Fourier integrali** olarak anılır. Bu şekliyle periodic olmayan bir $f(t)$ işareti Fourier serisi yerine Fourier integrali ile ifade edilebilmektedir. Bu yapılırken de $T_0 \rightarrow \infty$, $\Delta\omega \rightarrow 0$ limit durumunda yine Fourier serisinden yararlanıldığı bilmekteyiz. Sonuçta Fourier integrali yardımıyla artık periodic olmayan işaretin gösterimi ve analizinde yapma imkanına sahibiz. Buradaki aslında önemli sonuç yalnızca periodic olmayan sürekli işaretlerin Fourier integrali yardımıyla gösterimi veya analizi değildir. En önemli sonuç Fourier integralinin aynı zamanda bir **transformasyon** özelliğine sahip olmasındadır. Bu nedenle Fourier integrali olarak bulunan ifade aynı zamanda **İnvers/ters Fourier transformasyonu** olarak da bilinir. Buna göre sonucu şimdilik iki şalık altında topluyoruz;

1. Fourier integrali periodic olmayan işaretlerin analizinde kullanılan bir tekniktir.
2. Fourier integrali “frekans (ω)” domenini $F(\omega)$, “zaman (t)” domenine $f(t)$ dönüştüren bir transformasyondur.

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

Fourier transformasyonu ile orijinal $f(t)$ işaretinin frekans spektrumunu inceleyebilme imkanına sahip oluruz. Bu şekliyle $F(\omega)$ Fourier serisindeki D_n katsayısına karşılık gelmekte ancak artık çok iyi bildiğimiz gibi, D_n ayrık formda iken Fourier transformasyonunu tanımlayan $F(\omega)$ sürekli formdadır. $F(\omega)$ ile işareti oluşturan frekansları tesbit edebilmekteyiz. Dikkat edilecek olunursa invers Fourier transformasyonu $F(\omega)$ bölümün başında Fourier serisinin analizindeki

$$D_n = \frac{1}{T_0} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$$

ifadesinden

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

olarak elde edilmişti. Bu durumda D_n

$$D_n = \frac{1}{T_0} F(n\omega_0)$$

biçiminde yine ayrık formda yazılabilmekteydi. Sonuçta gerek D_n ve gerekse ondan elde edilen $F(\omega)$ katsayıları gösteren ifadelerdir. Farkları

- D_n ayrık formda ve periodic işaretlerin analizindeki katsayıları ifade ederken,
- $F(\omega)$ sürekli formdaki periodic olmayan işaretlerin analizindeki katsayı fonksiyonudur.

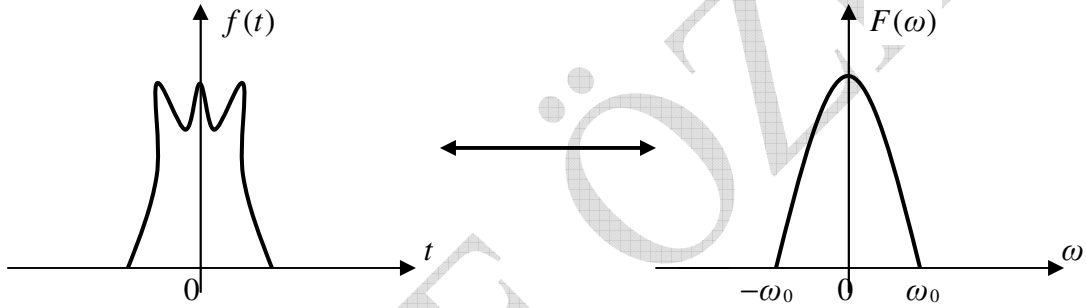
Fourier transformasyon çiftleri

Periodik olmayan işaretlerin analizinde ulaşılmış iki Fourier integrali mevcuttur ;

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \quad , \text{ Fourier transformasyonu}$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad , \text{ invers Fourier transformasyonu}$$

Fourier transformasyonunu göstermek üzere $F(\omega)$ veya $F(j\omega)$ fonksiyonlarından herhangi biri kullanılabilir. Biz genellikle $F(\omega)$ notasyonuna öncelik vereceğiz. Bu ifadelerden yararlanarak başlangıçta $f(t)$ olarak verilen periodik olmayan işaretin frekans domeni aşağıdaki görünümde elde edilmektedir.



Şekil 15 Periodik olmayan sürekli işaret

Görüldüğü gibi periodik olmayan bir işaretin $F(\omega)$ spektrumu da sürekli elde edilmiştir. Daha da önemlisi işaretin frekans bileşenlerinin yanısıra aynı zamanda işaretin band genişliği hakkında da bilgi sağlanmıştır. Buna göre $F(\omega)$ spektrumuna bakıldığında, $f(t)$ işaretinin belirli bir band da (ω_0) olduğunu, yani belirli bir $(0, \omega_0)$ band genişliğine sahip olduğunu görmekteyiz.

Diğer yandan Fourier transformasyonu denklemleri kompakt olarak exponensiyel formda gösterildiklerinden ilk anda bu yaklaşımın direkt olarak $\sin \omega t$ ve $\cos \omega t$ fonksiyonlar üzerine kurulduğu algılanamıyor. Ancak $e^{\pm j\omega t}$ biçimindeki exponensiyel formun

$$e^{\pm j\omega t} = \cos \omega t \pm j \sin \omega t$$

ifadesi, Fourier transformasyonunun sinusoidler üzerine kurulduğunun ispatıdır. Bu açıdan Fourier transformasyonu $\sin \omega t$ ve $\cos \omega t$ gibi sinusoidlerin durağan ve ortogonal özelliklerinden azami yararlanan bir tekniktir.

Örnek

$f(t) = e^{-5t}u(t)$ işaretinin Fourier transformasyonunu hesaplayın.

Çözüm

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-5t} u(t) e^{-j\omega t} dt = \int_0^{\infty} e^{-5t} e^{-j\omega t} dt = \int_0^{\infty} e^{-(j\omega+5)t} dt = -\frac{1}{(j\omega+5)} (e^{-(j\omega+5)t})_0^{\infty} \\ &= -\frac{1}{(j\omega+5)} (e^{-(j\omega+5)\infty} - e^{-(j\omega+5)0}) = -\frac{1}{(j\omega+5)} (e^{-\infty} - e^0) = -\frac{1}{(j\omega+5)} \left(\frac{1}{e^{\infty}} - 1\right) = -\frac{1}{(j\omega+5)} \left(\frac{1}{\infty} - 1\right) \\ &= -\frac{1}{(j\omega+5)} (0 - 1) = \frac{1}{(j\omega+5)} \\ &= \frac{1}{5 + j\omega} \end{aligned}$$

Uyarı : İşlemler sırasında $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-5t} u(t) e^{-j\omega t} dt$ integralinde $u(t)$ birim basamak fonksiyonunun tanımından $u(t) = (0, \infty) = 1$ olduğu için sınırlar $(0, \infty)$, değeri de (1) alınarak $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-5t} u(t) e^{-j\omega t} dt = \int_0^{\infty} e^{-5t} e^{-j\omega t} dt$ elde edilmiştir.

Tespit : Çözülen örnekten çıkan bir kural vardır :

$$e^{-at}u(t) \Leftrightarrow \frac{1}{a + j\omega}$$

Örnek

$F(\omega) = -\frac{1}{\omega^2 - 5j\omega - 6}$ İşaretinin ters Fourier transformasyonunu hesaplayın

Çözüm

$$\begin{aligned} F(\omega) &= -\frac{1}{\omega^2 - 5j\omega - 6} = \frac{-1}{-(\omega^2 - 5j\omega - 6)} = \frac{1}{(2 + j\omega)(3 + j\omega)} = \frac{A}{(2 + j\omega)} + \frac{B}{(3 + j\omega)} \\ \frac{1}{(2 + j\omega)(3 + j\omega)} &= \frac{A}{(2 + j\omega)} + \frac{B}{(3 + j\omega)} = \frac{3A + j\omega A + 2B + j\omega B}{(2 + j\omega)(3 + j\omega)} = \frac{j\omega(A + B) + 3A + 2B}{(2 + j\omega)(3 + j\omega)} \end{aligned}$$

$$A + B = 0$$

$$3A + 2B = 1$$

$$3A + 2(-A) = 1$$

$$A = 1 \text{ ve } B = -1$$

bunlara göre,

$$F(\omega) = -\frac{1}{\omega^2 - 5j\omega - 6} = \frac{1}{2 + j\omega} - \frac{1}{3 + j\omega}$$

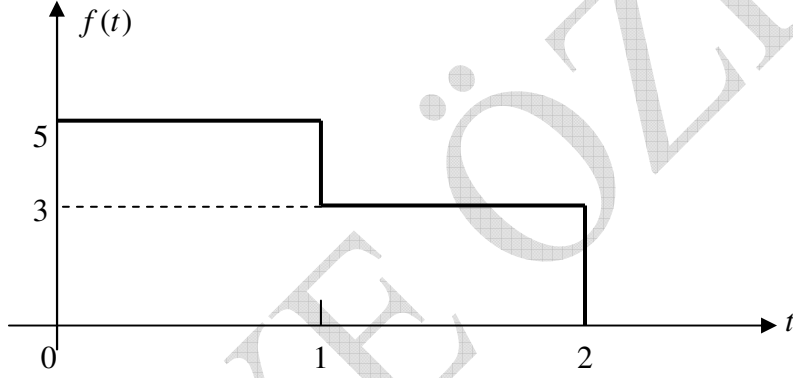
Buradan, $e^{-at}u(t) \Leftrightarrow \frac{1}{a + j\omega}$ kuralına göre ters (invers) Fourier transformasyonu alınırsa,

$$f(t) = F^{-1}\{F(\omega)\} = F^{-1}\left\{\frac{1}{2 + j\omega} - \frac{1}{3 + j\omega}\right\} = F^{-1}\left\{\frac{1}{2 + j\omega}\right\} - F^{-1}\left\{\frac{1}{3 + j\omega}\right\} = e^{-2t}u(t) - e^{-3t}u(t)$$

$$f(t) = e^{-2t}u(t) - e^{-3t}u(t)$$

Örnek

Değişimi aşağıda verilen $f(t)$ işaretinin Fourier transformasyonunu hesaplayın.



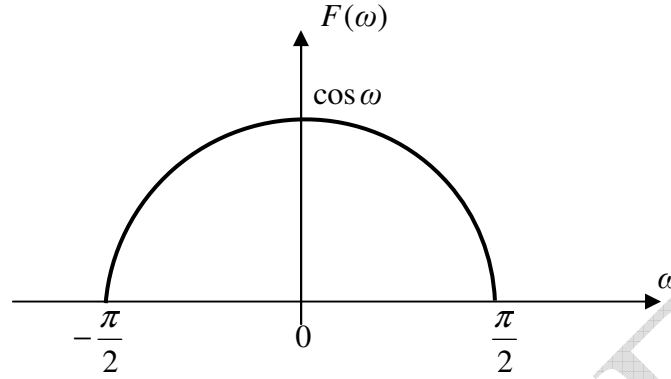
Şekil 16

Çözüm

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt = \int_0^1 f(t) e^{-j\omega t} dt + \int_1^2 f(t) e^{-j\omega t} dt = \int_0^1 (5) e^{-j\omega t} dt + \int_1^2 (3) e^{-j\omega t} dt \\ &= -\frac{5}{j\omega} (e^{-j\omega t})_0^1 - \frac{3}{j\omega} (e^{-j\omega t})_1^2 = -\frac{5}{j\omega} (e^{-j\omega(1)} - e^{-j\omega(0)}) - \frac{3}{j\omega} (e^{-j\omega(2)} - e^{-j\omega(1)}) \\ &= -\frac{5}{j\omega} (e^{-j\omega} - 1) - \frac{3}{j\omega} (e^{-j2\omega} - e^{-j\omega}) = e^{-j\omega} \left(-\frac{5}{j\omega} + \frac{3}{j\omega}\right) + \frac{5}{j\omega} - \frac{3}{j\omega} e^{-j2\omega} \\ &= -\frac{2}{j\omega} e^{-j\omega} - \frac{3}{j\omega} e^{-j2\omega} + \frac{5}{j\omega} \\ &= -\frac{2e^{-j\omega} + 3e^{-j2\omega} - 5}{j\omega} \end{aligned}$$

Örnek

Değişimi aşağıda verilen $F(\omega)$ işaretinin ters Fourier transformasyonunu hesaplayın.



Şekil 17

Çözüm

$$\begin{aligned}
 f(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\cos \omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\frac{e^{j\omega} + e^{-j\omega}}{2} \right) e^{j\omega t} d\omega \\
 &= \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (e^{j\omega} + e^{-j\omega}) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (e^{j(1+t)\omega} + e^{j(1-t)\omega}) d\omega \\
 &= \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (e^{j(1+t)\omega} + e^{j(1-t)\omega}) d\omega = \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{j(1+t)\omega} d\omega + \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{j(1-t)\omega} d\omega \\
 &= \frac{1}{4\pi j(1+t)} (e^{j(1+t)\omega})_{-\pi/2}^{\pi/2} + \frac{1}{4\pi j(1-t)} (e^{j(1-t)\omega})_{-\pi/2}^{\pi/2} \\
 &= \frac{1}{4\pi j(1+t)} (e^{j(1+t)\pi/2} - e^{j(1+t)(-\pi/2)}) + \frac{1}{4\pi j(1-t)} (e^{j(1-t)\pi/2} - e^{j(1-t)(-\pi/2)}) \\
 &= \frac{1}{4\pi j(1+t)} (e^{j(1+t)\pi/2} - e^{-j(1+t)\pi/2}) + \frac{1}{4\pi j(1-t)} (e^{j(1-t)\pi/2} - e^{-j(1-t)\pi/2}) \\
 &= \frac{1}{2\pi(1+t)} \frac{e^{j(1+t)\pi/2} - e^{-j(1+t)\pi/2}}{2j} + \frac{1}{2\pi(1-t)} \frac{e^{j(1-t)\pi/2} - e^{-j(1-t)\pi/2}}{2j} \\
 &= \frac{1}{2\pi(1+t)} \sin\left(\frac{(1+t)\pi}{2}\right) + \frac{1}{2\pi(1-t)} \sin\left(\frac{(1-t)\pi}{2}\right) = \frac{\sin\left(\frac{(1+t)\pi}{2}\right)}{4\left(\frac{(1+t)\pi}{2}\right)} + \frac{\sin\left(\frac{(1-t)\pi}{2}\right)}{4\left(\frac{(1-t)\pi}{2}\right)} \\
 &= \frac{1}{4} \frac{\sin\left(\frac{(1+t)\pi}{2}\right)}{\left(\frac{(1+t)\pi}{2}\right)} + \frac{1}{4} \frac{\sin\left(\frac{(1-t)\pi}{2}\right)}{\left(\frac{(1-t)\pi}{2}\right)} = \frac{1}{4} \text{sinc}\left(\frac{(1+t)}{2}\right) + \frac{1}{4} \text{sinc}\left(\frac{(1-t)}{2}\right) \\
 &= \frac{1}{4} \left(\text{sinc}\left(\frac{(1+t)}{2}\right) + \text{sinc}\left(\frac{(1-t)}{2}\right) \right)
 \end{aligned}$$

Örnek

$f(t) e^{j\frac{\omega}{2}t}$ İşaretinin Fourier transformasyonunu bulun.

Çözüm

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{j\frac{\omega}{2}t} e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t + j\frac{\omega}{2}t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\frac{\omega}{2}t} dt$$

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j(\omega)t} dt \text{ olduğundan,}$$

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j(\frac{\omega}{2})t} dt = F\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

$$f(t) e^{j\frac{\omega}{2}t} \Leftrightarrow F\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

Örnek

$f\left(\frac{t}{2}\right)$ İşaretinin Fourier transformasyonunu bulun.

Çözüm

$f(t) \Leftrightarrow F(\omega)$ ise,

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f\left(\frac{t}{2}\right) e^{-j\omega t} dt$$

$$u = \frac{t}{2}, \quad t = 2u$$

$$dt = 2du$$

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f\left(\frac{t}{2}\right) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-j\omega 2u} (2du) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-j(2\omega)u} du$$

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j(\omega)t} dt \text{ olduğundan,}$$

$$F(\omega) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-j(2\omega)u} du = 2F(2\omega)$$

$$f\left(\frac{t}{2}\right) \Leftrightarrow 2F(2\omega)$$

Örnek

$f(-\frac{t}{3}+5)$ İşaretinin Fourier transformasyonunu bulun.

Çözüm

$f(t) \Leftrightarrow F(\omega)$ ise,

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(-\frac{t}{3}+5) e^{-j\omega t} dt$$

$$u = -\frac{t}{3}+5, \quad t = -3u+5$$

$$dt = -3du$$

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(-\frac{t}{3}+5) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-j\omega(-3u+5)} (-3du) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{(j\omega 3u-j5\omega)} (-3du) \\ &= -3 \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{j(3\omega)u} e^{-j5\omega} du = -3e^{-j5\omega} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{j(3\omega)u} du \end{aligned}$$

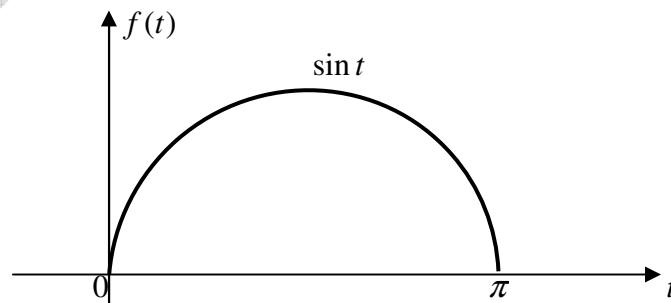
$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-j(3\omega)u} du = F(3\omega)$$

$$F(\omega) = -3e^{-j5\omega} F(3\omega)$$

$$f(-\frac{t}{3}+5) \Leftrightarrow -3e^{-j5\omega} F(3\omega)$$

Örnek

Değişimi aşağıda verilen işaretin Fourier transformasyonunu hesaplayın.



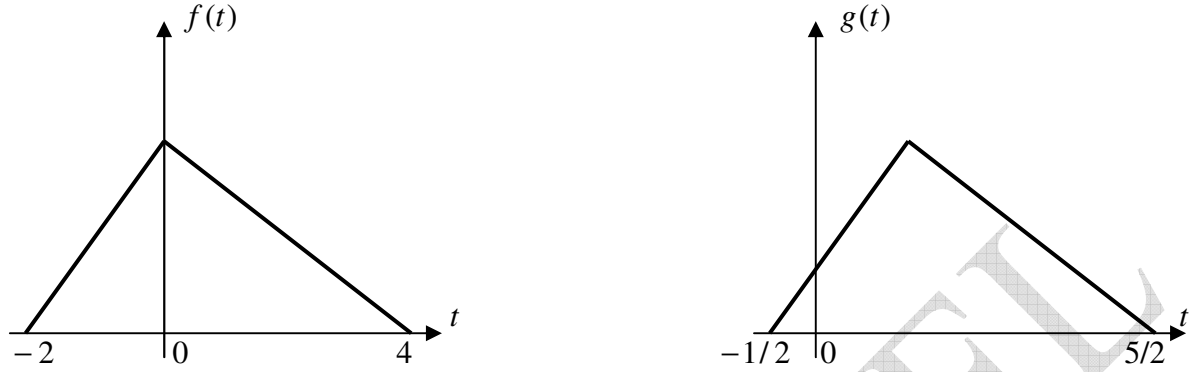
Şekil 18

Çözüm

$$\begin{aligned}
 F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt = \int_0^{\pi} (\sin t) e^{-j\omega t} dt = \int_0^{\pi} \left(\frac{e^{jt} - e^{-jt}}{2j} \right) e^{-j\omega t} dt \\
 &= \frac{1}{2j} \int_0^{\pi} (e^{jt} - e^{-jt}) e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{2j} \int_0^{\pi} e^{jt} e^{-j\omega t} dt - \frac{1}{2j} \int_0^{\pi} e^{-jt} e^{-j\omega t} dt \\
 &= \frac{1}{2j} \int_0^{\pi} e^{jt} e^{-j\omega t} dt - \frac{1}{2j} \int_0^{\pi} e^{-jt} e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{2j} \int_0^{\pi} e^{-j(\omega-1)t} dt - \frac{1}{2j} \int_0^{\pi} e^{-j(\omega+1)t} dt \\
 &= -\frac{1}{2j^2(\omega-1)} (e^{-j(\omega-1)t})_0^{\pi} + \frac{1}{2j^2(\omega+1)} (e^{-j(\omega+1)t})_0^{\pi} \\
 &= \frac{1}{2(\omega-1)} [(e^{-j(\omega-1)\pi} - (e^{-j(\omega-1)0})] - \frac{1}{2(\omega+1)} [(e^{-j(\omega+1)\pi} - (e^{-j(\omega+1)0})] \\
 &= \frac{1}{2(\omega-1)} [e^{-j(\omega-1)\pi} - 1] - \frac{1}{2(\omega+1)} [e^{-j(\omega+1)\pi} - 1] \\
 &= \left[\frac{-1}{2(\omega-1)} + \frac{1}{2(\omega+1)} \right] + \left[\frac{1}{2(\omega-1)} (e^{-j(\omega-1)\pi} - 1) - \frac{1}{2(\omega+1)} (e^{-j(\omega+1)\pi} - 1) \right] \\
 &= \left[\frac{-\omega-1+\omega-1}{2(\omega-1)(\omega+1)} \right] + \left[\frac{(\omega+1)e^{-j(\omega-1)\pi} - (\omega-1)e^{-j(\omega+1)\pi}}{2(\omega-1)(\omega+1)} \right] \\
 &= \left[\frac{-2}{2(\omega-1)(\omega+1)} \right] + \left[\frac{(\omega+1)e^{-j(\omega-1)\pi} - (\omega-1)e^{-j(\omega+1)\pi}}{2(\omega-1)(\omega+1)} \right] \\
 &= \left[\frac{-1}{(\omega-1)(\omega+1)} \right] + \left[\frac{\omega e^{-j(\omega-1)\pi} + e^{-j(\omega-1)\pi} - \omega e^{-j(\omega+1)\pi} + e^{-j(\omega+1)\pi}}{2(\omega-1)(\omega+1)} \right] \\
 &= \left[\frac{-1}{(\omega-1)(\omega+1)} \right] + \left[\frac{\omega e^{-j\omega\pi} e^{j\pi} + e^{-j\omega\pi} e^{j\pi} - \omega e^{-j\omega\pi} e^{-j\pi} + e^{-j\omega\pi} e^{-j\pi}}{2(\omega-1)(\omega+1)} \right] \\
 &= \left[\frac{-1}{(\omega-1)(\omega+1)} \right] + \left[\frac{-\omega e^{-j\omega\pi} - e^{-j\omega\pi} + \omega e^{-j\omega\pi} - e^{-j\omega\pi}}{2(\omega-1)(\omega+1)} \right] \\
 &= \left[\frac{-1}{(\omega-1)(\omega+1)} \right] + \left[\frac{-\omega e^{-j\omega\pi} + \omega e^{-j\omega\pi} - e^{-j\omega\pi} - e^{-j\omega\pi}}{2(\omega-1)(\omega+1)} \right] \\
 &= \left[\frac{-1}{(\omega-1)(\omega+1)} \right] + \left[\frac{-2e^{-j\omega\pi}}{2(\omega-1)(\omega+1)} \right] \\
 &= \left[\frac{-1}{(\omega-1)(\omega+1)} \right] + \left[\frac{-e^{-j\omega\pi}}{(\omega-1)(\omega+1)} \right] = \left[\frac{-1-e^{-j\omega\pi}}{(\omega-1)(\omega+1)} \right] = - \left[\frac{1+e^{-j\omega\pi}}{(\omega-1)(\omega+1)} \right] \\
 &= - \left[\frac{1+e^{-j\omega\pi}}{\omega^2-1} \right] = - \left[- \frac{1+e^{-j\omega\pi}}{1-\omega^2} \right] \\
 &= \frac{1+e^{-j\omega\pi}}{1-\omega^2} \\
 &= \frac{1+e^{-j\pi\omega}}{1-\omega^2}
 \end{aligned}$$

Örnek

Verilen şekillere göre $f(t)$ ve $g(t)$ işaretlerinin Fourier transformasyonlarını karşılaştırın.



Şekil 19

Çözüm

İşaretler incelendiğinde $g(t) = f(2t-1)$ olduğu görülecektir. Çünkü $g(t)$ nin sınır değerleri

$$\begin{array}{ll} 2t-1=-2 & 2t-1=4 \\ 2t=1-2 & 2t=1+4 \\ 2t=-1 & \text{ve} \quad 2t=5 \\ t=-1/2 & t=5/2 \end{array}$$

Buna göre $f(t)$ ve $g(t)$ işaretlerinin Fourier transformasyonları olarak $g(t) = f(2t-1)$ bağıntısı sebebiyle $f(2t-1)$ işaretinin Fourier transformasyonu incelenmelidir.

$$\begin{aligned} G(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(2t-1) e^{-j\omega t} dt \end{aligned}$$

$$G(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(2t-1) e^{-j\omega t} dt$$

$$u = 2t-1, \quad t = \frac{u+1}{2}$$

$$dt = \frac{1}{2} du$$

$$G(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(2t-1) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-j\omega(\frac{u+1}{2})} (\frac{1}{2} du)$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{j(\frac{1}{2}\omega)u} e^{-j\frac{1}{2}\omega} du = \frac{1}{2} e^{-j\frac{1}{2}\omega} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-j(\frac{1}{2}\omega)u} du$$

$$G(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-j(\frac{\omega}{2})u} du = F(\frac{\omega}{2})$$

$$G(\omega) = \frac{1}{2} e^{-j\frac{\omega}{2}} F(\frac{\omega}{2})$$

$$g(t) = f(2t-1) \Leftrightarrow \frac{1}{2} e^{-j\frac{\omega}{2}} F(\frac{\omega}{2})$$

Fourier transformasyonunda genlik-faz ilişkisi

Fourier transformasyonu genlik ve faz açısından iki spektrum halinde incelenmektedir. Genlik spektrumu, genliğin frekansla, faz spektrumu ise fazın frekansla olan değişimini yani dağılımını göstermektedir. Bunun için $|F(\omega)|$ genlik ve $\theta(\omega)$ faz spektrumlarına ihtiyaç duyulur. Bunların varlığı halinde $F(\omega)$ frekans – genlik bilgisine ulaşılır. Genel anlamda aşağıdaki gibi ifade edilen Fourier transformasyonunun

$$F(\omega) = |F(\omega)| e^{j\theta(\omega)}$$

$$= |F(\omega)| e^{j\angle F(\omega)}$$

içerdiği bileşenler çeşitli isimlerle anılırlar ;

$F(\omega)$ = **frekans cevabı**

$|F(\omega)|$ = **frekans genlik cevabı** (kazanç, özellikle filtre analizinde)

$e^{j\angle F(\omega)} = \angle F(\omega)$ = **frekans faz cevabı**

1. Genlik spektrumu

Burada genliğin frekansla değişimini gösteren ve frekans genlik cevabı olarak anılan fonksiyon ele alınmaktadır. Eğer Fourier transformasyonu aşağıdaki gibi göz önüne alınırsa

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

$F(\omega)$ fonksiyonunun

$$F(\omega) = a(\omega) + jb(\omega)$$

denklemden genlik spektrumunun sürekli ve kompleks (veya reel) yapıda olduğu görülmektedir. Genlik fonksiyonu $F(\omega)$, kompleks olduğundan spektrumu ifade etmek için kompleks gösterimin yerine mutlak gösterim tercih edilir. Buradan $|F(\omega)|$ mutlak gösterim

$$|F(\omega)| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

şeklinde elde edilir. Buna göre spektrumun çift fonksiyon özelliğinde olması beklenir. Bu şekliyle Fourier serisindeki veya transformasyondaki tüm harmoniklerin genliği sabit kalacaktır. Bu distorsiyonsuz iletimin de genlik adına en önemli özelliğidir. İletim boyunca harmonik genliklerinin sabit kalması sağlanmaktadır.

Tespit : $|F(\omega)|$ biçimindeki genlik ifadesi özellikle sistem açısından filtre analizinde önemli bir işleve sahiptir. Bu açıdan yaklaşırsak frekans cevabı veya frekans genlik cevabı olarak anılan bu fonksiyonun en önemli uygulama alanı olan filtre sistemlerinde kazanç adıyla anılmaktadır. Filtre analizlerinde kazanç olarak $|F(\omega)|$ ye benzer olan $|H(\omega)|$ ifadesi sistem kazancı olarak kullanılmaktadır. Sistem kazancı denilmesinin sebebi, bu haliyle sistem transfer fonksiyonu özelliğini taşımasından gelmektedir. Yani çıkış bilgisinin giriş bilgisine olan oranını temsil etmektedir. Bu sayede filtre gibi bir sistemin davranışını $|H(\omega)|$ gibi sistem kazancıyla yapabilmekteyiz.

2. Faz spektrumu

Burada faz cevabı kavramıyla bilinen fazın frekansla olan değişiminin analizi ele alınmaktadır. Frekansa bağlı genlik değişiminin hangi fazlar için gerçekleştiğini bilmemiz için faz bilgisine ihtiyacımız vardır. Fazın frekansla olan değişimi bunu mümkün kılmaktadır. Frekansa bağlı $\theta(\omega)$ açısı

$$\theta(\omega) = \angle F(\omega) = \tan^{-1} \left(\frac{b(\omega)}{a(\omega)} \right)$$

veya

$$\theta(\omega) = \angle F(\omega) = \tan^{-1} \left(\frac{b}{a} \right)$$

olarak hesaplanır. Faz bilgisinde genlik bilgisi gibi sürekli olduğu görülmektedir. Faz bilgisiyle, Fourier serisindeki gibi Fourier transformasyonundaki her bir sinusoid terimin fazı belirlenmektedir. Buna göre denklem göz önüne alındığında faz spektrumu tek fonksiyon özelliğinde lineer değişen bir yapıda olacaktır.

3. Genlik – faz spektrumu

Buna göre genlik $|F(\omega)|$ ve faz $\angle F(\omega)$ bilgilerinin birlikte olduğu kompakt spektrum aşağıdaki gibidir olacaktır.

$$\begin{aligned} F(\omega) &= |F(\omega)| e^{j\theta(\omega)} \\ &= |F(\omega)| e^{j\angle F(\omega)} \end{aligned}$$

Fourier transformasyonunun eşlenik ifadesi $F(-\omega)$ yazılırsa

$$F(-\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{j\omega t} dt$$

olduğundan eşlenik durumdaki genlik-faz ilişkisi

$$F(-\omega) = |F(\omega)| e^{-j\angle F(\omega)}$$

Bağıntısına göre eşlenik durumda genlik değişmediği halde, faz değişmektedir. Buna göre aşağıdaki ifadeler yazılabilir.

$$|F(-\omega)| = |F(\omega)|$$

Bunun anlamı, reel $f(t)$ gibi işaretler için $|F(\omega)|$ Fourier genlik spektrumu çift fonksiyondur. Öte yandan eğer faz spektrumu içinde

$$\angle F(-\omega) = -\angle F(\omega)$$

ifadesi yazılırsa, bu kez de reel $f(t)$ gibi işaretler için $\angle F(\omega)$ Fourier faz spektrumu tek fonksiyondur.

Örnek

$f(t) = e^{-3t}u(t)$ işaretinin Fourier transformasyonunu hesaplayın.

Çözüm

Verilen $f(t) = e^{-3t}u(t)$ işaretinin Fourier transformasyonu $F(\omega) = |F(\omega)| e^{j\angle F(\omega)}$ biçimde oluşturulmaya çalışılacaktır.

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-3t}u(t) e^{-j\omega t} dt = \int_0^{\infty} e^{-3t} e^{-j\omega t} dt = \int_0^{\infty} e^{-(j\omega+3)t} dt = -\frac{1}{(j\omega+3)} (e^{-(j\omega+3)t})_0^{\infty} \\ &= -\frac{1}{(j\omega+3)} (e^{-(j\omega+3)\infty} - e^{-(j\omega+3)0}) = -\frac{1}{(j\omega+3)} (e^{-\infty} - e^0) = -\frac{1}{(j\omega+3)} \left(\frac{1}{e^{\infty}} - 1\right) = -\frac{1}{(j\omega+3)} \left(\frac{1}{\infty} - 1\right) \\ &= -\frac{1}{(j\omega+3)} (0 - 1) = \frac{1}{(j\omega+3)} \\ &= \frac{1}{3+j\omega} \end{aligned}$$

$F(\omega) = \frac{1}{3+j\omega}$, $|F(\omega)|$ genlik frekans cevabı ile $\angle F(\omega)$ faz frekans cevabı için düzenlenir.

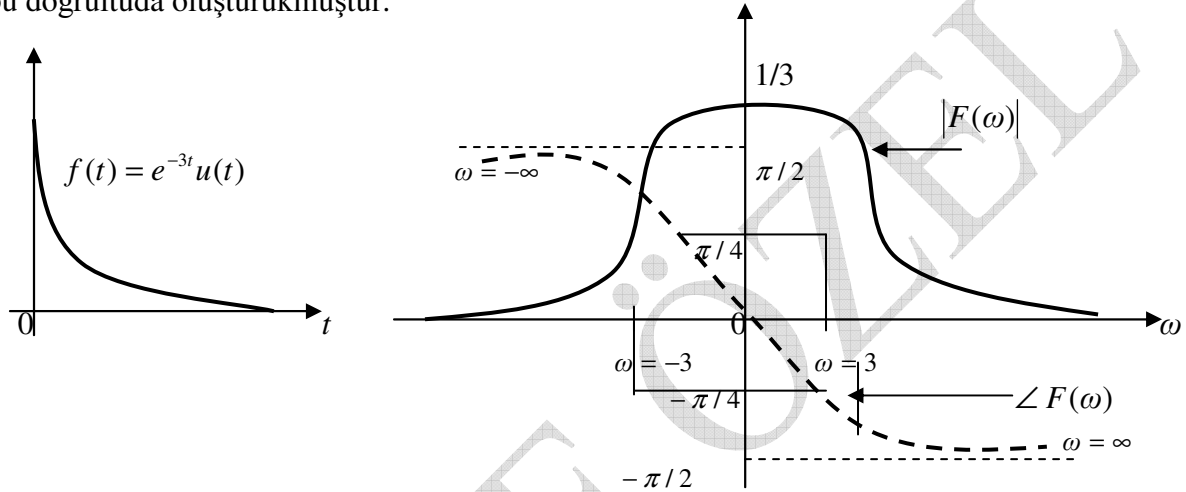
$$F(\omega) = \frac{1}{3+j\omega} = \frac{3-j\omega}{(3+j\omega)(3-j\omega)} = \frac{3-j\omega}{9+\omega^2} = \frac{3}{9+\omega^2} + j\frac{\omega}{9+\omega^2}$$

$$|F(\omega)| = \sqrt{\left(\frac{3}{9+\omega^2}\right)^2 + \left(\frac{\omega}{9+\omega^2}\right)^2} = \frac{\sqrt{9+\omega^2}}{9+\omega^2}$$

$$\angle F(\omega) = \tan^{-1}\left(\left(\frac{\omega}{9+\omega^2}\right) / \left(\frac{3}{9+\omega^2}\right)\right) = \tan^{-1}\left(\frac{\omega}{3}\right)$$

Görüldüğü gibi genlik $|F(\omega)|$ spektrumu $F(\omega) = \lim_{\omega \rightarrow \infty} = 1/3$ çift fonksiyon, faz spektrumu ise

$\angle F(\omega) = \lim_{\omega \rightarrow \infty} = \pm \frac{\pi}{2}$ değerlerinde oluşmaktadır. Aşağıda $|F(\omega)|$ ve $\angle F(\omega)$ spektrumları bu doğrultuda oluşturulmuştur.



Şekil 20 $f(t)$ İşareti ve Fourier transformasyonu genlik – faz spektrumu

a) genlik spektrumu : görüldüğü gibi $f(t) = e^{-3t}u(t)$ gibi reel bir işaretin Fourier transformasyonu

$$F(\omega) = \frac{3}{9+\omega^2} + j \frac{\omega}{9+\omega^2}$$

olarak elde edilmiştir. Buradan

$$F(-\omega) = \frac{3}{9+(-\omega)^2} + j \frac{(-\omega)}{9+(-\omega)^2} = \frac{3}{9+\omega^2} - j \frac{\omega}{9+\omega^2}$$

$$|F(\omega)| = \frac{\sqrt{9+\omega^2}}{9+\omega^2} \quad \text{ve} \quad |F(-\omega)| = \frac{\sqrt{9+\omega^2}}{9+\omega^2}$$

$$|F(\omega)| = |F(-\omega)|$$

olduğundan bir kez daha $f(t) = e^{-3t}u(t)$ gibi reel işaretler için $|F(\omega)|$ genlik spektrumunun çift fonksiyon olduğu görülür. Yukarıdaki şekilden bu özellik net olarak görülmektedir.

$$F_{\text{çift}}(\omega) = \frac{1}{2}(F(\omega) + F(-\omega)) = \frac{1}{2}\left[\frac{3}{9+\omega^2} + j\frac{\omega}{9+\omega^2} + \frac{3}{9+\omega^2} - j\frac{\omega}{9+\omega^2}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{6}{9+\omega^2}\right] = \frac{3}{9+\omega^2}$$

$$F_{\text{tek}}(\omega) = \frac{1}{2}(F(\omega) - F(-\omega)) = \frac{1}{2}\left[\frac{3}{9+\omega^2} + j\frac{\omega}{9+\omega^2} - \left(\frac{3}{9+\omega^2} + j\frac{\omega}{9+\omega^2}\right)\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{2j\omega}{9+\omega^2}\right] = \frac{j\omega}{9+\omega^2}$$

$$F(\omega) = F_{\text{çift}}(\omega) + F_{\text{tek}}(\omega) = \frac{3}{9+\omega^2} + j\frac{\omega}{9+\omega^2}$$

b) faz spektrumu : görüldüğü gibi $f(t) = e^{-3t}u(t)$ gibi reel bir işaretin Fourier transformasyonu

$$\angle F(\omega) = \tan^{-1}\left(\frac{\omega}{3}\right)$$

$$\angle F(-\omega) = \tan^{-1}\left(\frac{-\omega}{3}\right) = -\tan^{-1}\left(\frac{\omega}{3}\right)$$

buradan net olarak

$$\angle F(-\omega) = -\angle F(\omega)$$

durumu oluştuğundan, $f(t) = e^{-3t}u(t)$ gibi reel işaretler için $\angle F(\omega)$ faz spektrumunun tek fonksiyon olduğu görülür. Yukarıdaki şekilden bu özellik açıkça görülmektedir.

Genlik-Faz Cevabının Önemi

Şu ana kadar

$$\begin{aligned} F(\omega) &= |F(\omega)| e^{j\theta(\omega)} \\ &= |F(\omega)| e^{j\angle F(\omega)} \end{aligned}$$

denklemlerle ortaya koyduğumuz, bir $f(t)$ işaretinin genlik ve faz cevaplarıyla işaret veya bu işaretin temsil ettiği sistem hakkında önemli bilgi edinebilmekteyiz. Hatırlayacağımız gibi Fourier transformasyonuna konu olan periodik olmayan işaretin, Fourier serisinden de bildiğimiz üzere, çeşitli frekans (harmonik) ve çeşitli genliklere sahip sinusoidlerin toplamından oluştuğunu bilmekteyiz. Bu şekilde birden fazla komponentin olduğu bir işaretin her bir komponentinin genliğinin ve fazının frekansla değişimini bilmek, işaretin analizi açısından oldukça önemlidir. Böyle bir bilgiye sahip olmak işareti veya işaretin temsil ettiği sistemin analizini oldukça kolaylaştırmaktadır. Sistemin bir haberleşme veya genel anlamda filtre özelliğinde olduğu düşünülecek olunursa, sistemin frekansla değişim gösteren genlik ve faz cevabı, sistemin davranışının belirlenmesine önemli katkı sağlar. Örneğin yukarıdaki örnek dikkate alınır,

$$|F(\omega)| = \frac{\sqrt{9 + \omega^2}}{9 + \omega^2}$$

Genlik bilgisinden, işaretin hangi frekanslarda hangi genliklerde (kazançlarda) olduğunu bilmek, sistemin daha iyi tanınmasını sağlar. Frekans filtreleri bu tür yaklaşımlar üzerine kurulan sistemlerdir. Örneğin $\omega = 0$, $\omega = 4$, $\omega = 100000$ ve $\omega = \infty$ frekansındaki işaretin genlik cevabı (dikkat edilirse sistemin cevabı gibi)

$$\begin{aligned} |F(0)| &= \frac{\sqrt{9+0^2}}{9+0^2} = \frac{1}{3}, \quad |F(5)| = \frac{\sqrt{9+4^2}}{9+4^2} = \frac{1}{5}, \\ |F(1000000)| &= \frac{\sqrt{9+1000000^2}}{9+1000000^2} \approx \frac{\sqrt{10^{12}}}{10^{12}} = \frac{10^6}{10^{12}} = \frac{1}{10^6} = 10^{-6} \\ |F(\infty)| &= \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{9+\omega^2}}{9+\omega^2} = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{\omega \sqrt{\frac{9}{\omega^2} + 1}}{\omega(\frac{9}{\omega} + \omega)} = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{\frac{9}{\infty^2} + 1}}{\frac{9}{\infty} + \infty} = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{0+1}}{(0+\infty)} = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{1}{\infty} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Yukarıdaki şekil (b) den verilen $f(t) = e^{-3t}u(t)$ işaretinin $|F(\omega)|$ genlik spektrumunda bu değerleri gözlemleyebilmekteyiz, şekilden $\omega \rightarrow \infty$ için $|F(\omega)| \rightarrow 0$ olarak sönümlü bir işaret olduğu $f(t) = e^{-3t}u(t)$ zaman domenindeki işaretle uyumludur. Ayrıca elde edilen $|F(0)| = 1/3$, $|F(5)| = 1/5$, $|F(10^6)| = 10^{-6}$ ve $|F(\infty)| \rightarrow 0$ genlik kazançlarına bakıldığında sistemin düşük frekanslar için kısmen, yüksek kazanç, yüksek frekanslar içinse kesinlikle düşük kazançlar elde etmesi sebebiyle, böyle bir sistemin bir tür alçak geçiren filtre davranışı içinde olduğu da düşünülebilir.

Faz cevabına gelince, $\angle F(\omega) = \tan^{-1}\left(\frac{\omega}{3}\right)$ bilgisinden işaretin harmoniklerinin faz davranışı hakkında da bilgi edinebilmekteyiz. Örneğin $\omega = 0$, $\omega = 3$, $\omega = \infty$ ve $\omega = -\infty$ frekansındaki işaretin genlik cevabı (dikkat edilirse sistemin cevabı gibi)

$$\begin{aligned} \angle F(0) &= \tan^{-1}\left(\frac{0}{3}\right) = 0, \quad \angle F(3) = \tan^{-1}\left(\frac{3}{3}\right) = \frac{\pi}{4}, \quad \angle F(\infty) = \tan^{-1}\left(\frac{\infty}{3}\right) = \tan^{-1}(\infty) = \frac{\pi}{2}, \\ \angle F(-\infty) &= \tan^{-1}\left(\frac{-\infty}{3}\right) = \tan^{-1}(-\infty) = -\frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

faz cevaplarından da görüldüğü gibi işaretin $\omega = (0, \infty)$ aralığı için $\angle F(\omega) = (0, \pi/2)$, $\omega = (-\infty, 0)$ aralığı içinse $\angle F(\omega) = (-\pi/2, 0)$ aralığında değişim gösterdiğini gözlemlemekteyiz. Sonuçta işaretin fazı $\omega = (-\infty, \infty)$ aralığı için düşey eksen üzerinde $\angle F(\omega) = (-\pi/2, \pi/2)$ düşey aralığında değişmektedir. İşaretin frekans domenindeki genlik ve faz cevaplarının incelenerek sistem davranışının ve tipinin belirlenmesi gerekli olup, aynı zamanda frekans cevabı adı altında incelenen önemli bir yaklaşımdır.

Örnek

Yukarıda ele alınan

$$F(\omega) = \frac{3}{9 + \omega^2} + j \frac{\omega}{9 + \omega^2}$$

örneğini $F(\omega) = |F(\omega)| e^{j\angle F(\omega)}$ gösterimindeki herhangi bir frekans için $F(\omega)$ bize neyi anlatmaktadır ve bunun Fourier serisindeki yeri nedir sorularına cevap aramaya çalışalım. Örneğin $\omega = 3$ frekansındaki değer olarak yazılan

$$F(3) = |F(3)| e^{j\angle F(3)}$$

Fourier serisindeki üçüncü harmonik ve onun faz açısına karşılık gelirmi?. Çünkü biliyoruz ki Fourier serisine açılmış bir işaretin

$$f(t) = \frac{8A}{\pi^2} \left(\cos(\pi t - 90^\circ) + \frac{1}{9} \cos(3\pi t + 90^\circ) + \frac{1}{25} \cos(5\pi t - 90^\circ) + \frac{1}{49} \cos(7\pi t + 90^\circ) + \dots \right)$$

gibi olduğunu düşündüğümüzde örneğin $\frac{1}{9} \cos(3\pi t + 90^\circ)$ bilgisi bize, üçüncü harmoniğin genliğinin $1/9$, fazının 90° hatta temel frekansının $\omega_0 = \pi$ olduğu bilgisini rahatlıkla sağlamaktadır. Bu açıdan $F(3) = |F(3)| e^{j\angle F(3)}$ gösterimini nasıl yorumlamalıyız. Eğer hatırlarsak örneğimizde

$$F(\omega) = \frac{3}{9 + \omega^2} + j \frac{\omega}{9 + \omega^2} ; \quad |F(\omega)| = \frac{\sqrt{9 + \omega^2}}{9 + \omega^2} \quad \text{ve} \quad \angle F(\omega) = \tan^{-1} \left(\frac{\omega}{3} \right)$$

idi. Fourier transformasyonu olarak bilinen $F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$ ifadesinin Fourier serisindeki karşılığının da

$$D_n = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$$

olduğunu biliyoruz. Çok açık görülmektedir ki, üçüncü harmoniğin katsayısı olarak düşünülecek D_3 değerinin, $F(\omega)$ de tam bir karşılığı olmayacaktır, yani $D_3 \neq F(3)$ söz konusudur. Diğer bir deyişle D_3 ve $F(3)$ aynı şeyi göstermez ve ifade etmezler. Ancak D_n ve $F(\omega)$ arasındaki

$$D_n = \frac{1}{T_0} F(n\omega_0)$$

bağıntısı göz önüne alındığında çok küçük, sıfıra yakın ω_0 temel frekans ($\omega_0 \rightarrow 0$) değerlerinden dolayı (çünkü $T_0 \rightarrow \infty$), $\omega_0 \rightarrow \Delta\omega$ olarak düşünüldüğünde yukarıdaki ifadede

$$n\omega_0 \rightarrow n\Delta\omega \rightarrow \omega$$

olarak düşünülebilir. Bunun D_n bağıntısındaki karşılığı da aşağıdaki gibi olacaktır.

$$D_n = \frac{1}{T_0} F(n\omega_0) \rightarrow \frac{1}{T_0} F(n\Delta\omega) \rightarrow \frac{1}{T_0} F(\omega)$$

$$D_n = \frac{1}{T_0} F(\omega)$$

Görüldüğü gibi aslında $F(\omega)$ Fourier transformasyonunun harmoniklerle ilgisi açıktır ($\omega = n\omega_0$). $n\Delta\omega$ gösterimiyle frekans eksenindeki n .harmoninin $\Delta\omega$ gibi çok küçük bir aralıktaki (genişlikteki) değeri hesaplanmaktadır. Diğer bir deyişle, belli bir harmonikteki frekans cevabı değil, belli bir frekanstaki frekans cevabı (genlik ve faz olarak) hesaplanmaktadır.

$$F(n\Delta\omega) \rightarrow F(\omega)$$

veya $F(\omega) = F(n\Delta\omega)$ olmaktadır.

Eğer Örneğin $\omega = 3$ frekansındaki $F(3)$ değerinin hangi harmonikle ilgisi olabileceğini araştıralım. $F(3)$ gösterimi gerçekte,

$$3 = n\omega_0 = n\Delta\omega$$

formundadır. Bu nedenle $F(3) = F(n\Delta\omega)$ olarak düşünüldüğünde $F(\omega)$ fonksiyonuyla gösterilen $\omega = 3$ değerinin oluşturduğu $F(3)$ genliğinin hangi harmoniğe ait olduğu belli değildir. Çünkü,

$$n = \frac{3}{\Delta\omega}$$

$$\Delta\omega \rightarrow 0 \text{ için } n \rightarrow \infty$$

Bunun anlamı sonsuz harmoninin $\Delta\omega \rightarrow 0$ küçük (limit) aralığında olduğudur. Eğer örnekteki

$$F(\omega) = \frac{3}{9 + \omega^2} + j \frac{\omega}{9 + \omega^2}$$

Fourier transformasyonunu göz önüne alıyorsak, genlik cevabı olarak örneğin bunun üzerinde eğer üçüncü ($n = 3$) harmoninin genliğini araştırıyorsak,

$$F(3\omega_0) = \frac{3}{9 + (3\omega_0)^2} + j \frac{3\omega_0}{9 + (3\omega_0)^2} = \frac{3}{9 + 9\omega_0^2} + j \frac{3\omega_0}{9 + 9\omega_0^2} = \frac{3}{9 + 9\omega_0^2} (1 + j) = \frac{3\sqrt{2}}{9 + 9\omega_0^2} e^{j\frac{\pi}{4}}$$

$$|F(\omega)| = \frac{\sqrt{9 + \omega^2}}{9 + \omega^2}$$

$$|F(n\omega_0)| = |F(3\omega_0)| = \frac{\sqrt{9 + (3\omega_0)^2}}{9 + (3\omega_0)^2} = \frac{\sqrt{9 + 9\omega_0^2}}{9 + 9\omega_0^2} = \frac{1}{3} \frac{\sqrt{1 + \omega_0^2}}{1 + \omega_0^2}$$

$$|F(3\omega_0)| = \frac{1}{3} \frac{\sqrt{1 + \omega_0^2}}{1 + \omega_0^2}$$

şimdi $D_n = \frac{1}{T_0} F(\omega)$ uyarınca Fourier serisinin $n = 3$, üçüncü harmoniği (D_3) hesaplanabilir.

$$\frac{1}{T_0} F(3\omega_0) = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{2}}{3(1 + \omega_0^2)} e^{j\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{3\sqrt{2}(1 + \omega_0^2)} e^{j\frac{\pi}{4}} = D_3$$

Şimdi $F(3) = |F(3)| e^{j\angle F(3)}$ ifadesini $\omega = 3$ frekansı için elde etmeye çalışalım.

$$F(\omega) = \frac{3}{9 + \omega^2} + j \frac{\omega}{9 + \omega^2}$$

$$F(3) = \frac{3}{9 + 3^2} + j \frac{3}{9 + 3^2} = \frac{3}{9 + 9} + j \frac{3}{9 + 9} = \frac{1}{6} + j \frac{1}{6}$$

$$F(3) = \frac{1}{6} (1 + j) = \frac{\sqrt{2}}{6} e^{j\frac{\pi}{4}}$$

$$F(3) = \frac{\sqrt{2}}{6} e^{j\frac{\pi}{4}}$$

$$|F(3)| = \frac{\sqrt{2}}{6} \text{ ve } e^{j\angle F(3)} = e^{j\frac{\pi}{4}} \text{ veya } \angle F(3) = \frac{\pi}{4}$$

Genel açıdan $n\omega_0$ frekansı için düşünürsek,

$$F(\omega) = \frac{3}{9 + \omega^2} + j \frac{\omega}{9 + \omega^2}$$

$$F(n\omega_0) = \frac{3}{9 + (n\omega_0)^2} + j \frac{n\omega_0}{9 + (n\omega_0)^2}$$

$$F(n\omega_0) = \frac{3}{9 + n^2\omega_0^2} + j \frac{n\omega_0}{9 + n^2\omega_0^2}$$

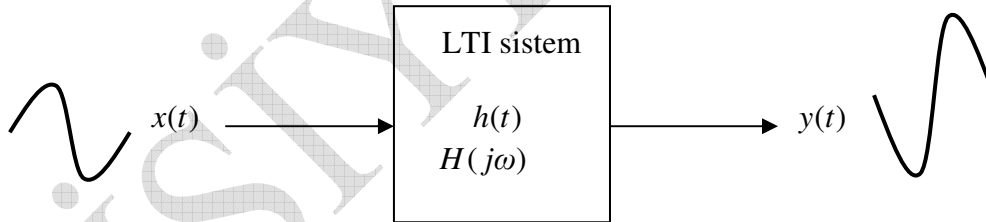
$$|F(n\omega_0)| = \frac{\sqrt{9 + (n\omega_0)^2}}{9 + (n\omega_0)^2} = \frac{\sqrt{9 + n^2\omega_0^2}}{9 + n^2\omega_0^2} = \frac{1}{\sqrt{9 + n^2\omega_0^2}}$$

$$|F(n\omega_0)| = \frac{1}{\sqrt{9 + n^2\omega_0^2}}$$

buradan periodik bir işaretin $n\omega_0$ harmoniklerinin (frekanslarının) Fourier transformasyonu elde edilebilir.

FREKANS CEVABI

Bu kavram Fourier transformasyonunun ve dolaylı olarak frekans seçici filtrelerin en önemli özelliğidir. Bu anlamda filtreler, tam anlamıyla Fourier transformasyonu üzerine kurulu sistemlerdir. Bu analizler frekans cevabı altında genliğin frekansla değişimini gösteren genlik (frekans) cevabı ve fazı frekansla değişimini gösteren faz (frekans) cevabı olarak incelenmektedir. Sistemin frekans domenindeki transfer fonksiyonu ($H(j\omega)$) göz önüne alınarak frekans cevabı araştırılır. Bu filtrelerin frekans seçici özelliklerini analiz etmek üzere, girişlerine periodik sinusoidal bir işaret uygulanarak, filtre çıkışı analiz edilmektedir. Çıkış işareti, genlik ve faz frekans cevaplarına göre göz önüne alınmaktadır. Filtre karakteristiği hem genliğin frekansla olan değişimi, hemde fazın frekansla olan değişimini esas almaktadır. Bu anlamda filtre çıkışının, girişe göre aynı frekansta ama farklı genlik ve fazda oluştuğu görülmüştür. Bu yaklaşım aşağıdaki şekil üzerinden de teyit edilebilir.



Şekil 21 LTI Sistemin $x(t) = e^{st}$ sinusoid işarete sinusoid cevabı

Bu yaklaşımın matematiksel ispatı aşağıda yapılmıştır. Buna göre girişi periodic sinusoid olan LTI sistemlerin cevabı araştırılmaktadır. Eğer sistem impuls cevabı $h(t)$ ve girişi $x(t) = e^{st}$ veya $x(t) = A e^{j(\omega t + \phi)} = A e^{j\phi} e^{j\omega t}$ gibi bir sinusoid ise, sistem toplam çıkışı $y(t)$

$$\begin{aligned} y(t) &= h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) x(t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) A e^{j\phi} e^{j\omega(t-\tau)} d\tau = \left(\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \right) A e^{j\phi} e^{j\omega t} \\ &= H(j\omega) A e^{j\phi} e^{j\omega t} \end{aligned}$$

Görüldüğü gibi sistem çıkışı $x(t) = A e^{j(\omega t + \phi)} = A e^{j\phi} e^{j\omega t}$ girişiyle aynı ω frekansta ama sistem fonksiyonunun $H(\omega) = |H(\omega)| e^{j\angle H(\omega)}$ formundan dolayı girişten farklı genlik ve faz da elde edilmiştir. Çıkışı belli bir ω_0 frekansı için düzenlersek ifade aşağıdaki gibi olacaktır.

$$\begin{aligned} y(t) &= H(j\omega) A e^{j\phi} e^{j\omega t} = H(\omega_0) A e^{j\phi} e^{j\omega t} \\ &= H(\omega_0) x(t) \end{aligned}$$

olarak elde edilir. $H(\omega_0)$ ifadesi için öncelikle $h(t)$ işaretinin Fourier transformasyonu olan $H(\omega)$ bulunduktan sonra $\omega = \omega_0$ için $H(\omega_0)$ hesaplanmalıdır. Bu yüzden sistem cevabını frekans domeninde araştırılalım.

$$\begin{aligned} F\{y(t)\} &= F\{h(t) * x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t} \left[\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) x(t-\tau) d\tau \right] dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) \left[\int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau) e^{-j\omega t} dt \right] d\tau \end{aligned}$$

Buradan “zaman öteleme özelliğinden “

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau) e^{-j\omega t} dt = F(\omega) e^{-j\omega\tau}$$

olduğunu hatırlıyorsak yukarıdaki ifade,

$$\begin{aligned} F\{y(t)\} &= F\{h(t) * x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t} \left[\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) x(t-\tau) d\tau \right] dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) \left[\int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau) e^{-j\omega t} dt \right] d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) \left[\int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau) e^{-j\omega t} dt \right] d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) X(\omega) e^{-j\omega\tau} d\tau = X(\omega) \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = F_2(\omega) \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau}_{H(\omega)} \\ &= X(\omega) H(\omega) \end{aligned}$$

$$Y(\omega) = X(\omega) H(\omega)$$

Buna göre sistemin her bir elemanı açık olarak

$$X(\omega) = |X(\omega)| e^{j\angle X(\omega)} \quad \text{ve} \quad H(\omega) = |H(\omega)| e^{j\angle H(\omega)}$$

$|H(\omega)|$ = genlik frekans cevabı

$\angle H(\omega)$ = faz frekans cevabı

Buna göre girişi $X(\omega) = |X(\omega)| e^{j\angle X(\omega)}$ olan LTI sistemin cevabı $Y(\omega) = X(\omega) H(\omega)$ bağıntısına göre

$$\begin{aligned} Y(\omega) &= X(\omega) H(\omega) = |X(\omega)| e^{j\angle X(\omega)} |H(\omega)| e^{j\angle H(\omega)} = |X(\omega)| |H(\omega)| e^{j\angle X(\omega)} e^{j\angle H(\omega)} \\ &= |X(\omega)| |H(\omega)| e^{j(\angle X(\omega) + \angle H(\omega))} \end{aligned}$$

Görüldüğü gibi $Y(\omega)$ sistem çıkışı girişle aynı (ω) frekansta ama genlik ve faz olarak farklı genlik ve fazlarda oluşmuştur. Sistemin bu davranışına **frekans cevabı** denilmektedir.

$$Y(\omega) = |Y(\omega)| e^{j\angle Y(\omega)}$$

$$|Y(\omega)| = |X(\omega)| |H(\omega)|$$
$$\angle Y(\omega) = e^{j\angle Y(\omega)} = e^{j(\angle X(\omega) + \angle H(\omega))}$$

Örnek

LTI Sistemin frekans cevabı

$$H(\omega) = \frac{j\omega}{200\pi + j\omega}$$

ve girişi

$$x(t) = 20 e^{j0.3\pi} e^{j200\pi t}$$

ise, a) sistem çıkışını hesaplayın b) sistem tipini filtre açısından değerlendirin.

Çözüm

$$a) y(t) = x(t)H(\omega_0)$$

İfadeden $H(\omega_0)$ bulunmalıdır. Bunun için öncelikle ω_0 değeri $x(t)$ girişinden bulunmalıdır. Giriş işareti incelenirse, $\omega_0 = 200\pi$ rad/sn olduğu görülür. Bu değer verilen $H(\omega)$ de yerine yazılarak $H(\omega_0)$ elde edilir.

$$H(200\pi) = \frac{j200\pi}{200\pi + j200\pi} = \frac{j}{1+j} = \frac{j(1-j)}{(1+j)(1-j)} = \frac{1+j}{2} = \frac{1}{2} + \frac{j}{2}$$

$$|H(200\pi)| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\angle H(\omega) = \tan^{-1} \frac{1/2}{1/2} = 1 = e^{j\pi/4}$$

$$H(200\pi) = |H(\omega)| e^{j\angle H(\omega)} = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{j\pi/4}$$

Tüm bunlardan sonra $x(t) = 20 e^{j0.3\pi} e^{j200\pi t}$ sistem girişi ve $H(200\pi) = (1/\sqrt{2}) e^{j\pi/4}$ sistem fonksiyonu için sistem çıkışı

$$y(t) = x(t)H(200\pi) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{j\pi/4} 20 e^{j0.3\pi} e^{j200\pi t} = \frac{20}{\sqrt{2}} e^{j0.25\pi} e^{j0.3\pi} e^{j200\pi t} = 10\sqrt{2} e^{j(200\pi t + 0.55\pi)}$$

Görüldüğü gibi sistem girişi $\omega_0 = 200\pi$ rad/sn frekansı için $x(t) = 20 e^{j(200\pi t + 0.3\pi)}$ olmasına rağmen çıkış $y(t) = 10\sqrt{2} e^{j(200\pi t + 0.55\pi)}$ olarak $\omega_0 = 200\pi$ rad/sn aynı frekansta ama farklı genlik ($10\sqrt{2}$) ve farklı fazda (0.55π rad/sn) elde edilmiştir.

b) Filtrelerin performans değerlendirilmeleri daha ziyade kazanç (gain) durumuna göre yapıldığından verilen sistem, kazancı sağlayacak biçimde aşağıdaki gibi düzenlenir.

$$H(\omega) = \frac{j\omega}{200\pi + j\omega} = \frac{j\omega(200\pi - j\omega)}{(200\pi + j\omega)(200\pi - j\omega)} = \frac{(\omega^2 + j200\pi\omega)}{\omega^2 + 40000\pi^2} = \frac{\omega^2(1 + j\frac{200\pi}{\omega})}{\omega^2(1 + \frac{40000\pi^2}{\omega^2})} = \frac{(1 + j\frac{200\pi}{\omega})}{(1 + \frac{40000\pi^2}{\omega^2})}$$

$$H(\omega) = \frac{1 + j\frac{200\pi}{\omega}}{(1 + \frac{40000\pi^2}{\omega^2})} = \frac{1}{(1 + \frac{40000\pi^2}{\omega^2})} + j\frac{\frac{200\pi}{\omega}}{(1 + \frac{40000\pi^2}{\omega^2})}$$

$$|H(\omega)| = \sqrt{\left(\frac{1}{(1 + \frac{40000\pi^2}{\omega^2})}\right)^2 + \left(\frac{\frac{200\pi}{\omega}}{(1 + \frac{40000\pi^2}{\omega^2})}\right)^2} = \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{200\pi}{\omega}\right)^2}}{(1 + \frac{40000\pi^2}{\omega^2})}$$

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} |H(\omega)| = \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{200\pi}{0}\right)^2}}{(1 + \frac{40000\pi^2}{0})} = \infty$$

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} |H(\omega)| = \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{200\pi}{\infty}\right)^2}}{(1 + \frac{40000\pi^2}{\infty})} = 1$$

Verilenlere göre $\lim_{\omega \rightarrow 0} H(\omega) = \infty$ ve $\lim_{\omega \rightarrow \infty} H(\omega) = 1$ olduğundan, sistem düşük frekanslar için yüksek, yüksek frekanslar için düşük kazanç gösterdiğinden alçak geçiren filtre gibi davranmaktadır. Diğer yandan $\omega_0 = 200\pi$ rad/sn için $|H(200\pi)| = 1/\sqrt{2} = 0.7$ değerinin elde edilmeside alçak geçiren filtre özelliğini destekler özelliktedir.

Fourier Transformasyonunun Varlığı

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

Olarak hesaplanan Fourier transformasyonu band sınırlı veya sınırsız tüm işaretlerin spektrumunu gösteren bir işaret analiz tekniği olmakla beraber, bu her zaman için var olduğu anlamına gelmez. Fourier transformasyonunun var olabilmesi için Dirichlet koşullarını sağlaması gerekir. Bunun için $f(t)$ işaretinin sonlu bir aralıkta sonlu sayıda min ve maximumlarının olması ve sonlu sayıda süreksizliğinin bulunması gerekecektir. Bu koşul gereği $F(\omega)$ sonlu olması gerektiğinden Fourier transformasyonunun var olabilmesi (existence) için

$$|F(\omega)| < \infty$$

koşulunun sağlanması gerekmektedir. sağlanmalıdır. Buna göre de

$$\begin{aligned} |F(\omega)| &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \right| = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| |e^{-j\omega t}| dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt \end{aligned}$$

sonuçta $|F(\omega)| < \infty$ gereği

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty$$

veya

$$F(\omega) \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt$$

durumunda Fourier transformasyonu mevcuttur. Bu ifadelerde sinusoidal ifadelerden oluşan exponeysiyel ifade $|e^{-j\omega t}| = 1$ olarak alınmıştır.

$$e^{jn\omega t} = \cos \omega t + j \sin \omega t$$

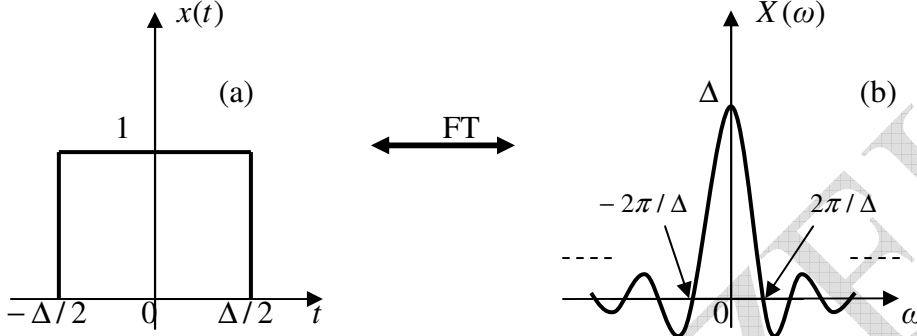
$$|e^{j\omega t}| = \sqrt{\cos^2 \omega t + \sin^2 \omega t} = 1$$

$$|e^{j\omega t}| = 1$$

Bu koşullarda hem Fourier transformasyonu integre edilebildiği içinde işaret fonksiyonu $f(t)$ ye yakınsanabilmektedir. Diğer yandan var olabilme koşulu olan $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty$ sağlandığı sürece, band sınırlı bir işareten söz edilebilecektir.

Zaman Domeninden Band Genişliğinin Gözlemlenmesi

Burada zaman domenindeki işaretin davranışına bakarak, işaretin frekans domenindeki band genişliği tespit edilmektedir. Buna göre aşağıdaki gibi Δ genişliğinde bir dikdörtgen $x(t)$ işareti düşünülüm. Zaman domenindeki genişliği Δ olan dörtgen veya herhangi bir işaretin band genişliği $1/\Delta$ Hz veya $2\pi/\Delta$ rad/sn dir. Bunu aşağıdaki $x(t)$ - $X(\omega)$ Fourier dönüşümünden de görebilmekteyiz.



Şekil 22 $x(t)$ - $X(\omega)$ Fourier transformasyonu ve işaret spektrumu

Şekilden görüldüğü gibi zaman domenindeki genişliği Δ olan işaretin band genişliği $X(\omega)$ spektrumundan $2\pi/\Delta$ rad/sn olarak bulunmuştur. Aslında $X(\omega)$ spektrumu sonsuz band içeren görüntüde olmasına rağmen, nerjisinin önemli bölümünün $(0 - 2\pi/\Delta)$ aralığında yoğunlaşmasından dolayı, esas band genişliği bu yüzden $2\pi/\Delta$ rad/sn veya $1/\Delta$ Hz dir. Durumun tıpkı period (T) ile frekans bulunurken dikkate alınan $(1/T)$ yaklaşımından esinlenildiği farkedilmektedir. Dikkate alınan $x(t)$ - $X(\omega)$ dönüşümü veya $\text{rect}(t)$ - $\text{sinc}(\omega)$ dönüşümünün esas alındığı

$$x(t) = \text{rect}\left(\frac{t}{\Delta}\right) \leftrightarrow X(\omega) = \Delta \text{sinc}\left(\frac{\omega\Delta}{2}\right)$$

denklemine bakıldığında da durum görülebilmektedir. Denklemdaki $\text{rect}\left(\frac{t}{\Delta}\right)$ ifadesindeki Δ , darbe işaretinin genişliğini $(-\Delta/2, \Delta/2)$ olarak gösterirken, darbe işaretinin Fourier transformasyonu olan $\Delta \text{sinc}\left(\frac{\omega\Delta}{2}\right)$ ifadesinde darbenin genişliği olan Δ bu kez $\text{sinc}(\omega)$ fonksiyonunun genliğini gösterirken, argüman içersinde yer alan $\left(\frac{\omega\Delta}{2}\right)$ ise, frekansı veya band genişliğini göstermektedir.

Eğer $\cos \omega t$ veya $\sin \omega t$ tipli sinusoidleri göz önüne alırsak, bunların argüman kısmında görülen ωt ifadesinden “ t ” zaman ve “ ω ” frekansının tespit edilmesi basitti. Burdan hareket edersek zaman domenindeki $\text{rect}\left(\frac{t}{\Delta}\right)$ ifadesinin $\text{rect}(\omega t)$ gibi düşünülmesi halinde, yani

$$\text{rect}\left(\frac{t}{\Delta}\right) = \text{rect}(\omega t)$$

$$\frac{t}{\Delta} \text{ rad} = \frac{2\pi f t}{2\pi} \text{ rad}$$

$$f = \frac{1}{\Delta} \text{ Hz}$$

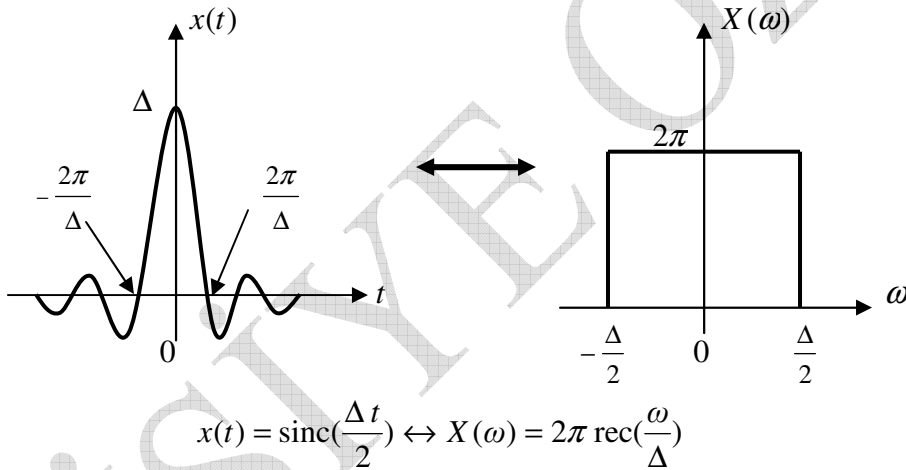
Diğer yandan, benzer yaklaşımı $\Delta \text{sinc}(\frac{\omega\Delta}{2})$ tarafı içinde düşünebiliriz. Buna göre, $X(\omega)$ spektrumundaki sıfır noktaları $\pm\pi, \pm2\pi, \pm3\pi, \dots, \pm n\pi$ olduğundan, ilk nokta olan $\pm\pi$ için analiz yapabiliriz. Buna göre bu ilk nokta

$$\pi = \frac{\omega\Delta}{2}$$

$$\pi = \frac{2\pi f \Delta}{2}$$

$$f = \frac{1}{\Delta} \text{ Hz}$$

Elde edilmeside genişliği Δ olan işaretin frekansı veya band genişliğinin $1/\Delta$ olduğunu görüşünü desteklediğini görmekteyiz. Diğer yandan yukarıdakinden biraz farklı görünümde olan aşağıdaki şekil üzerinden de benzer analizleri yapmak mümkündür.



Şekil 23 $x(t)$ - $X(\omega)$ Fourier transformasyonu ve işaret spektrumu

Buradan da zaman domenindeki $\text{sinc}(\frac{\Delta t}{2})$ ifadesindeki $4\pi/\Delta$ genişliğindeki sinc işaretinin genişliği $(-2\pi/\Delta, 2\pi/\Delta)$ olarak gösterilirken, bunun frekansı olarak $\Delta/2$ rad/sn veya $4\pi/\Delta$ olarak frekans domeninde $2\pi \text{rec}(\frac{\omega}{\Delta})$ fonksiyonu ile benzer paralellikte gösterilmektedir. Bununla değişik fonksiyonların zaman domenindeki genişliklerini dikkate alarak, frekanslarını veya band genişliklerinin bulunabildiği görülmektedir.

BAND SINIRLI İŞARET

Band sınırlı işaretlerin belirlenmesinde Fourier transformasyonu önemlidir. Bu açıdan Fourier transformasyonu band sınırlı işaretlerin analizinde kullanılan önemli bir spektrum analiz yöntemidir. İşaretin band sınırlı veya band sınırsız hali Fourier transformasyonu ile belirlenebilmektedir. Genel olarak zaman domeninde sınırlı olan işaretin band olarak sonsuzdur. Bunun terside doğrudur. Yani, frekans domeninde sınırlı olan işaret zaman domeninde sınırsızdır. Zaman domeninde sınırsız olup da, band domeninde yine band sonsuz olan Gaussian gibi istisna işaretler mevcuttur. Fourier transformasyonu genel olarak durağan özellikteki tüm işaretlerin frekans analizi yapılabilir. Ancak bu, Fourier transformasyonu uygulanabildiği için işaretlerin band sınırlı olmasını gerektirmemektedir. Fourier transformasyonu durağan özellikteki bir işaretin band sınırlı olup olmadığı anlaşılır. Eğer işaret band sınırlıysa

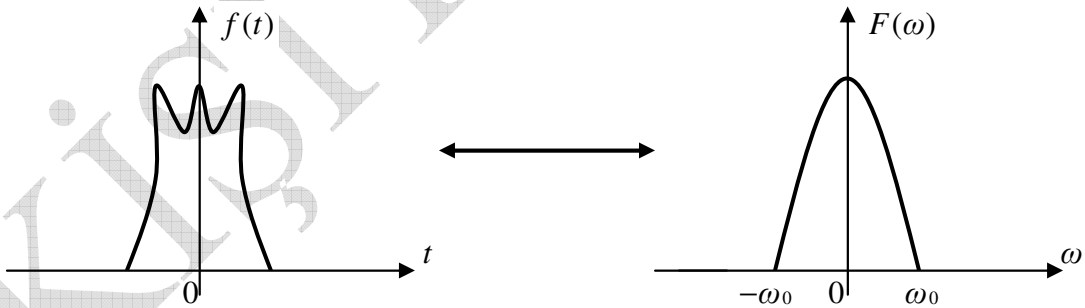
$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$\text{Band sınırlı işaret} = F(\omega) = \begin{cases} 0 & F(\omega) > \omega_0 \\ 0 & F(\omega) < -\omega_0 \\ E & -\omega_0 < F(\omega) < \omega_0 \end{cases}$$

veya kısaca

$$\text{Band sınırlı işaret} = F(\omega) = \begin{cases} 0 & |F(\omega)| > \omega_0 \\ E & |F(\omega)| < \omega_0 \end{cases}$$

Buna göre belirli bir $\pm \omega_0$ bandının dışında Fourier transformasyonu sıfır ise ($F(\omega) = 0$), işaret band sınırlı demektir.



Şekil 24 $f(t)$ işareti ve band sınırlı işaret ($|F(\omega)| < \omega_0$)

Yukarıdaki şekilden $f(t)$ işareti $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty$ koşulunu sağladığı için $F(\omega)$ spektrumu $-\omega_0 < F(\omega) < \omega_0$ koşuluna uygun, sınırlı bir bandı gösterdiği için, $f(t)$ işaretinin band sınırlı işaret olduğu düşünülebilir. Verilenlerin ışığında aslında işaretin band sınırlı olduğunu gösteren, Fourier transformasyonunun var olma sebebi olan

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty$$

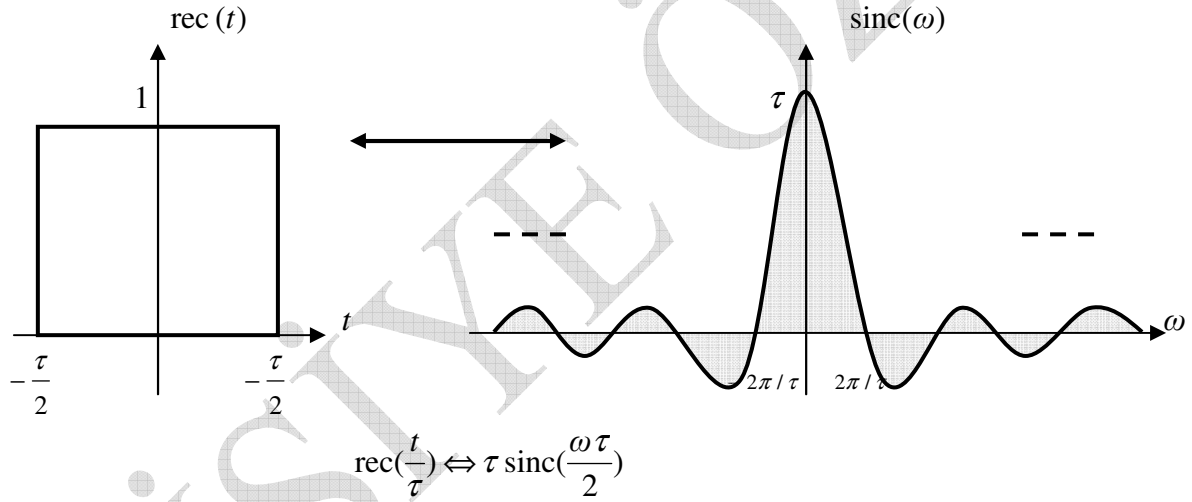
ifadesinin olduğunu görüyoruz. Bu koşul sağlandığı sürece, Fourier transformasyonu vasıtasıyla bir değer elde edilebilecektir. Elde edilen bu değer, bir biçimde belirli bir aralıkta yoğunlaşan enerjisinin de ifadesi olacağından, işaretin band sınırlı olduğundan söz edilebilir. Bu anlamda bir işaretin band sınırlı olabilmesi için Fourier transformasyonunun varlığını gösteren, $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty$ koşulunun sağlanması gerektiğini öğrenmiş bulunuyoruz.

1. Zaman Limitli İşaretlerin Band Genişliği

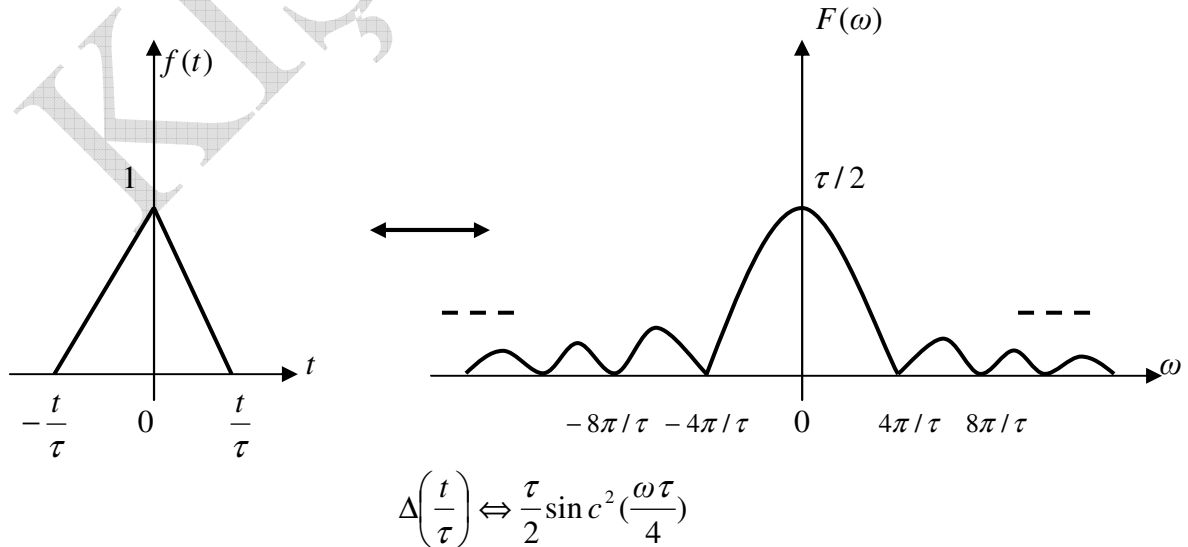
Daha önce hatırlanacağı gibi, zaman limitli işaretlerin band limitli olamayacağı söylenmişti. Eğer aşağıdaki bağıntıdan

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

$f(t)$ işareti zaman limitliyse, görüldüğü gibi zaman limitli olarak kabul edilen bu işaret $\omega = (-\infty, \infty)$ sonsuz band genişliği için elde edilmiştir. Buna göre zaman limitli bir işaret band sonsuz işarettir. Aşağıda bunun örnekleri verilmiştir.



Şekil 25 Zaman limitli işaret ve sonsuz spektrum



Şekil 26 Zaman limitli işaret ve sonsuz spektrum

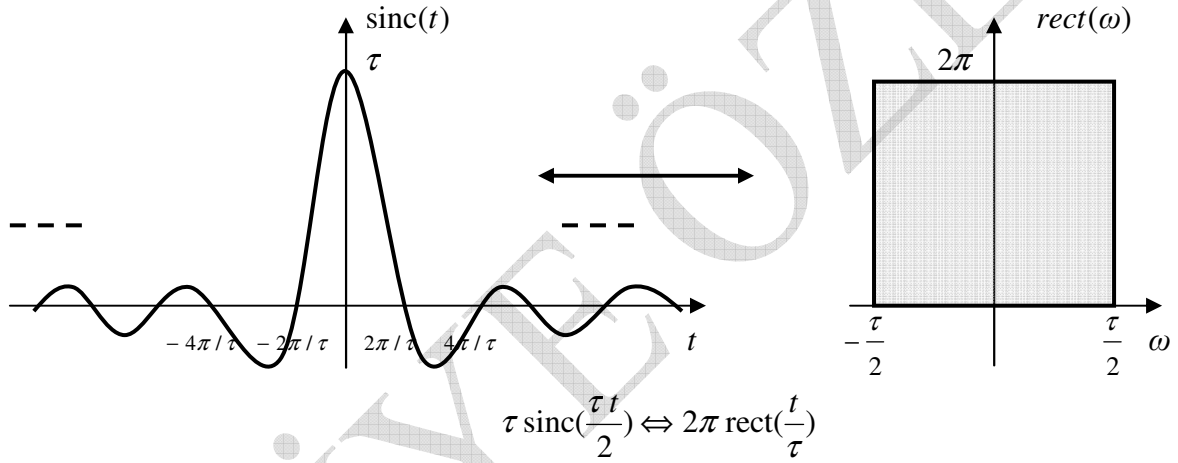
Her iki şekilden de görüldüğü gibi zaman domeninde sonlu işaret, frekans domeninde band limitsiz elde edilmiştir. Bununla zaman domeninde sınırlı olan işaretin, band sınırlı olamayacağı görülmektedir.

2. Band (frekans) Limitli İşaretlerin Zaman Domeni

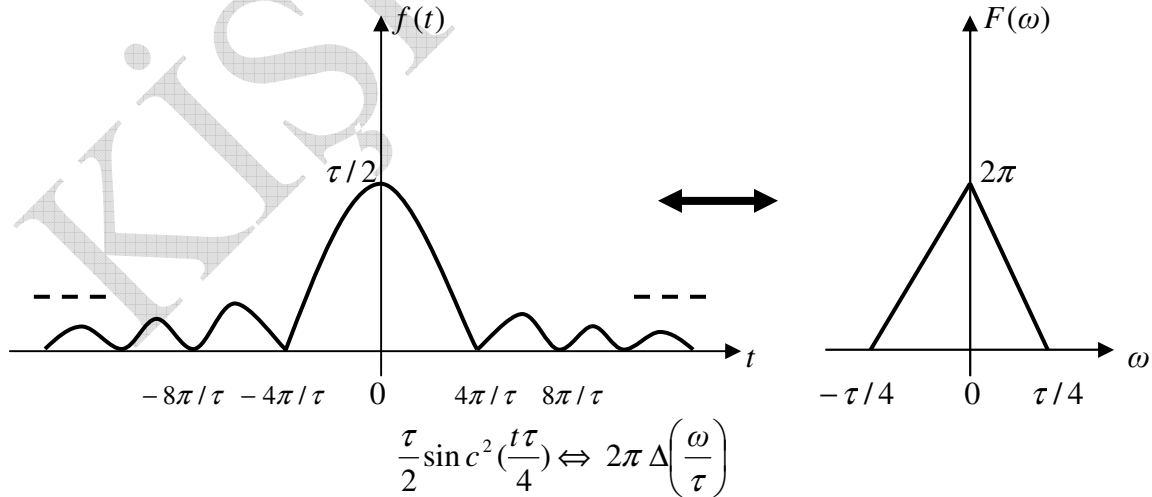
Daha önce hatırlanacağı gibi, band limitli işaretlerin zaman limitli olamayacağı söylenmişti. Eğer aşağıdaki bağıntıdan

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

$F(\omega)$ Fourier transformasyonu sınırlıysa, bunun ifadedeki $t = (-\infty, \infty)$ zaman limitsiz aralıktan elde edildiği görülmektedir. Buna göre band limitli bir işaret zaman limitsiz işarettir. Aşağıda bunun örnekleri verilmiştir.



Şekil 27 Zaman limitsiz işaret ve sonlu spektrum



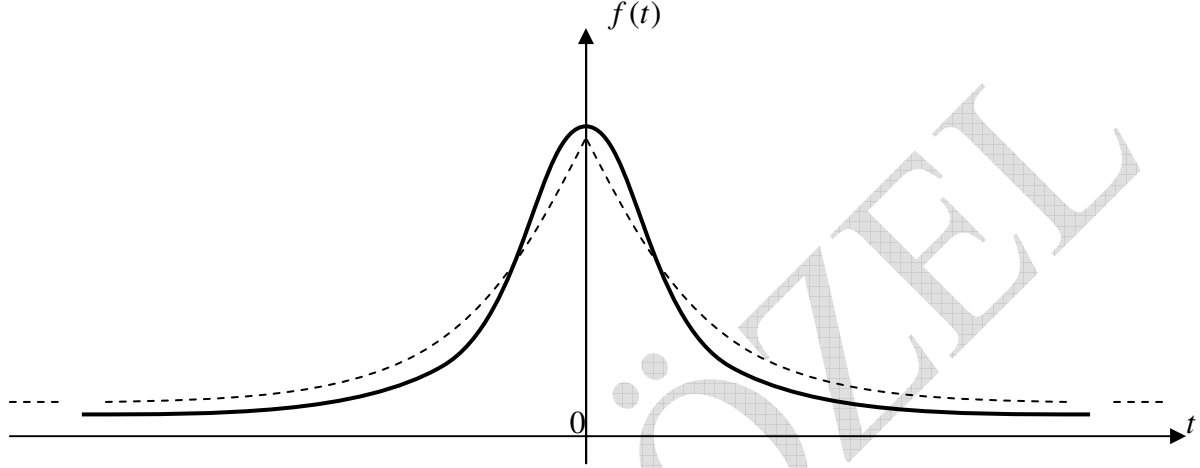
Şekil 28 Zaman limitli işaret ve sonsuz spektrum

Her iki şekilden de görüldüğü gibi frekans domeninde sonlu işaret, zaman domeninde zaman limitsiz elde edilmiştir. Bununla frekans domeninde sınırlı olan işaretin, zaman sınırlı olamayacağı görülmektedir.

3. Zaman-Limitsiz Band-Limitsiz İşaretler

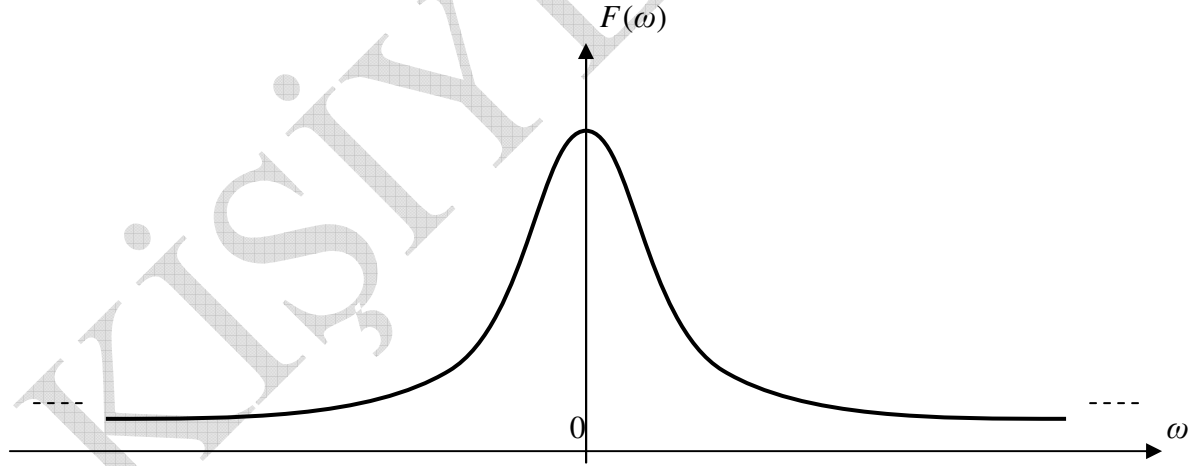
Yukarıda ele alınan iki tür işaretin dışında olup, istisna kabul edilebilecek işaretlerde mevcuttur. Bunlardan biri Gaussian işaret olarak bilinir. $f(t) = e^{-at^2}$ olarak bilinen bu işaretin zaman ve frekans domeni aşağıda verilmiştir.

$$f(t) = e^{-at^2}$$



Şekil 29 Gauss fonksiyonu : Zaman limitsiz işaret : normal işaret (normal dağılım)

$$F(\omega) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\omega^2 / 4a}$$



Şekil 30 Gauss spektrumu : Normal dağılım

Görüldüğü gibi normal dağılım fonksiyonu olarak da bilinen $f(t) = e^{-at^2}$ Gauss fonksiyonun, hem zaman (t) hemde frekans (ω) domeni sonsuz, ve her iki spektrumu benzer olan (istatistiki parametreler açısından) ender fonksiyonlardan biridir. Sonuçta $F(\omega)$ spektrumuna bakıldığında sifıra yakın ama hiçbir zaman sıfır olmadığından sonsuza değin devam eden sonsuz bir banda sahip olduğu görülür. Diğer yandan gerek zaman gerekse frekans domenindeki normal görünen davranışının sebebinin, merkezi limit teoremiyle açıklandığını biliyoruz. Buna göre bir örnekten sonsuz sayılabilecek çok sayıda örnek alınması durumunda, işaret normal dağılım göstermektedir.

Fourier Transformasyonunun Özellikleri

1. Fourier transformasyonu, periodik olmayan, durağan işaretler için kullanılan çift yönlü bir zaman – frekans dönüşüm yöntemidir.
2. Fourier transformasyonunda dönüşüm “zaman – frekans “ ve “frekans – zaman “ olmak üzere çift yönlüdür $[t \Leftrightarrow \omega \text{ veya } f(t) \Leftrightarrow F(\omega)]$.
3. Zaman – frekans ve frekans – zaman özelliğiyle bir domenden diğer domene geçişi sağladığından, transformasyon veya dönüşüm kavramıyla anılır.
4. Fourier transformasyonu prensip olarak Fourier serisinden farklı olmasına rağmen, Fourier serisinden yararlanılarak geliştirilir.
5. Fourier transformasyonu $T_0 \rightarrow \infty$ koşuluyla, Fourier serisinin özel hali gibi düşünülebilir.
6. Fourier transformasyonu spektrumu Fourier serisinin aksine süreklidir.
7. Fourier serisi spektrumu band sınırsız iken, Fourier transformasyonu spektrumu band sınırlı veya sınırsız olabilir.
8. Fourier transformasyonu belli bir bant aralığındaki enerji yoğunluğu sebebiyle, bant genişliği kavramıyla ilişkilidir.
9. Belli bant da yoğunlaşmış band genişliğinin dışında, Fourier transformasyonu sıfır kabul edilir.
10. Sistemlerin $H(\omega) = |H(\omega)| e^{j\angle H(\omega)}$ biçimli frekans cevaplarının analizlerinde Fourier transformasyonundan yararlanır. Bu amaçla filtre analizleri için Fourier transformasyonu önemlidir.
11. Fourier transformasyonu periodik olmayan işaretlerin analizlerinin yanı sıra, periodik özellikteki basit sinusoidlerin analizleri içinde kullanılabilir.
12. Pozitif eksponensiyel işaretlerin ($f(t) = e^{at}$, $a > 0$) Fourier transformasyonları mevcut değildir. Bu Fourier transformasyonunun zayıf noktasıdır.
13. Sistem açısından yalnızca tam kararlı (asimtotik kararlı) sistemlerin Fourier transformasyon analizi yapılabilirken, marjinal kararlı veya kararsız sistemlerin Fourier transformasyonu ile analizleri mümkün değildir.
14. Fourier transformasyonu, ayrık işaretler içinde aynı amaçlar doğrultusunda kullanılabilir.

Fourier Spektrumunun Simetrisi

Daha önce hatırlanacağı gibi Fourier transformasyonu denklemlerinden,

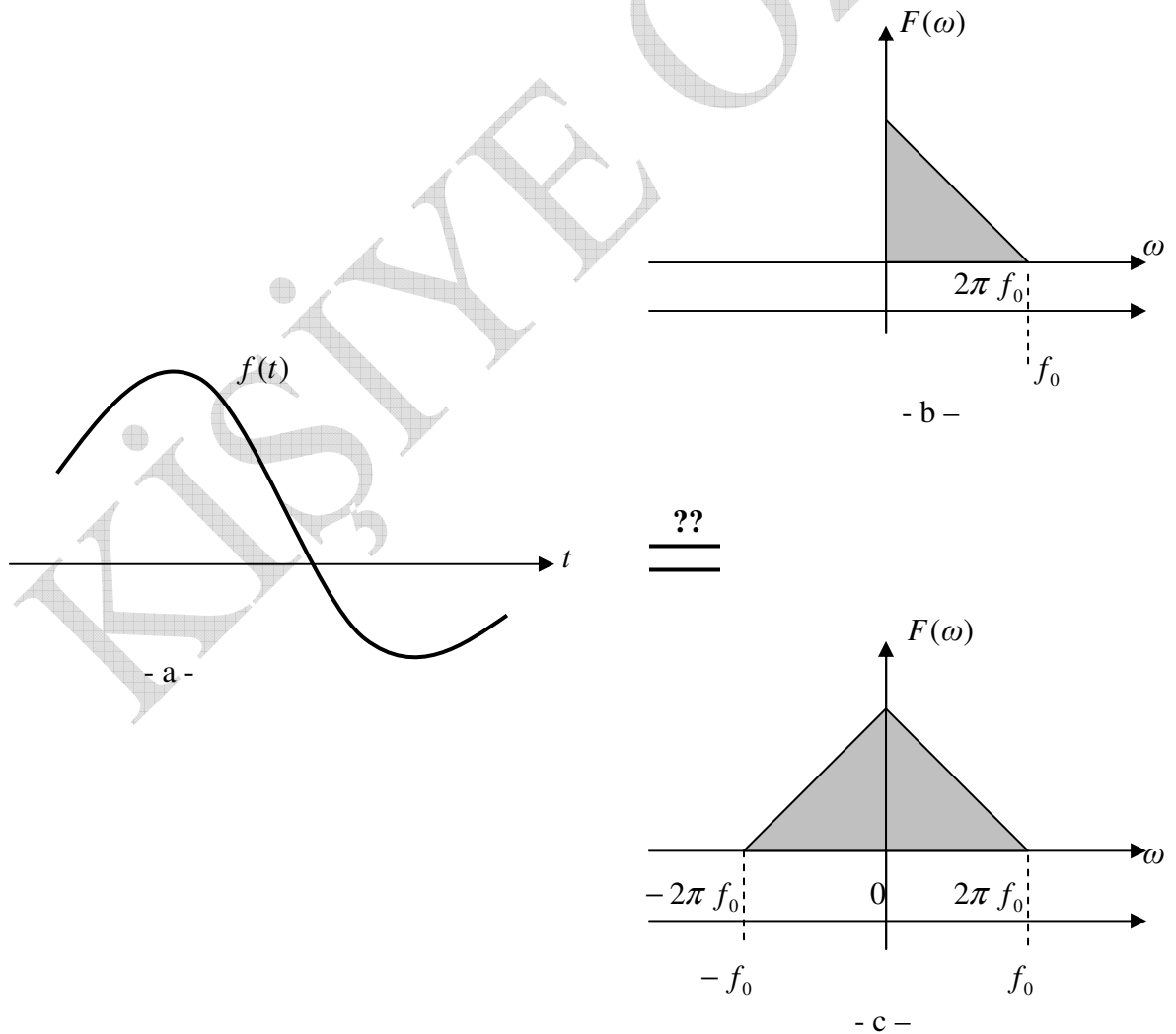
$$|F(-\omega)| = |F(\omega)|$$

yazıldığını yani, reel $f(t)$ gibi işaretler için $|F(\omega)|$ Fourier genlik spektrumu çift fonksiyon, öte yandan eğer faz spektrumu içinde

$$\angle F(-\omega) = -\angle F(\omega)$$

ifadesi yazılırsa, bu kez de reel $f(t)$ gibi işaretler için $\angle F(\omega)$ Fourier faz spektrumu tek fonksiyon özelliklerini biliyoruz. Bu nedenle Fourier transformasyonunun $|F(\omega)|$ genlik cevabı simetrik (çift fonksiyon), ve $\angle F(\omega)$ faz cevabı da ters simetriktir (tek fonksiyon). Bu yaklaşımın detayları aşağıda ele alınmıştır. Burada Fourier transformasyonu olarak aşağıdaki denklemlerle sağlanan zaman-frekans dönüşünlerindeki spektrum görünümüne kısaca değineceğiz. Bunun için aşağıdaki şekli göz önüne alalım.

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \quad \text{ve} \quad f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$



Şekil 31 Spektral yoğunluk : Fourier spektrumu

Şekil (a) da verilen periodik olmayan $f(t)$ işareti f_0 band genişliğine sahiptir (böyle kabul ediyoruz) . Bunu şekil (b) den görebilmekteyiz. İşaretin $F(\omega)$ spektrumu, spektral yoğunluk olarak f_0 veya $(0, f_0)$ band genişliğindeki yoğunlaşma miktarını göstermektedir. Dolayısıyla (a) ve (b) gösterimi doğrudur. Öte yandan (a) ve (c) gösteriminin de doğru olduğunu söyleyebiliriz. Yani f_0 band genişliğindeki bir işaretin Fourier spektrumu veya spektral yoğunluğu (c) deki gibi de gösterilebilir. Buna göre (b) ve (c) spektrumları aynıdır, farklıdır, ve daha önemlisi her ikisinden de tekrar $f(t)$ elde edilebilirmi. Bunun cevabı $F(\omega)$ ifadesinde saklıdır. Eğer detaylara bakarsak,

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^0 f(t) e^{-j\omega t} dt + \int_0^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

Düşünebiliriz. Bu durumda $(-\infty, 0)$ aralığında $f(t)$ işaretinin frekans yoğunluğu (spektral yoğunluk), ω ekseninin sol tarafı için analiz edilecek ve bu aralık için (b) deki spektrumun sol tarafındaki f_0 bantlı $(-f_0)$ olarak üçgen elde edilecektir. Bunun ardından $F(\omega)$ denkleminde bu kez ikinci ifade $(0, \infty)$ aralığı için değerlendirildiğinde bu kez de spektrumun sağ tarafındaki f_0 bantlı üçgen elde edilecektir.

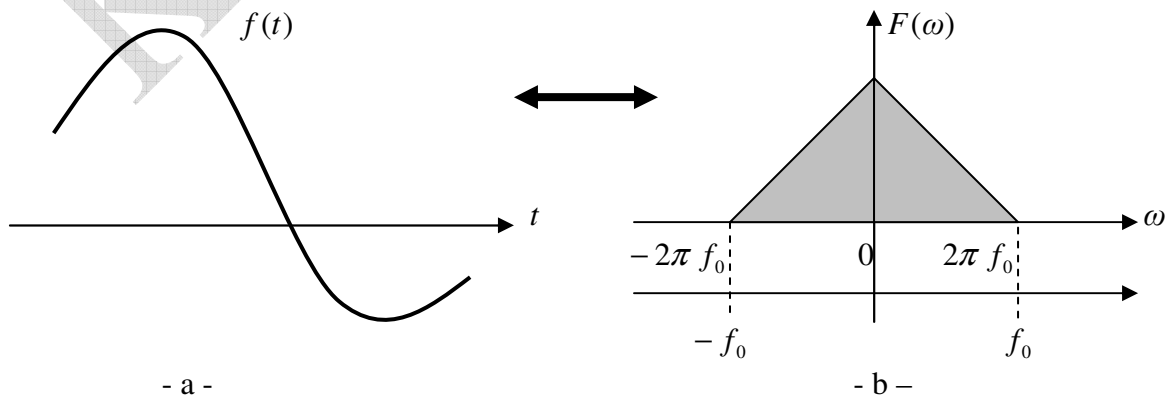
Dikkat edilirse her iki aralıktada aynı $f(t)$ işareti ait aynı bant genişliğindeki spektrumlar elde edilmiştir. Buna göre denklem (b) ve (c) şekillerini dikkate alarak aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt = \underbrace{\int_{-\infty}^0 f(t) e^{-j\omega t} dt}_{\text{sol spektrum}} + \underbrace{\int_0^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt}_{\text{sağ spektrum}}$$

veya daha açık olarak

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt = \underbrace{\int_{-\infty}^0 f(t) e^{-j\omega t} dt}_{\triangleleft} + \underbrace{\int_0^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt}_{\triangleright}$$

yazabiliriz. Bunların neticesinde final gösterim aşağıdaki gibi olmalıdır.



Şekil 32 Spektral yoğunluk : Fourier spektrumu

Buradan bir işaretin Fourier transformasyonu veya spektral yoğunluğu $F(\omega)$ eksenine göre simetrik kabul edilmektedir. Ancak şekil (b) den de görüldüğü gibi işaretin band genişliği f_0 olarak değişmemektedir ($f_0 - (-f_0) = 2f_0$ olarak düşünülmemelidir).

Fourier Transformasyonunda Yakınsama

Fourier serisinde nasıl ki orijinal $f(t)$ fonksiyonuyla bunun Fourier serisine açılmış versiyonu olan $f_s(t)$ arasındaki bir

$$f(t) \cong f_s(t)$$

yakınsaması üzerine kurulmuşsa, Fourier transformasyonunda da aynı orijinal $f(t)$ fonksiyonu bu kez

$$f(t) = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega = f_T(t)$$

denkleminde elde edilecek $f_T(t)$ fonksiyonuna eşit olması istenmekte veya beklenmektedir.

$$f(t) \stackrel{?}{=} f_T(t)$$

Ancak denklemden de görüldüğü gibi $f_T(t)$ fonksiyonu ideal anlamda $(-\infty, \infty)$ aralığından elde edilmektedir. Pratikte böylesine sonsuz bir aralık kullanılamayacağına göre elde edilecek $f_T(t)$ fonksiyonunun, orijinal $f(t)$ fonksiyonunun aynısı veya eşiti olması mümkün olmayacaktır. Bu nedenle en iyi durumda ona yakın olması halinde bile aralarında hata olarak kabul edilebilecek bir farkın olması kaçınılmazdır.

$$f(t) - f_T(t) = \text{hata}$$

Hata değerinin sıfır olması mümkün olmayacağına göre, Fourier transformasyonunda $f_T(t)$ değerinin $f(t)$ orijinal fonksiyona yakınsamasından söz edilir. Bu yakınsamayla, mümkün olabildiğince $f(t)$ nin çok yaklaşımının elde edilmesi beklenmektedir.

Bahsedilen yakınsama, aslında Fourier transformasyonunun doğasıyla ilgili bir durumdur. Çünkü Fourier transformasyonu her ne kadar $(-\infty, \infty)$ gibi sonsuz geniş bir aralıkta düşünülse de, aslında işaretin enerjisinin belirli bir bant da yoğunlaşması, yani band sınırlı olması sebebiyle gerçekte sonsuz alınamabilecektir. İşaretin integrasyon yoluyla elde edildiğini düşünürsek, ve de integrasyonun bir tür ortalama işlem olduğunu bildiğimizden bu işlem sonucu beklenen tam değer elde edilebilir de edilemeyebilir. Aşağıdaki işlem göz önüne alındığında

$$f(t) = \lim_{T_0 \rightarrow \infty} f_{T_0}(t) = \lim_{\Delta\omega \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(n\Delta\omega) e^{j(n\Delta\omega)t} \Delta\omega$$

buradan limit durumuna göre $f(t)$ elde edilebilir de edilemeyebilir de. Bir an için edilememe durumuyla alakalı olarak

$$f(t) - f_T(t) \neq 0$$

durumu söz konusu olacağından, Fourier transformasyonu ile $f(t)$ orijinal işarete bir yakınsama söz konusu olacaktır. Ancak bilinmesi gereken şudur Fourier transformasyonu $\omega = (-\infty, \infty)$ aralığı üzerine kurulduğu için, sonlu hali kullanılarak her zaman için fonksiyonun hatasız hesaplanacağı veya elde edileceği garanti edilemez. Sonlu yaklaşıma rağmen, tam sonuç elde edilebileceği, gibi yakın bir değerde elde edilerek, küçükde olsa bir hata marjı kalır.

Fourier transformasyonu ve ortogonal yaklaşım

Fourier transformasyonu, aynen Fourier seisinde olduğu gibi $\sin \omega t$ ve $\cos \omega t$ gibi ortogonal sinusoidler üzerine kurulduklarından, ortogonal bir tekniktir. Ortogonalite, aynı zamanda Fourier transformasyonu içinde yararlı ve kullanışlı bir özelliktir.

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

Biçiminde ele alınan Fourier transformasyonunun özelliğini vektör analizden yararlanarak incelemeye çalışalım. Daha önceden vektörel analizde ele aldığımız

$$\mathbf{u} = c_1 \mathbf{v}_1 + c_2 \mathbf{v}_2 + c_3 \mathbf{v}_3 + \cdots + c_n \mathbf{v}_n$$

bağıntısına baktığımızda, bir \mathbf{u} vektörü $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \cdots, \mathbf{v}_n)$ ortogonal basis fonksiyonlarına ait bileşenlerden oluşmaktaydı. Buna göre eğer \mathbf{u} vektörü aşağıdaki gibi yazılıyorsa,

$$\mathbf{u} = \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_1 \rangle}{\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1 \rangle} \mathbf{v}_1 + \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_2 \rangle}{\langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_2 \rangle} \mathbf{v}_2 + \cdots + \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_n \rangle}{\langle \mathbf{v}_n, \mathbf{v}_n \rangle} \mathbf{v}_n$$

$$\mathbf{u} = \sum_{k=1}^n \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_k \rangle}{\langle \mathbf{v}_k, \mathbf{v}_k \rangle} \mathbf{v}_k$$

buna göre, \mathbf{u} vektörünün $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \cdots, \mathbf{v}_n)$ orthogonol basis vektörleri üzerine olan $\frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_k \rangle}{\langle \mathbf{v}_k, \mathbf{v}_k \rangle}$ projeksiyonlarının toplamından oluştuğunu düşünebiliriz. Vektörel analizdeki bu davranışı, Fourier transformasyonunda da görmekteyiz. Eğer Fourier transformasyonu olarak bildiğimiz

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

olarak göz önüne alınırsa, Fourier transformasyonunun $e^{-j\omega t}$ basis fonksiyonları üzerine olan $f(t)$ gibi orthogonal projeksiyonlarının toplamı olduğunu düşünebiliriz. Buradan Fourier transformasyonun orthogonal yaklaşıma uyumlu olduğunu görmekteyiz.

Bildiğimiz gibi orthogonal yaklaşımda kullanılan exponensiyel basis fonksiyonu sinusoidal tabanlı olması dolayısıyla orthogonal özelliktedir. Orthogonal yaklaşımı hatırlayacak olursak, $\phi(mx)$ ve $\phi(nx)$ gibi iki orthogonal fonksiyonun aşağıdaki eşitliği

$$\int_a^b \phi(mx) \phi(nx) dx = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ E & m = n \end{cases}$$

sağladığını biliyoruz. Eğer $E = 1$ ise, ortonormal projeksiyon söz konusudur. Bu anlamda yukarıda verilen

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

denkleminin bağlı

$$\begin{aligned} f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [\dots + F(-2) e^{-j2t} d(-2) + F(-1) e^{-jt} d(-1) \\ &+ F(0) d(0) + F(1) e^{jt} d(1) + F(2) e^{j2t} d(2) \\ &+ \dots + F(k) e^{jkt} d(k) + \dots + F(r) e^{jrt} d(r) + \dots] \end{aligned}$$

ifadesinde aranan herhangi bir ω değerini içeren bileşenin $f(t)$ içinde olup olmadığı orthogonal özellikten yararlanılarak hesap edilebilir. Örneğin $\omega = m$ frekanslı bileşenin için $f(t)$ içinde olup olmadığını araştırmak isityorsak $f(t)$ işaretinin her iki tarafını $\omega = m$ için $F(m)$ ile çarpalım.

$$\begin{aligned} F(m)f(t) &= \frac{1}{2\pi} F(m) \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [\dots + F(m)F(-2) e^{-j2t} d(-2) + F(m)F(-1) e^{-jt} d(-1) \\ &+ F(m)F(0) d(0) + F(m)F(1) e^{jt} d(1) + F(m)F(2) e^{j2t} d(2) \\ &+ \dots + F(m)F(k) e^{jkt} d(k) + \dots + F(m)F(r) e^{jrt} d(r) + \dots] \end{aligned}$$

Örneğin $k = m$ ise yazım gereği $F(m)F(k) e^{jkt} d(k)$ veya $F(m)F(m) e^{jmt} d(m)$ terimi ilginç pozisyonda olacaktır. Bu halde $F(m)F(m)$ fonksiyonları (m) frekansına göre orthogonal olacaklarından $F(m)F(m) e^{jmt} d(m)$ teriminin sonucu sıfırdan farklı bir değer olurken, bunun dışındaki terimleri ortogonalite koşulundan dolayı sıfır olacaktır.

$$\begin{aligned} F(m)f(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [\dots + \underbrace{F(m)F(-2) e^{-j2t} d(-2)}_0 + \underbrace{F(m)F(-1) e^{-jt} d(-1)}_0 \\ &+ \underbrace{F(m)F(0) d(0)}_0 + \underbrace{F(m)F(1) e^{jt} d(1)}_0 + \underbrace{F(m)F(2) e^{j2t} d(2)}_0 \\ &+ \dots + \underbrace{F(m)F(m) e^{jmt} d(m)}_{F^2(m)} + \dots + \underbrace{F(m)F(r) e^{jrt} d(r)}_0 + \dots] \end{aligned}$$

ve sonuçta aranan $\omega = m$ frekanslı bileşen

$$F(m)f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(m)F(m) e^{jmt} d(m)$$

$$F(m) = \frac{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(m)|^2 e^{jmt} d(m)}{f(t)}$$

olarak bulunur. Bu yöntemle verilen $f(t)$ işaretinin hangi frekanslardan oluştuğunu gözlemlemek mümkündür. Dolayısıyla Fourier transformasyonunun ortogonal özellik taşıdığını söyleyebiliriz.

Fourier Transformasyonu, Ortogonalite ve Hilbert Uzayı

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

Fourier transformasyonunun ortogonal yaklaşıma göre vektörel veya içsel çarpım (inner product) uzayına göre yazımı aşağıdaki gibi olacaktır.

$$g(t) = e^{-j\omega t}$$

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) g(t) dt$$

$$F(\omega) = \langle f(t), g(t) \rangle$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \overline{g(t)} dt$$

Hilbert uzayı

Son yazılan ifade aynı zamanda Fourier transformasyonu ve Hilbert uzayı arasındaki ilişkiyi de göstermektedir. Böyle bir Hilbert uzayının kompleks değerlikli fonksiyonların içsel çarpımları (inner product) üzerine kurulu olduğunu görmekteyiz. Eğer

$$F(\omega) = \langle f(t), g(t) \rangle$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \overline{g(t)} dt$$

ifadesindeki $\langle f(t), g(t) \rangle$ yaklaşımının ortonormal projeksiyon olduğu görülecektir ($\|g(t)\|^2 = \|e^{j\omega t}\|^2 = 1$). Buna göre yukarıdaki denklem aşağıdaki gibi göz önüne alınmıştır.

$$F(\omega) = \langle f(t), g(t) \rangle = \frac{\langle f(t), g(t) \rangle}{\|g(t)\|^2}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \overline{g(t)} dt$$

Bu anlamda $F(\omega) = \frac{\langle f(t), g(t) \rangle}{\|g(t)\|^2} = \langle f(t), g(t) \rangle$ gibi göz önüne alınırsa, $F(\omega)$ fonksiyonunun $\mathbf{u} = c_1 \mathbf{v}_1 + c_2 \mathbf{v}_2 + c_3 \mathbf{v}_3 + \dots + c_n \mathbf{v}_n$ vektörel gösterimdeki c_1, c_2, \dots, c_n katsayısına karşılık geldiği görülür.

$$F(\omega) = \langle f(t), g(t) \rangle = c$$

Ayrıca, $F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$ denklemiyle karşılaştırıldıklarında $\mathbf{v} = g(t) = e^{-j\omega t}$ ve $\mathbf{u} = f(t)$ eşleşmeleride doğrudur.

Ayrıca yazılan ortonormal projeksiyon ifadesi

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

ile karşılaştırılırsa, $g(t) = e^{-j\omega t}$ olduğu görülecektir. Bu ifade vektörel analiz olan $\mathbf{u} = c_1 \mathbf{v}_1 + c_2 \mathbf{v}_2 + c_3 \mathbf{v}_3 + \dots + c_n \mathbf{v}_n$ için göz önüne alındığında

$$\mathbf{v} = g(t) = e^{-j\omega t}$$

ve

$$c = F(\omega)$$

olduğu görülecektir. Buna göre $\mathbf{v} = g(t) = e^{-j\omega t}$ olarak klasik sinusoidler orthogonal fonksiyonlar olarak alınmıştır. Bu anlamda Fourier transformasyonu olarak $c = F(\omega)$, $\mathbf{u} = f(t)$ nin $\mathbf{v} = g(t) = e^{-j\omega t}$ üzerine olan ortonormal projeksiyonları gibi göz önüne alınmıştır. Bununla yapılmak istenen verilen $f(t)$ fonksiyonunun basis fonksiyon olan $e^{-j\omega t}$ üzerindeki projeksiyonlarını (iz düşümlerini) bulmaktır. Vektör uzayının teorik olarak sonsuz boyutta olduğu düşünülürse, \mathbf{v} gibi sonsuz tane basis vektör yani $e^{-j\omega t}$ tipli sonsuz tane basis fonksiyon mevcuttur. Bu nedenle $f(t)$ fonksiyonunun varsa, uzaydaki her bir basis fonksiyon üzerindeki projeksiyonu hesaplanmalıdır. Verilen $f(t)$ fonksiyonunun bu şekilde olası tüm basis fonksiyonlar üzerindeki projeksiyonlarının alınmasıyla, aslında $f(t)$ fonksiyonunun $\mathbf{v} = g(t) = e^{-j\omega t}$ ile verilen basis fonksiyonlarıyla olan ilişkileri yani korelasyonu ortaya çıkarılmaktadır. Bu yolla $f(t)$ nin $\mathbf{v} = g(t) = e^{-j\omega t}$ üzerindeki mevcut izdüşümleri elde edilerek, bunların süperpozisyonundan, \mathbf{u} vektörü veya $f(t)$ fonksiyonu elde edilmektedir. Hesaplanan projeksiyon sonuçta $\mathbf{v} = g(t) = e^{-j\omega t}$ üzerinde, $f(t)$ fonksiyonuna (noktasına, vektörüne) en yakın noktayı (vektörü) göstermektedir. Bu yolla $f(t)$ fonksiyonuna (noktasına, vektörüne) en yakın nokta olarak, ilgili harmoniğin miktarları olarak $F(\omega)$ hesaplanmaktadır. Bu anlamda $f(t)$ nin $e^{-j\omega t}$ basis fonksiyon üzerindeki en yakın noktanın (vektörün) büyüklüğü yani genliği, $F(\omega)$ olarak hesaplanmaktadır. Buradan $F(\omega)$ bilgisinin $c = F(\omega)$ biçimindeki bir tür katsayı (genlik) bilgisi olduğu ortaya çıkmaktadır. Zaten Fourier serisindeki D_n katsayısı ile Fourier transformasyonundaki

$$D_n = \frac{1}{T_0} F(\omega) = \frac{1}{T_0} F(n\omega_0) = \frac{1}{T_0} F\left(n \frac{2\pi}{T_0}\right)$$

bağıntısı, $F(\omega)$ nin bir tür D_n gibi ilgili harmoniklerin miktarını gösteren bir katsayı durumunda olduğunu teyit etmektedir. Diğer bir anlatımla $F(\omega)$ fonksiyonunu ile göz önüne alınan $\sin n\omega t$ ve $\cos n\omega t$ gibi sinusoid harmoniklerden hangi miktarlarda göz önüne alındığı vurgulanmaktadır.

Fourier Transformasyonunun var olma koşulu

Fourier transformasyonu olarak bilinen aşağıdaki fonksiyonun

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

Varlığı yani mevcudiyeti en başta transformasyon ifadesinin integre edilebilmesi gerekiyor. Bunun içinde Fourier transformasyonunun varlığı işaret fonksiyonunun integre edilebilip, sonlu bir değer elde edilmesiyle mümkün olacaktır.

Buradan anlıyoruz ki her işaretin Fourier transformasyonu alınamamaktadır. Özellikle sürekli büyüyen exponensiyellerin durumunda özel ve belirsiz bir durum vardır. Bu açıdan tipik olarak Fourier transformasyonunun varlığı $f(t) = e^{at}$ tipindeki üstel e^{at} ifadesine göre belirlenir. Çünkü Fourier transformasyonu bu ifadenin dışındaki çoğu fonksiyonlar için mevcuttur. Kritik olan söz konusu exponensiyel ifade için mevcudiyetidir. Mevcut olduğu hal yalnızca

$$a < 0$$

durumu içindir. Çünkü bu durumda

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{at} e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j(\omega-a)t} dt$$

bu durumda $a < 0$ olduğu sürece integrasyondaki $-j(\omega-a)t$ ifadesinden dolayı

$$e^{-j(\omega-a)t} = \frac{1}{e^{j(\omega-a)t}} = \frac{1}{\underbrace{e^{j(\omega+a)t}}_{a < 0} \rightarrow \infty} = \frac{1}{\infty} = 0$$

terimi dolayısıyla integrasyon sönümlü veya belirli bir değere yaklaşacaktır. Bu durumda ele alınan $f(t) = e^{at}$ işaretinin Fourier transformasyonunun mevcut olduğunu düşünebiliriz. Dolayısıyla $f(t) = e^{at}, a < 0$ için bir sorun yoktur. Oysa ki aynı ifadede $a > 0$ alınması durumunda bu kez

$$e^{-j(\omega-a)t} = \frac{1}{\underbrace{e^{j(\omega-a)t}}_{a > 0} \rightarrow 0} = \frac{1}{0} = \infty$$

olacağı için, $a > 0$ durumunda integrasyon monoton artan bir trendle sonsuza yani belirsizliğe gittiği için Fourier transformasyonu mevcut olmaz, bu halde $f(t) = e^{at}, a > 0$ işaretinin Fourier transformasyonu mümkün olmayacağı gibi, işaretlerinden biri bu şekilde olan sistemlerinde kararlılığından söz edilemeyecektir.

Fourier Transformasyonunun ve Kararlılık

Fourier transformasyonu ile analiz edilecek sistemlerin kararlılıkları önemlidir. Bu nedenle genel sistemlerde mevcut üç kararlılık mhalini gözden geçirelim. Bir LTI sistemin transfer fonksiyonunu aşağıdaki gibi göz önüne alırsak

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{(s + z_1)(s + z_2) \cdots (s + z_n)}{(s + p_1)(s + p_2) \cdots (s + p_n)}$$

$s = j\omega$ için sistemin Fourier transformasyonu karşılığının veya frekans cevabının

$$H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = \frac{(j\omega + z_1)(j\omega + z_2) \cdots (j\omega + z_n)}{(j\omega + p_1)(j\omega + p_2) \cdots (j\omega + p_n)}$$

olduğunu düşünürsek, böyle bir LTI sistemin kararlı olabilmesi için aşağıdaki koşulları sağlaması gerektiğini biliyoruz. Öncelikle sistem denkleminin (transfer fonksiyonunun) aşağıdaki yapıda olduğunu düşünelim.

$$H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = \frac{\beta}{(j\omega + \alpha)^2 + \beta^2}$$

Bu durumda sistemin karakteristik denkleminin $((j\omega + \alpha)^2 + \beta^2)$ kökleri $j\omega = -\alpha \pm j\beta$. Bu bilginin ışığında kararlılıkla ilgili aşağıdaki tespitlerimizi yapabiliriz.

1. Sistemin kutupları (p_1, p_2, \dots, p_n) yani kökleri $s = \sigma + j\omega$ ile belirlenmiş kompleks frekans düzleminin sol yarı düzleminde yer alıyorsa, sistem (asimtotik) kararlıdır. Bu durumda sistem kutupları yani kökleri

$$j\omega = -\alpha \pm j\beta$$

gibi olacaktır. Eğer $\beta \neq 0$ ise sistemin kararlı ve eşlenik kökleri (kutupları) var demektir. Ayrıca farklı β değerleri için sistemin tam kararlı hali için yalnızca negative kutupları söz konusu olur. Sistemin tam kararlı durumundaki sistem impuls cevabı

$$h(t) = e^{-\alpha t}$$

Görüldüğü gibi sistem $\alpha > 0$ olmak üzere $t \rightarrow \infty$ için $h(t) \rightarrow 0$ olacağından sistem kararlı olur.

2. Sistemin kutupları (p_1, p_2, \dots, p_n) yani kökleri $s = \sigma + j\omega$ ile belirlenmiş kompleks frekans düzleminin $s = j\omega$ imajiner ekseninde katlı kök olarak yer almıyorsa, sistem marjinal kararlıdır. Bu durumda sistem denklemini

$$H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = \frac{j\omega}{(j\omega)^2 + \beta^2}$$

gibi düşünüleceğinden karakteristik denklemin kökleri

$$j\omega = \pm j\beta$$

gibi katlı kök olmayarak imajiner eksen üzerinde olacaktır. Bu durumdaki sistem impuls cevabı

$$h(t) = \cos \beta t$$

Görüldüğü gibi bu durumda sistem imajiner eksen üzerinde β frekansı ile salınım yapan bir sinusoidal dalga biçimindedir. Sistemi kararsız yapmadığı gibi kararlı da yapmayan belli frekansta (sistemin salınmaya devam eden periyodik özelliği) olduğundan impuls cevabının sıfır olması beklenmez.

3. Sistemin (p_1, p_2, \dots, p_n) kökleri veya kutuplarından herhangi biri $s = \sigma + j\omega$ kompleks frekans düzleminin sağ yarı tarafında yer alıyorsa, sistem kararsızdır.

$$H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = \frac{\beta}{(j\omega + \alpha)^2 + \beta^2}$$

Kararsız durumdaki sistemin kutupları

$$j\omega = \alpha \pm j\beta$$

Sistemin tam kararsız olduğu bu durumdaki sistem impuls cevabı

$$h(t) = e^{\alpha t}$$

Görüldüğü gibi sistem $t \rightarrow \infty$ için $h(t) \rightarrow \infty$ olacağından sistem kararsız olur.

4. Sistemin (p_1, p_2, \dots, p_n) kökleri veya kutuplarından herhangi biri $s = \sigma + j\omega$ kompleks frekans düzleminin $s = j\omega$ imajiner eksen üzerinde katlı kök olarak yer alıyorsa, sistem kararsızdır. Bu durumda sistem denklemi

$$H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = \frac{j\omega}{[(j\omega)^2 + \beta^2]^2}$$

Böyle kararsız bir durumdaki sistemin karakteristik denkleminin ait kökleri (kutupları)

$$j\omega = \pm j\beta$$

gibi kutuplardan tekrarlayan sayılarda olacaktır. Bu durumdaki sistem impuls cevabı

$$h(t) = t \cos \beta t$$

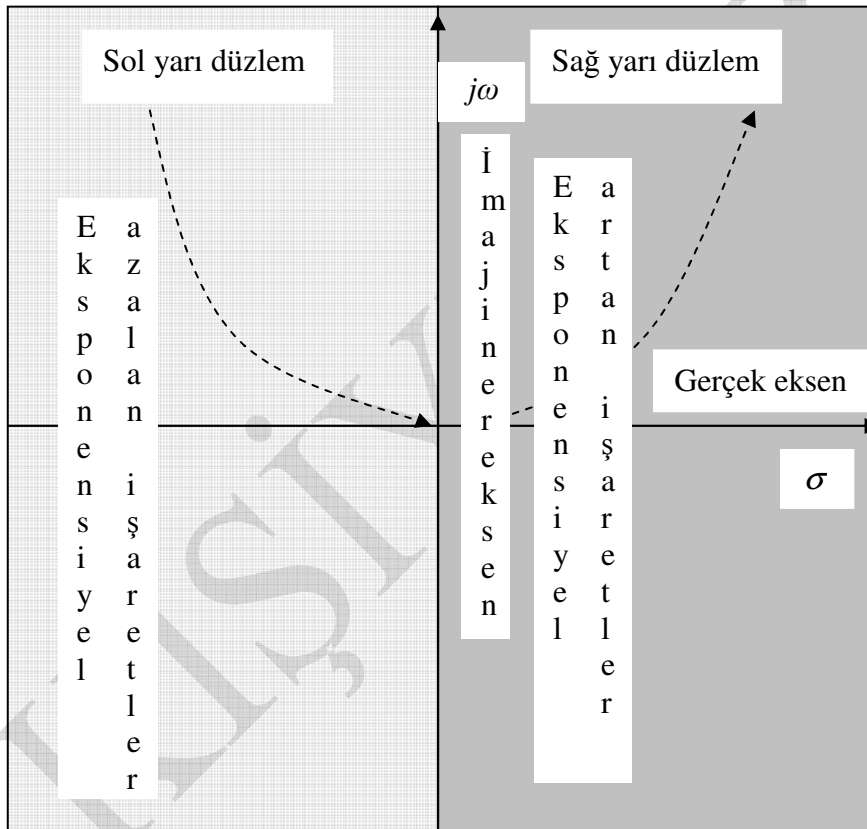
Görüldüğü gibi sistem $t \rightarrow \infty$ için $h(t) \rightarrow \infty$ olacağından sistem kararsız olur. Bu koşulların Fourier transformasyonunun var olması ve olamaması durumuyla ilgili olduğu için, Fourier transformasyonunun ne tür sistemlere uyarlanabileceğinin de bilmemiz gerekiyor. Kararlılık bir anlamda aslında var olma kriteriyle de alakalıdır. Eğer bir işaretin Fourier transformasyonu alınamıyorsa bu işaretin aynı zamanda sistemde uygulanamaması gerekiyor.

Çünkü bu tür işaretler monoton artan olarak sonsuza giden işaretlerse, sistemin çıkışıda sonsuza gidecektir. Bu şekilde kontrol edilemeyen işaretler doğal olarak sistemi kararsız yapmaktadır. Bu açıdan Fourier transformasyonunun kararlı ve kararsız sistemlere uyarlanması önemlidir. Eğer denklemi

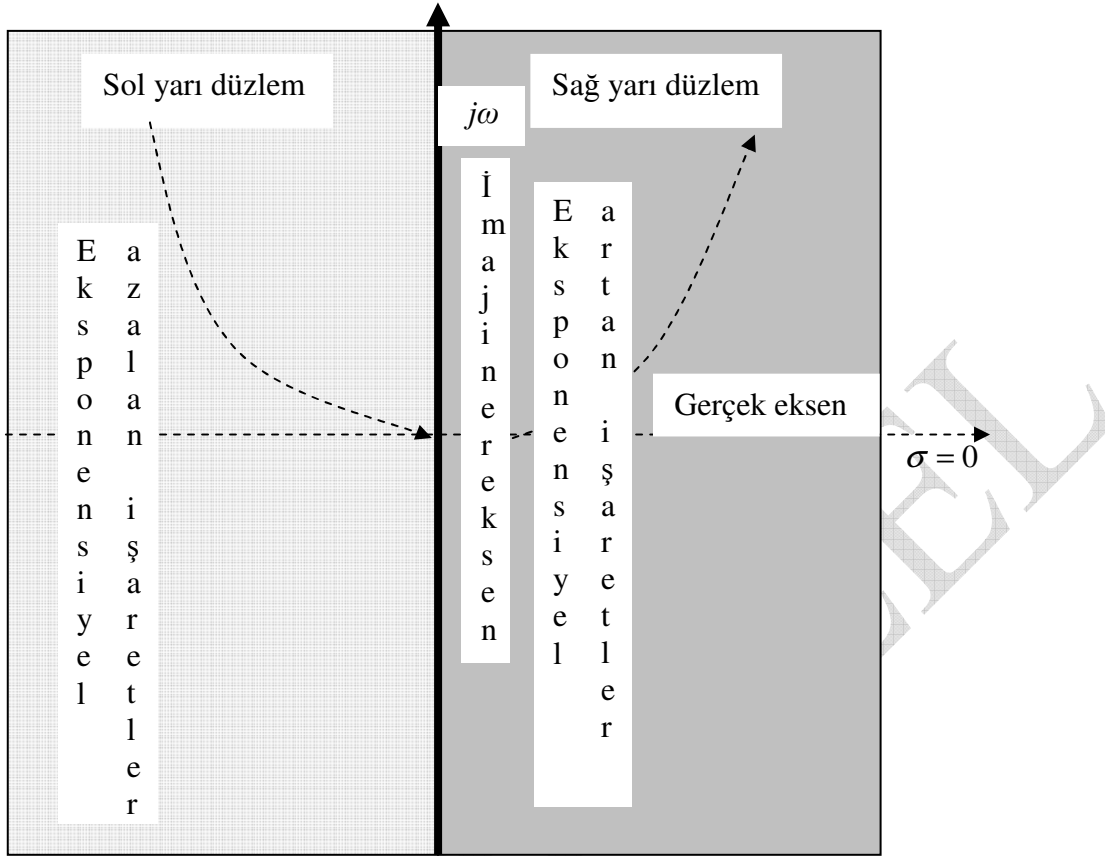
$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

olarak ele alırsak, ifadede görülen $j\omega$ terimi $s = \sigma + j\omega$ kompleks frekans düzleminin $\sigma = 0$ yaklaşımıyla oluştuğu görülecektir. Laplace düzlemi olarak $s = \sigma + j\omega$ ve Fourier düzlemi olarak $s = j\omega$ aşağıda verilmiştir.

Şekilden de görülebileceği gibi, Fourier düzlemi reel kısmın sıfır alınmasıyla ($\sigma = 0$) oluşan genel kompleks frekans düzleminin özel bir hali olarak görülmektedir. Fourier düzleminde yalnızca $j\omega$ biçiminde imajiner eksen mevcuttur (koyu düşey eksen).



Şekil 33 Kompleks frekans düzlemi ($s = \sigma + j\omega$)



Şekil 34 Fourier transformasyonu için kompleks frekans düzlemi ($s = j\omega, \sigma = 0$)

Marjinal kararlı sistem : Diğer bir deyişle Fourier transformasyonu kompleks frekans düzleminin reel kısmının sıfır alınmasıyla, yalnızca imajiner ($j\omega$) kısımdan oluşmaktadır. Bu duruma göre $s = j\omega$ düşünülebilir. Bu anlamda eğer sistemin transfer fonksiyonu

$$H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = \frac{(s + z_1)(s + z_2) \cdots (s + z_n)}{(s + p_1)(s + p_2) \cdots (s + p_n)}$$

$s = j\omega$ kutbunu gösterecek şekilde daha basit anlamda

$$H(j\omega) = \frac{(s + z_1)(s + z_2) \cdots (s + z_n)}{s^2 + p}$$

olarak gösterilirse, $s = \pm jp$ için sistem kutuplarını (pole) gösteren s değerleri imajiner eksende katlı olmayan kökler olacağından, sistem marjinal olarak kararlı olacaktır. Bu durumda $F(\omega)$ Fourier transformasyonu klasik biçiminde olacağından, exponensiyel olarak monoton artan işaretler için sonsuza giderek, var olma koşulunu sağlayamayacaktır. Bu sistemin kararsızlığına sebebiyet vereceğinden, burada çıkan sonuç $h(t) = \cos \beta t$ impuls cevabına sahip sistem hiç bir zaman için $t \rightarrow \infty$ durumunda $h(t) \rightarrow 0$ olmayacağından

sonuç 1 : Marjinal kararlı olan sistemlerin Fourier transformasyonu alınmaz.

Örnek

$$H(j\omega) = \frac{j\omega + 3}{-\omega^2 + 4}$$

Sisteminin kararlılığını inceleyin.

Çözüm

$$H(j\omega) = \frac{j\omega + 3}{-\omega^2 + 4} = \frac{j\omega + 3}{(j\omega)^2 + 4}$$

$$(j\omega)^2 + 4 = 0$$

$$(j\omega)^2 = -4 = 4j^2 = \pm 2j$$

Bulunan kökler $s = \sigma + j\omega$ ile belirlenmiş kompleks frekans düzleminin $s = j\omega$ imajiner ekseninde olup, katlı kök olmadığından, marjinal kararlı sistemdir. Fourier transformasyonu yöntemiyle tam kararlı davranamayan böyle bir sistemin analizi mümkün olmaz.

Kararsız sistem : tam kararsız bir sistemin impuls cevabı $h(t) = e^{\alpha t}$ ve $\alpha > 0$ olduğundan sistem hiç bir zaman için $t \rightarrow \infty$ durumunda $h(t) \rightarrow 0$ olmayacağından sistem kararsız olacaktır. Bu durumda $F(\omega)$ Fourier transformasyonu klasik biçiminden farklı olmayacağından yine, exponensiyel olarak monoton artan işaretler için sonsuza giderek, var olma koşulunu sağlayamayacaktır. Bu sistemin kararsızlığına sebebiyet vereceğinden, burada çıkan sonuç

Sonuç 2 : Kararsız sistemlerin Fourier transformasyonu alınamaz.

Örnek

$$H(j\omega) = \frac{j\omega + 2}{-\omega^4 + 16}$$

Sisteminin kararlılığını inceleyin.

Çözüm

$$H(j\omega) = \frac{j\omega + 2}{-\omega^4 + 16} = \frac{j\omega + 2}{(j\omega)^4 + 16}$$

$$(j\omega)^4 + 16 = 0$$

$$(j\omega)^4 = -16 = (2j)^4 = \pm 2j \text{ ve } \pm 2j$$

Bulunan kökler $s = \sigma + j\omega$ ile belirlenmiş kompleks frekans düzleminin $s = j\omega$ imajiner ekseninde olup, katlı kök olduklarından, kararsız sistemdir. Fourier transformasyonu yöntemiyle böyle bir kararsız sistemin analizi mümkün olmaz.

Örnek

$$H(j\omega) = \frac{j\omega + 3}{(\omega^2 + 16)^2}$$

Sisteminin kararlılığını Fourier transformasyonu ile inceleyin.

Çözüm

$$H(j\omega) = \frac{j\omega + 3}{(\omega^2 + 16)^2}$$

$$(j\omega)^2 + 16 = 0$$

$$(j\omega) = \pm 4j$$

Karakteristik denklem $(\omega^2 + 16)^2$ biçiminde olduğundan $\pm 4j$ biçiminde iki tane daha kök olduğu anlaşılır. Buna göre verilen sistemin kökleri (kutupları)

$$\omega_{1,2} = +4j \text{ ve } \omega_{3,4} = -4j$$

şeklinde kendisini imajiner eksen üzerinde tekrarlayan yani katlı (repeated) köklerdir. Diğer bir deyişle aynı $+4j$ ve $-4j$ köklerinden imajiner eksen üzerinde ikişer tane olduğundan sistem kararsızdır.

Örnek

$$H(j\omega) = \frac{j\omega - 2}{-j\omega^3 - 7j\omega - 6}$$

Sisteminin kararlılığını Fourier transformasyonu ile inceleyin.

Çözüm

$$H(j\omega) = \frac{j\omega - 2}{-j\omega^3 - 7j\omega - 6} = \frac{j\omega - 2}{-j\omega^3 - 3\omega^2 + 2j\omega + 3\omega^2 - 9j\omega - 6} = \frac{j\omega - 2}{(j\omega + 1)(j\omega + 2)(j\omega - 3)}$$

$$H(j\omega) = \frac{j\omega - 2}{(j\omega + 1)(j\omega + 2)(j\omega - 3)}$$

Sistemin paydasındaki kökleri (kutupları) araştırıldığında

$$j\omega = -1, \quad j\omega = -2 \quad \text{ve} \quad j\omega = 3$$

bulunmaktadır. Sistemin kararsız olabilmesi için yukarıdaki örnekte olduğu gibi, imajiner eksen üzerinde katlı kökler veya sağ yarı düzlemde en az bir kök (kutup) bulunması yeterli olduğundan, mevcut üç kök içersinden $j\omega = 3$, sağ yarı düzlemde olduğundan, sistem kararsızdır.

Zaten bulunan kökler eksponensiyel formda gösterildiğinde de $j\omega = -1$ için e^{-t} , $j\omega = -2$ için e^{-2t} köklerinin sönümlü yani kararlı davrandığı ancak $j\omega = 3$ için e^{3t} terimi, sürekli monoton artan formda belirsizliğe yol açarak sistemin kararsız davranmasına sebep olmaktadır. Sistemin kararsız davranmasına en az bir kök bile yeterli olduğundan, sonuçta sistem kararsız ve bundan dolayı Fourier transformasyonu yöntemiyle böyle bir kararsız sistemin analizi mümkün olmaz.

Kararlı sistem : Nihayet bu iki olumsuz koşulun yanısıra transfer fonksiyonunun paydası için kökler $(s + p_1)(s + p_2) \cdots (s + p_n)$ olarak $s = -p_1, -p_2, \dots, -p_n$ gibi reel değerlerden oluşuyorsa, bu durumda sistemin kökleri sol yarı düzlemde olacağından, sistem (asimtotik) kararlı olacaktır. Bu durumda kutuplar reel kısmı göstermek üzere $s = -p_1, -p_2, \dots, -p_n = \sigma = e^{-\sigma t}$ olarak $F(\omega)$ Fourier transformasyonunda $f(t) = f(t)e^{-\sigma t}$ yazılırsa bu kez klasik biçiminden farklı olarak,

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-\sigma t} e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-(\sigma + j\omega)t} dt$$

biçimine dönüşecektir. Buradan biliyoruz ki, $\sigma > 0$ için Fourier transformasyonu elde edilebilecektir ($F(\omega) < \infty$). Dolayısıyla burada sonlu değerler elde edildiğinden, eksponensiyel olarak sönümlü (sıfıra yaklaşan) bir işaret söz konusu olacaktır. Bu sistemin kararlılığına, sebebiyet vereceğinden, buradan çıkan sonuç tam kararlı (asimtotik kararlı) bir sistemin sistem impuls cevabı olan $h(t) = e^{-\alpha t}$ ve $\alpha < 0$ olduğundan sistem daima $t \rightarrow \infty$ durumunda $h(t) \rightarrow 0$ olacağından

Sonuç 3 : Kararlı sistemlerin Fourier transformasyonu alınabilir.

Bu tür kararlılığa asimtotik kararlılık denilmektedir. Buradan mevcut 3 sonucu daha da genelleştirip, tek bir başlık altında toparlayabiliriz.

Sonuç 4 : Yalnızca asimtotik kararlı sistemlerin Fourier transformasyonu alınabilir.

Diğer bir deyişle, Fourier transformasyonu yalnızca asimtotik kararlı sistemlere uygulanabilir.

Örnek

LTI $h(t) = e^{-3t}u(t) - e^{-2t}u(t)$ sisteminin kararlılığını Fourier transformasyonu ile araştırın.

Çözüm

Verilen sistemin kararlılığını incelemek üzere transfer fonksiyonuna ait $H(\omega)$ Fourier transformasyonunun bulunması gerekmektedir.

$$\begin{aligned}
 H(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} (e^{-3t} u(t) - e^{-2t} u(t)) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-3t} u(t) e^{-j\omega t} dt - \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2t} u(t) e^{-j\omega t} dt \\
 &= \int_0^{\infty} e^{-3t} e^{-j\omega t} dt - \int_0^{\infty} e^{-2t} e^{-j\omega t} dt = \int_0^{\infty} e^{-(j\omega+3)t} dt - \int_0^{\infty} e^{-(j\omega+2)t} dt \\
 &= -\frac{1}{(j\omega+3)} (e^{-(j\omega+3)t})_0^{\infty} - \left(-\frac{1}{(j\omega+2)} (e^{-(j\omega+2)t})_0^{\infty} \right) = \\
 &= -\frac{1}{(j\omega+3)} (e^{-(j\omega+3)\infty} - e^{-(j\omega+3)0}) - \left(-\frac{1}{(j\omega+2)} (e^{-(j\omega+2)\infty} - e^{-(j\omega+2)0}) \right) \\
 &= -\frac{1}{(j\omega+3)} \left(\frac{1}{\infty} - 1 \right) - \left(-\frac{1}{(j\omega+2)} \left(\frac{1}{\infty} - 1 \right) \right) \\
 &= -\frac{1}{(j\omega+3)} (0-1) - \left(-\frac{1}{(j\omega+2)} (0-1) \right) = \frac{1}{(j\omega+3)} + \frac{1}{(j\omega+2)} = \frac{j\omega+2+j\omega+3}{(j\omega+2)(j\omega+3)} \\
 &= \frac{5+2j\omega}{(j\omega+2)(j\omega+3)}
 \end{aligned}$$

elde edilen

$$H(\omega) = \frac{5+2j\omega}{(j\omega+2)(j\omega+3)} = \frac{5+2j\omega}{-\omega^2+5j\omega+6}$$

Sistem transfer fonksiyonunun kökleri (kutupları) araştırıldığında,

$$-\omega^2 + 5j\omega + 6 = (j\omega+2)(j\omega+3) = 0$$

$j\omega = -2$ ve $j\omega = -3$ olarak kökler sol yarı düzlemde olduklarından system tam kararlı görünmektedir. Dolayısıyla böyle bir sistemin Fourier transformasyonu analizi mümkündür. Diğer yandan verilen $h(t) = e^{-3t}u(t) - e^{-2t}u(t)$ sistem fonksiyonuna bakıldığında e^{-3t} ve e^{-2t} gibi $t \rightarrow \infty$ için sönümlü fonksiyonlar mevcut olduğundan, sistemin kararlı olduğu belirgindir.

Fourier Transformasyonunun Kararlılığı Üzerine

Yukarıdaki yaklaşımla Fourier transformasyonunun var olabilmesi için sonlu değerde olmasına dair koşul öne sürülmüştü. Bununla birlikte Fourier transformasyonunun her zaman için periodik işaretlerin frekans içeriklerinin analizi için kullanılabileceğini söyleyemeyiz. Fourier transformasyonunun uygulanamayacağı türden işaretler de vardır. Uygulanacak işaretin $f(t) = e^{at}$, $a < 0$ sorunsuz sayılabilecek formda olduğunu göz önüne alarak mevcut Fourier transformasyonu kararsızlık açısından değerlendirmeye çalışalım. Buna göre Fourier transformasyonu

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

olarak ele alındığında integrasyonun zamana göre dt olarak değiştiğini ve zaman aralığının $t = (-\infty, \infty)$ olduğunu görmekteyiz. Bu denklemin $f(t) = e^{at}$, $a < 0$ alınmasına rağmen mevcut haliyle $t = (-\infty, 0) + (0, \infty)$ aralığında integre edilebilir bir değer $(\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty)$ verip vermeyeceğini araştıralım. $F(\omega)$ denkleminde yer alan $e^{j\omega t}$ ve $e^{-j\omega t}$ terimleri

$$e^{j\omega t} = \cos \omega t + j \sin \omega t$$

$$e^{-j\omega t} = e^{j(-\omega)t} = \cos(-\omega)t + j \sin(-\omega)t = \cos \omega t - j \sin \omega t$$

görüldüğü gibi yalnızca $\cos \omega t$ ve $\sin \omega t$ gibi farklı $(\pm\omega)$ frekanslardaki sinusoidleri göstereceğinden, e^{at} , $a > 0$ ifadesindeki gibi belirsizliğe sebep olacak etki yapmaz. Diğer bir deyişle $e^{j\omega t}$ ve $e^{-j\omega t}$ terimleri, işaretin genliğiyle ilgili değildir. İşaretin genliğiyle ilgili değerleri gösteren exponensiyel gösterim örneğin Bunun dışında e^{at} olabilirdi. Bu durumdayken $\pm a$ durumuna göre büyüyen veya küçülen genliklerden söz edilebilirdi. Bunu şöyle de açıklayabiliriz. $f(t) = e^{at}$ durumunda

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{at} e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{(a-j\omega)t} dt$$

Bu urumda

$$e^{(a-j\omega)t} = e^{at} e^{-j\omega t}$$

olacağından, ifadedeki e^{at} bir genlik olarak davranacaktır. Bu yüzden aynen $\pm a$ durumları için genlik sönümlü veya sönümsüz olabilecektir. Sonuçta Fourier transformasyonundaki $e^{j\omega t}$ ve $e^{-j\omega t}$ terimleri e^{at} deki gibi genlik davranışı göstermeyeceği için, $(\pm\omega)$ frekansları için genlik değil, frekans özelliği göstereceğinden, işareti ve dolayısıyla uygulanacağı sistemi kararsızlığa götürecek bir duruma sebebiyet vermeyecektir.

Fourier Transformasyonu üzerine ayrıntılar

1. Fourier transformasyonu periodik olmayan işaretler için hem zaman domeninden frekans domenine hemde bunun tersi yönde bilgi analizine imkan veren yararlı bir yöntemdir.
2. Fourier transformasyonu kompleks yapıda olup $s = \sigma + j\omega$ biçimindeki ifadenin yalnızca (frekans) spektrumunu içeren imajiner $j\omega$ bölümü üzerine kurulmuştur ($\sigma = 0$). Reel bölümde içerecek şekilde s in tamamını ($s = \sigma + j\omega$) kapsayan analizler **Laplace transformasyonu** ile yapılır. Fourier transformasyonu bahsedildiği gibi imajiner yani kompleks eksen üzerine kurulduğundan literatürlerde bazen $F(\omega)$ yerine $F(j\omega)$ kullanılır. Her ikiside aynı anlama gelmektedir ($F(\omega) = F(j\omega)$).
3. Fourier transformasyonu yalnızca asimtotik kararlı sistemler için uygulanabilen bir tekniktir. Fourier transformasyonu exponensiyel olarak e^{jat} tipindeki fonksiyonların $a > 0$ durumundaki marjinal kararlı veya kararsız sistemler için uygulanamaz. Bu durumlarda da genel yöntem olan Laplace transformasyonuna başvurulur.

Fourier transformasyonu ve zaman-frekans analizi

Fourier transformasyonu her ne kadar zaman domenindeki işareti, frekans domenine ve bunun tersini de yapma kabiliyetinde ise de aynı anda işarete ait zaman – frekans analizine imkan vermemektedir. Yani Fourier spektrumuna bakarak herhangi bir “ t ” anındaki işaretin frekansını (ω) görecektir şekilde “zaman – frekans” spektrumu $F(\omega, t)$ mümkün değildir. Bu Fourier transformasyonun zayıf tarafı olabilir. Bu tür analizleri yapacak Short term Fourier transformasyonu, Wigner-Wille, Hilbert transformasyonu ve Wavelets gibi ileri işaret analiz teknikleri mevcuttur.

Bu anlamda Fourier transformasyonunun uygun olduğu işaret ailesi “hareketsiz, değişmeyen, durağan (stationary)” işaretler olarak kabul edilir. Bu işaretlerin genliği ve standart sapmalarının zamanla değişmediği kabul edilir. Bu özelliklerin tersi yönde olan işaretlere ise “değişken (nonstationary)” işaretler denilir ki, Fourier analizleri bunlar için yetersiz kalmaktadır. Siren, ambulans, kuş (chirp) sesleri veya darbeleri matkapların çıkardıkları sesler bunlara örnek verilebilir.

Fourier transformasyonu ve sistem transfer fonksiyonu

Fourier transformasyonu ile sistem impuls cevabı $h(t)$ ve onun frekans domenindeki karşılığı olarak bilinen transfer fonksiyonu $H(\omega)$ arasında bir bağlantı vardır. Daha önceki sistem bilgilerimizden $f(t) = e^{st}$ giriş fonksiyonu için sistem cevabının

$$\begin{aligned} y(t) &= f(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) f(t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{s(t-\tau)} d\tau \\ &= e^{st} \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-s\tau} d\tau \end{aligned}$$

ve

$$y(t) = H(s) e^{st}$$

olduğunu biliyoruz. Burada

$$H(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-s\tau} d\tau$$

ve $s = \sigma + j\omega$. $H(s)$ transfer fonksiyonu ifadesini eğer “ t ” ye göre düzenlersek

$$H(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-st} dt$$

Bu ifadenin aslında $s = j\omega$ için ($\sigma = 0$) bir Fourier transformasyonu olduğu görülür.

$$\begin{aligned} H(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-j\omega t} dt \\ &= H(\omega) \end{aligned}$$

elde edilen transfer fonksiyonunun özdeğer (λ) olarak gösterimini önceki bölümlerden biliyoruz. Buna göre sistem transfer fonksiyonu $H(\omega)$, sistem impuls cevabının $h(t)$ spektrumudur. Böylelikle Fourier transformasyonundan yararlanarak sistem analizi yapmak mümkün olacaktır.

Fourier transformasyonunun lineerliği

Fourier transformasyonu toplama ve çarpımsallık (ölçeklenme (scaling)) özelliğini sağladığı için lineer bir transformasyondur. Eğer

$$f_1(t) \leftrightarrow F_1(\omega) \quad \text{ve} \quad f_2(t) \leftrightarrow F_2(\omega)$$

ifadeleri göz önüne alındığında, buradan yazılacak

$$a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t) \leftrightarrow a_1 F_1(\omega) + a_2 F_2(\omega)$$

ifadesiyle lineerliği sağlamaktadır.

Fourier Transformasyonu ve Linear Zamanla Değişmeyen Sistemlerin Cevabı

Sürekli formdaki linear zamanla değişmeyen sistemlerin cevabı için Fourier transformasyonundan yararlanılabilir. Exponensiyel terimlerin süperpozisyonundan oluşan linear bir sistemin giriş işareti $f(t)$ için bunun sistem cevabını araştırabiliriz. Bundan dolayı durum, **sistemin sinusoid girişlere olan cevabı** olarak da anılır. Ancak söz konusu cevap bu kez Sistem özelliği gereği, sinusoid girişlere sistemin yine sinusoid özellikli olduğu görülecektir. Ancak sistem cevabı, Fourier transformasyon özelliğinden dolayı **sistemin frekans cevabı** olarak da anılmaktadır. Eğer giriş işaretimiz $f(t) = e^{j\omega t}$ ise buna sistemin impuls cevabı $H(\omega)$ yardımıyla vereceği karşılığın $H(\omega) e^{j\omega t}$ olduğunu biliyoruz. Bunu linear anlayışla aşağıdaki gibi yazabiliriz.

$$e^{j\omega t} \Rightarrow H(\omega) e^{j\omega t}$$

$$e^{j(n\Delta\omega)t} \Rightarrow H(n\Delta\omega) e^{j(n\Delta\omega)t}$$

$$\left[\frac{F(n\Delta\omega) \Delta\omega}{2\pi} \right] e^{j(n\Delta\omega)t} \Rightarrow \left[\frac{F(n\Delta\omega) H(n\Delta\omega) \Delta\omega}{2\pi} \right] e^{j(n\Delta\omega)t}$$

$$\underbrace{\lim_{\Delta\omega \rightarrow 0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{F(n\Delta\omega) \Delta\omega}{2\pi} \right] e^{j(n\Delta\omega)t}}_{f(t)} \Rightarrow \underbrace{\lim_{\Delta\omega \rightarrow 0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{F(n\Delta\omega) H(n\Delta\omega) \Delta\omega}{2\pi} \right] e^{j(n\Delta\omega)t}}_{y(t)}$$

Buradan çıkış fonksiyonu veya toplam sistem cevabı $y(t)$

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{1}{2\pi} \lim_{\Delta\omega \rightarrow 0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(n\Delta\omega) H(n\Delta\omega) e^{j(n\Delta\omega)t} \Delta\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) H(\omega) e^{j\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Y(\omega) e^{j\omega t} d\omega \end{aligned}$$

elde edilir. Görüldüğü gibi sistemin sinusoid girişlere cevabı yine bir tür sinusoid özelliğinde elde edilmiştir. Tek farkla cevap frekans domenindedir, yani sistemin frekans cevabı söz konusudur. Elde edilen $Y(\omega)$ değeri çıkış ifadesi $y(t)$ nin Fourier transformasyonudur. Buna göre sistem giriş işareti $f(t)$ ve impuls cevabı $h(t)$ olan bir sistemin çıkış cevabı $y(t)$ nin spektral (ω) yani frekans cevabı

$$Y(\omega) = F(\omega) H(\omega)$$

olacaktır. Buna göre

$$f(t) \Leftrightarrow F(\omega)$$

durumuna benzer olarak linear bir sistemde

$$y(t) \Leftrightarrow Y(\omega)$$

dönüşümü gerçekleşmiştir. Burada sistem toplam cevabını bulurken gözden kaçmayacak ayrıntının

$$\begin{aligned} y(t) &= f(t) * h(t) \\ &= F(\omega) H(\omega) \end{aligned}$$

şeklinde oluşmasıdır. Buna göre sistemin cevabı, zaman domenindeki konvülyasyonlarının, frekans domenindeki çarpımlarına karşılık gelmektedir.

$$f(t) * h(t) = F(\omega) H(\omega)$$

Konvülyasyon olarak bu oldukça önemli bir özellik olarak sistem cevaplarının işlenmesi ve analizini kolaylaştırırken, aynı zamanda Fourier transformasyonunun bir önemli sonucu olarak algılanmaktadır. Görüldüğü gibi sistemin Fourier transformasyonuna bağlı spektrum özellikli frekans cevabı, sistem analizinde önemlidir. Frekans cevabına dayalı özellik, filtre tasarımlarında daha da önemli rol oynamaktadır.

Örnek

$x(t) = 7e^{-3(t-1)}u(t-1) - 9e^{-3(t-2)}u(t-2)$ işaretinin Fourier transformasyonunu hesaplayın.

Çözüm

Eğer $y(t) = 7e^{-3t}u(t) - 9e^{-3t}u(t)$ olarak düşünülürse,

$$x(t) = 7y_1(t-1) - 9y_2(t-2)$$

Buna göre zaman öteleme

$$y(t) \Leftrightarrow Y(\omega)$$

$$y(t-t_0) \Leftrightarrow Y(\omega) e^{-j\omega t_0}$$

kuralını hatırlarsak,

$$x(t) = 7y_1(t-1) - 9y_2(t-2)$$

Buradan sistem açısından yaklaşırsak, verilen örneğin lineer ve zamandan bağımsız sistemleri işaret ettiğini görmekteyiz.

$$\begin{aligned} Y(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} y(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-3t} u(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-3t} u(t) e^{-j\omega t} dt = \int_0^{\infty} e^{-3t} e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_0^{\infty} e^{-(j\omega+3)t} dt = -\frac{1}{j\omega+3} (e^{-(j\omega+3)t})_0^{\infty} = -\frac{1}{j\omega+3} (e^{-\infty} - e^0) = -\frac{1}{j\omega+3} (0-1) \\ &= \frac{1}{j\omega+3} \\ Y(\omega) &= \frac{1}{j\omega+3} \end{aligned}$$

olduğuna göre $x(t) = 7y(t-1) - 9y(t-2)$ olduğundan

$$y(t) \Leftrightarrow Y(\omega)$$

$$y(t-t_0) \Leftrightarrow Y(\omega) e^{-j\omega t_0}$$

$$\begin{aligned} X(\omega) &= F\{7y(t-1) - 9y(t-2)\} = 7F\{y(t-1)\} - 9F\{y(t-2)\} = 7Y(\omega) e^{-j\omega} - 9Y(\omega) e^{-j2\omega} \\ &= \frac{7e^{-j\omega}}{j\omega+3} - \frac{9e^{-j2\omega}}{j\omega+3} \\ &= \frac{1}{j\omega+3} (7e^{-j\omega} - 9e^{-j2\omega}) \end{aligned}$$

$$X(\omega) = \frac{1}{j\omega+3} (7e^{-j\omega} - 9e^{-j2\omega}) u(t)$$

Buradan verilen örneğin, Fourier domeninde olmak üzere sistemin lineer ve zamandan bağımsız olduğunu göstermesi açısından anlamlıdır.

Bazı fonksiyonların Fourier transformasyonları

Bu bölümde bazı çok bilinen fonksiyonların Fourier ve invers Fourier transformasyonları tanıtılacaktır.

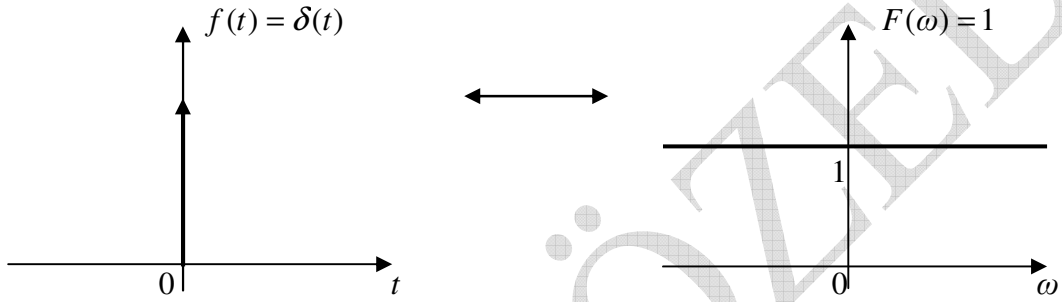
Örnek

$f(t) = \delta(t)$ işaretinin Fourier transformasyonunu hesaplayınız.

Çözüm

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j\omega t} dt = \delta(0) e^{-j\omega 0} = 1$$



Şekil 35 $f(t) = \delta(t)$ Fourier transformasyonu

Zaman domenindeki sıkışma (daralmanın) frekans domeninde band genişliğinin artmasına karşılık geldiğini belirttiğimiz yaklaşımın burada gerçekleştiğini görmekteyiz. Zaman domeninde ideal (sıfır genişlikli) impuls, doğal olarak frekans domeninde sonsuz banda karşılık gelecektir. Diğer yandan görüldüğü gibi frekans ω her noktada sabit “1” dir. Bunun alternatif anlamı şudur, $e^{-j\omega t}$ sinusoidal ifadenin her bir bileşeni

$$\delta(t)e^{-j\omega_1 t}, \delta(t)e^{-j\omega_2 t}, \delta(t)e^{-j\omega_3 t}, \dots, \delta(t)e^{-j\omega_n t}$$

biçimindeki her bir harmoniğin delta dirac fonksiyonu $\delta(t)$ ile çarpımından oluşacağı için bu fonksiyon da bildiğimiz gibi yalnızca “ $t = 0$ için tanımlı $\delta(0) = 1$ olduğundan dolayı, seriyi oluşturan her bir terim $\underbrace{\delta(0)}_1 e^{-j\omega_1 t}, \underbrace{\delta(0)}_1 e^{-j\omega_2 t}, \underbrace{\delta(0)}_1 e^{-j\omega_3 t}, \dots, \underbrace{\delta(0)}_1 e^{-j\omega_n t}$ “1” olacaktır.

Bundan dolayı Fourier spektrumu $F(\omega)$ her yerde “1” olarak görünecektir.

Sonuçta, $\delta(t)$ fonksiyonunun spektrumunun (Fourier transformasyonu) sonsuz büyüklükte çıkması anlamlıdır. Çünkü delta veya impuls adıyla bildiğimiz $\delta(t)$ işaretinin ideal anlamda sıfır genişlikte ve dolayısıyla sonsuz şiddette işaret olarak bilmemiz bu sonucu teyit etmektedir. Fourier transformasyonunun sonsuz büyük olması, band genişliğinin ideal anlamda sonsuz olduğu anlamına geleceğinden ($T = 0, f = 1/T \rightarrow \infty$), böyle bir işaretin en azından fiziki haberleşme ve iletim hatları açısından sağlanması mümkün değildir. Çünkü bu haliyle sonsuz band genişliğini gerektirmektedir ki, pratikte bu mümkün değildir. Bu yüzden impuls fonksiyonunun Fourier transformasyonu bize, sonsuz band genişliğinde bir işaret sunmaktadır. Diğer bir deyişle darbe genişliği impuls gibi dar olan veya genişlikleri daralan işaretlerin spektrumları, geniş band özelliğindedir diye düşünebiliriz.

NOT : Zaman domeninde dar olan işaret, frekans domeninde geniş band genişliğine sahiptir. Impuls fonksiyonu bu yorumla örtüşmektedir. Zaman domeninde teorik olarak sıfır genişliğine sahip olduğu için, frekans domeninde geniş hatta teorik olarak sonsuz band genişliğine sahiptir.

Örnek

$F(\omega) = \delta(\omega)$ ile verilen Fourier transformasyonunun inversini bulunuz.

Çözüm

$$\begin{aligned} f(t) &= f\{F(\omega)\}^{-1} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)(t)e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega)(t)e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \delta(0)(t)e^{j0t} \\ &= \frac{1}{2\pi} \end{aligned}$$

Örnek

$f(t) = 1$ işaretinin Fourier transformasyonunu bulunuz.

Çözüm

Daha önce $\delta(\omega)$ nin invers Fourier transformasyonunu $\frac{1}{2\pi}$ olarak bulmuştuk

$$F^{-1}(\delta(\omega)) = 1/2\pi .$$

Fourier ve invers Fourier transformasyonları arasında karşılıklı dönüşüm özelliği

$f(t) \Leftrightarrow F(\omega)$ olduğundan buna göre,

$$\frac{1}{2\pi} \Leftrightarrow \delta(\omega)$$

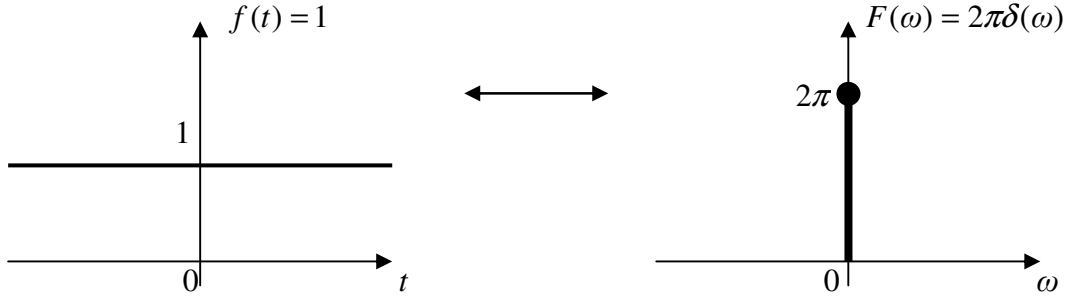
yazabiliriz. Buradan da

$$1 \Leftrightarrow 2\pi \delta(\omega)$$

bulunur. Sonuçta “1” in Fourier transformasyonu

$$F\{1\} = 2\pi \delta(\omega)$$

olarak bulunur. Bunun anlamı şudur her noktada “1” değerine sahip sabit bir $f(t)$ fonksiyonu elektrik devrelerindeki bir tür yönü ve şiddeti değişmeyen D.C. akıma karşılık gelecektir. Bu durumda akımda bir değişiklik olmayacağına göre frekansdan da söz etmek mümkün olmayacaktır. Tek bir frekans göz önüne alınabilir o da $\omega = 0$ olacaktır. Frekans değişimi olmayacağına göre bu anlamda Fourier serisindeki ilk bileşen a_0 hariç, diğerleri sıfır olacaktır. Bundan dolayı Fourier spekterumu $F(\omega)$ sıfır noktası hariç her yerde “0” olarak görünecektir.



Şekil 36 $f(t) = 1$ Fourier transformasyonu

Buradan genelleme yaparsak herhangi bir “a” sabitinin Fourier transformasyonu

$$F\{a\} = \frac{2\pi \delta(\omega)}{a}$$

olarak bulunur.

NOT : Açıklamalara ve şekile bakıldığında zaman domeninde geniş olan işaret, frekans domeninde aksine, dar band genişliğine sahiptir. $f(t)=1$ fonksiyonu bu yorumla örtüşmektedir. Zaman domeninde teorik olarak sonsuz genişliğine sahip olduğu için, frekans domeninde çok dar hatta teorik olarak sıfır band genişliğine sahiptir. Sıfır band genişliğide orijindeki ideal bir impulse karşılık gelir.

Örnek

$F(\omega) = \delta(\omega - \omega_0)$ ile verilen Fourier transformasyonunun inversini bulunuz.

Çözüm

$$\begin{aligned} f(t) = \{F(\omega)\}^{-1} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \omega_0) e^{j\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} e^{j\omega_0 t} \end{aligned}$$

Örnek

$f(t) = e^{j\omega_0 t}$ işaretinin Fourier transformasyonunun bulunuz.

Çözüm

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega_0 t} e^{-j\omega t} dt = ?$$

Daha önce $\delta(\omega - \omega_0)$ nin invers Fourier transformasyonunu $\frac{1}{2\pi} e^{j\omega_0 t}$ olarak bulmuştuk

$$F^{-1}(\delta(\omega - \omega_0)) = \frac{1}{2\pi} e^{j\omega_0 t}.$$

Fourier ve invers Fourier transformasyonları arasında karşılıklı dönüşüm özelliği $f(t) \Leftrightarrow F(\omega)$ olduğuna göre,

$$\frac{1}{2\pi} e^{j\omega_0 t} \Leftrightarrow \delta(\omega - \omega_0)$$

yazabiliriz. Buradan da

$$e^{j\omega_0 t} = 2\pi\delta(\omega - \omega_0)$$

bulunur. Sonuçta “ $e^{j\omega_0 t}$ ” in Fourier transformasyonu

$$F(\omega) = 2\pi \delta(\omega - \omega_0)$$

veya ;

$$e^{j\omega_0 t} \Leftrightarrow 2\pi \delta(\omega - \omega_0)$$

olarak bulunur. Ayrıca eğer $e^{j\omega_0 t}$ yerine $e^{-j\omega_0 t}$ alınsa bu kez Fourier transformasyonu

$$\begin{aligned} F(\omega) &= 2\pi \delta(\omega - (-\omega_0)) \\ &= 2\pi \delta(\omega + \omega_0) \end{aligned}$$

olurdu.

Örnek

$$\delta(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n e^{jn\omega_0 t} \quad \text{Impuls dizisinin Fourier transformasyonunu hesaplayınız.}$$

Çözüm

Önce Fourier serisi yaklaşımıyla D_n katsayısını belirlemeye çalışalım. Verilen $\delta(t)$ impuls fonksiyonunu Fourier serisine açabilmek için D_n katsayısını hesaplamamız gerekiyor. Bunun karşılığının serideki formülden,

$$D_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \delta(t) e^{jn\omega_0 t} dt$$

olduğunu biliyoruz. Buradan

$$D_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \delta(t) e^{jn\omega_0 t} dt = \frac{1}{T} \delta(0) e^{jn\omega_0 0}$$

$$D_n = \frac{1}{T}$$

bulunur, bunu serideki ifadesinde yerine yazarsak,

$$\delta(t) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jn\omega_0 t}$$

şimdi bu ifadenin Fourier transformasyonunu alırsak,

$$\begin{aligned} F\{\delta(t)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jn\omega_0 t} e^{-j\omega t} dt \\ &= \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{jn\omega_0 t} e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F\{e^{jn\omega_0 t}\} = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega - n\omega_0) = \frac{2\pi}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_0) \end{aligned}$$

Daha önceki bilgilerimizden $e^{jn\omega_0 t}$ fonksiyonunun Fourier transformasyonunu

$$F\{e^{jn\omega_0 t}\} = 2\pi\delta(\omega - n\omega_0)$$

olarak hatırladığımıza göre, bunu yerine yazarsak,

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F\{e^{jn\omega_0 t}\} \\ F(\omega) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{jn\omega_0 t} e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F\{e^{jn\omega_0 t}\} = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega - n\omega_0) = \frac{2\pi}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_0) \\ \omega_0 = \frac{2\pi}{T} \end{aligned}$$

olduğu göz önüne alınırsa,

$$F(\omega) = \omega_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_0)$$

veya

$$\delta(t) \Leftrightarrow \omega_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_0)$$

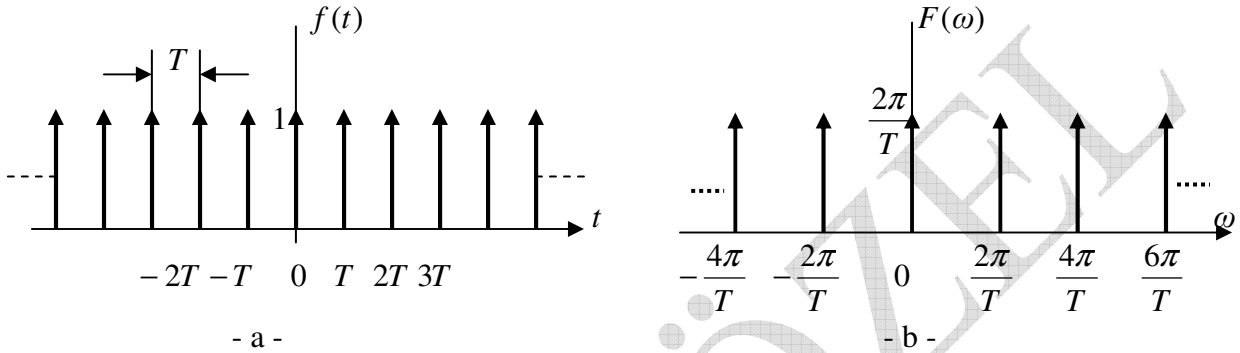
olarak elde edilir.

Örnek

$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT)$ Impuls dizisinin Fourier transformasyonunu hesaplayınız.

Çözüm

Verilen $f(t)$ fonksiyonunu periodik (T) olduğundan Fourier serisi karşılığı Şekil (a) daki gibi olacaktır.



Şekil 37 (a) Periyodik impuls dizisi (b) periyodik impuls Fourier transformasyonu

Şekil (a) da verilen birim impuls dizisinden oluşan $f(t)$ fonksiyonu, spektrumu (b) den de görülebileceği gibi band sınırsız olan çok önemli bir örnekleme fonksiyonudur. Örnekleme bölümünde daha detaylı verileceği için, şu an için sürekli işaretlerin ayırık işaretlere dönüştürülmelerinde bu fonksiyonun Shannon ve Nyquist kurallarına göre işlevi önemli olan bir örnekleme fonksiyonu olduğunu bilmekte fayda var. Sürekli işaretten belli aralıklarla ($T \leq \frac{1}{2B}$) alınacak şekilde örnekleme fonksiyonunun periyodu (T) belirlenerek alınan örneklerle, ayırık formatta işaret oluşturulmaktadır. Çözüme gelince aşağıdaki adımlar izlenecektir. Daha önceden Fourier transformasyonundan

$$f(t) = e^{j\omega_0 t}$$

olarak düşünülürse,

$$\frac{1}{2\pi} e^{j\omega_0 t} \Leftrightarrow \delta(\omega - \omega_0)$$

$$e^{j\omega_0 t} \Leftrightarrow 2\pi \delta(\omega - \omega_0)$$

$$F(\omega) = 2\pi \delta(\omega - \omega_0)$$

olduğunu yazabiliriz. Bunların ışığında bu kez $f(t) = e^{jk\omega_0 t}$ göz önüne alındığında ise ilgili ifadeler aşağıdaki gibi oluşacaktır.

$$\frac{1}{2\pi} e^{j k \omega_0 t} \Leftrightarrow \delta(\omega - k\omega_0)$$

$$e^{j k \omega_0 t} \Leftrightarrow 2\pi \delta(\omega - k\omega_0)$$

veya

$$F(\omega) = 2\pi \delta(\omega - k\omega_0)$$

olduğunu biliyoruz. Buna göre

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{j k \omega_0 t} \Leftrightarrow \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi a_k \delta(\omega - k\omega_0)$$

$$F(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi a_k \delta(\omega - k\omega_0)$$

Eğer daha önceden bulduğumuz

$$a_k = \frac{1}{T}$$

yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi a_k \delta(\omega - k\omega_0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi \frac{1}{T} \delta(\omega - k\omega_0) \\ &= \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_0) \end{aligned}$$

veya

$$F(\omega) = \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_0)$$

elde edilir. Bulunan $F(\omega)$ spektrumu yukarıdaki Şekil (b) de gösterilmiştir. Farkedileceği gibi zaman domenindeki impuls aralıkları perioda (T) bağlı olarak büyüdükçe, frekans domenindeki impuls aralıkları da giderek daralmakta ve frekans bileşenleri birbirine yakınlaştığından, spektrumda daha fazla ve dar aralıklı bileşenlerden oluşan bir yoğunluk söz konusu olmaktadır. Buna göre

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{j k \omega_0 t} \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

olarak ele alınan impuls dizisinin Fourier transformasyonu

$$\frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{j k \omega_0 t} \Leftrightarrow \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_0)$$

olarak ifade edilebilir.

Örnek

$f(t) = \cos \omega_0 t$ işaretinin Fourier transformasyonunun bulunuz.

Çözüm

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \cos \omega_0 t e^{-j\omega t} dt = ?$$

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \cos \omega_0 t e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} [e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}] e^{-j\omega t} dt \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j(\omega+\omega_0)t} + e^{-j(\omega-\omega_0)t} dt = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j(\omega+\omega_0)t} dt + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j(\omega-\omega_0)t} dt \end{aligned}$$

Daha önceki örnekten biliyoruz ki,

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega_0 t} e^{-j\omega t} dt = 2\pi \delta(\omega - \omega_0)$$

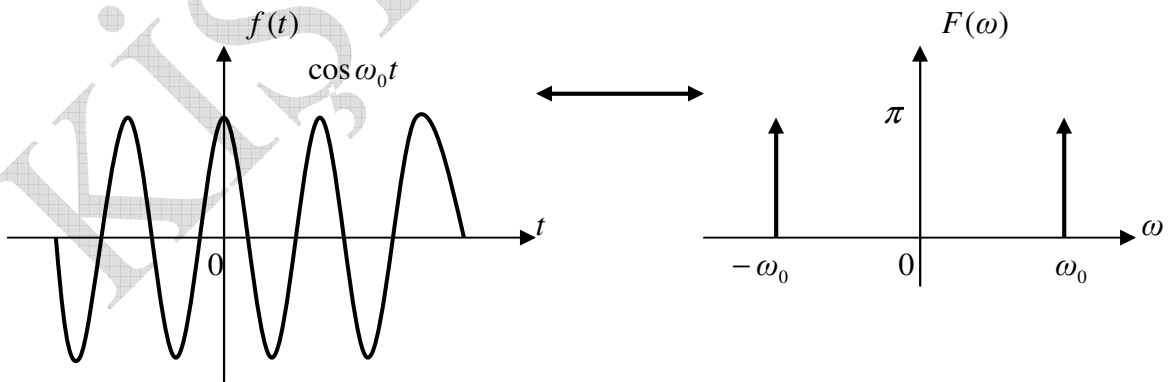
$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega_0 t} e^{-j\omega t} dt = 2\pi \delta(\omega + \omega_0)$$

Yukarıdaki ifade de yerlerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \frac{1}{2} [2\pi \delta(\omega + \omega_0) + 2\pi \delta(\omega - \omega_0)] \\ &= \pi \delta(\omega + \omega_0) + \pi \delta(\omega - \omega_0) \end{aligned}$$

$$f(t) \Leftrightarrow F(\omega)$$

$$\cos \omega_0 t \Leftrightarrow \pi [\delta(\omega + \omega_0) + \pi \delta(\omega - \omega_0)]$$



Şekil 38 $f(t) = \cos \omega_0 t$ ve Fourier Transformasyonu

Görüldüğü gibi, $\cos \omega_0 t$ çift fonksiyon olduğu için genlik spektrumunda $-\omega_0$ ve ω_0 için aynı kalırken, faz spektrumunda da ise faz farkı yoktur.

Örnek

$f(t) = \sin \omega_0 t$ işaretinin Fourier transformasyonunun bulunuz.

Çözüm

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \sin \omega_0 t e^{-j\omega t} dt = ?$$

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \sin \omega_0 t e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{2j} \int_{-\infty}^{\infty} [e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}] e^{-j\omega t} dt \\ &= \frac{1}{2j} \int_{-\infty}^{\infty} [e^{-j(\omega-\omega_0)t} - e^{-j(\omega+\omega_0)t}] dt = \frac{1}{2j} \int_{-\infty}^{\infty} [e^{-j(\omega-\omega_0)t} - e^{-j(\omega+\omega_0)t}] dt \\ &= -\frac{j}{2} \int_{-\infty}^{\infty} [e^{-j(\omega-\omega_0)t} - e^{-j(\omega+\omega_0)t}] dt = -\frac{j}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j(\omega-\omega_0)t} dt + \frac{j}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j(\omega+\omega_0)t} dt \\ &= \frac{j}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j(\omega+\omega_0)t} dt - \frac{j}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j(\omega-\omega_0)t} dt \end{aligned}$$

Benzer şekilde önceki bilgilerimizden

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega_0 t} e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j(\omega-\omega_0)t} dt = 2\pi \delta(\omega - \omega_0)$$

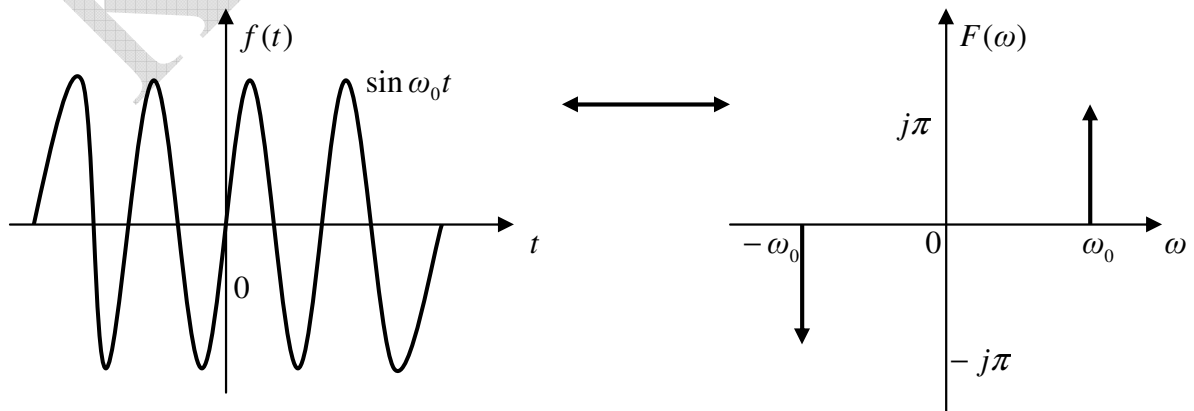
$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega_0 t} e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j(\omega+\omega_0)t} dt = 2\pi \delta(\omega + \omega_0)$$

Yukarıdaki ifade de yerlerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \frac{j}{2} [2\pi \delta(\omega + \omega_0) - 2\pi \delta(\omega - \omega_0)] \\ &= j\pi [\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0)] \end{aligned}$$

$$f(t) \Leftrightarrow F(\omega)$$

$$\sin \omega_0 t \Leftrightarrow j\pi [\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0)]$$



Şekil 39 $f(t) = \sin \omega_0 t$ ve Fourier Transformasyonu

Görüldüğü gibi, $\sin \omega_0 t$ tek fonksiyon olduğu için aynı genlikte ama $-\omega_0$ ve ω_0 için farklı fazlarda oluşmaktadır.

Örnek

$f(t) = \cos(\omega_0 t + \theta)$ işaretinin Fourier transformasyonunun bulunuz.

Çözüm

$$\cos(\omega_0 t + \theta) = \frac{1}{2} e^{j(\omega_0 t + \theta)} + \frac{1}{2} e^{-j(\omega_0 t + \theta)} = \frac{1}{2} \left[e^{j(\omega_0 t + \theta)} + e^{-j(\omega_0 t + \theta)} \right]$$

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \cos(\omega_0 t + \theta) e^{-j\omega t} dt = ?$$

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \cos(\omega_0 t + \theta) e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} \left[e^{j(\omega_0 t + \theta)} + e^{-j(\omega_0 t + \theta)} \right] e^{-j\omega t} dt \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \left[e^{j\theta} e^{j\omega_0 t} e^{-j\omega t} + e^{-j\theta} e^{-j\omega_0 t} e^{-j\omega t} \right] dt = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\theta} e^{j\omega_0 t} e^{-j\omega t} dt + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\theta} e^{-j\omega_0 t} e^{-j\omega t} dt \end{aligned}$$

$$F(\omega) = \frac{e^{j\theta}}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega_0 t} e^{-j\omega t} dt + \frac{e^{-j\theta}}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega_0 t} e^{-j\omega t} dt$$

Gelinen noktada $e^{j\theta}$ ve $e^{-j\theta}$ integrasyon sabitleri konumunda olduklarından direct olarak integralleri hesaplamak yeterli olacaktır. Daha önceki frekans kaydırma kuralından biliyoruz ki,

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega_0 t} e^{-j\omega t} dt = 2\pi \delta(\omega - \omega_0)$$

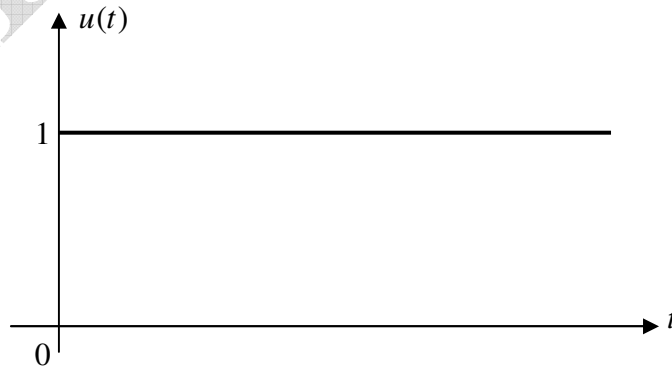
$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega_0 t} e^{-j\omega t} dt = 2\pi \delta(\omega + \omega_0)$$

bunları yukarıdaki ifade de yerlerine yazılırsa,

$$F(\omega) = \frac{e^{j\theta}}{2} 2\pi \delta(\omega - \omega_0) + \frac{e^{-j\theta}}{2} 2\pi \delta(\omega + \omega_0) = \pi \delta(\omega - \omega_0) e^{j\theta} + \pi \delta(\omega + \omega_0) e^{-j\theta}$$

$$F(\omega) = \pi \left[\delta(\omega - \omega_0) e^{j\theta} + \delta(\omega + \omega_0) e^{-j\theta} \right]$$

Örnek



Şekil 40 Birim basamak fonksiyonu

Şekli görülen birim basamak (unit step) fonksiyonunun $u(t)$ Fourier transformasyonunu bulunuz.

Çözüm

Bilindiği gibi birim basamak fonksiyonunu $u(t)$ aşağıdaki tanım üzerine biliyoruz.

$$u(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

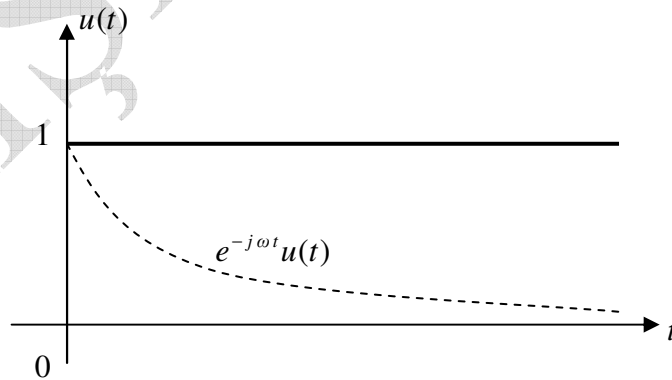
Görüldüğü gibi birim basamak fonksiyonu $u(t)$ klasik bir D.C. değildir. Çünkü D.C. gibi $(-\infty, \infty)$ aralığında değeri aynı değildir, değişkendir. İlk olarak $(-\infty, 0)$ aralığında değeri sıfırdır. Sonrasında $t = 0$ noktasında bir sıçrama yapmakta (süreksiz form), ve nihayet $(0, \infty)$ aralığında sabit kalarak üç etaptan oluşan parçalı bir fonksiyon gibi davranmaktadır. Bu açılardan D.C. den ayrılır. Verilen aralıktaki $u(t)$ nin Fourier transformasyonu yazılırsa

$$U(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt = \int_0^{\infty} u(t) e^{-j\omega t} dt = \int_0^{\infty} 1 \times e^{-j\omega t} dt = -\frac{1}{j\omega} e^{-j\omega t} \Big|_0^{\infty} \\ = \frac{1}{j\omega}$$

elde edilir. Oysa yukarıda tanım aralığı verilen $u(t)$ fonksiyonunu

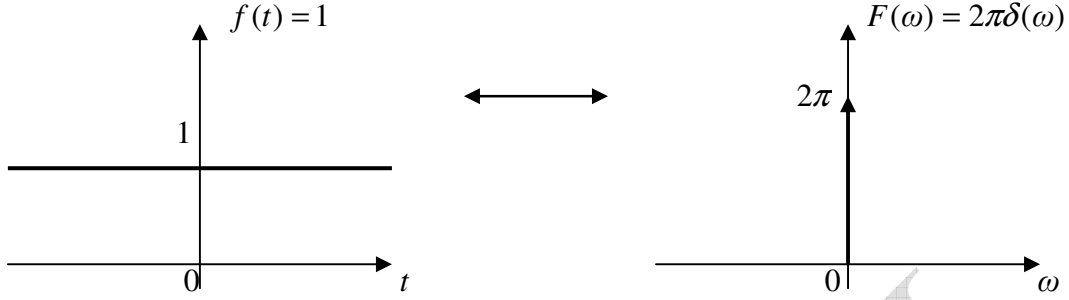
$$u(t) = \lim_{a \rightarrow 0} e^{-at} u(t)$$

şeklinde alarak daha genel bir yaklaşım sergilemek mümkündür. Bu şekilde işaretin causal (nedensel) işaret olma gereği de göz önüne alınmış olunur. Bu şekilde $u(t)$ fonksiyonunun böylesine “a” gibi bir parametreye bağlı $a \rightarrow 0$ koşuluyla e^{-at} ile verilmesi, elde edilecek $U(\omega)$ spektrumunun daha açık analizini sağlayacaktır. Böyle bir birim basamak fonksiyonu azalan formdaki e^{-at} ($a > 0$) exponeysiyel ifade ile birlikte $e^{-at} u(t)$ formunda aşağıdaki gibi düşünülür.



Şekil 41 $e^{-j\omega t} u(t)$ Fonksiyonu

Aslında daha önce ele aldığımız



Şekil 42 $f(t) = 1$ Fourier transformasyonu

spektrumundan $F\{1\} \Leftrightarrow 2\pi\delta(\omega)$ dönüşümünü göz önüne aldığımızda bu kez de $F\{u(t)\}$ dönüşümünün bir tür impuls fonksiyonuna bağlı

$$F\{u(t)\} \stackrel{?}{\Leftrightarrow} 2\pi\delta(\omega)$$

gibi olacağını düşünebiliriz. Çünkü burada $f(t) = 1$ ve $f(t) = u(t)$ fonksiyonları arasındaki derin bir benzerliğin olduğunu biliyor ve görüyoruz. Buna göre $F\{1\}$ ile impulse bağlı bir ifade elde edilmişse, $F\{u(t)\}$ ile de impuls tipinde ve görünümünde bir ifadenin elde edilmesini bekleyebiliriz. Bunu elde etmek üzere $u(t)$ fonksiyonunun e^{-at} ifadesiyle oluşturulması için “a” nın limit durumu göstermek üzere $a \rightarrow 0$ yaklaşımıyla ifade aşağıdaki gibi yazılır.

$$u(t) = \lim_{a \rightarrow 0} e^{-at} u(t)$$

Buna göre Fourier transformasyonu

$$U(\omega) = \lim_{a \rightarrow 0} F\{e^{-at} u(t)\}$$

$$\begin{aligned} F\{e^{-at} u(t)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt = \int_0^{\infty} u(t) e^{-at} e^{-j\omega t} dt = \int_0^{\infty} e^{-(a+j\omega)t} dt = -\frac{1}{(a+j\omega)} e^{-j(a+j\omega)t} \Big|_0^{\infty} \\ &= \frac{1}{(a+j\omega)} \end{aligned}$$

olarak elde edilir. Buna göre,

$$U(\omega) = \lim_{a \rightarrow 0} F\{e^{-at} u(t)\} = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{a+j\omega}$$

Sağ tarafı reel ve imajiner formda olacak şekilde yazarsak

$$U(\omega) = \lim_{a \rightarrow 0} \left[\frac{a}{a^2 + \omega^2} - j \frac{\omega}{a^2 + \omega^2} \right]$$

$$= \lim_{a \rightarrow 0} \left[\frac{a}{a^2 + \omega^2} \right] + \frac{1}{j\omega}$$

elde edilen $\frac{a}{a^2 + \omega^2}$ terimiyle kaplı alanın değeri

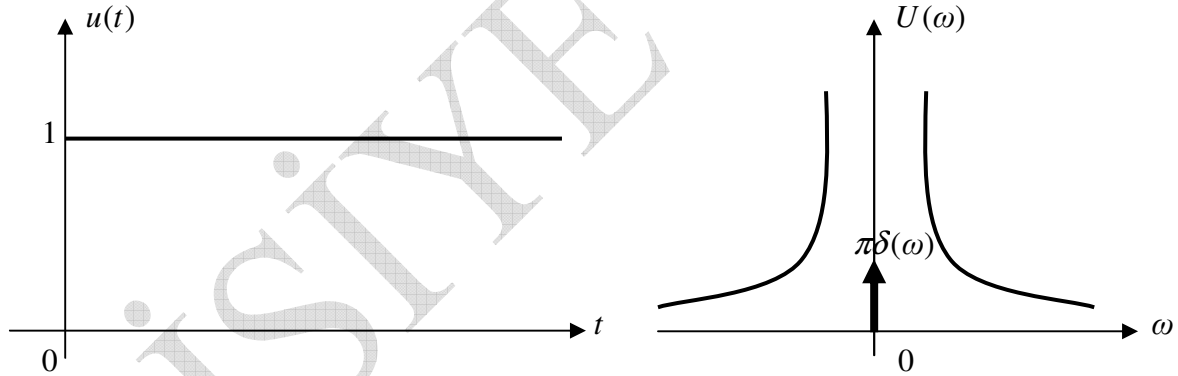
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{a}{a^2 + \omega^2} d\omega = \tan^{-1} \frac{\omega}{a} \Big|_{-\infty}^{\infty}$$

$$= \pi$$

olarak bulunur. Aynı zamanda $a \rightarrow 0$ ve $\omega \neq 0$ için $\frac{a}{a^2 + \omega^2}$ ifadesi sıfıra yaklaşarak $\omega = 0$ noktasında yoğunlaşan bir impuls görüntüsü verdiğinden yukarıdaki ifadenin ve aranan $u(t)$ fonksiyonunun tam Fourier transformasyon karşılığı

$$U(\omega) = \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$$

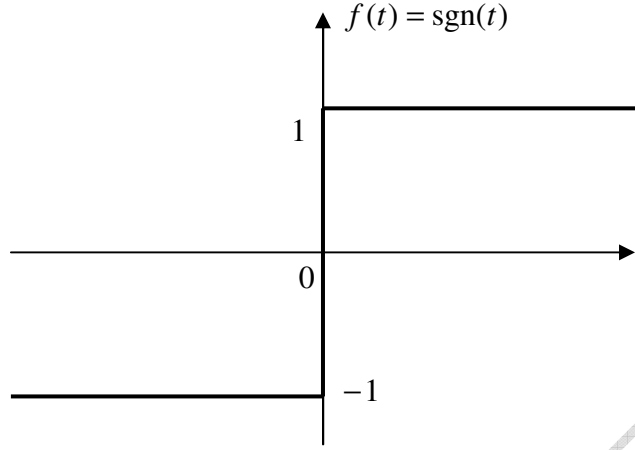
olarak neticelenir. Oluşan ifadenin spektrum görünümü aşağıdaki gibi olacaktır.



Şekil 43 $u(t)$ Fonksiyonu ve Fourier transformasyonu

Başlangıçta bahsedildiği gibi $F\{u(t)\}$ fonksiyonunun spektrumu aynen $F\{1\}$ spektrumuna benzer olarak impuls özelliğinde elde edilmiştir. Çünkü spektrumdaki ifadede $a \rightarrow 0$ göz önüne alındığında soldan ve sağdan daralarak impuls görünümü almaya çalışan bir spektrumun söz konusu olacağını görmekteyiz.

Örnek



Şekil 44 İşaret fonksiyonu : $\text{sgn}(t)$

Şekilde verilen işaret fonksiyonunun $\text{sgn}(t)$ Fourier transformasyonunu bulunuz.

Çözüm

Parçalı fonksiyon tipteki işaret fonksiyonunu $\text{sgn}(t)$ aşağıdaki tanım üzerine biliyoruz.

$$\text{sgn}(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 0 & t = 0 \\ -1 & t < 0 \end{cases} \quad \text{veya} \quad \text{sgn}(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ -1 & t < 0 \end{cases}$$

Buna göre $\text{sgn}(t)$ fonksiyonu ile birim basamak fonksiyonu $u(t)$ arasında benzerlik vardır. İşaret fonksiyonunu $u(t)$ ye bağlı olarak aşağıdaki gibi ifade etmek mümkündür.

$$\text{sgn}(t) = \begin{cases} u(t) = 1 & t > 0 \\ -u(-t) = -1 & t < 0 \end{cases}$$

Buna göre $\text{sgn}(t)$ nin Fourier transformasyonu

$$\begin{aligned} F\{\text{sgn}(t)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \text{sgn}(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^0 u(-t) e^{-j\omega t} dt + \int_0^{\infty} u(t) e^{-j\omega t} dt \\ &= -\int_{-\infty}^0 u(-t) e^{-j\omega t} dt + \int_0^{\infty} u(t) e^{-j\omega t} dt \end{aligned}$$

Birim basamak fonksiyonun yukarıdaki çözümlerinden biliyoruz ki,

$$\int_0^{\infty} u(t) e^{-j\omega t} dt = \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$$

$$\int_0^{\infty} u(-t) e^{-j\omega t} dt = \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$$

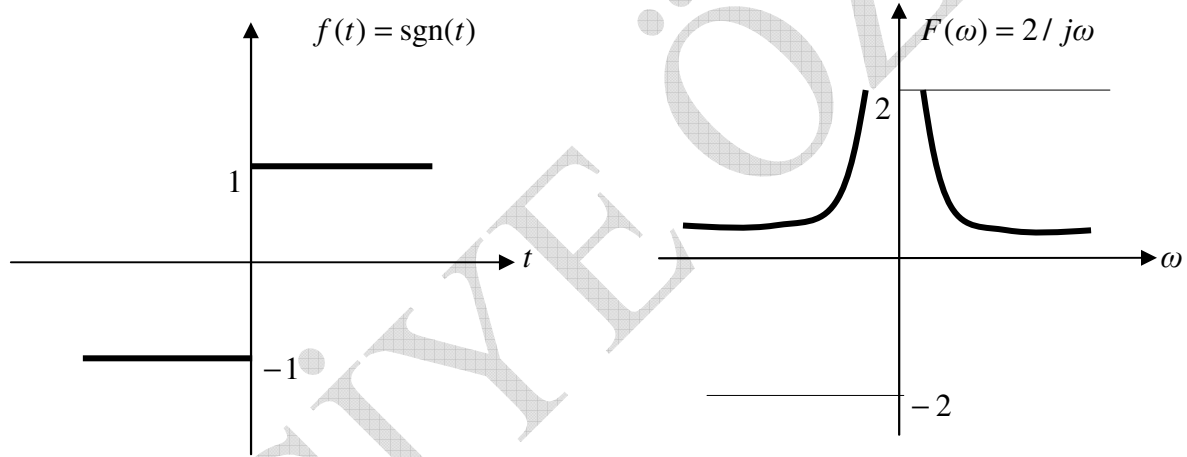
olduğu için $\text{sgn}(t)$ nin Fourier transformasyonu

$$\begin{aligned} SGN(\omega) &= -\int_{-\infty}^0 u(-t) e^{-j\omega t} dt + \int_0^{\infty} u(t) e^{-j\omega t} dt = -\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} \\ &= \frac{2}{j\omega} \end{aligned}$$

2.yol

Burada daha önce yapılan çözüme alternatif bir yaklaşım göz önüne alınmıştır. İşaret fonksiyonu aşağıdaki denklem ve bunu sağlayan grafik gösterim olarak göz önüne alınmıştır.

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \text{sgn}(t) e^{-j\omega t} dt &= \int_{-\infty}^0 \text{sgn}(t) e^{-j\omega t} dt + \int_0^{\infty} \text{sgn}(t) e^{-j\omega t} dt = -\frac{1}{j\omega} \underbrace{e^{-j\omega t} \Big|_{-\infty}^0}_{-1} - \frac{1}{j\omega} \underbrace{e^{-j\omega t} \Big|_0^{\infty}}_{-1} \\ &= \frac{1}{j\omega} + \frac{1}{j\omega} \\ &= \frac{2}{j\omega} \end{aligned}$$



Şekil 45 İşaret fonksiyonu ve Fourier transformasyonu

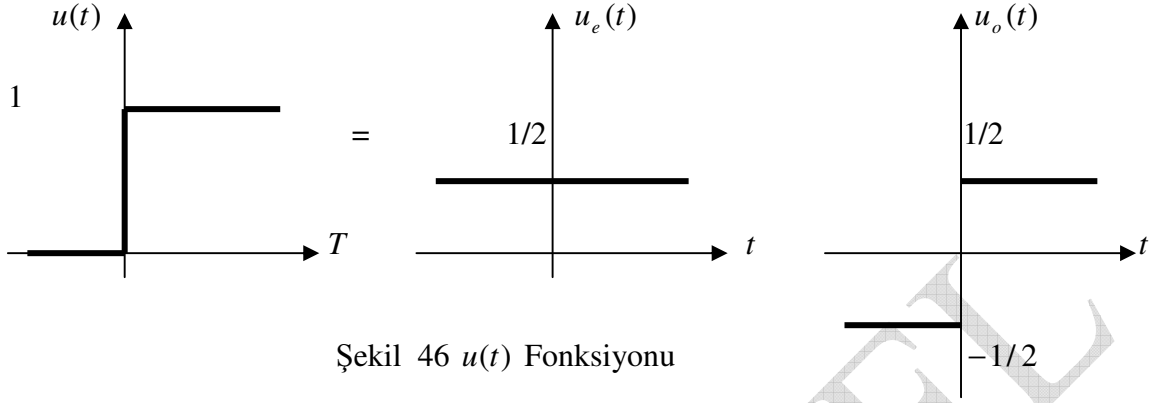
Örnek

$f(t) = u(t)$ Birim basamak fonksiyonunun Fourier transformasyonunu bulun

Çözüm

Burada daha önce yapılan çözüme alternatif bir yaklaşım göz önüne alınmıştır. Birim basamak fonksiyonu aşağıdaki denklem ve bunu sağlayan grafik gösterim olarak göz önüne alınmıştır.

$$u(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \text{sgn}(t)$$



Şekil 46 $u(t)$ Fonksiyonu

$$F\{u(t)\} = \frac{1}{2} F\{1\} + \frac{1}{2} F\{\text{sgn}(t)\}$$

$$F\{u(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} u(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} u_e(t) e^{-j\omega t} dt + \int_{-\infty}^{\infty} u_o(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$1. \int_{-\infty}^{\infty} (1/2) e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{2} (2\pi\delta(\omega)) = \pi\delta(\omega)$$

$$F\{\frac{1}{2} \text{sgn}(t)\} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \text{sgn}(t) e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^0 \text{sgn}(t) e^{-j\omega t} dt + \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \text{sgn}(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$= -\frac{1}{2j\omega} \underbrace{e^{-j\omega t} \Big|_{-\infty}^0}_{-1} - \frac{1}{2j\omega} \underbrace{e^{-j\omega t} \Big|_0^{\infty}}_{-1}$$

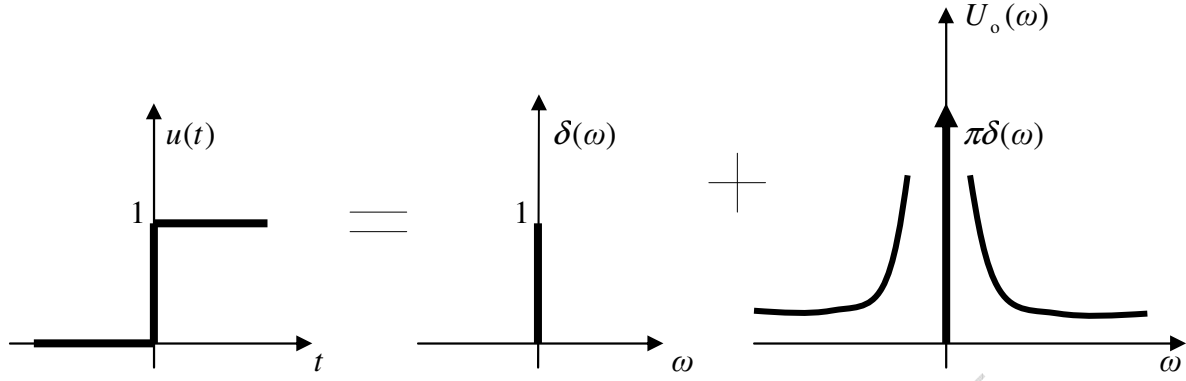
2.

$$= \frac{1}{2j\omega} + \frac{1}{2j\omega}$$

$$= \frac{1}{j\omega}$$

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$= \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$$



Şekil 47 Birim basamak fonksiyonunun Fourier transformasyonu

Örnek

$f(t) = e^{at}$ fonksiyonunun Fourier transformasyonunu bulun.

Çözüm

Eğer yalnızca fonksiyon e^{at} alınsaydı,

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{at} e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j(a-j\omega)t} dt = \frac{1}{j(a-j\omega)} e^{j(a-j\omega)t} \Big|_{-\infty}^{\infty} = \frac{1}{j(a-j\omega)} e^{j(a-j\omega)t} \Big|_{-\infty}^{\infty}$$

1. $a < 0$

$$F(\omega) = \frac{1}{j(a-j\omega)}$$

2. $a > 0$

$$F(\omega) = \text{YOK}$$

Not : $a > 0$ olarak bulunan çözüm, e^{at} tipli fonksiyonların ($a > 0$) koşulu altında Fourier transformasyonu ile çözülemeyeceğini göstermektedir. Bu aynı zamanda Fourier transformasyonunun yetersiz kaldığı yegane durum olarak bilinir. Bu tip sorunlar Fourier transformasyonunun daha genel hali olan $F(s)$ Laplace transformasyonu ile giderilir.

$$F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-st} dt$$

Laplace transformasyonu $s = \sigma + j\omega$ kompleks frekansı üzerine kurulu bir modeldir. Eğer denklemde reel kısım $\sigma \rightarrow 0$ alınırsa $s = j\omega$ olarak yazılabilecek

$$\begin{aligned} F(s)_{\sigma \rightarrow 0} &= F(j\omega) \\ &= F(\omega) \end{aligned}$$

fonksiyonun Fourier transformasyonu olduğunu görmekteyiz. Bundan dolayı $F(\omega) = F(j\omega)$ Fourier transformasyonu, $F(s) = F(\sigma + j\omega)$ Laplace transformasyonunun özel halidir. Diğer bir deyişle Laplace transformasyonu sürekli-zaman sistem ve işaretlerinin en genel halidir. Fourier transformasyonu, $s = \sigma + j\omega$ kompleks frekans düzleminin yalnızca düşeydeki frekans bileşenlerini içeren imajiner $s = j\omega$ kısmını kullanır ($\sigma \rightarrow 0$). Analizde Laplace transformasyonu, integro-diferansiyel denklemlerin çözümü içinde kullanılmaktadır.