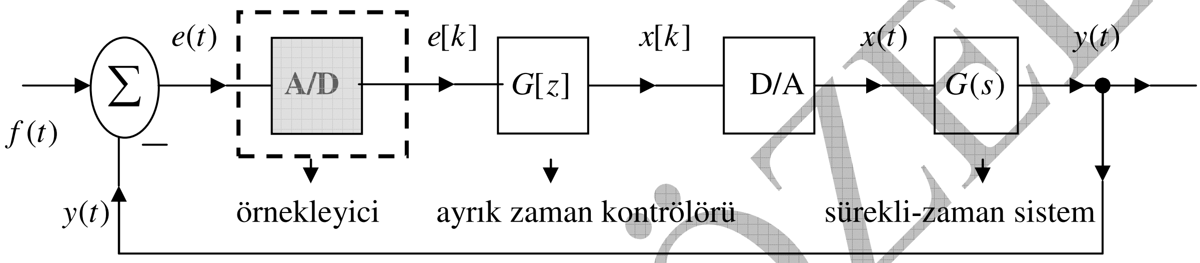
BÖLÜM 7

ÖRNEKLEME TEORİSİ

ÖRNEKLEMEYE GİRİŞ

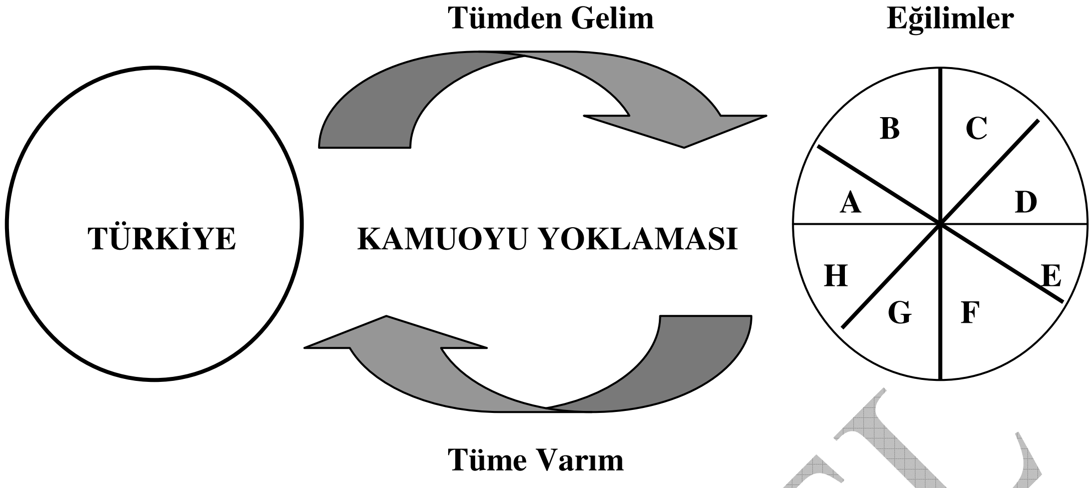
Modern elektrik mühendisliği ve sistemleri, sürekli ve ayrık zaman sistemlerinin kombinasyonundan oluşan hibrid görünümdediriler. Aşağıda böyle bir sistemi görmekteyiz.



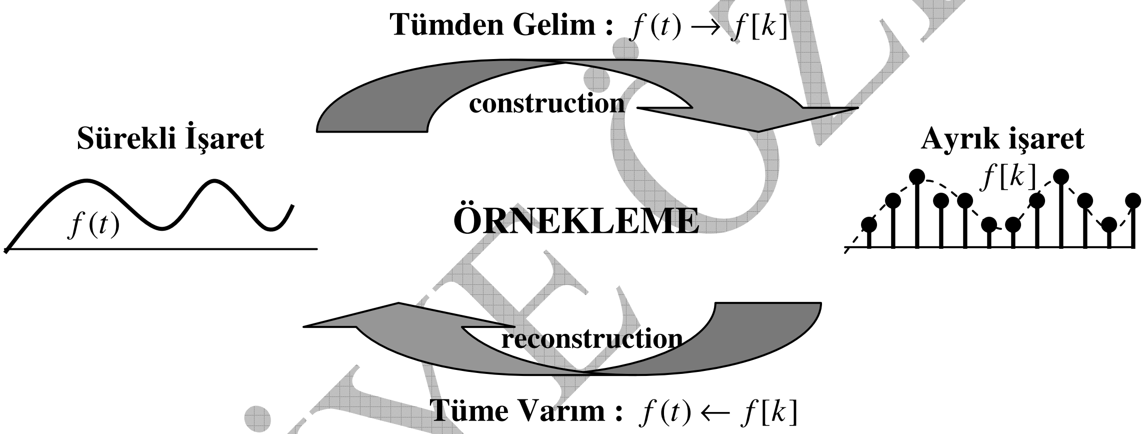
Şekil 1 Hibrid sistem ve örnekleyici

İncelendiğinde genel bir lineer sistem görüntüsünün gözlemlendiği yapıda, gerek sürekli gerekse ayrık formattaki işaretlerin mevcut olduğu görülmektedir. Şu ana kadar sürekli-zaman işaretleri, teknikleri ve bu işaretleri işleyen sürekli sistemler göz önüne alındı. Bu noktadan itibaren yukarıda blok diagramı verilen, ve bu şemada kesik çizgi ile belirtilen ve gri rankle tonlanan bölümü içeren işaretler, işaret işleme teknikleri ve sistemleri göz önüne alınacaktır. Blok şemada örnekleyici (sampler) olarak vurgulanan bu kısım, bu bölümde detaylarıyla ele alınacaktır.

Örnekleyici rolüne alternatif örneği günlük hayattaki yaklaşımlarıda gösterebiliriz. örneğin Türkiye genelindeki herhangi bir husus hakkındaki genel görüşleri tespit etmek amacıyla aşağıda (a) da verilen kamuoyu araştırmasına dayalı bir durum söz konusudur.



(a)



(b)

Şekil 2 Örnekleme yaklaşımı

Şekillere göre, ana fikir tümden gelim – tüme varım prensibine dayandırılarak anlatılmak istenmektedir. Gerçekten de işaret işlemede ve de sistemlerin analizinde önemli bir başlık olan örnekleme teorisi böyle bir yaklaşımla açıklanabilir. Ele alınan her iki şekilde de Türkiye ve $f(t)$ işareti sürekli formda göz önüne alınırken, **A,B,C,D,E,F,G,H** ile Türkiyenin, $f[k]$ ile de $f(t)$ sürekli işaretinin ayrık formları oluşturulmuştur. Şimdi verilen şekilde yer alan iki şemaya biraz daha yakından bakarak incelememize devam edelim.

Önce kamuoyu yaklaşımını ele alalım. Bu şemaya göre araştırılan konu hakkındaki görüşleri belirlemek için ana kütle olarak tüm Türkiye yerine belirli bölgelerdeki, belirli niteliklere sahip kişileri temel alan daha sınırlı ve de daha ekonomik olabilecek bir örneklem kütlemi yaratılarak kamuoyu yoklaması yerine getirilir. Burada belirli güven aralıklarını göz önüne alınarak belirlenecek örneklem kütlesiyne göre yapılacak istatistik tabanlı kamuoyu araştırmasının beklenen sonuçları ve eğilimleri veebildiğini görüyoruz. Bunun sonucunda eğilimler tespit edilerek karar alma ve verme süreçlerine geçilir. Burada önemli olan alt kütle olarak örneklem kütlesinin tespiti önemlidir. Çünkü çok daha küçük hacimde belirlenen bu kütlenin sonuçları itibariyle tüm toplumun veya ülkenin eğilimini göstermesi gerekmektedir.

Yani seçilen çok az sayıdaki örnek (örneklem kütlsi) geneli (ülkeyi, şehri, ilçeyi, mahalleyi) temsil edebilme özelliğinde olması gerekiyor. Bunu sağlayabilme adına iki önemli kriter mevcutur;

1. Sınırlı ana kütle
2. Örneklem güven oranı

Bu iki kriterin sağlanmasıyla sağlıklı bir kamuoyu yoklamasının yapılabileceği görülmüştür. Günümüzde böyle kamuoyu yoklamalarının beklenilen sonuçları büyük oranda (%95 gibi) sağladığı görülmektedir. Birinci "sınırlı ana kütle" kriterine göre kamu oyu araştırmasının yapılacağı kütlenin (dünya, kıta, ülke, şehir,…) sınırlı büyüklükte olması temel şarttır. Sonsuz büyüklükler yerine sonlu veya sınırlı büyüklükler üzerine araştırmalar bilimsel ve ekonomik açıdan daha kesin ve tutarlı sonuçlar verecektir. Bu anlamda örneğimizde TÜRKİYE araştırmaya konu değişkenleriyle böyle sınırlı bir büyüklüktür. Bu yaklaşımla birinci kriter tanımlanmış olmaktadır.

İkinci kriterle ilgili olarak da ana kütleden elde edilecek örneklem kütlesinin belirlenme biçimi ön plana çıkmaktadır. Sınırlı ana kütleden genelde %1, %0.1, %0.001 gibi küçük miktarlarda belirlenen örneklem kütlesinin güvenilir olması, ana kütleyi temsil edebilme özelliğini göstermektedir. Bununla sınırlı örneklem yardımıyla ana kütlenin eğilimi belirlenmek istenmektedir. Bunu elde edemediğimiz taktirde, toplumun veya ülkenin konu üzerine gerçek eğiliminin belirlenmesi mümkün olmayacağı gibi araştırmanın sonuçları bir güveni işaret etmez. Kamuoyu araştırmasının üzerine kurulduğu yöntem ve tekniklerin böyle olumsuzlukları bertaraf etme özelliğinde olması gerekir. Bu beklenti yüksek güven oranlarıyla garanti edilmektedir. Bir anlamda bu ilke ile sağlıklı yoklama yapmanın ikinci temel kuralı olan "Yüksek güven oranı" sağlanmış olmaktadır. Genellikle böylesine çalışmalarda bu hususu sağlamak adına güven oranı olarak %1 ve %5 gibi yüksek değerler (ilgili güven değerleri %99 ve %95 güven değerlerini yansıtır) belirlenir. Böylesine yüksek güven oranlarında belirlenecek örneklem hacminin yeterli olduğu, tersinden düşünüldüğünde ise, içinden çekildiği ana kütleyi temsil edebilme yeteneğinde olduğu görülür. Bununla ikinci kriter olan "Örneklem güven oranı" kriteri de sağlanmış olmaktadır.

Şimdi durumu işaret işleme teknikleri açısından ele alarak ikinci şemayı göz önüne alalım. Yukarıda ele alınan benzer süreçlerin sürekli işaretin bir sayı dizisi formatındaki ayrık işarete dönüştürülmesi sürecinde de görmekteyiz. "sınırlı ana kütle ve örneklem güven oranı" kriterlerinin işaret işleme tekniği açısından karşılıkları

1. Band sınırlı temel işaret
2. Örnekleme frekansı

biçiminde belirlenmektedir. Buna göre ilk kriterle ilgili olarak göz önüne alınan sürekli-zaman işareti $f(t)$ **band sınırlı** olmalıdır. Bu durum birinci örnek dikkate alındığında sınırlı ana kütleyi çağrıştırmaktadır. İkinci kriterle ilgili olarak ise, temel işareti örnekleyecek örnekleme işaretinin frekansının **örnekleme frekansı** olarak belirlenmesidir. Bununla temel işaretten yeterli sayıda örnek alınması temin edilmektedir. Bunun sonucunda elde edilen örnek sayısı, içinden geldiği temel işareti tekrar oluşturma özelliğinde olması koşulu aranır. Bu durum ilk örnekteki uygun örneklem kütlesinin belirlenmesindeki süreçleri çağrıştırmaktadır. Band sınırlı temel işaret ve uygun örnekleme frekansı olmaksızın yapılacak bir örneklemede, oluşan örneklerden orijinal temel işaretin tekrar elde edilmesi garanti edilemez. Bunun sonucunda istenmeyen veri kayıpları kaçınılmaz olur.

Bu açıdan bakıldığında kamuoyu araştırmasındaki süreçlerin benzer şekilde işaret örnekleme yaklaşımında da aynen korunduğu görülmektedir. İlk örnekte sınırlı ana kütle ve yüksek güven aralığıyla belirlenen örneklem hacmine ilişki çözümlerin, işaretlerin örneklenmesinde nasıl işlediğine biraz daha detay vermemiz yararlı olacaktır.

Sürekli işaretlerden sonlu sayıda örneği içeren bir ayrık işaretin veya genel anlamda bir dizinin elde edilmesi sürecinde, sonuz sayıdaki noktadan oluşan sürekli bir işareti, daha az sayıdaki ayrık nokta ile gösterebilme problemi söz konusudur. gelişen sayısal tabanlı işleyiciler ve hesaplayıcılar dolayısıyla, onlarında sonlu sayıda işlem yapabilme kapasitelerini göz önüne alarak sonsuz data yerine sonlu ve efektif işlenebilir sayıda örnek üzerinden işlem yapılması daha etkin ve verimli sonuçlar doğurmaktadır. Bu yüzden sonsuz noktadan oluşan sürekli işaret yerine (ana kütle) onun sonlu sayıdaki örneğini (örneklem kütlesi) göz önüne almak daha doğru bir yaklaşım olacaktır. Bu doğru fikri gerçekleştirme adına, ilk örnekteki bazı kısıtların burada da olduğunu görmekteyiz. Bunun için ana kütleden yani sürekli işaretten kaç tane ayrık nokta yani örnek belirlersek (örneklem kütlesi), sürekli işaretin özelliklerini aynen yanıstmamız mümkün olur. Bu sürekli işaretlerden ayrık işaretlerin elde edilmesi sırasında üzerinde en çok durulan bir durumdur. Çünkü belirlenen örnek sayısı, sonuçta ana kütleyi yani sürekli işareti tekrar oluşturma kabiliyetinde olmalıdır. Aksi taktirde, örnek noktalarından tekrar orijinal işareti oluşturamayacağımızdan, bilgi kaybı söz konusu olur. Çünkü alınan örnekleri haberleşme sisteminde bir başka noktaya göndererek, orada tekrar orijinal işareti elde etme durumu söz konusu olabilir. Böyle bir durumda göz önüne alınan örnek sayısının herhangi bir noktada veya alıcıda (istasyonda) orijinal sürekli işareti oluşturması beklenmektedir. Eğer mevcut örnek sayısı bu beklentiyi karşılayamıyorsa, en baştaki orijinal işareti gönderilen noktada tekrar oluşturamayacağımızdan, bilgi kaybı söz konusu olacaktır ki, bu hiç de arzulanan bir durum değildir. Bu gibi olumsuzluklarla karşılaşmama adına, önem arz eden örnek sayısının doğru belirlenmesi çok önemlidir. Böyle bir durum ilk şekilde ele alınan kamuoyu yoklamasında hatırlanacağı gibi %99 ve %95 gibi yüksek güven değerlerini gösteren %1 ve %5 oranlarıyla garantilerken, benzer durumun işaretlerin örneklenmesinde karşılığı ise $f_S \geq 2f_0$ değeriyle belirlenmektedir. Buna göre örneklenecek $f(t)$ sürekli işaretinin f_0 frekansı, onu örnekleyecek işaretin f_S frekansının yarısına eşit veya daha küçük olmalıdır. Ancak bu durumda örneklerden sürekli işaretin oluşturulması mümkün olur ($f(t) \leftarrow f[k]$).

Bu gibi durum, sorun ve çözümlerinin incelendiği genel bilim dalı işaret işleme veya sayısal işaret işleme (DSP) alanıyla ilgili olup, örnekleme teorisi (sampling theory) başlığıyla anılmaktadır. Bunun yanı sıra örneklem yoluyla sürekli-sayısal veri işlemesi, günümüz modern mühendisliğinin haberleşme ve kontrol alanları başta olmak üzere, bir çok alanda yoğun şekilde kullanılmakta ve yararlanılmaktadır. Bu bölümde genel sayısal işaret işleme yerine, bu ortamı sağlayan bahsedilen örnekleme teorisi göz önüne alınarak önemli noktalarıyla incelenmeye çalışılacaktır.

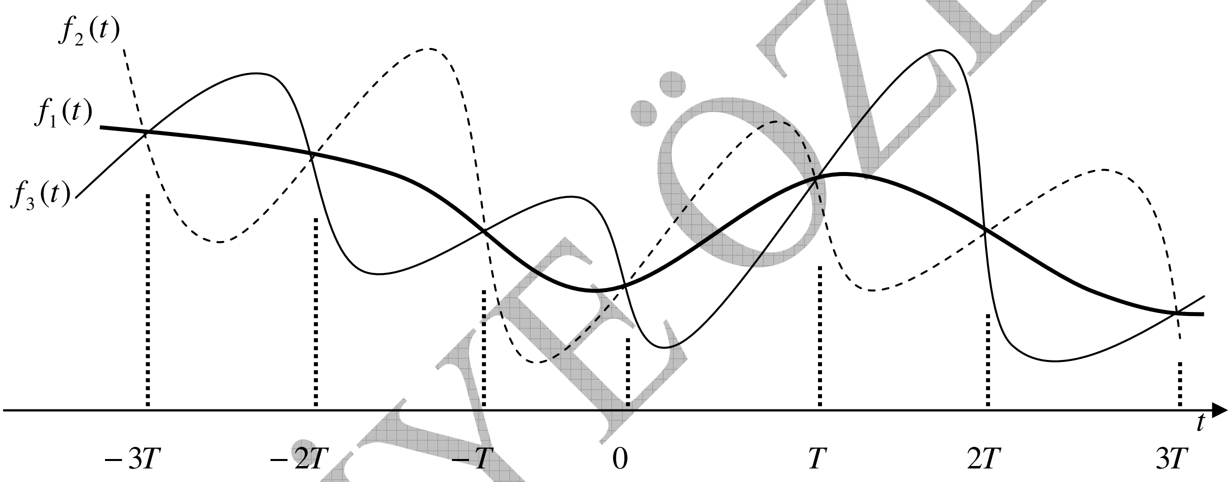
Örnekleme Ve Örtüşme

Örnekleme, en basit haliyle $f(t)$ şeklindeki sürekli-zaman işaretinin $k \in Z$ olmak üzere $f[k]$ veya $f(k)$ tipindeki bir dizi (ayrık-zaman işareti) haline getirilmesi durumudur.

$$f(t) \overset{ornekleme}{\rightarrow} f(k)$$

1.

Bir işaretin, kendisinden eşit zaman aralıklarıyla alınan örneklerden tekrar elde edilebilmesi önemlidir. Sürekli işaretten alınan örnekleri, diğer bir deyişle ayrık noktaları göz önüne alalım. Bazen alınan örnekleri sağlayacak kaynak işaretler birden fazla olabilir. Yani aynı ayrık noktaları verecek işaret sayısı oldukça fazla olabilir. Aşağıdaki şekil bu yaklaşıma örnektir.



Şekil 3 Farklı sürekli işaretlerin aynı T zamanlarında aynı değerleri üretmesi

Verilen şekil örnekleme teorisinin önemini ve özelliğini çok açık olrak vurgulayan çarpıcı bir örnektir. Görüldüğü gibi üç sürekli ve farklı işaretin $f_1(t)$, $f_2(t)$ ve $f_3(t)$ eşit uzaklıktaki (zamanlardaki, kT) kesişimleri aynı ayrık noktaları vermektedir. Kesişimler dikkate alındığında

$$f_1(kT) = f_2(kT) = f_3(kT)$$

durumu söz konusudur. Aynı değerleri, örnekleri veya ayrık noktaları veren birden fazla tesadüfi işaret ortaya çıkmıştır. Üç işaret aynı değerleri verdiğine göre bu noktalardan acaba tekrar orijinal üç işareti elde etmek mümkün olabilecek mi. Ortada üçtane sürekli-zaman işareti ve bir tanede bunların kesişim değerlerinden oluşan ayrık-zaman noktalı bir işaret var. Duruma göre ayrık işaret birden fazla sürekli işaretten elde edilebilmektedir. Bunun tersi doğrumudur?. Elde edilen ayrık-zamanlı işaret eğer tekrar sürekli-zaman işaretlerini oluşturabilecekse bu mantıklı olurdu. Ama ortada şu sorun vardır : tek bir ayrık-zamanlı işaretten nasıl olacak ki üç tane farklı sürekli-zaman işareti elde edilebilecektir?. Bu mümkün olamaz. Tek bir ayrık-zamanlı işaret yine bir sürekli-zaman işaretini tam olarak oluşturabilecektir. Örnekte görülen $f_1(t), f_2(t), f_3(t)$ işaretleri aynı ortak noktalara sahip olmasına rağmen, her bir işaretin bu tür ayrık noktalardan tekrar elde edilebilmesi için bazı ön koşullara gerek vardır.

Örneğin işaretlerden herhangi birinin ayrık noktalardan tekrar elde edilebilmesi için söz konusu ayrık noktaların (örneklerin) sayısı (hacmi) önemlidir. Her işaret için bu ayrık noktaların sayısı farklı olacaktır. Bu sayı neye göre değişecektir?. İşaretin içeriğiyle ilgili en önemli parametre olan frekans bu açıdan belirleyicidir. Bu durum yukarıdaki $f_1(t), f_2(t), f_3(t)$ şekillerinde görülmektedir. İşaretler aynı noktaları sağlamasına rağmen her biri farklı frekanslardadır. Bu farklı işaretlerden elde edilen noktaların sayısı farklı olacağı için bu örneklerden tekrar orijinal sürekli-zaman (analog) işaretlerin tekrar elde edilmesi de mümkün olmayacaktır. Çünkü farklı frekanslı işaretler demek, her birinin farklı ayrık noktaları olabileceği anlamına gelmektedir. Eğer farklı frekanslı işaretlerden daima aynı sayıda örnek noktası alınırsa durum şöyle açıklanabilir: aynı parçayı farklı frekanslardaki müzik aleti ile çalmayla eş değerdir. Bu durumda kulağa tam kıvamında (frekansında) sesler gelebileceği gibi daha düşük kalitede seslerde duyabileceğiz. Bu kalitesiz sesler daha ziyade olması gerekenden daha düşük frekansla çalındığında çıkan seslerle ilgilidir. İşte aynı müzik parçasının olması gerekenden daha düşük frekansla çalınması durumunda sesin bayılması (fading) gibi bir ses ortaya çıkar. Bu duruma örnekleme teorisinde "*örtüşme*" (aliasing) denilmektedir. Bunun sinema filmlerindeki arabaların dönen tekerinin sanki duruyormuş gibi yada geri dönüyormuş gibi görünmesiyle bağlantısı var. Buna sebep olan gözümüzün seyretme anındaki frekansının tekerin frekansından düşük olmasıyla açıklanabilir.

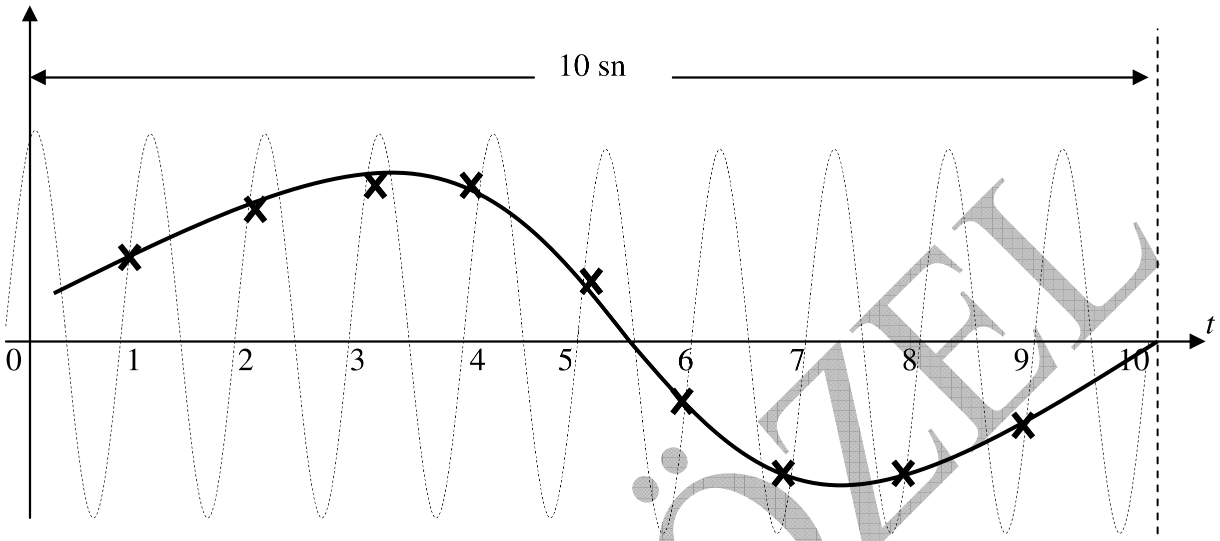
Verilen şekle göre teorik açıdan bu örneklenmiş işaretten tekrar orijinal işaretler $f_1(t), f_2(t), f_3(t)$ elde edilebileceklermiş gibi görünüyor?. Ancak bunun böyle olamayacağı örnekleme teorisi ile açıklanabiliyor. Örnekleme teorisi ile yukarıdaki işaretlerle oluşan karmaşa ortadan kalkmakta ve işaretlerin örneklerinden tekrar elde edilmesi üzerine kural ve standart getirilmektedir. Bu teori yardımıyla her farklı işaretin örnek sayısı farklı alınmakta ve sonuçta bu örneklerden orijinal işaret tekrar elde edilmektedir. Örnekleme teorisi bunu sorun (örtüşme, aliasing) kabul eder ve oluşmamasının standardını ortaya koyar.

Mevcut sürekli-zaman işaretlerinin aynı ayrık noktaları (örnekleri) oluşturmaları mümkündür ve bu örtüşme (aliasing) olarak adlandırılan kavram ile açıklanabiliyor. Eğer $f_1(t), f_2(t), f_3(t)$ işaretleri aynı örnekleme frekansıyla örnekleniyorlarsa $f_2(t)$ ve $f_3(t)$ işaretlerinin frekansları $f_1(t)$ işaretinin frekansının "örtüşeni (aliasing)" olması durumunda, $f_2(t)$ ve $f_3(t)$ işaretlerinin oluşturacağı örnekler $f_1(t)$ ile aynı olacaktır. Yukarıdaki şekil böyle bir duruma uygun düşmektedir. Ancak bu durumda her üçü aynı örnekleri göstermesine rağmen, bu örneklerden sadece $f_1(t)$ işareti tam olarak tekrar elde edilebilirken (reconstruction), aynı örneklerden $f_2(t)$ ve $f_3(t)$ işaretleri tekrar elde edilemeyeceklerdir. Bu, örnekleme teorisinin önemli bir sonucudur.

Farklı işaretlerin açıklanan sebeplerden dolayı oluşan örneklerinden orijinal işaretlerin tekrar elde edilemeyişleri "band-sınırlı" kavramıyla da açıklanabilir. Band sınırlı işaretlerin değerleri belirli bandın dışında sıfırdır (Fourier transformasyonları sıfır; $|\omega| > 2\pi B$ için $|F(\omega)| = 0$). Böylece band-sınırlı işaretin en yüksek frekans değerine (B Hz) göre örnekler alınacağından ve bu değer her bir işaret için farklı olacağından, sonuçta alınan örneklerde farklı olacaktır. Diğer bir deyişle birden fazla farklı ama band-sınırlı işaret yukarıdaki şekle benzer aynı noktaları oluşturmayacaktır artık. Bu yolla örneklemenin özelliği ve önemi ortaya çıkmaktadır. Buna göre birbirinden farklı olan her bir işaretin örnekleme frekansına göre alınan örnekleri veya ayrık noktaları farklı olacağından, yukarıdakine benzer olarak aynı değerleri veren farklı birden fazla işaret artık söz konusu olmayacaktır.

2.

Örnekleme ve örtüşme durumunu alternatif yaklaşımla açıklamak üzere aşağıda aynı noktaların farklı iki frekanstaki sürekli işaret ile gösterimi verilmiştir.



Şekil 4 Bir sinusoidin örtüşmesi (aliasing): Farklı sinusoidler, aynı örnek noktaları

Şekilden görüldüğü gibi koyu renkle gösterilen bir sinusoidin 1 periodu 10 sn olduğundan ve frekansı da bir saykıla karşılık geldiğinden frekansı da 0.1 Hz dir. Bu işaretin gösterimi aşağıda verilmiştir.

$$f_1(t) = \cos\omega t = \cos 2\pi\, f\, t = \cos\left(\frac{2\pi}{T}\right)t = \cos\left(\frac{2\pi}{10}\right)t = \cos 2\pi\,(0.1)\,t = \cos 0.2\pi\, t$$

Diğer yandan kesik çizgilerle gösterilen ikinci sinusoid işaret ise 9 saykıldan oluşmakta ve frekansı 9 Hz dir.

$$f_2(t) = \cos\omega t = \cos\left(9\times\frac{2\pi}{T}\right)t = \cos\left(9\times\frac{2\pi}{0.2}\right)t = \cos 2\pi(0.9)t = \cos 1.8\pi\, t$$

Buradan ilk tespiti yapabiliriz.

Tespit : Aynı ayrık noktalar, farklı frekanstaki sürekli işaretlerle elde edilebilir.

Bu tespit doğru olmasına rağmen uygulamada bazı sorunlara (örtüşme, aliasing) sebebiyet vermektedir. Şekilden de görüldüğü gibi, aynı ayrık noktalar, farklı frekanstaki sürekli işaretlerden elde edilebilmektedir. Ancak bunu sağlayan sürekli işaretlerin içerikleri önemlidir. Çünkü ikinci işareti ele alırsak, bu işaret aşağıdaki formda da olabilirdi.

$$f_2(t) = \cos 1.8\pi\, t = \cos(2\pi - 0.2\pi)t = \cos 2\pi(0.1)t$$
$$= \cos 0.2\pi\, t$$

Buna göre

$$f_1(t) = \cos 0.2\pi\, t$$

işareti

$$f_2(t) = \cos 1.8\pi\, t$$

işaretiyle de gösterilebilmektedir. Daha çarpıcı olanı ise $f_2(t) = \cos 1.8\pi\, t$ işaretinin $f_1(t) = \cos 0.2\pi\, t$ işaretiyle gösterilebilme yanılgısıdır. Buna yanılgı dedik, çünkü gerçekte bir yanılgı söz konusudur. Eğer böyle gösterirsek, işaretin gerçek gücünden bahsetmek mümkün olmaz. Bu şekilde daha hızlı (yüksek frekanslı) bir işareti daha düşük (frekanslı) hızlı görme gibi bir algılama hatasına düşeriz ki, bu önemli bir problemdir. Bu problemle günlük hayatta **göz yanılgısı** veya **göz aldanması** olarak çoğu kez karşılaşmaktayız. Sineme filmlerindeki araba tekerleğinin tersine dönmesi veya dönen bir fanın yine tersine dönmesi gibi algılar bu nedenlerden kaynaklanan stroskobik temelli problemlerdir. İşaret işlemede ise bu problem **örtüşme** (aliasing) olarak adlandırılmaktadır. Göz aldanması denmesinin sebebi gözün daha yüksek hızlı bir hareketi daha düşük algılamasıdır. Bu açıdan insan gözünün bir tür alçak geçiren filtre gibi çalıştığı düşünülebilir. Bu yanılgıyla cisimleri gerçek formatında algılayamadığımız bir gerçektir. işaret işlemede ise bu gerçekten algılayamamanın karşılığı, gerçek işaretin elde edilemeyeceğidir. Çünkü bu yaklaşımda örneklenen işaretin örneklerine bakarak gerçek işaret olduğunu ve gerçek işaretmiş gibi işlemlere tabii tutmanın yol açabileceği yanlışlıkları tahmin edebiliyoruz. Ve en önemlisi, örneklerden (yanlış algılanan örneklerden) bir daha gerçek işaretin elde edilemeyeceği gibi çok daha vahim bir sonuç ortaya çıkmaktadır. Bir çok hataya yol açabilecek özellikteki bu çok önemli problemin çözülmesi kaçınılmazdır. Göz olayında belki insan anatomisi ve fizyolojisi neticesinde imkan ve kabiliyetler kısıtlı olabilir (belki gözlerimizi dört açarak!), ama işaret işlemede bunu giderecek bir çözüm vardır. Bu çözüm **örnekleme teorisi** ile açıklanmaktadır. Örnekleme teorisi ile örneklenecek işaret, kendisinden iki kat daha hızlı bir işaretle örneklenirse, örtüşme veya göz yanılgısı denilen sorun ortadan kaldırılabilmektedir. Bu yolla aynı ayrık noktaları gösteren gerçek işaretin hangisi olduğu konusunda tereddüt ortadan kalkar. Bunun sonucunda aynı ayrık noktaları veren diğer işaretlerin ise yanılgıya sebebiyet veren örtüşen (aliased) işaretler olduğu da tespit edilir. Bu şekilde örnekleri sağlayan gerçek işaretin tek olduğu, aynı örneklerin farklı frekanslı işaretlerce elde edilemeyeceği sonucuna varmış oluruz. Tüm bunların sonucunda cisimlerin doğru algılanması paralelinde, örneklenen işaretten de gerçek işaretin tekrar elde edilmesi garanti edilmiş olunur.

Örnekleme

Belli koşullar altında sürekli-zaman (analog) işareti kendisinden alınan örneklerle ayrık formda gösterilebileceği gibi (construction), bunun sonucunda aynı örneklerden tekrar elde de edilebilir (reconstruction). Bunun için öncelikle işaretin band-sınırlı (band-limited) olması gerekecektir. Böyle bir band sınırının örneğin B Hz olduğu kabul edelim. Bu koşul sağlandıktan sonra örneklerin zamanda (zamana bağlı olarak) eşit aralıklarla alınması gerekecektir. Bu eşit aralıkların örnekleme frekansı olarak tanımlanan f_S frekansının, band-sınırlı işaretin frekansının en az iki katı (2B) veya iki katından büyük ($\geq 2B$) olması gerekir :

$$f_S \geq 2B$$

Bu denklem, yöntemi geliştiricisinin adıyla anılan ***Nyquist örneklem kuralı*** olarak bilinmektedir. Burada F_s örnekleme frekansı, B de örneği alınacak band-sınırlı sürekli-zaman işaretinin frekansıdır. Örnekleme frekansının minumum değerinin

$$f_{S\text{-min}} = 2B$$

olması gerekir, ki bu durumdaki Nyquist miktarı (rate) olarak anılır ($f_{S\text{-min}} = F_N$). Eğer F_N Nyquist frekansı ise, bununla F_S örnekleme frekansı arasında

$$f_S = 2F_N$$

ilişkisi vardır, yani Nyquist frekansı örnekleme frekansının yarısıdır. Bu koşullar altında sürekli-zaman işaretinin örneklenerek ayrık-zaman formunda gösterilmesi işlemine kısaca "**örnekleme**" veya genel anlamda buna imkan tanıyan işaret analizlere "**örnekleme teorisi**" adı verilmektedir. Ayrıca ilgili koşullar altında ($f_S \geq 2B$) sürekli işaretten alınan numunelere de "**örnek**" adı verilmektedir. Örnekleme teorisinin uygulanabilmesi için iki temel kriter olan

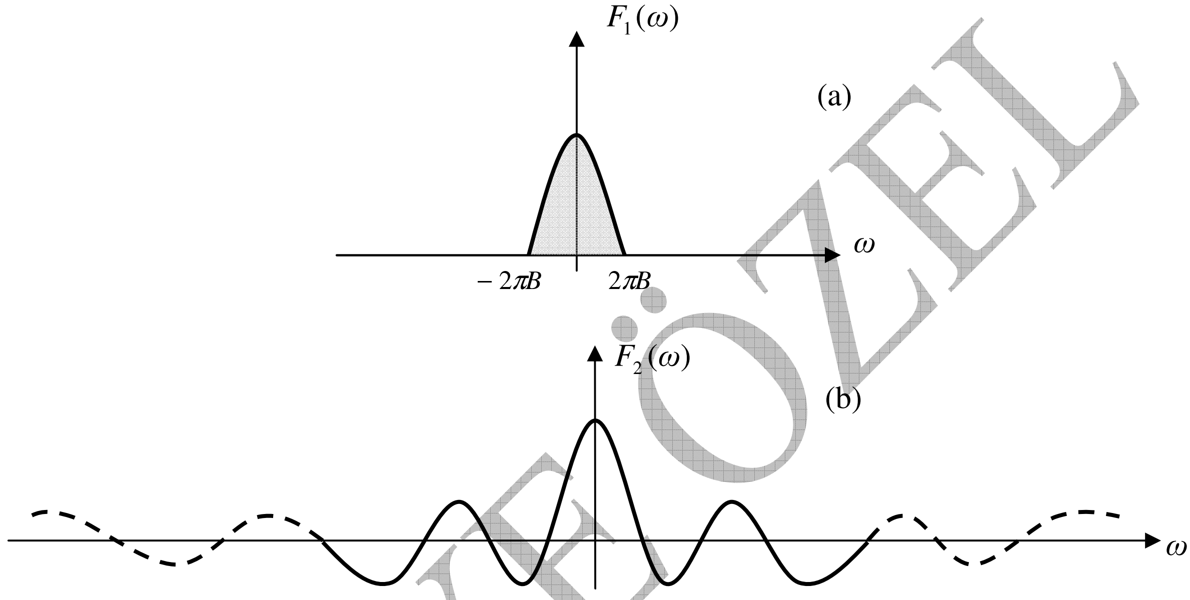
1. Band-sınırlı işaret
2. Örnekleme frekansı ($f_S \geq 2B$)

Burada band-sınırlı işaret ile ilgili göz önüne alınması gereken önemli bir durum vardır. Örnekleme teorisinde band sınırlı olması istenen işaretin, örneklenecek sürekli işaret olduğunu bilmemiz gerekiyor. Bunu tespit olarak veriyoruz.

Tepit : Örnekleme, örneklenecek işaret ve örnekleyecek işaret arasındaki bir tür iki işaretin çarpımı (modülasyonu) gibi düşünülürse, sağlıklı bir örnekleme için yalnızca örneklenecek işaretin band sınırlı olması gerekir. Çünkü örnekleme teorisi yalnızca örneklenecek işaretin band sınırlı olmasıyla ilgilenmektedir. Bu yüzden örneklemede örnekleme fonksiyonu olarak ideal örnekleyici olarak sonsuz banda sahip impuls dizisinin kullanılmasıyla sağlıklı bir örnekleme yapılmaktadır, ve sonucunda da orijinal işaretin tekrar elde edilmesi sürecinde de her hangi bir problemle karşılaşılmamaktadır. Oysa modülasyon işleminde durum farklıydı, her iki işaretinde band sınırlı olması gerekiyordu. Çünkü aksi taktirde, spektrumdan da net olarak görülebileceği gibi örtüşmeden dolayı bilgiyi kaybetme riski doğar. Çünkü örtüşmüş haldeki bir modülasyon dalgasından demodülasyon yoluyla bilgi işaretinin tekrar elde edilmesi mümkün olmaz.

Band Sınırlı İşaretin Örneklenmesi

Fourier transformasyonuna göre band dışında (band genişliği, ω_0) Fourier transformasyonu sıfır olan [$|F(\omega)| > \omega_0$, için $F(\omega) = 0$] işaret band sınırlıdır. İşaretin sonsuz büyüklükteki $\omega = (-\infty, +\infty)$ band genişliğinde olması durumunda işaretin enerjisinden, dolayısıyla da band genişiğinden bahsetmek mümkün olmaz. **Bu yüzden örneklenmeye dahil olacak işaretlerden yalnızca örneklenecek işaret band sınırlı ve Fourier transformasyonu mevcut olmalıdır**. Aşağıda bir band sınırlı ve bir band sınırsız spektrum verilmiştir.

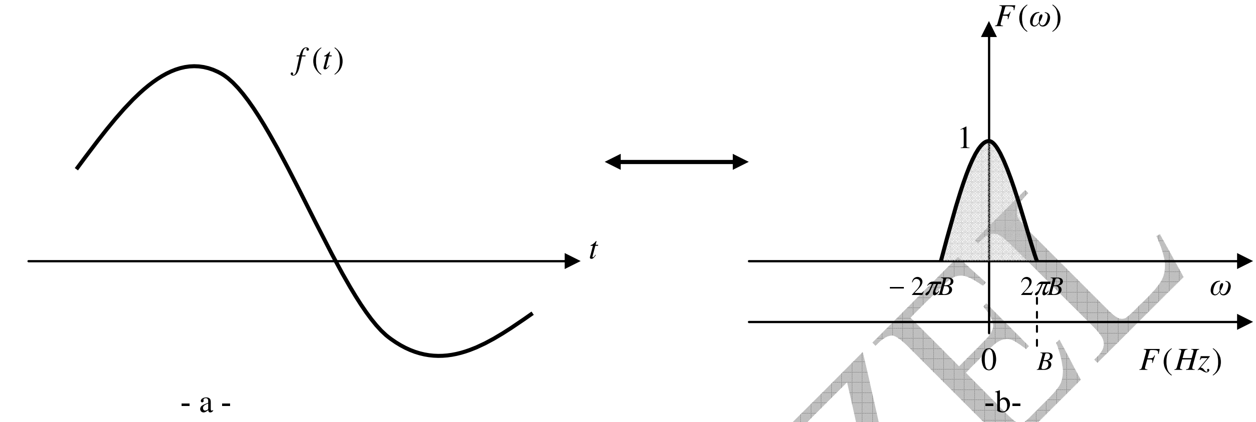


Şekil 5 (a):Band limitli işaret, (b): Band limitsiz işaret

Şekil (a) da bir $f_1(t)$ işaretinin $F_1(\omega)$ olarak sınırlı bir banda (B) sahip olduğunu, (b) de ise $f_2(t)$ olarak $F_2(\omega)$ gibi sonsuz, sınırlı olmayan bir bandın söz konusu olduğunu görmekteyiz. Bu koşullar altında band-sınırsız olduğundan $f_2(t)$ işaretinin örneklenemeyecektir.

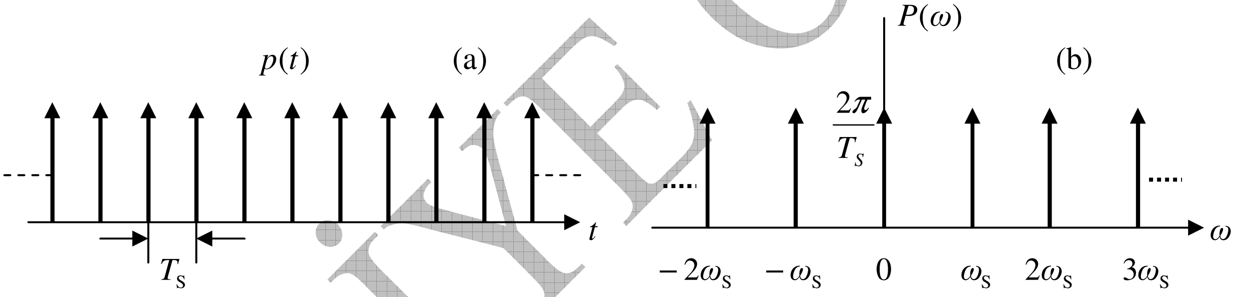
Örnekleme Frekansının İşaret Frekansının İki Katı Olması

Örnekleme frekansı örneklenecek işaretin frekansının veya band genişliğinin iki katı olması durumuna ($f_S \geq 2B$) açıklama getirmeye çalışalım. Bunun ileride inceleyeceğimiz örnekleme teorisinin doğasından kaynaklandığını görmekteyiz.



Şekil 6 Band sınırlı işaret ve spektrumu

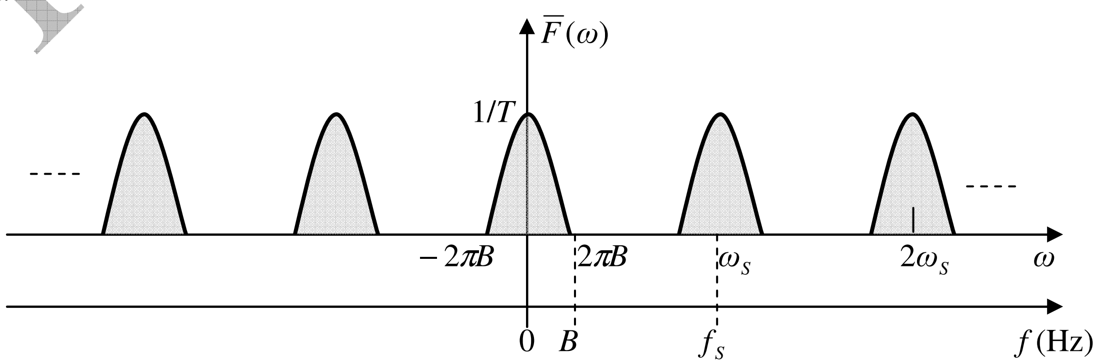
Örneklenecek işaret yukarıda verilen B (Hz) band genişliğiyle sınırlı band sınırlı işaret olsun. Öte yandan böyle bir işareti örnekleyecek örnekleme fonksiyonunun ideal örnekleme için impuls dizisi olduğunu düşünürsek,



$$p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_S) \Leftrightarrow P(\omega) = \frac{2\pi}{T_S} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_S) \ , \quad \omega_S = \frac{2\pi}{T_S}$$

Şekil 7 İmpuls dizisi ve spektrumu

Bunların ışığında örnekleme olarak $f(t) * p(t) = F(\omega)P(\omega)$ işlemini göz önüne aldığımızda, buradaki özellikle $\overline{F}(\omega) = F(\omega)P(\omega)$ işleminin aşağıdaki şekildeki gibi sonuçlanacağını biliyoruz.



Şekil 8 $\overline{F}(\omega) = F(\omega)P(\omega)$ örnekleme spektrumu

Görüldüğü gibi örnekleme işleminin $\overline{F}(\omega) = F(\omega)P(\omega)$ spektrumunda $F(\omega)$ spektrumunun tekrarlı kopyaları $\omega = (0, \omega_S, 2\omega_S, 3\omega_S, \cdots)$ frekanslarında sonsuza kadar gitmektedir. Dolayısıyla $\overline{F}(\omega)$ spektrumundaki kopyaların band genişliği

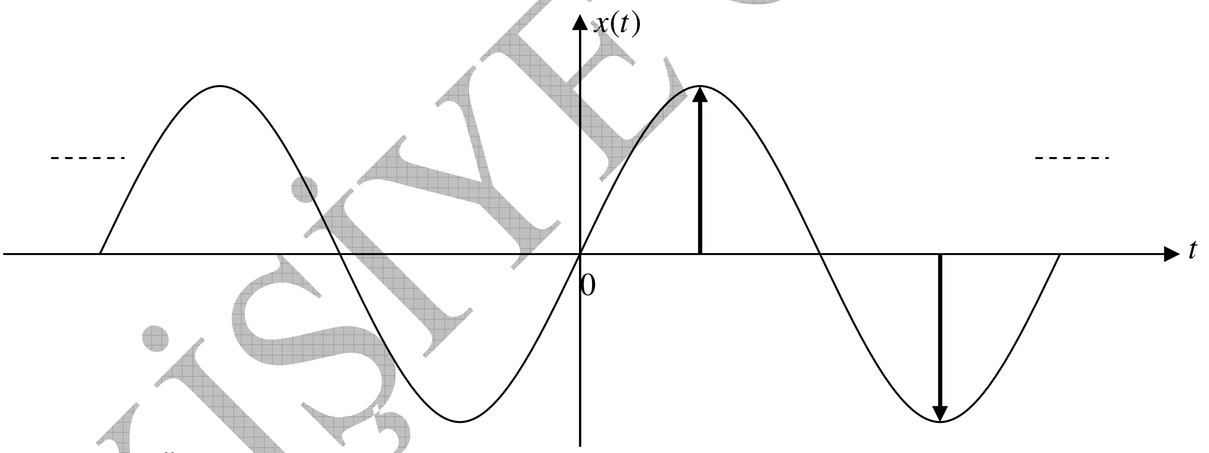
$2\pi B - (-2\pi B) = 4\pi B$ rad/sn veya $2B$ Hz

olacağından, bu objelerin ($F(\omega)$ spektrumundaki işaretin) birbirine karışmaması için

$\omega_S = 4\pi B$ rad/sn veya $f_S = 2B$ Hz

Zorunluluğu vardır. Bundan dolayı sağlıklı örnekleme için daima $\omega_S \geq 2\,(2\pi B)$ veya $f_S \geq 2B$ koşulu aranır.

Bunun yanısıra, sorulan sorunun ($f_S \geq 2B$) gerekliliğini alternatif olarak sinusoidal yaklaşımla da ilişkilendirebiliriz. İşaretlerin bir biçimde Fourier serisi veya Fourier transformasyonuyla ortaya konulan sinusoidlerden oluştuğu dikkate alınırsa bu tür işaretlerin frekansı, dolayısıyla, periodu da olacaktır. Her periodun da negatif ve pozitif olmak üzere iki alteranstan oluşmasından dolayı, her alteranstan en az bir örnek alınması bir periodun minumum olarak en az iki örnekle temsil edilmesi anlamı ortaya çıkar. Bunu aşağıdaki sinusoid üzerinde görebiliriz.



Şekil 9 Örnekleme kuralı : alterans başına en az bir örnek, saykıl başına en az iki örnek

Görüldüğü gibi bir periodluk sinusoidin her alterınsandan birer örnek (koyu ok) alınmasıyla, toplam bir periodun davranışı hakkında yeterli bilgi edinilmektedir. Bunu aynı noktadan hareket eden aynı hızdaki iki aracın bir süre bulunacağı pozisyonlara benzetebiliriz. Araçlardan birinin diğerini tam geçmesi için, hızının diğerinin en az iki katı kadar olması gerekiyor. Hareket halindeki aracın veya objenin tamamını görüntüleyebilmek için onun iki katı kadar hızla hareket etme gereği vardır. Bu gibi sebeplerden dolayı, örnekleme hızı, örneklenecek işaretin frekansının en az iki katı olmalıdır ($f_S \geq 2B$).

Örnekleme frekansı

Temel olarak Nyquist kuralı, Shannon bilgi teorisi üzerine kurulu ve onun sonucu olan bir yaklaşımdır. Bu yaklaşımın ifadesine göre

$$C = B\log_2(1+\frac{P_S}{P_N})$$

Belli bir C bilgi kapasitesinin işaretin band genişliği B (Hz), işaretin gücü P_S ve P_N gürültüyle ilişkilidir. Sürekli-zaman işaretinin band sınırlı olması anlaşıldıktan sonra, örnekleme teorisi uygulanabilirdir. Bunun için alınacak örneklerin zaman olarak birbirlerinden eşit ve de yakın aralıklarla dizilmiş olması gerekecektir. Bu homojen aralığı sağlayan kavram örnekleme frekansı olarak anılmaktadır ve f_S ile gösterilmektedir. Bu değer ile yukarıda band sınırlı işaretin en yüksek değerli frekansını gösteren B değeri arasında örneklemeyi gerçekleyecek bir bağıntı mevcuttur. Daha önce de vurgulandığı gibi Nyquist frekansı olarak anılan f_N frekansı f_S örnekleme frekansının yarısına eşittir.

$$f_N = \frac{f_S}{2}$$

Ancak burada f_N Nyquist frekansı F_N Nyquist oranı (Nyquist rate) olan $F_N = 2B$ ile karıştırılmamalıdır. f_N Nyquist frekansı, ayrık sistemlerle ilgili bir kavram olup örneklenecek analog işaretin sahip olduğu en yüksek frekans olarak düşünülebilir ($f_N = f_a = B$). dır. Örnekleme için dikkate alınan F_N Nyquist oranıdır. Buna göre sağlıklı bir örnekleme için $f_S \geq F_N$ olmalıdır. Bu kurala göre, örnekleme frekansı f_S, band sınırlı işaretin (maksimum B frekanslı) frekansının en az iki katı kadar olmalıdır koşulu sağlanmalıdır.

$$f_S \geq 2B$$

veya $F_N = 2B$ olmak üzere

$$f_S \geq F_N$$

Nyquist kuralı olarak anılan bu yöntemin garanti edilmesi durumunda ancak band-sınırlı sürekli işaret tekrar örneklerinden elde edilebilmektedir. Bunun sağlanamaması durumunda tekrar elde etme (reconstruction) mümkün olmayacaktır. Minumum anlamda dahi en azından

$$F_{\text{N-min}} = 2B$$

olmalıdır. Bu durumdaki frekansa Nyquist miktarı (frekansı) denilmektedir ($F_{N\text{-min}} = F_N$). Örnekleme frekansına göre örnekler eşit zaman aralıklarıyla alınacağı için aynı zamanda örnekleme periodu (T_S) kavramıda gündemde olacaktır. Buna göre örnekleme periodu, örnekleme frekansı ve Nyquist değeri arasında

$$f_S \geq 2B = \frac{1}{T_S} \geq 2B$$

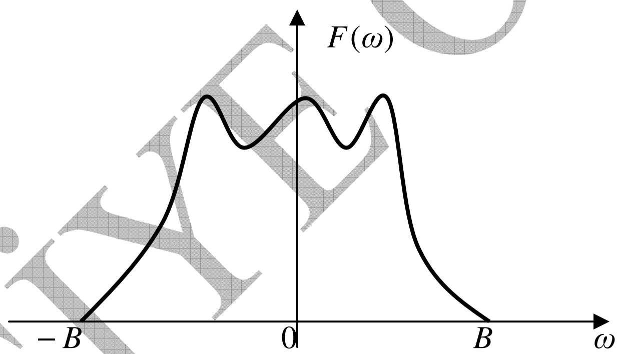
ve

$$T_S \leq \frac{1}{2B}$$

bağıntıları olacaktır. Buna göre örnekleme periodu T_S, band-sınırlı işaretin belirttiği $\frac{1}{2B}$ değerinden bile küçük alınmalıdır gerçeği ortaya çıkar.
Bunun daha yalın bilinen anlamı, örneklenecek sürekli işaretten alınacak örnekler zaman olarak birbirine son derece yakın olacaktır. Burada frekans açısından örnekleme spektrumunda f_S örnekleme frekansı her birinin aralığı $\frac{1}{2B}$ olan çok sayıda örnekle dolu olacaktır. Bunun sonucu olarak birbirine son derece yakın ve çok sayıda örnek alınacak demektir ki, buda sağlıklı bir örneklemenin gereğidir.

Örneklemede kullanılan terimler

Görülen band sınırlı işaretin örneklenmesi göz önüne alınarak, sık kullanılan bazı kavramlar kısaca açıklanacaktır.



Şekil 10 Band sınırlı işaret

Örnekleme frekansı (f_S) : Örtüşmeyi engelleyecek sağlıklı bir örnekleme için f_S örnekleme frekansı, band genişliği B olan işaretin en az iki katı ($f_S \geq 2B$) olmalıdır. Literatürde örnekleme miktarı anlamına gelen "*sampling rate*" olarak da tanımlanır. Bu anlamıyla saniyedeki örnek sayısını gösterir (samples per second). Örnekleme frekansının tersi, örnekleme periodudur ($T \leq (1/2B)$. Örnekleme periodu, örneklenen işaretin zaman uzayındaki örnekler arası mesafeyi gösterirken, örnekleme frekansı ise frekans domenindeki örnekler arası mesafeyi göstermektedir. Bunun yanı sıra Nyquist miktarı (Nyquist rate) olarak anılane F_N miktarı ile, f_S arasında sağlıklı bir örnekleme için $f_S > F_N$ bağıntısı olmalıdır. Sağlıklı örneklemenin anlamı, örtüşme probleminin olmaması ve sürekli işaretin örneklerinden tekrar elde edilmesidir.

Nyquist miktarı (rate) (F_N) : B analog işaretteki en yüksek frekansı göstermek üzere F_N Nyquist miktarı (Nyquist rate), işaretin band genişliğinin iki katına eşit miktarı göstermektedir ($F_N = 2B$). Bazen f_N Nyquist frekansıyla karıştırılsa da, aynı şeyi ifade etmezler. Örnekleme için dikkate alınan F_N Nyquist oranıdır (miktarı). Nyquist miktarı F_N ile örnekleme frekansı arasında da minumum $f_S = F_N$ veya sağlıklı örnekleme içinse $f_S > F_N$ ilişkisinin olduğu düşünülmelidir. Diğer bir deyişle Nyquist oranı, minumum örnekleme miktarı olan $2B$ yi göstermektedir.

Nyquist frekansı (f_N): Genel olarak ayrık sistemlerin bir özelliği olup, üst limit olarak örnekleme frekansının yarısına ($f_N = f_S / 2$) eşittir. Buna göre sağlıklı bir örneklemenin olabilmesi için, Nyquist frekansının işaretin frekansından büyük olması gerekir ($f_N > B$ veya $(f_S / 2) > B$).

Ayrık (Ω), Örnekleme (f_S), Nyquist oranı (F_N) ve Analog (f_a) Frekanslar : Ayrık Ω frekansı ile örnekleme f_S, Nyquist oranı F_N ve analog f_a frekansları arasında T örnekleme periodu ($T = 1/f_S$) olmak üzere aşağıdaki ilişkiler mevcuttur.

$$\Omega = \omega T = \frac{\omega}{f_S} = \frac{2\pi f_a}{f_S}$$

veya minumum örnkleme oranına göre

$$\Omega = \frac{2\pi f_a}{f_S} = \frac{2\pi f_a}{2F_N} = \frac{\pi f_a}{F_N}$$

İşaret frekansı (B) : Örneklenecek işaretteki B veya f_0 olarak bulunan en yüksek frekanstır. f_N Nyquist frekansı ile $f_N = f_0 = B$ mevcudiyeti söz konusudur. İşaretin sahip olduğu f_0 frekansı eğer $(0, f_0)$ aralığı itibariyle en yüksek frekans olması sebebiyle aynı zamanda f_0 veya B frekansıyla işaretin band genişliği olarak görülebilir. Bu nedenle Nyquist rate, işaret band genişliğinin iki katı olarak görülmektedir ($F_N = 2B$).

İşaret Band Genişliği (B) : İşaretin Fourier spektrumdaki genişliğini, diğer bir deyişle enerji yoğunlaşma aralığını göstermektedir. Normal koşullar altında ban sınırlı bir işaret ($F(\omega) \neq 0$, $|F(\omega)| < B$, belli bir bandın dışında Fourier transformasyonu sıfır olan işarettir ($F(\omega) = 0$, $|F(\omega)| > B$). Band sınırlı bir işaretin en tipik özelliği, örneklerinden tam anlamıyla tekrar elde edilebilmesidir. Genelde iki türlü band genişliği söz konusudur.

1.İşaret band genişliği

Bu yukarıda ele alınan işaretin en yüksek frekansının $(0, f_0)$ veya $(0, B)$ olması halinde band genişliğinin örneğin B alınmasıyla vurgulanan değerdir. Bu değer analog işaretteki en yüksek frekansa eşdeğerdir.

2. Spektral band genişliği

Bu tip band genişliğinde işaretin en yüksek frekansı $(0, f_0)$ veya $(0, B)$ olarak örneğin B ise, spektral genişlik olarak vurgulanan değer $2B$ veya $2f_0$ olarak vurgulanan değerdir. Buna göre spektral band genişliğinin F_N Nyquist oranına eşit olduğu görülmektedir ($F_N = 2B = 2f_0$). Bu anlamda örnekleme sırasında daha çok spektral band genişliğinin göz önüne alındığını görmekteyiz. Bununla beraber her iki band genişliğinde de Fourier teorisinin geçerli olduğunu görmekteyiz. Bildiğimiz gibi bir band sınırlı işaretteki en yüksek frekans B ise, bu işaretin kendisinin band genişliği ve $2B$ olarakda spektrumun band genişliğidir. Bu anlamda örneklenecek işaretin B veya f_0 biçimindeki band genişliğinin en yüksek frekans olduğu, f_N Nyquist frekansı ile $f_N = f_0 = B$ ilişkilerinin olduğunu biliyoruz.

Örnek

Verilen $f(t) = \sin(300\pi\, t)$ işaretinin Nyquist miktarını ve Nyquist aralığını bulun.

Çözüm

Örnekleme frekansı veya Nyquist miktarı, işaret içindeki en yüksek frekanslı bileşene göre yapılacağından öncelikle en yüksek frekans elde edilmeye çalışılır. Buna göre işaret $f(t) = \sin(300\pi\, t) = \sin(2\pi(150)t)$ olarak düzenlenirse, işaretin frekansı $B = 150\,\text{Hz}$. Buna göre Nyquist miktarı minumum örnekleme miktarı olan $2B$ olduğuna göre, değeri $F_N = 2B = 2.150 = 300\,\text{Hz}$ ve Nyquist aralığı da, örnekleme periodu olarak $T = 1/2B = 1/(300) = 0.003\,\text{sn}$.

Örnek

Verilen $f(t) = \sin(20\pi\, t) + \sin(70\pi\, t) + \sin(50\pi\, t) + \cos(80\pi\, t) + \sin(40\pi\, t)$ işaretinin Nyquist miktarını ve Nyquist aralığını bulun.

Çözüm

Örnekleme frekansı veya Nyquist miktarı, işaret içindeki en yüksek frekanslı bileşene göre yapılacağından öncelikle en yüksek frekans elde edilmeye çalışılır. Bunun için işaret frekans gösterimine uygun düzenlenirse,

$$f(t) = \sin(2\pi(10)\,t) + \sin(2\pi(35)\,t) + \sin(2\pi(25)\,t) + \cos(2\pi(40)\,t) + \sin(20\pi(20)\,t)$$

Buna göre $f(t)$ işareti içindeki en yüksek frekans $\cos(2\pi(40)\,t)$ bileşeninde bulunan $B = 40\,\text{Hz}$ olarak saptanır. Buna göre Nyquist miktarı minumum örnekleme miktarı olan $2B$ olduğuna göre, değeri $F_N = 2B = 2.40 = 80\,\text{Hz}$ ve Nyquist aralığı da, örnekleme periodu olarak $T = 1/2B = 1/(80) = 0.0125\,\text{sn}$.

Örnek

Verilen $f(t)=\sin(60\pi\, t)+\sin(50\pi\, t)\cos(50\pi\, t)+\sin(70\pi\, t)$ işaretinin Nyquist miktarını ve Nyquist aralığını bulun.

Çözüm

Örnekleme frekansı veya Nyquist miktarı, işaret içindeki en yüksek frekanslı bileşene göre yapılacağından öncelikle en yüksek frekans elde edilmeye çalışılır. İlk bakışta verilen işaret içersindeki en yüksek frekansın $\sin(70\pi\, t)=\sin(2\pi(35)t)$ teriminden dolayı $B=35\,\text{Hz}$ gibi görünse de, bunun yanıltıcı olduğunu, $\sin(50\pi\, t)\cos(50\pi\, t)$ teriminden anlamaktayız. Bunun için işaret frekans gösterimine uygun düzenlenmeden önce işarette bulunan $\sin(50\pi\, t)\cos(50\pi\, t)$ teriminin $\sin a\cos a=0.5\sin 2a$ özdeşliğinden hareketle

$$\sin(50\pi\, t)\cos(50\pi\, t)=0.5\sin(2\times(50\pi)t)=0.5\sin(100\pi\, t)$$

değeri, $f(t)$ de yerine yazılırsa,

$$f(t)=\sin(60\pi\, t)+0.5\sin(100\pi\, t)+\sin(70\pi\, t)$$

elde edilir. Bu duruma göre işaret frekanslarına göre düzenlenebilir.

$$f(t)=\sin(2\pi(30)\, t)+\sin(2\pi(50)\, t)+\sin(2\pi(35)\, t)$$

Buradan $f(t)$ işareti içindeki en yüksek frekans $\sin(2\pi(50)\, t)$ bileşeninde bulunan $B=50\,\text{Hz}$ olarak saptanır. Buna göre Nyquist miktarı minumum örnekleme miktarı olan $2B$ olduğuna göre, değeri $F_N=2B=2.50=100\,\text{Hz}$ ve Nyquist aralığı da, örnekleme periodu olarak $T=1/2B=1/(100)=0.01\,\text{sn}$.

Örnek

Band genişlikleri 2 kHz ve 3 kHz olan $x_1(t)$ ve $x_2(t)$ işaretlerinin aşağıdaki verilen biçimlerinin Nyquist rate (F_N) değerlerini hesaplayın.

Çözüm

Verilen işaretlerin band genişlikleri $B_1=2\,\text{kHz}$ ve $B_2=3\,\text{kHz}$, F_N Nyquist oranı da $F_N=2B$ olarak alınırsa aşağıdaki tablo elde edilir.

İşaret	Nuquist oranı (F_N)	Açıklama
$2x_1(t)$	4 kHz	$F_N = 2B_1$
$x_1(2t)$	8 kHz	$B_1(x_1(2t)) = 2\times 2 = 4\,\text{kHz}$, $F_N = 2B_1$
$x_1(t/2)$	2 kHz	$B_1(x_1(t/2)) = 2/2 = 1\,\text{kHz}$, $F_N = 2B_1$
$x_2(t-3)$	6 kHz	$F_N = 2B_2$
$x_1(t) + x_2(t)$	6 kHz	$B_2 > B_1$ olduğundan $F_N = 2B_2$,
$x_1(t)x_2(t)$	10 kHz	$F_N = 2(B_1 + B_2)$
$x_1(t) * x_2(t)$	4 kHz	Konvülasyon küçük band (B_1) üzerine kurulu, $F_N = 2B_1$

Örnek

Verilen $f(t) = \sin c(100\pi\, t)$ işaretinin Nyquist miktarını ve Nyquist aralığını bulun.

Çözüm

Nyquist miktarını ve Nyquist aralığını bulmak için $f(t) = \sin c(100\pi\, t)$ işaretinin önce $F(\omega)$ Fourier transformasyonunu bulmalıyız. $f(t) = \sin c(100\pi\, t)$ işaretinin Fourier transformasyonunu önceki bilgilerimizden

$$\frac{W}{\pi}\sin c(W\,t) \Leftrightarrow rect(\frac{\omega}{2W})$$

olduğunu bildiğimize göre, $\sin c(100\pi\, t)$ fonksiyonunun Fourier transformasyonunu $rect(\frac{\omega}{2W})$ gibi bulmamız gerekiyor. Bunun için $\sin c(100\pi\, t)$ fonksiyonunu önce $\frac{W}{\pi}\sin c(W\,t)$ gibi düzenlememiz gerekecek. Bunun için

$$\sin c(100\pi\, t) = \frac{\pi}{100\pi}\left[\frac{100\pi}{\pi}\sin c(100\pi\, t)\right] = \frac{\pi}{100\pi}\left[\text{rect}(\frac{\omega}{200\pi}\right]$$

$$= 0.01\,\text{rect}(\frac{\omega}{200\pi})$$

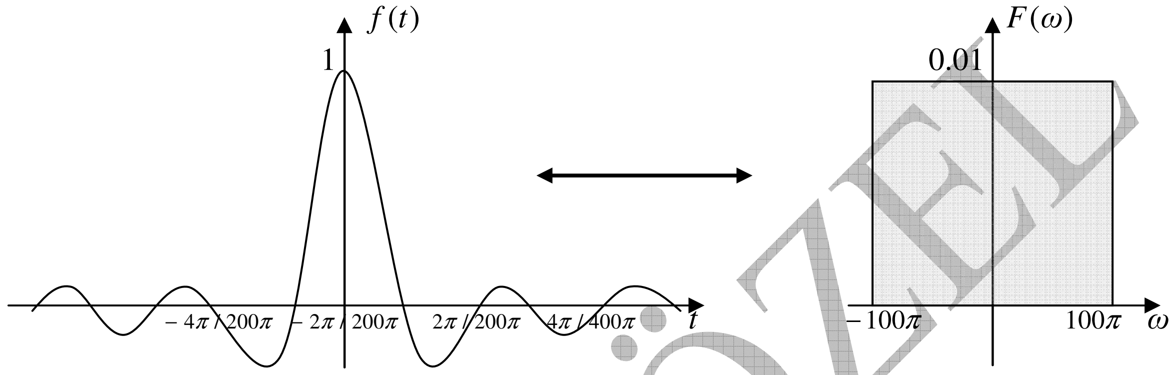
$$0.01\,\text{rect}(\frac{\omega}{200\pi}) \Leftrightarrow \text{rect}(\frac{\omega}{2W})$$

Band genişliği bulmak için $f(t) = \sin c(100\pi\, t)$ işareti $\frac{W}{\pi}\sin c(W\,t) \Leftrightarrow rect(\frac{\omega}{2W})$ ile karşılaştırılır. W değişkeni, rad/sn olarak frekans veya band genişliğini göstermektedir. Buna göre band genişliği

$$\text{sinc}(100\pi\, t) \Leftrightarrow 0.01\,\text{rect}(\frac{\omega}{200\pi})$$

$$\text{sinc}(100\pi\, t) = \frac{W}{\pi}\text{sinc}(W\, t)$$
$$W = 100\pi \text{ rad/sn veya } B = 50\,\text{Hz}$$

Elde edilenlere dayanılarak oluşan $\text{sinc}(100\pi\, t) \Leftrightarrow 0.01\,\text{rect}(\frac{\omega}{200\pi})$ dönüşümü aşağıdaki gibi gösterilir.



Şekil 11 Fourier transformasyonunun dualite özelliği

Bunların ışığında, Nyquist oranı olarak istenen $f_S = 2B$ ve Nyquist aralığı olarak istenen de $T = 1/2B$ dir. Buna göre Nyquist oranı $f_S = 2\times 50 = 100\,\text{Hz}$ ve Nyquist aralığı $T = 1/(2\times 50) = 0.01\,\text{sn}$

Örnek

Verilen işaretin Nyquist miktarını ve Nyquist aralığını bulun.

$$f(t) = \text{sinc}^2(5\pi\, t)$$

Çözüm

Verilen $f(t) = \text{sinc}^2(5\pi\, t)$ işaretinin Fourier transformasyonunu önceki bilgilerimizden

Verilen $f(t) = \text{sinc}^2(5\pi\, t)$ işaretinin Fourier transformasyonunu önceki bilgilerimizden

$$\frac{W}{2\pi}\sin c^2(\frac{W\,t}{2}) \Leftrightarrow \Delta(\frac{\omega}{2\,W})$$

Verilen $f(t) = \sin c^2(5\pi\, t)$ fonksiyonunun Fourier transformasyonunu bulmamız gerekiyor. Daha önceden

$$\frac{W}{2\pi}\sin c^2(\frac{W\,t}{2}) \Leftrightarrow \Delta(\frac{\omega}{2\,W})$$

olduğunu bildiğimize göre, $\sin c^2(5\pi t)$ fonksiyonunun Fourier transformasyonunu $\Delta(\frac{\omega}{2W})$ gibi bulmamız gerekiyor. Denklemde görülen "Δ" üçgen fonksiyonu operatörüdür. Bunun için $\Delta(\frac{\omega}{2W})$ fonksiyonunu önce $\frac{W}{2\pi}\sin c^2(\frac{W t}{2})$ gibi düzenlememiz gerekecek. Bunun için

$$\text{sinc}^2(5\pi t) = 30\frac{2\pi}{10\pi}\left[\frac{10\pi}{2\pi}\text{sinc}^2(\frac{10\pi t}{2})\right] = \left[\Delta(\frac{\omega}{2\times 10\pi}\right]$$

$$= \Delta(\frac{\omega}{20\pi})$$

$$\Delta(\frac{\omega}{20\pi}) \Leftrightarrow \Delta(\frac{\omega}{2W})$$

Band genişliği bulmak için $f(t) = \text{sinc}^2(5\pi t)$ işareti $\frac{W}{2\pi}\text{sinc}^2(\frac{W t}{2}) \Leftrightarrow \Delta(\frac{\omega}{2W})$ ile karşılaştırılır. *W* değişkeni, rad/sn olarak frekans veya band genişliğini göstermektedir. Buna göre band genişliği

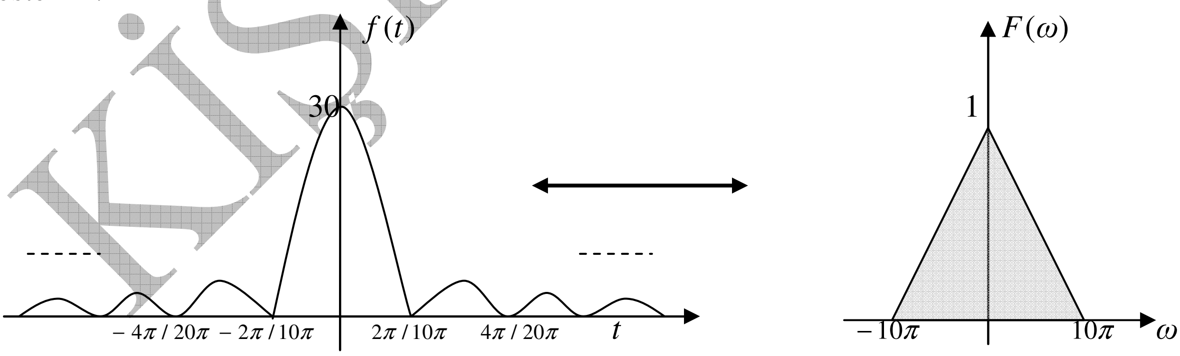
$$30\text{sinc}^2(5\pi t) \Leftrightarrow \Delta(\frac{\omega}{20\pi})$$

$$30\text{sinc}^2(5\pi t) = \frac{W}{\pi}\text{sinc}^2(\frac{W t}{2})$$

$$\frac{W}{2} = 5\pi$$

$W = 10\pi$ rad/sn veya $B = 5$ Hz

Elde edilenlere dayanılarak oluşan $30\sin c^2(5\pi t) \Leftrightarrow \Delta(\frac{\omega}{20\pi})$ dönüşümü aşağıdaki gibi gösterilir.

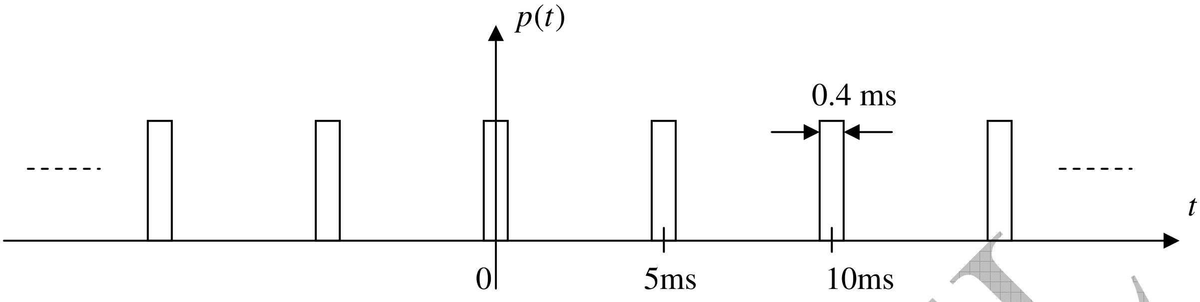


Şekil 12 Fourier transformasyonunun dualite özelliği

Bunların ışığında Nyquist oranı olarak istenen $f_S = 2B$ ve Nyquist aralığı olarak istenen de $T = 1/2B$ olduğuna göre, $f_S = 2\times(5) = 10$ Hz ve Nyquist aralığı $T = 1/(2\times(5)) = 0.1$ sn

Örnek

Örneklemenin aşağıdaki $p(t)$ darbe dizisiyle yapılması durumundaki örnekleme periodunu ve örnekleme frekansını bulun.



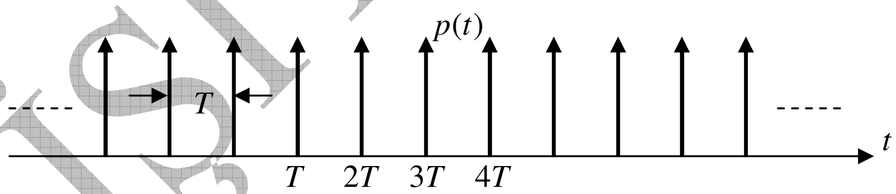
Şekil 13 Darbe dizisi

Çözüm

Görüldüğü gibi örnekleme fonksiyonu ideal olmayan impuls dizisi olarak genişliği $\Delta = 0.4$ msn olan darbe dizisi kullanılmıştır. Buna göre, $p(t)$ darbe dizisinin periodu 5 ms yani 0.005 sn olup, bu aynı zamanda örnekleme periodudur. Örnekleme frekansı ise $f_S = 1/0.005 = 200\,\text{Hz}$ veya $\omega_S = 400\pi$ rad/sn.

İDEAL İMPULS DİZİSİ

Örnekleme teorisini açıklayabilmek için, ideal impuls dizisini hatırlamamız gerekiyor. Çünkü ideal impuls dizisi en iyi bilinen örnekleme fonksiyonudur. Aşağıda ideal impuls dizisine ait $p(t)$ dizisi verilmiştir.

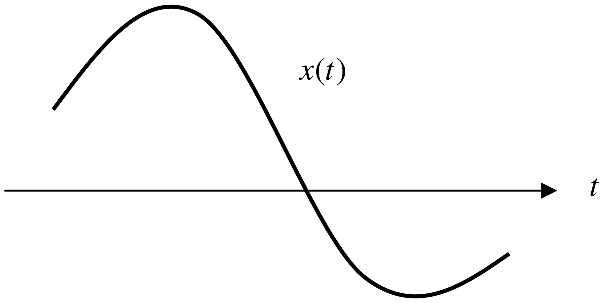


Şekil 14 İdeal impuls dizisi

Bilindiği gibi ideal impuls genişliği sıfır, dolayısıyla genliği sonsuz kabul edilen bir işaretti. Böyle bir işareti pratik anlamda gerçeklemek zor olduğundan, ideal olarak kabul edilmektedir. Bu özelliğiyle gerek modülasyonda gerekse ele alacağımız örnekleme teorisinde yoğun olarak kullanılmaktadır. Verilen ideal impuls dizisi aşağıdaki gibi ifade edilmekteydi.

$$p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT)$$

Daha önce bir $x(t)$ işaretinin böyle ideal impulslerden elde edildiğine dair bilgimiz mevcut olduğuna biliyoruz. Örneğin $x(t)$ işareti aşağıdaki görünümde olsun.



Şekil 15 Sürekli işaret

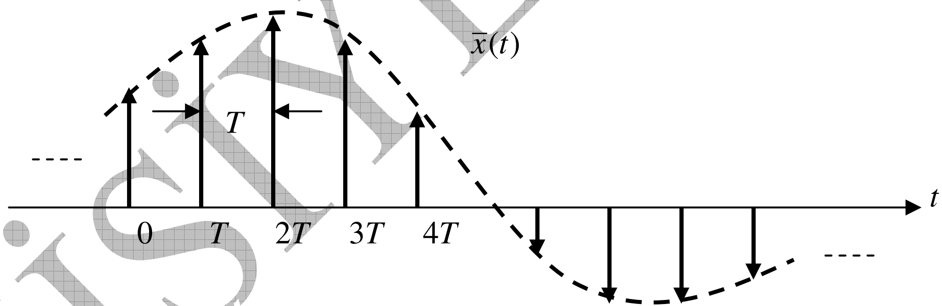
Buna göre yukarıdaki $p(t)$ impuls dizisinden oluşan $x(t)$ işaretini aşağıdaki gibi yazabiliriz.

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(\tau)\,\delta(t-\tau)$$

Bu işlem aşağıdaki gibi düşünülebilir. Yalnız impuls dizisinin T periodlu $(T, 2T, 3T, \cdots)$ olması dolayısıyla $\tau = kT$ olarak düşünülebileceğinden $x(t)$ ifadesi,

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT)\,\delta(t-kT)$$

gibi yazılabilecektir.

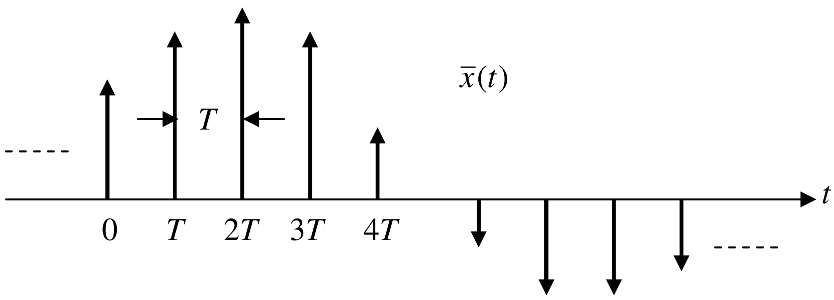


Şekil 16 İmpuls genlik modülasyonlu dalga

Buradan $x(t)$ artık yeni $\bar{x}(t)$ formuna uygun olarak

$$\bar{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT)\,\delta(t-kT)$$

biçiminde düşünülecektir. Buna göre $\bar{x}(t)$ işareti artık $(T, 2T, 3T, \cdots)$ gibi anlardaki impulslerden oluşmuştur. Buradan hareketle alternatif olarak ideal impuls dizisinden oluşan başlangıçta verilen herhangi bir $x(t)$ işaretinin yeni görüntüsü aşağıdaki gibi olacaktır.



Şekil 17 İmpuls genlik modülasyonu : modüle edilen ideal impuls dizisi

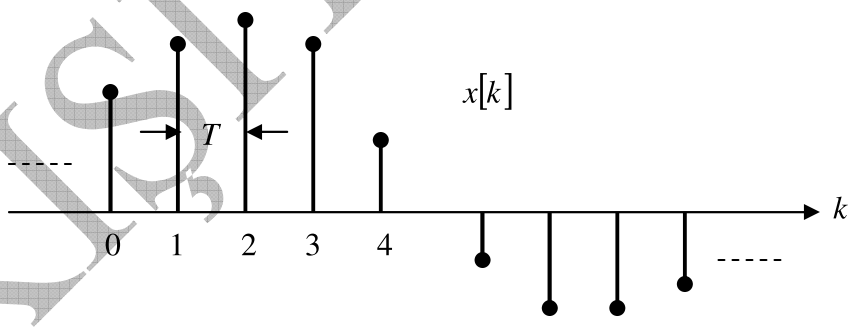
Görüldüğü gibi başlangıçtaki $x(t)$ işareti, modülasyon yapan işaret gibi davranarak, $p(t)$ ideal impuls dizisini modüle etmiştir veya $p(t)$ impuls dizisi, $x(t)$ işareti tarafından modüle edilerek $\bar{x}(t)$ üretilmiştir. Elde edilen $\bar{x}(t)$ işaretide aslında bir tür impuls dizisidir, ancak genlik değişimlerinden dolayı artık genliği modüle edilmiş impuls dizisidir.

Ayrık İşaret

Yukarıda elde edilen $\bar{x}(t)$ işaretinin aslında daha önce ifade edilen $\bar{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT)\,\delta(t-kT)$ ifadesi gereği, $x(t)$ olacağını düşünmekteyiz. Elde edilen $\bar{x}(t)$ işareti, başlangıçtaki $x(t)$ işaretinin $(T, 2T, 3T, \cdots)$ anlarında tanımlı olmak üzere $x(kT)$ ifadesinden elde edilmektedir. Eğer $x[k] = x(kT)$ olarak alınırsa,

$$\bar{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\,\delta(t-kT)$$

gereği aşağıdaki $x[k]$ ayrık işareti elde edilmektedir.



Şekil 18 Ayrık işaret : $x[k]$ ayrık dizisi: İmpuls genlik modülasyonu

Görüldüğü gibi, $x[k]$, $k = 0,1,2,\cdots$ biçimindeki dizi yapısında olan ayrık işaretin aslında "k" ya göre zaman serisi olduğu da düşünülebilir. Buna göre $x(t)$, $\bar{x}(t)$ ve $x(kT)$ işaretlerinden başlanarak $x[k]$ biçimindeki ayrık işaret elde edilmiştir. Buradan $x(kT)$ olarak örneklenmiş işaretin aslında

$$x[k] = x(kT)\ , \qquad k = 0,1,2,\cdots$$

gibi ayrık işarete dönüştüğünü görmekteyiz. Bu anlamda örneklenmiş işaretle iç içe bir kavram olan ayrık işareti iyi anlamalıyız. Ayrık işaretin elde edildiği

$x[k] = x(kT)$

yaklaşımından dolayı $x[k]$ ayrık işaretinin aynı zamanda bir dizi olduğu düşünülürse, bu ayrık dizinin k.ncı değeri, $\bar{x}(t)$ (örneklenmiş veya modüle edilmiş) işaretinin k.ncı örneğine eşit olduğunu görmekteyiz. Sonuçta $x(t)$ işaretinden başlayarak önce $\bar{x}(t)$, sonrasında da $x[k]$ ayrık işareti aşamasına gelinmiştir. Diğer bir deyişle orijinal $x(t)$ işareti, $x[k]$ ayrık dizisiyle ifade edilebilir forma getirilmiştir. Bu yolla, gerek $x(t)$ gerekse onun genlik modülasyonlu veya bir tür örneklenmiş hali olan $x(kT)$ ve de $x[k]$ ayrık formu arasındaki ilişkileri tanımlamış olmaktayız. Bunların sonucunda $x(t)$ orijinal sürekli zaman (analog) işareti, $\bar{x}(t)$ işareti ise analog işaretin ($t = T, 2T, 3T, \cdots, kT$) anlarında tanımlı ideal impulslerden oluşmuş impuls genlik modülasyonlu bir başka formdaki analog işaret iken, nihayetinde $x[k]$ artık bir dizi olarak elde edilmiştir. Buna göre $x(t)$ ve $\bar{x}(t)$ elemanları (örnekleri) zamanda tanımlı olmasına karşın, $x[k]$ değerleri $k = 1,2,3,\cdots$ gibi sabit tam sayılardan oluşan standart dizi görünümündedir.

Buna göre $k = 1$ için $x[1]$ değeri, $t = 1 \times T = T$ olarak $\bar{x}(t)$ işaretinin $\bar{x}(1 \times T) = \bar{x}(T)$ anındaki örnek iken, Buna göre $k = 2$ için $x[2]$ değeri, $t = 2 \times T = 2T$ olarak $\bar{x}(t)$ işaretinin $\bar{x}(2 \times T) = \bar{x}(2T)$ anındaki örneğe karşılık gelmektedir. Nihayetinde $k = k$ için $x[k]$ değeri, $t = k \times T = kT$ olarak $\bar{x}(t)$ işaretinin $\bar{x}(k \times T) = \bar{x}(kT)$ anındaki örneğine karşılık gelecektir. Bu yaklaşımın ardından, ideal örnekleme aşamasına geçebiliriz.

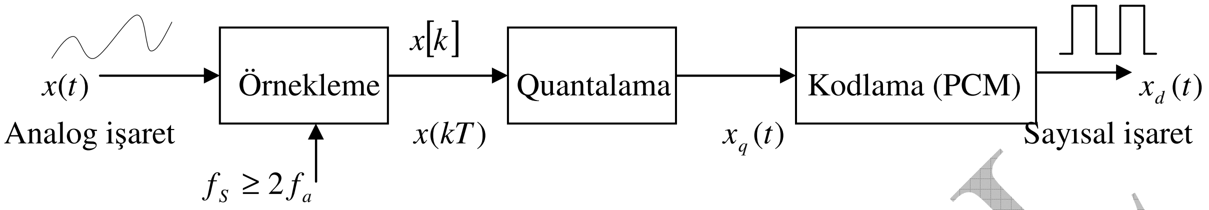
Burada bilinmesi gereken $x(t)$ sürekli zaman işareti iken $x[k]$, ayrık zaman işaretidir ($x(t) \overset{t=kT}{\leftrightarrow} x[k]$). Bu açıdan ayrık zaman işareti, $\bar{x}(t)$ veya dolaysıyla $x(t)$ sürekli zaman işaretinin ($t = T, 2T, 3T, \cdots, kT$) anlarındaki impulslerin genliklerini (genlikleri değiştirilmiş) $k = 1,2,3,\cdots$ değişkenleriyle gösteren, $x[k]$ tipli standart bir dizidir. Buna göre $x[1]$, $x(t)$ nin $t = T$ anındaki değerini (örneğini) gösteren impuls iken, $x[2]$, $\bar{x}(t)$ nin $t = 2T$ anındaki değerini (örneğini) gösteren impuls iken nihayet $x[k]$, $x(t)$ nin $t = kT$ anındaki değerini (örneğini) gösteren impuls olarak düşünülmelidir. Burada impulslerden oluşan $\bar{x}(t)$ işaretinin $k = (-\infty, \infty)$ için sonuçta $x(t)$ işareti olduğu unutulmamalıdır.

Ayrık İşaretlerin Spektrumu

Daha önce $x(t)$ gibi sürekli-zaman işaretin Fourier transformasyonu CTFT olarak alınabildiği gibi, şimdi de $x[k]$ gibi ayrık-zaman işaretin de Fourier transformasyonu alınabilir. Bu tip transformasyona, ayrık-zaman Fourier transformasyonu (DTFT) denilmektedir. Fourier transformasyonunun temelinde periodik işaret anlayışı yattığı için, ayrık Fourier transformasyonunda da bu anlayış söz konusudur. Ayrık işaretlerin bu anlamda periodu $\Omega = \omega T = (0, 2\pi)$ biçiminde yalnızca $(0, 2\pi)$ uzunluğunda veya aralığındadır. Buna göre farklı frekanstaki bileşenler (unique) yalnızca $(0, 2\pi)$ aralığında olacaklardır. Oysaki bu aralığın sürekli-zaman işaretler için sonsuz olduğunu biliyoruz ($\omega = (-\infty, \infty)$). Ayrık işaretlerin spektrumunun $(0, 2\pi)$ aralığında olması, ayrık işaretlerin 2π periodlu olmasından kaynaklanmaktadır ($e^{jk\Omega} = e^{j(\Omega + 2\pi)k}$). Bu ifadedeki her "$k$" değeri için yeni bir bileşen söz konusudur . Duruma sürekli-zaman işaret açısından baktığımızda $e^{j\omega t} = e^{j(\omega + 2\pi)t}$, burada $\omega = (-\infty, \infty)$ aralığın söz konusu olduğunu görmekteyiz.

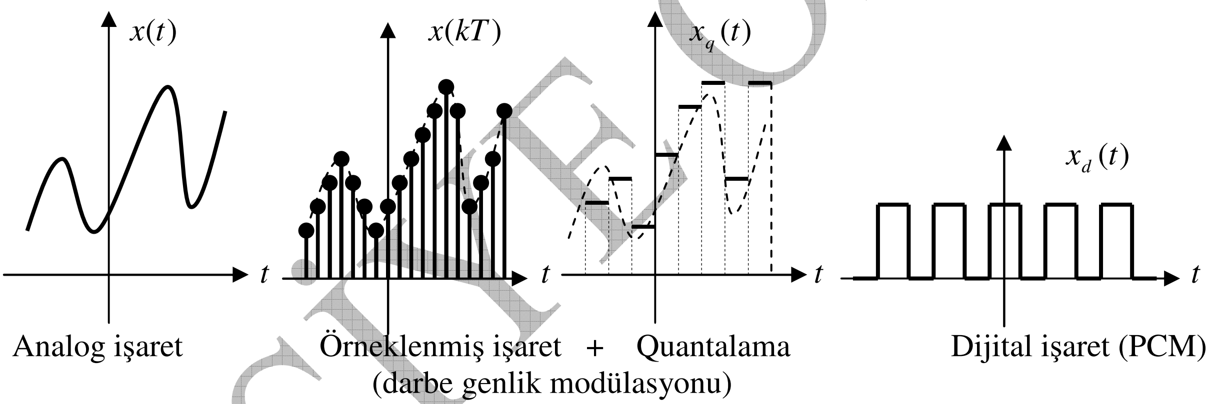
Dijital İşaret

Sürekli-zaman, onun örneklenmesiyle oluşan ayrık-zaman işaret derken, bunlara ek olarak bahsedilebilecek dijital işaret de vardır. Dijital işaret de zamanın belirli anlarında tanımlı yine bir ayrık-zaman işaret olup, ondan farklı olarak **quantalama** (quantization) yöntemiyle elde edilir. Aşağıda sayısal işaretin elde edilmesine yönelik blok diagram verilmiştir.



Şekil 19 Dijital işaretin elde edilmesi

Görüldüğü gibi, girişteki sürekli bir $x(t)$ işaretinin $f_S \geq 2f_a$ örnekleme kuralına bağlı olarak örneklenmesiyle $x(kT)$ örenklenmiş işaret dolayısıyla $x[k]$ ayrık işaret elde edilmiştir. Ayrık işaretin quantalanması sonucu, darbe kod modülasyonu (Pulse Code Modulation, PCM) gibi uygun bir kodlama tekniği ile sayısal veya dijital işaret elde edilmektedir. Şekilden görüldüğü gibi sonsuz genliğe sahip $x(t)$ işareti, sonlu genliğe sahip dijital $x_d(t)$ işaretine dönüşmüştür.



Şekil 20 Analog –dijital işaret dönüşümü

Şekilden de görüldüğü gibi ayrık işareti, dijital işaretten ayıran süreç, quantalamayla başlamaktadır. Quantalamayla sonsuz genliğe sahip olan $x(kT)$ örneklenmiş işaretin genlik seviyeleri "0 ve 1" ile ikili gösterime uygun binary forma getirilmek üzere hazırlanmaktadır. Her genlik seviyesi uygun uzunluktaki ikili formatta gösterilmeye uygun biçimde kodlanmaktadır. Bu işlem quantalama işlemidir. Quantalama işleminden sonra, son adım olarak oluşan format darbe kod modülasyonuyla dijital işarete dönüşür.

Özellikle quantalama işleminde ikili gösterime uygun olarak, örneklenmiş işaret, diğer bir deyişle darbe genlik modülasyonlu işaret (PAM), uygun değerlere yuvarlatılır. Örneğin örneklenmiş işaretin PAM değerleri 1.2, 1.9, 2.25, 2.87, 3.3, 3.7 olsun. Böyle bir ayrık dizinin $x[k],\ k = 0,1,2,3,4,5$ quantalama işlemi aşağıdaki gibi olabilir.

Örneklenmiş işaretin genliği (PAM)	Kuanta seviyesi	Kodlama
1.2	1	01
1.9	1	01
2.25	2	10
2.87	2	10
3.3	3	11
3.7	3	11

Şekil 21 Kuantalanmış prosesi

Görüldüğü gibi değişik genliklerde elde edilen örneklenmiş işaret, kuantalama işleminde değişik seviyelere yuvarlatılarak, kodlanmaktadır. Bu nedenle işaretin belli genlikleri ya aynı kuanta seviyesine yuvarlatılmakta, ya da aralarında çok az fark olmasına rağmen, biri diğerinden farklı seviyeye quantalanmakta veya yuvarlatılmaktadır. Bu nedenle bir hata olabileceği düşünülebilir. Bu tür yuvarlatmadan kaynaklanan hatalar, *quantalama gürültüsü* olarak anılır. Bunun önüne geçmek için, yani hassasiyeti artırmak için kuanta seviyesi aralığı artırılabilir. Örneğin şekilde seviyeler (1-3) arasında görülmektedir. Oysa bu, örneğin (1-6) olsaydı, aşağıdaki gibi bir durum olabilirdi.

Örneklenmiş işaretin genliği (PAM)	Kuanta seviyesi	Kodlama
1.2	1	001
1.9	2	010
2.25	3	011
2.87	4	100
3.3	5	101
3.7	6	110

Şekil 22 Kuantalama prosesi

Bununla daha rasyonel bir kuantalama ve kodlama yapılmış olunurdu. Ancak örneklenmiş işaretin genliğindeki farklılıklardan ötürü, herşeye rağmen bu yöntemde çare olmayabilir. Sonuçta quantalamadan kaynaklanan bir hata hep var olacaktır. Dolayısıyla quantalama prosesine göre uygulanacak darbe kod modülasyonu (PCM) ile elde edilecek sayısal işaretin, başlangıçtaki örnek değerlerini tam yansıtması mümkün olmayacaktır. Dolayısıyla, sayısal bir işaretten tekrar, sürekli işaretin elde edilmesi quantalama prosesinden dolayı mümkün olmayacaktır. Çünkü quantalama prosesiyle yuvarlatmalar yapıldığı için, geriye dönüş zorlaşmaktadır. Bu nedenle sayısal işaretlerin elde edilmesinde, quantalama prosesi önemlidir. Ne kadar hassas yapılırsa o kadar iyi sonuç alınır. Bu anlamda mevcut quantalama işlemini daha doğru ve hassas kılmak üzere, *düzgün quantalama* olarak anılan yöntem uygulanmaktadır.

Yukarıdaki tablo göz önüne alındığında, görüldüğü gibi quantalama seviyesi (1-6) olarak daha geniş alınmıştır. Aslında örneklenmiş işaretin genlik değişimlerine bağlı olarak kuantalama işlminin nasıl yapılacağını gösteren standart bir formül mevcuttur.

$$a = \frac{2A_{\max}}{2^n}$$

denklemiyle sağlanır. Bu ifadede,

$a =$ kuantalama aralığı, quantalama adımı
$A_{\max} =$ işaretin maksimum genliği
$n =$ bit sayısı
$2^n =$ kuanta seviyesi

Örneklenmiş işaretimiz 1.2, 1.9, 2.25, 2.87, 3.3, 3.7 dizisini ele alalım. Burada $A_{\max} = 4$ volt ve quantalamayı 2 bitle yapmak istiyorsak ($n = 2$) için quanta seviyesi (2^2) olarak 4 seviyeden oluşacaktır. Buna göre quantalama aralığı,

$$a = \frac{2A_{\max}}{2^n} = \frac{2 \times 4}{2^2} = 2$$

Kuanta seviyesini 4 adet olarak (0,1,2,3) gibi belirleyebiliriz. Buna göre quantalama seviyesi verilen diziyi kapsamak üzere $(0-1) \rightarrow 0$, $(1-2) \rightarrow 1$, $(2-3) \rightarrow 2$, $(3-4) \rightarrow 3$ şeklinde aşağıdaki görünümde elde edilir.

Örneklenmiş işaretin genliği (PAM)	Kuanta seviyesi	Kodlama
1.2	1	01
1.9	1	01
2.25	2	10
2.87	2	10
3.3	3	11
3.7	3	11

Şekil 23 Kuantalama prosesi

İDEAL İMPULS DİZİSİ VE ÖRNEKLEME

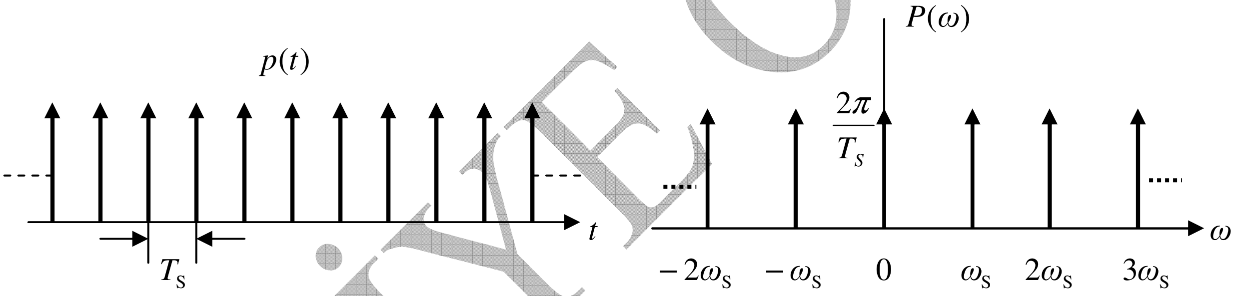
Örnekleme amacıyla kullanılabilecek darbe dizisi, delta, sinc, impuls dizisi ve sıfır-dereceli tutucu gibi çeşitli örnekleme fonksiyonları ve sistemleri vardır. Bunların içinde yukarıda detaylarıyle ele aldığımız impuls dizisi olarak anılan

$$p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT)$$

fonksiyonu **ideal örnekleme fonksiyonu** olarak anılmaktadır. Teorik olarak örneklemenin bu fonksiyonla yapılmasından dolayı da **ideal örnekleme**den söz edilir. Örneklemenin ideal olmasının sebebi, örnekleme fonksiyonu olarak kullanılan impuls dizisinin, ideal impuls dizisi olmasındandır. İdeal impuls veya dolayısıyla ideal impuls dizisi kavramıyla, işaret genişliği yani impuls genişliği sıfır kabul edilmektedir. Aşağıda böyle bir $p(t)$ impuls dizisi ve spektrumu yani Fourier transformasyonu

$$p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_S) \Leftrightarrow P(\omega) = \frac{2\pi}{T_S} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_S) \ , \quad \omega_S = \frac{2\pi}{T_S}$$

bağıntısıyla aşağıdaki gibi görülmektedir.

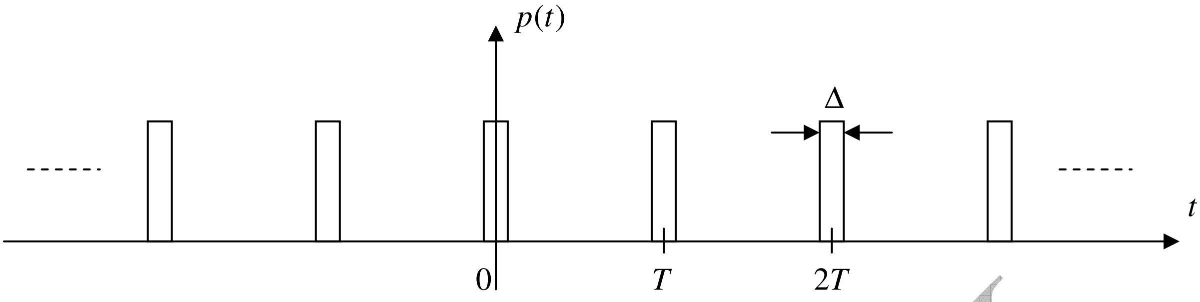


Şekil 24 İmpuls dizisi ve spektrumu

$p(t)$ Impuls dizisi ile verilen ve impuls periodu anlamına gelen T_S, örnekleme periodu, dolayısıyla da $f_S = 1/T_S$ olarak da verilen, örnekleme frekansıdır. Verilen T_S örnekleme periodunun amacı, örneklenecek herhangi bir, örneğin $f(t)$ gibi bir sürekli-zaman işaretinden örnekler T_S aralıklarıyla alınacaktır. Bunu $p(t)$ zaman uzayından görmekteyiz. Bu şekilde alınacak örneklerin, yeterli olup olmaması işaretin sahip olduğu düşünülen en yüksek frekans olan B Hz değerine göre saptanmaktadır. Buna göre $T_S < 1/2B$ veya $f_S > 2B$ alınması durumunda, yeterli veya sağlıklı örnekleme yapılabilmektedir. Sağlıklı örneklemeden kasıt, $f(t)$ işaretinin örneklerinden tekrar elde edilebilmesidir. Bunun içinde aslında en başta gelen şart, $f(t)$ işaretinin B gibi frekans veya band genişliği ile gösterilebilecek band sınırlı işaret olması gereğidir.

Yukarıda $p(t) \Leftrightarrow P(\omega)$ dönüşümü ve onu sağlayan şekilden de görülebileceği gibi periodik $p(t)$ ideal impuls dizisinin $P(\omega)$ spektrumu sonsuzdur. $p(t)$ zaman uzayında T_S aralığıyla sıralanan impulsler veya bu aralığa göre alınan örnekler, doğal olarak $P(\omega)$ frekans uzayında da $f_S = 1/T_S$ Hz veya $\omega_S = 2\pi/T_S$ rad/sn aralığıyla alınmış olacaktır. T_S zaman uzayında, ω_S ise frekans uzayındaki örnekler arası mesafeyi göstermektedir.

Uygulamada örnekleme fonksiyonu olarak ideal impuls dizisi gibi ideal fonksiyonlar mümkün olmadığından daha ziyade, belirli genişlikleri olan aşağıdaki görünümde olan darbe dizileri kullanılmaktadır.

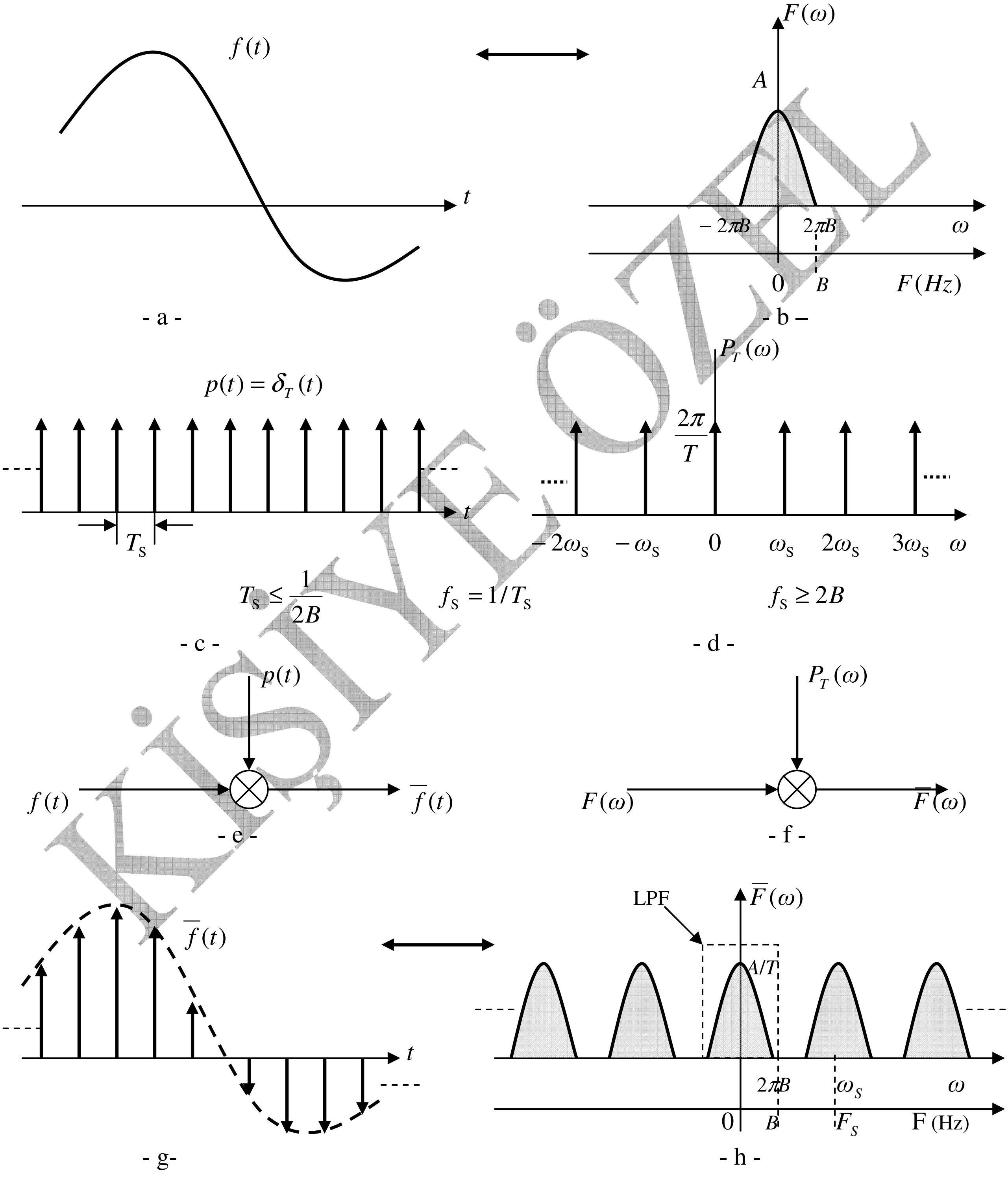


Şekil 25 Örnekleme fonksiyonu : Darbe dizisi

Ancak biz aksi vurgulanmadığı sürece basitliği açısından ideal örneklemeyi göz önünde bulunduracağız. Bu nedenle bu bölümde ideal örneklemeyi genel hatlarıyla ele almaya çalışacağız. Örneklemenin ilk amacı sürekli-zaman işareti ayrık zaman işaretine dönüştürmek olduğundan bunun ilk kuralı, örneklenecek işaretin band sınırlı olması gerektiğidir. Eğer örneklenecek işaret band sınırlı değilse, teorik anlamda örneklenmesi mümkün değildir. Bu göz önüne alınarak ideal örneklemenin aşamaları aşağıda şekil, denklemler ve açıklamalarla verilmiştir.

İDEAL ÖRNEKLEME

Aşağıdaki şekilden görüldüğü gibi ideal örnekleme kavramı, (c) de kullanılan sıfır genişlikli impuls dizisinin örnekleme fonksiyonu olarak kullanılmasından gelmektedir. Şekil (a) da verilen örneklenmesi istenen $f(t)$ işaretinin band sınırlı olduğunu (b) deki $F(\omega)$ spektrumundan görebilmekteyiz. Buna göre uygun örnekleme frekansı seçilerek ($f_S \geq 2B$) örnekleme işlemine geçilebilir.



Şekil 26 İdeal örnekleme ve Fourier spektrumu

Şekilden görüldüğü gibi ideal örnekleme kavramı, (c) de kullanılan sıfır genişlikli impuls dizisinin örnekleme fonksiyonu olarak kullanılmasından gelmektedir.

Şekil (c) ve (d) den görüldüğü gibi (c)) de band sınırlı olmayan $\delta_T(t)$ dizisi ideal örnekleyici olarak kullanılmıştır. Bunun neticesinde (g) deki $\overline{f}(t)$ örneklenmiş işaretin spektrumu (h) de $\overline{F}(\omega)$ olarak band limitsiz olarak elde edilmiştir. Bunun sebebini fonksiyonlardan birinin band limitsiz olduğu modülasyondaki yaklaşımdaki gibi açıklamak mümkündür. Şekil (c) de sonsuz impulsden oluşan impuls dizisinin (ideal örnekleyici), (d) deki spektrumuna bakıldığında sonsuz impuls içermesi modülasyondaki yaklaşımdan biraz farklı bir durum oluşturur. Modülasyonda, taşınacak işaretin yalnızca sağ ve solda bulunan yalnızca iki impulsi yerine, şimdi sonsuz tane impulsi olan $\delta_T(t)$ veya $\delta_T(\omega)$ impuls dizisi kullanıldığından $\overline{F}(\omega)$ spektrumu sonsuz tane $F(\omega)$ spektrumunun kopyasından oluşmuştur. Çünkü impulsin bir başka fonksiyonla çarpılması sonucu, tekrar çarpılan fonksiyonun elde edilmesi, impuls fonksiyonlarının en önemli özelliği olup, bundan dolayı ideal fonksiyon veya ideal örnekleyici olarak tercih edilmekte ve kullanılmaktadır. Aşağıda verilecek örneklemenin matematiksel tanımından da bunları çıkarmak mümkündür.

Diğer yandan spektrumdan da görüldüğü gibi işaret B ile band-sınırlıdır. İşareti $f(t)$ örneklemek için saniyedeki örnek sayısını gösteren örnekleme frekansını F_S kabul edelim. Örneklemeyi yapmak üzere bir örnekleme fonksiyonuna (işaretine) ihtiyacımız olacaktır. Bunuda T periodlu birim impuls dizisi (unit impuls train) olarak $\delta_T(t)$ fonksiyonuyla gösterelim (şekil (c)). Şekil (c) den de görüldüğü gibi örnekleme fonksiyonu olarak birim impuls fonksiyonu $\delta(t)$ kendisini her bir T periodunda tekrarlayan $\delta_T(t)$ özelliğinde ortaya çıkmıştır. Kullanılan $\delta_T(t)$, impuls örnekleme fonksiyonu olarak adlandırılır. Örneklemeyi belirleyen en önemli fonksiyondur. Kullanılan $\delta_T(t)$ impuls dizisi, **ideal örnekleme fonksiyonu** olarak anılır. Çünkü genişliği sıfır kabul edilen darbelerden oluşmaktadır. İdeal kabul edilmesi, uygulamada farklılık olabileceğine de işarettir. Pratikte sıfır genişlikli ideal olarak kabul edilen impuls dizisi yerine, genişliği τ veya Δ olarak kabul edilen belli genişlikteki darbe dizisi ile örnekleme yapılmaktadır. İleride bu tip örneklemeyide göreceğiz. Darbe genlik modülasyonu (pulse amplitude modulation, PAM) olarak kabul edilen modülasyon belli genişlikteki drbelerle yapılan modülasyon prensibine dayanmaktadır.

Bu bölümde yukarıda şekli verilen ideal örnekleme dikkate alınmaktadır. İmpuls dizisinden oluşan Örnekleme bu fonksiyonun perioduna göre yapılıyor olsa da aslında bu değer $f(t)$ işareti tarafından dolaylı olarak $T \leq \dfrac{1}{2B}$ biçiminde belirlenmektedir. Dolaysıyla örnekleme fonksiyonu $\delta_T(t)$ nin T periodunu bunun dışında belirleme durumu söz konusu olamaz. Böyle bir teşebbüs "oversampling veya undersampling" olarak anılan durumlara sebebiyet verir ki bunlarda örnekleme teorisinde arzulanmayan durumlardır.

Vurgulandığı gibi şekil (c) de $\delta_T(t)$ olarak sonsuz impulse sahip **idal örnekleyicinin** (impuls dizisi) (d) de görülen spektrumu göz önüne alınırsa, yine sonsuz sayıda impulslerden oluştuğu görülecektir. Bu enterasandır. Çünkü zaman domeninde sonsuz tane impulsden oluşan impus dizisi (ideal örnekleyici), frekans domeninde de sonsuz tane impulse sahip görünmektedir. Diğer bir deyişle impuls dizisinin spektrumu da yine impuls dizisidir. Zaman domeninde T_S periodlu olan impuls dizisi, spektrumda bu kez f_S veya ω_S frekans aralıklı dizilmiştir.

T_S veya f_S aralıklı (periodlu) her bir impulse, $F(\omega)$ spektrumundaki band sınırlı işaretin karşılık geldiğini düşünecek olursak, sonuçta (h) de görülen $\overline{F}(\omega)$ spektrumunun sonsuz sayıda $F(\omega)$ kopyalarından oluşacağını hem grafik hemde model olarak da görmek mümkündür. Bu nedenle $\overline{F}(\omega)$ spektrumu aynı kopyalardan oluşan sonsuz band genişliğindedir.

Örneklemenin ideal örnekleyici durumundaki impuls dizisinin T_S perioduna ve $f(t)$ işaretinin içerdiği en yüksek B frekansına göre, $T_S \le \dfrac{1}{2B}$ ifadesiyle belirlenmektedir. Bazen basitlik açısından T_S yerine, T alabileceğimize dikkat edelim. Buradaki T periodu örnekleme periodu (T_S) olup, örnekler arasındaki ardışık zamanı göstermektedir. Bu şekilde $T, 2T, 3T, \cdots, nT$ olacak şekilde örnek noktaları saptanır. Bunlar $f(t)$ işareti baz alınarak yapıldığından, zaman ekseninde olacağından örnek anları ($T, 2T, 3T, \cdots, nT$) aynı zamanda "t" ye karşılık gelecektir. Bundan dolayı daha doğru gösterim olarak $t = T, 2T, 3T, \cdots, nT$ alınması daha tutarlı olacaktır. Yani örnekler "t" nin $T, 2T, 3T, \cdots, nT$ anlarında gerçeklenecek demektir. Şekil (e) deb de görülebileceği gibi örnekleme band-sınırlı işaretin $f(t)$, impuls örnekleme fonksiyonu (ideal örnekleyici) $p(t) = \delta_T(t)$ ile çarpımı ($f(t) \times p(t)$) olarak gelişecektir.

$$\begin{aligned}\overline{f}(t) &= f(t) \times \delta_T(t) \\ &= f(t)\, p(t)\end{aligned}$$

$\overline{f}(t)$ örneklenmiş işarete ait fonksiyondur. $\delta_T(t)$ impuls fonksiyonunu temsil eden $p(t)$ örnekleme fonksiyonunun örneklemeye uygun biçiminin zaman domeninde

$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$$

ve frekans domenindeki değerinin ise

$$P_T(\omega) = \frac{2\pi}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_S)$$

olduğunu yukarıda göstermiştik. Eğer örnekleme $f(t)$ nin $t = T, 2T, 3T, \cdots, nT$ olacak şekilde "n" tane noktasına göre yapılırsa verilen ifade

$$\begin{aligned}\overline{f}(t) &= f(t)\, p(t) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT)\, \delta_T(t - nT)\end{aligned}$$

olarak elde edilecektir (şekil (g)). Denklem ve Şekil (g) ye göre işaret fonksiyonu $f(t)$, T periodlu örnekleme fonksiyonu $\delta_T(t)$ ile çarpıldığından bunun anlamı $f(t)$ işareti de her bir T periodunda kendisini tekrarlayacak demektir. Bir başka deyişle $\delta_T(t)$ ile $f(t)$ işaretinden her bir T anında bir örnek alınacaktır. Burada üzerinde durulması gereken ayrıntı $\delta_T(t)$

fonksiyonunun da T periodlu olduğundan dolayı trigonometrik Fourier serisi ile ifade edilebilmesi durumudur. Bunun karşılığının daha önceki bölümlerden (Fourier serisi)

$$\delta_T(t) = \frac{1}{T}[1 + 2\cos\omega_s + 2\cos 2\omega_s + 2\cos 3\omega_s + \cdots] \qquad \omega_s = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\, f_S$$

olduğunu biliyoruz. Buna göre $\overline{f}(t) = f(t) \times \delta_T(t)$ ifadesini tekrar düzenlersek

$$\overline{f}(t) = f(t)\,\delta_T(t) = \frac{1}{T}[f(t) + 2f(t)\cos\omega_s + 2f(t)\cos 2\omega_s + 2f(t)\cos 3\omega_s + \cdots]$$

Şekil (g) gibi elde edilir. Buradan $\overline{f}(t)$ nin spektrumu olan $\overline{F}(\omega)$ yi bulmak için $\overline{f}(t)$ nin Fourier transformasyonunun alınması gerekecektir.

$$F\{\overline{f}(t)\} = \frac{1}{T}\left[F\{f(t)\} + F\{2f(t)\cos\omega_S\} + F\{2f(t)\cos 2\omega_S\} + F\{2f(t)\cos 3\omega_S\} + \cdots\right]$$

denklemde görülen $f(t)\cos\omega_S$ ifadesinin Fourier transformasyonunu da daha önceki Fourier transformasyonu bölümünden

$$\begin{aligned} F\{f(t)\cos\omega_0 t\} &= \frac{1}{2} f(t)[e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}] \\ &= \frac{1}{2}[f(t)\,e^{j\omega_0 t} + f(t)\,e^{-j\omega_0 t}] \\ &= \frac{1}{2}[F(\omega - \omega_0) + F(\omega + \omega_0)] \end{aligned}$$

olduğunu biliyoruz. Bu yaklaşım denklemdeki her terime aynen

$$F\{f(t)\cos n\omega_S\} \;\Leftrightarrow\; \frac{1}{2}[F(\omega - n\omega_S) + F(\omega + n\omega_S)]$$

gibi uygulanırsa

$$\begin{aligned} F\{\overline{f}(t)\} &= \frac{1}{T}\left[F(\omega) + F(\omega - \omega_S) + F(\omega + \omega_S) + F(\omega - 2\omega_S) + F(\omega + 2\omega_S) + F(\omega - 3\omega_S) + F(\omega + 3\omega_S) + \cdots\right] \\ &= \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} F(\omega - n\omega_S) \qquad\qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \cdots \\ &= \overline{F}(\omega) \end{aligned}$$

elde edilir. $\overline{F}(\omega)$ ifadesini biraz daha kompakt olacak formda toparlarsak $\overline{f}(t)$ nin Fourier transformasyonu olarak $\overline{F}(\omega)$

$$\overline{F}(\omega) = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} F(\omega - n\omega_S)$$

elde edilmektedir (şekil (h)). Bu denklemin zaten Şekil (b) ile (d) nin çarpımlarından oluştuğu görülmektedir.

$$\overline{F}(\omega) = F(\omega)\, P_T(\omega)$$
$$= f(t) * p(t)$$

Alternatif yol

Örneklenmiş işareti gösteren

$$\overline{f}(t) = f(t)\, p(t)$$
$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT)\, \delta_T(t - nT)$$

ifadenin spektrumunu bulmak amacıyla, $\overline{F}(\omega)$ Fourier transformasyonu aşağıdaki gibide hesaplanabilirdi.

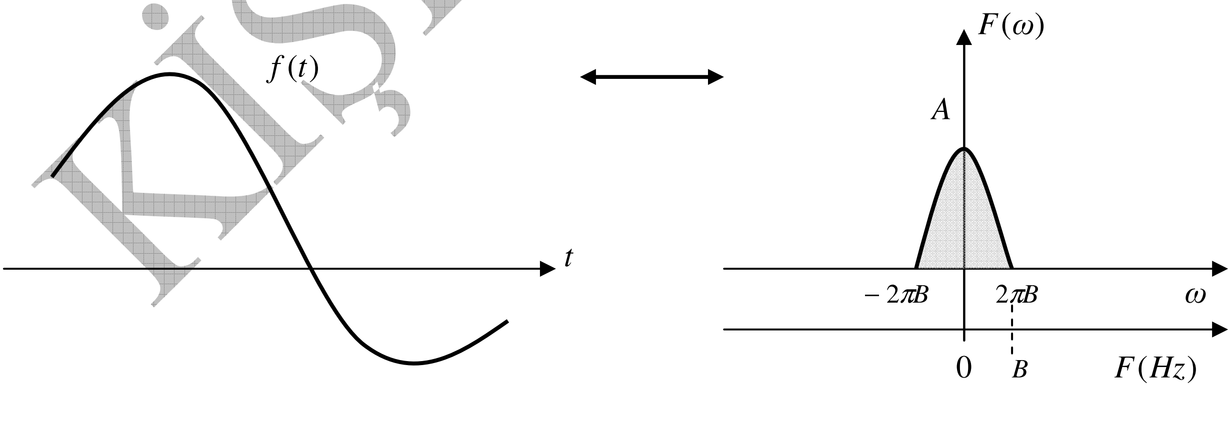
$$F\{\overline{f}(t)\} = F\left\{\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT)\, \delta_T(t - nT)\right\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT)\, F\{\delta_T(t - nT)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT)\, e^{-j\omega nT}$$
$$F\{\delta_T(t - nT)\} = e^{-j\omega nT}$$

$F\{\overline{f}(t)\} = \overline{F}(\omega)$ olduğundan,

$$\overline{F}(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT)\, e^{-j\omega nT}$$

Örneklenmiş İşaretin Spektrumu

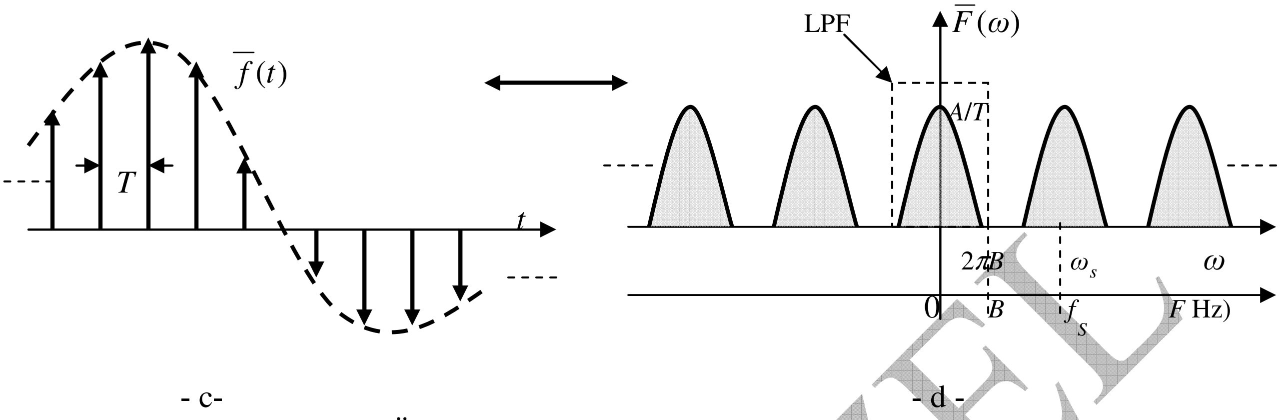
Yukarıdaki şekilden bazı kesitleri burada ele almamızda fayda var. Bunun için band sınırlı işaretimiz $f(t)$ ve Fourier spektrumu aşağıdaki gibi olsun.



- a - - b –

Şekil 27 Örneklenecek Band sınırlı $f(t)$ işareti ve $F(\omega)$ Fourier spektrumu

Görüldüğü gibi şekil (b) den $f(t)$ işaretinin band sınırlı (B) olduğu görülmektedir. Böyle bir işareti en az $2B$ frekansıyla örneklemek istersek, işaretin örneklenmiş versiyonu ve bu örneklenmiş versiyonunun spektrumu olarak aşağıdaki şekiller karşımıza çıkacaktır.



Şekil 28 Örneklenmiş işaret ve Fourier spektrumu

Şekil (b) ve (d) göz önüne alındığında hemen göze çarpan durum, (b) spektrumu periodik olmamasına karşın, (d) spektrumu f_S örnekleme frekansıyla periodiktir. Bunun sebebinin T_S örnekleme perioduna bağlı olarak her T_S anında $f_S \geq 2B$ veya $T_S \leq \dfrac{1}{2B}$ kuralına göre örnek alınmasıdır. $f(t)$ işaretinden her T_S periodunda (kT_S) (c) de görüldüğü gibi alınan her bir örnek, $\overline{F}(\omega)$ spektrumundaki (0,B) aralığındaki bir frekansa karşılık gelmektedir. Bu şekilde yeterli sayıda alınan örneğin karşılığı olarak örnekleme spektrumundaki band sınırlı $F(\omega)$ işareti elde edilir. Ancak ideal örnekleyici sonsuz impulse sahip olduğundan bu işlemler sürekli tekrarlanacağından $\overline{F}(\omega)$ spektrumunda sonsuz tane $F(\omega)$ den oluşan sonsuz banda sahip bir örnekleme spektrumu elde edilmektedir. Şekil (d) göz önüne alınırsa, oluşan kopyaların spektrumda $f_S \geq 2B$ kuralını sağlayacak şekilde bir birbirleriyle örtüşmeyecek şekilde sıralandıklarını görmekteyiz. Spektruma dikkat edilirse $(0, f_S)$ aralığı $2B$ den büyüktür. Diğer bir deyişle $f_S \geq 2B$ kuralının alternatif yazımı olarak $(0, f_S) \geq 2B$ yazılabileceğini görmekteyiz. Sağlıklı bir örneklemenin gereği de olan bu ifadeyi $\overline{F}(\omega)$ spektrumdan, $F(\omega)$ kopyalarının örtüşmemesiyle teyit edebilmekteyiz.

Burada bir an için $\overline{f}(t)$, ayrık işaret olarak düşünülürse, bunun için $f(t)$ işaretinin $t = kT$ için örneklendiği ve aşağıdaki gibi

$$\begin{aligned}\overline{f}(t) &= f(t) = f(kT)\\ &= f[k]\end{aligned}$$

bir önüşümün söz konusu olacağı görülür. Bu şekilde her örnek “ T ” örnekleme periodlu olmak üzere çok sayıda “k” tane örnekten oluşacağı için her bir $t = kT$ anı sonuçta farklı örnekleme frekanslarına karşı gelecektir $(\omega_{S1}, \omega_{S2}, \cdots, \omega_{Sk}, \cdots)$. Bu yüzden (d) deki örnekleme spektrumunun da çok sayıda $(\omega_{S1}, \omega_{S2}, \cdots, \omega_{Sk}, \cdots)$ noktasından oluşması da doğaldır. Her bir nokta “k” değerine bağlı olarak işaretin $t = kT$ anındaki değerine karşılık gelmektedir.

Az örnekleme (undersampling) durumu

Burada impuls dizisi (impuls train) ile ideal olarak örneklenen bir işaretin frekansının Nyquist oranını sağlamadığı ($\omega_S < 2\omega_M$) sağlamadığı durum göz önüne alınmıştır. Örnekler arasındaki boşluk (period) veya frekans aralığı $\omega_S > 2\omega_M$ koşulunu sağlanamadığından alınan örnekler yeterli mesafelerde tam olarak konuşlanacağı yerde, yetersiz aralık (space) yüzünden birbirlerini örten veya birbirleriyle örtüşen şekilde oluşarak spektrumda çözünürlüğü zayıflatan sonucunda işaret veya bilginin örneklerinden tekrar oluşturulamayacağı bir soruna sebebiyet veren bir durum meydana gelmektedir. Örtüşme veya "aliasing" adı verilen bu durum ciddi bir soruna işaret etmektedir. Bu hem Shannon hemde Nyquist ile belirtilen kuralların ihlal edilidiği durumu belirttiğinden, dolaysıyla bilginin gerekli gösterimi, işlenmesi veya tekrar elde edilmesinin söz konusu olamayacağı ciddi bir soruna sebebiyet vermektedir. Bu sorunun önüne geçmek için anti-aliasing (örtüşme karşıtı) adıyla anılan özel filtreler kullanılmaktadır. Bir tür ön filtreleme (pre-filter) tipindeki bu yöntemle olabildiğince örtüşme probleminin önüne geçilmeye çalışılır. Bu problem eğer işaretin frekansına uygun olmayan örnekleme frekansı alınmasıyla oluşmuşsa sorun, tekrar örnekleme (resampling) yöntemiyle giderilebilir.

Burada dawnsampling problemine sebebiyet verecek bir hususun aydınlatılması gerekiyor. Örnekleme, işaretin frekansının göz önüne alınmasıyla doğru örnekleme frekansı seçilse dahi örtüşme, dolaysıyla downsampling problemiyle karşılaşılabilir. Çünkü ortamdan veya çeşitli sebeplerden kaynaklanan gerekçelerle işaret üzerinde istenmeyen gürültü olabilir. Gürültünün varlığı zaman domeninde impuls, frekans domeninde ise sonsuz band anlamına geleceğinden, işaretin frekansı bir anda *B* gibi bir değerden gürültüden dolayı sonsuz frekans değerinde görüneceğinden, bu durumda uygun örnekleme frekansı seçilemeyeceğinden, her halukarda, yetersiz örnek sayısı anlamına gelen down sampling problemi kaçınılmaz olur. Bu yüzden örneklemeye başlamadan, bu problemde göz önünde bulundurulmalıdır. Asıl anti-aliasing filter olarak anılan önfiltreleme prosesi bu sorunla karşılaşmamak için gereklidir. Örneklemeye başlamadan önce işaret üzerinde olası gürültü olabileceği düşünülerek, ön filtreleme yapılarak başlanması yerinde olur.

Örtüşme problemine karşıt örtüşme filtresi (anti-aliasing filter)

Örtüşmenin yarattığı sorunun çözümü için özel tip filtreleme kullanılmaktadır. Örneklenecek işaretin en yüksek frekansına gore dizayn edilmiş örnekleme sistemi, örnekleme başlamadan once analog işareti en yüksek frekans bileşenine gore filter eder. Bunun anlamı şudur ; eğer bir analog ses örneklenecekse bir ses işaretindeki bulunabilecek en yüksek frekans belirlidir (3 kHz civarı). Örnekleyici bu frekansın üzerindeki bileşenleri bastıracak veya filter edecektir. Çünkü bazen gürültünün de sebep olabileceği bazı nedenlerden dolayı ses işaretinde 3 KHz in üstünde yüksek frekanslı bileşenler olabilir. Bu durumda bunların elimine edilmeleri gerekir. Aksi taktirde "örtüşme (aliasing)" problemi kaçınılmaz olur.

Yüksek örnekleme (oversampling) durumu

Nyquist oranının gerektirdiğinden daha fazla örnek alınma işlemine **oversampling** veya "**aşırı örnekleme**" denilmektedir. Bu yaklaşım her ne kadar örtüşme durumunu kesinlikle bertraf etse de ve işaretin örneklerinden çok rahat şekilde elde edilmesini sağlasa da oversampling durumunun gereksiz ve yararsız olduğu düşünülebilir. En önemli handikapı fazla örnek alınması dolaysıyla yapılacak işlem karmaşası ve işlem hacminin yanı sıra bu şekilde olası kullanılacak hesaplama elemanlarının kabiliyetlerini veya maliyetlerini de olumsuz etkileyebileceği düşünülebilir. Bunun yanı sıra fazla sayıda örnek alınması genel ve spesifik anlamda ideal bir örneklemeden de uzak bir durumdur.

Örnek

$f(t) = \text{sinc}^2(5\pi\, t)$ işaretini

Örnekleme frekansı (F_S)	Örnekleme periodu (T)
5 Hz	0.2
10 Hz	0.1
20 Hz	0.05

Tablodaki parametrelere göre örnekleyerek sonuçlarını tartışalım.

Çözüm

İlk olarak $f(t) = \text{sinc}^2(5\pi\, t)$ işaretinin zaman ve frekans $f(t)$- $F(\omega)$ domenindeki görünümü aşağıdaki şekilde verilen (a) ve (b) deki gibi olacaktır. $f(t) = \sin c^2(5\pi\, t)$ işaretinin band genişliğini bulmak için $\sin c^2(5\pi\, t)$ fonksiyonunun Fourier transformasyonunu bulmamız gerekiyor. Daha önceden

$$\frac{W}{2\pi}\text{sinc}^2(\frac{W\,t}{2}) \Leftrightarrow \Delta(\frac{\omega}{2W})$$

olduğunu bildiğimize göre, $\sin c^2(5\pi\, t)$ fonksiyonunun Fourier transformasyonunu $\Delta(\frac{\omega}{2W})$ gibi bulmamız gerekiyor. Denklemde görülen "Δ" üçgen fonksiyonu operatörüdür. Bunun için $\Delta(\frac{\omega}{2W})$ fonksiyonunu önce $\frac{W}{2\pi}\sin c^2(\frac{W\,t}{2})$ gibi düzenlememiz gerekecek. Bunun için

$$\text{sinc}^2(5\pi\, t) = 30\frac{2\pi}{10\pi}\left[\frac{10\pi}{2\pi}\sin c^2(\frac{10\pi\, t}{2})\right] = \left[\Delta(\frac{\omega}{2\times 10\pi}\right]$$

$$= \Delta(\frac{\omega}{20\pi})$$

$$\Delta(\frac{\omega}{20\pi}) = \Delta(\frac{\omega}{2W})$$

Buradan $W = 10\pi = 2\pi B$, $B = 5\,Hz$ olarak bulunur. Şimdi bu durumu örnekleme frekansının $f_S = 5\,Hz$ alındığı koşula göre irdeleyelim.

a) $f_S = 5\,Hz$ için

$f_S = 5\,Hz$ örnekleme frekansı $f_S \geq 2B = 10\,Hz$ koşulunu sağlayamadığından şekil (d) de görüldüğü gibi örtüşme olacaktır. Diğer bir deyişle gereğinden az örnek alındığından örtüşme probleminden dolayı işaretin örneklerinden elde edilebilmesi mümkün değildir. Dolayısıyla veri kaybı söz konusu olacaktır.

b) $f_S = 10\,Hz$ için

$B = 5\,Hz$ olduğundan $f_S \geq 2B = 10 \geq 2\times 5 = 10 = 10$ koşulu gereği kritik örnekleme söz konusudur. Yani örtüşme yok ancak işaret minumum örnekleme frekansıyla örneklenmektedir. Herhangi bir örtüşme veya riskli durum olmadığından, işaret örneklerinden rahatlıkla elde edilebilecektir. Buna dair şekli de (f) de görmekteyiz.

c) $f_S = 20\,Hz$ için

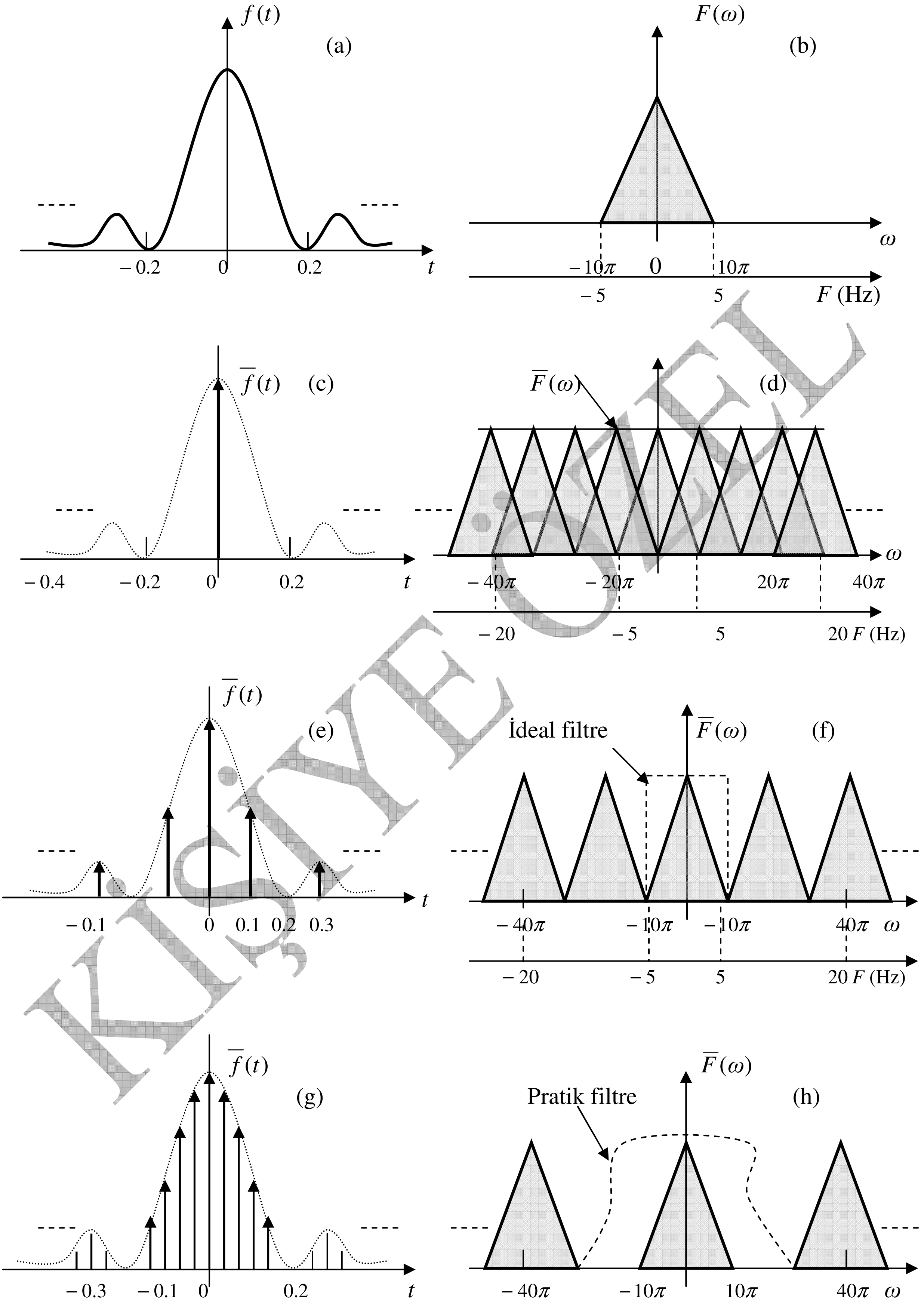
$B = 5\,Hz$ olduğundan $f_S \geq 2B = 20 >> 2\times 5 = 10$ koşulu gereği aşırı örnekleme söz konusudur. Yani gereğinden fazla örnek alınmıştır. Herhangi bir örtüşme veya riskli durum olmadığından, işaret örneklerinden rahatlıkla elde edilebilecektir. Buna dair şekli de (h) de görmekteyiz. Her bir durumla ilgili şekilleri de göz önüne alan detaylı analiz aşağıdadır.

1. $f_S = 5Hz$ bu frekans $f_S \geq 2B$ kuralı gereğince $f_S \geq 2B = 5 \geq 2\times 5 = 5 \neq 10$ sağlayamamaktadır. Diğer bir deyişle en az 10 örnek yerine $f_S = 5Hz$ gereğince yalnızca 5 tane örnek yapılabilmektedir. Bu durumda olması gerekenden daha az sayıda örnekleme olduğundan **undersampling** yani **az örnekleme** veya **örnekleme altı** durumu oluşmaktadır. Bu durum Şekil (d) de gösterilmiştir. Alınan örnekler arasında yeterince boşluk olmadığından ($T > \dfrac{1}{2B}$) örnekler birbirlerini örtecek şekilde dizilmişlerdir. Bu **örtüşme** durumu **aliasing** olarak bilinir ve sağlıklı bir örnekleme yapılmadığını gösterir. Bu durumda önemli bir sonuç olarak, başlangıç $f(t)$ band-sınırlı işareti kendisini oluşturan $\overline{f}(t)$ örneklerinden tekrar elde edilemeyecektir.

2. $f_S = 10Hz$ bu frekans $f_S \geq 2B$ kuralı gereğince $f_S \geq 2B = 10 \geq 2\times 5 = 10 = 10$ koşulunu sağlamaktadır. Diğer bir deyişle gereken en az 10 örnek $F_S = 10Hz$ gereğince sağlanmaktadır. Bu durumda olması gereken kadar sayıda örnekleme olduğundan **Nyquist rate** yani **normal örnekleme** durumu oluşmaktadır. Bu durum Şekil (f) de gösterilmiştir. Alınan örnekler arasındaki boşluk ($T = 1/2B$)yeterli olduğundan örnekler *örtüşmemekte* ve *aliasing* sorunu oluşmamaktadır. Bu durumdaki $\overline{F}(\omega)$ nin spektrumu, normal koşullardaki $(1/T)F(\omega)$ spektrumunun kendisini periodik olarak tekrarladığı normal spektrumdan oluşacaktır (Şekil-d). Bu durumda $f(t)$ band-sınırlı işareti kendisini oluşturan $\overline{f}(t)$ örneklerinden tekrar elde edilebilecektir. Bu Şekil (f) den de görülmektedir. $F(\omega)$ işareti, $\overline{F}(\omega)$ spektrumunun gösterildiği gibi bir alçak geçiren filtreden (LPF) geçirilmesiyle elde edilmektedir (reconstruction).

3. $f_S = 20Hz$ Bu frekans $f_S \geq 2B$ kuralı gereğince $f_S \geq 2B = 20 \geq 2\times 5 = 20 > 10$ koşulunu sağlamaktadır. Diğer bir deyişle gereken en az 10 örnek gerekirken $f_S = 20Hz$ gereğince 20 tane örnek temin edilerek daha fazlası sağlanmaktadır. Bu durumda olması gereken sayıdan fazla örnekleme olduğundan **oversampling** yani **aşırı örnekleme** veya **örnek fazlalığı** durumu oluşmaktadır. Bu durum Şekil (h) de gösterilmiştir. Alınan örnekler arasındaki boşluk $(\frac{1}{2B})$ den daha fazla olduğundan örnekler *örtüşmemekte* ve *aliasing* sorunu hiç oluşmamaktadır.

Bu durumda $f(t)$ band-sınırlı işareti kendisini oluşturan $\overline{f}(t)$ örneklerinden tekrar rahatlıkla elde edilebilecektir. Ek olarak $\overline{F}(\omega)$ nin spektrumu, normal koşullardaki $\frac{1}{T}F(\omega)$ spektrumunun kendisini periodik olarak 20 Hz aralıklarla tekrarladığı spektrumdan oluşacaktır (Şekil-h). Burada da $F(\omega)$ işareti, $\overline{F}(\omega)$ spektrumunun gösterildiği gibi bir alçak geçiren filtreden (LPF) veya benzer yapıdaki pratik bir filtreden geçirilmesiyle elde edilmektedir (reconstruction).



Şekil 29 Az örnekle örnekleme ve aşırı değerle örnekleme

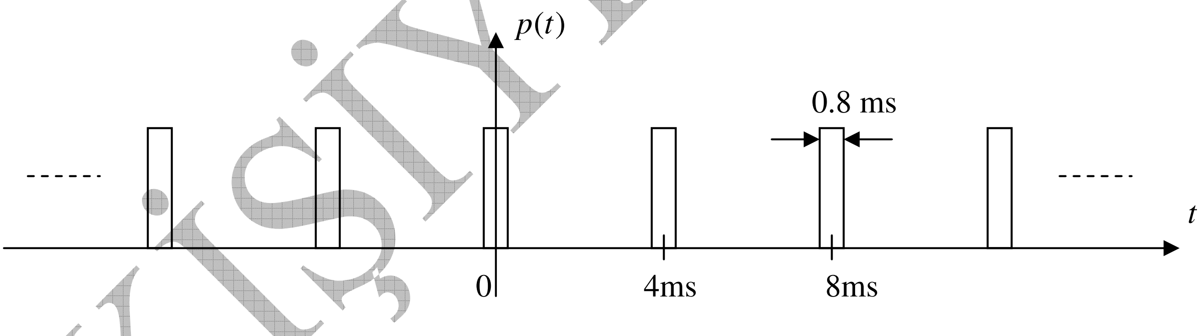
Bunların ışığında yukarıda verilen $f(t)=\sin c^2(10\pi\, t)$ işaretinin verilen tablodaki parametrelere göre örneklenmesiyle oluşan sonuçlar aşağıdaki tabloda toparlanmıştır.

Örnekleme frekansı (f_S)	Örnekleme periodu (T)	$\overline{F}(\omega)=\frac{1}{T}F(\omega)$	Durum
5 Hz	0.2	$\Delta(\frac{\omega}{20\pi})$	Undersampling
10 Hz	0.1	$2\Delta(\frac{\omega}{20\pi})$	Nyquist oranı
20 Hz	0.05	$4\Delta(\frac{\omega}{20\pi})$	Oversampling

Örnek

Eğer $x(t)=\text{sinc}(200\pi\, t)$ işareti aşağıdaki gibi gösterilen $p(t)$ darbe dizisiyle örnekleniyorsa,

a) Nyquist miktarını, aralığını ve örnekleme frekansını bulun.
b) $p(t)$ Darbe dizisinin örnekleme periodunu ve örnekleme frekansını bulun.
c) Örneklenmiş işaretin spektrumunu çizin.
d) Eğer örneklenmiş işaret, band genişliği 100 Hz olan alçak geçiren filtreden geçirilirse, filtre çıkışını bulun.
e) Filtre band genişliğinin $100 < B < 300$ olması durumundaki etkisini açıklayın.



Şekil 30 Darbe dizisi

Çözüm

Görüldüğü gibi $x(t)=\text{sinc}(200\pi\, t)$ işareti, ideal impuls dizisi yerine, 0.8 ms genişliğindeki $p(t)$ darbe dizisi ile örneklenmektedir.

a) Nyquist miktarını ve Nyquist aralığını bulmak için $x(t)=\text{sinc}(200\pi\, t)$ işaretinin önce $X(\omega)$ Fourier transformasyonunu bulmalıyız. $x(t)=\text{sinc}(200\pi\, t)$ işaretinin Fourier transformasyonunu önceki bilgilerimizden

$$\frac{W}{\pi}\sin c(W\,t) \Leftrightarrow rect(\frac{\omega}{2W})$$

olduğunu bildiğimize göre, $\sin c(200\pi\, t)$ fonksiyonunun Fourier transformasyonunu $rect(\dfrac{\omega}{2W})$ gibi bulmamız gerekiyor. Bunun için $\sin c(200\pi\, t)$ fonksiyonunu önce $\dfrac{W}{\pi}\sin c(W\, t)$ gibi düzenlememiz gerekecek. Bunun için

$$\sin c(200\pi\, t) = \frac{\pi}{200\pi}\left[\frac{200\pi}{\pi}\sin c(200\pi\, t)\right] = \frac{\pi}{200\pi}\left[\mathrm{rect}(\frac{\omega}{400\pi}\right]$$

$$= 0.02\,\mathrm{rect}(\frac{\omega}{400\pi})$$

$$0.02\,\mathrm{rect}(\frac{\omega}{400\pi}) = \mathrm{rect}(\frac{\omega}{2W})$$

$$\mathrm{sinc}(200\pi\, t) \Leftrightarrow 0.02\,\mathrm{rect}(\frac{\omega}{400\pi})$$

$$X(\omega) = 0.02\,\mathrm{rect}(\frac{\omega}{400\pi})$$

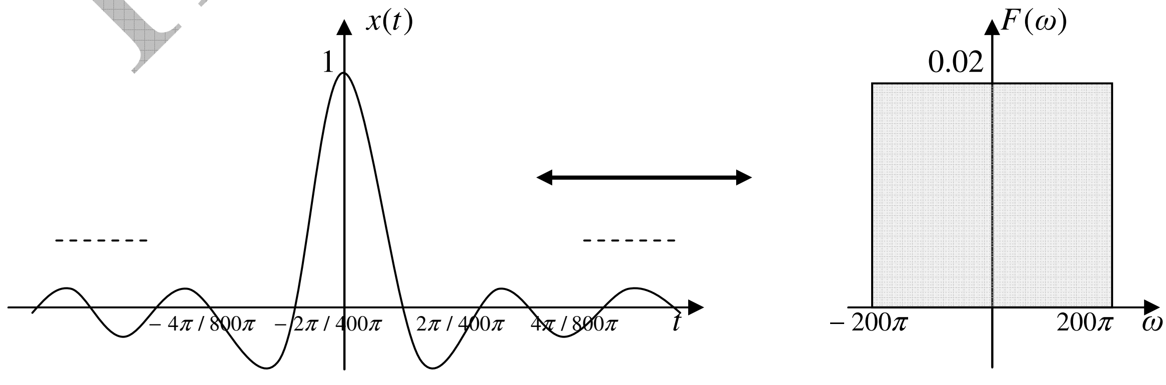
Band genişliği bulmak için $x(t) = \sin c(200\pi\, t)$ işareti $\dfrac{W}{\pi}\sin c(W\, t) \Leftrightarrow rect(\dfrac{\omega}{2W})$ ile karşılaştırılır. *W* değişkeni, rad/sn olarak frekans veya band genişliğini göstermektedir. Buna göre band genişliği

$$\mathrm{sinc}(200\pi\, t) \Leftrightarrow 0.02\,\mathrm{rect}(\frac{\omega}{400\pi})$$

$$\mathrm{sinc}(200\pi\, t) = \frac{W}{\pi}\mathrm{sinc}(W\, t)$$

$W = 200\pi$ rad/sn veya $B = 100$ Hz

Elde edilenlere dayanılarak oluşan $\mathrm{sinc}(200\pi\, t) \Leftrightarrow 0.02\,\mathrm{rect}(\dfrac{\omega}{400\pi})$ dönüşümü aşağıdaki gibi gösterilir.

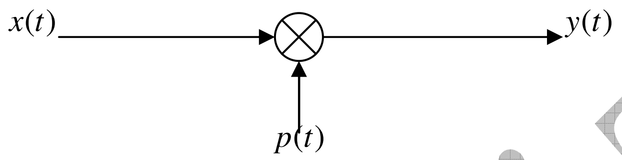


Şekil 31 Fourier transformasyonunun dualite özelliği

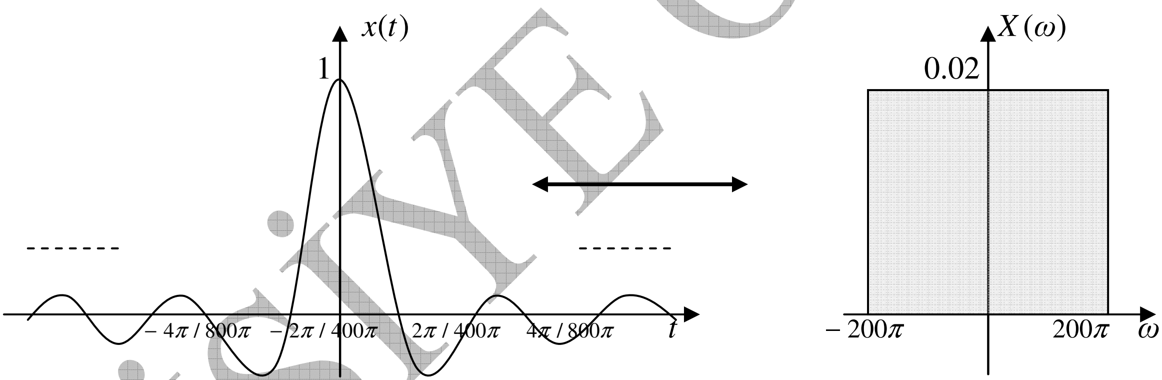
Bunların ışığında, Nyquist oranı olarak istenen $f_S = 2B$ ve Nyquist aralığı olarak istenen de $T = 1/2B$ dir. Buna göre Nyquist oranı $f_S = 2\times 100 = 200\,\text{Hz}$ ve Nyquist aralığı $T = 1/(2\times 100) = 0.05\,\text{sn}$

b) $p(t)$ Darbe dizisinin Spektrumunu bulmak için periodu 4 ms olduğuna göre, bu yani 0.004 sn aynı zamanda örnekleme periodudur. Örnekleme frekansı ise $f_S = 250\,\text{Hz}$ veya $\omega_S = 500\pi$ rad/sn. Örneklenecek $f(t) = \text{sinc}(200\pi\, t)$ işaretinin frekansı $B = 100\,\text{Hz}$ olduğuna göre, $f_S = 250\,\text{Hz}$ ile $f_S > 2B$ sağlandığından, sağlıklı örnekleme söz konusudur.

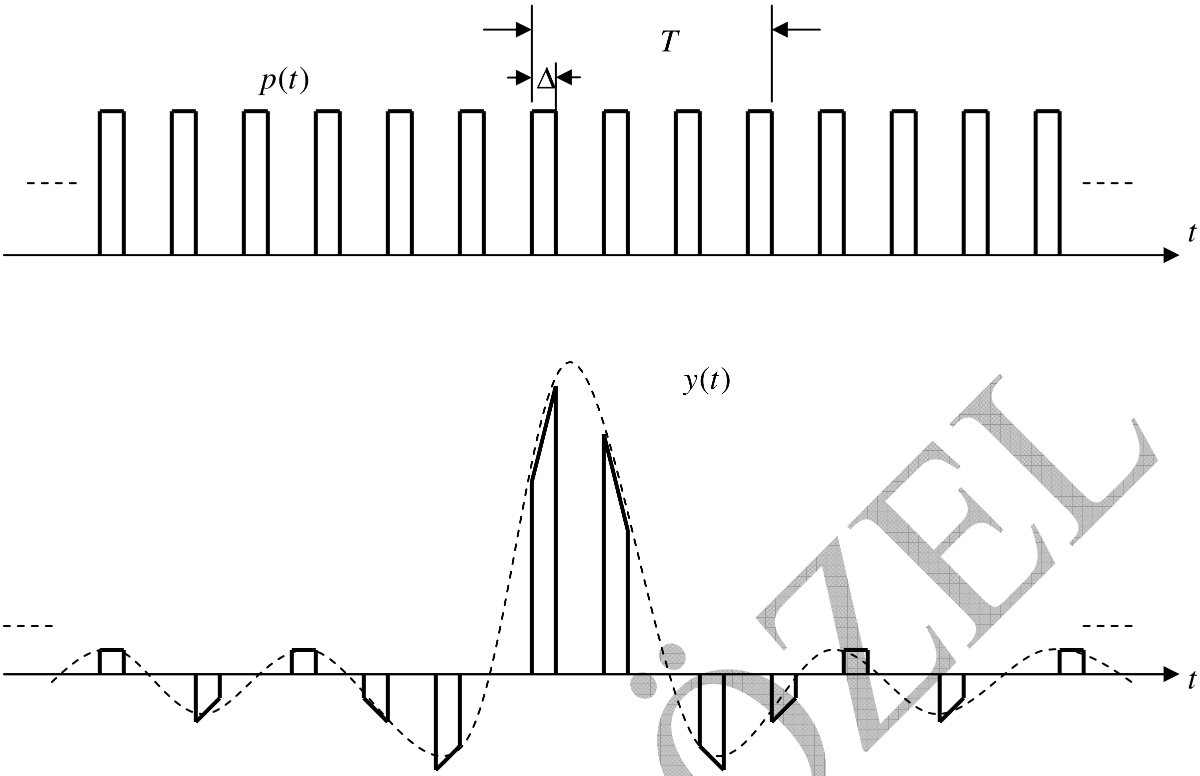
c)



Şekil 32 $y(t) = x(t)\,.\,p(t)$ Modülasyon blok şeması



Şekil 33 Fourier transformasyonunun dualite özelliği



Şekil 34 Darbe dizisiyle örnekleme : $y(t) = x(t)\,.\,p(t)$: Darbe genlik modülasyonu

$y(t) = x(t)\,.\,p(t)$

$x(t) =$ Analog işaret
$p(t) =$ Darbe dizisi
$y(t) =$ Darbe genlik modülasyonu

Verilen $p(t)$ periodik darbe işareti Fourier serisi olarak

$$p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \, e^{j k \omega_0 t}$$

$$P(\omega) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \, \delta(\omega - k\omega_C)$$

$$a_0 = \frac{\Delta}{T} \quad , \qquad a_k = \frac{\sin(k\omega_C \frac{\Delta}{2})}{\pi k}$$

$$a_k = \frac{\sin(k\omega_C \frac{\Delta}{2})}{\pi k} = \frac{\sin(k\omega_C \frac{\Delta}{2})}{\pi k \frac{2\Delta\omega_C}{2\Delta\omega_C}} = \frac{1}{\frac{2\pi}{\Delta\omega_C}} \; \frac{\sin(k\omega_C \frac{\Delta}{2})}{k\omega_C \frac{\Delta}{2}} = \frac{\Delta\omega_C}{2\pi} \; \sin\mathrm{c}\,(k\omega_C \frac{\Delta}{2})$$

$$\omega_C = \frac{2\pi}{T}$$

$$a_k = \frac{\Delta\omega_C}{2\pi}\ \mathrm{sinc}\,(k\omega_C \frac{\Delta}{2}) = \frac{\Delta\frac{2\pi}{T}}{2\pi}\ \mathrm{sinc}\,(k\omega_C \frac{\Delta}{2}) = \frac{2\pi\,\Delta\frac{1}{T}}{2\pi}\ \mathrm{sinc}\,(k\omega_C \frac{\Delta}{2}) = \frac{\Delta}{T}\mathrm{sinc}\,(k\omega_C \frac{\Delta}{2})$$

$$a_k = \frac{\Delta}{T}\mathrm{sinc}\,(k\omega_C \frac{\Delta}{2})$$

$$P(\omega) = 2\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k\ \delta(\omega - k\omega_C) = 2\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{\Delta}{T}\mathrm{sinc}\,(k\omega_C \frac{\Delta}{2})\,\delta(\omega - k\omega_C) = \frac{2\pi\,\Delta}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\mathrm{sinc}\,(k\omega_C \frac{\Delta}{2})\,\delta(\omega - k\omega_C)$$

$$P(\omega) = \frac{2\pi\,\Delta}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\mathrm{sinc}\,(k\omega_C \frac{\Delta}{2})\,\delta(\omega - k\omega_C)$$

2.yol

$p(t)$ darbe dizisi Fourier serisine aşağıdaki gibi de açılabilirdi.

$$p(t) = C_0 + \sum_{k=0}^{\infty} C_k \cos k\,\omega_S t$$

$$C_0 = 0.2 \quad , \quad C_k = \frac{2}{n\pi}\sin(\frac{k\pi}{5})$$

$$y(t) = x(t)\,p(t) = 0.2x(t) + 0.374x(t)\cos 500\pi\, t + 0.303x(t)\cos 1000\pi\, t + 0.202x(t)\cos 1500\pi\, t + \cdots$$

$$\begin{aligned} Y(\omega) = {} & 0.2X(\omega) + 0.187X(\omega - 500\pi) + 0.187X(\omega + 500\pi) + 0.151X(\omega - 1000\pi) + 0.151X(\omega + 1000\pi) \\ & + 0.101X(\omega - 1500\pi) + 0.101X(\omega + 1500\pi) + \cdots \end{aligned}$$

Buradan, $Y(\omega)$ örnekleme spektrumunun

$$x(t) = \mathrm{sinc}(200\pi\, t) \Leftrightarrow 0.02\,\mathrm{rect}(\frac{\omega}{400\pi}) = X(\omega)$$

yazımına uygun olarak $0.02\,\mathrm{rect}(\frac{\omega}{400\pi})$ darbelerinin periodik tekrarlarından oluştuğunu görmekteyiz. Bu yol, $y(t)$ veya $Y(\omega)$ gösteriminin alternatifi olarak düşünülebilir. İşlemlerimize devam edersek, elde edilen ifadelerin bazılarında yerlerine yazılması gereken parametreleri gözden geçirelim.

$$\Delta = 0.8\ \mathrm{msn}$$
$$1/\Delta = 1/(0.8\times 10^{-3}) = 1250\ \mathrm{Hz}$$
$$\frac{2\pi\,\Delta}{T} = \frac{2\pi 0.004}{0.008} = \pi$$

$$Y(\omega)=\frac{1}{2\pi}X(\omega)*P(\omega)=\frac{1}{2\pi}\left[X(\omega)*\left(\frac{2\pi\,\Delta}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\sin\mathrm{c}\,(k\omega_C\frac{\Delta}{2})\,\delta(\omega-k\omega_C)\right)\right]$$

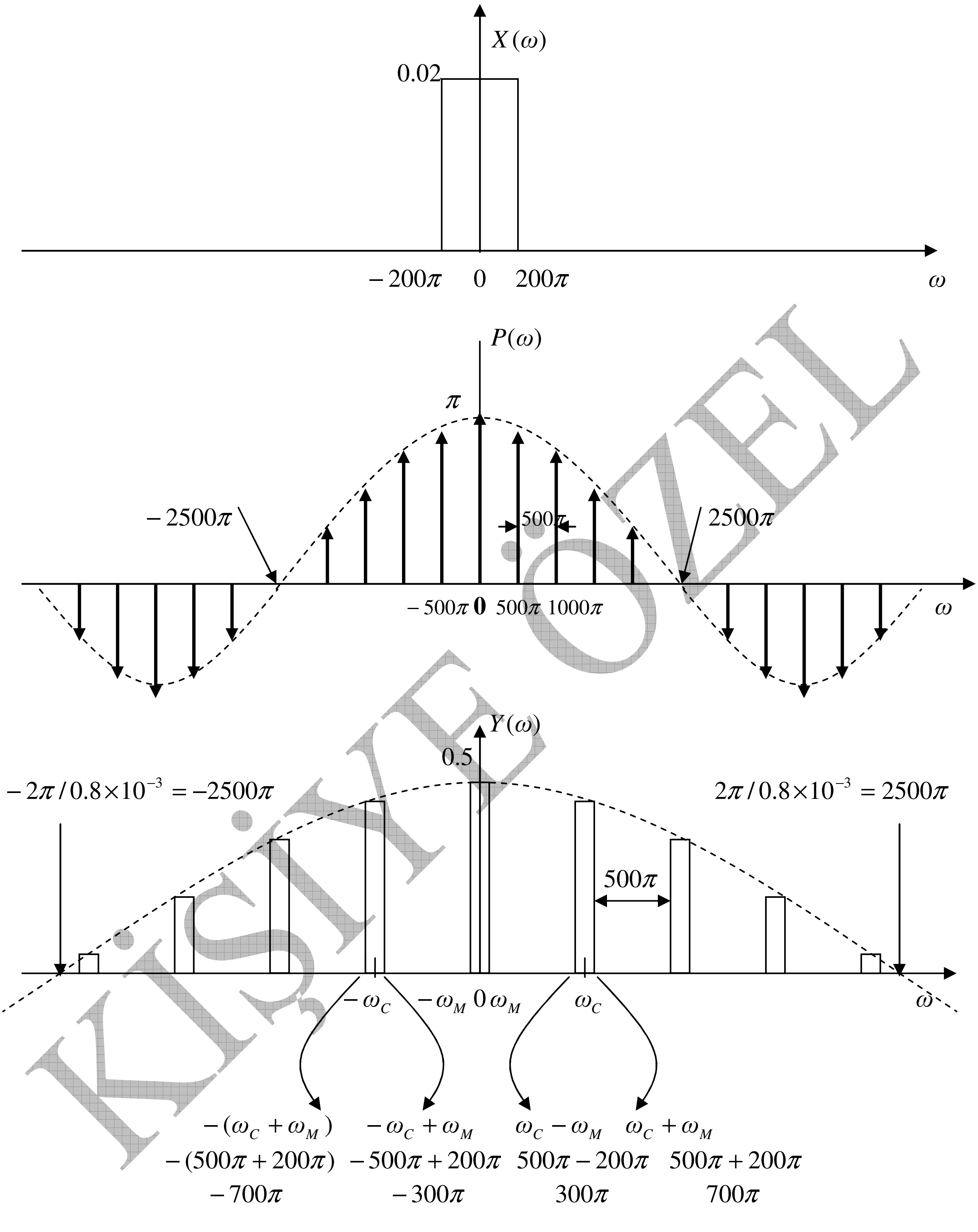
$$=\frac{\Delta}{T}X(\omega)*\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty}\sin\mathrm{c}\,(k\omega_C\frac{\Delta}{2})\,\delta(\omega-k\omega_C)\right)$$

$$Y(\omega)=\frac{\Delta}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\sin\mathrm{c}\,(k\omega_C\frac{\Delta}{2})\,X(\omega-k\omega_C)$$

$$\omega_C=\frac{2\pi}{T}=\frac{2\pi}{4\times10^{-3}}=500\pi$$

$T=$ Darbe dizisinin periodu (Δ genişlikli darbeler arasındaki boşluk, 4 msn).

Eğer aşağıdaki şekillerde spektrumlar incelenirse, $P(\omega)$ darbe dizisinin $\sin\mathrm{c}\,(k\omega_C\frac{\Delta}{2})\,\delta(\omega-k\omega_C)$ teriminden dolayı genel $\sin\mathrm{c}(x)$ fonksiyonu biçiminde olduğu görülecektir. Bunun yanısıra yine $Y(\omega)$ spektrumundan da $\sin\mathrm{c}\,(k\omega_C\frac{\Delta}{2})\,X(\omega-k\omega_C)$ yazımından dolayı $\sin\mathrm{c}(x)$ fonksiyonunun etkisi görülmektedir.



Şekil 35 $y(t)=x(t)\,.\,p(t)$ Darbe dizisiyle örneklenmiş işaretin sepektrumu

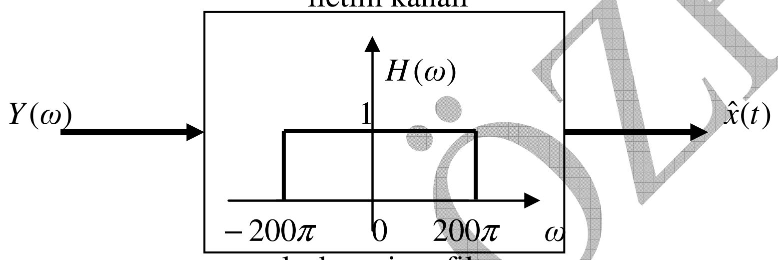
ω_M = Analog işaretin frekansı

$\omega_C=\dfrac{2\pi}{T}$ = Taşıyıcı işaretin frekansı

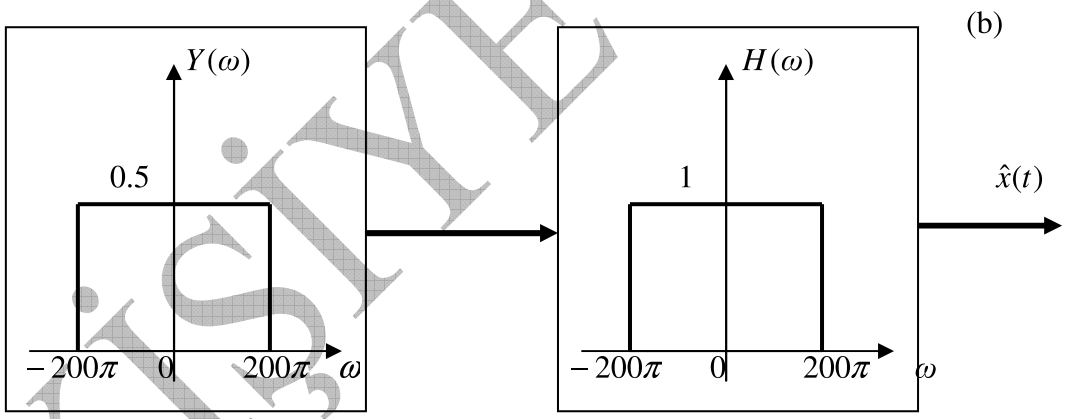
$\omega_C \geq 2\omega_M$ = darbelerin örtüşmemesi için (Nyquist oranı)

$x(t)$ analog bir işaretin, darbelerinin genişliği Δ olan $p(t)$ darbe dizisi ile örneklenmesinde oluşan $y(t)$ örneklenmiş işareteki darbelerin girişim yapmaması için (simgeler arası girişim, InterSymbol Interference, ISI), darbeler arasındaki T aralığının (örnekleme periodu) korunması gerekmektedir. Bunun için $Y(\omega)$ spektrumuna bakıldığında, $p(t)$ işaretinin ω_C frekansının işaretin iletimi için gerekli olan $2\omega_M$ band genişliğinden büyük olması gerektiğini görmekteyiz. Bunu şekil üzerinden de teyit edebiliriz. Şekilden ω_C frekansının $2\omega_M$ den daha büyük olduğu görülmektedir ($\omega_C \geq 2\omega_M$). Bu sağlandığı sürece, darbe dizisi ile örneklenmiş işaretteki darbeler arasında yeterli boşluk kalacağından, darbeler arası herhangi bir girişim (ISI) olmayacak, bunun sonucunda da işaret veya bilginin kaybedilme riski kalmayacaktır.

d) Eğer örneklenmiş $y(t)$ veya $Y(\omega)$ işareti, kesim frekansı 100 Hz olan alçak geçiren filtreden geçirilecekse,

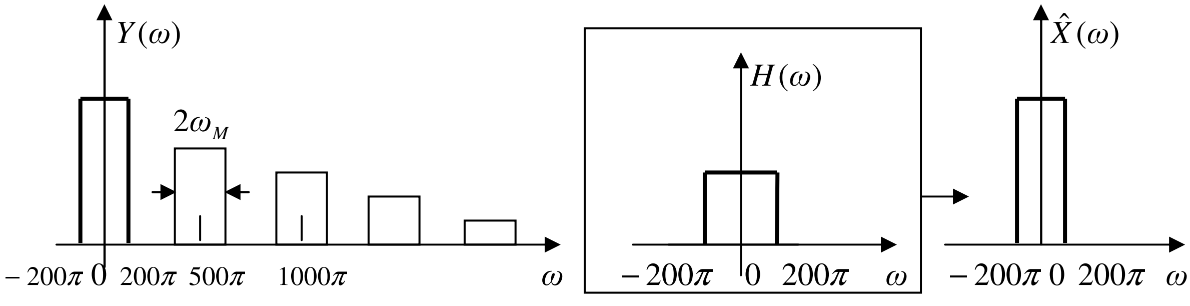


Şekil 36 $x(t) = [x(t)\,.\,p(t)] * h(t)$ Yeniden elde etme blok şeması



$$\hat{x}(t) = y(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} y(\tau) h(t-\tau)\, d\tau$$

Şekil 37 Bir darbe dizisinin ideal alçak geçiren filtreden iletimi



Şekil 38 Örneklenmiş işaretin, alçak geçiren filtreden iletim spektrumu

Görüldüğü gibi, örneklenmiş $Y(\omega)$ işareti kesim frekansı 200π rad/sn olan ideal alçak geçiren filtreden iletilmektedir. Örneklenmiş $Y(\omega)$ spektrumundaki her bir örneğin band genişliği 200π rad/sn olarak alçak geçiren filtreyle aynı olduğundan, filtreden $Y(\omega)$ spektrumuna ait yalnızca merkezdeki 200π rad/sn lik darbe iletilecektir. Dolayısıyla $H(\omega)$ filtre çıkışındaki $\hat{X}(\omega)$ işaret başlangıçtaki $x(t)$ örneklenen işaret olduğundan ($\hat{X}(\omega) \cong X(\omega)$), bu yolla, örneklenmiş işaretten orijinal işaret tekrar elde edilebilmektedir. Bu işlemin matematik modeli aşağıdaki gibi olacaktır.

$$
\begin{aligned}
y(t) * h(t) &\Leftrightarrow Y(\omega)H(\omega) \\
&= \hat{X}(\omega)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
Y(\omega) = \frac{\Delta}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} \operatorname{sin c}\,(k\omega_C \frac{\Delta}{2})\, X(\omega - k\omega_C) &= \frac{0.8}{4}\sum_{k=-\infty}^{\infty} \operatorname{sin c}\,(k\frac{2\pi}{4.10^{-3}}\frac{0.8.10^{-3}}{2})\, X(\omega - k\frac{2\pi}{4.10^{-3}}) \\
&= 0.2\sum_{k=-\infty}^{\infty} \operatorname{sin c}\,(0.2\pi)\, X(\omega - 500\pi\, k)
\end{aligned}
$$

$$100 \operatorname{sin c}\,(100\pi\, t) \Leftrightarrow \operatorname{rect}\,(\frac{\omega}{200\pi})$$

$$H(\omega) = \operatorname{rect}\,(\frac{\omega}{200\pi})$$

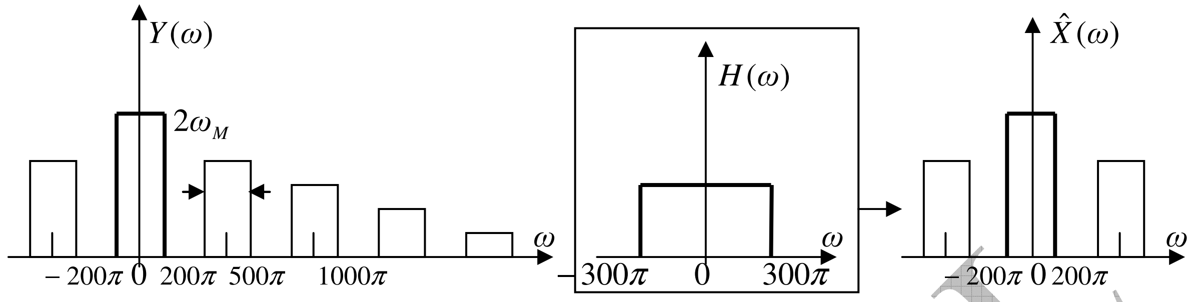
$$Y(\omega) = \frac{1}{2}\sum_{k=-\infty}^{\infty} \operatorname{sin c}\,(0.5\pi)\, X(\omega - 250\pi\, k)$$

$$X(\omega) = 0.02\, \operatorname{rect}(\frac{\omega}{400\pi})$$

$$
\begin{aligned}
y(t) * h(t) \Leftrightarrow Y(\omega)H(\omega) &= \left[\, 0.2\sum_{k=-\infty}^{\infty} \operatorname{sin c}\,(0.2\pi)\, X(\omega - 500\pi\, k) \right] \times \operatorname{rect}\,(\frac{\omega}{200\pi}) \\
&= \left[\, 0.2\sum_{k=-\infty}^{\infty} \operatorname{sin c}\,(0.2\pi)\, 0.02\, \operatorname{rect}(\frac{\omega - 500\pi\, k}{400\pi}) \right] \times \operatorname{rect}\,(\frac{\omega}{200\pi}) \\
&= \left[\, 0.04\sum_{k=-\infty}^{\infty} \operatorname{sin c}\,(0.2\pi)\ \operatorname{rect}(\frac{\omega - 500\pi\, k}{400\pi}) \right] \times \operatorname{rect}\,(\frac{\omega}{200\pi}) \\
&= \operatorname{rect}(\frac{\omega}{400\pi}) \\
&= X(\omega)
\end{aligned}
$$

Görüldüğü gibi alçak geçiren filtrenin band genişliği olan 100 Hz (veya 200π rad/sn) değeri, örneklenen $x(t) = \operatorname{sinc}(200\pi\, t)$ işaretinin band genişliği olan $B = 100\,\text{Hz}$ 100 Hz (veya 200π rad/sn) değerine eşit olduğundan, $Y(\omega)$ spektrumunun böyle bir filtreden geçirilmesiyle, $x(t)$ veya $X(\omega)$ tekrar elde edilmiştir. Bu örneklemenin sağlıklı yapıldığını göstermektedir ($f_S \geq 2B$).

e) Filtre band genişliğinin $100 < B < 300$ olması durumunda, aşağıdaki spektrum söz konusu olacaktır.

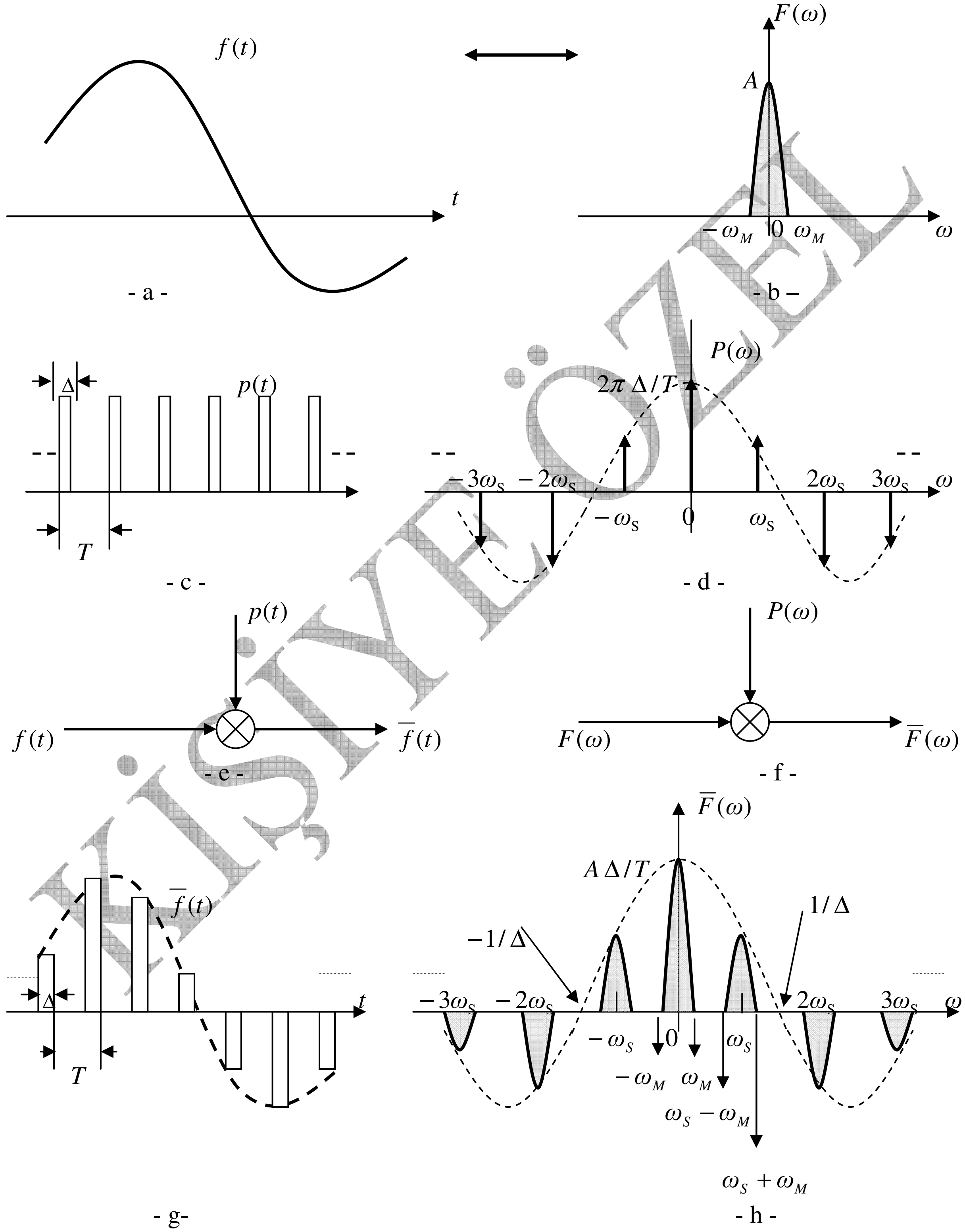


Şekil 39 Distorsiyonlu iletim:Örneklenmiş işaretin, geniş band alçak geçiren filtreden iletimi

Görüldüğü gibi, $x(t)$ işaretinin band genişliği $B = 100\,\text{Hz}$ iken, bundan daha yüksek kesim frekansına sahip alçak geçiren filtreden geçirilirse, elde edilmesi düşünülen işaretin dışında ek olarak bir miktar istenmeyen işarette geçeceği için, $X(\omega)$ spektrumu distorsiyonlu olarak elde edilecektir. Bu durumda, işaretin örneklerinden elde edilmesi mümkün olmaz. Bu nedenle, kullanılacak filtrenin band genişliğinin, yalnızca örneklenen işareti geçirecek biçimde onun band genişliğine eşit veya eşdeğer olması gereklidir.

PRATİK ÖRNEKLEME

Pratik örnekleme, *doğal örnekleme* (natural sampling) olarak da bilinir. İdeal örneklemedeki kullanımı pratik olmayan sıfır genişlikli impuls dizisi yerine, örnekleme fonksiyonu olarak belli bir (Δ) genişlikteki darbelerden oluşan darbe dizisi (pulse train) kullanılmasına pratik veya doğal örnekleme denilmektedir. Aşağıda doğal örnekleme şeması verilmişir.



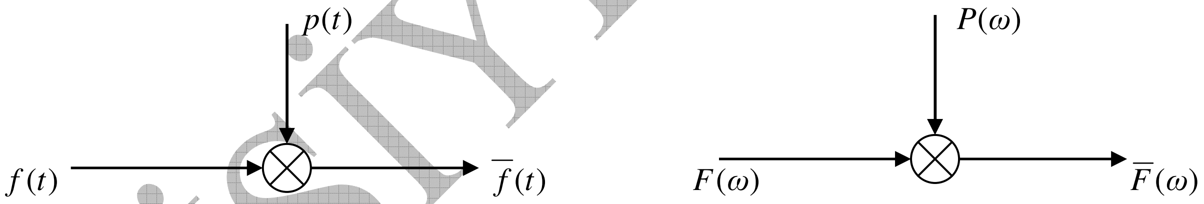
Şekil 40 Darbe genlik modülasyonu : Doğal örnekleme ve Fourier spektrumu

Görüldüğü gibi (a) daki $f(t)$ işareti (b) deki gibi band sınırlı bir işaret olup, impuls dizisi yerine (c) de verilen T örnekleme periodlu ve Δ genişlikli darbe dizisiyle örneklenmektedir. Bu şekildeki $p(t)$ darbe dizisinin spektrumu (d) de $P(\omega)$ olarak görülmektedir. Örneklenmiş $\overline{f}(t)$ işareti (g) de, spektrumu $\overline{F}(\omega)$ ise (h) de görülmektedir. Daha önce impuls dizisiyle yapılan ideal örneklemede şekil (h), sonsuz spektruma sahipti. Yani band genişliği sonsuzdu. Bu yüzden band sınırlı bir iletim hattından gönderilmesi mümkün olmuyordu. Oysa darbe dizisiyle yapılan ideal olmayan örneklemede işaretin ana bandının $(-\omega_S, \omega_S)$ aralığında yoğunlaştığını, spektrumun bunun dışındaki bölgede giderek genliği azalan bir seyirde olduğunu görmekteyiz. Genliğin giderek azaldığı bölge ihmal edilebilir. Bu durumda $\overline{F}(\omega)$ spektrumunun sonsuz değil $(-\omega_S, \omega_S)$ bandın da sınırlı olduğu düşünülebilir. Bu kabul sayesinde örneklenmiş $\overline{f}(t)$ işaretinin band sınırlı bir iletim hattından gönderilmesi mümkün olur. Bunu Δ genişlikli darbe dizisiyle yapılan ideal olmayan örnekleme sağlamaktadır.

Şekil (g) örneklenmiş işaret yerine, haberleşme sistemlerinde darbe genlik modülasyonu gibi düşünülebilir. Bu düşünceden hareketle aynı zamanda darbe genlik modülasyonlu dalganın, band sınırlı bir iletim hattından iletimi sağlanmış olunur. Şekil (h) deki spektrumdan ω_S örnekleme frekansının sağ ve solundaki $\omega_S + \omega_M$ ve $\omega_S - \omega_M$ yan band bileşenleri göz önüne alındığında $\omega_S + \omega_M - (\omega_S - \omega_M) = 2\omega_M$ olarak şekil (b) de görülen $f(t)$ işaretin frekansının iki kat büyüklüğündeki band genişliği ortaya çıkmaktadır.

Pratik örneklemenin Matematik Modeli

Yukarıda tanımlanan pratik örneklemenin zaman ve frekans domeni karşılıklarının aşağıdaki gibi olacağını biliyoruz.



- e - - f -

Şekil 41 Pratik örnekleme ve Fourier spektrum

$$\overline{f}(t) = f(t)\,p(t)$$

$$p(t) = \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nT)\right] * \left[\text{rect}\left(\frac{t}{\Delta}\right)\right] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{rect}\left(\frac{t-nT}{\Delta}\right)$$

$$P(\omega) = F\left\{\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nT)\right] * \left[\text{rect}\left(\frac{t}{\Delta}\right)\right]\right\} = F\left\{\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nT)\right\} \times F\left\{\text{rect}\left(\frac{t}{\Delta}\right)\right\}$$

$$F\left\{\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nT)\right\} = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_S)$$

$$F\left\{\text{rect}\left(\frac{t}{\Delta}\right)\right\} = \Delta\,\text{sinc}\left(\frac{\omega\Delta}{2}\right)$$

$$P(\omega) = F\left\{\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)\right\} \times F\left\{\text{rect}\left(\frac{t}{\Delta}\right)\right\} = \left[\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_S)\right] \times \left[\Delta\,\text{sinc}\left(\frac{\omega\Delta}{2}\right)\right]$$

$$P(\omega) = \frac{\Delta}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_S)\,\text{sinc}\left(\frac{\omega\Delta}{2}\right)$$

$$\overline{F}(\omega) = F(\omega)P(\omega) = \frac{\Delta}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} F(\omega)\delta(\omega - n\omega_S)\,\text{sinc}\left(\frac{\omega\Delta}{2}\right) = \frac{\Delta}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} F(\omega - n\omega_S)\,\text{sinc}\left(\frac{\omega\Delta}{2}\right)$$

$$\overline{F}(\omega) = \frac{\Delta}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} F(\omega - n\omega_S)\,\text{sinc}\left(\frac{\omega\Delta}{2}\right)$$

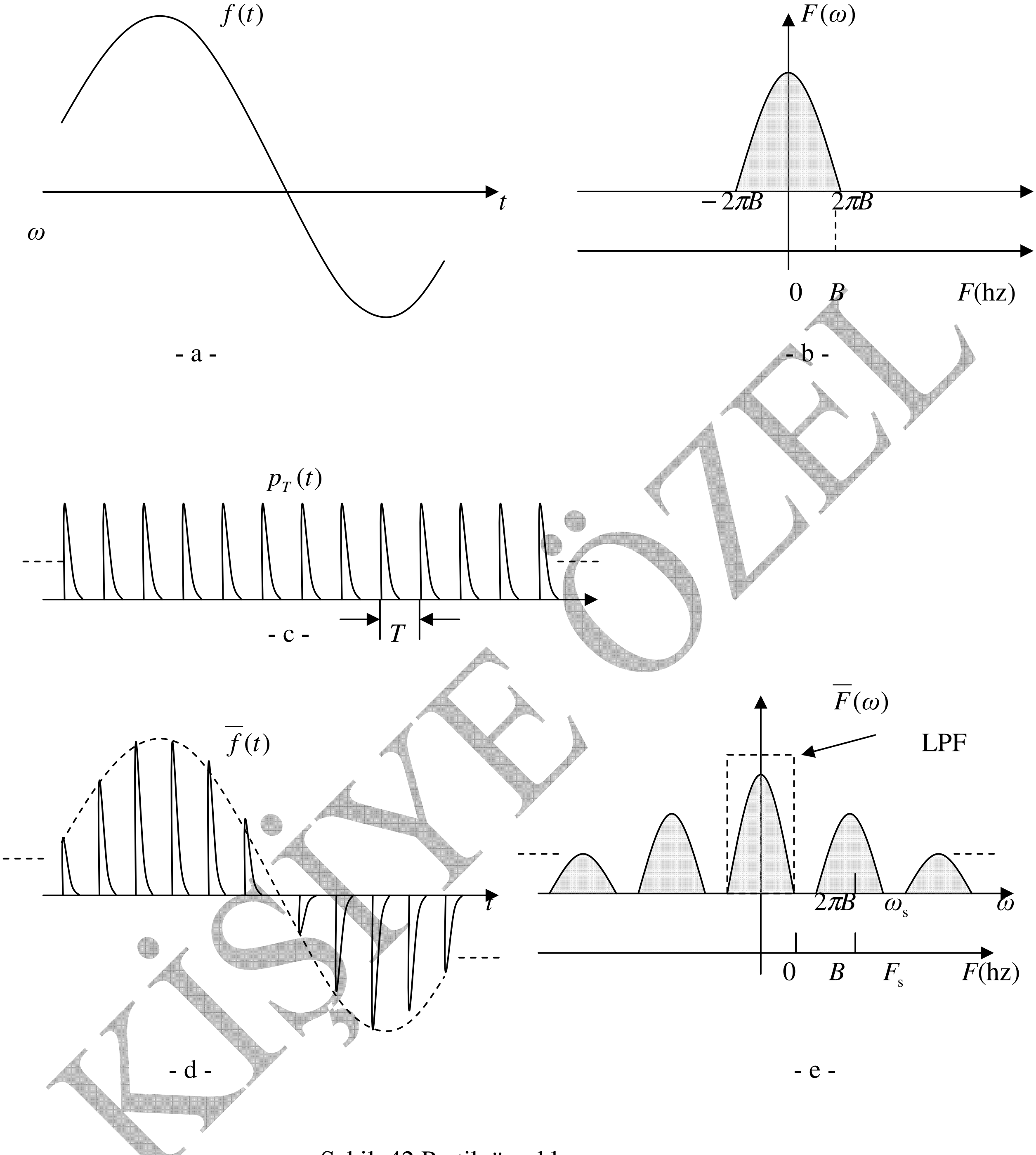
Elde edilen örneklenmiş bu işaretten tekrar orijinal $f(t)$ işareti elde edilmek isteniyorsa kullanılacak alçak geçiren filtrenin

$$H(\omega) = \frac{T}{\Delta}\,\text{rect}\left(\frac{\omega}{4\pi B}\right)$$

olması gerekiyor. Buradan filtrenin band genişliği B , $B = \frac{\omega_S}{2} = \omega_M$ olarak seçildiği taktirde, bu ω_M frekanslı işaretin örneklerinden elde edileceği anlamına geleceğinden, aynı zamanda sağlıklı örneklemenin yapıldığını da belirtir.

Pratik Örnekleme Üzerine

Doğal (natural) örnekleme olarak da bilinen pratik örnekleme tekniğinde esas olan "*örnekleme fonksiyonu*" seçimidir. İdeal örneklemede "impuls dizisi (impuls train)" kullanılırken, doğal örneklemede impuls yerine periodik darbe fonksiyonu kullanılmaktadır. Bu örnekleme fonksiyonu impuls işaretten farklı olarak belli bir genişlikteki darbe işaretidir. Böyle bir işaret dizisinden oluşan fonksiyon, örnekleme fonksiyonu olarak kullanılır. Böyle bir örnekleme fonksiyonu ile normal örneklemedeki işlemler aynen burada da tekrarlanır. İşaret fonksiyonu $f(t)$ tanımlanan özellikteki belli genişlikteki darbe dizisinden oluşan örnekleme fonksiyonu $p_T(t)$ ile çarpılarak, örneklenmiş işaret $\overline{f}(t)$ elde edilir. İlgili şekil aşağıda verilmiştir.



Şekil 42 Pratik örnekleme

Pratik örneklemede de normal örneklemedeki Nyquist örnekleme frekansı ve periodu göz önüne alınır ($F_s > 2B\,, T_s < \dfrac{1}{2B}$). Bu koşullar altında $f(t)$ işaretinin örneklerinden tekrar eldesi (reconstruction) mümkündür. Şekil (d) de örneklenmiş işaretin spektrumu ($\overline{F}(\omega)$) görülmektedir. Burada normal örneklemeden farklı olarak örneklenmiş spectrum başlangıçtaki $F(\omega)$ nin tekrarlarından oluşmamaktadır. Değişik frekanslarda farklı genlikte işaretler görülmektedir. Bunun sebepleri aşağıda matematiksel ifadesinde araştırılmıştır. Pratik örneklemeye özgü örnekleme fonksiyonu $p_T(t)$

$$p_T(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(n\omega_s t + \theta_n) \qquad \omega_s = \frac{2\pi}{T}$$

biçiminde işaret fonksiyonu $f(t)$ ile çarpılırsa örneklenmiş işaret $\overline{f}(t)$

$$\overline{f}(t) = f(t)p_T(t) = f(t)\left[C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(n\omega_s t + \theta_n)\right]$$

$$= C_0 f(t) + \sum_{n=1}^{\infty} C_n f(t)\cos(n\omega_s t + \theta_n)$$

olarak elde edilir. Buradan $\overline{F}(\omega)$ yi elde etmeye çalışalım. Bunun için $\overline{f}(t)$ göz önüne alınırsa

$$\overline{f}(t) = C_0 f(t) + \sum_{n=1}^{\infty} C_n f(t)\cos(n\omega_s t + \theta_n)$$

$C_0 f(t)$ ve $\sum_{n=1}^{\infty} C_n f(t)\cos(n\omega_s t + \theta_n)$ olarak iki bölümden oluştuğu görülmektedir. Bunların her birinin Fourier transformasyonları araştırılırsa

$$F\{C_0 f(t)\} = C_0 F(\omega)$$

$$F\{\sum_{n=1}^{\infty} C_n f(t)\cos(n\omega_s t + \theta_n)\} = C_n \sum_{n=1}^{\infty} F(\omega \pm n\omega_s)$$

sonuçta

$$F\{\overline{f}(t)\} = C_0 F(\omega) + C_n \sum_{n=1}^{\infty} F(\omega \pm n\omega_s)$$

$$= \overline{F}(\omega)$$

$$\overline{F}(\omega) = C_0 F(\omega) + C_n \sum_{n=1}^{\infty} F(\omega \pm n\omega_s)$$

Görüldüğü gibi $\overline{F}(\omega)$ spektrumu $C_0 F(\omega)$ ve $C_n \sum_{n=1}^{\infty} F(\omega \pm n\omega_s)$ toplamından oluşmaktadır. İlk terim başlangıçtaki işaretin ($F(\omega)$) C_0 katı kadardır ($C_0 F(\omega)$). Bu ana işarete ek olarak onun sağında ve solunda $\pm n\omega_s$ frekanslarında genlikleri "n" e gore değişen C_n genlikli işaretler $F(\omega)$ işaretleri oluşacak veya tekrarlanacaktır. Dolaysıyla pratik örneklemede $F(\omega)$ spektrumunu farklı genliklerle tekrarlayan normal örnekleme spektrumundan farkli bir spectrum oluşmuştur. Normal impuls diziisyle yapılan örneklemede hatırlayacağımız gibi $\overline{F}(\omega)$ spektrumu $F(\omega)$ nin A/T genlikli aynı tekrarlarından ($\frac{A}{T}F(\omega)$) oluşmaktaydı ve genlik anlamında homojen bir görüntü söz konusuydu. Sonuçta şekil (e) de bu yapıda oluşan $\overline{F}(\omega)$ spektrumu Nyquist oranına gore oluştuğundan ($F_s > 2B$, $\omega_s > 4\pi B$) şekilde görüldüğü gibi bir alçak geçiren filtreden (LPF) geçirilmek suretiyle $F(\omega)$ ve dolaysıyla $f(t)$ olarak tekrar elde edilebilecektir (reconstruction, recovering).

Örnek

$f(t) = \sin c^2(5\pi\, t)$ işaretinin Şekil (c) de verilen $p_T(t)$ örnekleme fonksiyonu ile pratik örneklemesini yapın.

Çözüm

Verilen $p_T(t)$ örnekleme fonksiyonu incelenirse örnekleme periodunun 0.1 sn ($T_S = 0.1\,\text{sn}$), darbe genişliği $\Delta = 0.025\,\text{sn}$ ve dolaysıyla örnekleme frekansının da $F_S = \dfrac{1}{T_S} = 10\,\text{Hz}$ olduğu ve $\omega_S = 20\pi$ olduğu görülür. Ayrıca $f(t) = \sin c^2(5\pi\, t)$ işaretinin spektrumu yani Fourier transformasyonu $F(\omega)$

$$F\{\sin c^2(5\pi\, t)\} = 0.2\,\Delta(\frac{\omega}{20\pi})$$
$$= F(\omega)$$

$$F(\omega) = 0.2\,\Delta(\frac{\omega}{20\pi})$$

olacaktır (Şekil (b)). Diğer yandan Şekil (c) de verilen $p_T(t)$ örnekleme fonksiyonunun Fourier serisi karşılığının

$$p_T(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos n\omega_s t \quad , \quad \omega_s = \frac{2\pi}{T}$$

olduğunu biliyoruz. Bunu $\omega_s = 20\pi$ için düzenlersek

$$p_T(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos 20\pi\, nt$$

Elde edilir. Bunun Fourier serisine açılarak ilgili katsayıları

$C_0 = \dfrac{1}{4}$ ve $C_n = \dfrac{2}{n\pi}\sin(\dfrac{n\pi}{4})$

olarak elde edilir. Birkaç örneği göz önüne alırsak

$$n = 1 \text{ için } C_1 = \frac{2}{\pi}\sin(\frac{\pi}{4}) = \frac{2}{\pi}\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \;, \qquad n = 2 \text{ için } C_2 = \frac{2}{2\pi}\sin(\frac{2\pi}{4}) = \frac{1}{\pi}$$

$$n = 3 \text{ için } C_3 = \frac{2}{3\pi}\sin(\frac{3\pi}{4}) = \frac{2}{3\pi}\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{3\pi} \;, \quad n = 4 \text{ için } C_4 = \frac{2}{4\pi}\sin(\frac{4\pi}{4}) = 0$$

Bunlara göre $p_T(t)$ Fourier serisi tekrar yazılırsa

$$p_T(t) = \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{2}}{\pi}\cos 20\pi\, t + \frac{1}{\pi}\cos 40\pi\, t + \frac{\sqrt{2}}{3\pi}\cos 60\pi\, t + \cdots$$

Elde edilir. Bu örnekleme fonksiyonu pratik örnekleme için $f(t)$ işareti ile çarpılarak örneklenmiş işaret $\overline{f}(t)$ elde edilir :

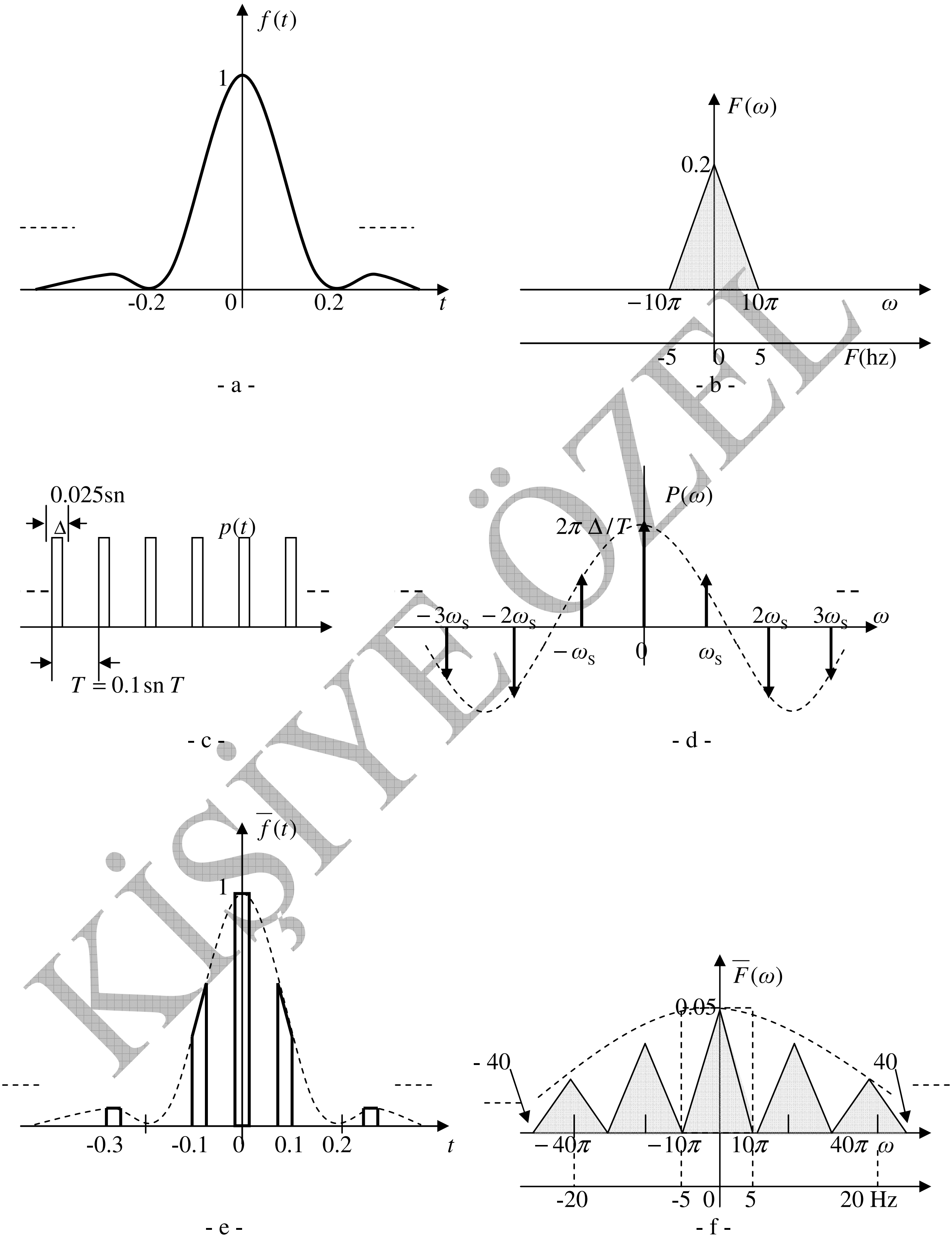
$$\overline{f}(t) = C_0 f(t) + \sum_{n=1}^{\infty} C_n f(t)\cos(n\omega_s t + \theta_n)$$

$$\overline{f}(t) = f(t)\,p_T(t) = \sin c^2(5\pi\, t)\left[C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos n\omega_s t\right]$$

$$\overline{f}(t) = \frac{1}{4}f(t) + \frac{\sqrt{2}}{\pi}f(t)\cos 20\pi\, t + \frac{1}{\pi}f(t)\cos 40\pi\, t + \frac{\sqrt{2}}{3\pi}f(t)\cos 60\pi\, t + \cdots$$

olarak elde edilir. Bunun spektrumunu ($\overline{F}(\omega)$) elde etmek için Fourier transformasyonu alınırsa

$$\overline{F}(\omega) = \frac{1}{4}F(\omega) + \frac{1}{\pi\sqrt{2}}[F(\omega - 20\pi) + F(\omega + 20\pi)] + \frac{1}{\pi}[F(\omega - 40\pi) + F(\omega + 40\pi)]$$
$$+ \frac{1}{3\pi\sqrt{2}}[F(\omega - 60\pi) + F(\omega + 60\pi)] + \cdots$$



Şekil 43 $f(t) = \sin c^2(5\pi\, t)$ işaretinin pratik örneklenmesi

Hem son denklemden hem de Şekil (e) den görüldüğü gibi $\overline{F}(\omega)$ spektrumu işarete ait $F(\omega)$ spektrumunun ($F(\omega) = 0.2\,\Delta(\frac{\omega}{20\pi})$) farklı genlikteki (C_0 ve C_n) bileşenlerinin tekrarından oluşmaktadır. Pratik teknikle örneklenmiş işaretin spektrumu periodic olarak farklı genliklerde 20π rad/s (Hz) frekanslarıyla $F(\omega)$ nin tekrarlarından oluşmuştur. Örnekleme Nyquist oranlarına gore yapıldığından ($F_s > 2B$, $\omega_s > 4\pi B$) $F(\omega)$ ve $f(t)$ nin örneklerinden tekrar elde edilmesi (reconstruction) mümkün olacaktır. Şekil (e) de görüldüğü gibi $\overline{F}(\omega)$ spektrumu band genişliği 5 Hz olan bir alçak geçiren filtreden (LPF) geçirilirse $f(t)$ işareti elde edilecektir. Filtre işleminin örneklenmiş

$$\overline{f}(t) = \frac{1}{4} f(t) + \frac{\sqrt{2}}{\pi} f(t)\cos 20\pi\, t + \frac{1}{\pi} f(t)\cos 40\pi\, t + \frac{\sqrt{2}}{3\pi} f(t)\cos 60\pi\, t + \cdots$$

işaretine uygulanması halinde ilk terim ($\frac{1}{4} f(t)$) hariç diğer bütün terimler yüksek frekanslı bileşenler olduğundan bastırılacağından (elimine edileceğinden, suppress) filtrasyon sonucu yalnızca söz konusu ilk terim elde edilecektir. Bu durumda filter çıkışı

$$y(t) = \frac{1}{4} f(t)$$

olarak elde edilmeye çalışılan işaret formunda üretilecektir.

NOT : Şekil (e) deki $\overline{F}(\omega)$ spektrumuna bakıldığında elde edilmek istenen işaret 10π rad/sn veya 5 Hz olmasına karşın spektrumun $\omega = (0 - 40\pi)$ rad/sn veya 20 Hz aralığında yoğunlaştığı görülmektedir. Darbe dizisi yerine ideal örnekleyici olarak impuls dizisi ile yapılan örneklemeyi hatırlayacak oluesak, $\overline{F}(\omega)$ spektrumu sonsuzdu. Oysa şimdi spektrumun $\omega = (0 - 40\pi)$ rad/sn dışında giderek azaldığı kabul edilirse, artık sınırlı bir spektrumdan söz edilebilir. Bu durumda $\overline{F}(\omega)$ işaretinin bu haliyle veya örneklenmesi suretiyle band sınırlı bir haberleşme sisteminden iletimi mümkün olur.

İŞARETİN ÖRNEKLERİNDEN ELDE EDİLİŞİ

Yeniden oluşturma (reconstruction) olarak bilinen bu proseste örneklenmiş işaret örneklerinden tekrar elde edilmeye çalışılmaktadır. Bunun için iki temel şartın : band-sınırlı (*B Hz*) işaret ve Nyquist oranının $f_S \geq 2B$ sağlandığını başından kabul ediyor ve bu şartlar altında yeniden oluşturma işlemini analiz edeceğimiz belirtmemiz gerekiyor. Ingilizcesi "reconstruction" olarak bilinen bu işlemin diğer bir adı da "interpolasyon" dur. Bir tür ana işarete yaklaşma veya onu kestirme yoluyla elde etme anlamına gelen bu teknikle yukarıdaki iki kritere göre örneklenmiş sürekli-zaman işareti $f(t)$, örneklerinden ($\overline{f}(t)$) elde edilmektedir. $f(t)$ veya $F(\omega)$ nın elde edilme işlemi için örneklenmiş işaretin aşağıdaki şekildeki gibi *B Hz*-bandlı ve *T* kazançlı (gain) ideal bir alçak geçiren filtreden (LPF) geçirilerek elde edildiğini biliyoruz. Aynı şekilde örneklenmiş işaretin $\frac{1}{T}F(\omega)$ bileşenlerinden oluştuğunu da görmekteyiz. Bu nedenle yeniden elde etme (reconstruction) işlemi için *B Hz*-bandlı ve *T* kazançlı (gain) ideal bir alçak geçiren filtreden (LPF) geçirilme gereği vardır.

Şimdi yeniden oluşturma prosesinin matematiksel gösterimine geçebiliriz. Burada verilen band-sınırlı $f(t)$ işaretinin örneklenmiş $\overline{f}(t)$ işaretinden elde edilişi ele alınacaktır. Bu işlem yapılırken örneklenmiş işaretin ideal bir alçak geçiren filtreden geçirildiği göz önüne alınarak grafiksel bir yöntem izlenecektir. Hatırlanacağı gibi örneklenmiş işaret

$$\overline{f}(t) = f(t)\, p(t)$$

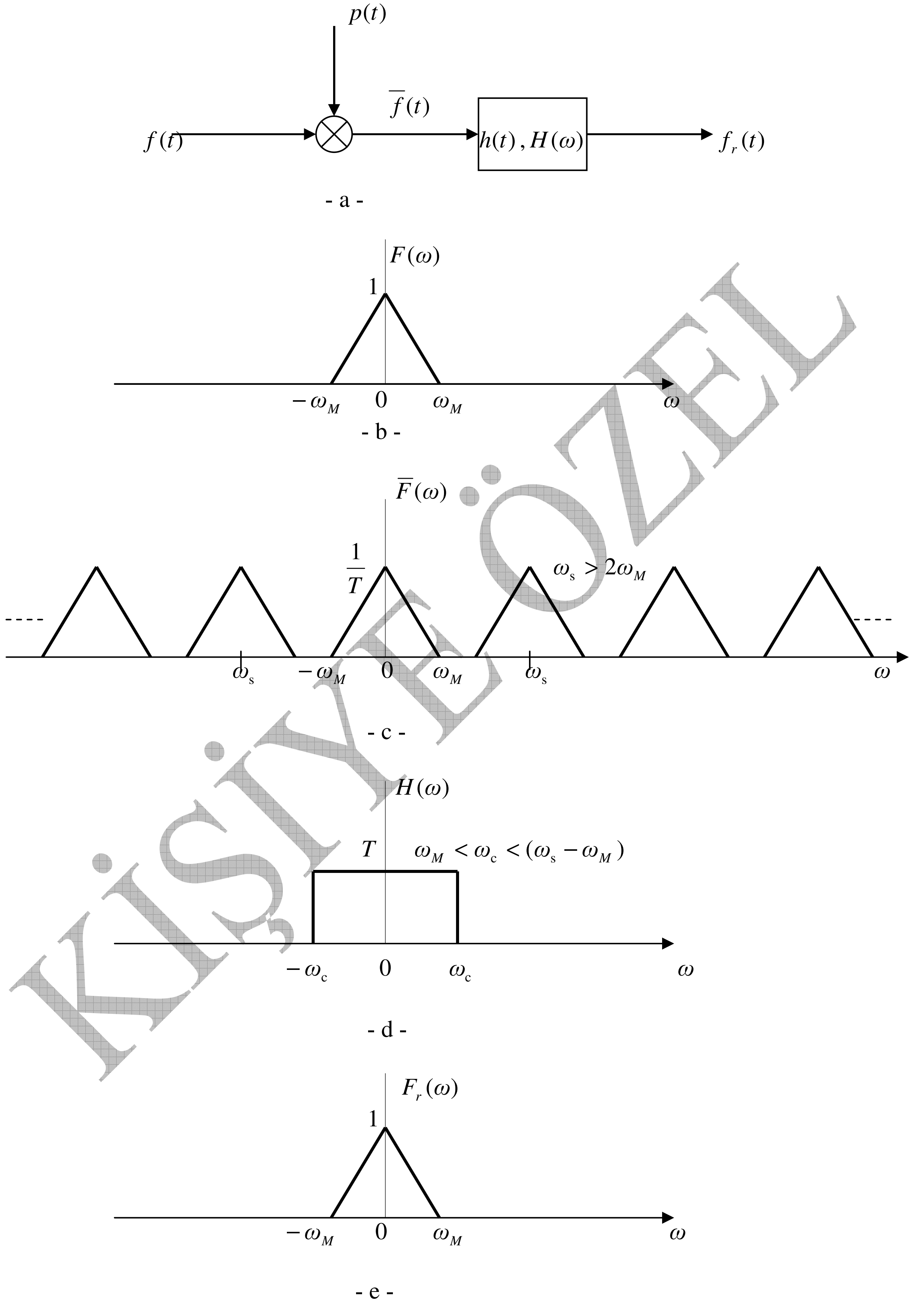
$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$$

olarak elde edilmekteydi. Buradan tekrar $f(t)$ nin elde edilmesi için

$$f_r(t) = \overline{f}(t) * h(t)$$

$$f_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT)\, h(t - nT)$$

örneklenmiş işaret $\overline{f}(t)$ ile filtre fonksiyonu $h(t)$ nin konvülasyonunun alınacağını görmekteyiz. Aşağıdaki verilen şekil yeniden oluşturma işleminin frekans domenindeki (ω) aşamalarını göstermektedir.



Şekil 44 Sürekli-zaman işaretinin örneklerinden elde edilmesi (reconstruction)

Şekil (c) de yer alan örneklenmiş $\overline{F}(\omega)$ işareti $h(t)$ olarak verilen filtre fonksiyonunun Fourier transformasyonudur. Verilen ifadeden $h(t)$ filtre fonksiyonunun aslında ideal alçak geçiren filtre olduğunu düşünürsek ifadesinin

$$h(t) = \frac{\omega_c T \sin(\omega_c t)}{\pi\, \omega_c t} = \frac{\omega_c T}{\pi} \operatorname{sinc}(\omega_c t)$$

olduğunu buradan işaretin ,

$$f_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT)\, \frac{\omega_c T}{\pi}\, \frac{\sin(\omega_c (t - nT))}{\omega_c (t - nT)}$$

olarak tekrar elde edilebileceğini görmekteyiz. Burada Nyquist oranını sağlamak üzere $\omega_c = \omega_s / 2$ olarak alınmıştır. Dikkat edilirse, filtre fonksiyonu olan $h(t)$

$$h(t) = \frac{\omega_c T}{\pi} \operatorname{sinc}(\omega_c t)$$

özelliğinde olduğundan, bunun $f_r(t)$ deki $\sin(\omega_c (t - nT))$ yapısında olması anlamlıdır. Çünkü $\sin(2\pi f_c (t - nT)) = \sin(2\pi f_c t - 2\pi n \frac{1}{T} T)) = \sin(2\pi f_c t - 2\pi n)$ yapısıyla n örneklerinde sıfır olacaktır, bunun dışındaki aralıklarda değerler üreteceğinden bir anlamda örneklenmiş $f(nT)$ işaretinin örnek aralıklarının doldurulması durumu söz konusu olacaktır. Bundan dolayı bu işlşem **<u>interpolasyon</u>** olarak anılmaktadır. Interpolasyon sonucu elde oluşan $f_r(t)$, işareti başlangıçtaki orijinal işarete eşit düşünüldüğünden ($f(t) = f_r(t)$), bu yöntem sonusu, <u>band sınırlı $f(t)$ işaretinin $f(nT)$ örneklerinden tekrar elde edildiği (reconstruction) kabul edilir</u>.

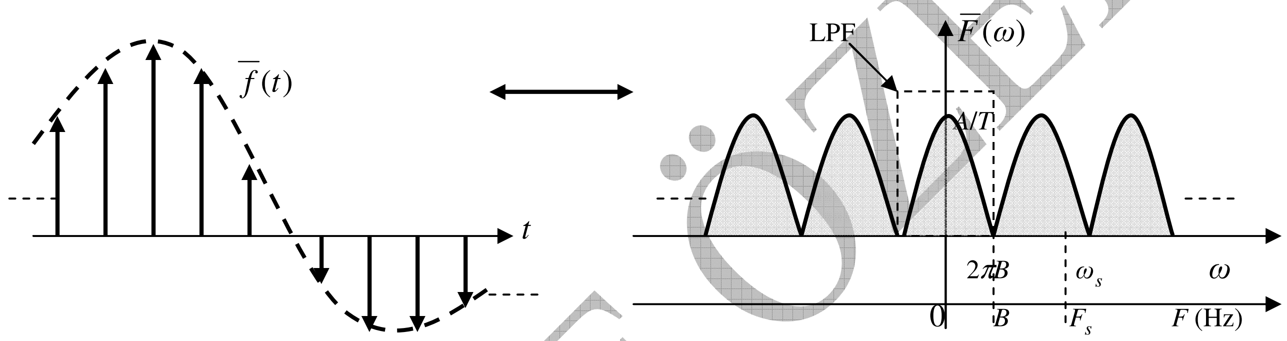
Yeniden Elde Etmede Zorluklar

İşaretin örneklerinden tekrar elde edilmesiyle (reconstruction) ilgili sorunlar mevcuttur. Bu anlamda ele alınması gereken üç husus var. Biri kullanılan ideal filtre, ikincisi örtüşme probleminin yarattığı olumsuzluk ve üçüncüsü ise, ideal örnekleme fonksiyonu olarak kullanılan impuls dizisinin pratikte elde edilmesinin zorluğudur. Bunun yerine uygulamada impulsden daha geniş özellikte olan darbe dizisini üretebilen sıfır-dereceli tutucu (zero-order-hold, ZOH) devrelerinden yararlanılmaktadır. Her birine kısaca değinilecektir. İlk olarak ideal filtre ele alınacaktır.

İdeal filtre problemi

Bir işaretin örneklerinden tekrar elde edilmesinde bazı zorluklar vardır. Özellikle kullanılacak pratik alçak geçiren filtre açısından bazı problemler mevcuttur. İlk problem, örnekleme frekansının gereğinden küçük seçilmesiyle oluşan örtüşmedir (alising). Bu problem, bir tür alçak geçiren filtre özelliğindeki önfiltreleme (prefilter, antialiasing filter) ile gidrilebilir. Bu sorun giderilse dahi, bir diğer problem söz konusu olabilir. Örnekleme, işaretin frekansının göz önüne alınmasıyla doğru örnekleme frekansı seçilse dahi, örtüşme problemi olabilir. Çünkü ortamdan veya çeşitli sebeplerden kaynaklanan gerekçelerle işaret üzerinde istenmeyen gürültü olabilir. Gürültünün varlığı zaman domeninde impuls, frekans domeninde ise sonsuz band anlamına geleceğinden, işaretin frekansı bir anda B gibi bir değerden gürültüden dolayı sonsuz frekans değerinde görüneceğinden, bu durumda uygun örnekleme frekansı seçilemeyeceğinden, her halukarda, işaret yetersiz örnek sayısından dolayı, örtüşme problemiyle karşı karşıya kalacaktır. Bu yüzden örneklemeye başlamadan, bu problemde göz önünde bulundurulmalıdır. Bunlara ek olarak örneklemede bir diğer problem var ki, işareti tekrar elde ederken kullanılan filtreden kaynaklanmaktadır. Bu bölümde bu problem ele alınacaktır.

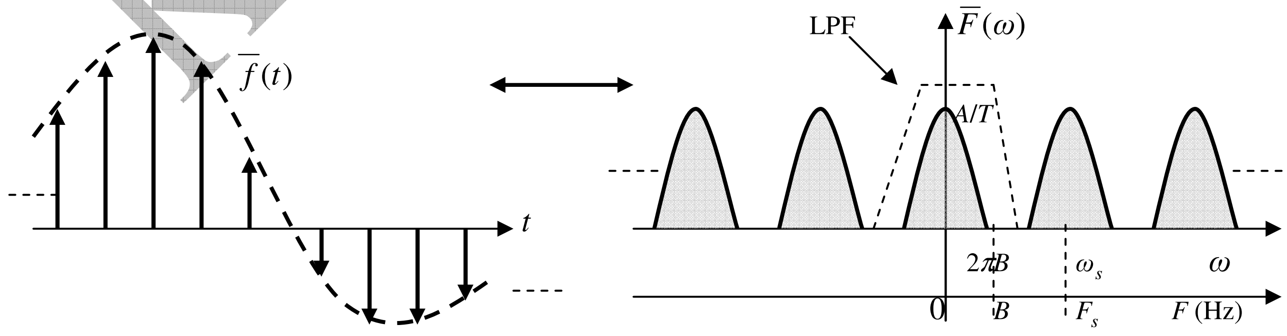
Örneğin örneklenmiş işaretin spektrumu (b) deki gibi olsun. Bu durumda kesik çizgilerle belirtilmiş bir dikdörtgen tipli alçak geçiren filtre kullanılırsa başlangıca yakın düşük frekanslı bileşenleri geçireceğinden, sonuçta $f(t)$ ile tanımlanan band sınırlı işaretin frekans eşdeğerini geçirmiş olacağından, bu da $f(t)$ işaretinin tekrar örneklerinden elde edilmesi demek olacağından, yapılanlar doğru ve tutarlıdır. Ancak problem ideal bir filtrenin kullanılamama durumundan kaynaklanmaktadır. Çünkü özellikle de minumum örnekleme frekansı seçildiğinde $f_S = 2B$ aşağıdaki durum söz konusu olacaktır.



-a- - b -

Şekil 45 Minumum örnekleme frekansına ($F_s = 2B$) ve Fourier spektrumu

Bu durumda şekil (b) incelendiğinde görülebileceği gibi örneğe ait spektrumdaki bileşenler arasında bir boşluk olmayacaktır. İşaretler birbirlerine göre tam sınır değerlerindedir. Zorluk bu noktadan itibaren başlıyor. Çünkü böyle bir durum için kesik çizgilerle belirtildiği gibi tam ideal bir alçak geçiren filtre kullanılma zorluluğu vardır. Ancak biliyoruz ki pratik filtre tasarımında filtrenin yalnızca geçirme kısmı olmayıp, aynı zamanda band geçiş ve band söndüren kısımları da mevcuttur. Dolayısıyla şekil (b) deki gibi ideal bir alçak geçiren filtre kullanılması mümkün olmayacaktır. Bu da direkt olarak bir işaretin örneklerinden elde edilemeyeceği anlamına gelen bir zorluğu gösterir. Bu yüzden örnekleme kesinlikle $f_S > 2B$ kuralına uygun olarak yapılmalıdır. Bu andaki görüntüde aşağıdaki gibi olacaktır.



-a- - b -

Şekil 46 Örneklenmiş işaret ve Fourier spektrumu

Görülebileceği gibi en azından $f_S > 2B$ ile yapılan örneklemede (b) deki gibi örnekler arasında boşluk olacaktır. Böyle bir durumda idealden ziyade şekilde görüldüğü gibi yamuk tipli bir tür pratik alçak geçiren filtre kullanımı mümkün olacaktır. Bu ilk duruma göre daha uygulanabilirdir. Ancak bu kez de ***Paley-Wiener*** koşuluna göre, filtre realizasyonu için hiçbir zaman söndürme bandı genlik kazancı sıfır olamayacağından ($|H(j\omega)| \neq 0$, başka bir sorunla karşı karşıya kalırız. Neticede en azından örneklemenin $f_S > 2B$ kuralına göre yapılması durumunda örneklerden orijinal işaretin elde edilmesinin daha mümkün olabildiği görülmektedir. En azından orijinal işarete oldukça yakın bir işaretin elde edilmesi söz konusu olur. Bu şekilde en az bilgi kaybı yaşanır.

PERİODİK SİNUSOİD İŞARETLERİN ÖRNEKLENMESİ

Ayrık periodik bir işaret, sürekli-periodik işaretin örneklenmesiyle elde edilir. Diğer bir deyişle sürekli periodik işaret, yine periodik bir diziye dönüştürülür. Eğer sürekli periodik işaret sinusoid ise, örnekleme teorisi ile ayrık periodik sinusoid işaret elde edilir. Eğer bir sürekli periodik sinusoid işaret

$$f(t) = \cos \omega t$$

ise, bu işaretin ayrık formunu bulmak için verilen işaretin T örnekleme periodu olmak üzere $t = kT$ anlarında örneklendiği kabul edilir.

$$f(kT) = \cos \omega kT$$

oluşan ifadedeki "k" aynen sürekli işaretlerdeki gibi ayrık zaman değişkenine karşılık gelirken, ωT ise ayrık mod olarak T örnekleme perioduyla belirlenen ayrık açısal hızdır (rad/örnek). Bunu kısaca Ω ile gösterirsek,

$$\Omega = \omega T$$

$$\begin{aligned} f(kT) &= \cos \Omega k \\ &= f[k] \end{aligned}$$

veya ayrık işaret

$$f[k] = \cos \Omega k$$

olarak ifade edilir. Oluşan $f[k] = f(kT)$ kuralından, elde edilen $f[k]$ ayrık işaretindeki k.cı eleman $f(kT)$ sürekli-zaman işaretinin k.cı örneğine eşit olduğunu örnekleme teorisinden bilmekteyiz. Literatür veya çeşitli kaynaklarca $f[k]$ ayrık işareti alternatif olarak

$$f(k) = \cos \Omega k$$

biçiminde de gösterilebilir. Buradan periodik bir işaretin ayrık formunun, diğer bir deyişle ayrık periodik bir işaretin periodunun incelenmesinde yarar vardır. Genel bir $f(t)$ işaretin periodikliği

$$f(t) = f(t + T)$$

ile tespit edildiğinden, benzer yaklaşımla $f[k]$ periodik işaretinin de

$$f[k] = f[k + N_0]$$

gibi olması gerektiğini düşünebiliriz. Bu nedenle öncelikle ayrık bir sinusoid işaretin periodik olma koşulunu incelememiz gerekiyor. Buna göre periodik ayrık işaret $f[k] = \cos \Omega k$ olarak düşünülürse, bunun periodik olması için, ele alınan $f[k] = \cos \Omega k$ ayrık periodik işaretin

$$\cos\Omega(k+N_0)=\cos(\Omega\, k+\Omega N_0)=\cos\Omega k$$

olması gerekeceğinden, bunun sağlanması için

$$\Omega N_0 = 2\pi\, m$$

olması gerektiğini biliyoruz. Burada gerek N_0 gerekse m değerlerinin tamsayı olduğunu bilelim ($N_0, m \in Z$). İfadedeki m değişkeninin

$m =$ **saykıl sayısı**

olduğunu düşünebiliriz. Bununla ayrık sinusoid işaretin m tane saykıldan oluştuğunu düşünebilir ve bu saykıllardaki toplam örnek sayısını göz önüne alabiliriz.Buna göre periodik ayrık işaretin bir saykılındaki (orijinal işaretin zarfında) N_0 örnek sayısı

$$N_0 = m\left(\frac{2\pi}{\Omega}\right)$$

Buna göre böyle ayrık bir işaretin en azından periodu da ayrık olarak bir tamsayı değişkeni ile gösterilecektir. Örneğin böyle bir ayrık period N_0 ise, bunun anlamı bu period belirli sayıda örnek sayısını içerecek bir tam sayı değişkeni olacaktır ($N_0 \in Z$). Çünkü ayrık periodik sinusoid işaret, belirli bir periodunda belli sayıda örnek içeren işaret demektir.

Örnek

$f[k]=\cos\left(\frac{\pi}{4}k\right)$ periodic sinusoidinin periodunu bulalım

Çözüm

$f[k]=\cos\left(\frac{\pi}{4}k\right)$ işaretinin ayrık açısal hızı

$$\Omega = \frac{\pi}{4}$$

buradan ayrık periodun ise

$$N_0 = m\left(\frac{2\pi}{\Omega}\right) = m\left(\frac{2\pi}{\pi/4}\right) = 8m$$

olduğu görülür. Burada N_0 ve $m \in Z^+$ olacağından, saykıl sayısı olarak m en küçük pozitif tam sayı olarak $m=1$ seçildiğinde period,

$N_0 = 8$ örnek / saykıl.

olarak bulunur, dolayısıyla ayrık işaret periodic olur. Buna gore ayrık sinusoid işarette toplam 8 örnek yalnızca 1 saykılda ($m=1$) yer almaktadır.

Sinusoidlerde Örtüşme Frekansının Bulunması

Sinusoid işaretlerde örtüşme ayrık işaretler olarak önemli sonuçlar göstermektedir. Bunları ortaya koyabilmek amacıyla sürekli formdaki sinusoid işaretimiz aşağıdaki gibi olsun.

$$f(t) = \cos \omega t = \cos \omega T\, k$$

ayrık açısal hızı

$$\Omega = \omega T$$

olarak alırsak, ayrık sinusoid işaret

$$\begin{aligned} f(kT) &= \cos \omega T\, k = \cos \Omega\, k \\ &= f[k] \end{aligned}$$

veya

$$f[k] = \cos \Omega\, k$$

Eğer bunu periodik formda düşünürsek,

$$\cos \Omega(k + N_0) = \cos \Omega\, k$$

olması gerekeceğinden, bunun sağlanması için

$$\Omega N_0 = 2\pi\, m$$

olması gerektiğini biliyoruz. Burada gerek N_0 gerekse m değerlerinin tamsayı olduğunu bilelim ($N_0, m \in Z$).Burada elde edilen ifadeyi aşağıdaki gibi düzenleyebiliriz.

$$\cos \Omega(k + N_0) = \cos(\Omega\, k + 2\pi\, m) = \cos \Omega\, k$$

veya

$$\cos \Omega(k + N_0) = \cos(\Omega\, k \pm 2\pi\, m) = \cos \Omega\, k$$

Bu ifade ayrık sinusoidin periodikliğini gösterir. eğer bu ifadeyi $\cos(\Omega\, k \pm 2\pi\, m)$ yerine biraz değişik olarak $\cos(\Omega \pm 2\pi\, m)\, k$ gibi düşünürsek aşağıdaki ilginç sonucu elde ederiz.

$$\cos \Omega(k + N_0) = \cos(\Omega \pm 2\pi\, m)\, k = \cos(\Omega k \pm 2\pi\, mk) = \cos \Omega\, k$$

Bu sonuç gösteriyorki, ayrık $\cos \Omega\, k$ işaretinin Ω frekansı yine ayrık $\cos(\Omega \pm 2\pi\, m)\, k$ işaretinin frekansından farklı değildir. Çünkü $\cos(\Omega \pm 2\pi\, m)\, k$ işaretinin de frekansı Ω dır. Halbuki sürekli formda böyle bir durumu düşünmemiz söz konusu olamaz. Bir an için böyle düşünsek bile bunun görünen

$$\cos(\omega \pm 2\pi\, m)t \neq \cos \omega t$$

sebebinden dolayı mümkün olamayacağını görmekteyiz. Bunun anlamı her bir ω frekans değeri için farklı bir işaret söz konusu olacaktır. Bundan dolayı

$$\cos(\omega \pm 2\pi\, m)t \overset{gibi}{=} \cos\omega t$$

olduğu düşünülemez. Çünkü bu durum yalnızca

$$\cos\omega(t \pm T) = \cos\omega(t \pm 2\pi\, m)\cos\omega t$$

durumuyla mümkündür. Oysa

$$\cos\Omega(k + N_0) = \cos(\Omega \pm 2\pi\, m)\, k = \cos(\Omega k \pm 2\pi\, mk) = \cos\Omega\, k$$

durumunu göz önüne aldığımızda $\cos(\Omega k \pm 2\pi\, mk)$ ifadesi içinde oluşan $2\pi\, mk$ teriminde "m" ve "k" tamsayılar olduğundan ($m, k \in Z$), bunun ikisinin çarpımı olan "mk" de tamsayı olacağından bunun sonucunda $2\pi\, mk$ de 2π nin katları olarak elde edileceğinden ve de bu sinusoidin periodikliğini göstereceğinden $\cos(\Omega k \pm 2\pi\, mk)$ ifadesi periodikmiş gibi $\cos\Omega\, k$ olarak elde edilecektir.

$$\cos(\Omega k \pm 2\pi\, mk) = \cos(\Omega \pm 2\pi\, m)\, k = \cos\Omega\, k$$

Bunun anlamı nedir?. Şöyle açıklayabiliriz; **ayrık sinusoid işaretlerin frekansları kesinlikle birbirlerinden 2π nin katları olacak şekilde ayrılırlar**. Yani frekanslar dolayısıyla da ($k = 1, 2, \cdots$) için örnekler birbirlerinden 2π mesafede konuşlanırlar.

Örnek

$f(t) = \cos\omega t = \cos 2\pi\, f\, t$ tipli $f_1 = 0.2$ Hz ve $f_2 = 1.2$ Hz frekanslarına sahip iki işareti karşılaştırın.

Çözüm

$$f_1(t) = \cos\omega_1 t = \cos 2\pi\, f_1\, t = \cos\left(2 \times \frac{2\pi}{T_1}\right)t = \cos\left(2\frac{2\pi}{10}\right)t = \cos 2\pi\,(0.2)\, t = \cos 0.4\pi\, t$$

$$f_2(t) = \cos\omega_2 t = \cos 2\pi\, f_2\, t = \cos\left(6 \times \frac{2\pi}{T_2}\right)t = \cos\left(6 \times \frac{2\pi}{5}\right)t = \cos 2\pi(1.2)t = \cos 2.4\pi\, t$$

$$\begin{aligned} f_2(t) &= \cos 2.4\pi\, t = \cos(2\pi + 0.4\pi)t = \cos 2\pi(0.2)t \\ &= \cos 0.4\pi\, t \end{aligned}$$

Buna göre

$f_1(t) = \cos 0.4\pi\, t$ işareti $f_2(t) = \cos 2.4\pi\, t$

işaretiyle de gösterilebilmektedir. Bu şekilde $f_2(t)=\cos 2.4\pi\, t$ işaretinin $f_1(t)=\cos 0.4\pi\, t$ işaretiyle gösterilebilmesi bir tür yanılgı, popüler adıyla stroskobik yanılgıdır. Bu durum daha yüksek hızlı (frekanslı) bir işareti, daha düşük hızda görebilme olarak açıklanabilir. Sinema filmlerindeki dönen araba tekerleğinin ters ve daha yavaş hızda görünmesi, böyle bir yanılgıdan kaynaklanmaktadır. Burada insan gözü **stroskobik etkiden** etkilenerek, yüksek frekanslı işareti, alçak frekanslı olarak görmektedir. **Göz yanılgısı** veya göz aldanması olarak düşünülebilecek bu durum bir tespiti ortaya çıkarmaktadır ; insan gözünün alçak geçiren filtre gibi davranması. Göz kendi algılamasından (kendi örnekleme frekansından) daha yüksek frekanslı işaretleri (görüntüleri), alçak geçiren bir filtre gibi süzerek daha alçak (düşük) hızlarda algılamaktadır.

Örnek

$f[k]=\sin\Omega k$ işaretinin örtüşme durumunu inceleyin

Çözüm

$$\Omega=\omega T$$

$$\omega=2\pi\, f_0$$

$$f_S=\frac{1}{T}$$

$$f[k]=\sin\Omega k=\sin\omega T\, k=\sin 2\pi\, f_0 T\, k=\sin 2\pi\, f_0\frac{1}{f_S}k=\sin 2\pi\frac{f_0}{f_S}k$$

$\frac{f_0}{f_S}=$ saykıl /örnek sayısı

Bu oran $f_S\geq 2f_0$ kuralından dolayı en az $\frac{1}{2}$ olmalıdır. Yani bir saykılda en az iki örnek olmalıdır.

$$\frac{f_0}{f_S}\leq\frac{1}{2}$$

Örnek

$f[k]=\cos\frac{\pi}{2}k$ işaretinin örtüşme durumunu inceleyin

Çözüm

$f[k]=\cos\frac{\pi}{2}k=\cos 2\pi\frac{1}{4}k$ yazımındaki $\frac{1}{4}$, oranı bir saykılda 4 örnek anlamına gelmektedir.
Bu oran en az 2 olduğundan, verilen ayrık sinusoid işaret oldukça sağlıklı örneklenmiştir, dolayısıyla örtüşme söz konusu değildir.

Örnek

$f[k] = \sin\frac{3\pi}{2}k$ işaretinin örtüşme durumunu inceleyin

Çözüm

$f[k] = \cos\frac{3\pi}{2}k = \cos 2\pi\frac{3}{4}k$ yazımındaki $\frac{3}{4}$, oranı 4 saykılda 3 örnek anlamına gelmektedir. Bu oran en az 8 olması gerektiğinden, verilen ayrık sinusoid işaret sağlıklı örneklenmemiştir, dolayısıyla örtüşme kaçınılmazdır.

Örnek

$f[k] = \cos(12.9\pi\, k + \theta)$ işaretinin örtüşme frekansını bulun

Çözüm

Örnekte

$$\cos(\Omega k + \theta) = \cos(\Omega_a k + \theta)$$

eşitliğini sağlayan Ω_a örtüşme frekansının
$-\pi < \Omega_a < \pi$

aralığındaki değerini hesaplamamız gerekiyor. Bunun için

$$\begin{aligned}\cos(12.9\pi\, k + \theta) &= \cos\big((6\times(2\pi) + 0.9\pi)\, k + \theta\big)\\ &= \cos(0.9\pi\, k + \theta)\end{aligned}$$

buradan örtüşme frekansı

$\Omega_a = 0.9\pi$ rad/örnek

veya bu örtüşme frekansına sahip işaret
$f_a[k] = \cos(0.9\pi\, k + \theta)$

olacaktır. Bununla bir yerde

$-\pi < \Omega_a < \pi$

koşulunun da sağlandığı görülmektedir. Bunun anlamı verilen $\cos(12.9\pi\, k + \theta)$ sinusoidi daha düşük frekanstaki $\Omega_a = 0.9\pi$ olarak algılanmaktadır. Bunun sonucunda da, gerek $f[k] = \cos(12.9\pi\, k + \theta)$ gerekse $f_a[k] = \cos(0.9\pi\, k + \theta)$ işaretleri aynı örnekleri sağlıyor gibi görünecektir.

Örnek

$f(t) = 4\cos 300\pi\, t$ işaretinin

a) Örtüşme oluşturmayacak minumum örnekleme oranını,

b) Eğer işaret $f_S = 300\,\text{Hz}$ örnekleme frekansıyla örneklenirse örneklenmiş işareti,

c) $f_S = 200\,\text{Hz}$ ile örneklenirse oluşan işareti ve bu işarete denk frekanstaki sinusoidin frekansını, bulun.

Çözüm

a) $f(t) = 4\cos(2\times 150)\pi\, t$ olarak yazılabilecek sürekli-zaman işaretinin frekansı $f = 150\,\text{Hz}$ olduğundan minumum örnekleme oranının $f_S = 2f$ gereğince $f_S = 2\times 150 = 300\,\text{Hz}$ olması gerekir.
b) $f(t) = 4\cos 300\pi\, t$ işareti $f_S = 300\,\text{Hz}$ ile örneklenmek istenmektedir. Görüldüğü gibi $f_S = 300\,\text{Hz}$ örnekleme frekansı işaret frekansı Nyquist kuralı gereği 150 Hz lik işaretin minumum oranına eşit olduğundan ($f_S = 2f_0$) yine bir örtüşme söz konusu olmayacaktır. Bu koşullardaki örtüşmesiz işaret

$$\begin{aligned} f_d(n) &= 4\cos(2\pi \frac{f_0}{f_S} n) = 4\cos(2\pi \frac{150}{300} n) \\ &= 4\cos \pi\, n \end{aligned}$$

Buna göre 2π periodluk görünen işaretten her bir π anında bir örnek alınmak üzere toplam iki örnek (minimum koşul) alınmaktadır.

c) $f(t) = 4\cos 300\pi\, t$ işareti bu kez $f_S = 200\,\text{Hz}$ ile örneklenirse $f_S \neq 2f_0$ kuralı gereğince örtüşme olacaktır. Bu durumda örtüşen ayrık işareti bulalım

$$\begin{aligned} f_d(n) &= 4\cos(2\pi \frac{f}{f_S} n) = 4\cos(2\pi \frac{150}{200} n) \\ &= 4\cos \frac{3\pi}{2} n \end{aligned}$$

Buna göre 2π periodluk görünen işaretten minumum her bir π anında bir örnek alınmak zorunluluğu vardı. Oysa şimdi $\frac{3\pi}{2}$ değeri söz konusudur. Bu değer π den büyük olduğundan artık toplam minimum iki örnek alma imkanı kalmamıştır. Dolayısıyla örtüşme yani aliasing kaçınılmazdır. Elde edilen ayrık

$$f_d(n) = 4\cos \frac{3\pi}{2} n = f[n]$$

İşaretinin örtüşmüş işaret olduğunu söyledik. Buna göre örtüşme durumundaki orijinal $f(t) = 4\cos 300\pi\, t$ işaretini daha düşük frekansta algıladığımız örtüşmüş işareti tespit etmemiz gerekiyor. Buna göre eğer örtüşme durumundaki sinusoid işaret

$$f_d(n) = 4\cos\frac{3\pi}{2}n$$

ise ayrık açısal frekans

$$\Omega = \frac{3\pi}{2}$$

Bu frekansla örtüşen Ω_a arasındaki

$$\Omega = \Omega_a + 2\pi\, m$$

olduğuna göre

$$\Omega = \frac{3\pi}{2} = 2\pi - \frac{\pi}{2}$$

buradan

$$\Omega_a = -\frac{\pi}{2}$$

buradan bu frekanstaki ayrık işaret,

$$f_a(n) = 4\cos\left(-\frac{\pi}{2}n\right) = 4\cos\left(\frac{\pi}{2}n\right)$$

bunun sürekli formdaki karşılığı olan işareti bulmak için ise,

$$\frac{\pi}{2} = 2\pi\frac{f_a}{f_S}$$

$f_S = 200\,\text{Hz}$ olarak örnekleme frekansı olarak verilmişti, ayrıca f_a örtüşme (alias) frekansıdır. Buradan örtüşme durumundaki aranan sürekli işaretin f_a frekansı

$$\frac{\pi}{2} = 2\pi\frac{f_a}{200}$$

$$f_a = 50\,\text{Hz}$$

olarak bulunur. Buna göre böyle bir frekansı olan sürekli işaret

$$f_a(t) = 4\cos 2\pi\, f_a t$$

ifadesinde $f_a = 50\,\text{Hz}$ yerine yazılırsa aranan örtüşmüş frekansı içeren işaret

$$f_a(t) = 4\cos 2\pi(50)t = 4\cos 100\pi\, t$$

olarak bulunur. Bunun anlamı şudur ; eğer başlangıçtaki orijinal $f(t) = 4\cos 300\pi\, t$ işareti $f_S = 200\,\text{Hz}$ örnekleme frekansı ile örneklenirse $f(t)$ işaretin alternatifi $f_a(t) = 4\cos 100\pi\, t$ olacaktır. Bununla gerek $f(t)$ işaretinin gerekse $f_a(t)$ işaretinin gösterdiği örnekler aynı olacaktır. Diğer bir deyişle aynı örnekler farklı frekanstaki işaretlerle gösterilecektir.

Bunun sonucu olarak $f(t) = 4\cos 2\pi(150)\,t$ gibi 150 Hz deki yüksek frekanslı işareti $f_a(t) = 4\cos 2\pi(50)t$ biçimindeki 50 Hz olarak daha düşük frekansta algılamış olacağız. Örtüşmenin sebebp olduğu bu durum, uygulamada göz yanılgısı olarak geçmektedir.

Bunların neticesinde $f(t) = 4\cos(2\times 150)\pi\, t$ ve $f_a(t) = 4\cos(2\times 50)\pi\, t$ işaretler göz önüne alındıklarında 50 Hz lik frekans 150 Hz lik frekansın örtüşen (alias) frekansı olarak değerlendirilebilir. Alternatif olarak mevcut işaretleri ayrık formda düşünecek olursak

$$f_d(n) = 4\cos\frac{3\pi}{2}n$$

işaretini

$$f_a(n) = 4\cos\left(\frac{\pi}{2}n\right)$$

yanılgı (alias) ile algılamaktayız.

Örnek

$$x_1(t) = \cos 2\pi(10)t$$

$$x_2(t) = \cos 2\pi(30)t$$

İşaretlerinin örnekleme frekansı $f_S = 40$ Hz ile örneklenmiş ayrık formlarını bulun.

Çözüm

a)

$x_1(t)$ işareti için $f_S > 2\times 10$ olduğu için örtüşme yok. Bu durumda ayrık işaret

$$x_1[k] = \cos 2\pi(\frac{10}{40})k = \cos\frac{\pi}{2}k$$

$$x_1[k] = \cos\frac{\pi}{2}k$$

b)

$x_2(t) = \cos 60\pi\, t$ işareti bu kez $f_S = 40\,\text{Hz}$ ile örneklendiğinden $f_S \neq 2f_0$ kuralı gereğince örtüşme olacaktır. Bu durumda örtüşen ayrık işareti bulalım

$$x_2[k] = \cos 2\pi(\frac{30}{40})k = \cos\frac{3\pi}{2}k$$

$$x_2[k] = \cos\frac{3\pi}{2}k$$

Buna göre 2π periodluk görünen işaretten minumum her bir π anında bir örnek alınmak zorunluluğu vardı. Oysa şimdi $\frac{3\pi}{2}$ değeri söz konusudur. Bu değer π den büyük olduğundan artık toplam minimum iki örnek alma imkanı kalmamıştır. Örtüşmenin kaçınılmaz olduğu bu koşullardaki ayrık işareti ve örtüşme frekansını ve bu frekansı içeren sürekli işareti bulmaya çalışalım.

$$x_2[k] = \cos\frac{3\pi}{2}k$$

işaretinin örtüşmüş işaret olduğunu söyledik. Buna göre örtüşme durumundaki orijinal $x_2(t) = \cos 60\pi t$ işaretini daha düşük frekansta algıladığımız örtüşmüş işareti tespit etmemiz gerekiyor. Buna göre eğer örtüşme durumundaki sinusoid işaret

$$x_2[k] = \cos\frac{3\pi}{2}k$$

ise ayrık açısal frekans

$$\Omega = \frac{3\pi}{2}$$

Bu frekansla örtüşen Ω_a arasındaki

$$\Omega = \Omega_a + 2\pi m$$

olduğuna göre

$$\Omega = \frac{3\pi}{2} = 2\pi - \frac{\pi}{2}$$

buradan

$$\Omega_a = -\frac{\pi}{2}$$

buradan bu frekanstaki ayrık işaret,

$$x_{2a}[k] = \cos\left(-\frac{\pi}{2}k\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}k\right)$$

bunun sürekli formdaki karşılığı olan işareti bulmak için ise,

$$\frac{\pi}{2} = 2\pi\frac{f_0}{f_S}$$

$f_S = 40\,\text{Hz}$ olarak örnekleme frekansı olarak verilmişti. Buradan aranan analog yani sürekli işaretin f_0 frekansı

$$f_0 = 10\,\text{Hz}$$

olarak bulunur. Buna göre böyle bir frekansı olan sürekli işaret

$$x_{2a}(t) = \cos 2\pi\, f_0 t$$

ifadesinde $f_0 = 10\,\text{Hz}$ yerine yazılırsa aranan örtüşmüş frekansı içeren işaret

$$x_{2a}(t) = \cos 2\pi(10)t = \cos 20\pi\, t$$

olarak bulunur. Bunun anlamı şudur ; eğer başlangıçtaki orijinal $x_2(t) = \cos 60\pi\, t$ işareti $f_S = 40\,\text{Hz}$ örnekleme frekansı ile örneklenirse $x_2(t)$ işaretin alternatifi $x_{2a}(t) = \cos 20\pi\, t$ olacaktır.

Bunun sonucu olarak $x_2(t) = \cos 2\pi(30)\, t$ gibi 30 Hz deki yüksek frekanslı işareti $x_{2a}(t) = \cos 2\pi(10)t$ biçimindeki 10 Hz olarak daha düşük frekansta algılamış olacağız. Örtüşmenin sebebp olduğu bu durum, uygulamada göz yanılgısı olarak geçmektedir.

Bunların neticesinde $x_2(t) = \cos 60\pi\, t$ ve $x_{2a}(t) = \cos 20\pi\, t$ işaretler göz önüne alındıklarında 10 Hz lik frekans 30 Hz lik frekansın örtüşen (alias) frekansı olarak değerlendirilebilir. Alternatif olarak ayrık formda düşünecek olursak

$$x_2[k] = \cos \frac{3\pi}{2} k$$

işaretini

$$x_{2a}[k] = \cos\left(\frac{\pi}{2} k\right)$$

ile algılamaktayız.

Ayrık Zaman Fourier Transformasyon Uzayı

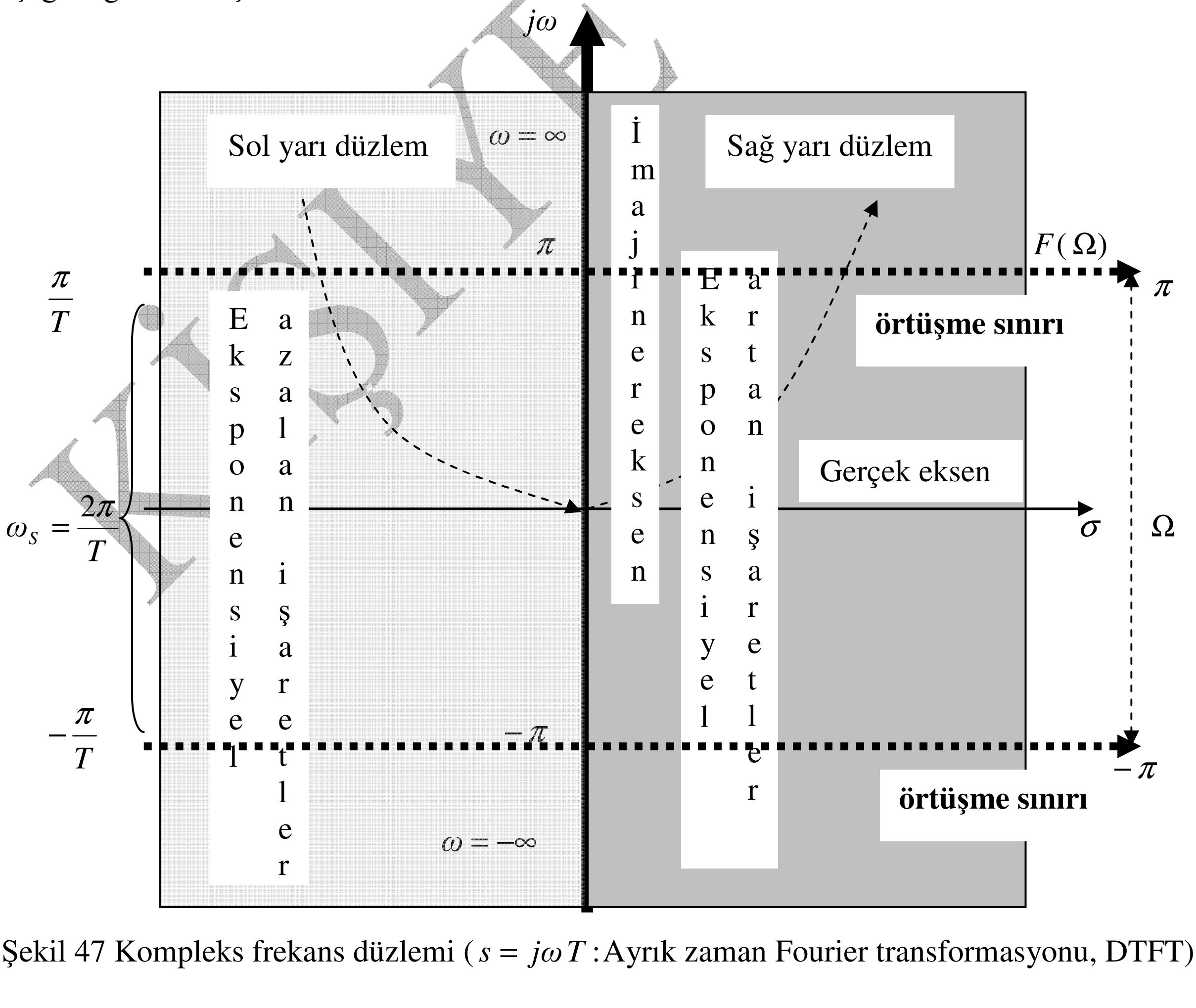
Bir $f(t)$ işaretinin örneklenmesiyle elde edilen işaretin frekans içeriğini incelemek üzere $F(\Omega)$ formundaki ayrık-zaman Fourier transformasyonuna (Discrete-Time Fourier Transform, DTFT) bakılır. Görüldüğü gibi, $F(\Omega)$ sonsuz terimin toplamından oluşmakta, bu yüzden de sürekli formdadır.

$$F(\Omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f[k]\, e^{-j\,\Omega k}$$

DTFT nin $s = \sigma + j\omega$ kompleks frekans düzlemindeki yeri açıklanmaya çalışılacaktır. Buna göre $F(\Omega)$ gösterimindeki $\Omega = \omega T$ olduğuna göre DTFT gösterimi için $\sigma = 0$ olduğu ve $t = kT$ için $F(\Omega)$ deki $e^{-j\,\Omega k}$ ifadesinin aşağıdaki forma dünüşeceğini görmekteyiz.

$$e^{-j\,\Omega k} = e^{-j\,\omega T k} = e^{-j\,\omega\,t}$$

Buna göre $\sigma = 0$ için kompleks frekans düzlemi olan $s = j\omega$, yani frekansları içeren imajiner eksen T perioduyla örneklenmektedir. Örnekler $j\omega$ imajiner eksenin sınırlı $\Omega = (0,2\pi)$ veya $(-\pi,\pi)$ gibi yalnızca 2π uzunluğundaki bir aralığında yer almaktadırlar. Buna göre DTFT için başlangıçta $s = j\omega$ olan düzlem örneklenerek $s = j\omega T$ haline gelmektedir. $s = \sigma + j\omega$ Düzleminin örneklenmesiyle oluşan $F(\Omega)$ düzleminin görünümü aşağıda gösterilmiştir.



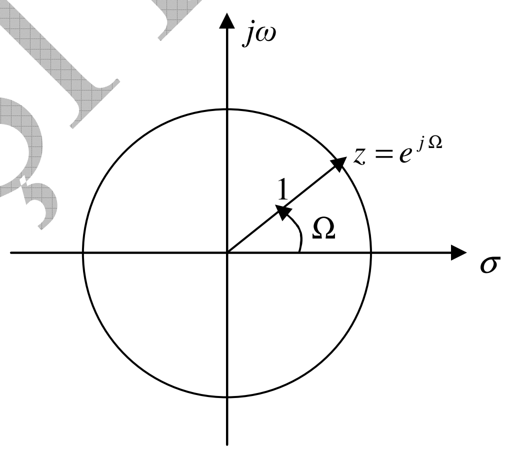
Şekil 47 Kompleks frekans düzlemi ($s = j\omega T$:Ayrık zaman Fourier transformasyonu, DTFT)

Bu şekilden çıkarılacak önemli bir sonuç vardır.

TESPİT : $\Omega = (-\pi, \pi)$ olarak 2π uzunluğundaki ayrık işaretlerin spektrumunun bulunduğu aralık, kompleks uzay olarak anılır ($z = e^{\sigma + j\Omega}$). Dairesel geometride olan z kompleks uzayı, s uzayının örneklenmiş biçimidir. Diğer bir deyişle, ayrık zaman Fourier transformasyonu (daha geneli olan Z transformasyonu), s uzayının T ile örneklenmiş alt uzayıdır. Zaten şekilden $\omega = (-\infty, \infty)$ yerine spectrum sadece $\Omega = (-\pi, \pi)$ aralığı olarak örnekleme frekansının $\omega_S = (-\frac{\pi}{T}, \frac{\pi}{T}) = \frac{2\pi}{T}$ olduğu görülmektedir. Bu $\Omega = (-\pi, \pi)$ sınırı (kesikli koyu çizgiler) aynı zamanda örtüşme sınırıdır. Çünkü bu işaretin ötesinde farklı ayrık frekansta bir işaret söz konusu değildir.

Görüldüğü gibi DTFT, $s = \sigma + j\omega$ düzleminin frekansları içeren $j\omega$ eksenindeki $\omega = (-\infty, \infty)$ aralığının yalnızca koyu kesikli çizgilerle gösterilen $\Omega = (-\pi, \pi)$ aralığı için tanımlanmıştır. Bu sınırların üzeri, örneklemede karşılaştığımız örtüşme bölgelerini oluşturan frekansları içeren bölgelerdir. Buna gore $\Omega = (-\pi, \pi)$ aralığından dolayı olacağından DTFT olarak $F(\Omega)$, dairesel bir düzleme sahip olacaktır. $F(\Omega)$ gösterimindeki $e^{-j\,\Omega k}$ terimi kompleks olduğundan, z kompleks düzlemi olarak $z = e^{-j\,\Omega k}$ yazılabilir. Burada $|z| = 1$ olduğundan, $F(\Omega)$ transformasyonunun bulunduğu z kompleks düzlemi, $r = 1$ yarıçaplı bir daire olacaktır. Buna göre komplek düzlem genel olarak
$z = r\, e^{j\Omega} = e^{\sigma}\, e^{j\Omega} = e^{\sigma + j\Omega}$

olarak gösterilebilir. Böyle bir z düzlemindeki $z = e^{-j\,\Omega k}$ görüntüsü $r = 1$ yarıçaplı bir daire olacaktır. Buradan $\Omega = (-\pi, \pi)$ ile sınırlı frekans band 2π olan düzlemin z kompleks düzlem olduğunu görüyoruz.



Şekil 48 $z = e^{j\Omega}$ Kompleks düzlem ($r = 1$) : Ayrık Fourier transformasyonu ($F(\Omega)$)

Görüldüğü gibi $z = r\, e^{j\Omega} = e^{\sigma}\, e^{j\Omega} = e^{\sigma + j\Omega}$ düzleminde $\sigma = 0$ alınmasıyla z kompleks düzlemi $r = 1$ yarıçaplı $z = e^{j\Omega}$ formuyla $F(\Omega)$ ayrık zaman Fourier transformasyonuna

(DTFT) dönüşmüştür. Buna göre $s=\sigma+j\omega$ kompleks frekans düzleminin T örnekleme perioduyla örneklenmesiyle $z=r\,e^{j\Omega}=e^{\sigma}\,e^{j\Omega}=e^{\sigma+j\Omega}$ kompleks düzlem oluşmaktadır.

$s=\sigma+j\omega$ kompleks frekans düzlemi

$z=e^{\sigma+j\Omega}$ kompleks düzlem ($\Omega=\omega T$)

Buna gore z kompleks düzlem, $j\omega$ ekseninin örneklenmesiyle s düzleminde oluşan $r=e^{\sigma}$ yarıçaplı bir dairedir.

Direkt ve Invers Ayrık Fourier Transformasyonunun (DFT-IDFT) Hesaplanması

Bir sürekli-zaman $f(t)$ işaretinin $t=kT$ kuralıyla örneklenmesiyle oluşan $f[k]$ ayrık işaretinin ($f[k]=f(kT)$) işaretinin frekans analizinin ayrık-zaman Fourier transformasyonuyla (DTFT) yapıldığını belirtmiştik. Buna ilişkin örneklenmiş veya ayrık zaman Fourier transformasyon çifti aşağıdaki gibidir.

$$F(\Omega)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} f[k]\,e^{-j\,\Omega k}$$

$$f[k]=\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} F(\Omega)\,e^{jk\Omega}\,d\Omega$$ Ayrık-zaman Fourier transformasyonu (DTFT)

Ancak burada $F(\Omega)$ nin ifadesinden görüldüğü gibi, sonsuz terimin toplamından oluşmakta, bu yüzden de sürekli formdadır. Ancak sayısal hesaplama platformları veya makineleri sonlu veya sınırlı hesaplama zamanına göre çalıştıklarından, sonsuz hesaplama mümkün olmayacaktır. Bunu dijital tabanlı platformlara uyumlu hale getirmek için, sonsuz terim yerine, sonlu sayıda terimi içeren versiyonuna ihtiyaç duyulur. Bu amaçla geliştirilen DTFT 'na, yalnızca Ayrık Fourier Transformasyonu (Discrete Fourier Transform, DFT) denilmektedir. İfade olarak görünümü aşağıdaki gibidir.

$$\Delta\Omega\rightarrow\Omega_0 \text{ ve } \Omega\rightarrow r\Omega_0\ ,\ \ \Omega_0=\frac{2\pi}{N_0} \text{ için}$$

$F(\Omega)$ DTFT ve $f[k]$ IDTFT aşağıdaki DFT ve IDFT formlarına dönüşür.

$$F_r=\sum_{k=0}^{N_0-1} f[k]\,e^{-j\,r\frac{2\pi}{N_0}k}$$ Ayrık Fourier Transformasyonu (DFT)

$$f[k]=\frac{1}{N_0}\sum_{r=0}^{N-1} F_r\,e^{j\,r\frac{2\pi}{N_0}k}$$

Görüldüğü gibi ayrık $f[k]$ işaretinin frekans analizinin yapılabilmesi için sonlu olmayan $F(\Omega)$ ayrık-zaman Fourier transformasyonu örneklenmiş ve örnekleme sonucunda sonlu ve ayrık formdaki F_r ayrık-Fourier transformasyonu (DFT) elde edilmiştir. Buradan Eğer ayrık (örneklenmiş) Fourier serisini hatırlarsak

$$f[k]=\sum_{r=0}^{N_0-1} D_r\,e^{j\,r\,\Omega_0 k}$$

Ayrık zaman Fourier serisi

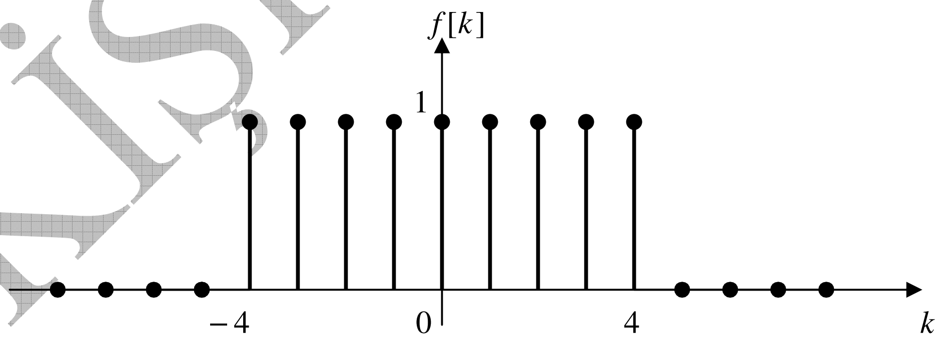
$$D_r = \sum_{r=0}^{N_0-1} f[k]\, e^{-j\, r\, \Omega_0\, k} \qquad , \quad \Omega_0 = \frac{2\pi}{N_0}$$

DFT-IDFT çiftinin aslında ayrık zaman Fourier serisi yapısında olduğunu görmekteyiz. Uygulamada DFT, sayısal hesaplamalar için önemli avantajlar sağlasa da, yinede çok sayıda işaretlerin çarpımı ve toplamı gibi kompleks yapıdadır. Buna çözüm amacıyla 1965 de Tukey ve Cooley isimli Ingiliz bilimadamları *Hızlı Fourier transformasyonu* (Fast Fourier Transform (FFT)) olarak bilinen sayısal hesaplama yöntemini bir algoritma olarak geliştirmişlerdir. Bu algoritma, aslında DFT-IDFT hesaplamasını daha rasyonel yapma özelliğindeki bir yazılımdır. Aşağıda FFT yönteminin karşılaştırılmasıyla ilgili bir tablo verilmiştir.

DFT ve FFT yöntemlerinin karşılaştırılması			
Örnek sayısı N_0	**Kompleks çarpma DFT :** N_0^2	**Kompleks çarpma FFT :** $(N_0/2)\log_2 N_0$	**DFT – FFT Hız oranı**
4	16	4	4
8	64	12	5.3
16	256	32	8
32	1024	80	12.8
64	4096	192	21.3
128	16384	448	36.6
256	65536	1024	64
512	262144	2304	113.8
1024	1048576	5120	204.8

Örnek

Aşağıda verilen ayrık darbe işaretine ait ayrık zaman Fourier transformasyonunu bulun.



Şekil 48Ayrık periodik olmayan darbe işareti

Çözüm

Şekilden görüldüğü gibi darbe fonksiyonu 9 ayrık noktadan oluşmakta (9 noktalı window fonksiyonu) ve $(-4,4)$ arasında tanımlıdır. Buna göre

$$F(\Omega)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} f[k]\,e^{-j\,\Omega k}=\sum_{k=-\frac{M-1}{2}}^{\frac{M-1}{2}} 1\times e^{-j\,\Omega k}=\sum_{k=-\frac{M-1}{2}}^{\frac{M-1}{2}} e^{-j\,\Omega k}$$

$$=\sum_{k=-\frac{M-1}{2}}^{\frac{M-1}{2}} (e^{-j\,\Omega})^{k}$$

elde edilir.

$$F(\Omega)=\sum_{k=-\frac{M-1}{2}}^{\frac{M-1}{2}} (e^{-j\,\Omega})^{k}$$

ifadesi geometrik bir seri olduğundan karşılığı

$$F(\Omega)=\sum_{k=-\frac{M-1}{2}}^{\frac{M-1}{2}} (e^{-j\,\Omega})^{k}=\frac{e^{-j\,\Omega(M+1)/2}-e^{-j\,\Omega(M-1)/2}}{e^{-j\,\Omega}-1}$$

$$=\frac{e^{-j\,\Omega/2}\,(e^{-j\Omega\mathrm{M}/2}-e^{-j\,\Omega\mathrm{M}/2})}{e^{-j\,\Omega/2}\,(e^{-j\Omega/2}-e^{-j\,\Omega/2})}$$

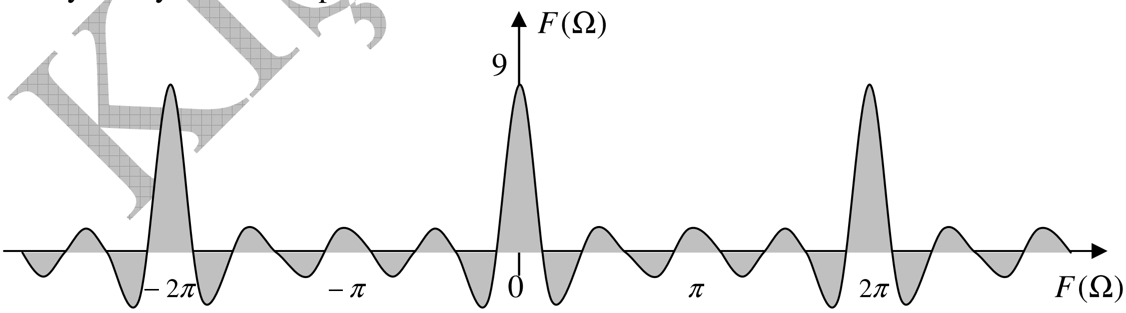
$$=\frac{\sin(\frac{M\Omega}{2})}{\sin(\frac{\Omega}{2})}$$

$$=\frac{\sin(4.5\Omega)}{\sin(0.5\Omega)} \qquad , \qquad M=9$$

elde edilen

$$F(\Omega)=\frac{\sin(4.5\Omega)}{\sin(0.5\Omega)}$$

Fonksiyonun yani DTFT spektrumu



Şekil 49 Ayrık darbe işaretin ayrık zaman Fourier spektrumu

Yine sürekli zaman işaretlerinin zaman frekans analizlerinden dörtgen bir işaretin spektrumunun, sinc(x) tipli bir işaret olacağını bildiğimizden, elde edilen $F(\Omega)$ spektrumunu yadırgamamaktayız.

Örnek

Bir DFT ye ait $f[k]$ ayrık işareti 3-noktalı (3 elemanlı periodik) olarak $f[-1]=f[0]=3$, $f[1]=2$ ve $f[k]=0$, $k=2,3,4,\cdots$ değerleri için tanımlı olduğuna göre,

a) F_r ayrık Fourier transformasyonunu (DFT) bulun.
b) $F(\Omega)$ ayrık zaman Fourier transformasyonunu (DTFT) bulun.

Çözüm

Verilen 3-noktalı dizi $f[k]=\{\cdots,\underbrace{3,\mathbf{3},2}_{DFT},3,3,2,3,\cdots\}$ Dizisi göz önüne alındığında $f[-1]=f[0]=3$, $f[1]=2$ değerlerini sağladığı, bunun dışındakiler için sıfır olduğu bilgisi zaten verilmişti. Dizi yazımındaki koyu 3 gösteriminin, dizinin başlangıç elemanı olan sıfırıncı elemanını göstermektedir ($f[0]=\mathbf{3}$). Buna göre verilen $f[k]=\{3,\mathbf{3},2\}$ ayrık dizisine göre, F_r ayrık Fourier transformasyonu (DFT) aşağıdaki gibi hesaplanır.

a) $F_r=\sum_{k=0}^{N_0-1} f[k]\,e^{-j\,r\,\Omega_0\,k}$

$N_0=$örnek sayısı

$\Omega_0=\frac{2\pi}{N_0}=$ temel ayrık frekans

$(-1,1)$ arasındaki 3-noktalı $f[k]=\{3,\mathbf{3},2\}$ dizinin DFT sini hesaplamak için $\Omega=(0,2\pi)$ arasında 3 bileşenin bulunması için temel frekans $\Omega_0=\frac{2\pi}{3}$ olduğuna göre

$$F_r=\sum_{k=0}^{N_0} f[k]\,e^{-j\,r\,\Omega_0\,k}=\sum_{k=0}^{2} f[k]\,e^{-j\,r\frac{2\pi}{3}k}$$

Örnek sayısı (harmonikler) $N_0=3$, $f[k]=\{\mathbf{3},2,3\}$

$r=0$ için

$$F_0=\sum_{k=0}^{2} f[k]\,e^{-j(0)\frac{2\pi}{3}k}=\left(f[0]\,e^{-j(0)\frac{2\pi}{3}(0)}+f[1]\,e^{-j(0)\frac{2\pi}{3}(1)}+f[2]\,e^{-j(0)\frac{2\pi}{3}(2)}\right)$$
$$=(3\,e^{0}+2\,e^{0}+3\,e^{0})=8$$

$F_0=8$

$r=1$ için

$$F_1 = \sum_{k=0}^{2} f[k] e^{-j(1)\frac{2\pi}{3}k} = \left(f[0] e^{-j(1)\frac{2\pi}{3}(0)} + f[1] e^{-j(1)\frac{2\pi}{3}(1)} + f[2] e^{-j(1)\frac{2\pi}{3}(2)} \right)$$

$$= \left(3e^0 + 2e^{-j\frac{2\pi}{3}} + 3e^{-j\frac{4\pi}{3}} \right) = \left(3 + 2e^{-j\frac{2\pi}{3}} + 3e^{-j\frac{4\pi}{3}} \right)$$

$$= \left(3 + 2\cos\frac{2\pi}{3} - 2j\sin\frac{2\pi}{3} + 3\cos\frac{4\pi}{3} - 3j\sin\frac{4\pi}{3} \right)$$

$$= \left(3 + 2(-\frac{1}{2}) - 2j(\frac{\sqrt{3}}{2}) + 3(-\frac{1}{2}) - 3j(-\frac{\sqrt{3}}{2}) \right) = \left(3 - (\frac{2+3}{2}) + j\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \left((\frac{6-5}{2}) + j(\frac{\sqrt{3}}{2}) \right)$$

$$= \left((\frac{6-5}{2}) + j(\frac{\sqrt{3}}{2}) \right) = 0.5 + j0.866$$

$$= e^{j\frac{\pi}{3}}$$

$$F_1 = e^{j\frac{\pi}{3}}$$

$r = 2$ için

$$F_2 = \sum_{k=0}^{2} f[k] e^{-j(2)\frac{2\pi}{3}k} = \left(f[0] e^{-j(2)\frac{2\pi}{3}(0)} + f[1] e^{-j(2)\frac{2\pi}{3}(1)} + f[2] e^{-j(2)\frac{2\pi}{3}(2)} \right)$$

$$= \left(3e^0 + 2e^{-j\frac{4\pi}{3}} + 3e^{-j\frac{8\pi}{3}} \right) = \left(3 + 2e^{-j\frac{4\pi}{3}} + 3e^{-j\frac{8\pi}{3}} \right)$$

$$= \left(3 + 2\cos\frac{4\pi}{3} - 2j\sin\frac{4\pi}{3} + 3\cos\frac{8\pi}{3} - 3j\sin\frac{8\pi}{3} \right)$$

$$= \left(3 + 2(-\frac{1}{2}) - 2j(-\frac{\sqrt{3}}{2}) + 3(-\frac{1}{2}) - 3j(\frac{\sqrt{3}}{2}) \right) = \left(3 - (\frac{2+3}{2}) - j\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \left((\frac{6-5}{2}) - j\frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

$$= \left(\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 0.5 - j0.866$$

$$= e^{-j\frac{\pi}{3}}$$

$$F_2 = e^{-j\frac{\pi}{3}}$$

Elde edilen DFT değerleri : $F_0 = 8$, $F_{-1} = e^{-j\frac{\pi}{3}}$, $F_1 = e^{j\frac{\pi}{3}}$

NOT : eğer $f[k]$ ayrık işareti yüzlerce, hatta binlerce elemandan oluşan bir dizi olsaydı, F_r ayrık Fourier transformasyonunun yukarıdaki gibi hesaplanması mümkün olmayabilirdi. Bu gibi durumlarda yüksek seviyeli $f[k]$ dizilerinden DFT nin hesaplanmasında, daha etkin bir yöntem olan **Hızlı Fourier Transformasyonu** (Fast Fourier Transform, **FFT**) algoritması kullanılır.

b) DFT dizisi , 3-noktakı $f[k]$ işareti olarak $(-1,1)$ aralığında periodik 3 elemanlı olduğundan $F(\Omega)$ aşağıdaki gibi elde edilir.

$$F(\Omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f[k]\, e^{-jk\Omega}$$

$$F(\Omega) = \sum_{k=-1}^{1} f[k]\, e^{-jk\Omega} = ([-1]\, e^{-j(-1)\Omega} + [0]\, e^{-j(0)\Omega} + [-1]\, e^{-j(1)\Omega}) = (3\, e^{j\,\Omega} + 3\, e^{j0\Omega} + 2\, e^{-j\Omega})$$

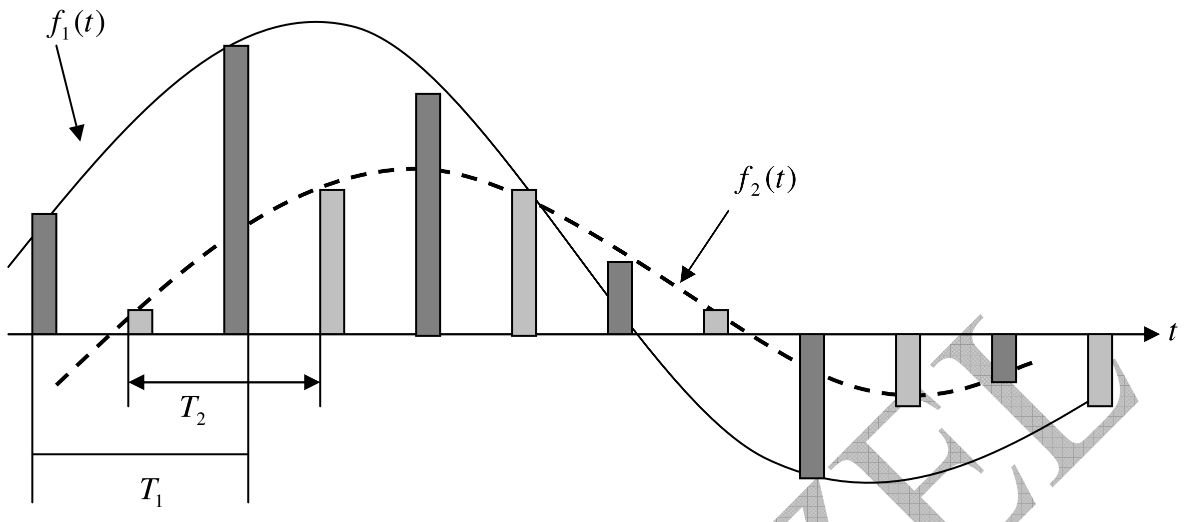
$$= (3\, e^{j\,\Omega} + 3 + 2\, e^{-j\Omega})$$

$$F(\Omega) = 3\, e^{j\,\Omega} + 3 + 2\, e^{-j\Omega}$$

Örnekleme Teorisi ve Çok Kanallı Haberleşme Sistemleri

Daha önce bahsedildiği gibi eğer bir darbe fonksiyonuyla modülasyon veya örnekleme yapılıyorsa, darbe fonksiyonunun band-limitsiz oluşundan dolayı sonsuz bir spektrum söz konusuydu. Modern haberleşme sistemleri bu sonsuz spektrumdan olabildiğince yararlanıp birden fazla iletişim kanalı yaratmak mümkün olabilirmi sorusuyla ilgilenmektedir. Bunu mümkün kılacak tekniklere ihtiyaç vardır. Örnekleme teorisi bunu sağlayabilecek özellikte görünmektedir. Örnekleme ile bir band limitli işaretin sonsuz impuls dizisine dönüşürülebildiğini gördük. Eğer uygun yaklaşımlarda bulunulursa böyle bir spektrum teorik açıdan sonsuz bilgiyi gösterebilir.

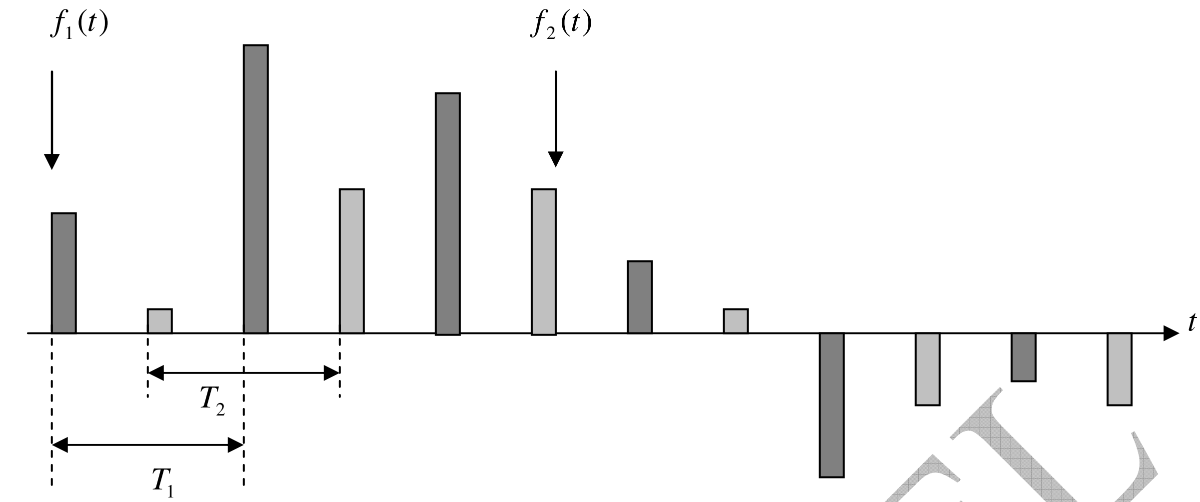
Bu şekilde oluşan impuls dizisi, genlik modülasyonu yapılmış sonsuz tane darbeden oluşan bir darbe dizisi gibidir. Örnekleme ile elde edilen spektrum aslında PAM (pulse amplitude modulation) denilen bir modülasyondur. Uygulamada genişliği sıfır ideal impuls kullanımının zorluğundan, daha geniş ve dikdörtgensel özellikteki darbelerle örnekleme yapılmaktadır. Böylece sürekli işaret sonsuz tane dörtgen darbeden oluşan darbe dizisine dönüşür. Bu tam anlamıyla darbe genlik modülasyonudur (PAM). PAM dizisinin elde edilmesini sağlayan farklı işaretlere ait örnekleyi göstermek amacıyla iki işaretin göz önüne alındığı aşağıdaki şekil verilmiştir.



Şekil 50 Çoklu örnekleme

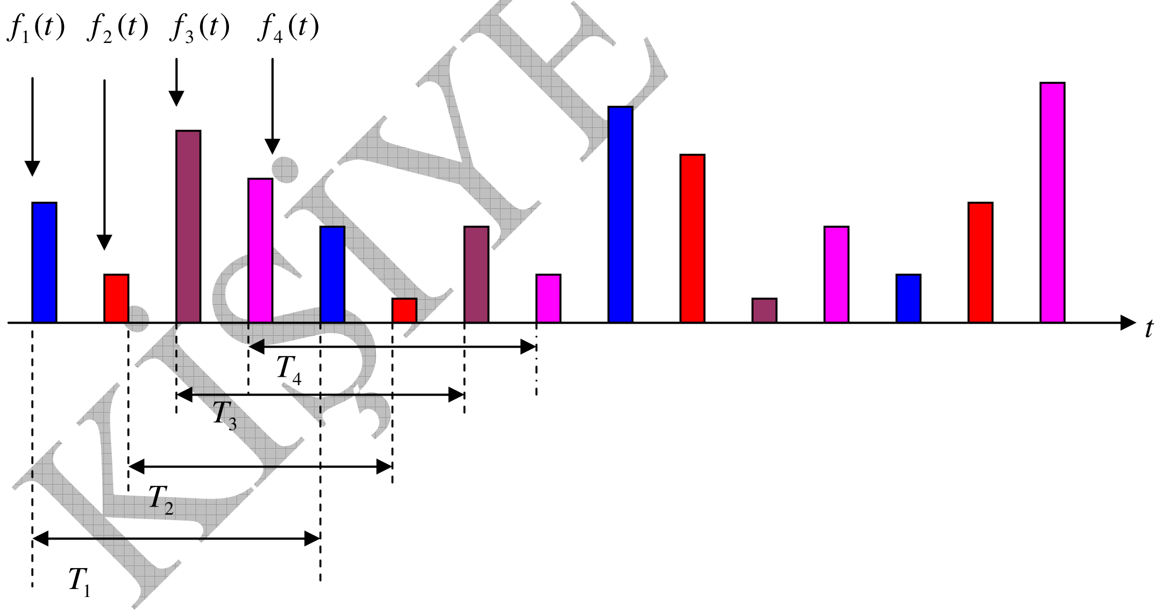
Verilen şekil incelendiği zaman iki işaretten oluşan bir zaman bölünmeli örnekleyici görülmektedir. Birinci $f_1(t)$ işareti dörtgen örnekleyici ile T_1 örnekleme perioduna göre, ikinci $f_2(t)$ işareti ise T_2 örnekleme periodu ile örneklenmektedir. Bu şekilde sonsuz spektrumda farklı iki işarete ait örnekler aralarındaki zaman korunarak spektruma dizilebilmekteler. Pratik açıdan, her bir şeklin farklı örnekleyicilerle ayrı ayrı örneklendiği düşünülecektir. Aynı şekilde gösterilmeler yalnızca basitlik açısındandır.

Her bir işaret “pulse amplitude modulation, PAM (darbe genlikli modülasyon)” ardından veya quantalama ve darbe kod modülasyonlarının (PCM) yapıldığı varsayılarak dijital işaretlere dönüştürüldükten sonra, iletim hattına verilmeye hazır hale getirilirler. Darbe modülasyonlu işaretler, iletim hattının zaman olarak bir bölümünü kullanacakları için darbe modülasyonlu işaretler ve de tipik örneği birden fazla sayıdaki darbe genlik modülasyonlu (PAM) işaretlerin farklı kanal zamanlarıyla TDM tekniğiyle iletilmeleri mümkün olmaktadır. Bu nedenle örnekler uygun yapıda oluşturulduktan sonra, her biri aynı kanaldan TDM ile farklı zamanlarda gönderilebilir. Aşağıdaki şekilde bir TDM kullanılarak iki farklı işarete ait darbe dizilerinin aynı iletim ortamından zaman dönüşümlü (T_1, T_2) iletimleri gösterilmiştir.



Şekil 51 Zaman bölmeli erişimle (TDM) aynı iletim ortamına iki işaret örneklerinin alınması

Bu yapıda istenirse iki değil daha fazla sayıda işaret aynı şekilde uygun örnekleme frekansları (periodları) kullanılarak TDM ile gönderilebilir. Buna uygun olarak 4 işarete ait bir TDM görünümü aşağıda verilmiştir.



Şekil 52 Zaman bölmeli erişimle (TDM) aynı iletim ortamına dört işaret örneklerinin alınması

Görüldüğü gibi uygun $T_1 - T_4$ örnekleme periodları (frekansları) seçilerek birden fazla işaretin örneklenmiş PAM veya PCM darbe dizileri aynı iletim ortamından $T_1 - T_4$ örnekleme zamanlarına bağlı olarak zaman dönüşümlü bir TDM ile gönderilebilir. Bu yaklaşımla ayarlanması koşuluyla istenirse çok daha fazla işaret örneklenmek suretiyle TDM anahtarlama ile aynı hat üzerinden gönderilebilir. Tüm bu avantajlar örnekleme teorisiyle sağlanmaktadır.