

## BÖLÜM 4.1

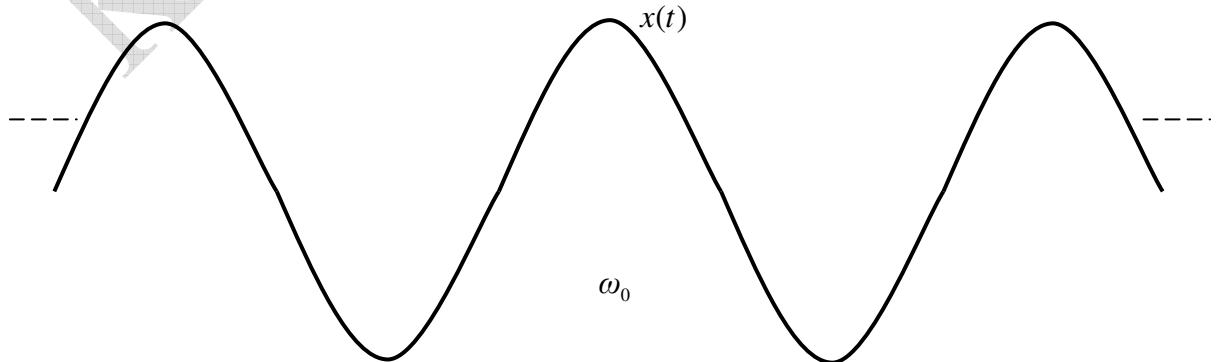
### FOURIER SERİSİ

#### İşaretlerin Zaman – Frekans Analizleri

Bu bölümden itibaren işaret işleme (signal processing) kavram ve yöntemlerine eğilmeye çalışacağız. Fourier serisi, Fransız matematikçi ve fizikçi (1768-1830) Jean Baptista Joseph Fourier in 1800 li yıllarda (1822) ortaya koyduğu Fourier teoreminin periodik işaretler kısmıyla ilgili olan ilk bölümünü oluşturmaktadır. Bu yüzden ilk olarak **periodik** işaretlerin frekans içeriklerini ve özelliklerini analiz etmeye yarayan, Fourier serisi ele alınacaktır. Bu amaçla, periodik işaret olarak **durağan işaretler** (stationary signals) üzerinde durulacaktır. İşaret işlemede gerekli yöntemler Fourier serisi, Fourier transformasyonu, örnekleme teorisi, Z transformasyonu ve kısmen Laplace transformasyon konularının iyi anlaşılmasından geçmektedir. İşaret işlemeye ilk giriş olarak işaretlerin zaman, frekans ve aynı anda zaman – frekans analizlerinden işe başlamak tutarlı olacaktır. Her ne kadar zaman – frekans analizi ileri konular olmasına ve de kısaca ele alınacak olmasına karşın, ana ilğimiz işaretlerin frekans uzayındaki davranışlarını, belirtilen işaret işleme yöntemlerine dayanarak detaylarıyla mercek altına almak üzerine olacaktır. İşaret işlemede zamana bağlı işaretin frekans içeriğini gösterebilme önemlidir. Bunun birkaç yaklaşımla yapılması mümkündür. Bu amaca uygun iki genel yöntem mevcuttur.

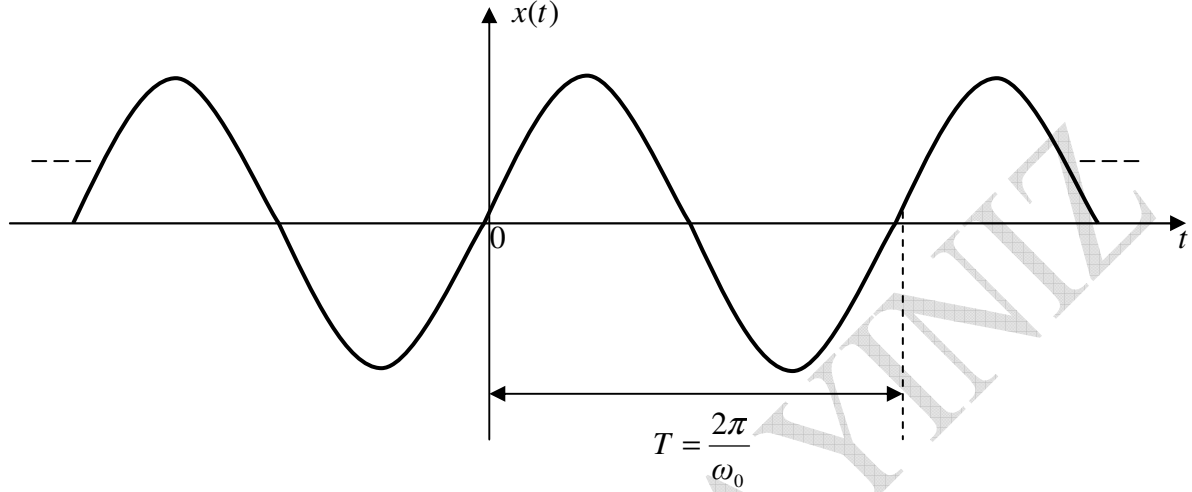
1. Zamana bağlı  $x(t)$  işaretin ayrı olarak frekans içeriğini (spektrumunu) gösterme:  $X(\omega)$
2. Zamana bağlı  $x(t)$  işaretin aynı anda hem zaman hem frekans olarak içeriğini gösterme:  $X(t, \omega)$

Bu iki yöntem yardımıyla işaretin zaman – frekans analizlerinin yapılması mümkündür. Eğer birinci yöntemi seçersek, zaman domenindeki  $x(t)$  işaretinin frekans içeriğinin  $X(\omega)$  olarak frekans domeninde gösterebiliriz. Ama bu gösterim aynı anda “ $t$ ” ve “ $\omega$ ” yani zaman ve frekans aynı düzlemde göstermez. Diğer bir deyişle herhangi bir “ $t$ ” zamanındaki “ $\omega$ ” frekansının değerinin (genliğini)  $X(t, \omega)$  olarak görmemiz mümkün olmaz. Bu yolla  $x(t)$  işaretinin “ $t$ ” zamanına bağlı analizi “ $x(t) - t$ ” uzayında ayrı, yine aynı işaretin bu kez “ $\omega$ ” frekansa bağlı “ $X(\omega) - \omega$ ” frekans genliği – frekans şeklinde ayrı olarak yapılmaktadır. Birinci yöntem olarak açıklamaya çalışılan teknik daha ziyade durağan (stationary) özellikteki işaretler için uygun bir tekniktir. Durağan bir  $x(t)$  işaretini aşağıdaki gibi düşünebiliriz.



Şekil 1 Durağan işaret : periodik işaretler

Görüldüğü gibi değişimleri fark edilmeyen, diğer bir deyişle istatistiksel parametrelerinde değişim gözlenmeyen işaretlerdir. Periyodik özellikte olan bu işaretler Fourier serisinin ana ilgi alanını oluşturmaktadır. Durağan işaretler olarak gözlemlendiklerinde değişmiyormuş gibi izlenim uyandıran bu tür işaretlerin en tipik örnekleri şekilde de görülen periyodik işaretlerdir. Çünkü periyodik işaretler aşağıdaki şekilden de görülebileceği gibi periyodikliği

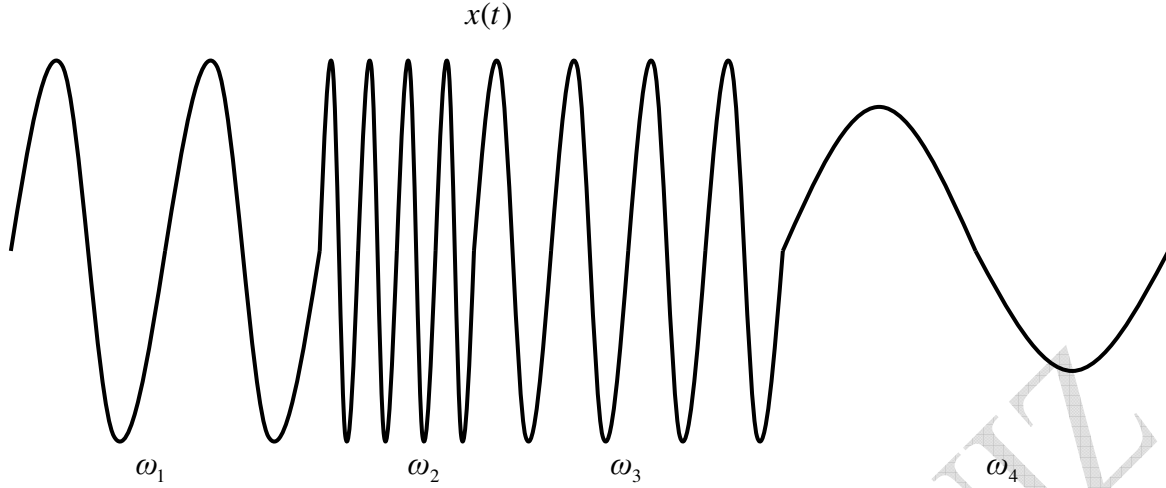


Şekil 2 Durağan işaret : periyodik işaretler

$$x(t + T) = x(t)$$

ile hesaplanan ve  $\omega_0$  gibi tek frekanslı işaretler olduğundan analizleri daha kolaydır. Diğer yandan bu işaretlerin, klasik trigonometrik fonksiyonlar olan  $\sin \omega t$  ve  $\cos \omega t$  gibi sinusoidlerle gösterilebilmeleri, Fourier serisi analizlerini kolaylaştırmaktadır. Çünkü biliyoruz ki, herhangi bir işaret bu tip sinusoidlerle gösterildikleri sürece, zaman ve aynı zamanda frekans domenindeki frekans içerikleriyle ilgili davranışları daha kolay analiz edilebilmektedir. Üstelik  $\sin \omega t$  ve  $\cos \omega t$  gibi sinusoidlerin **ortogonal** özellikte olmaları, bu tür zaman ve frekans analizlerinin diğer önemli bir özelliğini oluşturmaktadır. Fourier serisi kullanılarak işaretin zaman ve frekans domenleri ayrı ayrı yapılmaktadır. Asıl amaç, periyodik ve durağan özellikteki işaretin frekans domenindeki davranışdır. Fourier serisi, frekans domenindeki analizleri mümkün kılan bir teknik olduğu için işaretin yalnızca frekans domenindeki analizini gösteren  $x(t) \Leftrightarrow X(\omega)$  dönüşümünü sağlayacak “ $X(\omega) - \omega$ ” spektrumu yeterli olacaktır. Durumu daha da genellemeye çalışırsak birinci yaklaşıma göre “ $x(t) - t$ ” zaman domeninde verilen durağan işaretin “ $X(\omega) - \omega$ ” frekans analizini ayrı olarak yapmak mümkündür. İşaret durağan olduğu için “ $t - \omega$ ” gibi zaman – frekans analizini  $X(t, \omega)$  olarak yapmak gerekmez. Bunu tüm durağan işaretler için düşünebiliriz. Dolayısıyla durağan işaretlerin sabit frekanslarında zamana bağımlı değişim beklenmeyeceğinden klasik  $x(t) \Leftrightarrow X(\omega)$  dönüşümünü sağlayacak şekilde “ $X(\omega) - \omega$ ” analizi veya spektrumu yeterli olacaktır. Durağan işaretlerin zaman – frekans analizlerini yapacak yöntemler mevcuttur, aşağıda bu bölüm ve devamla gelecek bölüm için de detaylarıyla ele alınacaklardır.

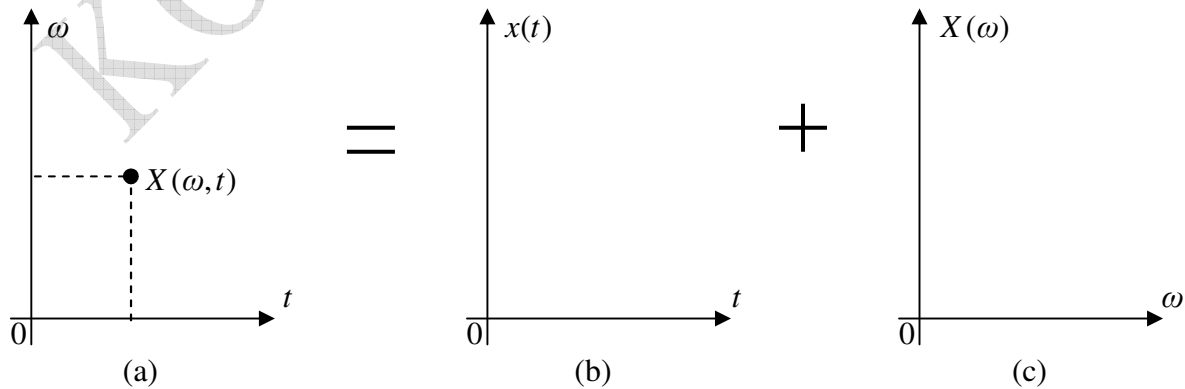
Bununla beraber aynı anda “ $t - \omega$ ” zaman – frekans analizinin  $X(t, \omega)$  olarak uygulanması gereken zorunlu işaret örnekleri de vardır. Bu tip işaretlere durağan olmayan (nonstationary) işaretler denilmektedir. Basit bir durağan olmayan bir  $x(t)$  işaret örneği aşağıda verilmiştir.



Şekil 3 Durağan olmayan işaret

Görüldüğü gibi değişimi fark edilebilen ve de periodik olması gerekmeyen bir işaret söz konusudur. Gözlemlendiğinde frekansı zamanla değişen bir  $x(t)$  işaret söz konusudur. Dolayısıyla istatistiksel parametreleri değişen ve sabit olmayan bir işaret olduğundan, hangi zaman da hangi frekansta olduğuna dair bilgiler bu tür durağan olmayan işaretlerin zaman – frekans analizleri için önemlidir. Dolayısıyla böyle bir işaretin spektrum içeriğini ilk yaklaşıma uygun olarak ele alınan periodik şekilde verilen  $x(t) \Leftrightarrow X(\omega)$  dönüşümünü ile “ $X(\omega) - \omega$ ” şeklinde analiz etmek sağlıklı olmaz. Sağlıklı yaklaşımın başlangıçta verilen ikinci yaklaşımı temel alan, aynı anda “ $t - \omega$ ” zaman – frekans analizi  $X(t, \omega)$  olarak yapacak yöntemden geçtiği görülmektedir.

Verilen şekle bakıldığında bu yaklaşımı teyit edecek şekilde  $x(t)$  işaretinin  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  ve  $\omega_4$  gibi farklı frekanstan oluşması da, durağan olmayan tezi destekler yöndedir. Bu nedenle bu farklı frekansların hangi zamanlarda olduğunu  $X(\omega_1, t_1)$ ,  $X(\omega_2, t_2)$ ,  $X(\omega_3, t_3)$  ve  $X(\omega_4, t_4)$  olarak bilmek önemlidir. Bunu sağlayacak yöntemler mevcuttur, ve bunlara aşağıda değinilecektir. Bunun öncesinde amacın anlaşılması açısından “ $x(t) - t$ ”, “ $X(\omega) - \omega$ ” ve “ $t - \omega$ ” zaman – frekans analizini içeren  $X(t, \omega)$  spektrumu arasındaki ilişkiyi ortaya koyan aşağıdaki şekli göz önüne almak faydalı olacaktır.



Şekil 4  $X(\omega, t) - (\omega, t)$ ,  $x(t) - t$ ,  $X(\omega) - \omega$  Frekans - zaman, zaman ve frekans uzayları

Görüldüğü gibi (a) daki zaman - frekans  $(t - \omega)$  uzayının, (b) deki “ $x(t) - t$ ” zaman ve (c) deki “ $X(\omega) - \omega$ ” frekans uzaylarının toplamı gibi düşünülebileceği anlatılmak istenmektedir. Şekil (b) de yer alan zaman analizi işaretlerin doğal gösterimlerinin yani işaret veya bilginin ham görüntüsünün yer aldığı uzay olduğunu biliyoruz. Şu ana kadar karşılaştığımız işaretlerin çoğunu genellikle böyle bir uzay veya domain içinde görmekteyiz veya buna alıştık. Şekil (c) uzayı, (b) deki doğal zaman domenindeki işaretin spektrumunu yani frekans içeriğini  $X(\omega) - \omega$  ile vermektedir. Biz bu yeni ve bir sonraki bölümümüzde daha ziyade bu yaklaşım ve analizler üzerinde yoğunlaşacağız. Bu açıdan (b) deki yapı, bizim için şu anda yeni bir kavramdır. Şekil (a) ya gelince, görüldüğü gibi bu yapının veya uzayın, (b) ve (c) deki domainlerin toplamı gibi olduğu vurgulanmaktadır. Yani işaretin hem zaman hem de frekans uzaylarını birleştirerek, işaretin müşterek “ $t - \omega$ ” domenindeki davranışı analiz edilmektedir. Bu açıdan ileri işaret işleme tekniği olarak anılmaktadır. Karmaşık özelliklerinden dolayı bu bölümde kısaca değinilecektir. Bu tekniğin önemli ve günümüz uygulamalarında oldukça önemli bir yeri olduğunu söyleyebiliriz. En basitinden konuşmayı oluşturan seslerin veya müzik aletlerinin çıkardığı diğer seslerin işaret olarak analizlerinin böylesine “ $t - \omega$ ” zaman – frekans teknikleriyle analizlerinin mümkün olduğunu söyleyebiliriz. Biz bu bölümde daha ziyade bu tekniğin alt yapısını oluşturabilecek “ $X(\omega) - \omega$ ” frekans analizine yoğunlaşmaya çalışacağız.

### Durağan İşaretlerin Zaman – Frekans Analizi

Bu yöntemde aynı anda “ $t - \omega$ ” zaman – frekans analizi  $X(t, \omega)$  olarak mümkün olmaz, işareti oluşturan parametrelerin değişimlerinin de beklenmemesi dolayısıyla da  $X(t, \omega)$  analizi şart değildir. Durağan özellikteki işaretlerin zaman – frekans analizini yapacak önemli bir teori vardır : Fourier teori olarak adlandırılan bu yöntem hem “ $x(t) - t$ ” hem de “ $X(\omega) - \omega$ ” analizini ayrı olarak mümkün kılmaktadır. “ $t - \omega$ ” gibi  $X(t, \omega)$  zaman – frekans analizinin aynı anda olmadığı Fourier teori ile

- Periyodik

ve

- Periyodik olmayan

sürekli ve ayrık işaretlerin “ $x(t) - t$ ” ve “ $X(\omega) - \omega$ ” analizleri yapılmaktadır. Bu analizleri yapan Fourier teori kendi içinde ise

- Fourier serisi

ve

- Fourier transformasyonu

olarak iki alt teoriye ayrılmıştır. Bunlar ise kendi içlerinde ayrıca

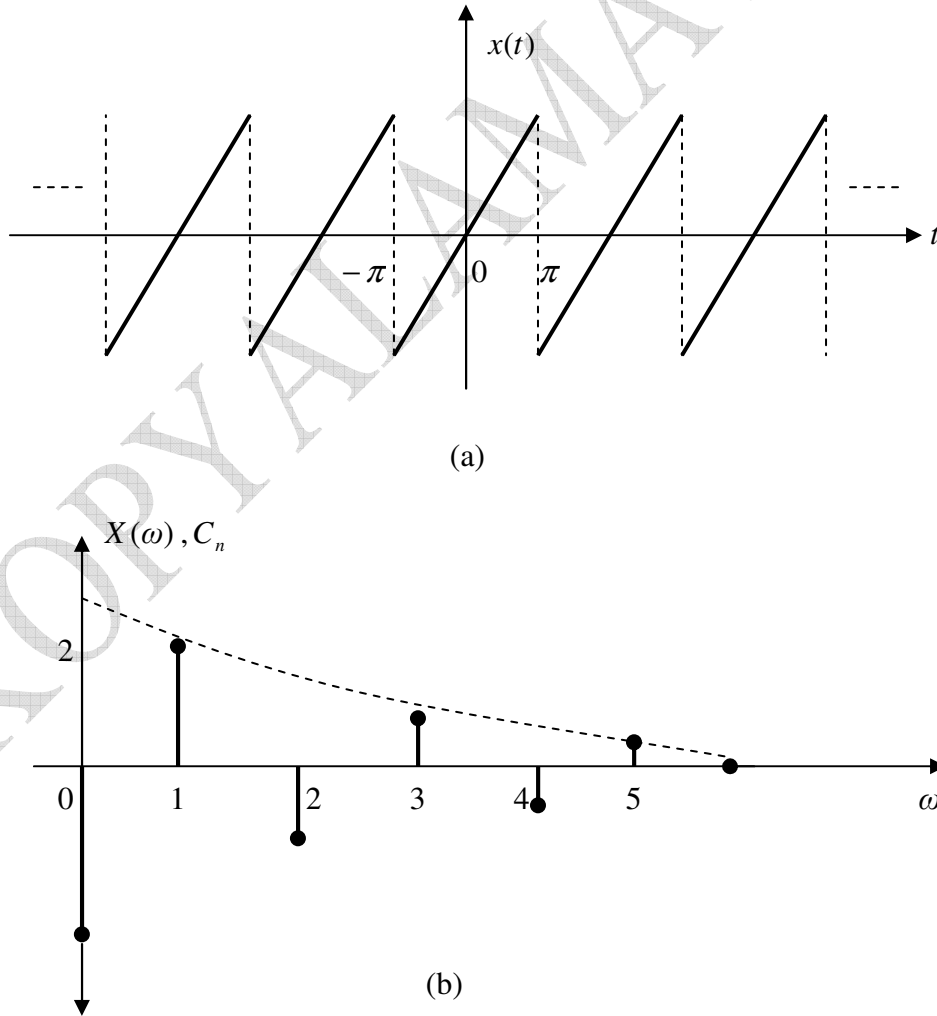
- Fourier serisi : periodik işaretlerin “ $x(t) - t$ ” ve “ $X(\omega) - \omega$ ” analizleri
- Fourier transformasyonu : periodik olmayan işaretlerin “ $x(t) - t$ ” ve “ $X(\omega) - \omega$ ”

analizleri olmak üzere ayrıca iki alt sınıflara ayrılmışlardır. Fourier serisi ve Fourier transformasyonu yukarıda verilen periodik  $x(t)$  işaretine uygulayarak basit olarak zaman – frekans analizlerini görmeye çalışalım.

### Doğal İşaretler – Yapay İşaretler

Doğal işaretler olarak adlandıracağımız işaretler  $\cos \omega t$  ve  $\sin \omega t$  gibi trigonometrik fonksiyonları oluşturan sinusoid olarak adlandırabileceğimiz işaretlerdir. Yapay işaretler ise, bahsedilen doğal işaretler gibi elde edilemeyip, ancak söz konusu sinusoidlerin düzenli veya düzensiz yapıdaki farklı frekanslarının (harmoniklerinin) çeşitli kombinasyonlarıyla sonradan oluşturulan işaretlerdir. Rampa, basamak, impuls, kare, üçgen ve dijital gibi işaret veya dalgalar bu özellikteki yapay işaretler olup, bahsedilen farklı frekanslı sinusoidlerin süperpozisyonlarıyla (kombinasyonlarıyla) sonradan elde edilmektedirler.

### Örnek



Şekil 5 (a) : Durağan işaret , (b) : Durağan işaretin spektrumu (frekans içeriği)

Görüldüğü gibi (a) da durağan özellikteki

$$x(t) = t, \quad -\pi \leq t \leq \pi$$

fonksiyonuyla tanımlı  $x(t)$  durağan işaretinin yine periodik özellikte olduğunu görmekteyiz. Burada belirtildiği gibi işaret durağan ve periodik olduğundan dolayı, direkt olarak Fourier serisi ile analiz yapılmıştır. Verilen  $x(t) = t$  işaretinin Fourier serisine açılmış biçimi

$$x(t) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nt, \quad -\pi \leq t \leq \pi$$

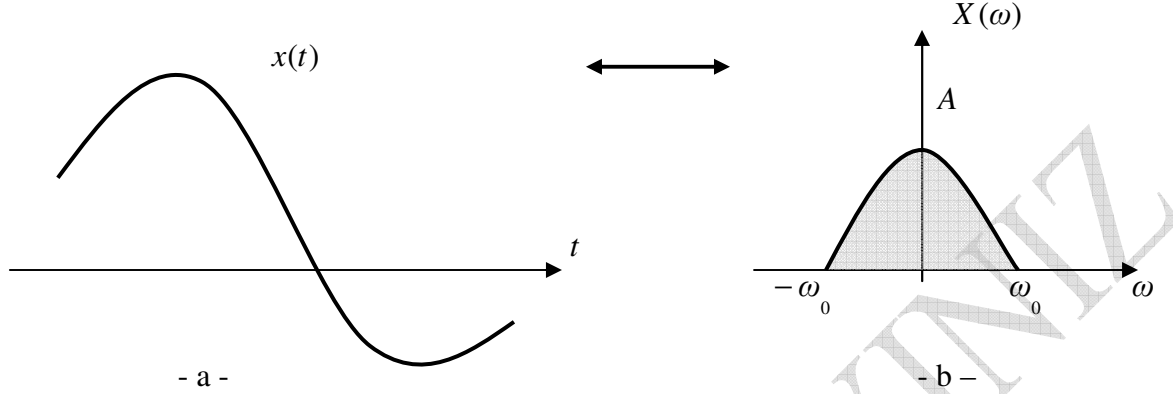
olarak elde edilmiştir. Elde edilen Fourier serisi  $n = (1, \infty)$  aralığına göre değerlendirildiğinde  $X(\omega)$  veya  $C_n$  olarak frekans içeriği (spektrumu), şekil (b) deki gibi elde edilmiştir. İlk fark edilen  $C_n$  Fourier seri spektrumunun ayırık formatta oluşudur. Bunun harmonik yaklaşımından kaynaklandığını düşünebiliriz.

**Çünkü**  $x(t) = t$  fonksiyonuyla verilen rampa fonksiyonunun doğal bir işaret olmadığını biliyoruz. Yani rampa fonksiyonu veya işareti doğal işaretler olan sinus ve cosinus gibi fonksiyonların farklı frekanstaki bileşenlerinin (harmoniklerinin) süperpozisyonundan oluşan yapay işarettir (sonradan yapılmış). Bu yüzden Fourier spektrumunda görülen ayırık yapı, söz konusu rampa fonksiyonunu oluşturan doğal (temel) sinusoidlerin harmoniklerini gösteren frekanslardır. Bu yüzden Fourier spektrumu veya rampa fonksiyonunun frekans uzayında farklı frekansların oluşturacağı ayırık bir spektrum söz konusudur.

Elde edilen Fourier serisi düşey eksene göre ters simetrik olduğundan spektrumun  $n = (-\infty, 0)$  olarak sol tarafı da sağ yarı tarafa göre oluşturulabilir. Şekil (b) ile, başlangıçta  $x(t)$  fonksiyonuyla verilen  $x(t) = t$  işaretinin frekans olarak hangi harmonikleri içerdiği Fourier serisi ile bulunmuştur. Diğer bir deyişle rampa tipli  $x(t)$  fonksiyonunun hangi frekansları hangi büyüklükte içerdiğine dair bilgiyi, Fourier serisi ile gözlemleyebilmekteyiz.

### Periodik Olmayan Durağan İşaretlerin Spektrumu

Üzerinde düşünmeye devam ettiğimiz durağan işaretin periodik olmaması durumunda da frekans analizi yapılabilir. Bunu sağlayan yöntem, yukarıda bahsedildiği gibi Fourier transformasyonudur. Bu paralelde bir örnek aşağıda ele alınmıştır.



Şekil 6 (a) : Periodik olmayan işaret, (b) Periodik olmayan işaretin spektrumu

Görüldüğü gibi (a) da verilen  $x(t)$  periodik olmayan durağan bir işaretin, spektrumunu yani frekans içeriğini araştırmak istiyoruz. Bunun için  $x(t)$  işaretinin Fourier transformasyonunu almamız gerekiyor. Bunu yaptığımızda

$$F\{x(t)\} = X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

bağıntısına göre  $X(\omega)$  spektrumunun oluştuğunu görmekteyiz. İlk fark edilen bu spektrumun sürekli özellikte oluşudur. Fourier serisinin spektrumunu hatırlarsak, spektrum orada ayrık formatta idi.

Burada önemli bir tespit yapmamız gerekiyor: her ne kadar gerek Fourier serisi ve Fourier transformasyonu yardımıyla zamana bağlı bir işaretin spektrumu yani hangi frekanslardan oluştuğuna dair bilgi sunuluyorsa da, aynı zamanda her iki yöntem yardımıyla verilen herhangi bir zamana bağlı doğal olmayan bir işaretin hangi sinusoidlerden oluştuğuda tespit edilmektedir ki, bu çok önemli bir bilgidir. Hangi sinusoid derken değişken “ $n$ ” değerine bağlı olarak, çeşitli harmoniklerdeki  $\cos n\omega t$  ve  $\sin n\omega t$  fonksiyonlarından bahsetmekteyiz. Buna göre gerek Fourier serisi gerekse de transformasyonunun iki önemli işlevi ortaya çıkmaktadır:

1. Periodik ve periodik olmayan işaretlerin frekans dağılımlarını (spektrumlarını) göstermesi,
2. Periodik ve periodik olmayan işaretlerin harmonik özellik gösteren hangi sinusoidlerden elde edildiğini göstermesi

Bu iki özellik Fourier serisinde görüldü. Ele alınan bir rampa fonksiyonunun hangi frekanslar (harmoniklerden) oluştuğunu gösteren ayrık spektrum ilk koşulu sağlarken, elde edilen Fourier serisi ile de ilgili rampa fonksiyonunun hangi frekanslara (harmoniklere) sahip sinusoidlerden oluştuğu da görülmüştür. Bu iki yaklaşımı Fourier transformasyonuna da uyarlarken, yukarıda verilen  $x(t)$  periodik olmayan ama durağan kabul edilen işaretin sürekli bir spektrumu elde edilmiştir. Bu ilk koşulun karşılığı olarak kabul edilebilir.

Bu koşul sağlanırken, verilen orijinal periodik olmayan  $x(t)$  işaretinin de doğal olmadığı dikkat çekmektedir. Nasıl ki Fourier serisi ile periodik bir işaretin çeşitli harmoniklerdeki hangi sinusoidlerden elde edildiği araştırılıyorsa, bu kez de Fourier transformasyonu yardımıyla periodik olmayan işaretlerin hangi sinusoidlerin süperpozisyonundan oluştuğu araştırılmaya çalışılmaktadır. Bunun karşılığı da Fourier serisine benzer bir fonksiyon olmalıdır. Böyle bir fonksiyonun  $x(t)$  işaretinin Fourier transformasyonu olarak bilinen

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

fonksiyonu olduğunu görmekteyiz. Bu denkleme bakarak periodik olmayan söz konusu işaretin hangi sinusoidlerden oluştuğunu nasıl görebiliriz sorusu akla geliyor. Bu ihtiyacı karşılayacak  $\cos n\omega t$  ve  $\sin n\omega t$  gibi fonksiyonların direkt olmasa da verilen  $X(\omega)$  fonksiyonunda  $e^{-j\omega t}$  teriminin içinde saklı olduğunu görmekteyiz. Böyle olduğunu

$$e^{j\omega t} = \cos \omega t + j \sin \omega t$$

$$e^{-j\omega t} = \cos \omega t - j \sin \omega t$$

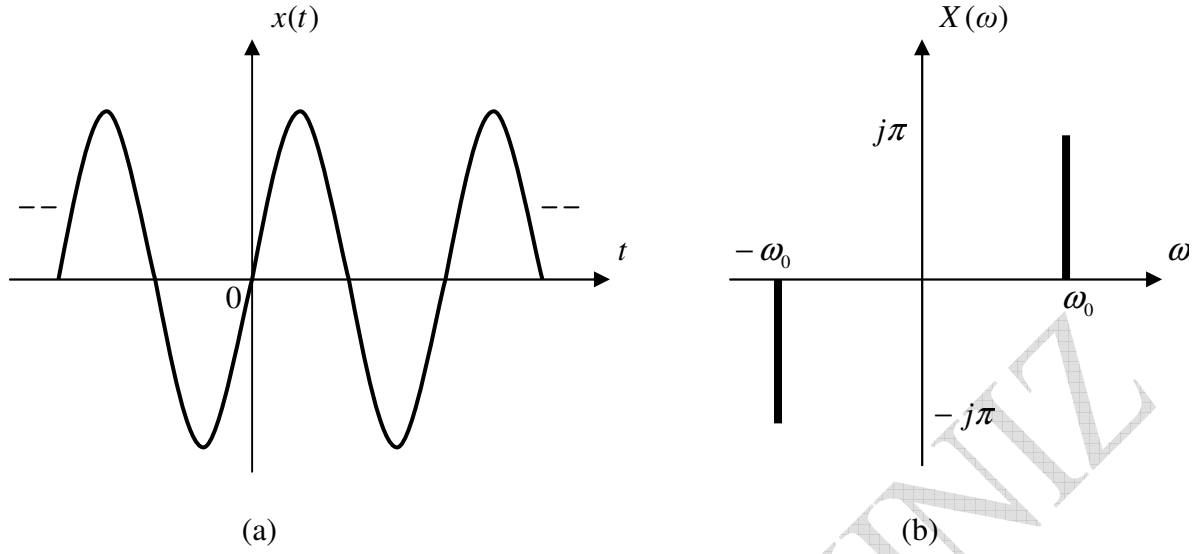
Euler denklemlerinden bilmekteyiz. Buna göre gösteren integrasyondaki  $e^{-j\omega t}$  ifadesi, periodik olmayan bir işaretin tıpkı Fourier serisi gibi hangi harmoniklere sahip sinusoidlerden oluştuğunu Fourier transformasyonu ile göstermektedir. Burada Fourier serisindeki harmonik olarak algılanabilecek ifadenin

$$\omega = n\omega_0$$

gibi olduğu düşünülebilir. Bu anlamda Fourier transformasyonunun uygulanabileceği bir başka ilginç örnek aşağıda ele alınmıştır.



### Örnek



Şekil 7 (a) : Durağan  $\sin \omega_0 t$  işareti , (b) Durağan işaretin frekans içeriği

Görüldüğü gibi (a) da  $x(t) = \sin \omega_0 t$  gibi verilen periodik işaretin  $\omega_0$  tek frekanslı haliyle durağan bir işaret olduğunu görmekteyiz. Böyle bir işaretin zaman olarak her period boyunca frekansı yine tek ( $\omega_0$ ) olacağından (b) de görülen  $X(\omega)$  spektrumu yeterli olmaktadır. Burada  $X(\omega)$  spektrumunun

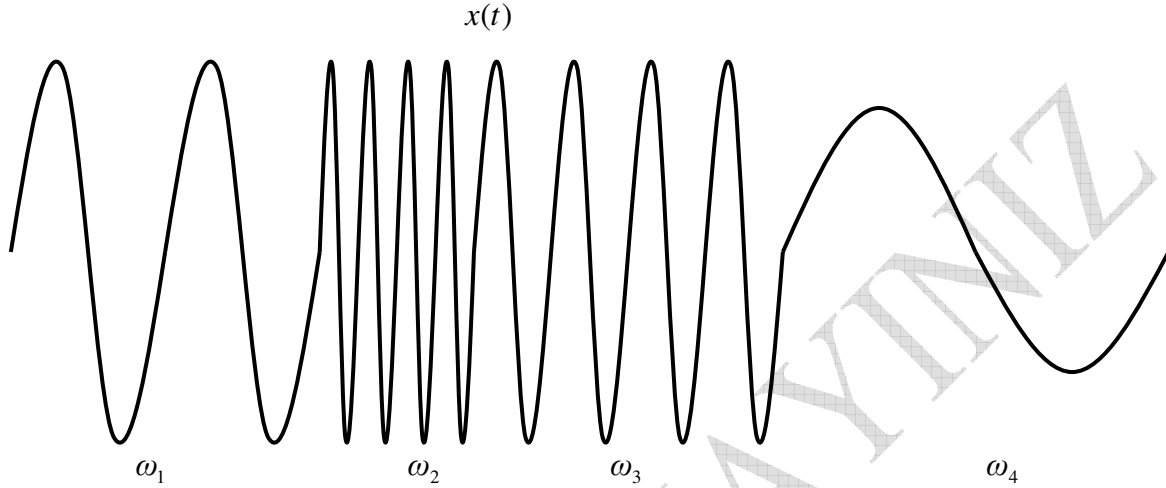
$$F\{x(t)\} = F\{\sin \omega_0 t\} = j\pi\delta(\omega + \omega_0) - j\pi\delta(\omega - \omega_0)$$

Fourier transformasyonu ile oluşturulmuş olduğunu görüyoruz. Burada önemli bir noktayı belirtmemiz gerekiyor. Her ne kadar verilen  $x(t)$  işaretinin frekans analizi Fourier transformasyonu ile yapılmışsa da, bunun genel bir durum olmadığını belirtmeliyiz. Çünkü periodik işaretlerin frekans analizleri Fourier serisi ile daha sağlıklı yapılmaktadır. Burada Fourier transformasyonunun istenirse verilen özellikteki  $x(t) = \sin \omega_0 t$  sinusoidinin analizini de yapabilmesi vurgulanmıştır. Ancak Fourier transformasyonunun bölüm başlangıcında vurgulandığı gibi daha ziyade periodik olmayan durağan benzeri işaretlerin analizlerinde kullanılan bir yöntem olduğunu unutmamalıyız. Dolayısıyla durağan ve periodik işaretlerin analizinin Fourier serisi ile daha uygun olacağı gerçeği ortaya çıkar.

Şu ana kadar durağan özellikteki işaretlerin zaman – frekans analizlerini ayrı domenlerde olmak üzere Fourier serisi veya Fourier transformasyonundan yararlanarak gözlemleyebileceğimizi basitçe görmüş durumdayız. Öte yandan bir ikinci sınıf işaret var ki, analizinin daha karmaşık olduğunu biliyoruz. Durağan olmayan işaretlerden bahsediyoruz. Başlangıçta değindiğimiz bu tür işaretlerin zaman – frekans analizlerinin nasıl yapıldığına kısaca aşağıda ele alacağız.

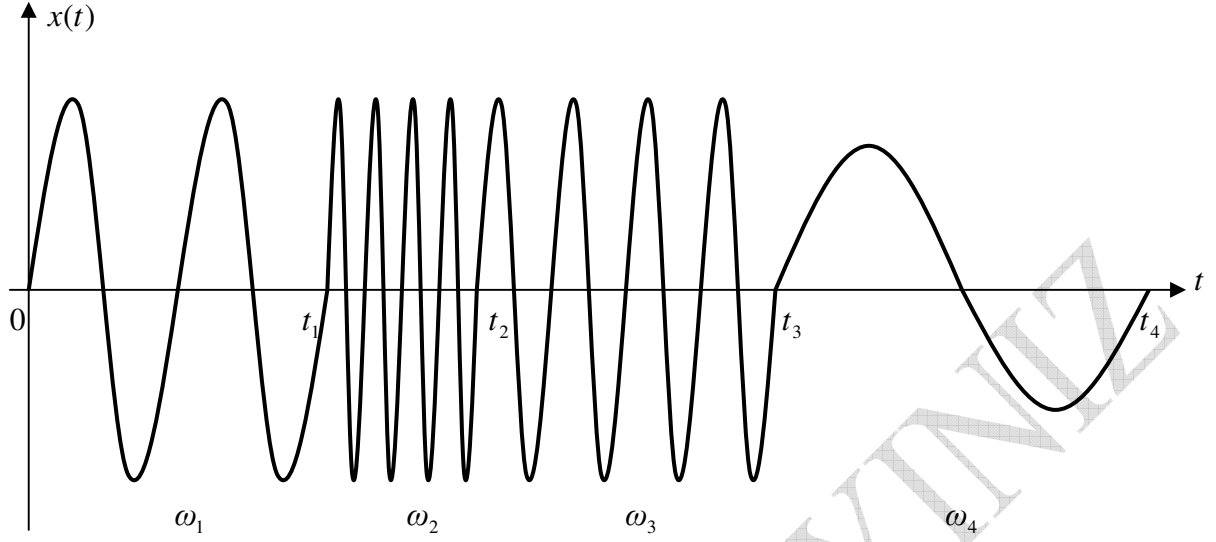
### Durağan Olmayan İşaretlerin Zaman – Frekans Analizleri

Şu ana kadar durağan işaretlerin zaman – frekans analizlerinin Fourier serisi veya Fourier transformasyonu ile yapılabileceğini gördük. zamanı ve frekansı ayrı ayrı olarak ele alan bu teknikler vasıtasıyla durağan olmayan işaretlerin  $X(\omega, t)$  olarak zaman – frekans analizlerinin en azından sağlıklı olarak yapılamayacağını belirtmek isteriz. Eğer tekrar yukarıdaki durağan olmayan

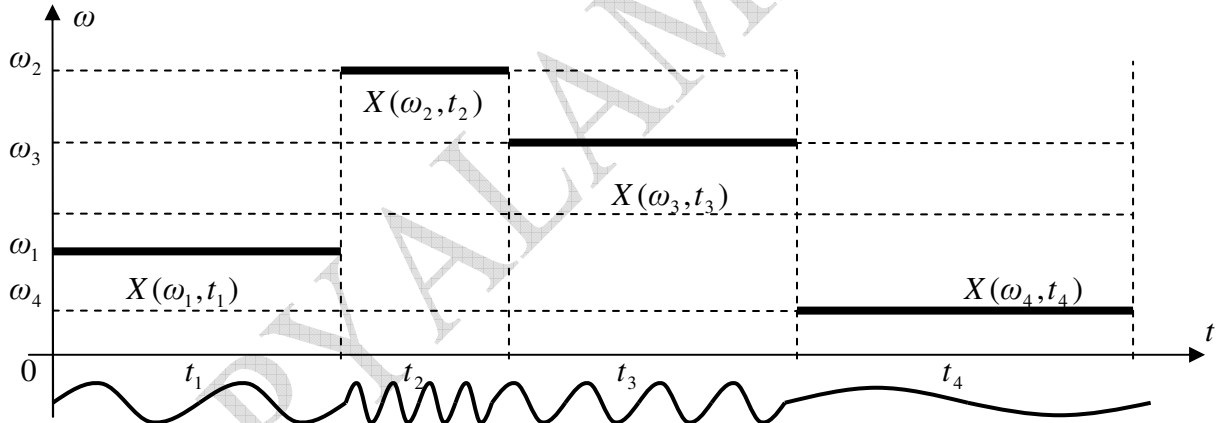


Şekil 8 Durağan olmayan işaret

işaretini göz önüne alırsak, öncelikle sağlıklı bir yaklaşımın nasıl olması gerektiğini düşünelim. Böyle bir işaret görüldüğü gibi farklı zamanlarda farklı frekansları olan işaretlerin davranışını göstermektedir. Yani işaretin frekansı zamanla değişmektedir. Sorun sayılabilecek bu durumla,  $\sin \omega t$  ve  $\cos \omega t$  gibi periodik ve durağan sinusoidler kapsamında karşılaşılmadığı için, klasik sinusoidlerin her tür analizi mümkün olmuştur. Bundan dolayı, periodik ve durağan işarettaki gibi sabit frekans ve fazın zamanla değişmediği klasik sinusoidlere uygulanan analiz teknikleri, yukarıdaki şekildeki gibi parametreleri zamanla değişen, diğer bir deyişle durağan olmayan işaretler için yeterli olmayacaktır. Bu nedenle  $\omega_1 - t_1$ ,  $\omega_2 - t_2$ ,  $\omega_3 - t_3$  ve  $\omega_4 - t_4$  aralıkları için zaman – frekans analizlerinin yapılması gereği vardır. Bu doğrultuda analiz için hangi yöntem dikkate alınır alınsın yukarıda verilen durağan olmayan ve  $\omega_1 - t_1$ ,  $\omega_2 - t_2$ ,  $\omega_3 - t_3$  ve  $\omega_4 - t_4$  aralıkları için tanımlı işaretin zaman – frekans analizinden olan beklentimizin karşılanması gerekmektedir. Böyle bir beklentiği grafik olarak aşağıdaki gibi gösterebiliriz.



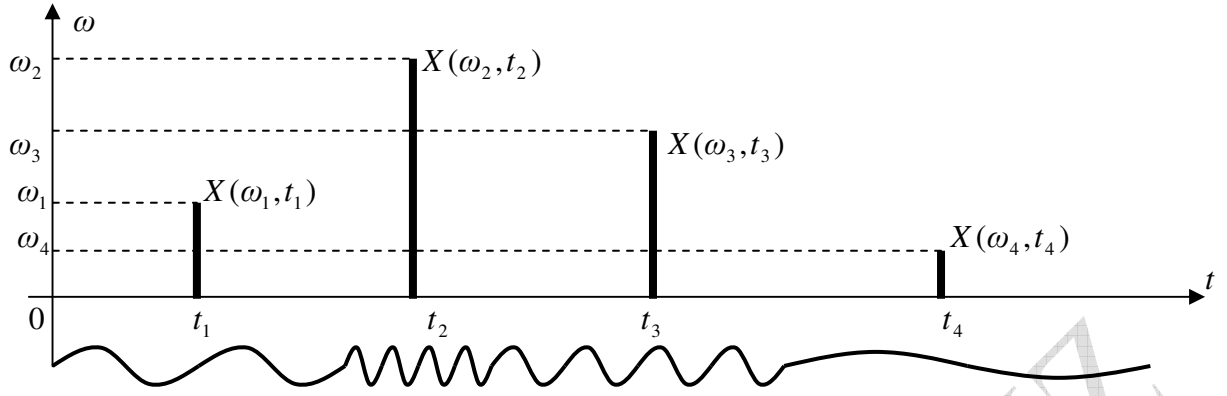
(a)



(b)

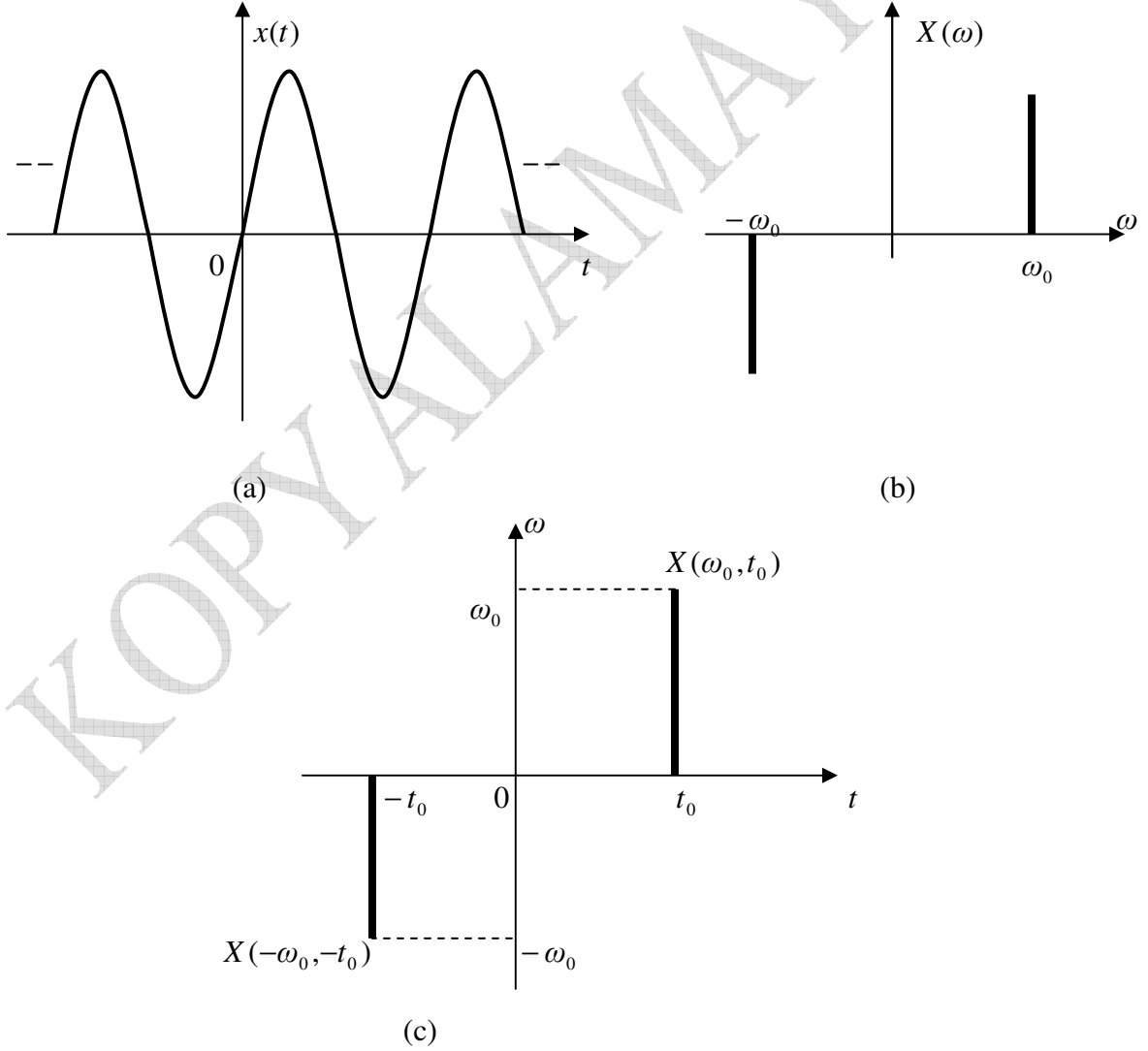
Şekil 9 (a):Durağan olmayan işaret, (b):Durağan olmayan işaretin zaman–frekans spektrumu

Durağan olmayan işaretlerin yukarıdaki şekil gibi zaman – frekans analizlerinin gösterildiği grafikler **spektrogram** (spectrogram) olarak anılır. Görüldüğü gibi durağan olmayan işaretin zaman – frekans değişim özelliklerini  $\omega - t$  olacak tarzda  $X(\omega_1, t_1)$ ,  $X(\omega_2, t_2)$ ,  $X(\omega_3, t_3)$  ve  $X(\omega_4, t_4)$  şeklindeki genliklerine göre analiz edebilmekteyiz. Bu yolla hangi frekans bileşeninin hangi anda hangi büyüklükte olduğunu bilme şansına sahip oluruz. Alternatif bir gösterimde aşağıdaki gibi olabilirdi.



Şekil 10 Durağan olmayan işaretin zaman – frekans spektrumu

Bununla beraber yukarıda ele alınan  $x(t) = \sin \omega_0 t$  durağan fonksiyonu da dilersek durağan olmayan işaretlerin gösterildiği  $X(\omega, t)$  zaman – frekans uzayındaki gibi gösterebiliriz.



Şekil 11 (a):  $x(t)$  Durağan işaret, (b):  $X(\omega)$  Fourier spektrumu, (c)  $X(\omega_0, t_0)$  Spektrumu

Her ne kadar durağan işaretlerin zaman – frekans frekans analizleri için Fourier teori yeterliyse de, istenirse  $X(\omega_0, t_0)$  spektrumu olarak zaman – frekans yaklaşımıyla da analizleri mümkündür. Bunların ışığında frekansın zamana göre değişmesi olarak nitelendirebileceğimiz durağan olmayan işaretlere yönelik uygulamadan alınan örneklerden bazıları aşağıdaki verilmiştir.

### Örnek

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \phi)$$

$$\phi = (\omega_0 t + \theta) = \text{açı fonksiyonu (anlık faz)}$$

Bu fonksiyonda açı fonksiyonu  $\phi$ ,  $\omega_0$  frekansıyla lineer olarak değişmektedir. Buradan anlık frekansı hesaplamak istersek,

$$\omega_i(t) = 2\pi f_i(t) = \frac{d\phi(t)}{dt}$$

$$f_i(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d\phi(t)}{dt} = \omega_0$$

görüldüğü gibi sabit  $\omega_0$  frekansına eşit çıkmaktadır. Diğer yandan eğer  $x(t)$  işaretini, açı fonksiyonunu zamana bağlı  $\psi(t)$  olarak düşünersek, bu durumda işaret

$$x(t) = A \cos \psi(t)$$

şeklinde oluşur. Zamana bağlı  $\psi(t)$  açı fonksiyonu aşağıdaki gibi düşünülebilir.

$$\psi(t) = 2\pi \mu t^2 + 2\pi f_0 t + \theta$$

buradan anlık frekansı

$$\omega_i(t) = \frac{d\psi(t)}{dt} \text{ (rad/sn)} \psi(t)$$

veya

$$2\pi f_i(t) = \frac{d\psi(t)}{dt}$$

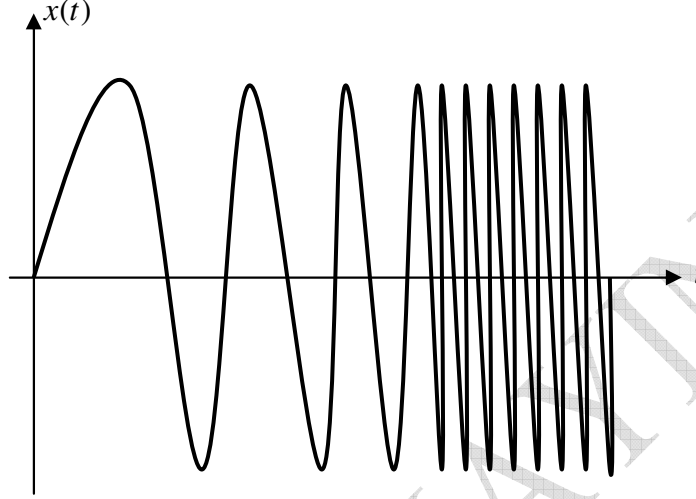
$$f_i(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d\psi(t)}{dt} = \frac{1}{2\pi} (4\pi \mu t + 2\pi f_0)$$

$$f_i(t) = 2\mu t + f_0$$

görüldüğü gibi anlık frekans zamana bağlı, zamanla lineer değişmektedir. Bu şekilde anlık frekansı zamana bağlı olarak elde edilen açı fonksiyonuna **lineer frekans modülasyonu** denir ve bu tür  $x(t)$  işaretine de frekans modülasyonlu, FM işaret denilmektedir. Bu tarzdaki zamanla değişen ve frekans modülasyonlu olarak anılan işaretlerin en tipik örnekleri siren veya kuş ötüşü (chirp) şeklindeki işaretler olduğundan kısaca **chirp işaretler** (kuş ötme sesi) denilmektedir. Böyle bir chirp işaretin sinusoidal karşılığını yazmak istersek,

$$x(t) = \sin\left(2\pi\left(f_0 + \frac{k}{2}t\right)t\right)$$

elde edilir. Görüldüğü gibi açılı fonksiyonunda lineer olmayan bir  $t^2$  terimim göze çarpmaktadır. Burada “ $k$ ” sabiti yukarıdaki  $f_i(t)$  ifadesinde görülen  $2\mu$  gibi bir sabittir. Eğer lineer frekans modülasyonu gösteren sinusoidal olarak ifade edilen chirp işaretini oluşturmaya çalışırsak,



Şekil 12 Chirp işareti :  $x(t) = \sin\left(2\pi\left(f_0 + \frac{k}{2}t\right)t\right)$

elde edilir. Sonuçta açılı fonksiyonun, yani frekansın zamanla lineer değişmediği durağan olmayan işaretlere örnek oluşturan chirp olarak anılan işaretlerin analizlerinin ancak özel zaman – frekans analiz yöntemleriyle mümkün olabileceği görülmektedir. Bu doğrultuda zaman – frekans analizini “ $t - \omega$ ” veya  $X(t, \omega)$  gibi yapan yöntemlerin mevcut olduğunu biliyoruz. Özelliklerinden dolayı zaman – frekans (time-frequency) analiz teknikleri olarak anılan ilgili yöntemler, gelişmiş işaret işleme teknikleri olarak anılmaktadır. **Anlık frekans** analiz yöntemiyle en basit halde analiz edilebilen daha ziyade durağan olmayan işaretlerin zaman-frekans ( $t - \omega$ ) analizlerini kapsayan diğer alternatif yöntemlerin en bilinenleri anlık frekans tabanlı **Hilbert transformasyonu**, “**kısa zamanlı Fourier transformasyonu** (short-term Fourier transform)”-spektrogram, **Gabor teori**, “**Wigner-Wille yöntemi**” ve “**Wavelet teori**”-skologram şeklindedir. Bunlar ileri konular olduğundan, çalışmamızda periodik – periodik olmayan özellikteki daha ziyade Fourier seri ve Fourier transformasyonunu ele alacağız. Yukarıda vurgulandığı gibi ilk olarak Fourier serisini bu bölümde ele alacağız. Bu yüzden direk olarak Fourier serisine girmeden, onun alt yapısını oluşturan temel bazı başlıklardan başlayacağız.

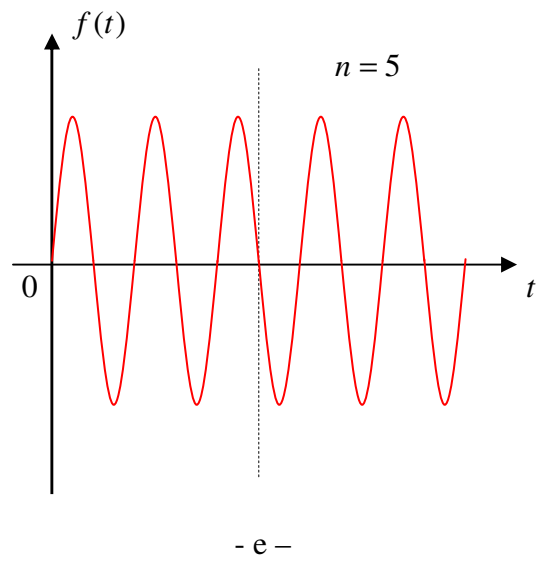
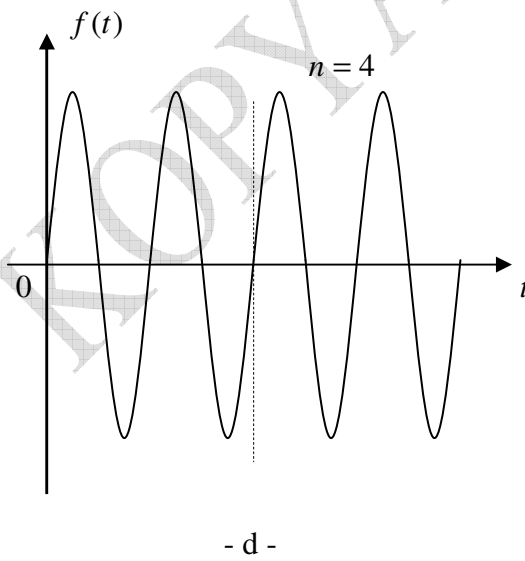
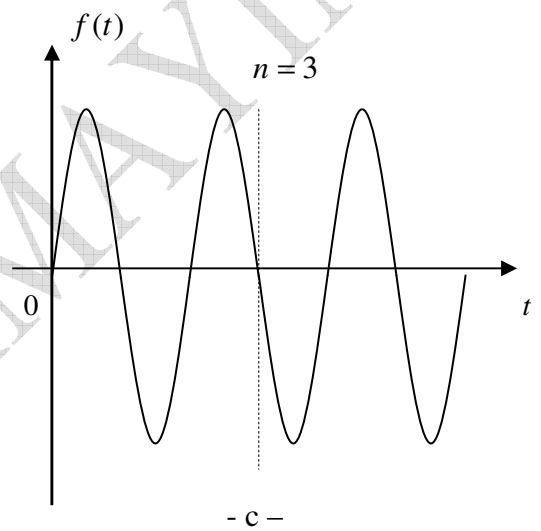
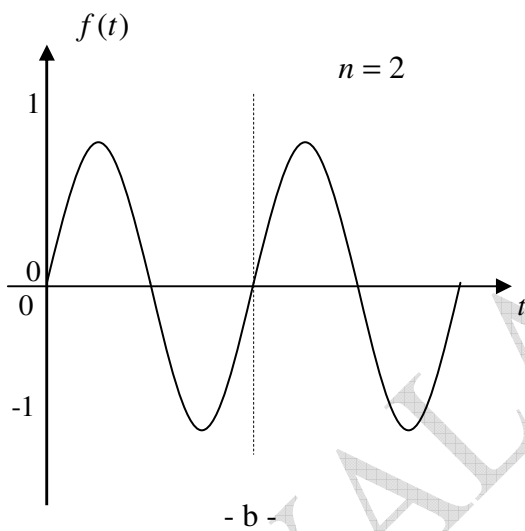
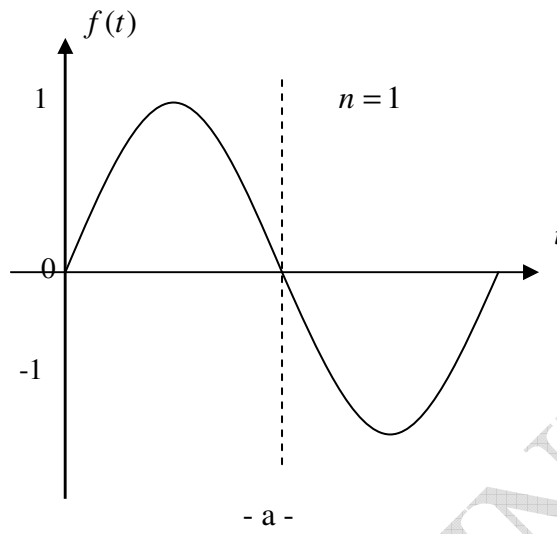
### Trigonometrik Fourier serisi ile periodik işaretlerin gösterimi

Trigonometrik seriler içerdikleri  $\cos$ – $\sin$  tipli fonksiyonlardan dolayı, Fourier serisinin adeta temelini oluşturmaktadırlar. Çünkü bu tip fonksiyonlar ortogonal ve de pratik olma özellikleriyle işaret işlemede oldukça yaygın yararlanılan işaretler ve fonksiyonlardır. Bu nedenle basit anlamda trigonometrik seri ve fonksiyonların özellikleri göz önüne alınacaktır. Bu tip  $\cos$ – $\sin$  tipli sinusoid fonksiyonlardan oluşan trigonometrik bir serinin, bir işareti temsil etmede kullanılacak serinin veya kümenin dizi olarak terimlerinin aşağıdaki elemanlardan oluştuğunu düşünelim.

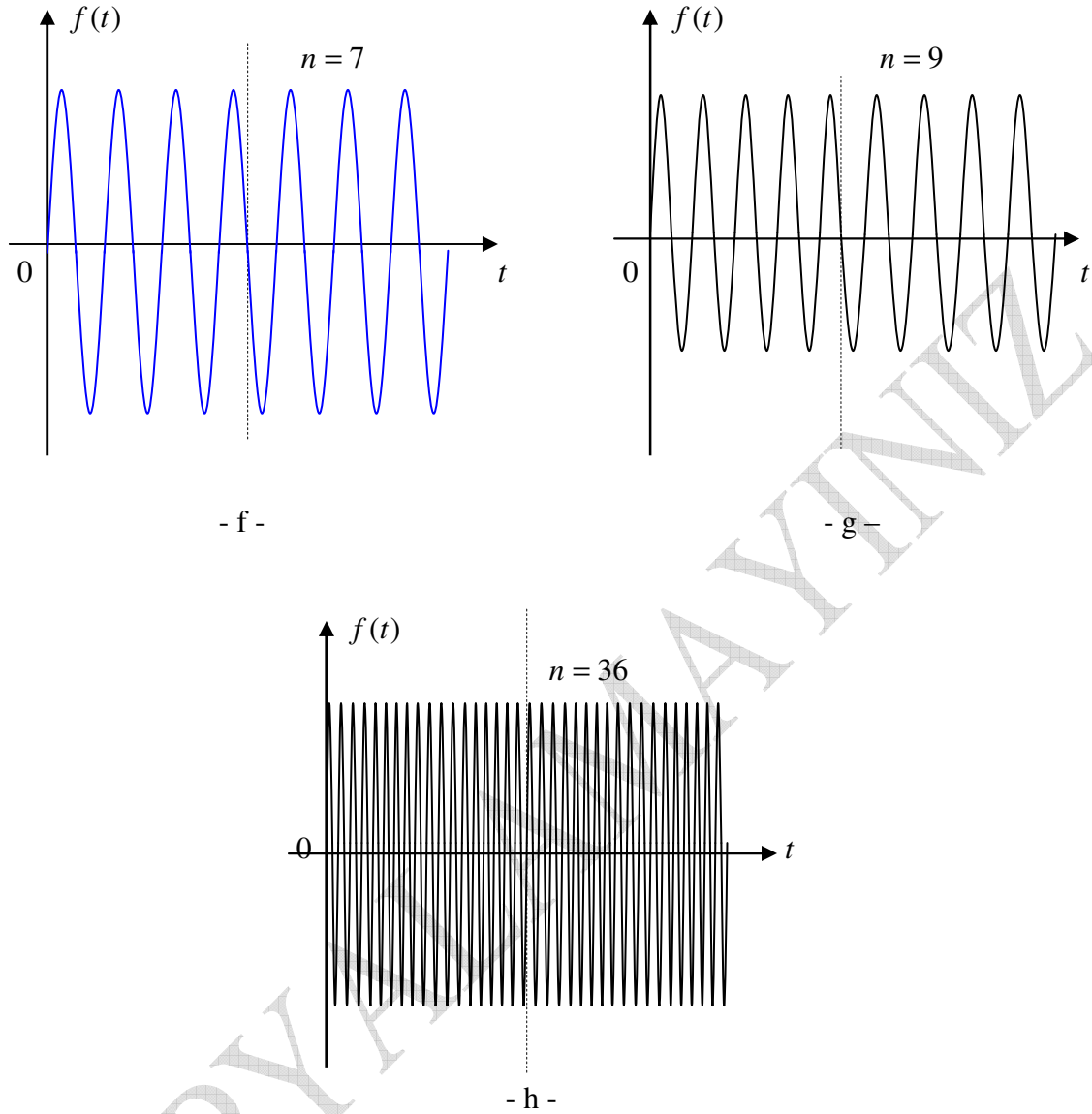
$$f(t) = \{ \underbrace{a_0 \cos(0 \times \omega_0 t)}_1, a_1 \cos \omega_0 t, a_2 \cos 2\omega_0 t, \dots, a_n \cos n\omega_0 t, \dots$$
$$; \underbrace{b_0 \sin(0 \times \omega_0 t)}_0, b_1 \sin \omega_0 t, b_2 \sin 2\omega_0 t, \dots, b_n \sin n\omega_0 t, \dots \}$$

$$f(t) = \{a_0, a_1 \cos \omega_0 t, a_2 \cos 2\omega_0 t, \dots, a_n \cos n\omega_0 t, \dots; b_1 \sin \omega_0 t, b_2 \sin 2\omega_0 t, \dots, b_n \sin n\omega_0 t, \dots\}$$

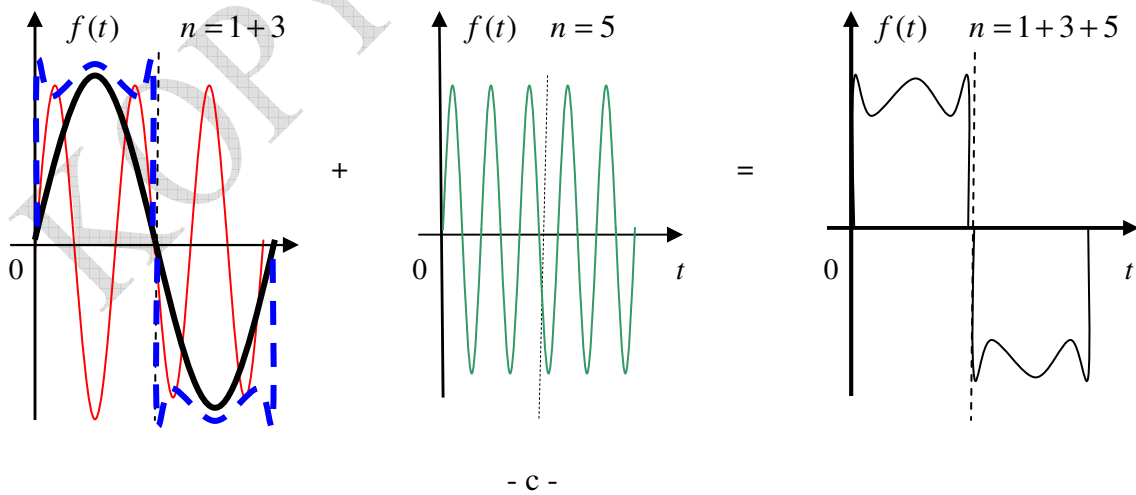
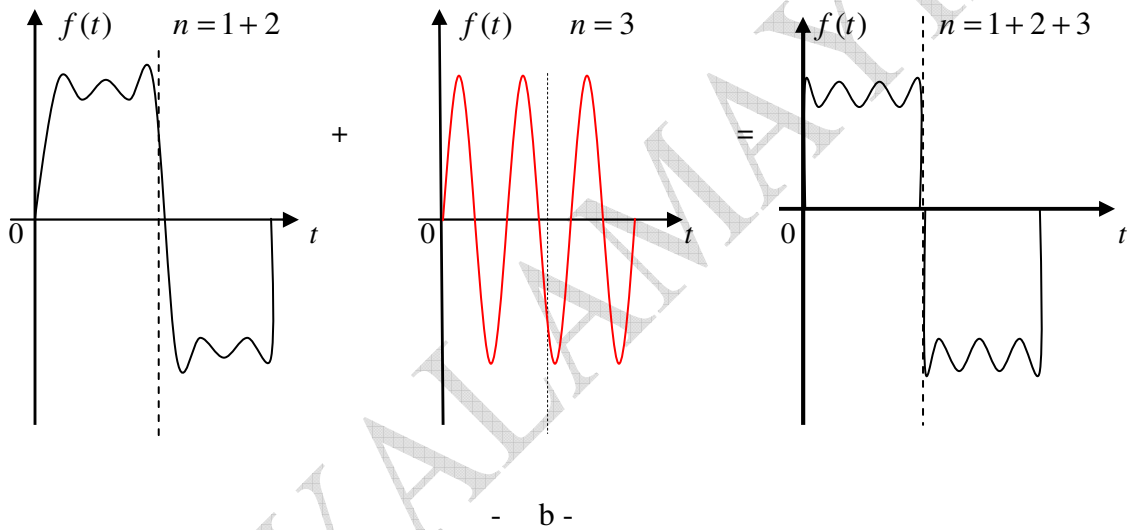
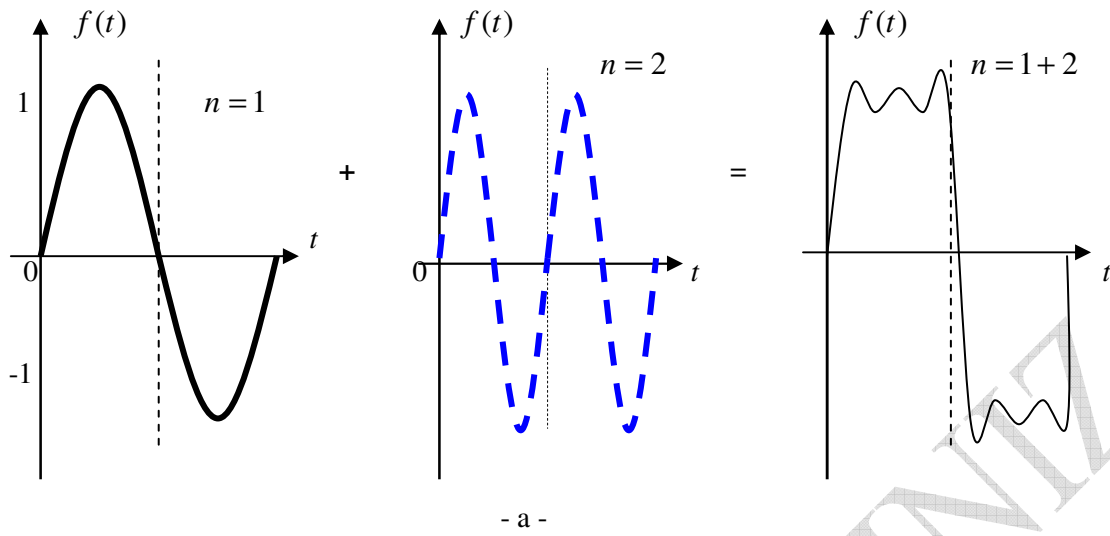
Görüldüğü gibi, **sinusoidal** (sin + cos) olarak **temel (fundamental) frekansın** ( $\omega_0$ ) **harmonikleri** (katları) olarak  $n\omega_0$  şeklinde giden elemanları içeren bir işaret kümesi söz konusudur. Bu sinusoidal işaret kümesindeki elemanların belirli bir aralıkta  $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$  periodik olduklarını biliyoruz. Aşağıda,  $f(t) = \sin nt$  fonksiyonu temel harmonikleri açısından incelemeye alınmıştır.

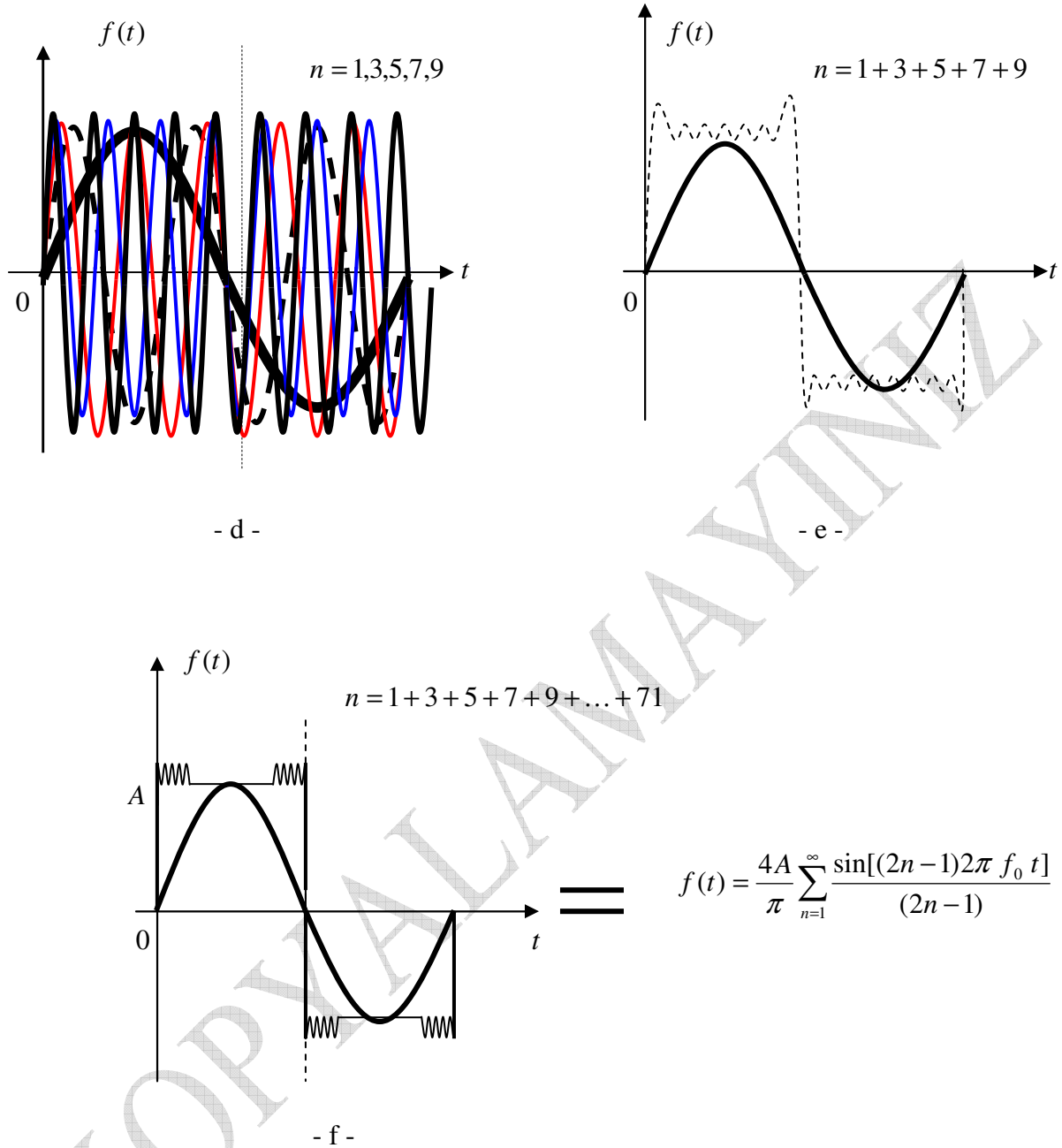






Şekil 13  $f(t) = \sin nt$  İşaretinin  $n = 1, 2, 3, 4, 5, 7, 9, 36$  harmonikleri





Şekil 14 Farklı harmoniklerin süperpozisyonu

Görüldüğü gibi şekil (a) daki gibi temel bir sinüs işaretinin ( $\sin at$ ) ilk harmoniği ( $\sin t$ ,  $a=1$ ) göz önüne alınmış, diğer şıklarda da bu temel işaretin farklı harmonikleri ( $a=1,2,3,4,5,7,9,36$ ) verilmiştir. Her bir harmonikten görülebileceği gibi, artan harmoniğe bağlı olarak işaretin frekansında da bir artış ve sıçrama fark edilmektedir. Şekil (f) de ise daha önce verilmiş çeşitli harmoniklere ait işaretlerin toplamı/süperpozisyonları ele alınmıştır. Bunun sonucu olarak Şekil (a) daki temel sinüs işaretinin yapısının bozulması sonucu aynı işaretin çeşitli biçimleri elde edilmiştir.

Temel şekildeki bozulma mühendislikte uygulama alanına bağlı olarak çeşitli avantaj ve dezavantajlarıyla kendisini göstermektedir. Bu olay şehir şebekelerindeki enerjinin kalitesi açısından olumsuz bir durum oluşturmaktadır. Çünkü konut ve iş yerlerinde kullanılmakta olan enerji için temel sinüs işareti baz alınmaktadır. Bu işarettaki bozulma kullanılan enerjinin kalitesini düşürdüğü gibi, kullanılan elektrikli cihazların olumsuz etkilenmesine kadar varan bir dizi riskli ve hatta tehlikeli durumlara sebebiyet verebilmektedir. Bahsedilen temel sinüs işareti çeşitli sebeplerden dolayı örneğin bir ve ikinci harmoniklerin toplamından oluşan Şekil (a) gibi veya birinci veya üçüncü harmoniklerin toplamından oluşan Şekil (c) gibi hallerde, temel işarete bozulma, düşük kullanım kalitesi ve diğer riskler meydana gelmektedir. Ancak bozulmaya sebep olan harmoniklerin oranları çeşitli ölçüm yöntemleriyle belirlenebilmektedir. Yani hangi harmoniğin ana işaret üzerinde ne kadar bozulmaya sebep olduğu tesbit edilebilmekte ve hesaplanabilmektedir.

Bunun yanında işaret işlemede oldukça önemli bir dalga şekli olan darbe tipli işaretlerin, kare veya dikdörtgen gibi, elde edilmesinde işaretlerin harmoniklerinin süperpozisyonu o kadar da önemli ve anlamlıdır. Bu durumda da temel sinüs işaretinin bozulmasıyla oluşan darbe tipli işaretler, özellikle haberleşme mühendisliğinde önemlidir. Dolayısıyla burada bu ikinci yönü üzerinde durulacaktır. Şekil ( f ) de fazla sayıda sinüsel harmoniğin toplanmasıyla oluşan işaretin darbe özellikli kare veya dikdörtgen dalgaya oluşturmaya çalıştığı görülmektedir. Buradan Gibbs kriterini de göz önüne alarak, harmonik sayısının artmasıyla tam bir darbe dalgası elde edilebilmesi mümkündür.

Bu tür işaretleri oluşturmada kullanılan harmonik yaklaşımıyla hangi harmonik ve frekansların biliniyor olması aynı zamanda gönderilecek bilginin band genişliği ve gönderilecek bilgi kapasitesi açısından da önemlidir. Bunların daha yakından ele alınması trigonometrik fonksiyon veya serilerin incelenmesi ile mümkün olacaktır.

$$\begin{aligned} f(t) &= \underbrace{a_0 \cos(0 \times \omega_0 t)}_1 + a_1 \cos \omega_0 t + a_2 \cos 2\omega_0 t + \dots + a_n \cos n\omega_0 t \\ &\quad + \underbrace{b_0 \sin(0 \times \omega_0 t)}_0 + b_1 \sin \omega_0 t + b_2 \sin 2\omega_0 t + \dots + b_n \sin n\omega_0 t \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t \\ &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t \end{aligned}$$

Görüldüğü gibi trigonometrik seriler sıralı harmoniklerin süperpozisyonu ile ilgili bir seri olup, bu özelliği ile **harmonik analiz** yönteminin tipik uygulaması olarak görülebilir. Bu yanından yararlanılarak bazı örnekler yukarıdaki şekillerde ele alınmıştır. Ardışık olması kaydıyla, hemen hemen bilinen tüm işaretlerin trigonometrik serilerden oluşturulabileceği söylenebilir. Ardışık ve çok sayıda harmonik kombinasyonu mümkündür. Dolayısıyla hangi harmonik kombinasyonlarıyla ( $a \times n$ ,  $a \in R$ ) hangi işaretin oluşturulacağına dair sonsuz harmonik kombinasyonunun mümkün olabileceği görülmektedir.

Çok iyi bilinen trigonometrik serilerden yararlanarak, işaretleri bu formda göstermek mümkündür. Periyodik özellikleri olan trigonometrik serilerin aynı özelliklere sahip daha genel seriler olan Fourier serileriyle gösterimleri daha pratik ve kompakt yaklaşım sağlamaktadır. Burada trigonometrik fonksiyon ve serilerin tüm özelliklerini içeren Fourier serisi ile işaretlerin gösterimi ve işlenmesi amaçlanmıştır.

## İşaretler ve girişim

Aynı veya eş faz açılı işaretlerin birbirini kuvvetlendireceği prensibinden yola çıkarak,  $D_n$  katsayısı bu anlamda işaretlerin birbirlerini kuvvetlendirmesi veya zayıflatması açısından önemli bir işleve sahip olacaktır.

## İşaretlerin Girişimi

Birden fazla işaretin bir araya geldiğindeki veya bir noktada kesiştiklerindeki birbirleri üzerine olan tesirine **girişim** denilmektedir. Girişim diğer yaklaşımla, aslında şu ana kadar görmekte olduğumuz Fourier veya trigonometrik seriye ait terimlerin süperpozisyonudur. Girişim pozitif yönde ise, destekleyici veya kuvvetlendirici, tersi yani zıt yönde ise, birbirlerinin tesirini düşürücü veya zayıflatıcı girişim söz konusudur. Bu her iki olguyu aşağıdaki örneklerde yakından görebiliriz. Örneğin Fourier serisinin

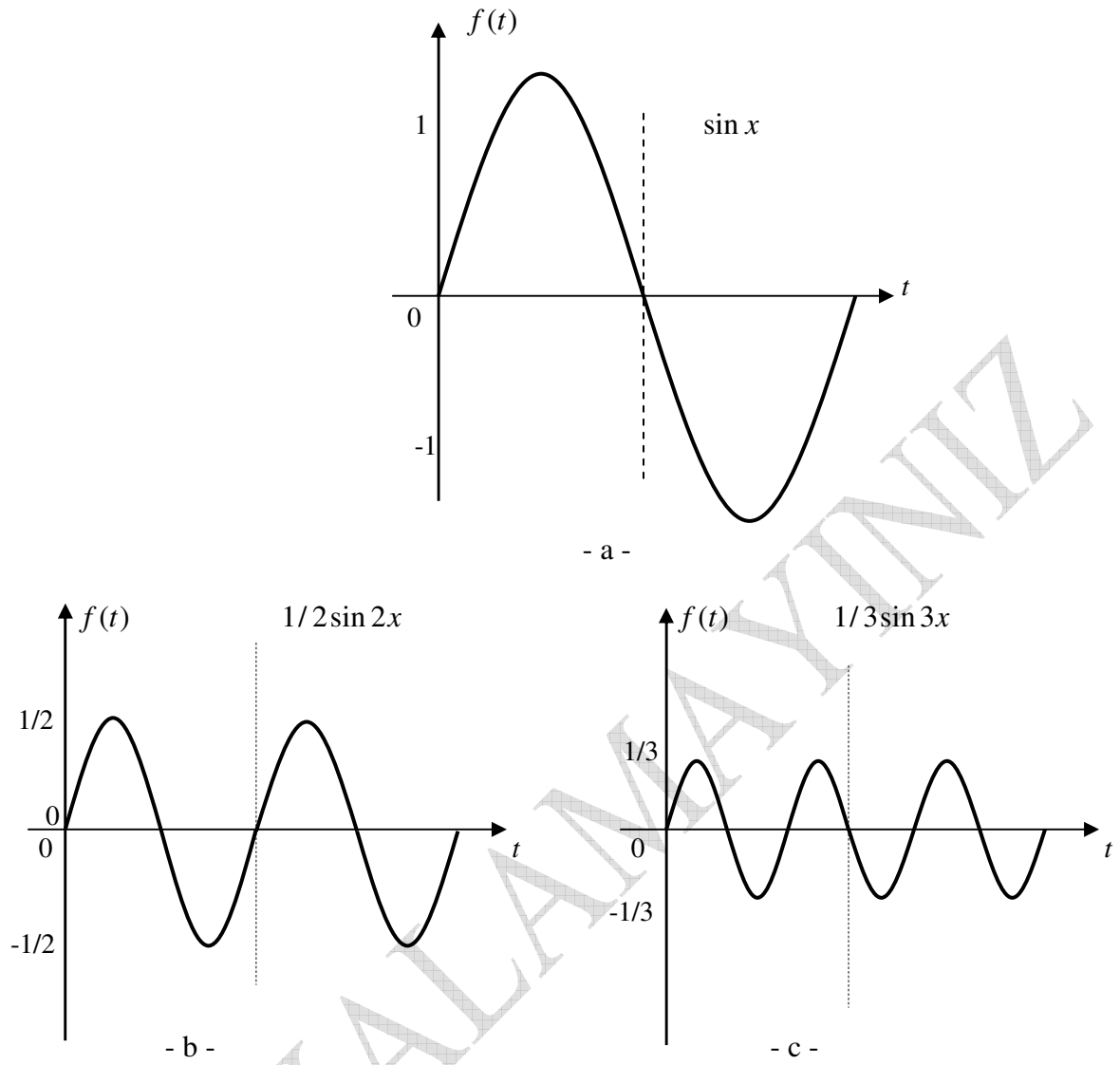
$$f(x) = \sin x - \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{3} \cos 3x$$

ifadesinden oluştuğunu göz önüne alarak bu seriyi oluşturmaya çalışalım. İfade düzenlenirse,

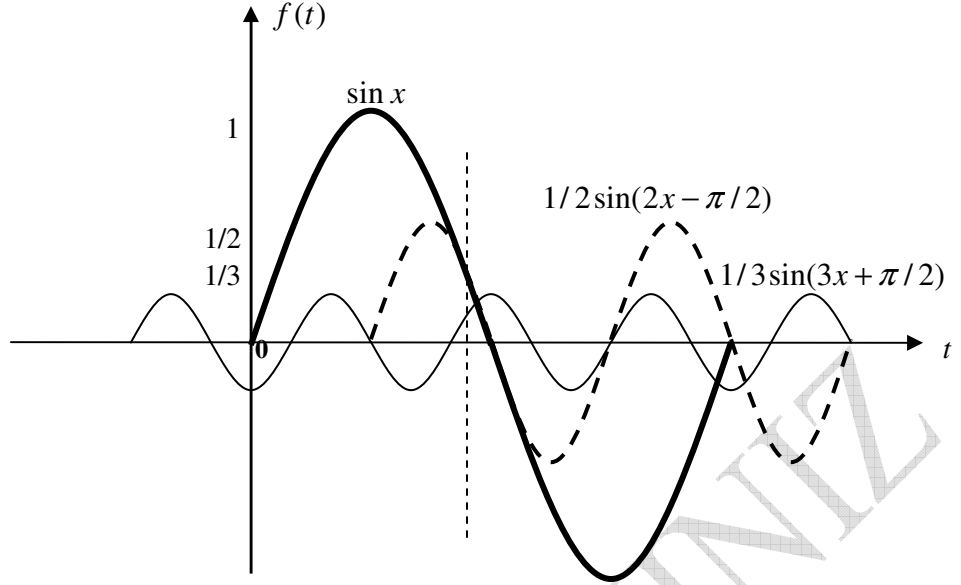
$$f(x) = \sin x + \frac{1}{2} \sin(2x - \frac{\pi}{2}) + \frac{1}{3} \sin(3x + \frac{\pi}{2})$$

elde edilir. Toplam fonksiyonu oluşturmak için söz konusu harmonikler,  $\sin x, \sin 2x, \sin 3x$  temel harmonikleri kullanarak aşağıdaki ifadeleri göz önüne alalım.

Şekillerden  $D_n$  katsayısının içerdiği genlik ve faz bilgisinin, işaretlerin toplamının (süperpozisyonun) nasıl etkilendiği ile yakından ilgilidir. Her bir işaret farklı açı ve genlik değeri ile birbirini etkilemektedir. İşaretler  $90^\circ$  lik faz farkına sahip olup farklı genliktedirler. (magnitude).



Şekil 15 Sinusoidal harmonikler



Şekil 16 Harmoniklerin süperpozisyonu

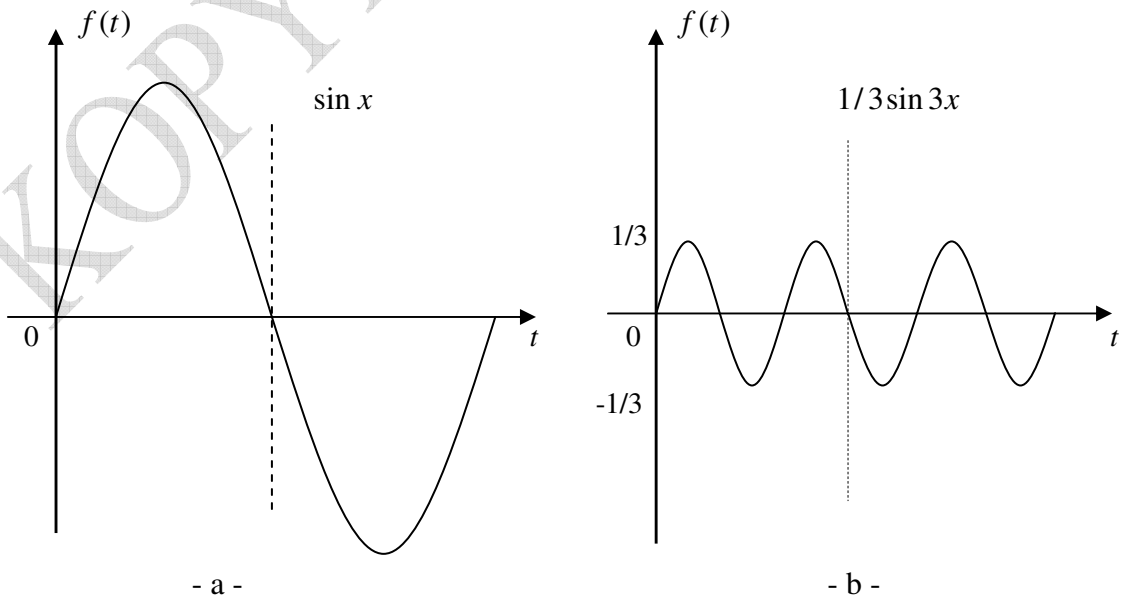
### Kuvvetlendirici girişim

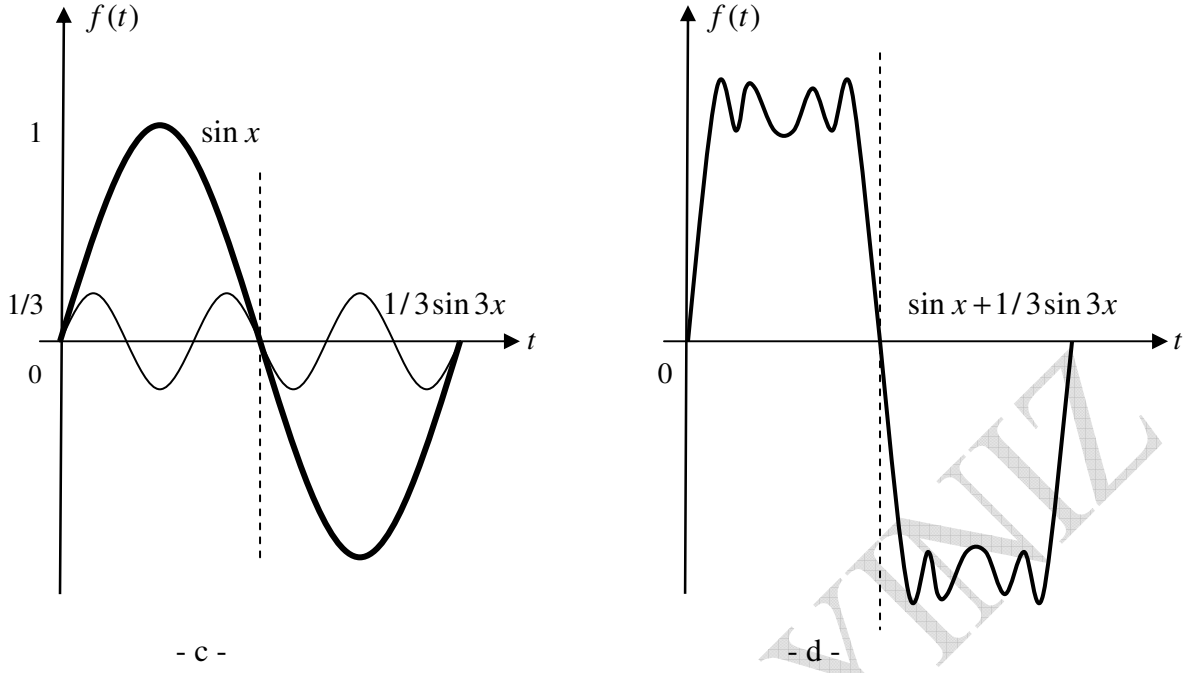
Aynı fazlı işaretler eş fazlı anlamına gelen “koherent” (coherent) işaret/dalga olarak anılırlar. Bu anlamda ilk olarak aynı fazda olup birbiri üzerine pozitif olarak kuvvetlendirici yönde etki eden girişim örneğini göreceğiz.

### Örnek

$$f(x) = \sin x + \frac{1}{3} \sin 3x$$

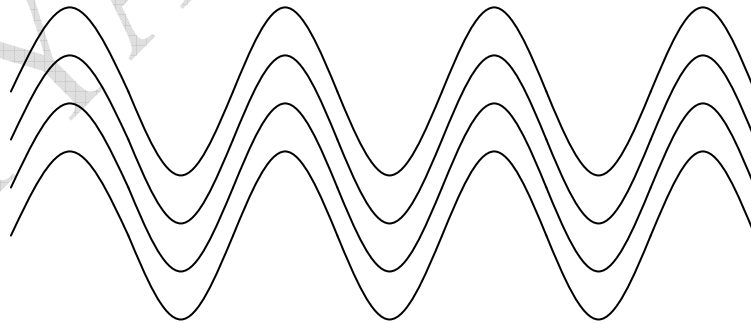
### Çözüm





Şekil 17 Birbirini kuvvetlendiren harmoniklerin süperpozisyonu

Görüldüğü gibi aynı fazlı iki işaretin harmanizasyonunda nihai işaret her iki işareten daha kuvvetlenmiş işaret olarak oluşur. Eş fazlı, koherent işaret karakteristiğinin sebep olduğu bu olaya dair en bilinen örnek “laser”lardır. Bilindiği gibi laser işareti bir tür ultraviyole işaret olup, genellikle kısa mesafeli, direkt görüş alanına sahip alanlarda kullanılan etkisi kuvvetli olan bir işaret türüdür. İşaretin kuvvetliliği, laser dalgasının eş fazlı olmasındandır. Aşağıda böyle bir kuvvetlendirici girişime örnek olabilecek bir dalga örneği verilmiştir.



Şekil 18 Işın demeti : aynı fazlı ( $\theta = 0$ ) işaretler

Işın demeti olarak anılan böyle bir dalgayı oluşturan işaretlerin her birinin eş fazlı (coherent) ve tek frekanslı (monokromatik) girişimde oldukları görülmektedir.

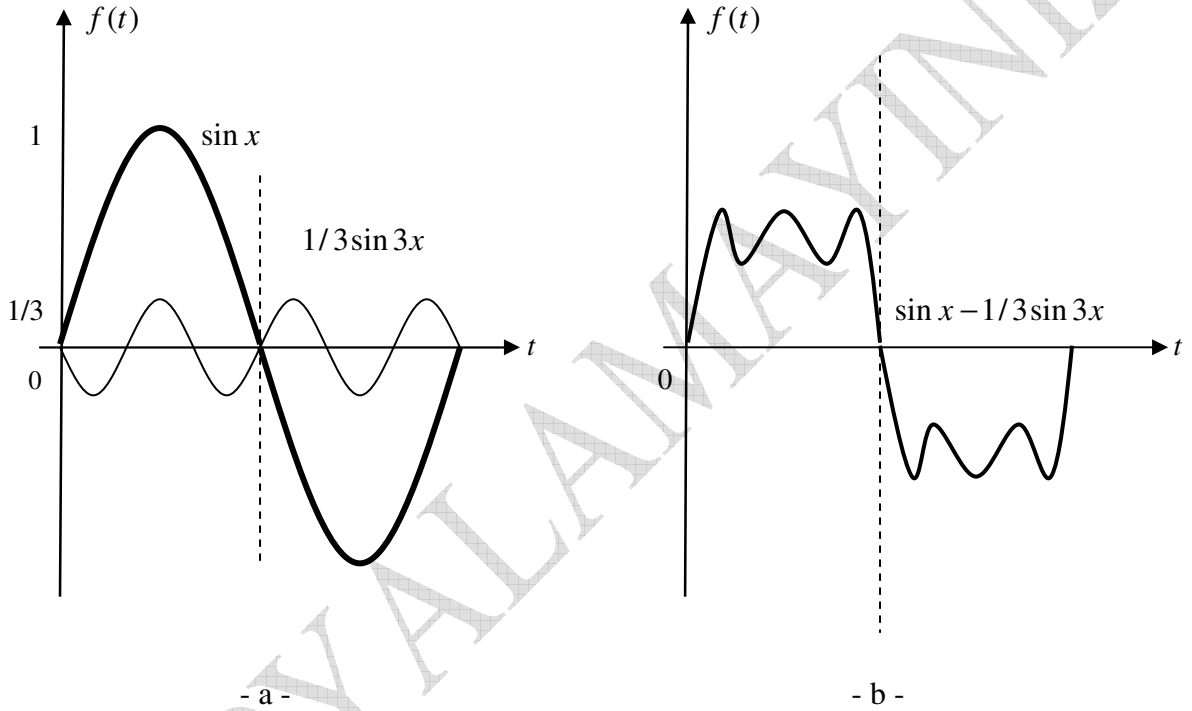


### Zayıflatıcı Girişim

İkincil olarak aynı fazda olmayan veya eş fazlı olmayan işaretlerin girişimlerini gözlemleyelim. Koherent özellikleri olmayan bu konumdaki işaretlerin birbirlerinin tesirini yok edici özelliklerinden dolayı, nihai işaret zayıflamış olarak neticelenir.

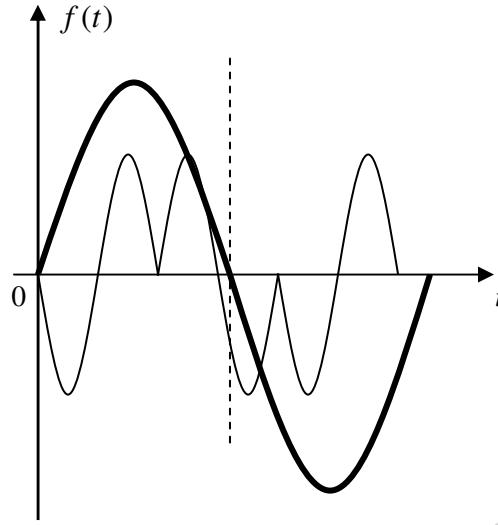
### Örnek

$$f(x) = \sin x - \frac{1}{3} \sin 3x$$



Şekil 19 Birbirini zayıflatan harmoniklerin süperpozisyonu

Buradan da görüldüğü üzere aralarında faz farkı olan, üstelik ters yöndeki bu fark iki işaretin yer yer birbirini zayıflatması sonucunu doğurmaktadır. Bu Şekil 5.39 (b) de net olarak görünmektedir. Çünkü işaretlerden birinin yükselmesi veya pozitif olduğu noktada diğeri düşüşte veya negatif tarafta (alterans) iseler, birbirlerinin etkilerini yok ettikleri için nihai işaret en azından başlangıçta daha kuvvetli durumdaki işaretten daha zayıflamış olarak oluşur. Faz farkının olması veya zıt yönde olması her zaman için zayıflatıcı girişim anlamına gelmeyebilir. Örneğin aşağıdaki işaret göz önüne alınırsa durum daha netleşecektir.

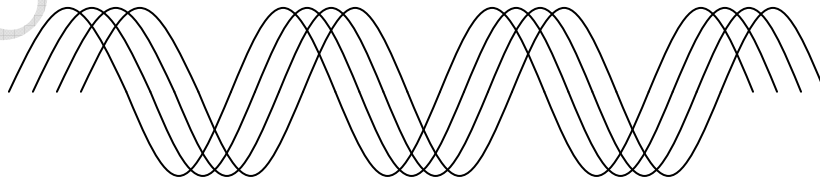


Şekil 20 Kısmi zayıflatıcı girişim

Her iki işaret eş fazlı olmamasına rağmen birbirlerini zayıflatma oranları çok fazla değildir. Ana işarete göre bir alteransta bir zayıflatma buna mukabil iki kuvvetlendirme bölgesi olduğundan bu kombinasyon kısmen kuvvetlendirici girişime örnek verilebilir. Buna mukabil, zayıflatıcı girişime bilinen en iyi örnek, aynı işaretin  $180^\circ$  faz farklı kendisiyle süperpozisyonu olacaktır ki bu durumda %100 zayıflatma söz konusu olduğundan sonuç zaten sıfırdır. Örnek olarak

$$f(t) = \sin x + \sin(x + \pi) = 0$$

Verilebilir. İşaret veya haberleşme mühendisliğinde çok bilinen gürültü kavramı bu kategoride değerlendirilebilir. Asıl bilgiyi temsil eden işaretin iletildikten bir süre sonra başlangıçtaki gibi güçlü ve net alınamayışının sebebidir bu zayıflatıcı girişimle ilişkilendirilebilir. Dışarıdan gürültü diyebileceğimiz sebeplerle oluşan gürültü, asıl işaret üzerine negatif girişimde bulunarak beklenen işaretin kalitesinin düşük veya zayıf oluşmasına sebep olur. Aşağıda zayıflatıcı girişime örnek bir ışın demeti örneği görülmektedir.



Şekil 21 Işın demeti : farklı fazlı işaretler

Görüldüğü gibi işaretler tek frekanslı (monokromatik) görünmelerine rağmen, aynı fazlı yani eş fazlı (coherent) değil.

## Fourier Serisi Gerçeği

Çeşitli periodik işaretler, bir temel frekansa sahip sinusoid işaretlerin çeşitli katlı harmoniklerini toplamı olarak ifade edilebilmektedir. Bu şekilde kabaca periodik bir işaret çeşitli frekanstaki (sinusoid) işaretlerin toplamından oluştuğuna göre, toplam işaretin içerdiği işaretlerin veya frekans bileşenlerinin analiz edilmesi gerekmektedir. Buna göre herhangi bir periodik işaret çeşitli harmonikteki sinusoidlerin toplamından oluşmaktadır. Bu yüzden periodik işaretlerin bu sinusoidlerin frekansları ve frekansların ağırlıkları cinsinden analiz edilmesi gerekmektedir. Periodik bir işaretin hangi frekanstaki sinusoidlerden oluştuğunu analiz etmek maksadıyla kullanılan teknikler mevcuttur. Bunlardan en önemlileri

1. Fourier serisi
2. Fourier transformasyonu
3. Laplace transformasyonu
4. Z transformasyonu
5. Zaman-Frekans teknikleri

biz burada ilk olarak Fourier serisiyle analize başlamaktayız. Sonraki bölümlerde diğer tekniklerde ele alınacaktır.

## Fourier Serisi ve Katsayı Analizi

Fourier serisi olarak göz önüne alınan

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega_0 t + \theta_n) + b_n \sin(n\omega_0 t + \theta_n)$$

serinin  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots, b_1, b_2, \dots, b_n$  katsayılarının bulunması çok önemlidir. Bu katsayıların aynı zamanda  $0 \times \omega_0, 1 \times \omega_1, 2 \times \omega_2, \dots, n \times \omega_n$  harmonikleriyle de yakından alakalı olduğunu görmekteyiz. Bu yüzden  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots, b_1, b_2, \dots, b_n$  katsayılarının bulunması önemlidir. Bu katsayıları bildikten veya bulduktan sonra Fourier serisini oluşturmak çok basitleşmektedir. Bu katsayılara sahip olduktan sonra verilecek herhangi bir (kare dalga, üçgen, testeredişi ve tam doğrultulmuş dalga gibi) fonksiyonun sinus ve cosinüsle bağlı

olarak  $f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t$  Fourier serisi ile gösterimleri çok kolaydır. Bu

yüzden Fourier serisi katsayı özelliğiyle bazen katsayı (coefficient) analizi olarak da anılmaktadır. Ortogonal özellikteki sinusoidlerden oluşan bu katsayıların bulunması aşağıdaki bölümlerde detaylarıyla ele alınmıştır.

## FOURIER SERİSİ

İşaret işlemede bir çığır açan periodik işaretlerin frekans içeriklerinin incelenmesini sağlayan Fransız fizikçi ve matematikçi olan Jean Baptiste Joseph Fourier (1768-1830), 21 Aralık 1807 de bir sürekli/süreksiz fonksiyonun sonlu bir aralıktaki değerinin sinüsel ifadelerin toplamı olduğunu duyurdu. İlgi alanı ısı ve ısıнын yayılması olan, J.B.J.Fourier, ısıнын yayılmasını bir tür dalga veya işaretle özdeşleştirebildiği için, söz konusu başarılı duyuruya imzasını atmıştır. Bir seri toplamından bahseden bu anonsu, daha sonraları kendi adıyla anılan Fourier serisi olarak bilim tarihindeki yerini almıştır. Bu yolla işaretin frekans içeriğinin gözlemlenebilmesi, işaret işleme alanına önemli bir ivme kazandırmıştır. Bu anlamda Fourier serisine uygun olarak trigonometrik seriler gösterilebilir. Sinüs ve kosinüs olarak bildiğimiz sinuzoidlere dayalı Fourier serisinin yaklaşımını, gen haritasına benzetmek mümkündür. Basit sinuzoidlerin milyonlarca kombinasyonu her türlü periodik işaretin oluşturulabileceği tezi hakim görüştür. Diğer bir deyişle her bir periodik işaretin sinuzoidlerle ifade edilebileceği mutlaka bir karşılığının olduğu sonucu ortaya çıkmaktadır. Bunun ancak Fourier serisini oluşturacak uygun (ardışık) sinuzoidleri belirleme ve bunların harmoniklerini oluşturan katsayılarının bilinmesi kaydıyla mümkün olması, bir yerde yaklaşımın en kritik ve zor kısmını oluşturmaktadır. Bu açıdan Fourier serisinin bir tür **harmonik analiz** üzerine kurulu bir yaklaşım olduğuda kabul edilmektedir. Bu özellikleri bulunduran sürekli, periodik, kompakt ve dahası ortogonal özelliklere sahip Fourier serisinin en tipik modelinin daha önce bahsedilen, ve önceki bilgilerimizle vakıf olduğumuz trigonometrik seri olduğunu söyleyebiliriz. Böyle bir trigonometrik serinin sinuzoid elemanlardan oluşan kümesini hatırlayalım.

$$f(t) = \{a_0 \cos(0 \times \omega_0 t), a_1 \cos \omega_0 t, a_2 \cos 2\omega_0 t, \dots, a_n \cos n\omega_0 t, \dots \\ ; b_0 \sin(0 \times \omega_0 t), b_1 \sin \omega_0 t, b_2 \sin 2\omega_0 t, \dots, b_n \sin n\omega_0 t, \dots\}$$

kümeyi seri halinde ifade edersek,

$$f(t) = a_0 \cos 0 \times \omega_0 t + a_1 \cos \omega_0 t + a_2 \cos 2\omega_0 t + \dots + a_n \cos n\omega_0 t \\ + b_0 \sin 0 + b_1 \sin \omega_0 t + b_2 \sin 2\omega_0 t + \dots + b_n \sin n\omega_0 t \\ = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t$$

Görüldüğü gibi Fourier serisi harmonik analiz kavramını doğrular niteleiktir. Ardışık sinusoidlerin ardışık harmoniklerle olan süperpozisyonundan ibaret bir seri söz konusudur.

### Fourier Serisinin Ortogonal Analizi

$\sin \omega t$  ve  $\cos \omega t$  gibi ortogonal sinusoid terimler üzerine kurulu Fourier serisinin periodiklik ve durağanlığı gibi, ortogonal özelliği de tartışılmazdır. Bu açıdan Fourier serisinin ortogonal sinusoidler üzerine kurulması en önemli avantajıdır. Trigonometrik fonksiyonların çok iyi bilinen fonksiyonlar olmalarının yanı sıra aynı zamanda ortogonal özellikte oluşları da çekiciliklerini artırmaktadır. Dolayısıyla bu özellikteki sinusoid terimler üzerine kurulu Fourier serisi aynı zamanda ortogonal özelliğe sahiptir. Fourier serisi, trigonometrik fonksiyonların ortogonal özelliklerini kullanarak, periodik işaret analizine yep yeni soluk getirmiştir.

Yukarıda ele alınan Fourier işaret kümesindeki elemanların belirli bir aralıkta, örneğin  $T_0 = 2\pi/\omega_0$  süresince aynen yukarıdaki vektör gösteriminde verilen yapıya uygun olarak ortogonal oldukları görülecektir. Ortogonal özelliklerine göre Fourier serisinin elemanları aşağıdaki bağıntıları sağlar.

$$\int_{T_0} \cos n\omega_0 t \cos m\omega_0 t dt = \begin{cases} 0 & , m \neq n \\ \frac{T_0}{2} & , m = n \neq 0 \end{cases}$$

$$\int_{T_0} \sin n\omega_0 t \sin m\omega_0 t dt = \begin{cases} 0 & , m \neq n \\ \frac{T_0}{2} & , m = n \neq 0 \end{cases}$$

$$\int_{T_0} \sin n\omega_0 t \cos m\omega_0 t dt = 0$$

Periodik özelliklerine ek olarak bu şekilde tespit edilen ortogonal özellikleri trigonometrik elemanların pratikte işaretlerin frekans analizi amacıyla kullanımı ve işlenmesinde çok önemli avantajlar sağlamaktadır. Bu özellikleri, belki de diğer alternatif fonksiyonlara yönelimi lüzumsuz kılmış olabilir. Devam edersek, Fourier serisini oluşturan trigonometrik terimleri oluşturan her bir ardışık ifadenin  $[t = t_1, t_1 + T_0]$  aralığında  $t_1$  için integrali alınmaktadır, dolayısıyla her bir integrasyonun periodik olduğunu ( $T_0$ ) görmekteyiz. Böylece sinusoidal periodik ifadeler üzerine kurulu *trigonometrik seriler* oluşmuştur. Buna göre herhangi bir işareti  $f(t)$ ,  $T_0$  kadar sürecek bir aralıkta trigonometrik serilerden oluşturmak mümkündür.

$$f(t) = a_0 \cos(0 \times \omega_0 t) = 1 + a_1 \cos \omega_0 t + a_2 \cos 2\omega_0 t + \dots + b_1 \sin \omega_0 t + b_2 \sin 2\omega_0 t + \dots$$

$$t_1 \leq t \leq t_1 + T_0$$

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t \quad ; \quad t_1 \leq t \leq t_1 + T_0 \quad ; \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

Son ifadeden serinin katsayıları olan  $a_0, a_n$  ve  $b_n$  **ortogonal yaklaşımla** hesaplanabilir. Eşitliğin her iki yanını  $\cos n\omega_0 t$  ile çarpılıp, daha sonra integrali alınır,

$$\int_{T_0} f(t) \cos n\omega_0 t dt = \int_{T_0} a_0 \cos n\omega_0 t dt + \int_{T_0} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega_0 t \cos m\omega_0 t dt + \int_{T_0} \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\omega_0 t \cos m\omega_0 t dt$$

ifadesi elde edilir. Buradan,  $\cos n\omega_0 t$  ifadesi  $[0, 2\pi]$  arasında periodik olacağından

$$\int_{T_0} a_0 \cos n\omega_0 t dt = 0$$

ve  $\sin - \cos$  trigonometrik fonksiyonları ortogonal olduklarından, son ifade olan

$$\int_{T_0} \sin n\omega_0 t \cos m\omega_0 t dt = 0$$

ortogonal koşulundan sıfır olacağından geriye kalan ifade,

$$\int_{T_0} f(t) \cos n\omega_0 t dt = \int_{T_0} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega_0 t \cos m\omega_0 t dt$$

Buradan aranan  $a_n$  katsayısı,

$$a_n = \frac{\int_{t_1}^{t_1+T_0} f(t) \cos n\omega_0 t dt}{\int_{t_1}^{t_1+T_0} \cos n\omega_0 t \cos m\omega_0 t dt}$$

sağdaki ifade için ortogonalite koşulunu hatırlarsak ;

$$\int_{T_0} \cos n\omega_0 t \cos m\omega_0 t dt = \begin{cases} 0 & , m \neq n \\ \frac{T_0}{2} & , m = n \neq 0 \end{cases}$$

$$a_n = \frac{\int_{t_1}^{t_1+T_0} f(t) \cos n\omega_0 t dt}{\int_{t_1}^{t_1+T_0} \cos^2 n\omega_0 t dt} = \frac{T_0}{2}$$

$$a_n = \frac{2}{T_0} \int_{t_1}^{t_1+T_0} f(t) \cos n\omega_0 t dt$$

Eğer  $a_0$  bulunacaksa,

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t \quad ; \quad t_1 \leq t \leq t_1 + T_0 \quad ; \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

ifadesinin her iki tarafı integre edilirse,

$$\int_{t_1}^{t_1+T_0} f(t) dt = a_0 \int_{t_1}^{t_1+T_0} dt + \int_{t_1}^{t_1+T_0} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega_0 t dt + \int_{t_1}^{t_1+T_0} \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\omega_0 t dt$$

$[t_1, t_1 + T_0]$  periodik aralığında sağdaki ikinci ve üçüncü terimlerin integrasyonları sıfır olacağından,

$$\int_{t_1}^{t_1+T_0} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega_0 t dt = 0 = \int_{t_1}^{t_1+T_0} \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\omega_0 t dt$$

$$\int_{t_1}^{t_1+T_0} f(t) dt = a_0 \int_{t_1}^{t_1+T_0} dt$$

ifadesi elde edilir. Buradan,

$$a_0 \int_{t_1}^{t_1+T_0} dt = a_0 T_0$$

hesaplanırsa aranan katsayı,

$$\int_{t_1}^{t_1+T_0} f(t) dt = a_0 T_0$$

$$a_0 = \frac{1}{T_0} \int_{t_1}^{t_1+T_0} f(t) dt$$

bulunur.

**İkinci yol :**

Daha önceden

$$a_n = \frac{\int_{t_1}^{t_1+T_0} f(t) \cos n\omega_0 t dt}{\int_{t_1}^{t_1+T_0} \cos^2 n\omega_0 t dt}$$

Hesaplandıysa buradan  $a_0$ ,

$$a_0 = \frac{\int_{t_1}^{t_1+T_0} f(t) \times 1 dt}{\int_{t_1}^{t_1+T_0} dt = T_0}$$

$$a_0 = \frac{1}{T_0} \int_{t_1}^{t_1+T_0} f(t) dt$$

$a_0$  bileşeni D.C. bileşeni olarak anılır ve serinin ortalama değeri olarak bilinir. Bu bileşenin olması durumunda serinin ortalama değerinin doğal olarak  $a_0$  civarında olacağı düşünülür. Fourier serisinin son katsayısı  $b_n$  i hesaplamak için,

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t \quad ; \quad t_1 \leq t \leq t_1 + T_0 \quad ; \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

Serisinin her iki tarafı  $\sin n\omega_0 t$  ile çarpılıp, integre edilirse,

$$\int_{T_0} f(t) \sin n\omega_0 t dt = \int_{T_0} a_0 \sin n\omega_0 t dt + \int_{T_0} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin m\omega_0 t \cos n\omega_0 t dt + \int_{T_0} \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin m\omega_0 t \sin n\omega_0 t dt$$

$[t = t_1, t_1 + T_0]$  periodik aralığından dolayı,

$$\int_{T_0} a_0 \sin n\omega_0 t dt = 0$$

ve

$$\int_{T_0} \sin n\omega_0 t \cos m\omega_0 t dt = 0$$

ortogonallik koşulundan dolayı eşitliğin sağdaki ikinci terimide sıfır olacağından, kalan ifade,

$$\int_{t_1}^{t_1+T_0} f(t) \sin n\omega_0 t dt = \int_{t_1}^{t_1+T_0} \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin m\omega_0 t \sin n\omega_0 t dt$$

olur. Buradan,

$$b_n = \frac{\int_{t_1}^{t_1+T_0} f(t) \sin n\omega_0 t dt}{\int_{t_1}^{t_1+T_0} \sin m\omega_0 t \sin n\omega_0 t dt}$$

ifadeyi daha önce verilen ortogonallik koşuluna göre ,

$$\int_{T_0} \sin n\omega_0 t \sin m\omega_0 t dt = \begin{cases} 0 & , m \neq n \\ \frac{T_0}{2} & , m = n \neq 0 \end{cases}$$

düzenlersek,

$$b_n = \frac{\int_{t_1}^{t_1+T_0} f(t) \sin n\omega_0 t dt}{\int_{t_1}^{t_1+T_0} \sin m\omega_0 t \sin n\omega_0 t dt} = \frac{T_0}{2}$$

$$b_n = \frac{2}{T_0} \int_{t_1}^{t_1+T_0} f(t) \sin n\omega_0 t dt$$



elde edilir. Her bir harmoniğin fazı önemlidir. Harmonikler arası faz farkları olabilir de olmayabilir de. Faz açısı ,

$$\theta_n = \tan^{-1}\left(\frac{-b_n}{a_n}\right)$$

### Fourier Serisinin Spektrum Gösterimi

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega_0 t + \theta_n) + b_n \sin(n\omega_0 t + \theta_n)$$

Fourier serisinin spektrumunu ifade etmek için  $X(\omega) - \omega$  gibi bir ikiliye ihtiyaç olduğunu biliyoruz. Bunu sağlamak için özellikle harmoniğin genliği konumundaki  $X(\omega)$  terimine ihtiyaç vardır. Bunu verilen  $f(t)$  Fourier serisinde her ne kadar  $a_0, a_n$  ve  $b_n$  gösteriyorsa da bu şekilde bunları düşey eksene  $X(\omega)$  gibi koymamız mümkün değildir. Bunun yerine her üçünü temsilen tek bir değişkenin konulması daha doğru bir yol olacaktır. Bunu temin etmek için  $a_0, a_n$  ve  $b_n$  katsayılarını içeren tek bir değişkene ihtiyaç vardır. Böyle bir değişkeni örneğin  $C_n$  olarak kabul edersek, bu değişkenin mevcut  $a_0, a_n$  ve  $b_n$  katsayılarına bağlı ifadesi aşağıdaki gibi üretilecektir. Yukarıda verilen Fourier serisinden

$$a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t = C_n \cos(n\omega_0 t + \theta_n)$$

kabulünü yaparak buradan

$$\begin{aligned} C_n \cos(n\omega_0 t + \theta_n) &= C_n \cos \theta_n \cos n\omega_0 t - C_n \sin \theta_n \sin n\omega_0 t \\ &= a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t \end{aligned}$$

$$a_n = C_n \cos \theta_n$$

$$b_n = -C_n \sin \theta_n$$

ve

$$C_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$$

$$C_0 = a_0$$

$$\theta_n = \tan^{-1}\left(\frac{-b_n}{a_n}\right)$$

bunların ışığında derli (kompakt) Fourier serisi ;

$$f(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(n\omega_0 t + \theta_n)$$

olarak elde edilir. Bu şekilde elde edilen  $C_n$ , tıpkı  $n\omega$  gibi bir harmoniğin genliğini gösteren  $X(\omega)$  pozisyonunda olacağından,  $X(\omega) - \omega$  ilişkisine benzer  $C_n - \omega$  bağıntısı ya da spektrumu elde edilir. Bunun yardımıyla  $C_n$  katsayısı Fourier serisinin  $a_0, a_n$  ve  $b_n$  katsayılarını içerdiğinden sonuçta  $C_n - \omega$  uzayı, Fourier serisine ait frekans – genlik şeklindeki ayırık spektrumu  $C_n - \omega$  ile temsil edebilecektir. Bunun sonucunda oluşan Fourier serisini oluşturan spektrum, aşağıdaki düzlem gibi olacaktır.



Şekil 22  $C_n - \omega$  Düzlemi : ayırık Fourier spektrumu

Bu spektrumdan Fourier serisindeki  $a_n \cos n\omega_0 t$  ve  $b_n \sin n\omega_0 t$  biçimindeki harmoniklerin frekans domenindeki miktarları (genlikleri belirlenmektedir.

### Fourier Serisi Formülleri

Bulunan bağıntılar neticesinde Fourier serisi ne ait denklemleri toplarsak aşağıdaki ifadeler yazılabilecektir. Fourier serisi

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega_0 t + \theta_n) + b_n \sin(n\omega_0 t + \theta_n) \quad ; \quad t_1 \leq t \leq t_1 + T_0 \quad ; \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

durumu göz önüne alınırsa

$$a_0 = \frac{1}{T_0} \int_{t_1}^{t_1+T_0} f(t) dt$$

$$a_n = \frac{2}{T_0} \int_{t_1}^{t_1+T_0} f(t) \cos n\omega_0 t dt$$

$$b_n = \frac{2}{T_0} \int_{t_1}^{t_1+T_0} f(t) \sin n\omega_0 t dt$$

$$\theta_n = \tan^{-1} \left( \frac{-b_n}{a_n} \right)$$

veya ;

$$a_0 = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} f(t) dt$$

$$a_n = \frac{2}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} f(t) \cos n\omega_0 t dt$$

$$b_n = \frac{2}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} f(t) \sin n\omega_0 t dt$$

### Alternatif gösterim

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega_0 t + \theta_n) + b_n \sin(n\omega_0 t + \theta_n)$$

$$f(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(n\omega_0 t + \theta_n)$$

$$C_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$$

$$C_0 = a_0$$

$$a_n = C_n \cos \theta_n$$

$$b_n = -C_n \sin \theta_n$$

### Fourier Serisi ve Harmonikler

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t$$

Fourier serisindeki  $n\omega_0$  şeklindeki harmoniklerin yapısı aşağıdaki gösterimlerden herhangi biri yapısında olabilir.

$$0 \times \omega_0, 1 \times \omega_0, 2 \times \omega_0, 3 \times \omega_0, \dots, n \times \omega_0$$

$$2 \times \omega_0, 4 \times \omega_0, 6 \times \omega_0, \dots, (2n) \times \omega_0$$

$$1 \times \omega_0, 3 \times \omega_0, 5 \times \omega_0, \dots, (2n-1) \times \omega_0$$

$$3 \times \omega_0, 6 \times \omega_0, 9 \times \omega_0, \dots, (3n) \times \omega_0$$

$$4 \times \omega_0, 8 \times \omega_0, 12 \times \omega_0, \dots, (4n) \times \omega_0$$

**ardışık harmonikler**

Görüldüğü gibi ardışık olması kaydıyla istenilen özellikte harmoniklerin üretilmesi mümkündür. Buna göre ardışıklık, belirli bir kurala göre harmoniklerin sıralanması olarak düşünülebilir. Bunun yanı sıra aşağıdaki gösterimlerin de ardışık özellikte olmadığını da bilmeliyiz.

$$0 \times \omega_0, 1 \times \omega_0, 2 \times \omega_0, \mathbf{4 \times \omega_0}, 5 \times \omega_0 \dots, n \times \omega_0$$

$$2 \times \omega_0, 4 \times \omega_0, 6 \times \omega_0, \mathbf{10 \times \omega_0}, \dots, (2n) \times \omega_0$$

$$1 \times \omega_0, 3 \times \omega_0, \mathbf{4 \times \omega_0}, 5 \times \omega_0, 7 \times \omega_0, 8 \times \omega_0$$

**ardışık olmayan harmonikler**

Görüldüğü gibi harmonikler herhangi bir kurala göre sıralanmadığından, Fourier serisine uygunlaştırılması ve bu yönde analizi mümkün değildir.

### İşaretin Zaman – Spektrum Domeni

Genel anlamda bir işaretin zaman domenini, işaretin dalga biçimini gösterirken, spektrumu ise işarete ait her bir sinusoidal bileşenin genliği ve fazının frekansla değişimini göstermektedir. Bu açıdan işaretin spektrumu frekans domeniyi ilgili olduğundan, zaman domenine kıyasla işaret hakkında daha fazla bilgi sağlamaktadır.

### Fourier Serisinin Spektrumu

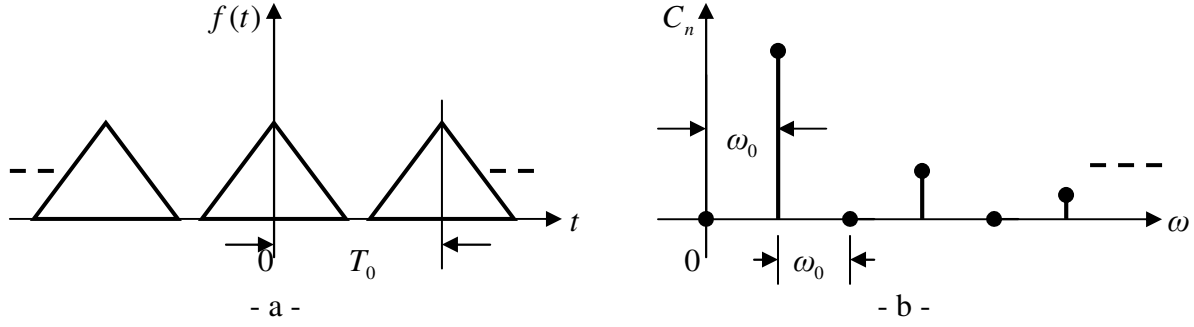
Spektrum diye, verilen işaretin içerdiği frekansların genliğinin (miktarının) değişimi kastedilmektedir. Bu açıdan Fourier serisindeki her bir harmoniğine ait genliğin frekansla değişimi söz konusudur. Fourier serisi spektrumu genlik ve faz spektrumu olarak ikiye ayrılmaktadır. Serideki her bir terimin genlik ve fazı frekansla değiştiği için, Fourier serisi spektrum olarak iki kategoride incelenmektedir.

#### 1. Genlik Spektrumu

Öncelikle spektrum kelimesinin işaret analiz açısından frekans anlamına geldiğini belirtelim. Dolayısıyla “frekans spektrumu” yanlış, “frekans domenini” daha doğru bir ifade olacaktır. Frekans olarak tüm notlar boyunca genellikle

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \text{ rad/sn}$$

notasyonu kullanılacaktır. Fourier serisinde genlik spektrumu olarak işaretin harmoniklerden oluşan terimlerinin  $a_0, a_n$  ve  $b_n$  katsayılarının dağılımı genlik spektrumu olarak anılmaktadır. Yani her bir katsayının temsil ettiği  $n\omega_0$  harmoniğinin genlik olarak büyüklüğü  $\omega$  frekans domeninde gösterilmektedir. Eğer her bir harmoniğin genliği  $C_n$  ile gösterilirse,  $C_n - \omega$  uzayı, Fourier serisinin spektrumunu gösterir. Aşağıdaki şekilden de görüldüğü gibi Fourier serisine uygun  $f(t)$  periodik işareti zaman domeninde sürekli olmasına karşın,  $C_n$  genlik spektrumunun ayrık elde edildiği dikkati çekmektedir.



Şekil 23 (a) Fourier serisinde sürekli işaret, (b) Ayırık genlik frekans uzayı ( $\omega_0 = 2\pi/T_0$ )

Bu açıdan  $C_n$ , genlik frekans cevabı olarak anılabilir.  $C_n$ , spektrumdaki ilgili harmoniklerin genliklerini göstermektedir. Bu açıdan  $C_n$  ile gösterilen Fourier serisinin spektrumunun sonsuz olduğunu görmekteyiz. Diğer bir deyişle spektrum band genişliği sonsuzdur.

Verilen  $f(t)$  işaretinin içerdiği frekanslar, sinusoidlerin harmonikleri olarak verilmektedir. Bu açıdan, ayırık spektrumdaki  $C_n$ , işaretin içerdiği frekansların (harmoniklerin) genliklerini yani miktarlarını göstermektedir.  $\cos n\omega_0 t$  ve  $\sin n\omega_0 t$  gibi sinusoidlerin harmoniklerinin yer aldığı spektrumda harmonikler birbirlerinden  $\omega_0$  temel harmonik farkıyla dizilmişleridir. Diğer bir deyişle her bir harmonik arasındaki mesafe frekans olarak  $\omega_0 = 2\pi/T_0$  kadardır. Eğer klasik  $\cos n\omega_0 t$  ve  $\sin n\omega_0 t$  gibi sinusoidleri göz önüne alırsak, herhangi bir  $T_0$  temel periodunda,  $a_1 \cos \omega_0 t, a_2 \cos 2\omega_0 t, a_3 \cos 3\omega_0 t, \dots, a_n \cos n\omega_0 t, \dots$  gibi bileşenlerin tamamının bulunduğu düşünülmektedir. Söz konusu farklı frekanstaki (harmoniklerin) bileşenlerin  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$  gibi katsayılarının (genliklerinin) tespiti önemlidir. Burada belirli bir temel  $T_0$  perioduna harmoniklerin yerleşimi yani pozisyonları da önemlidir. Bu anlamda temel bir period aralığında sonsuz tane harmonik olduğu düşünülebilir. Harmonikler  $n\omega_0$  formunda olduklarından, ve  $n \in \mathbb{Z}$  (tamsayı) olduğundan spektrum ayırık olacaktır. Analizimizi somutlaştırma adına

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

temel frekans bağıntısını düşünelim. Eğer harmonikler spektrumda  $\omega_0$  temel frekans aralığıyla yer alıyorsa, spektrumun sürekli çıkması için frekans aralığını gösteren  $\omega_0$  değerinin çok küçük hatta ideal manada sıfır olması gerekir ( $\omega_0 \rightarrow 0$ ). Yani spektrumun band genişliğinin düşürülmesi gerekmektedir. Verilen bağıntıya bakıldığında bunun için periodik işaretin periodunun sonsuz büyük yani  $\lim T_0 \rightarrow \infty$  olması gerekir. Dolayısıyla zaman domeninde genişleyen işaretin spektrumu yani band genişliğide azalacaktır. Oysaki, gerçekte işaretin periodu sonlu değerde ( $T_0 < \infty$ ) olduğundan, harmonikler arasındaki mesafeyi gösteren  $\omega_0$  değeride sonlu ( $\omega_0 < \infty$ ) hatta sınırlı ( $\omega_0 < k$ ) bir değerde olacaktır. Bu yüzden de spektrumda harmonikler belirli aralıklarla dizileceklerinden, spektrum ayırık olacaktır. Burada temel frekansın ( $\omega_0$ ), spektrumun yoğunluğunu belirleyecek en önemli eleman olduğunu unutmamalıyız.

İşaretin band genişliği ( $\omega_0$ ) azaltıldığında, spektrum daha fazla frekans bileşenini (harmonik) kapsayacaktır. Bu yapılırsa, spektrum aralarındaki mesafe çok az (dar) olan ama çok sayıda harmonikten oluşacağı için, spektrum aşırı yoğunluktan bitişik, sanki sürekli formdaymış gibi bir görüntü verir ki, böyle bir spektrum artık ayrık değildir (Fourier transformasyonu gibi). Bunu

$$n\omega_0 \rightarrow \Delta\omega \rightarrow 0 = \frac{2\pi n}{T_0 \rightarrow \infty}$$

veya

$$\lim_{T_0 \rightarrow 0} f_{T_0}(t) = f(t) = \text{periodik olmayan ama spektrumu sürekli işaret}$$

bağıntılarından da teyit edebiliriz. İfadelerden de görüldüğü gibi  $f(t)$  işareti,  $f_{T_0}(t)$  işareti gibi periodik değil ( $T_0$  periodlu), ama spektrumu Fourier serisinden farklı olarak sürekli formdadır.

Burada  $T_0$  periodunun  $\lim T_0 \rightarrow \infty$  veya  $\lim T_0 \rightarrow 0$  alınması durumunda spektrumun nasıl ayrık veya sürekli olabileceğine biraz odaklanmaya çalışalım. Normalde bir Fourier serisinde temel bir  $T_0$  periodunda tüm harmoniklerin ( $n\omega_0$ ) bulunduğu kabulü vardır (teorik olarak sonsuz sayıda harmonik).

Az önce yukarıda “temel frekansın ( $\omega_0$ ), spektrumun yoğunluğunu belirleyecek en önemli eleman olduğu” tespitine daha yakından bakmamız gerekiyor. Period büyüdüğünde doğal olarak frekans, yani saniyedeki saykıl sayısı düşecektir.

### Örnek

$f_1(t) = \cos \omega_0 t$ ,  $f_2(t) = \cos \omega_0 t$ ,  $f_3(t) = \cos 3\omega_0 t$  işaretinin zaman-frekans domenindeki görünümelerini ele alarak spektrumlarını inceleyelim.

### Çözüm

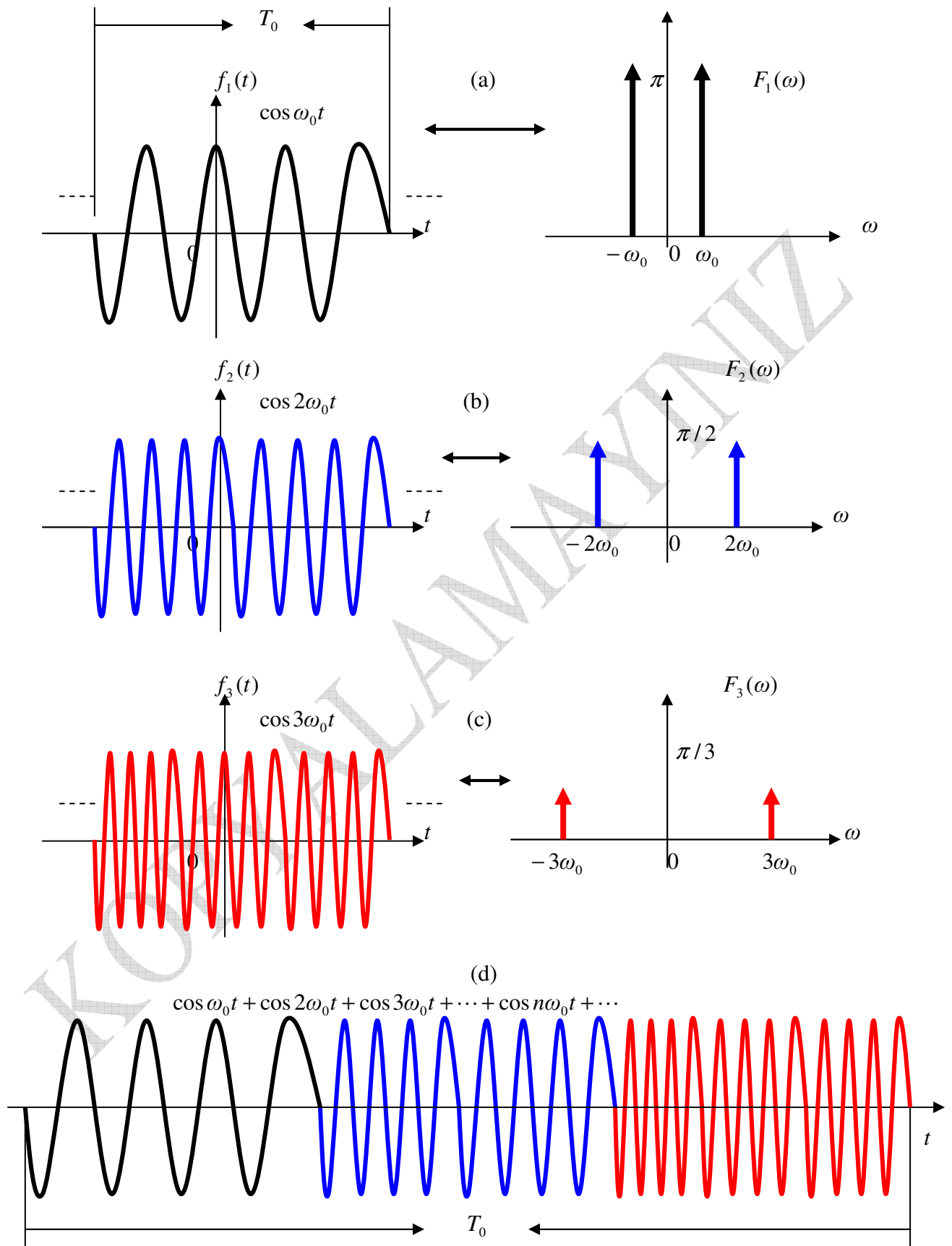
Verilen işaretlerin sırasıyla Fourier transformasyonları aşağıdaki gibi olacaktır.

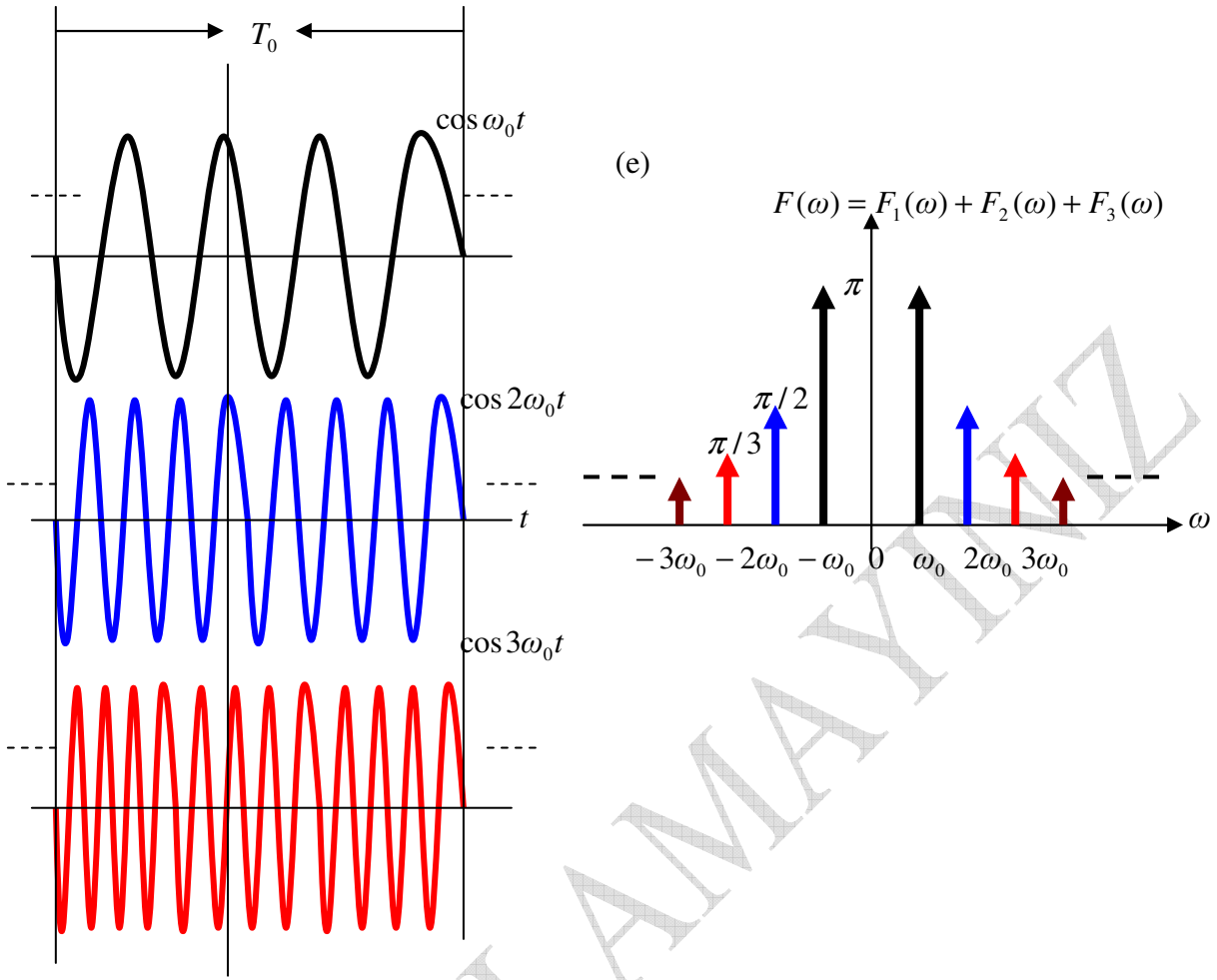
$$F_1(\omega) = \pi \delta(\omega + \omega_0) + \pi \delta(\omega - \omega_0)$$

$$F_2(\omega) = \frac{\pi}{2} \delta(\omega + 2\omega_0) + \frac{\pi}{2} \delta(\omega - 2\omega_0)$$

$$F_3(\omega) = \frac{\pi}{3} \delta(\omega + 3\omega_0) + \frac{\pi}{3} \delta(\omega - 3\omega_0)$$

Bunların ışığında  $f_1(t) \leftrightarrow F_1(\omega)$ ,  $f_2(t) \leftrightarrow F_2(\omega)$  ve  $f_3(t) \leftrightarrow F_3(\omega)$  biçimindeki işaretlerin zaman-frekans domenlerine bakabiliriz. Aşağıdaki şekillerde bunları gözlemleyebilmekteyiz.





Şekil 24 Periyodik işaretler ve spektrumları

İlk şekil (a) dan görüldüğü gibi,  $T_0$  temel periodunda verilen  $\cos \omega_0 t$  çift fonksiyon olduğu için  $F_1(\omega)$  genlik spektrumunda  $-\omega_0$  ve  $\omega_0$  biçiminde frekansları mevcuttur. Bu basit haliyle  $f_1(t) = \cos \omega_0 t$  tipli sinusoidin  $F_1(\omega)$  spektrumunun ayırık olduğunu daha ilk anda farkedilmektedir. Şekil (b) de işaret birinciye göre  $\cos 2\omega_0 t$  olarak bu kez  $F_2(\omega)$  spektrumunda simetrik  $-2\omega_0$  ve  $2\omega_0$  frekanslarına sahiptir. İkinci şekilde  $F_2(\omega)$  spektrumunda farkedilen, band genişliğinin birinci  $F_1(\omega)$  spektrumunun iki katı olduğudur. Bu arada  $f_2(t)$  zaman uzayında aynı period içerisinde saykıl sayısının da iki katına çıktığı gözlemlenmektedir. Şekil (c) de bu kez  $\cos 3\omega_0 t$  işareti dikkate alındığında, aynı periyoddaki saykıl sayısının üç katında olduğu, bunun  $F_3(\omega)$  spektrumunun band genişliğinden de farkedilebileceği görülmektedir. Bu tarzda  $\cos n\omega_0 t$  tipindeki sinusoidin “ $n$ ” büyük değerleri için, zaman domeninde saykıl sayısının, frekans domeninde ise band genişliğinin sürekli artacağını görmekteyiz. Bununla birlikte yine spektrumlardan ve de (e) den açık olarak görülmektedir ki, spektrumda harmoniklerin band genişlikleri artmasına karşın, genliklerinin ise giderek küçüldükleri de dikkatlerden kaçmamaktadır. Bu anlamda daha önce de belirtilmişti, spektrum genliğinin hiçbir zaman için  $n\omega_0 \rightarrow \infty$  için  $F(\omega) \rightarrow 0$  olması şekilden de görüleceği gibi beklenmiyor.

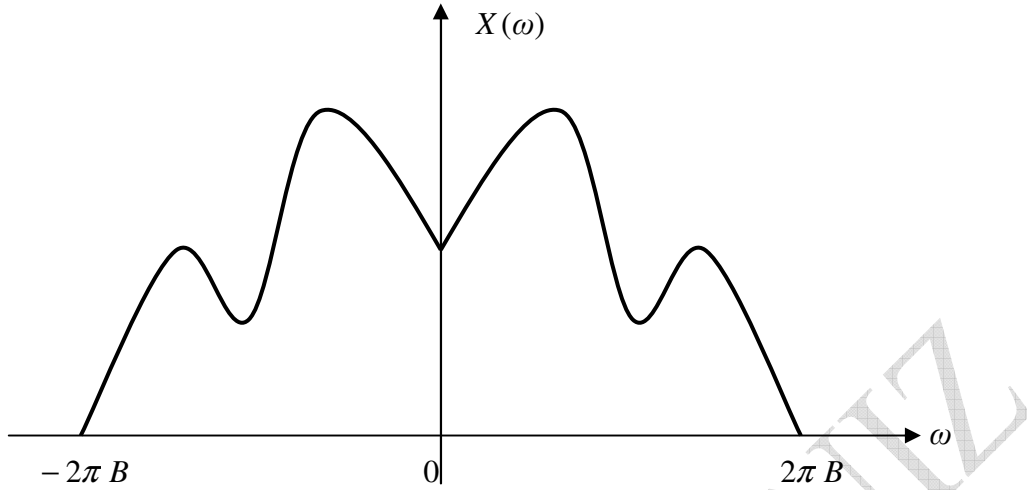


Bu kez söz konusu sinusoidlerin  $\cos \omega_0 t + \cos 2\omega_0 t + \cos 3\omega_0 t + \dots + \cos n\omega_0 t + \dots$  gibi seri toplamını göz önüne aldığımızda şekil (e) deki spektrumun söz konusu olacağını görmekteyiz. Temel frekans  $\omega_0$  nin “n” ile gösterilen harmoniklerinin spektrumda sıralandığı görülmektedir. Şekil (a) da görülen temel frekansa sahip sinusoidin spektrumunun ayrık olmasından dolayı, harmoniklerin toplamından oluşacak

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \cos n\omega_0 t = \dots + \dots + \cos \omega_0 t + \cos 2\omega_0 t + \cos 3\omega_0 t + \dots + \cos n\omega_0 t + \dots$$

tipli bir serinin spektrumu da ayrık olacaktır. Örneğimizde temel frekans  $\omega_0$  olduğu için, (e) den görülebileceği gibi, spektrumdaki bileşenler birbirlerinden  $\omega_0$  mesafesiyle ayrılmışlardır. Şimdi bu  $\omega_0$  mesafesini nasıl küçültür veya büyütürüz durumuna bakmamız yararlı olabilir. Bu koşullar altında temel periodu büyüttüğümüzü düşünelim. Şekil (e) de zaman domenindeki  $T_0$  periodunun büyümesi durumunu araştıralım. Şimdi daha büyük bir period da  $\cos \omega_0 t, \cos 2\omega_0 t, \cos 3\omega_0 t$  gibi işaretlerin davranışlarını gözlemlemeye çalışalım. Örneğin periodu bir öncekinin iki katı yapalım  $T_2 \rightarrow 2T_0$ . Bu durumda  $\cos 2\omega_0 t$  işareti,  $\cos \omega_0 t$  gibi,  $\cos 3\omega_0 t$  işareti de,  $\cos 1.5\omega_0 t$ ,  $\cos 4\omega_0 t$  işaretide doğal olarak  $\cos 2\omega_0 t$  gibi salınım yaparak yavaşlayacaklardır. Çünkü period iki katına çıktığından hızları, dolayısıyla frekansları da yarıya düşecektir. Temel frekans  $\omega_0 = 2\pi/2T_0$  olarak öncekini yarisına düşmüştür. Bu haliyle harmonikler spektrumda daha önce  $\omega_0$  aralığıyla sıralanırken, şimdi  $\omega_0/2$  aralığıyla sıralanacaklarından daha yoğun bir görünüm içersinde olacaktır. Bu şekilde periodu limit olarak en büyük değerinde  $T_0 \rightarrow \infty$  olarak alırsak, band genişliği veya harmonikler arasındaki mesafe de limit olarak  $\omega_0 \rightarrow 0$  gibi, bizi aralarında sıfır mesafenin söz konusu olduğu bir duruma götürür. Bu anda spektrumdaki harmonikler sıfır mesafeli bitişik bir yapıda olacaklarından, spektrum sürekli forma dönüşmüş olacaktır. Band genişliği spektrumda, maksimum ve minimum frekanslar arasındaki fark olduğundan,  $\omega_0 \rightarrow 0$  ideal durumunda fark da sıfır olacağından, frekanslar bitişik olduğundan, yoğunlaşmış bir spektrum sürekliymiş izlenimini verecektir (Fourier transformasyonu gibi). Period sonsuz büyük

Peki bu durumda sürekli spektrumda band genişliği  $\omega_0 \rightarrow 0$  gibi düşünüleceğinden, acaba sürekli spektruma sahip bir işaretin band genişliğiyle ilgili ne söylenebilir veya hangi terminoloji kullanılabilir. Sürekli bir işaretin spektrumunu aşağıdaki gibi düşünebiliriz.



Şekil 25 Sürekli spektrum

Görüldüğü gibi,  $x(t)$  olarak verilen işaretin (muhtemelen periyodik değil)  $X(\omega)$  spektrumunun sürekli olduğunu görmekteyiz. Bunun anlamı aslında bu spektrumda da  $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$  ve  $b_1, b_2, b_3, \dots, b_n, \dots$  gibi harmonikler var, ancak band genişliği sıfır ( $\omega_0 \rightarrow 0$ ) olduğundan, bunlar bitişik yani sıfır mesafeyle dizili olduklarından ayırık formdaki gibi görememekteyiz. Bu anlamda eğer  $X(\omega)$  spektrumunun band genişliği  $\omega_0 \rightarrow 0$  sıfır kabul edilirse, işaretin band genişliğiyle ilgili hangi veya nasıl bir değerlendirmede bulunabiliriz. Sürekli formda bu yüzden klasik band genişliği yerine bir tür band genişliği anlamına gelen spektrum band genişliğinden söz edilir. Bu durumda  $X(\omega)$  spektrumunun band genişliği olarak spektrum band genişliği olan  $2\pi B$  rad/sn veya yalnızca  $B$  Hz lik frekans kullanılabilir. Verilen spektruma göre  $B$  Hz lik band genişliği,  $a_n$  ve  $b_n$  gibi katsayılarla gösterilen tüm harmoniklerin toplamından oluşan bir band genişliğini göstermektedir.

Öte yandan bu kez periyodik işarete periyodun küçültülmesi durumuna bakalım. Aksine periyodu  $T_2 \rightarrow T_0/2$  olarak yarıya düşürseydik, temel frekans  $\omega_0 = 2\pi/(T_0/2)$  gibi iki katına çıkacağından, harmonikler arası  $\omega_0$  olan mesafe bu kez  $2\omega_0$  gibi iki katına çıkacağından, yani harmonikler arası mesafe artacağından, spektrum gittikçe daha belirgin bir biçimde ayırık formunu sürdürmüş olurdu. En nihayeti periyodu limit olarak  $T_0 \rightarrow 0$  gibi en küçük değerinde alsaydık, bu kez de  $\omega_0 = (2\pi/0) \rightarrow \infty$  bağıntısından görüldüğü gibi, band genişliği sonsuz olacağından, harmonikler arası mesafe de sonsuz büyük olacağından, spektrumda yalnızca ilk bileşeni görmek mümkün olurdu. Çünkü teorik manada, sonraki harmonik, sonsuzda olacaktır.

Öte yandan periyodik bir işaretin periyodu artırıldığında, işaretlerin örtüşmesi engellenir. Bunun en genel halini, semboller arası girişim (InterSymbol Interference, ISI) konusundan bilmekteyiz. Periyodun artırılmasıyla örtüşme problemi giderilirken, acaba başka mahsur veya avantajlar söz konusudur. Yani spektrumun yoğun veya sürekli forma yaklaşmasının avantaj veya dez avantajı ne olur. Sürekli işaretin spektrumunun ayırık spektrum gibi band sonsuz değil, band sınırlı olması önemli bir kavramı vurgulamaktadır.

Band sınırlı işaretler, sürekli işaretlere özgü bir kavram olup, işaret işlemede (örnekleme) ve haberleşmede (modülasyon) gibi uygulamalara önemli katkılar sağlamaktadır. Bunun yanı sıra band, işaretin içerdiği enerji miktarını da gösterdiğinden band sınırlı bir işaret sınırlı band da belli bir enerji miktarını da içereceğinden, band sınırlı işaretler aynı zamanda enerji işaretleri olarak da avantaj sağlamaktadır. Burada spektrumu band sınırlı olan işaretin zaman domenindeki tipine değinilmedi. Spektrumu ayırık ve sonsuz olan işaretin zaman domeni periodik olduğundan, spektrumu sınırlı ve sürekli olan işaretin zaman domeni de diğerinin tersine periodik olmayacaktır (nonperiodic, aperiodic). Bu nedenle spektrumu sonsuz ve ayırık olan işaretler yerine, spektrumu band sınırlı ve sürekli olan periodik olmayan işaretlerle çalışılması tercih edilen bir durumdur.

### Fourier Serisi – Ayırık Spektrum – Güç İşareti

Daha önceden periodik işaretlerin güç işaretleri olduğunu belirtmiştik. Yani ortalama güçleri sonlu, ve enerjileri sonsuz olan işaretlerdi ( $P_{AV} < \infty$  ve  $E \rightarrow \infty$ ). Periodik bir işaretin enerjisinin sonsuz olmasını, onun ayırık spektrumundan da görebilmekteyiz. Çünkü böyle bir işaretin enerjisini spektrumundan,

$$E_f = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)^2$$

bağıntısından da görebilmekteyiz. Bu bağıntıya göre periodik bir işaretin enerjisi, ayırık spektrumun  $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$  ve  $b_1, b_2, b_3, \dots, b_n, \dots$  gibi katsayılarla bağlı gösterilen harmoniklerinin enerjilerinin toplamından oluşmaktadır.  $n \rightarrow \infty$  gibi sonsuz harmonik olduğu düşünülürse, sonsuz harmoniğin enerjileri toplamı da sonsuz olacağından, Fourier serisinin enerjisinin ayırık spektrumundan kaynaklanan sebeple sonsuz olduğunu görebilmekteyiz.

### Fourier Serisinin İddiası

Fourier serisi, periodik özellikteki herhangi bir işaretin  $\cos n\omega_0 t$  ve  $\sin n\omega_0 t$  gibi sinusoidlerle ifade edilmesini sağlar. Bu sinusoidler dışındaki periodik işaretlerin gösterimine imkan sağlayan alternatif bir yaklaşımdır. Herhangi bir periodik işaret veya fonksiyonun sinusoidler gibi çok iyi bilinen, tanınan ve son derece yararlı aynı zamanda da sempatik olan fonksiyonlarla gösterilmesinin, işaret analizlerine önemli katkısı olur. Örneğin bir dörtgen veya üçgen dalganın standart formuyla verilmesi halinde, bu tür işaretlerin detaylı analizleri için elimizde kısıtlı bilgi vardır. Oysa bu tür işaretlerin çok daha iyi bilinen  $\cos n\omega_0 t$  ve  $\sin n\omega_0 t$  gibi sinusoidlerle gösterilmesi mümkün olsaydı, değerlendirme ve analizler çok daha isabetli olabilirdi. İşte bu noktada, Fourier serisi bu imkanı sağlayan alternatif bir teknik olarak ortaya çıkmıştır. Fourier serisiyle sözü edilen standart dışı herhangi bir periodik işaretin gerek zaman, gerekse spektrum analizleri çok daha efektif yapılabilmektedir.

## Periodik İşaretin Harmoniklerden Elde Edilmesi

Eğer standart dışı periodik bir işaret aşağıdaki gibi

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega_0 t + \theta_n) + b_n \sin(n\omega_0 t + \theta_n)$$

Bir Fourier serisinin  $\cos n\omega_0 t$  ve  $\sin n\omega_0 t$  gibi sinusoidlerin çeşitli harmoniklerinin toplamı olarak ifade edilebiliyorsa, seri ile verilen  $f(t)$  fonksiyonu, acaba gerçekte söz konusu standart olmayan periodik işaretin kendisini, veya ona ne kadar yakındır sorusu bu aşamada önem kazanmaktadır. Yani Fourier serisiyle elde edilen işaretin, gerçek işarete yakınsaması (convergence) söz konusudur. Örneğin  $x(t)$  işareti bir dörtgen dalgayı gösterebilir ( $x(t) = \text{rect}(t)$ ). Acaba bu işaretin sinusoidlere bağlı alternatif yazılımını gösteren Fourier serisiyle verilen  $f(t)$  işareti, acaba  $x(t) = \text{rect}(t)$  dörtgen işaretini tam anlamıyla oluşturabilmektedir?. Diğer bir deyişle dörtgen dalga, Fourier serisindeki harmoniklerden tam elde edilebilmektedir ( $f(t) = x(t)$ ). Bunun için seride görülen  $n \rightarrow \infty$  için tüm  $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$  ve  $b_1, b_2, b_3, \dots, b_n, \dots$  gibi katsayıların doğru olarak elde edilmesi gerekir.

Bu şartlar altında bulunan  $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$  ve  $b_1, b_2, b_3, \dots, b_n, \dots$  gibi katsayılar, sürekli işaretin tamamını oluşturabilir mi?. Bu yaklaşım ve soru zaten Fourier ve ona taban oluşturan vektör analizin doğasında vardır.

$$e = f - cx$$

ifadesini hatırlayacak olursak, böyle bir hatanın ( $e$ ) varlığı daima olacaktır. Bunun enerjisinin ( $E_e$ ) ideal koşullar altında minimum veya sıfır  $E_n \rightarrow 0$  olması durumunda ancak

$$f \equiv cx$$

bağıntısı söz konusu olabilseydi Fourier serisindeki bulunan katsayılar ayrık formda olmasına rağmen, sonsuz sayıda ayrık terimin göz önüne alınmasıyla işaret sürekli formda elde edilebilebilirdi. Pratikte seri içerisinde sonsuz harmoniğin bulunması, işareti tam anlamıyla elde etmeye engel teşkil etmektedir. Sonsuz harmonikle işlem yapmanın zorluğundan dolayı, sonsuz katsayı elde edilemeyeceğinden, verilen orijinal işaret ve onun Fourier serisiyle alternatifi olan işaretler tam anlamıyla örtüşmeyeceklerdir. Diğer bir deyişle iki işaret, tam eşit olmayacaktır ama Fourier serisinin doğasından gelen ve var olduğu hep düşünülen küçük bir hatayla çok yakın elde edilebilirler ( $f(t) \approx x(t)$ ). Bu doğrultuda, Fourier serisinin gerçek işarete yakınsamasını temin etmek üzere Dirichlet koşullarının sağlanması gerekmektedir. Dirichlet koşulları sağlandığı sürece, Fourier serisiyle elde edilen işaret, gerçek işarete tam olarak yakınsayabilecektir. Bu koşullara aşağıda ele alınacaktır.

## Fourier Serisinin Varlığı ve Dirichlet Koşulları

Fourier serisinin mevcudiyeti ve varlığı Dirichlet koşulları ile tanımlanmaktadır. İki türlü Dirichlet koşulu vardır ;

### 1. Zayıf Dirichlet koşulu

Bu koşulda Fourier serisinin varlığı test edilmektedir..

$$\int_{T_0} |f(t)| dt < \infty$$

Bu koşula göre, belirli bir periodda Fourier serisi integre edilebilmeli, dolayısıyla sonuç sonlu olmalıdır. Bu *zayıf Dirichlet koşulu* olarak bilinir. Bu yaklaşım Fourier serisinde sonlu sayıda  $a_0, a_n$ , ve  $b_n$  gibi katsayıların bulunmasını ve Fourier serisinin mevcudiyetini garanti eder. Bunun yanında  $f(t)$  fonksiyonunun sonsuz sayıda maksimum ve minimumu varsa, bu fonksiyonun oldukça fazla sayıda ve yüksek frekansları olabileceği anlamına geleceği için, böyle bir serinin bir noktaya yakınsaması mümkün olmayabilir. Fazla sayıda yüksek frekans bileşenleri, işaretin osilasyonlu olduğunu ve sönümlenebilir özellikte olmadığını göstermektedir. Bu durumda işaretin yüksek frekanslarının katsayıları, her hangi bir noktaya yakınsayacak hızlı bir düşüş içinde olmayabilecektir. Bunun sonucunda işaretin yakınsamayacağı düşünülebilir.

### 2. Kuvvetli Dirichlet koşulu

Eğer  $f(t)$  fonksiyonunun bir periodluk süreçte sonlu sayıda maksimum ve minimum noktası var ve eğer aynı zamanda aynı period içinde sonlu sayıda ve her biri sonlu süreksiz (discontinuity, piecewise fonksiyonlar) noktası varsa, *kuvvetli Dirichlet koşulu* vardır kabul edilir. Burada süreksizlikle (discontinuity) kastedilen, işaretin bazı anlarda sıfır (0) durumundan (1) durumuna ani yükselişler kastedilmektedir. Sonuçta gerek zayıf gerekse kuvvetli Dirichlet koşullarının Fourier serisinin gerçek işarete yakınsamasını sağlama yönünde önemli olduğunu görmekteyiz.

## Harmoniklerden Sürekli İşaretin Elde Edilmesi

Spektrumda söz konusu sonsuz tane ayrık harmoniğin toplamından,  $f(t)$  veya  $x(t)$  gibi sürekli bir işaret elde edilebilmektedir. Ancak yukarıda değinildiği gibi, teorik anlamda mümkün ama uygulamada sonsuz harmoniğin katsayılarıyla elde edilmesi pratik olmadığından elde Fourier serisi ile elde edilen işaretin gerçek işarete tam anlamıyla yakınsaması, aynısı olup olmadığı hata payıyla söz konusu olacaktır. Bütün bunların ışığında Fourier serisinin spektrumu göz önüne alınarak çıkarılacak önemli tespitler vardır.

**Tespit 1:**  $C_n - \omega$  spektrumunda genlik ve frekans arasında ters bir ilişki söz konusudur. Frekans artarken, genlikler azalmaktadır. Bu şekilde spektrum teorik açıdan tam sönümlü yani sıfır olmamaktadır ( $\omega \rightarrow \infty$  için  $C_n \neq 0$ ). Bunun bir diğer anlamı, Fourier serisinin spektrumu yani band genişliği sonsuzdur. Çok yüksek frekanslar, çok düşük genliklerle sonsuza kadar mevcudiyetini sürdürür. Genlik spektrumunun, zaman domeninin tersi istikametinde olmasının sebebi, Fourier serisinin doğasından kaynaklanmaktadır. Fourier serisi zaman domeninde  $n\omega_0$  değeriyle giderek sıkıştığından (compressing), doğal olarak frekans domeninde de band olarak genişleyecektir.

**Tespit 2 :** Ayırık spektrumun var olan bileşenlerinden hareket edildiğinde, harmonikler frekans olarak büyümelerine rağmen, genlikleri aynı oranda küçülür. Dolayısıyla büyük frekansların genlikleri küçük olmaktadır.

**Tespit 3 :** Şekil (b) de görülen ayırık spektrumun genliği hiçbir zaman sıfır olmamaktadır. Eğer Fourier serisi aşağıdaki gibi göz önüne alınırsa,

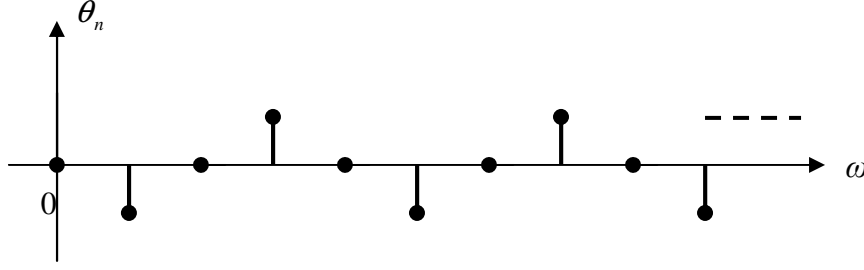
$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega_0 t + \theta_n) + b_n \sin(n\omega_0 t + \theta_n)$$

sonsuz tane terimden yani harmonikten oluşacağı görülmektedir. Biz her ne kadar spektrumu sanki bir noktada genlik değeri sıfır olarak sonlanmış gibi göstersekte gerçekte, yani teoride denkleme görede, genlik değeri hiçbir zaman sıfır olmamaktadır. Çok küçük değerlerde de olsa sonsuza değin sürmektedir. Bu yüzden işaretlerin hiçbir zaman belirli bir band aralığında band sınırlı olması beklenemez. Diğer bir deyişle, **gerçek işaretler genellikle bant sınırsızdır**. Ancak pratik açıdan sonlu değer olarak çok küçük genlik değerlerinden itibaren kesilip alındığı kabul edildiği için, belirli bir bant ta, band sınırlı olarak görülmektedir.

Daha sonraki Fourier transformasyonu bölümünde göreceğimiz gibi serideki harmoniklerin birbirine oldukça yakın hatta sıfır yakınlıkta alınması durumunda, ayırık spektrum sürekli forma dönüşebilmektedir.

## 2. Faz Spektrumu

Faz spektrumu, Fourier serisindeki terimlerin (harmoniklerin) hangi fazlarla birbirleriyle toplandığı yani süperpozisyonlarının alındığını göstermektedir. Yani harmoniklerin fazının frekansla değişimi ele alınmaktadır. Bunun içinde her bir harmonik terimin fazının frekansla nasıl değiştiğini gösteren dağılım, yani faz spektrumu işaret hakkında ayrıca bilgi vermektedir. Periodik bir işaretin analizini yalnızca genlik spektrumuyla yapmak tam bir analiz olmayacağı gibi, işaret hakkında doğru bilgilendirme de sağlamaz. Bu nedenle genlik ve faz spektrumlarının birlikte ele alınması, ancak periodik işaretin tam bir analizi anlamına gelecektir. Bunların ışığında Fourier serisinin  $\theta_n$  faz spektrumu incelenecek olursa, onunda genlik spektrumu gibi ayırık mod da ve sonsuz band da olduğu görülecektir.

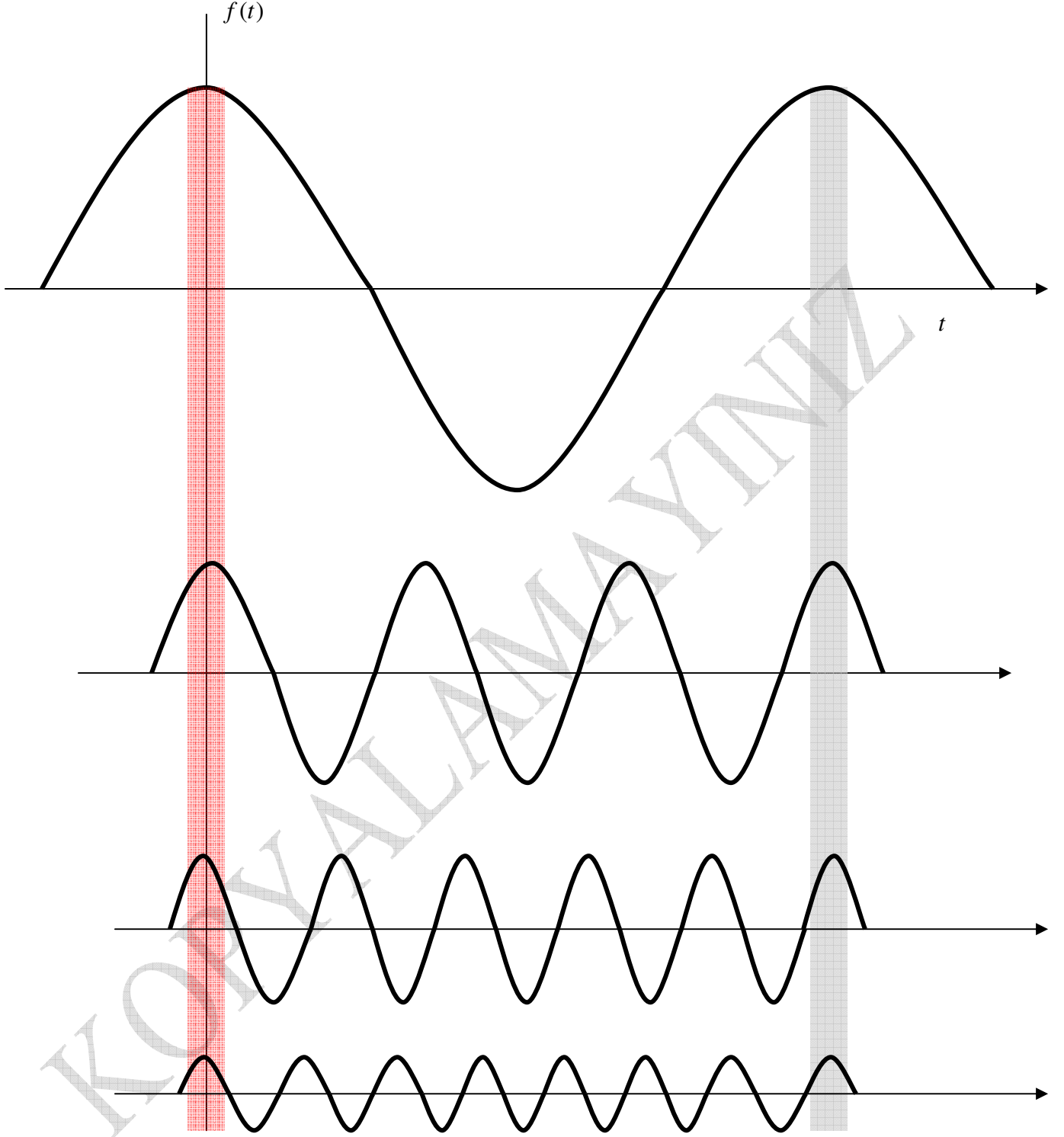


Şekil 26 Fourier serisinde Ayırık fsz spektrumu

Yukarıda vurgulandığı gibi  $\theta_n = \angle F(\omega)$  bağıntısıyla  $\theta_n$ , işaretin faz frekans cevabını göstermesi açısından önem taşımaktadır. Verilen  $\theta_n$  faz spektrumuyla seriyi oluşturan harmoniklerin faz durumları dikkate alınmaktadır. Harmonikler arasındaki faz benzerliğinin veya farklılığının olup olmaması, bu durumdaki harmoniklerin süperpozisyon sonucu yeni işaretlerin ortaya çıkmasını sağlayabilecektir. Son olarak faz spektrumu yardımıyla işaretlerdeki özellikle süreksizlik noktalarının (discontinuity) yanısıra kuvvetli (eş fazlılık) veya zayıf girişim (farklı fazlılık) üzerine fikir edinileceğini düşünebiliriz.

### Harmonikler ve Faz Farkı

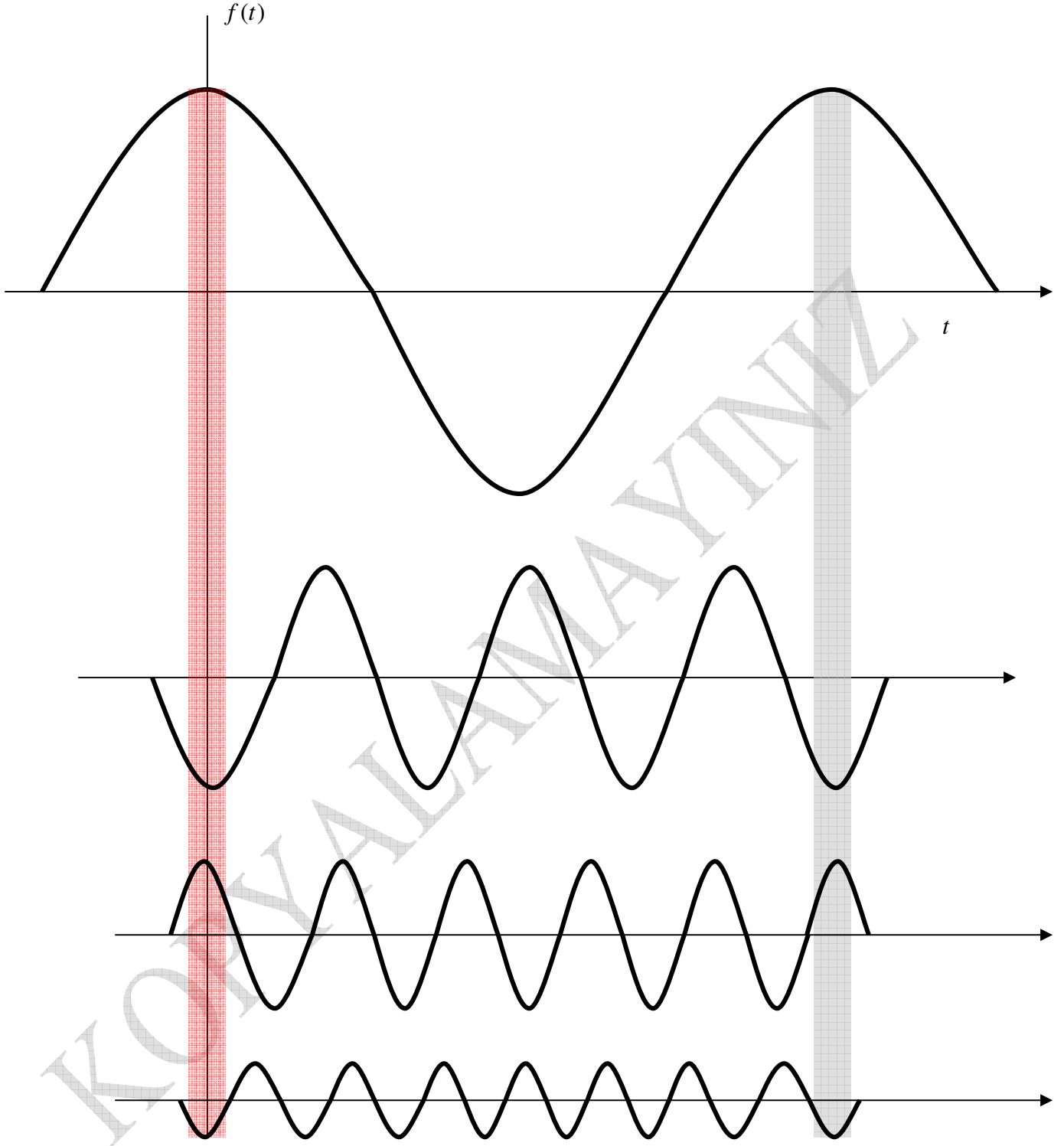
Fourier serisini oluşturan terimlerin (harmoniklerin) genlik değişimlerinin yanısıra, faz farkını da dikkate alan değişim içersinde olduklarını biliyoruz. Bu nedenle daha önce vurgulandığı gibi, periodik bir işaretin analizinin tam yapılması isteniyorsa, genlik ve faz analizinin birlikte ele alınması, değerlendirilmesi gerekiyor. Çünkü her bir harmonik aynı veya farklı faz açılmasına sahip olduğundan sonsuz sayıda kabul edilen bu tür fazlandırılmış veya fazlandırılmamış harmoniğin toplamı (Fourier serisi), işaretindeğerlendirilmesinin mutlaka farklı noktalarda olmasını sağlayacaktır. Aşağıda  $\theta = 0, \pi, \pi/2, \pi/3$  faz farklı çeşitli sayıda harmoniklere sahip periodik işaretler verilmiştir. Bunlardan harmonik fazlarının önemi daha net görünecektir.



Şekil 27 :  $f(t)$  işaretinin sıfır ( $\theta = 0$ ) fazlı ilk 4 harmoniği :

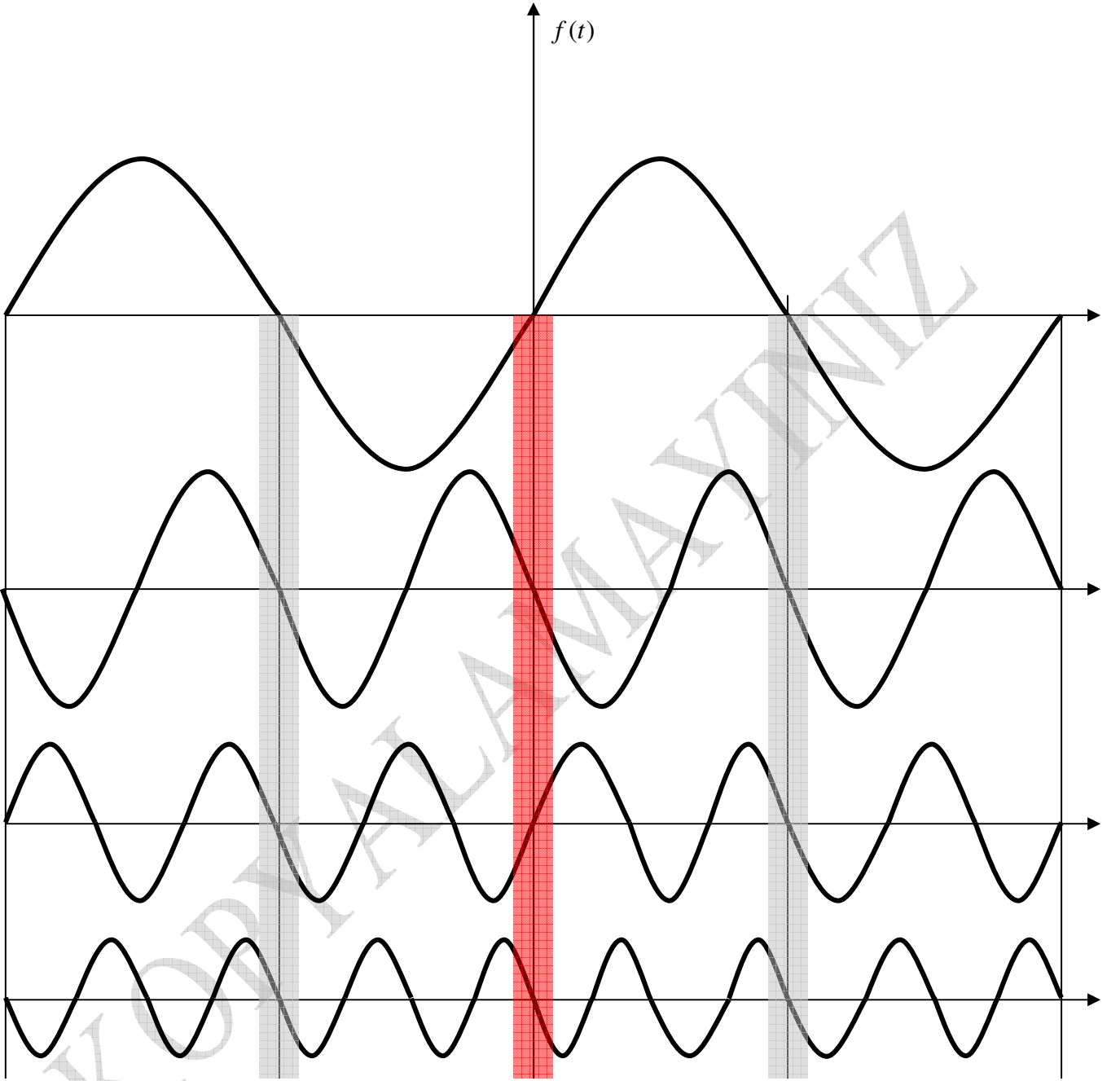
$$f(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \left( \cos t + \frac{1}{3} \cos(3t - \pi) + \frac{1}{5} \cos 5t + \frac{1}{7} \cos(7t - \pi) + \dots \right)$$





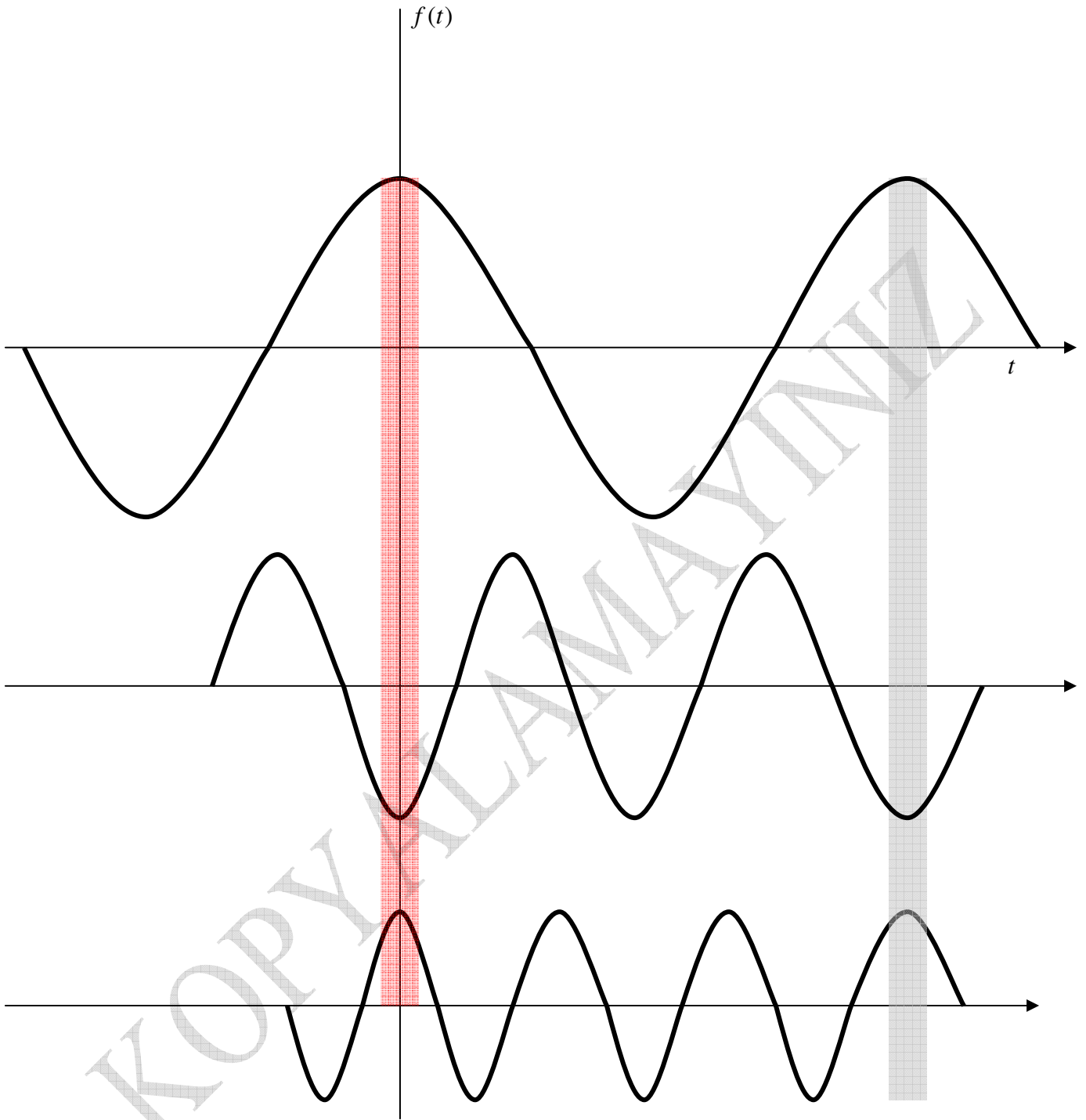
Şekil 28 :  $f(t)$  işaretinin  $\theta = \pi$  fazlı ilk 4 harmoniği :

$$f(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \left( \cos t + \frac{1}{3} \cos(3t - \pi) + \frac{1}{5} \cos 5t + \frac{1}{7} \cos(7t - \pi) + \dots \right)$$



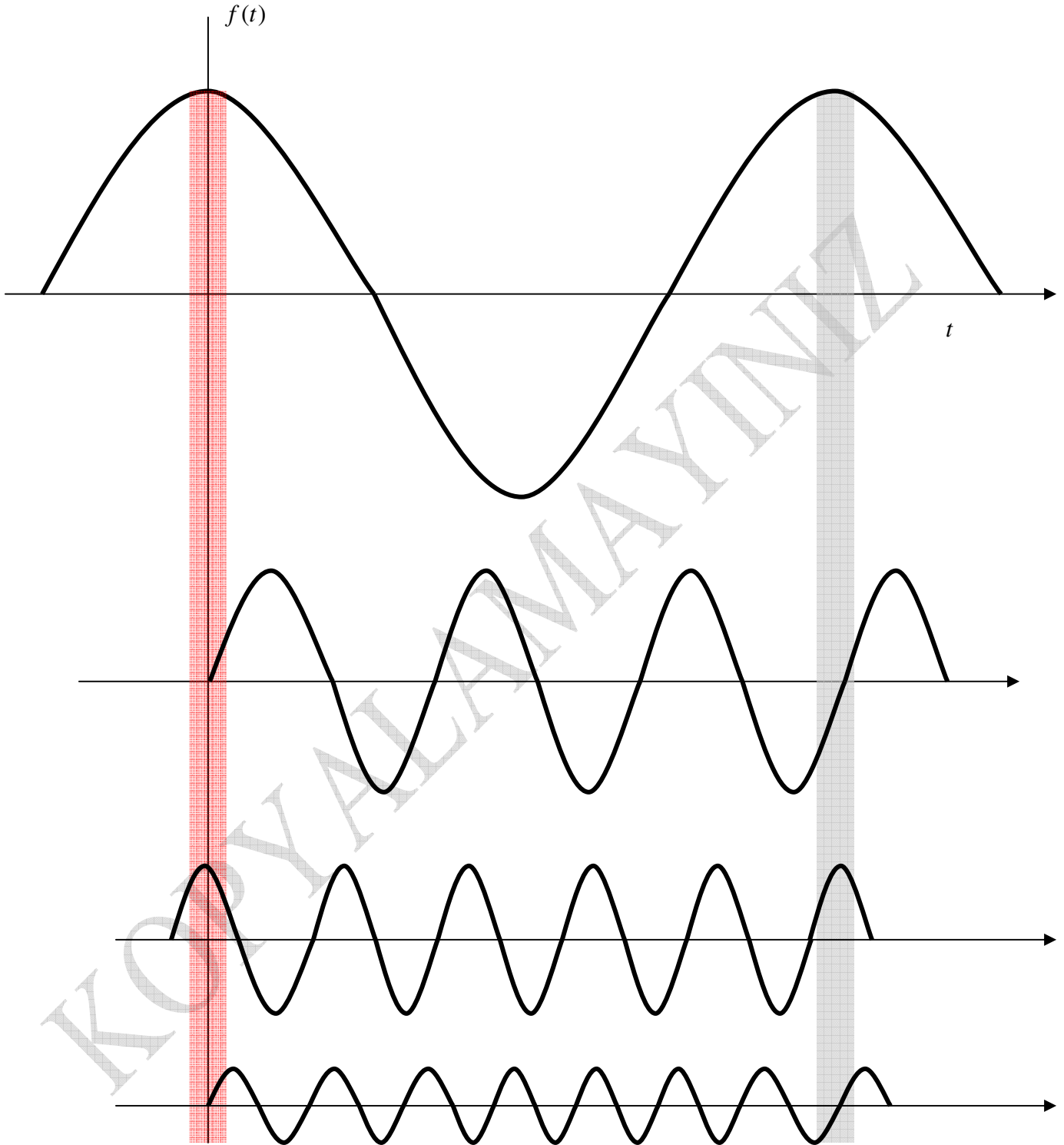
Şekil 29 :  $f(t)$  işaretinin  $\theta = \pi$  fazlı 4 harmoniği

$$f(t) = \frac{2A}{\pi} \left( \sin \pi t - \frac{1}{2} \sin 2\pi t + \frac{1}{3} \sin 3\pi t - \frac{1}{4} \sin 4\pi t + \dots \right)$$



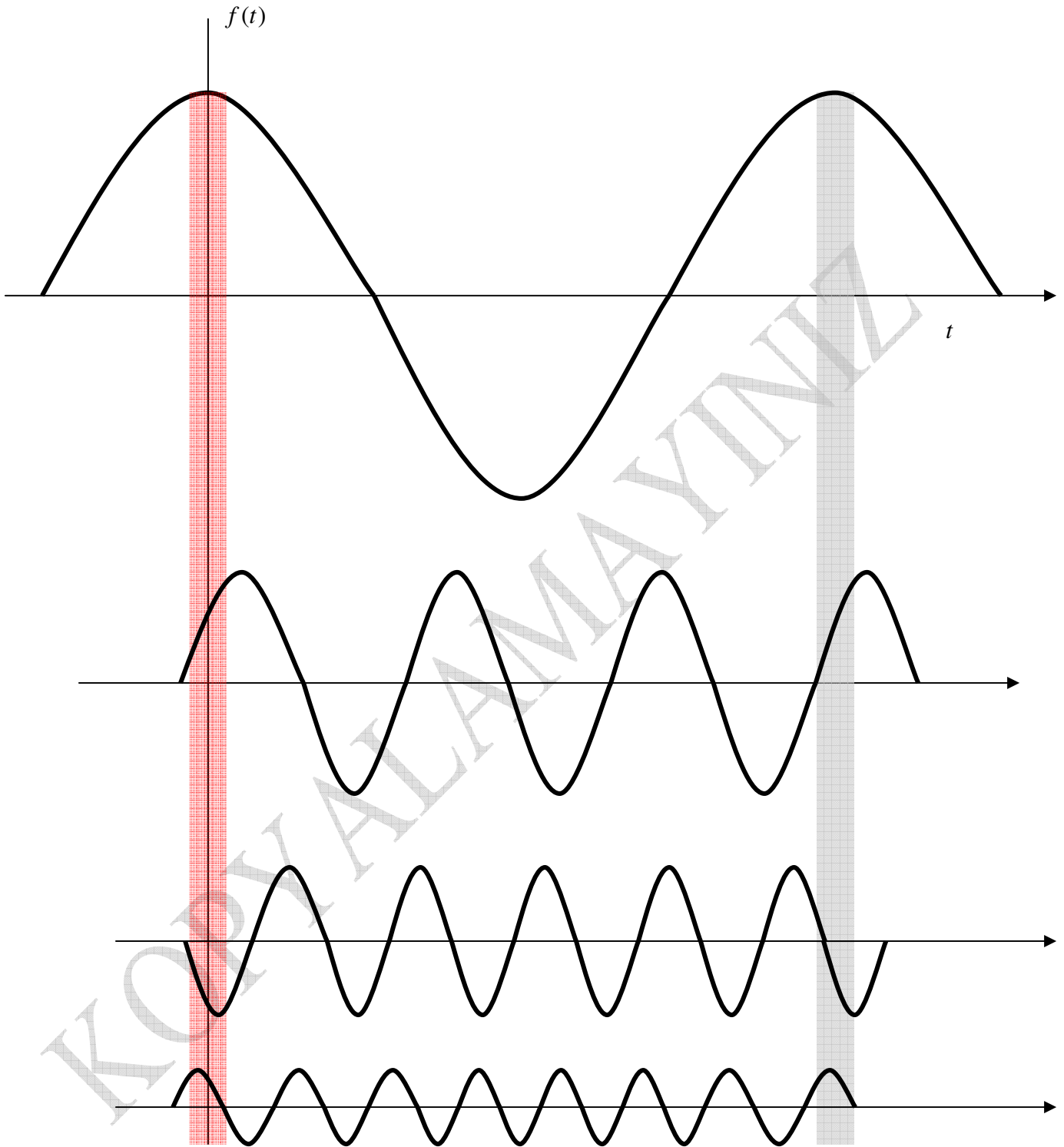
Şekil 30 :  $f(t)$  işaretinin  $\theta = \pi$  fazlı ilk 3 harmoniği

$$f(t) = \left( \cos t - \frac{1}{2} \cos 2t + \frac{1}{3} \cos 3t + \dots \right)$$



Şekil 31 :  $f(t)$  işaretinin sıfır ( $\theta = 90^\circ$ ) fazlı ilk 4 harmoniği :

$$f(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \left( \cos t + \frac{1}{3} \cos(3t - \pi) + \frac{1}{5} \cos 5t + \frac{1}{7} \cos(7t - \pi) + \dots \right)$$



Şekil 32 :  $f(t)$  işaretinin  $\theta = 60^\circ$  fazlı ilk 4 harmoniği :

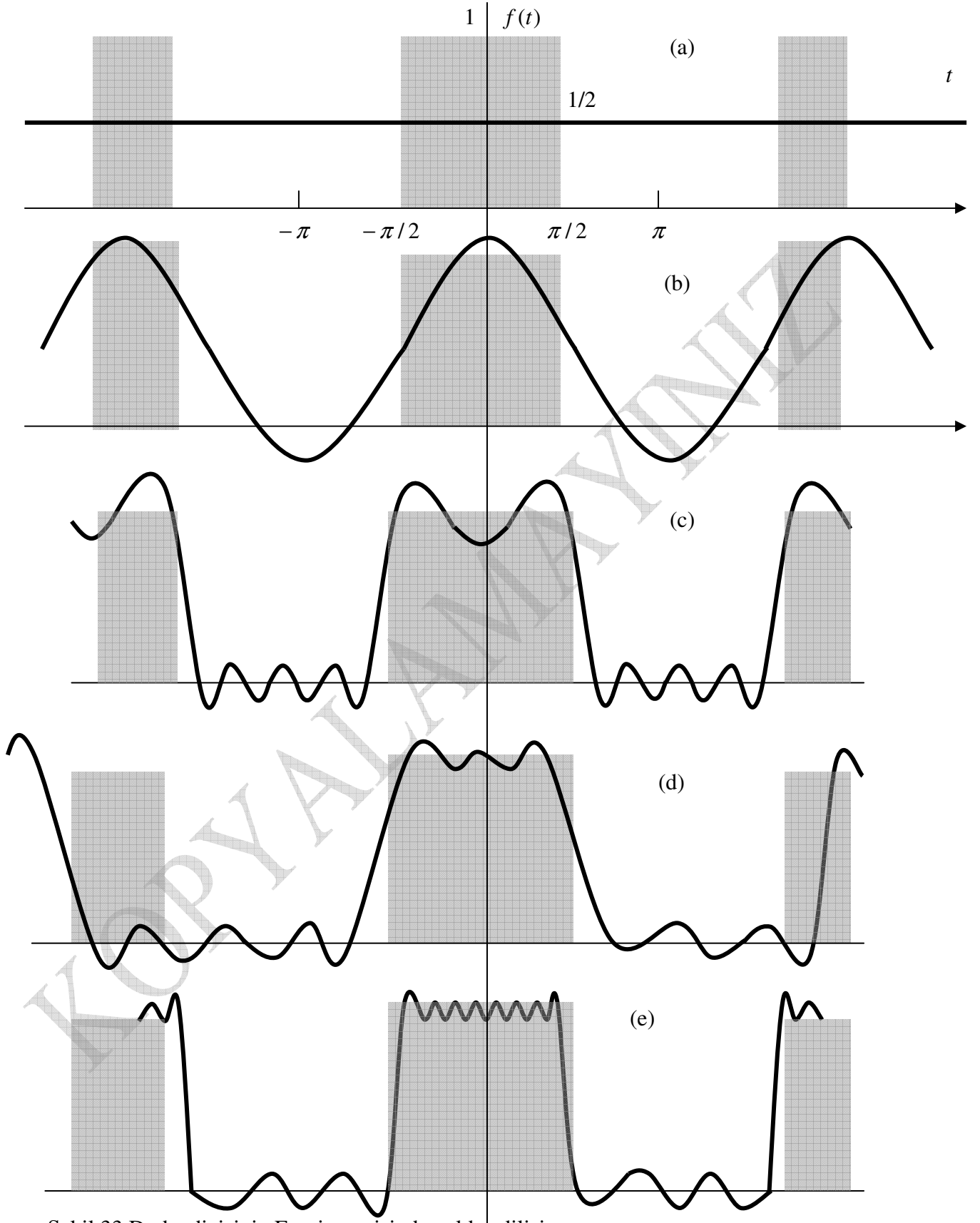
$$f(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \left( \cos t + \frac{1}{3} \cos(3t - \pi) + \frac{1}{5} \cos 5t + \frac{1}{7} \cos(7t - \pi) + \dots \right)$$

### Fourier Serisi ve Özel Bir İşaret : Darbe Dizisi

Darbe dizisi (pulse train) özel bir işaret/dalga çeşidi olup özellikle sayısal haberleşme sistemlerinde ve sayısal işaret işlemede oldukça rağbet gören bir dalga çeşididir. Böyle bir işaretin Fourier serisiyle ifade edilmesi, analizini de mümkün kılmaktadır. Periyodik darbe dizisine biraz yakından bakmak amacıyla aşağıda sinusoidal harmoniklerden elde edilişi şekiller üzerinde açıklanmıştır. Genel olarak  $f(t) = 1$  tipinde özel bir işaret olup Fourier serisi açılımındaki eşdeğerinin

$$f(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \left( \cos t + \frac{1}{3} \cos(3t - \pi) + \frac{1}{5} \cos 5t + \frac{1}{7} \cos(7t - \pi) + \dots \right)$$

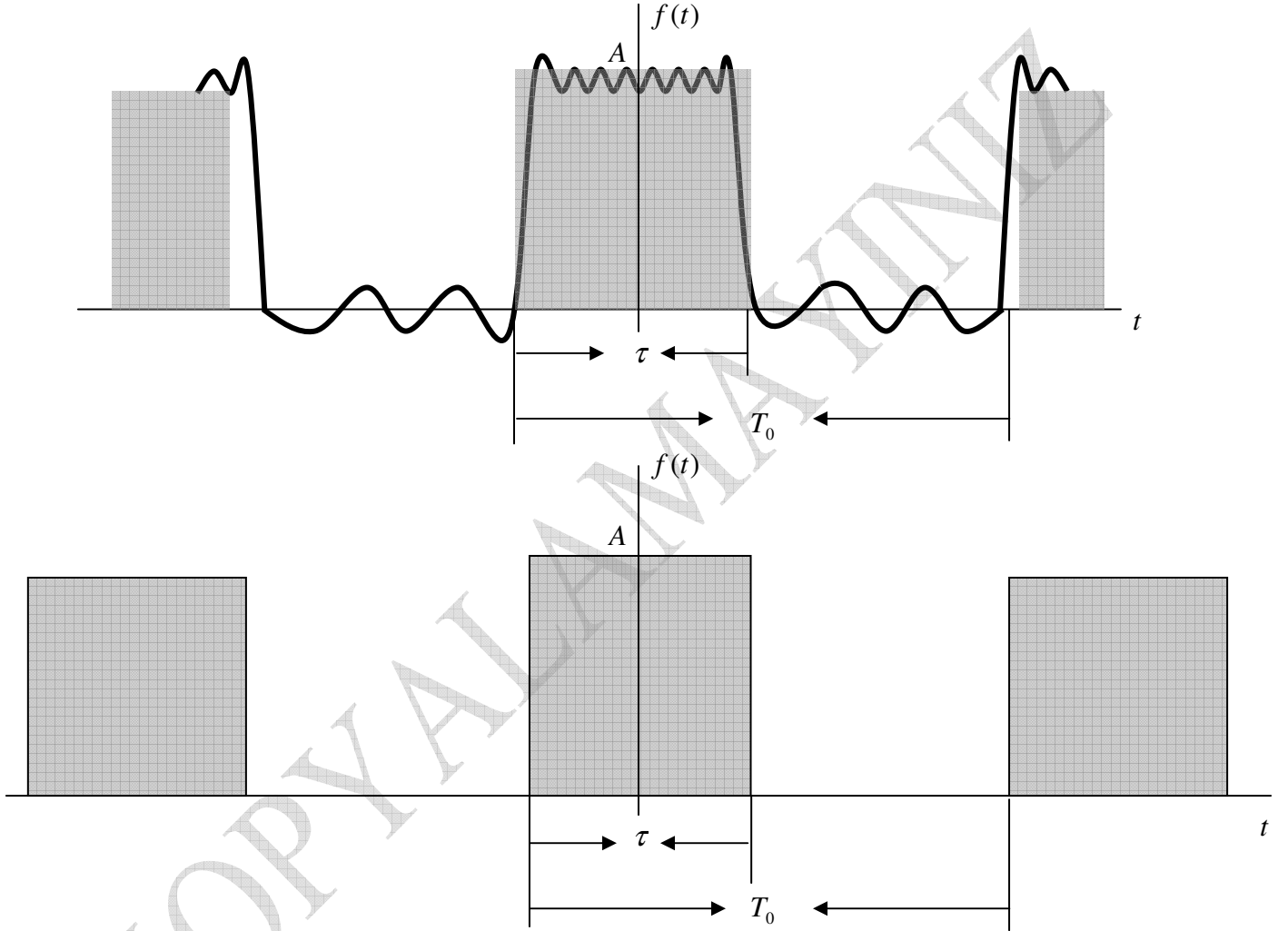
biçiminde olduğu tespit edilmiştir. Çift fonksiyon özelliğinin verilen ifadeden  $a_n \cos((2n+1)t - \pi)$  tipli sinusoidlerden oluşmasıyla da görebilmekteyiz. Bu doğrultudaki diğer bazı özelliklerini aşağıdaki şekil üzerinden devam edelim. Şekillerden kare bir dalganın Fourier serisine açılımı görülmektedir. Gri renkli kare veya darbe işareti orijinal periyodik işaret olarak düşünülmüştür. Fourier serisinin harmonikleriyle elde edilecek toplam işaretin, bu darbe işaretine ne kadar yakınsayacağı şekillerle anlatılmaya çalışılmıştır. Bu açıdan şekil (a) da  $n = 0$ . harmonik yani D.C. bileşeni verilmiştir. (b) de ilk harmonik, (c) de ise, D.C. bileşen, birinci ve üçüncü bileşenlerin yani harmoniklerin toplamı olan dalga gösterilmiştir. Giderek, periyodik darbe dizisinin oluşabileceği görülmektedir. Şekil (d) de ise beşinci harmonik dahil, ilgili harmoniklerin toplamı olan işaret gösterilmiştir. Nihayet şekil (e) de ise ilk ondokuz harmoniğin toplamı gösterilmiştir. Farkedebileceği gibi, harmonik sayısı arttıkça, serinin toplamının, orijinal darbe dizisine oldukça yaklaştığı görülmektedir. Buradan, harmonik sayısının daha büyük teorik olarak sonsuz harmonik kullanılması durumunda, söz konusu darbe işaretinin elde edilmesinin mümkün olacağı sonucu ortaya çıkmıştır. Bu işaretin diğer analizlerine geçebiliriz.



Şekil 33 Darbe dizisinin Fourier serisinden elde edilişi

$$f(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \left( \cos t + \frac{1}{3} \cos(3t - \pi) + \frac{1}{5} \cos 5t + \frac{1}{7} \cos(7t - \pi) + \dots \right)$$

Yukarıdaki şekilden de görüldüğü gibi, bir darbe dizisi, çift fonksiyon olduğundan,  $a_n \cos n\omega t$  tipindeki sinusoidlerin çeşitli harmoniklerinden elde edilmiştir. Dikkat edilirse, periodik işaretin temel işareti olan  $a_n \cos n\omega t$  inusoidinin harmoniklerinin toplamı sonuçta periodik darbe dizisini oluşturmaktadır. Uygulamada, özellikle haberleşme sistemlerinde oldukça yoğun kullanılan bir dalga tipidir. Böyle bir darbe dizisinde darbenin genişliği ve periodu ayarlanabilmektedir.



Şekil 34 Darbe dizisinin Fourier serisi karşılığı

$$f(t) = \frac{A\tau}{T_0} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2A}{n\pi} \sin(n\pi f_0 \tau) \cos 2\pi n f_0 t$$

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos 2\pi n f_0 t$$

$$a_0 = \frac{A\tau}{T_0}$$

$$a_n = \frac{2A}{n\pi} \sin(n\pi f_0 \tau)$$

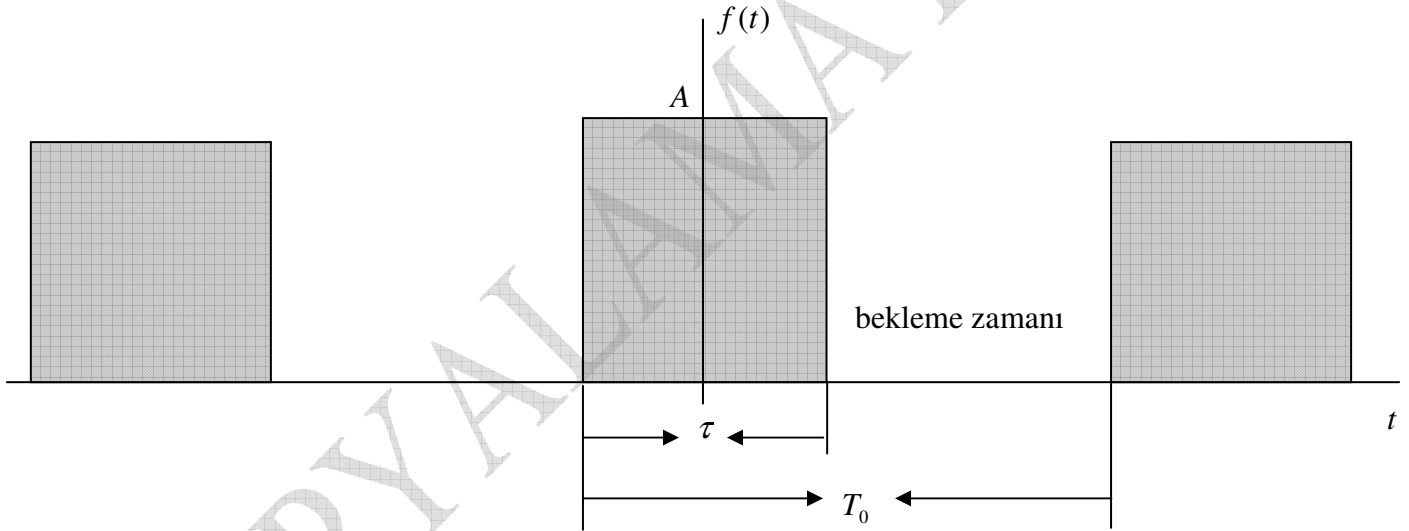


Görüldüğü gibi, bir darbe dizisinin  $T_0$  periodu ve  $\tau$  darbe genişliğine göre elde edilmesi mümkündür. Eğer

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \text{PRF} , \text{ darbe tekrarlama frekansı (pulse repetition frequency)}$$

$$T_0 = \frac{1}{\omega_0} = \text{PRT} , \text{ darbe tekrarlama zamanı (pulse repetition time)}$$

olarak göz önüne alırsak,  $\omega_0$  frekansına darbe tekrarlama frekansı (pulse repetition frequency, PRF) denilmektedir. Bu tür yaklaşım radar veya benzeri mikrodalga/radyo haberleşmelerinde kullanılmaktadır. Bir darbe gönderildikten sonra, ikinci bir darbenin gönderilmesi için bekleme zamanına ihtiyaç vardır. Bu yüzden bu sürenin ayarlanması gerekir, aksi takdirde darbelerin örtüşme ve alınacak darbelerin ayırd edilememe gibi bir sorun yaşanabilir. Bu nedenle böyle bir darbe dizisini kullanan bir radar algılamada  $T_0$  periodunun dolayısıyla  $\omega_0$  darbe tekrarlama frekansının doğru tespit edilmesi gerekir ki, bunun darbe dizisinin Fourier ifadesinde göz önüne alındığını görmekteyiz.

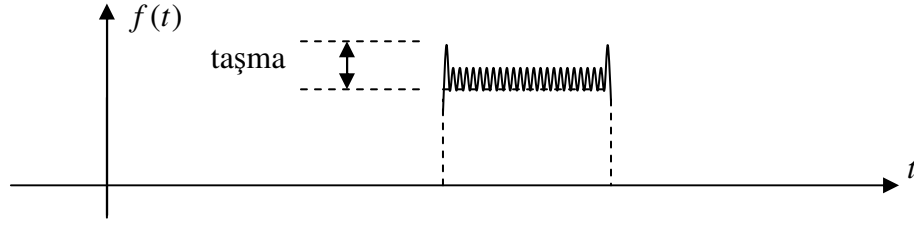


Şekil 35 Radar darbe dizisi ve Fourier serisi karşılığı,

$$PRT = T_0 = \tau + \text{bekleme zamanı (resting time)}$$

### Gibbs Fenomeni

Önceki bilgilerimizin ışığında bir dikdörtgen yani darbe işaretinin Fourier serisi ile ifade edilebildiğini görmüş bulunuyoruz. Ancak özellikle Fourier serisi ile oluşturulan dörtgen veya darbe fonksiyonun uç kenarlarında yani sıfır noktalarında (süreksiz noktalar) bir problem olduğu görülmektedir. Daha doğrusu bu noktalarda olması gereken dalganın üzerinde bir taşma görülmektedir. Bu noktalarda çok yüksek frekanslı bileşenlerin (harmoniklerin) olduğunu da tespit etmiş bulunuyoruz. Bu noktalar gözlemlendiğinde gerçek bir darbe işaretinin özellikle bu uç noktalarda görünümünü bozan bir atlamanın veya taşmanın olduğu görülmektedir. Bu da Fourier serisi ile oluşturulan işaretin orijinale yakınsaması ile ilgili bir durum oluşturmaktadır. Bu problemi ilk olarak fizikçi A. Michelson dile getirmiştir. Bu probleme yanıt ise 1899 da Willard J.Gibbs tarafından Nature dergisine yazılan bir cevapla gelmiştir. Gibbs kendi adıyla anılan yaklaşımında bu sıfır yani uç noktalardaki taşmanın



Şekil 36 Gibbs Fenomeni

terim sayısı arttıkça azaldığını ancak sıfır olmadığını ve bir limite gittiğini öne sürmüştür. Taşmanın süreksiz noktalarda yüksek frekanslardaki değerlerden (atlamalardan, jump) kaynaklanmaktadır. W.J.Gibbs, Fourier serisinin yakınsamasıyla ilgili bu problemi teşhisinden dolayı, öne sürdüğü görüşleri kendi adıyla Gibbs fenomeni olarak adlandırılmıştır. Buna göre sürekli gibi, türevlenebilir parçalı fonksiyonlardan oluşan (discontinuity, piecewise fonksiyonlar) fonksiyonlarda, serinin özellikle sıfır değerlerinde belli bir değere yakınsamasında bir problem olduğunu öne sürmüştür. Özellikle kare dalga gibi işaretlerin elde edilmesinde, Fourier serisinin  $n$  terimden oluştuğu sonlu sayıdaki durumda olması gereken kare dalganın sıfır noktalarında, aşırı değerler (overshoot) aldığı görülmüştür. Bu değer,

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t} dt - 1 = 0.17897974 \approx 0.18$$

olduğunu tesbit edilmiştir. Bulunan yaklaşık 0.18 değeri  $[0, 2\pi]$  veya  $[-\pi, \pi]$  aralığı için 0.9 veya %9 olacaktır. Yani normal kare dalga yüksekliğinin %9 u söz konusudur. Serideki terim sayısının artırılması durumunda bile taşma(aşırı salınma, overshoot) tam kaybolmamakla beraber, bir limite yakınsayabildiği için Gibbs etkisi minimumlaşmaktadır.

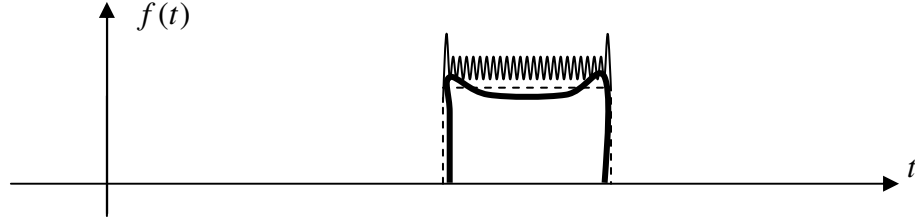
Gibbs etkisi, Lanczos sigma faktörü ile ortadan kaldırılmakta veya oldukça minimumlaştırılabilmektedir.  $\sin c(t)$ , sigma  $\sigma$  - faktörü olarak bilinmektedir. Bu faktörün Fourier serisindeki Gibbs etkisini ortadan kaldıran ifadesi ;

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{m-1} \sin c\left(\frac{n\pi}{m}\right) [\sin a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t]$$

olarak bilinmektedir. “ $m$ ” serideki terim sayısını göstermektedir.

$$\sin c(t) = \frac{\sin t}{t}$$

$\sigma$  - faktörü ile, süreksiz vari noktalardaki aşırı dalgalanmalar filtre edilmekte ve düzgünleştirilmektedir (smoothing).



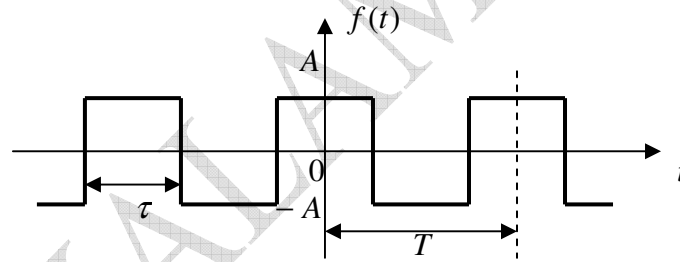
Şekil 37 Düzeltilmiş Gibbs Fenomeni

$\sigma$  - faktörü ile filtre edilmiş yukarıdaki örneklerde verilen dikdörtgen bir dalga'nın Fourier serisindeki görünümü kalın çizgilerle verilmiştir. Bunun en azından %9 luk aşırı salınımın olduğu duruma göre daha düzgün olduğu görülmektedir.

### Fourier Serisinde Süreksizlik

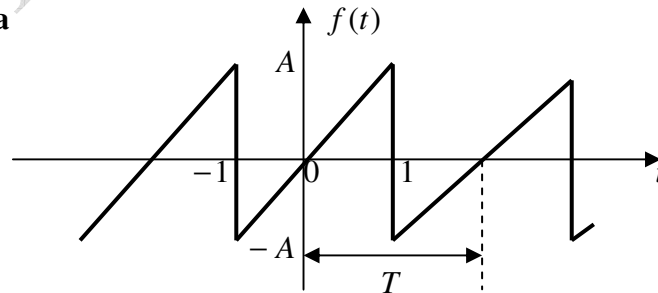
Fourier serisine açılacak herhangi bir periodik işaretin süreksizlik noktaları mevcuttur. Bu noktaların Fourier serisindeki harmoniklerle incelenmesi gerekmektedir. Süreksizliğin olduğu işaretler aşağıda görüldüğü gibi üçgen veya dörtgen işaretlerde bariz olarak görünmektedir.

#### a) Darbe dizisi



$$f(t) = \frac{4A}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin[(2n-1)2\pi f_0 t]}{(2n-1)}$$

#### b) Testere dişi dalga

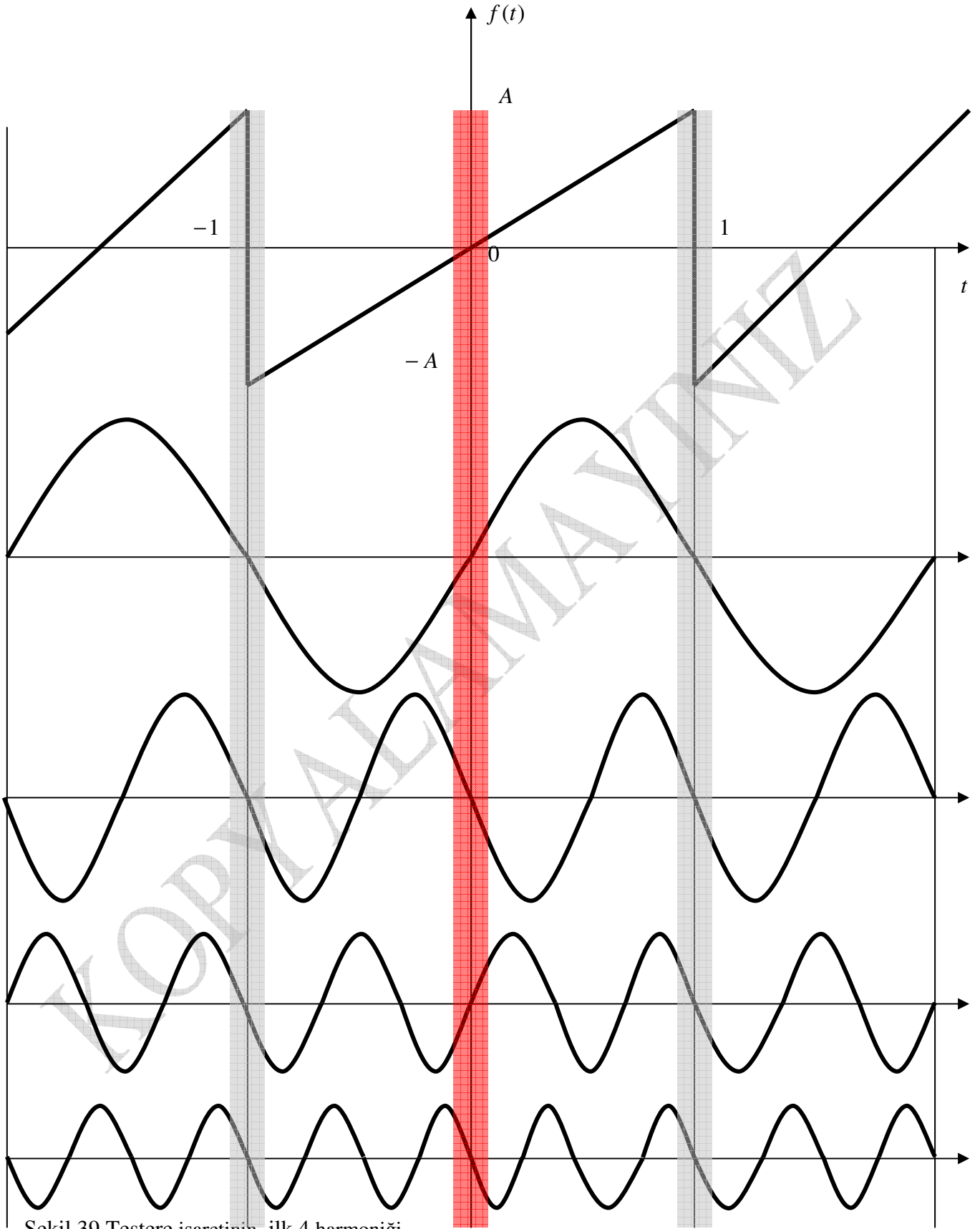


$$f(t) = -\frac{2A}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2\pi f_0 t)}{n}$$

Şekil 38 Fourier serisinde süreksizlik

Şekillerden görüldüğü gibi, her iki işarette de sıfır noktasında  $A$  veya  $-A$  noktasına ani yükselişler olduğundan süreksizlik (jump discontinuity) söz konusudur. Bu tip ani değişimlerin Fourier serisindeki gösterimleri önemlidir. Benzeri ani değişimlerin yüksek frekanslı bileşenlerle (harmoniklerle) sağlanabileceği seri açılımından gözlemlenmektedir. Bu yüzden yukarıdaki verilen süreksizlik noktaları olan işaretlerden herhangi birini daha yakından inceleyerek, ayrıntıları yakalamamız mümkün olabilir. Bu açıdan (b) de verilen testere işaretine yakın bir bakış aşağıdaki şekil üzerinde yapılmıştır. Bunun için periodik testere fonksiyonunun Fourier serisine açılımındaki ilgili harmoniklerden ilk dördü dikkate alınmıştır.

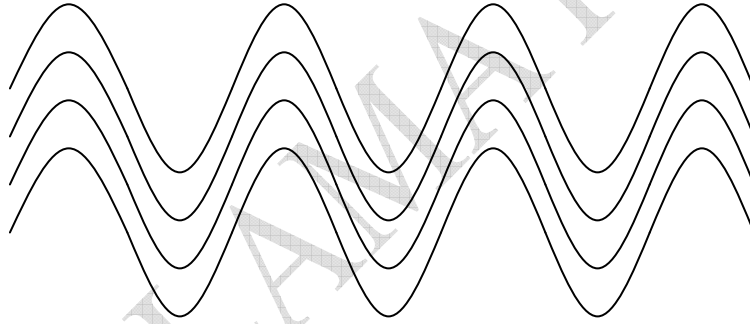
KOPYALANMAYINIZ



Şekil 39 Testere işaretinin ilk 4 harmoniği

$$f(t) = \frac{2A}{\pi} \left( \sin \pi t - \frac{1}{2} \sin 2\pi t + \frac{1}{3} \sin 3\pi t - \frac{1}{4} \sin 4\pi t + \dots \right)$$

Testere fonksiyonunun Fourier serisine açılmış ifadesi ve bunun harmonikler itibariyle değişimini gösteren şekillere bakıldığında ilk olarak harmoniklerin  $\theta = \pi = 180^\circ$  faz farklılığının olduğu kırmızı şeritten farkedilmektedir. Bizi asıl ilgilendiren süreksizliğin olduğu  $t = -1$  ve  $t = 1$  noktalarındaki ani yükselişler, dolayısıyla süreksizliklerdir. İşaretin daha yumuşak geçişe sahip olduğu (smooth) noktalarda frekansların (harmoniklerin) daha ziyade normal veya küçük olmasına karşın,  $t = -1$  ve  $t = 1$  gibi süreksiz noktalarının genellikle çok yüksek frekanslı bileşenler (harmonikler) tarafından sağlanabildiğini görmekteyiz. Bunun için  $t = -1$  ve  $t = 1$  noktalarındaki gri renkli sütunların belirlediği harmoniklerin yönleri takip edilmelidir. Genellikle süreksiz noktalarda harmoniklerin faz olarak aynı yönde olduğunu görmekteyiz. Aynı yöndeki harmoniklerin toplamı daha güçlü bir dalga anlamına gelmektedir. Dolayısıyla aynı yönde eş fazlı (aynı fazlı) değişimlerin toplamı genellikle daha yüksek frekansları verdiği için, burada da  $t = -1$  ve  $t = 1$  noktalarındaki eş fazlı harmoniklerin Fourier serisi gereği toplamı çok yüksek frekanslara karşılık gelmektedir. Bu şekilde süreksiz noktaların yüksek frekanslarla temsili teyit edilmiş olunur. Laser tipli işaretler genellikle bu özellikte tek frekanslı ve aynı fazlı işaretlerin girişimleri yani süperpozisyonu (toplamı) olduğundan görünür (visible) ve güçlü bir işaret örneği olarak kabul edilmektedirler. Aşağıda laser yapısına uygun tek frekanslı (monochromatic) ve eş fazlı (coherent) işaret örneği verilmiştir.



Şekil 40 Işın demeti : Tek frekanslı ve eş fazlı işaretlerin süperpozisyonu

### Fourier Serisi ve Frekans Cevabı

Buna göre spektrum olarak  $C_n$  biçiminde göz önüne alınan  $f(t)$  işaretinin frekans cevabı,

$$F(\omega) = |F(\omega)| e^{j\angle F(\omega)}$$

biçiminde yazılabilir. İfadedeki,  $|F(\omega)|$  genlik frekans cevabı ve  $\angle F(\omega)$  ise faz frekans cevabı olarak anılır. Bu açıdan bakıldığında

$$f(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(n\omega_0 t + \theta_n)$$

gösterimindeki

$$C_n = |F(\omega)| \quad \text{ve} \quad \theta_n = \angle F(\omega)$$

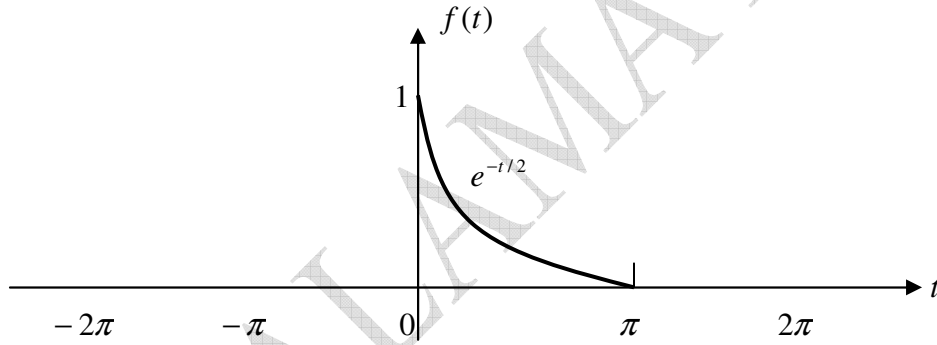
gibi düşünülebilir. Bundan dolayı, Fourier serisi ile bir şekilde işaretin frekans cevabının da hesaplanabileceğini görmekteyiz.

### Fourier Serisinin Standart Olmayan İşaretler İçin Gerekliliği

Rampa, birim basamak, dörtgen veya exponensiyel tarzdaki işaretler, klasik trigonometrik  $\cos \omega t$  ve  $\sin \omega t$  gibi sinusoid fonksiyonlarla karşılaştırıldıklarında standart dışı fonksiyonlar veya işaretler kabul edilebilirler. Klasik sinusoidlerin frekanslarını tayin etmek çok kolay iken ( $y(t) = \cos 100\pi t = \cos 2\pi(50)t$ ,  $f_0 = 50$  Hz gibi), aynı şeyi standart olmayan işaretler için söylemek mümkün değildir. Eğer bu tip fonksiyonlar klasik sinusoidler cinsinden ifade edilebilselerdi, onların da frekanslarını belirlemek kolay olurdu. Bu mümkün müdür?, bunun Fourier serisi ile mümkün olduğu ispatlanmıştır. Doğal kabul edilmeyen standart dışı işaretler periodik oldukları sürece, Fourier serisi kullanılarak klasik sinusoidler türünden gösterilebilirler. Bunun sonucunda, standart kabul edilmeyen işaretlerin de frekanslarını belirlemek mümkün olmaktadır. Bunun anlamı, periodik oldukları sürece her standart dışı işaret, klasik sinusoidlerin farklı dizilişteki çeşitli harmoniklerinin süperpozisyonu olarak Fourier serisi biçiminde ifade edilebilmektedir. Bu yaklaşım aşağıdaki örnek üzerinde somutlaştırmaya çalışılmıştır.

#### Örnek

Verilen  $f(t) = e^{-t/2}$ ,  $0 \leq t \leq \pi$



Şekil 41 Periyodik bir işaret

ve

$$x(t) = 0.504 + 0.11 \cos 2t + 0.03 \cos 4t + 0.01 \cos 6t + 0.007 \cos 8t + 0.004 \cos 10t + 0.003 \cos 12t + 0.002 \cos 14t \\ + 0.44 \sin 2t + 0.24 \sin 4t + 0.12 \sin 6t + 0.112 \sin 8t + 0.08 \sin 10t + 0.072 \sin 12t + 0.056 \sin 14t$$

fonksiyonlarının içerdikleri frekansları bulun.

#### Çözüm

Görüldüğü gibi direkt olarak  $f(t) = e^{-t/2}$  fonksiyonuna bakarak içerdikleri frekansları bulmak mümkün değildir. Oysa

$$x(t) = 0.504 + 0.11 \cos 2t + 0.03 \cos 4t + 0.01 \cos 6t + 0.007 \cos 8t + 0.004 \cos 10t + 0.003 \cos 12t + 0.002 \cos 14t \\ + 0.44 \sin 2t + 0.24 \sin 4t + 0.12 \sin 6t + 0.112 \sin 8t + 0.08 \sin 10t + 0.072 \sin 12t + 0.056 \sin 14t$$

Fonksiyonuna bakarak içerdiği frekansları bulmak mümkündür. Çünkü örneğin  $y(t) = \cos 100\pi t$  sinusoidal işarete bakıldığında  $y(t) = \cos 2\pi(50)t$  yaklaşımından  $f_0 = 50$  Hz olduğunu bulmak veya görmek çok daha kolaydır. Bunun anlamı eğer bir işaret  $y(t) = \cos 2\pi(50)t$  gibi formda gösterilirse, frekansının tayini daha kolay olmaktadır. Bu açıdan örnekte verilen  $x(t)$  işareti  $y(t) = \cos 2\pi(50)t$  gibi sinusoidal işaretlerden oluştuğu için frekansını tayin etmek mümkün olacaktır. Oysaki  $f(t) = e^{-t/2}$  olarak verilen fonksiyondan herhangi bir frekans çıkarımında bulunmak kolay değildir. Ancak, eğer  $f(t)$  işareti,  $x(t)$  veya  $y(t)$  gibi sinusoidal bileşenlerden oluşturulabilirse, hangi frekansları içerdiği görülebilir. Öyleyse, bunu mümkün kılacak bir yöntem ihtiyacı vardır. Böyle bir yöntem vardır ve Fourier serisi olarak adlandırılmaktadır. Bunun detaylarını  $x(t)$  işaretini analiz ederek vermeye çalışalım.

$$x(t) = 0.504 + 0.11 \cos 2t + 0.03 \cos 4t + 0.01 \cos 6t + 0.007 \cos 8t + 0.004 \cos 10t + 0.003 \cos 12t + 0.002 \cos 14t \\ + 0.44 \sin 2t + 0.24 \sin 4t + 0.12 \sin 6t + 0.112 \sin 8t + 0.08 \sin 10t + 0.072 \sin 12t + 0.056 \sin 14t$$

işareti göz önüne alınırsa  $x(t)$  işaretini oluşturan frekansların

$$\omega_0 = 0, \omega_1 = 2, \omega_2 = 4, \omega_3 = 6, \omega_4 = 8, \omega_5 = 10, \omega_6 = 12, \omega_7 = 14$$

oldukları açık biçimde görülür. Bu yazımı aşağıdaki gibi detaylandırabiliriz.

$$x(t) = 0.504 + 0.11 \cos 2t + 0.03 \cos 4t + 0.01 \cos 6t + 0.007 \cos 8t + 0.004 \cos 10t + 0.003 \cos 12t + 0.002 \cos 14t \\ + 0.44 \sin 2t + 0.24 \sin 4t + 0.12 \sin 6t + 0.112 \sin 8t + 0.08 \sin 10t + 0.072 \sin 12t + 0.056 \sin 14t \\ = 0.504 + 0.11 \cos 2t + 0.44 \sin 2t + 0.03 \cos 4t + 0.24 \sin 4t + 0.01 \cos 6t + 0.12 \sin 6t \\ + 0.007 \cos 8t + 0.112 \sin 8t + 0.004 \cos 10t + 0.08 \sin 10t \\ + 0.003 \cos 12t + 0.072 \sin 12t + 0.002 \cos 14t + 0.056 \sin 14t \\ = 0.504 + 0.11(\cos 2t + 4 \sin 2t) + 0.03(\cos 4t + 8 \sin 4t) + 0.01(\cos 6t + 12 \sin 6t) \\ + 0.007(\cos 8t + 16 \sin 8t) + 0.004(\cos 10t + 20 \sin 10t) \\ + 0.003(\cos 12t + 24 \sin 12t) + 0.002(\cos 14t + 28 \sin 14t) \\ = 0.504 + \frac{2}{17}(\cos 2t + 4 \sin 2t) + \frac{2}{65}(\cos 4t + 8 \sin 4t) + \frac{2}{145}(\cos 6t + 12 \sin 6t) \\ + \frac{2}{257}(\cos 8t + 16 \sin 8t) + \frac{2}{401}(\cos 10t + 20 \sin 10t) + \frac{2}{577}(\cos 12t + 24 \sin 12t) + \frac{2}{785}(\cos 14t + 28 \sin 14t) \\ = \left[ 1 + \sum_{n=1}^7 \frac{2}{1+16n^2} (\cos 2nt + 4n \sin 2nt) \right]$$

Görüldüğü gibi başlangıçtaki  $x(t)$  işareti Fourier serisi biçiminde

$$x(t) = \left[ 1 + \sum_{n=1}^7 \frac{2}{1+16n^2} (\cos 2nt + 4n \sin 2nt) \right]$$

olarak elde edilebilmiştir. Bu genel yazımdan  $x(t)$  işaretini oluşturan frekansların

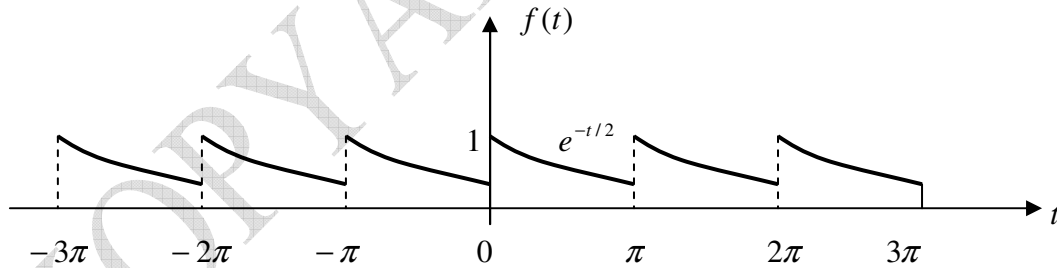


$$\omega_0 = 0, \omega_1 = 2, \omega_2 = 4, \omega_3 = 6, \omega_4 = 8, \omega_5 = 10, \omega_6 = 12, \omega_7 = 14$$

olduklarını bir kez daha teyit edebilmekteyiz. Bunu sağlarken,  $x(t)$  serisinin  $\cos 2nt$  ve  $\sin 2nt$  gibi trigonometrik ve ortogonal olan sinusoidal fonksiyonlardan oluşması avantajından yararlandığımızın farkındayız. Buradan bir fonksiyon veya işaretin bu tür sinusoidal fonksiyonlardan oluşturulmaları halinde, frekanslarının kolaylıkla belirlenebileceği gerçeği ortaya çıkmaktadır. Buna benzer olarak maalesef  $f(t) = e^{-t/2}$  fonksiyonunun frekanslarını, en azından direkt olarak görememekteyiz. Ancak eğer bir biçimde  $f(t)$  fonksiyonu,  $x(t)$  gibi sinusoidal fonksiyonlardan oluşturulursa, veya söz konusu sinusoidal fonksiyonlar üzerine kurulu Fourier serisi olarak ifade edilebilirlerse, frekanslarının belirlenebilmesi de mümkün olacaktır. Bununla  $f(t) = e^{-t/2}$  fonksiyonunun alternatif yani ikinci eşdeğer bir ifadesinin elde edilmesi vurgulanmaktadır. Diğer bir deyişle eğer  $f(t)$  sinusoidal fonksiyonlardan kurulu Fourier serisi olarak alternatif bir formda ifade edilebilirse,  $f(t) = e^{-t/2}$  gibi sıradışı fonksiyonların da hangi frekanslardan oluştukları belirlenebilecektir. Bunun mümkün olup olmadığı sorusunu araştırmalıyız. Bunun için gerek ve yeter şart  $f(t)$  işaretinin gösterilen  $f(t) = e^{-t/2}$  işaretinin belirli aralıkta periodik olma koşulu aranır. Buna göre eğer işaret aşağıdaki gibi

$$f(t) = e^{-t/2}, \quad n\pi \leq t \leq (n+1)\pi$$

formundaki gibi periodik ( $0, \pi$  aralığı) alınırsa, bunun anlamı  $f(t)$  işaretinde  $x(t)$  gibi sinusoidlerden oluşturulması mümkün olacaktır. Bu yolla  $f(t)$  işareti ortogonal özellikteki sinusoidal terimleri içeren Fourier serisi olarak da ifade edilebilecektir. Tüm bunların anlamı, bu yolla  $f(t)$  işaretinin içerdiği frekans bileşenleri belirlenebilecektir. Bunun için ilk olarak  $f(t) = e^{-t/2}$  işaretini  $f(t) = e^{-t/2}, \quad n\pi \leq t \leq (n+1)\pi$  gibi periodik biçimde aşağıdaki gibi gösterebiliriz.



Şekil 42 Periodik bir işaretin Fourier serisi

Bu andan itibaren  $f(t)$  işaretinin frekanslarını belirleyecek sinusoidal işaret tabanlı Fourier serisinin aşağıdaki gibi olduğunu görmekteyiz.

$$f(t) = 0.504 \left[ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{1+16n^2} (\cos 2nt + 4n \sin 2nt) \right], \quad 0 \leq t \leq \pi$$

Farkedildiği gibi  $f(t)$ ,  $x(t)$  işaretinin daha genel hali olarak ( $n = 0 - 8$ ) terimleri yerine ( $n = (0, \infty)$ ) gibi daha geniş aralıkta elde edilmiştir. Bunun için belki

$$x(t) \cong f(t)$$

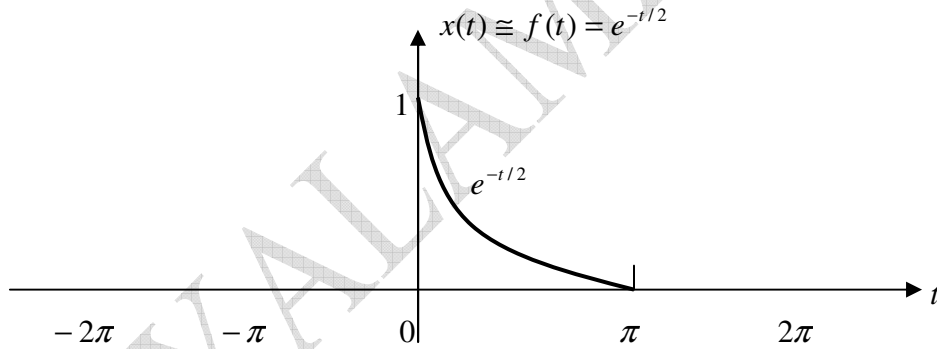
kabulünü yapabiliriz. Buna göre  $x(t) \cong f(t)$  kabulü gereği

$$\begin{aligned} x(t) &= 0.504 + 0.11 \cos 2t + 0.03 \cos 4t + 0.01 \cos 6t + 0.007 \cos 8t + 0.004 \cos 10t + 0.003 \cos 12t + 0.002 \cos 14t \\ &\quad + 0.44 \sin 2t + 0.24 \sin 4t + 0.12 \sin 6t + 0.112 \sin 8t + 0.08 \sin 10t + 0.072 \sin 12t + 0.056 \sin 14t \\ &\cong 0.504 \left[ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{1+16n^2} (\cos 2nt + 4n \sin 2nt) \right] = f(t) \end{aligned}$$

yazılabilir. Bu yaklaşımla  $f(t)$  işaretinin mevcut frekansları

$$\omega_0 = 0, \omega_1 = 2, \omega_2 = 4, \omega_3 = 6, \omega_4 = 8, \omega_5 = 10, \omega_6 = 12, \omega_7 = 14, \dots, \omega_n$$

olarak sonsuz sayıdaki frekanslardan oluşmaktadır. Buradan yine  $x(t) \cong f(t)$  kabulü gereği  $x(t)$  dolayısıyla,  $f(t)$  işaretinin zaman domenindeki görünüşleri aşağıdaki gibi olacaktır.

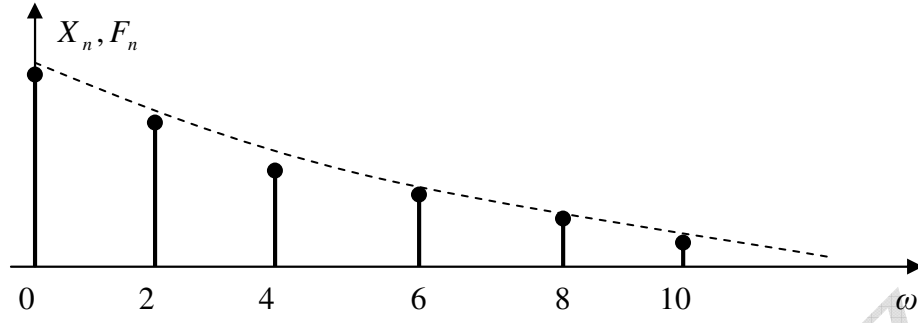


Şekil 43  $x(t) \cong f(t)$  işareti

Buradan aslında  $f(t) = e^{-t/2}$  fonksiyonunun  $x(t) \cong f(t)$  gereği

$$\begin{aligned} x(t) &= 0.504 + 0.11 \cos 2t + 0.03 \cos 4t + 0.01 \cos 6t + 0.007 \cos 8t + 0.004 \cos 10t + 0.003 \cos 12t + 0.002 \cos 14t \\ &\quad + 0.44 \sin 2t + 0.24 \sin 4t + 0.12 \sin 6t + 0.112 \sin 8t + 0.08 \sin 10t + 0.072 \sin 12t + 0.056 \sin 14t \\ &\cong e^{-t/2} \end{aligned}$$

olduğu vurgulanmak istenmektedir. Diğer bir deyişle çeşitli  $\cos 2nt$  ve  $\sin 2nt$  gibi sinusoidal işaretlerin süperpozisyonundan oluşan  $x(t)$  işaretinin  $f(t) = e^{-t/2}$  ile tanımlı fonksiyona eşit veya denk olduğu vurgulanmaktadır. Bu şekilde  $x(t)$  Fourier serisi olarak  $f(t) = e^{-t/2}$  işaretinin alternatif yazımı elde edilmiştir. Buradan  $x(t) \cong f(t)$  yaklaşımıyla Fourier serisi olarak elde edilen  $f(t)$  işaretinin içerdiği frekansları içeren spektrumun da aşağıdaki gibi olabileceğini gözlemlemekteyiz.



Şekil 44 Periyodik bir işaretin Fourier serisindeki Frekans genlikleri

Sonuçta  $f(t) = e^{-t/2}$  gibi standart olmayan bir fonksiyon periyodik düşünülerek, ortogonal sinusoidal terimlerden oluşan Fourier serisi biçiminde ifade edilerek içerdiği frekanslar, belirlenmiştir. Bu yaklaşım,  $f(t)$  gibi diğer standart olmayan periyodik fonksiyonların frekans analizlerini mümkün kılan önemli bir yöntemdir.

#### Fourier serisinin özellikleri

1. Fourier serisi, yalnızca periyodik işaretlerin frekans içeriğini göstermek üzere kullanılan tek yönlü bir zaman – frekans analiz tekniğidir.
2. Fourier serisi işaretin zaman domenindeki değişimini, frekans ve faz bilgisine dayalı analiz eden bir tekniktir.
3. Fourier serisinin spektrumu ayırık ve sonsuzdur. İşaretin genliği, harmonik mantığından dolayı sürekli değil belirli frekanslarda tanımlıdır.
4. Fourier serisi belirli bir aralıkta veya periyodik dilimdeki sinüsel harmoniklerin toplamından oluşmaktadır.
5. Periyodik herhangi bir işaret, Fourier serisinin katsayıları olan  $a_0, a_n$  ve  $b_n$  ile trigonometrik sinüsel terimlerin toplamı cinsinden ifade edilebilmektedir.
6.  $a_0$  katsayısı işaretin ortalama değeri durumundadır ve doğru akım (d.c.) bileşeni olarak anılır. Çünkü  $a_0$ , sıfır anındaki tüm terim katsayılarının toplamı ile oluşan ortalamaya denktir.
7. Belirli bir periyot içinde yer alan işaretin zaman domenindeki ifadesinin, aynı periyot daki hangi ardışık, harmonik frekanslarından oluştuğunu göstermeye yarayan bir tekniktir.
8.  $a_0, a_n$  ve  $b_n$  katsayıları frekans domenindeki periyodik süre içinde yer alan harmonik frekansların büyüklüklerini (genliklerini) göstermektedirler.

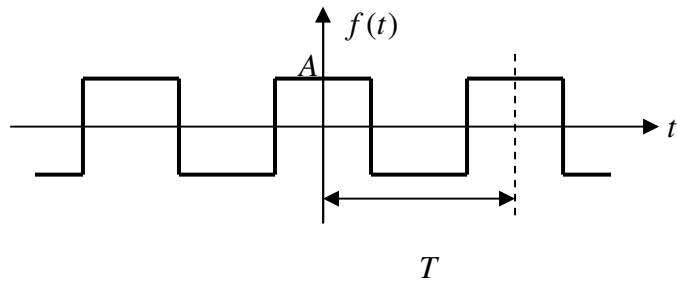
9.  $a_0, a_n$  ve  $b_n$  katsayıları yardımıyla ters transformasyon uygulanarak, işaretin frekans – zaman dönüşümüyle, başlangıç işareti elde edilir.
10. Fourier serisinde  $C_n$  veya  $(a_n, b_n)$  katsayılarının büyüklüğü  $(\omega_0, \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)$  harmoniklerin büyüklüğüyle ters orantılı olarak değişir. Küçük harmoniklerin katsayıları büyük iken, büyük harmoniklerin katsayıları ise küçüktür.
11. Fourier serisinin  $\omega_0, \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$  biçiminde harmoniklerden oluşması işaretin band genişliği hakkında  $\omega_n - \omega_0$  (en büyük harmonikle en küçük harmonik arasındaki fark) bilgisini verir.
12. Hem sürekli hem ayrık işaret analizinde kullanılan bir tekniktir.
13. Fourier serisi bir sistem için  $H(\omega) = |H(\omega)| e^{j\angle H(\omega)}$  biçiminde  $h(t)$  olarak verilmiş periodik bir işaretin,  $|H(\omega)|$  genlik frekans cevabı ve  $\angle H(\omega)$  faz frekans cevaplarını bulma üzerine kurulu bir teknik olarak görülebilir.

### Çok Bilinen İşaretlerin Fourier Serisiyle Gösterimi

Bu bölümde çok bilinen bazı periodik işaretlerin sinusoidlere bağlı olarak Fourier serisi ile gösterimler ele alınmıştır. Kare, dikdörtgen, üçgen ve testere dişi işaretler bunların en tipikleridir. Buna uygun olarak direkt olarak ilgili dalgaların trigonometrik serideki temel harmonik cinsinden sinusoidlere bağlı Fourier serisi karşılıkları verilecektir. Bunların detaylı analizleri ilerleyen bölümlerde incelenecektir.

#### 1. Kare dalga

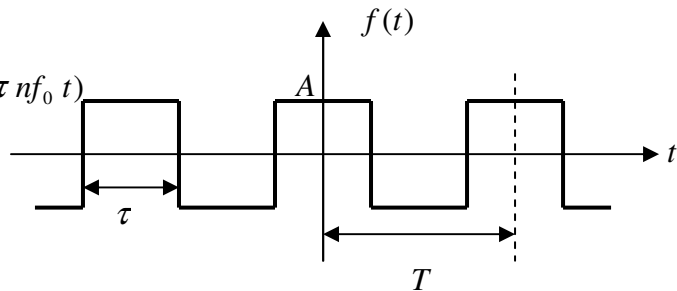
$$f(t) = \frac{4A}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin[(2n-1)2\pi f_0 t]}{(2n-1)}$$



#### 2. Darbe dizisi

$$f(t) = \frac{A\tau}{T} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2A}{n\pi} \sin(n\pi f_0 \tau) \cos 2\pi n f_0 t$$

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos 2\pi n f_0 t$$



### Exponensiyel gösterim

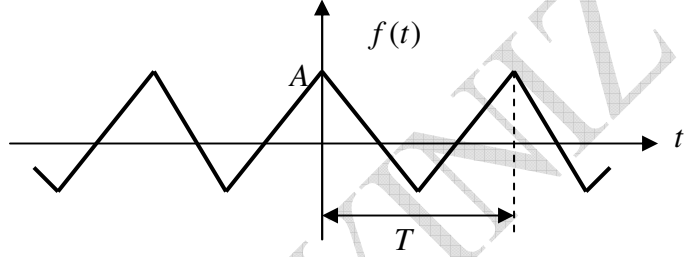
$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n e^{j2\pi n f_0 t}$$

$$D_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-j2\pi n f_0 t} dt$$

$$D_n = \frac{A\tau}{T} \text{sinc}(n f_0 \tau)$$

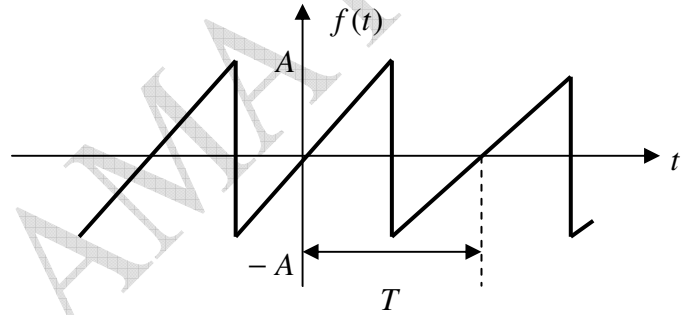
### 3. Üçgen dalga

$$f(t) = \frac{8A}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \frac{\sin(2\pi f_0 t)}{n^2}$$

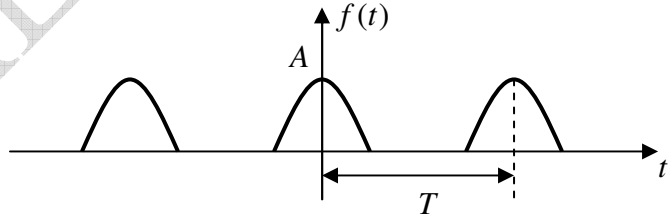


### 4. Testere dişi dalga

$$f(t) = -\frac{2A}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2\pi f_0 t)}{n}$$



### 5. Yarıym doğrultulmuş dalga



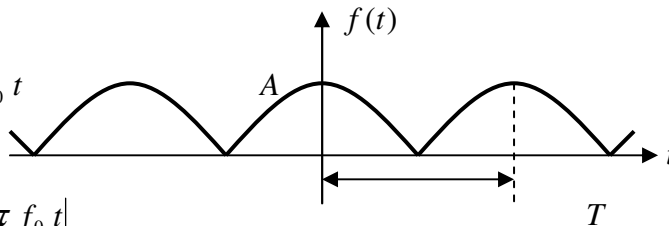
$$f(t) = \frac{A}{\pi} + \frac{A \cos 2\pi n f_0 t}{2} - \frac{2A}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(4n^2 - 1)} \cos 2\pi n f_0 t$$

$$f(t) = a_0 + a_1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos 2\pi n f_0 t$$

### 6. Tam doğrultulmuş dalga

$$f(t) = \frac{2A}{\pi} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4A}{\pi(4n^2 - 1)} \cos 2\pi n f_0 t$$

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos 2\pi n f_0 t = |\sin 2\pi f_0 t|$$



Şekil 45 Çeşitli periyodik işaretlerin Fourier serisi Gösterimleri

## Fourier Serisi ve GEN Yaklaşımı

Az önce ele alınan çok bilinen dalgalar gibi daha bir çok dalgaanın da benzer periodik sinusoidlerle elde edilmesinin mümkün olduğunu görmekteyiz. Bunların trigonometrik seriyi oluşturan periodik sinusoidlerle elde edilişi Fourier serisi ile sağlanmaktadır. İlgili detaylı analizler aşağıdaki bölümlerden itibaren irdelenmektedir. Trigonometrik seriyi oluşturan sinusoidlerin uygun harmonik ve katsayılarla seçilmesi durumunda, elde edilemeyecek hiçbir fonksiyonunun olamayacağı gerçeği ortaya çıkar ve bu tespit çok anlamlıdır. Duruma gen haritası açısından bakıldığında, aralarındaki milyonlarca seçenek ve kombinasyonlara dayalı genlerin bir araya gelmesiyle bir birinden farklı canlıları oluşması gerçeği, Fourier serisi yaklaşımıyla büyük ölçüde örtüşmektedir. Burada da trigonometrik seriyi oluşturan sinusoidlerin uygun harmonik ve dolayısıyla ona bağlı genliklerin de milyonlarca seçenek ve kombinasyona dayandığı görülmektedir. Ve bu büyük işaret kümesinden, genlerin farklı canlılar oluşturmaları gibi, her biri farklı sonsuz sayıda yeni işaretlerin (türler gibi) oluşturulabileceği görülmektedir. Bununla gen ve Fourier serisi arasındaki bağın analogik açıdan benzer olduğunu görmekteyiz.

## İşaretlerin Periodikliği ve periodik İşaretlerin Temel Frekansı ve Temel Perodu

Bu bölüm boyunca periodik işaretlerin analizini yapmaya çalışıyoruz. Bu nedenle ele alınan işaretlerin periodik olduklarını düşünmekteyiz. Bunun için bu tür işaretlerin periodikliğinden emin olmamız gerekiyor. Bu yüzden bu tür işaretlerin ilk olarak periodikliğini test etmemiz gerekiyor. Gerçekte bir işaretin periodik olduğunu nasıl anlayabilmekteyiz. Genel anlamda  $f(t)$  gibi sürekli ve analog bir işaretin periodikliğini genel ve basit bir yaklaşımla

$$f(t) = f(t + T_0)$$

bağıntısıyla anlayabilmekteyiz. Bu anlamda yaklaşımı

$$f(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(n\omega_0 t + \theta_n), \quad t = \text{tüm değerler}$$

tipindeki Fourier serisinin periodikliğine de uyarlayabiliriz.

$$\begin{aligned} f(t + T_0) &= C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(n\omega_0(t + T_0) + \theta_n) \\ &= C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(n\omega_0 t + n\omega_0 T_0 + \theta_n) \\ &= C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(n\omega_0 t + n \frac{2\pi}{T_0} T_0 2\pi n\omega_0 T_0 + \theta_n) \\ &= C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(n\omega_0 t + 2\pi n) + \theta_n \\ &= f(t) \end{aligned}$$

$$n\omega_0 T_0 = n \frac{2\pi}{T_0} T_0 = 2\pi n \rightarrow n \in \mathbb{Z}$$

görüldüğü gibi  $f(t) = f(t + T_0)$  periyodiklik koşulu sağlandığından trigonometrik Fourier serisi ve içerdiği trigonometrik fonksiyon temelli harmoniklerin artık periyodik olduklarını düşünebiliriz.

### Örnek

$$f(t) = 2 + 7 \cos\left(\frac{t}{2} + \theta_1\right) + 3 \cos\left(\frac{2t}{3} + \theta_2\right) + 5 \cos\left(\frac{7t}{6} + \theta_3\right)$$

İşaretinin periyodikliğini araştırın.

### Çözüm

Verilen işaret  $f(t) = 2 + 7 \cos(\omega_1 t + \theta_1) + 3 \cos(\omega_2 t + \theta_2) + 5 \cos(\omega_3 t + \theta_3)$  olarak düşünüldüğünde frekansların  $(\omega_1 = \frac{1}{2}, \omega_2 = \frac{2}{3}, \omega_3 = \frac{7}{6})$  olduğu görülecektir. İşaretin periyodik olması,  $n=0$  harmoniği hariç için harmoniklerdeki “ $t$ ” değişkeninin katsayıları durumundaki frekansların yani  $(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{7}{6})$  oranlarının rasyonel bir sayı olması ile mümkündür.

Buna bakarsak,

$$\frac{1/2}{2/3} = \frac{3}{4} \quad \text{ve} \quad \frac{2/3}{7/6} = \frac{4}{7}$$

elde edilen  $\frac{3}{4}$  ve  $\frac{4}{7}$  rasyonel sayılar olduğundan, verilen işaretin periyodik olduğu görülür.

Bunun ardından, temel frekansın ne olduğunun hesaplanması gerekir. Bunun için verilen zamana ait katsayılar

$$3\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{1}{2}, \quad 4\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{2}{3} \quad \text{ve} \quad 7\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{7}{6}$$

olarak düşünüldüğünde tüm harmonikleri kapsayan temel frekansın  $\omega_0 = \frac{1}{6}$  olduğunu görmekteyiz. Temel frekans 3. 4. ve 7. harmoniklerle gösterildiğinden verilen  $f(t)$  işareti üçüncü, dördüncü ve yedinci harmoniklerden oluşmaktadır. Temel frekans  $\frac{1}{6}$  olduğuna göre temel periyod,

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi}{1/6} = 12\pi$$

### Örnek

$$f(t) = 6 \sin(2t + \theta_1) + 4 \cos(\pi t + \theta_2)$$

İşaretinin periodikliğini araştırın.

### Çözüm

Verilen işaret  $f(t) = 6 \sin(\omega_1 t + \theta_1) + 4 \cos(\omega_2 t + \theta_2)$  olarak düşünüldüğünde frekansların ( $\omega_1 = 2$ ,  $\omega_2 = \pi$ ) olduğu görülecektir. İşaretin periodik olması,  $n = 0$  harmoniği hariç için harmoniklerdeki “ $t$ ” değişkeninin katsayıları durumundaki frekansların yani  $(2, \pi)$  oranlarının rasyonel bir sayı olması ile mümkündür. Buna bakarsak,

$$\frac{2}{\pi} \notin \mathbb{Z}$$

elde edilen  $\frac{2}{\pi}$  rasyonel sayı olmadığından, verilen işaret periodik olmayacaktır. Bu yüzden ne temel bir frekans ne de temel bir period söz konusudur.

### Örnek

$$f(t) = 5 \cos(3\sqrt{3} t + \theta_1) + 4 \sin(6\sqrt{3} t + \theta_2) + 8 \sin(9\sqrt{3} t + \theta_3)$$

İşaretinin periodikliğini araştırın.

### Çözüm

Verilen işaret  $f(t) = 5 \cos(\omega_1 t + \theta_1) + 4 \sin(\omega_2 t + \theta_2) + 8 \sin(\omega_3 t + \theta_3)$  olarak düşünüldüğünde frekansların ( $\omega_1 = 3\sqrt{3}$ ,  $\omega_2 = 6\sqrt{3}$ ,  $\omega_3 = 9\sqrt{3}$ ) olduğu görülecektir. İşaretin periodik olması,  $n = 0$  harmoniği hariç için harmoniklerdeki “ $t$ ” değişkeninin katsayıları durumundaki frekansların yani  $(3\sqrt{3}, 6\sqrt{3}, 9\sqrt{3})$  oranlarının rasyonel bir sayı olması ile mümkündür. Buna bakarsak,

$$\frac{3\sqrt{3}}{6\sqrt{3}} = \frac{1}{2} \quad \text{ve} \quad \frac{6\sqrt{3}}{9\sqrt{3}} = \frac{2}{3}$$

elde edilen  $\frac{1}{2}$  ve  $\frac{2}{3}$  rasyonel sayılar olduğundan, verilen işaretin periodik olduğu görülür.

Bunun ardından, temel frekansın ne olduğunun hesaplanması gerekir. Bunun için verilen zamana ait katsayılar

$$3\sqrt{3}, \quad 2(3\sqrt{3}) = 6\sqrt{3} \quad \text{ve} \quad 3(3\sqrt{3}) = 9\sqrt{3}$$



olarak düşünüldüğünde tüm harmonikleri kapsayan temel frekansın  $\omega_0 = 3\sqrt{3}$  olduğunu görmekteyiz. Temel frekans 1. 2. ve 3. harmoniklerle gösterildiğinden verilen  $f(t)$  işareti birinci, ikinci ve üçüncü harmoniklerden oluşmaktadır. Temel frekans  $\omega_0 = 3\sqrt{3}$  olduğuna göre temel period,

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}} = \frac{2}{3\sqrt{3}}\pi$$

### Örnek

$$f(t) = 6\sin(2t + \theta_1) + 4\cos(\pi t + \theta_2)$$

İşaretinin periodikliğini araştırın.

### Çözüm

Verilen işaret  $f(t) = 6\sin(\omega_1 t + \theta_1) + 4\cos(\omega_2 t + \theta_2)$  olarak düşünüldüğünde frekansların ( $\omega_1 = 2$ ,  $\omega_2 = \pi$ ) olduğu görülecektir. İşaretin periodik olması,  $n = 0$  harmoniği hariç için harmoniklerdeki “ $t$ ” değişkeninin katsayıları durumundaki frekansların yani  $(2, \pi)$  oranlarının rasyonel bir sayı olması ile mümkündür. Buna bakarsak,

$$\frac{2}{\pi} \notin \mathbb{Z}$$

elde edilen  $\frac{2}{\pi}$  rasyonel sayı olmadığından, verilen işaret periodik olmayacaktır. Bu yüzden ne temel bir frekans ne de temel bir period söz konusudur.

### Örnek

$$f(t) = 4\cos\left(\frac{2}{3}t + 30^\circ\right) + 9\sin\left(\frac{4}{5}t + 60^\circ\right)$$

İşaretinin periodikliğini araştırın.

### Çözüm

Verilen işaret  $f(t) = 4\cos(\omega_1 t + \theta_1) + 9\sin(\omega_2 t + \theta_2)$  olarak düşünüldüğünde frekansların ( $\omega_1 = 2/3$ ,  $\omega_2 = 4/3$ ) olduğu görülecektir. İşaretin periodik olması,  $n = 0$  harmoniği hariç için harmoniklerdeki “ $t$ ” değişkeninin katsayıları durumundaki frekansların yani  $(2/3, 4/3)$  oranlarının rasyonel bir sayı olması ile mümkündür. Buna bakarsak,

$$\frac{2/3}{4/3} = \frac{5}{6}$$

elde edilen  $\frac{5}{6}$  rasyonel sayılar olduğundan, verilen işaretin periodik olduğu görülür. Bunun ardından, temel frekansın ne olduğunun hesaplanması gerekir. Bunun için verilen zamana ait  $(2/3, 4/5)$  katsayılarının enküçük ortak böleni olarak,  $\frac{2}{3}$  ,  $\frac{4}{5}$  frekanslarının en küçük ortak katı  $\frac{10}{15}$  ,  $\frac{12}{15}$  ifadelerinden  $\frac{2}{15}$  olduğundan

$$5\left(\frac{2}{15}\right), 6\left(\frac{2}{15}\right)$$

tüm harmonikleri kapsayan temel frekansın  $\omega_0 = 2/15$  olduğunu görmekteyiz. Temel frekans 5. ve 6. harmoniklerle gösterildiğinden verilen  $f(t)$  işareti beşinci ve altıncı harmoniklerden oluşmaktadır. Temel frekans  $\omega_0 = 2/15$  olduğuna göre temel period,

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi}{2/15} = 15\pi$$

**TESPİT :** Örneklerden elde edilen  $\omega_0 = 1/6$  ,  $\omega_0 = 3\sqrt{3}$  ve  $\omega_0 = 2/15$  frekanslarından elde edilen değerlerden sürekli bir işaretin frekansının tam sayı, rasyonel ve irrasyonel olabileceğini görebilmekteyiz. Bu yüzden sürekli bir işaretin frekansını genel anlamda

$$\omega = (-\infty, \infty)$$

gibi gösterilen sonsuz aralıkta olacağını görmekteyiz. Sürekli işaretlerin frekans aralığı için bu önemli bir tespittir. Diğer taraftan sürekli bir işaretin periodu olarak da temel period olarak ilgili örneklerden elde edilen  $T_0 = 12\pi$  ,  $T_0 = \frac{2}{3\sqrt{3}}\pi$  ve  $T_0 = 15\pi$  değerlerine bakıldığında da frekansla benzerlik gösterdiğini görmekteyiz. Bu anlamda sürekli işaretlerin periodu içinde

$$T = (-\infty, \infty)$$

ifadesi söz konusu olacaktır. Bununla beraber  $f(t) = 6\sin(2t + \theta_1) + 4\cos(\pi t + \theta_2)$  örneğinde olduğu gibi, her sürekli işaretin periodik olmadığını da görmekteyiz. Bu durum ayrık işaretler içinde geçerlidir. Her ayrık işaretin özellikle de ayrık sinusoidlerin tamamının periodik olmadığını söyleyebiliriz ( $f(k) = \sin(\sqrt{\pi}k)$  gibi). Bunu ayrık işaretlerin ele alınacağı bölümlerde daha yakından görebileceğiz.

## Fourier Serisinde Simetri Durumu

Fourier serisi

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t \quad ; \quad t_1 \leq t \leq t_1 + T_0 \quad ; \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

ve buradan katsayılar aşağıdaki gibi göz önüne alınırsa

$$a_0 = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} f(t) dt$$

$$a_n = \frac{2}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} f(t) \cos n\omega_0 t dt$$

$$b_n = \frac{2}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} f(t) \sin n\omega_0 t dt$$

$$\theta_n = \tan^{-1} \left( \frac{-b_n}{a_n} \right)$$

Fourier serisinin  $a_n \cos n\omega_0 t$  ve  $b_n \sin n\omega_0 t$  gibi sinusoidler içerdiğinden, bu tip sinusoidlerin simetri ve çift fonksiyon, ters simetri ve tek fonksiyon özelliklerin olduğunu bize hatırlatmaktadır. Bu gibi durumlarda formüllerde yer alan  $a_n$  ve  $b_n$  katsayılarının hesaplanmasında bazı pratik yaklaşımlar söz konusu olabilecektir. Eğer verilen  $f(t)$  fonksiyonu simetrik ve çift (even) bir fonksiyon ise yukarıdaki denklemler,

$$a_0 = \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0/2} f(t) dt$$

$$a_n = \frac{4}{T_0} \int_0^{T_0/2} f(t) \cos n\omega_0 t dt$$

$$b_n = 0$$

olacaktır. Eğer verilen  $f(t)$  periodik fonksiyonu tek (odd) fonksiyon ise bu kez yukarıdaki denklemler aşağıdaki gibi olacaktır.

$$a_0 = a_n = 0$$

$$b_n = \frac{4}{T_0} \int_0^{T_0/2} f(t) \sin n\omega_0 t dt$$

Bu kurallarla verilen periodik işaretin çözüme başlamadan tipi ve görünümünden bazı ön bilgilerin elde edilmesine katkı sağlayacağını söyleyebiliriz. Bu da, hesaplamaları kolaylaştıran pratik bir yaklaşımdır.