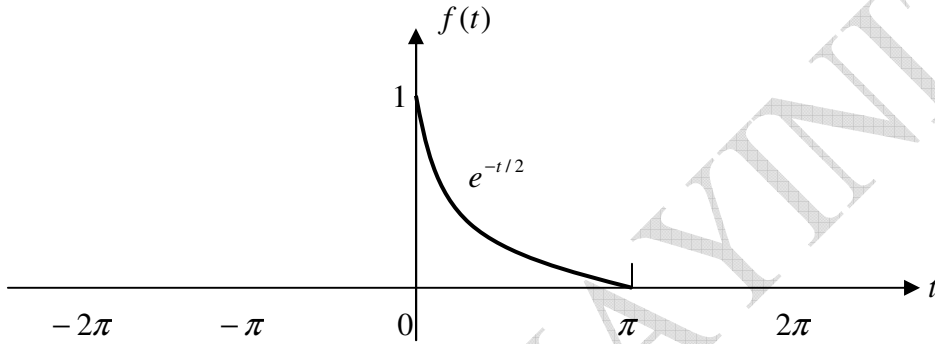


BÖLÜM 4.2

FOURIER SERİSİ

Örnek

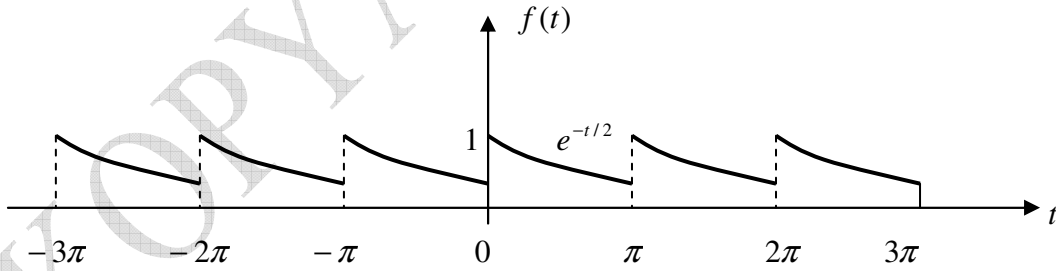
$f(t) = e^{-t/2}$, $0 \leq t \leq \pi$ Fonksiyon ve şekli ile verilen işareti Fourier serisi ile ifade ediniz.



Şekil 1 Periyodik bir işaret

Çözüm

Eğer verilen şekil Fourier serisi ile ifade edilecekse periyodik olması düşünüleceğinden, buna uygun gösterimi aşağıdaki gibi olmalıdır.



Şekil 2 Periyodik bir işaretin Fourier serisi

Şimdi bu yeni duruma göre eksponansiyel bir fonksiyonu gösteren $f(t) = e^{-t/2}$ işaretinin Fourier karşılığını bulmamız gerekiyor. Bunun için Fourier serisini gösteren genel ifadesindeki

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega_0 t + \theta_n) + b_n \sin(n\omega_0 t + \theta_n)$$

a_0, a_n ve b_n katsayılarını ilgili denklemlerinden bulmamız gerekiyor.

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t)$$

öncelikle

$$f(t) = e^{-t/2}, \quad 0 \leq t \leq \pi$$

ifadesinde,

$$T_0 = \pi$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = 2$$

Buna göre,

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos 2nt + b_n \sin 2nt$$

yazılır, buradan,

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{T_0} \int_{t_1}^{t_1+T_0} f(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} e^{-t/2} dt \\ &= 0.504 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T_0} \int_{t_1}^{t_1+T_0} f(t) \cos n\omega_0 t dt \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} e^{-t/2} \cos 2nt dt \end{aligned}$$

bu bir kısmi integrasyon ifadesidir.

$$\int u dv = uv - \int v du$$

çözüm için,

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} e^{-t/2} \cos 2nt dt$$

$$u = e^{-t/2}, \quad dv = \cos 2nt dt$$

$$du = -\frac{1}{2} e^{-t/2} dt, \quad v = \frac{1}{2n} \sin 2nt$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} u dv = \frac{2}{\pi} \left[uv - \int_0^{\pi} v du \right]$$

eğer,

$$p = -\frac{1}{2} \quad , \quad q = 2n$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} e^{-t/2} \cos 2nt \, dt \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} e^{pt} \cos qt \, dt \\ &= \left[\frac{e^{pt}}{p^2 + q^2} (p \cos qt + q \sin qt) \right]_0^{\pi} \\ &= 0.504 \left(\frac{2}{1 + 16n^2} \right) \end{aligned}$$

aynı şekilde b_n çözülürse,

$$b_n = \frac{2}{T_0} \int_{t_1}^{t_1+T_0} f(t) \sin n\omega_0 t \, dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} e^{-t/2} \sin 2nt \, dt$$

burada da kısmi integrasyon gerekecektir.

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} e^{-t/2} \sin 2nt \, dt$$

$$u = e^{-t/2} \quad , \quad dv = \sin 2nt \, dt$$

$$du = -\frac{1}{2} e^{-t/2} dt \quad , \quad v = -\frac{1}{2n} \cos 2nt$$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} u \, dv = \frac{2}{\pi} \left[uv - \int_0^{\pi} v \, du \right]$$

eğer,

$$p = -\frac{1}{2} \quad , \quad q = 2n$$

$$\begin{aligned}
 b_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} e^{-t/2} \sin 2nt \, dt \\
 &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} e^{pt} \sin qt \, dt \\
 &= \left[\frac{e^{pt}}{p^2 + q^2} (p \sin qt - q \cos qt) \right]_0^{\pi} \\
 &= 0.504 \left(\frac{8n}{1 + 16n^2} \right)
 \end{aligned}$$

sonuçta bulunan katsayılarla göre Fourier serisinin ifadesi,

$$f(t) = 0.504 \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{1 + 16n^2} (\cos 2nt + 4n \sin 2nt) \right], \quad 0 \leq t \leq \pi$$

bu ifadeyi,

$$f(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(n\omega_0 t + \theta_n)$$

gibi kompakt forma dönüştürsek,

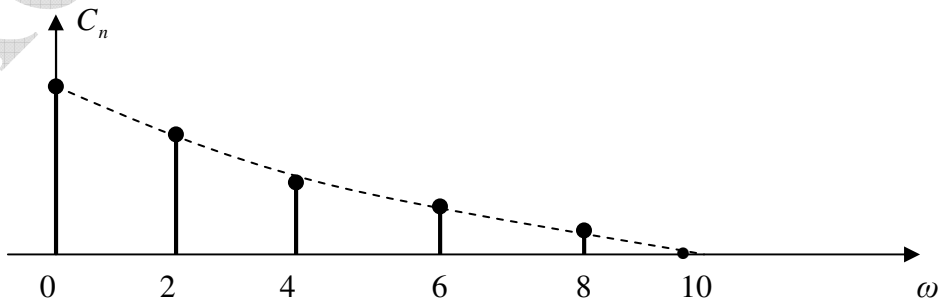
$$C_0 = 0.504$$

$$C_n = \sqrt{a^2 + b^2} = 0.504 \sqrt{\frac{4}{(1 + 16n^2)^2} + \frac{64n^2}{(1 + 16n^2)^2}} = 0.504 \left(\frac{2}{\sqrt{1 + 16n^2}} \right)$$

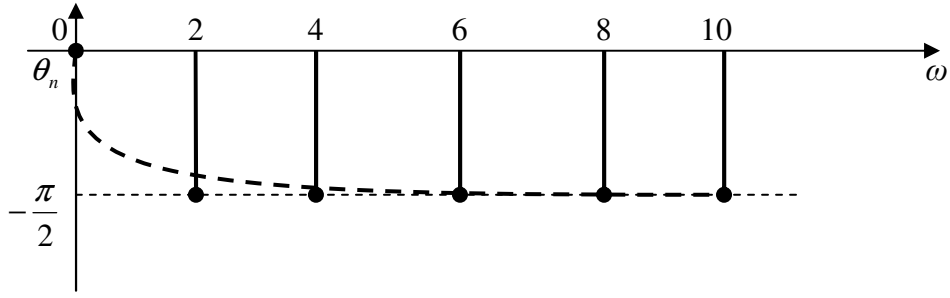
$$\theta_n = \tan^{-1} \left(\frac{-b_n}{a_n} \right) = \tan^{-1} (-4n) = -\tan^{-1} 4n$$

$$f(t) = 0.504 \left[1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{1 + 16n^2}} \cos(n\omega_0 t - \tan^{-1} 4n) \right]$$

grafik gösterimlerine gelince,



Şekil 3 Periyodik bir işaretin Fourier serisindeki Frekans genlikleri



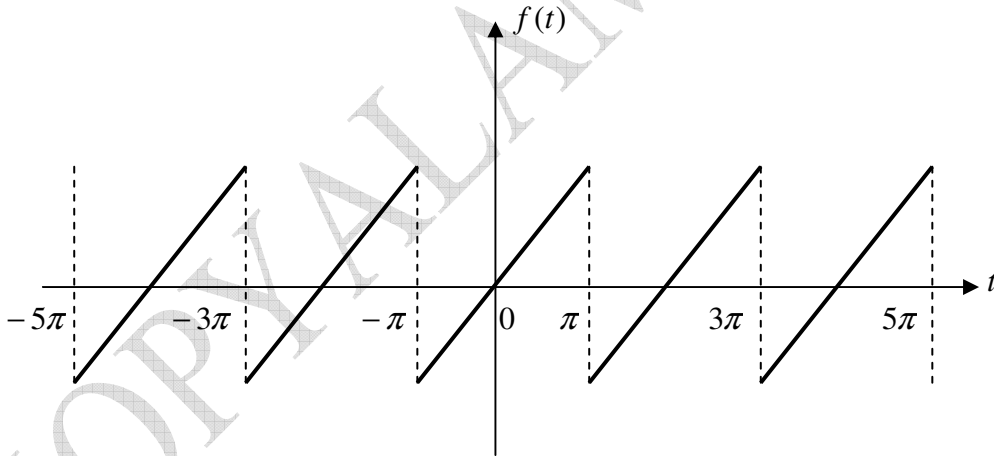
Şekil 4 Periyodik bir işaretin Fourier serisindeki Faz - Frekans görüntüsü

Not : C_n genlik frekans gösteriminde genliklerin $n=5$ nci harmonik için sıfır olduğu görüntüsü mevcuttur. Gerçekte daha önce de bahsedildiği gibi frekans uzayı hiçbir zaman sıfır olmamaktadır. Yüksek harmonikli frekanslar çok küçük genliklerle sonsuza devam etmektedir.

Örnek

$$f(t) = t, \quad -\pi \leq t \leq \pi$$

Fonksiyonu ve



Şekil 5 Periyodik Testere dişi işaret fonksiyonu

şekli ile verilen işareti Fourier serisine açınız.

Çözüm

Fourier serisini gösteren genel ifadesindeki

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega_0 t + \theta_n) + b_n \sin(n\omega_0 t + \theta_n)$$

a_0, a_n ve b_n katsayılarını ilgili denklemlerinden bulmamız gerekiyor.

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t)$$

öncelikle

$$f(t) = t, \quad -\pi \leq t \leq \pi$$

ifadesinde,

$$T_0 = 2\pi$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = 1$$

buna göre,

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nt + b_n \sin nt$$

yazılır, buradan,

$$a_0 = \frac{1}{T_0} \int_{t_1}^{t_1+T_0} f(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t dt = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{1}{2} t^2 \right]_{-\pi}^{\pi} = 0$$

$$a_n = \frac{2}{T_0} \int_{t_1}^{t_1+T_0} f(t) \cos n\omega_0 t dt = \frac{2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t \cos nt dt = \frac{2 \times 2}{2\pi} \int_0^{\pi} t \cos nt dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} t \cos nt dt$$

bu bir kısmi integrasyon ifadesidir.

$$\int u dv = uv - \int v du$$

çözüm için,

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} t \cos nt \, dt$$

$$u = t \quad , \quad dv = \cos nt \, dt$$

$$du = dt \quad , \quad v = \frac{1}{n} \sin nt$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} u \, dv = \frac{1}{\pi} \left[uv - \int_0^{\pi} v \, du \right]$$

eğer,

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} t \cos nt \, dt \\ &= \frac{2}{\pi} \left[\frac{t}{n} \sin nt - \frac{1}{n} \int_0^{\pi} \sin nt \, dt \right] \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\frac{t}{n} \sin nt + \frac{1}{n^2} \cos nt \right]_0^{\pi} \\ &= 0 \end{aligned}$$

aynı şekilde b_n çözülrse,

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{T_0} \int_{t_1}^{t_1+T_0} f(t) \sin n\omega_0 t \, dt = \frac{2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t \sin nt \, dt = \frac{2 \times 2}{2\pi} \int_0^{\pi} t \sin nt \, dt \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} t \sin nt \, dt \end{aligned}$$

burada da kısmi integrasyon gerekecektir.

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} t \sin nt \, dt$$

$$u = t \quad , \quad dv = \sin nt \, dt$$

$$du = dt \quad , \quad v = -\frac{1}{n} \cos nt$$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} u \, dv = \frac{2}{\pi} \left[uv - \int_0^{\pi} v \, du \right]$$

eğer,

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} t \sin nt \, dt \\ &= \frac{2}{\pi} \left[-\frac{t}{n} \cos nt + \frac{1}{n} \int_0^{\pi} \cos nt \, dt \right] \\ &= \frac{2}{\pi} \left[-\frac{t}{n} \cos nt + \frac{1}{n^2} \sin nt \right]_0^{\pi} \\ &= -\frac{2}{n} (-1)^n \\ &= \frac{2}{n} (-1)^{n+1} \end{aligned}$$

sonuçta bulunan katsayılar göre Fourier serisinin ifadesi,

$$f(t) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nt \quad , \quad -\pi \leq t \leq \pi$$

alternatif olarak,

$$f(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(n\omega_0 t + \theta_n)$$

gibi kompakt forma dönüştürsek,

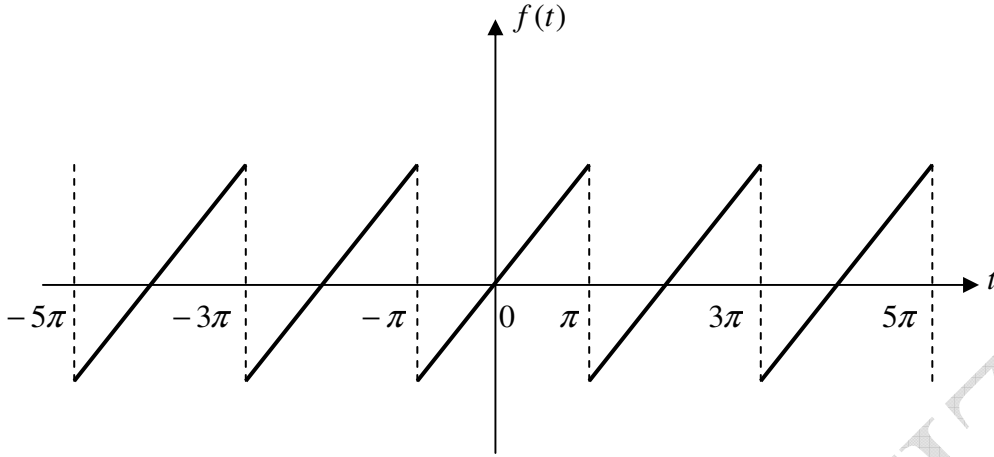
$$C_0 = 0$$

$$C_n = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{0 + b^2} = b = 2 \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

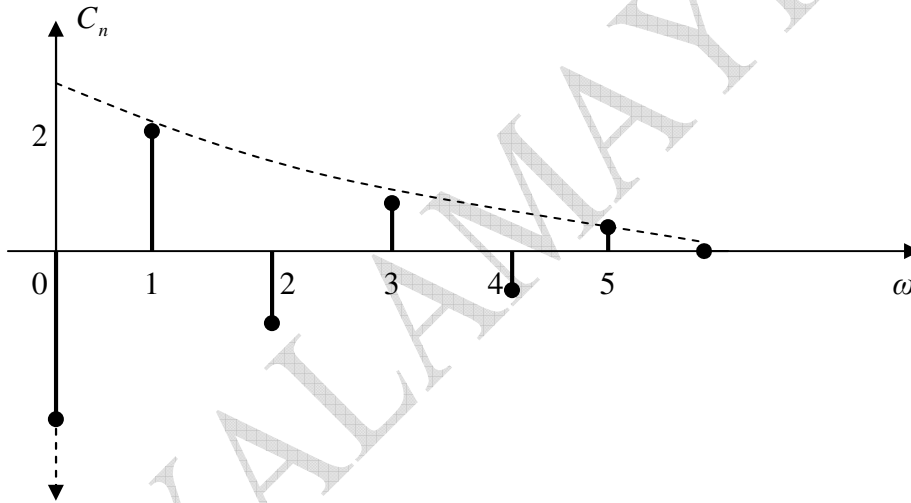
$$f(t) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \cos(n\omega_0 t + \theta_n)$$

$$\theta_n = \tan^{-1} \left(\frac{-b_n}{a_n = 0} \right) = \tan^{-1}(-\infty, \infty) = \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2} = 270^\circ, -270^\circ$$

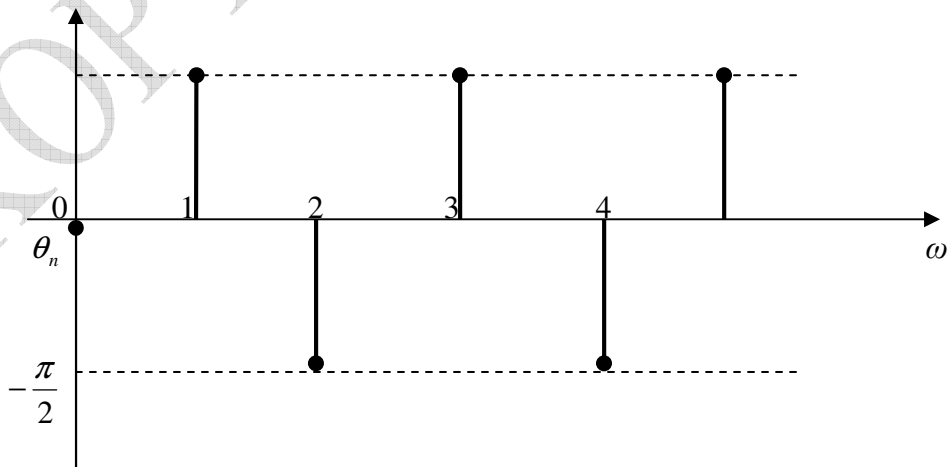
$$f(t) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \cos(n\omega_0 t + [\tan^{-1}(\frac{-b_n}{a_n = 0})]) = f(t) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \cos \left(n\omega_0 t + [\tan^{-1}(-2 \frac{(-1)^{n+1}}{0})] \right)$$



Şekil 6 Fourier serisi : Testere dişi işaret fonksiyonu



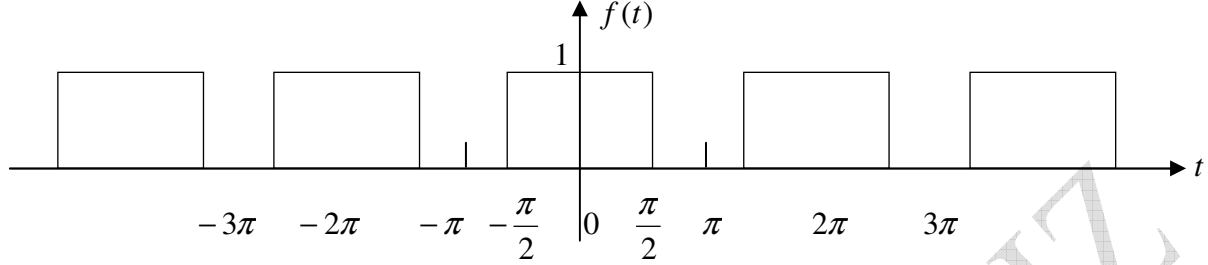
Şekil 7 Periyodik bir işaretin Fourier serisindeki Frekans genlikleri



Şekil 8 Periyodik bir işaretin Fourier serisindeki $\theta_n = \pm \frac{\pi}{2}$ faz - frekans görüntüsü

Örnek

Aşağıda verilen kare dalgaya ilişkin Fourier seri analizini yapınız.



Şekil 9 Periyodik darbe işaretinin Fourier serisi

Çözüm

Şekilden de görüldüğü gibi işaret $f(t) = 1$, $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ aralığında tanımlı ama periodu $[-\pi, \pi]$, $T_0 = 2\pi$ ve $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = 1$.

Fourier serisini gösteren genel ifadesindeki

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega_0 t + \theta_n) + b_n \sin(n\omega_0 t + \theta_n)$$

a_0, a_n ve b_n katsayılarını ilgili denklemlerinden bulmamız gerekiyor.

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t)$$

ilk anda tesbit ettiğimiz değerler

$$f(t) = 1, \quad -\pi \leq t \leq \pi$$

ifadesinde yerine konulursa,

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nt + b_n \sin nt$$

olur. Buradan,

$$a_0 = \frac{1}{T_0} \int_{t_1}^{t_1+T_0} f(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 1 dt = \frac{2}{2\pi} \int_0^{\pi/2} 1 dt = \frac{1}{\pi} [t]_0^{\pi/2} = \frac{1}{\pi} \left[\frac{\pi}{2} - 0 \right]$$

$$= \frac{1}{2}$$

$$a_n = \frac{2}{T_0} \int_{t_1}^{t_1+T_0} f(t) \cos n\omega_0 t dt = \frac{2}{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 1 \cos nt dt = \frac{2 \times 2}{2\pi} \int_0^{\pi/2} \cos nt dt = \frac{2}{\pi} \left[\frac{1}{n} \sin nt \right]_0^{\pi/2}$$

$$= \frac{2}{\pi n} \sin \left(\frac{n\pi}{2} \right)$$

$$a_n = \begin{cases} 0 & n = \text{çift sayı} \\ \frac{2}{\pi n} & n = 1, 5, 9, 13, \dots \\ -\frac{2}{\pi n} & n = 3, 7, 11, 15, \dots \end{cases}$$

aynı şekilde b_n çözülürse,

$$b_n = \frac{2}{T_0} \int_{t_1}^{t_1+T_0} f(t) \sin n\omega_0 t dt = \frac{2}{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 1 \times \sin nt dt = \frac{2}{\pi} \left[-\frac{1}{n} \cos nt \right]_{-\pi/2}^{\pi/2}$$

$$= -\frac{2}{\pi n} \left[\cos n \frac{\pi}{2} - \cos n \frac{\pi}{2} \right]$$

$$= 0$$

Zaten çift fonksiyon özelliğinden $b_n = 0$ olacağı açıktır. Öte yandan faz ifadesi ise, çift fonksiyon olduğundan ($\arctg \frac{b}{a} = \arctg \frac{0}{a} = 0$), buradan muhtemelen bir π kadarlık faz açısı görünüyor.

$$\theta = \begin{cases} 0 & n = \text{çift} \\ -\pi & n = \text{tek}, \quad n = 3, 7, 11, 15, \dots \end{cases}$$

Sonuçta bulunan katsayılarla göre Fourier serisinin ifadesi,

$$f(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \left[\cos t + \frac{1}{3} \cos(3t - \pi) + \frac{1}{5} \cos 5t + \frac{1}{7} \cos(7t - \pi) + \frac{1}{9} \cos 9t + \frac{1}{11} \cos(11t - \pi) \dots \right]$$

Eğer

$$-\cos x = \cos(x - \pi)$$

özellği kullanılırsa, seri aşağıdaki gibi yazılır.

$$f(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \left(\cos t - \frac{1}{3} \cos 3t + \frac{1}{5} \cos 5t - \frac{1}{7} \cos 7t + \dots \right)$$

$$f(t) = \frac{1}{2} - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-1)} \cos(2n-1)t$$

Bu ifadeyi,

$$f(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(n\omega_0 t + \theta_n)$$

gibi kompakt forma dönüştürsek,

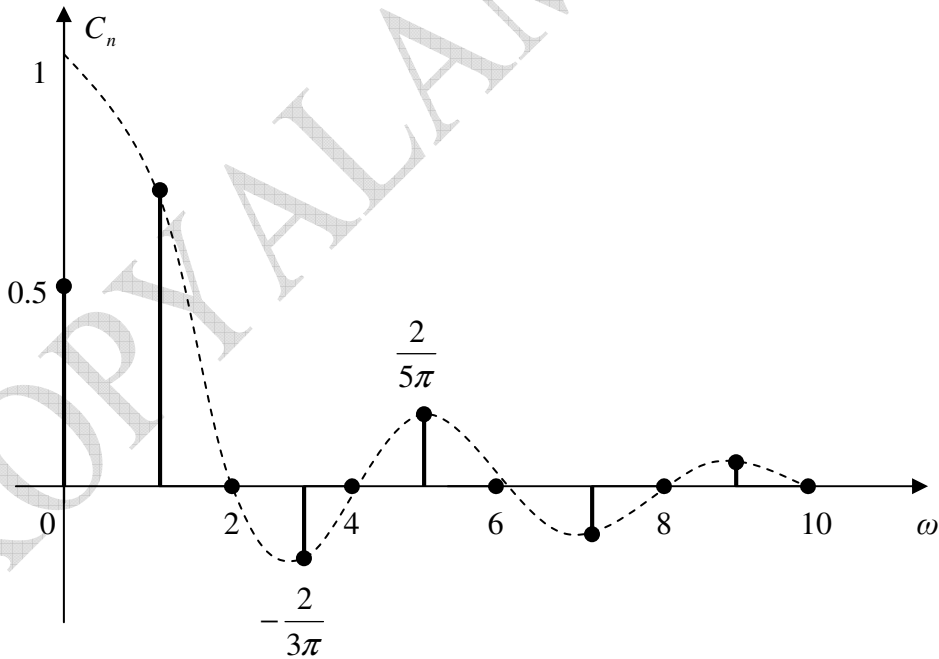
$$C_0 = \frac{1}{2}$$

$$C_n = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{a^2 + 0} = a_n$$

$$\theta_n = \tan^{-1}\left(\frac{-b_n}{a_n}\right) = 0$$

$\theta_n = 0$ anlamı serinin bileşenleri (terimleri) arasında faz farkı yoktur. Dolayısıyla faz spektrumlarını göstermeye gerek yoktur. Bu durumda Fourier spektrumu,

$$f(t) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi n} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \cos(n\omega_0 t + \theta_n) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \cos[(2n-1)t] , \quad n = \text{tek}$$

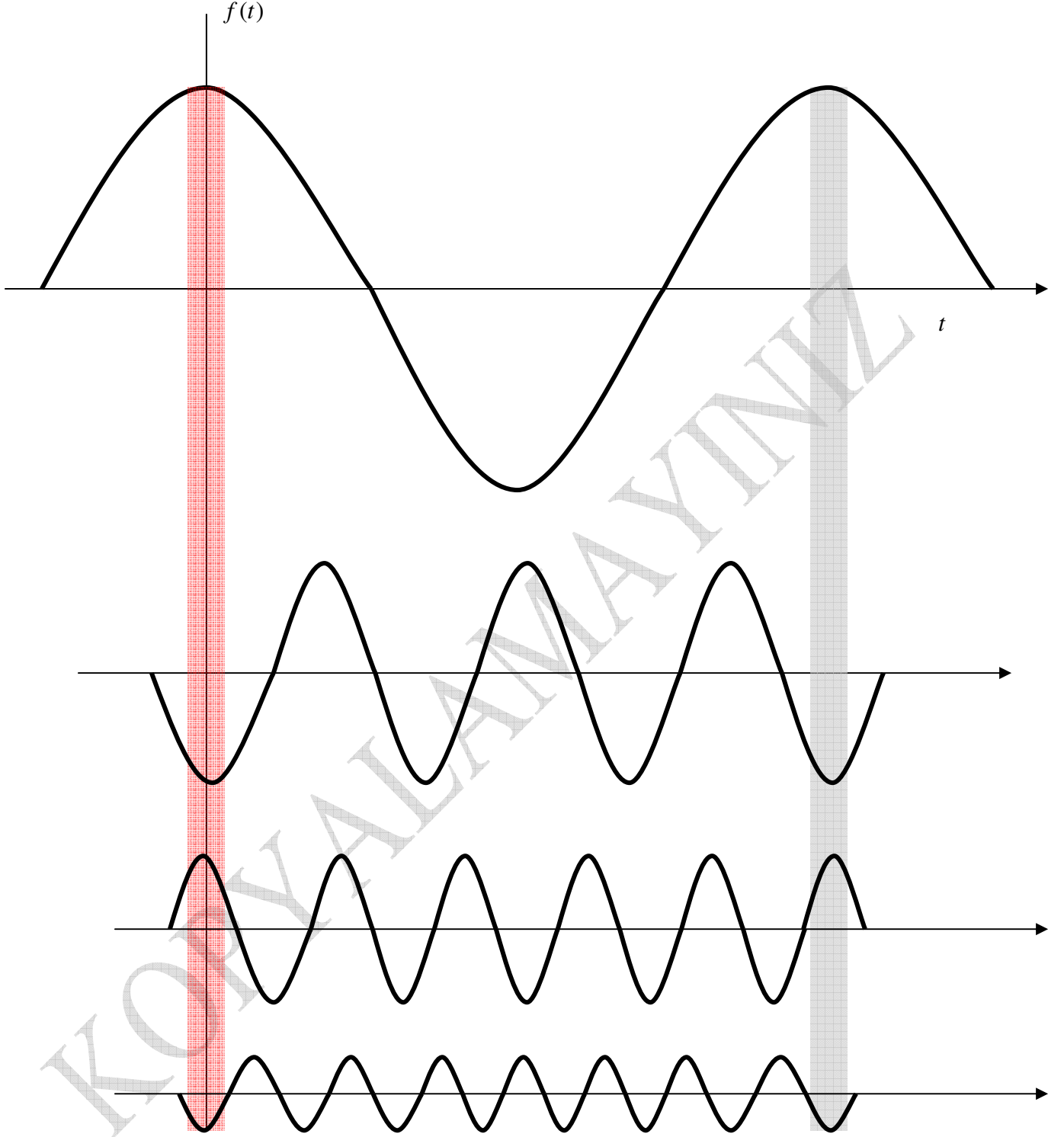


Şekil 10 Periyodik bir işaretin Fourier serisindeki Frekans genlikleri

Yukarıda verilen $f(t) = 1$, $-\pi \leq t \leq \pi$ işaretinin Fourier serisine açılmış $\theta = \pi$ fazlı ilk 4 harmoniğini gösteren

$$f(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \left(\cos t + \frac{1}{3} \cos(3t - \pi) + \frac{1}{5} \cos 5t + \frac{1}{7} \cos(7t - \pi) + \dots \right)$$

ifadesinin harmonikler ve faz farklarıyla görüntüsü aşağıda gösterilmiştir.

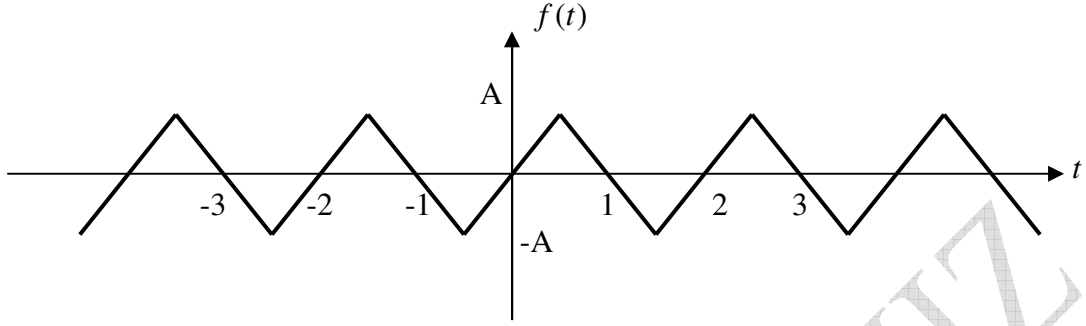


Şekil 11 $f(t) = 1$, $-\pi \leq t \leq \pi$ işaretinin $\theta = \pi$ fazlı ilk 4 harmoniği :

$$f(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \left(\cos t + \frac{1}{3} \cos(3t - \pi) + \frac{1}{5} \cos 5t + \frac{1}{7} \cos(7t - \pi) + \dots \right)$$

Örnek

Verilen işareti Fourier serisine açınız



Şekil 12 Periyodik işaret

Çözüm

İşaretin periodunun $[-1,1]$ aralığında,

$$T_0 = 2$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \pi$$

Şekli verilen işaretin fonksiyonunu çıkarırsak,

$$f(t) = \begin{cases} 2At & |t| \leq \frac{1}{2} \\ 2A(1-t) & \frac{1}{2} < t \leq \frac{3}{2} \end{cases}$$

Bulunan değerleri

$$f(t), \quad -1 \leq t \leq 1$$

ifadesinde yerine konulursa,

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\pi t + b_n \sin n\pi t$$

olur. Buradan a_0 şekle göre bakıldığında ortalama değer olarak sıfırdır.

$$a_0 = 0$$

Çünkü fonksiyon orijinden geçmekte ve genliği pozitif-negatif değerler arasında salınmaktadır. Ayrıca $[-1,1]$ aralığı şekle göre alındığında $[-1/2, 3/2]$ olacaktır. Buna göre kısmi integrasyonlarla,

$$a_n = \frac{2}{T_0} \int_{t_1}^{t_1+T_0} f(t) \cos n \pi t dt = \frac{2}{2} \int_{-1/2}^{1/2} 2At \cos n \pi t dt + \frac{2}{2} \int_{1/2}^{3/2} 2A(1-t) \cos n \pi t dt$$

$$= 0$$

Aynı şekilde b_n da kısmi integrasyonlar yardımıyla çözülürse,

$$b_n = \frac{2}{T_0} \int_{t_1}^{t_1+T_0} f(t) \sin n \pi t dt = \frac{2}{2} \int_{-1/2}^{1/2} 2At \sin n \pi t dt + \frac{2}{2} \int_{1/2}^{3/2} 2A(1-t) \sin n \pi t dt$$

$$b_n = \frac{8A}{n^2 \pi^2} \sin\left(\frac{n \pi}{2}\right) = \begin{cases} 0 & n = \text{çift sayı} \\ \frac{8A}{n^2 \pi^2} & n = 1,5,9,13,\dots \\ -\frac{8A}{n^2 \pi^2} & n = 3,7,11,15,\dots \end{cases}$$

Sonuçta bulunan katsayılar göre genel Fourier serisinin ifadesi,

$$f(t) = \frac{8A}{\pi^2} \left(\sin \pi t - \frac{1}{9} \sin 3\pi t + \frac{1}{25} \sin 5\pi t - \frac{1}{49} \sin 7\pi t + \dots \right)$$

Bu ifadede,

$$\pm \sin kt = \cos(kt \mp 90^\circ)$$

olarak düşünülürse yukarıdaki ifade,

$$f(t) = \frac{8A}{\pi^2} \left(\cos(\pi t - 90^\circ) + \frac{1}{9} \cos(3\pi t + 90^\circ) + \frac{1}{25} \cos(5\pi t - 90^\circ) + \frac{1}{49} \cos(7\pi t + 90^\circ) + \dots \right)$$

olur. Kompakt ifadeyi de oluşturursak,

$$f(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(n\omega_0 t + \theta_n)$$

gibi kompakt forma dönüştürürsek,

$$C_0 = 0$$

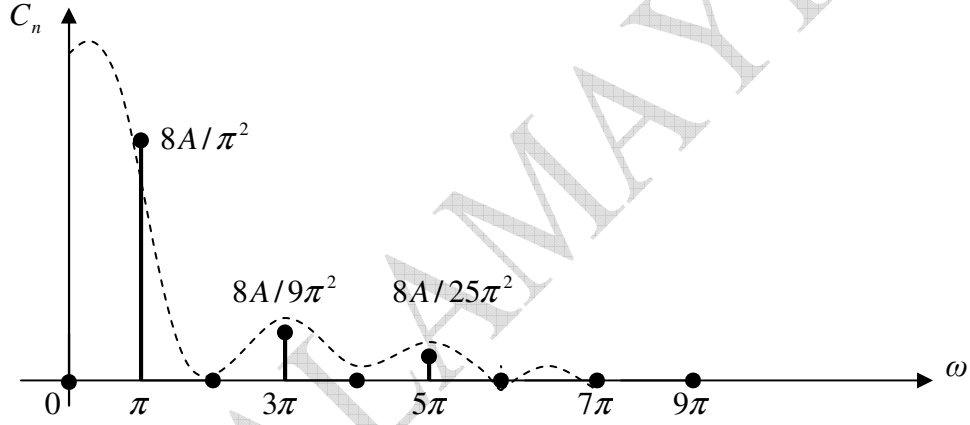
$$C_n = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{0 + b^2} = b$$

$$C_n = \begin{cases} 0 & n = \text{çift sayı} \\ \frac{8A}{n^2\pi^2} & n = 1,5,9,13,\dots \\ -\frac{8A}{n^2\pi^2} & n = 3,7,11,15,\dots \end{cases}$$

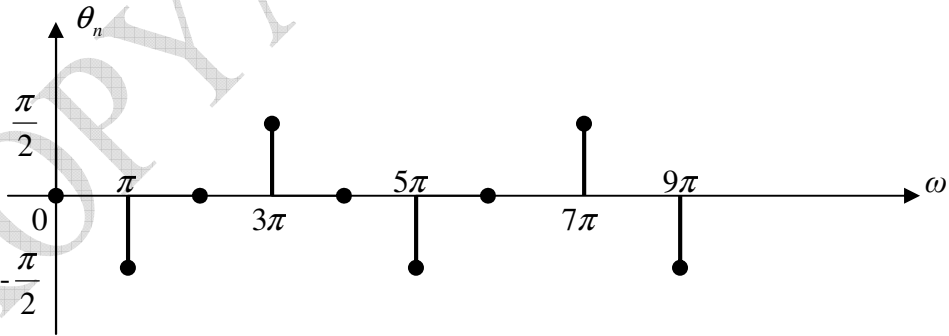
$$\theta_n = \tan^{-1}\left(\frac{-b_n}{a_n=0}\right) = \pm 90^\circ = \pm \frac{\pi}{2}$$

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(n\pi t + [\tan^{-1}(\frac{-b_n}{a_n=0})]) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos\left(n\pi t + [\tan^{-1}(-\frac{b_n}{0})]\right)$$

Frekans ve faz spektrumları ;



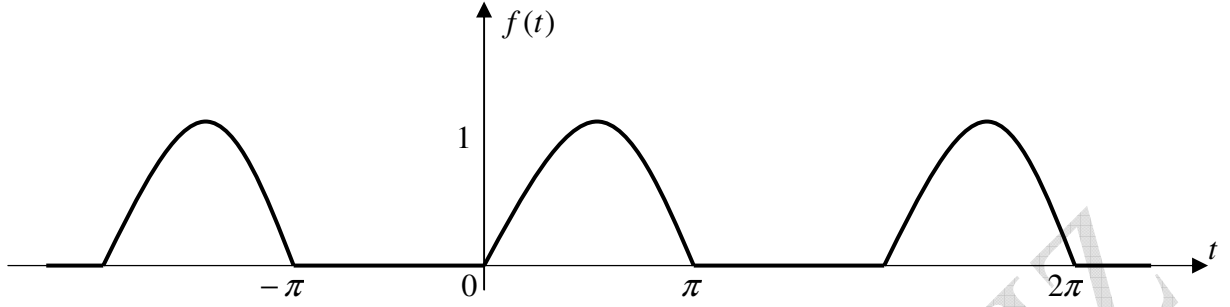
Şekil 13 Periyodik işaretin Fourier serisindeki frekans açılımı



Şekil 14 Periyodik bir işaretin Fourier serisindeki $\theta_n = \pm \frac{\pi}{2}$ faz – frekans görüntüsü

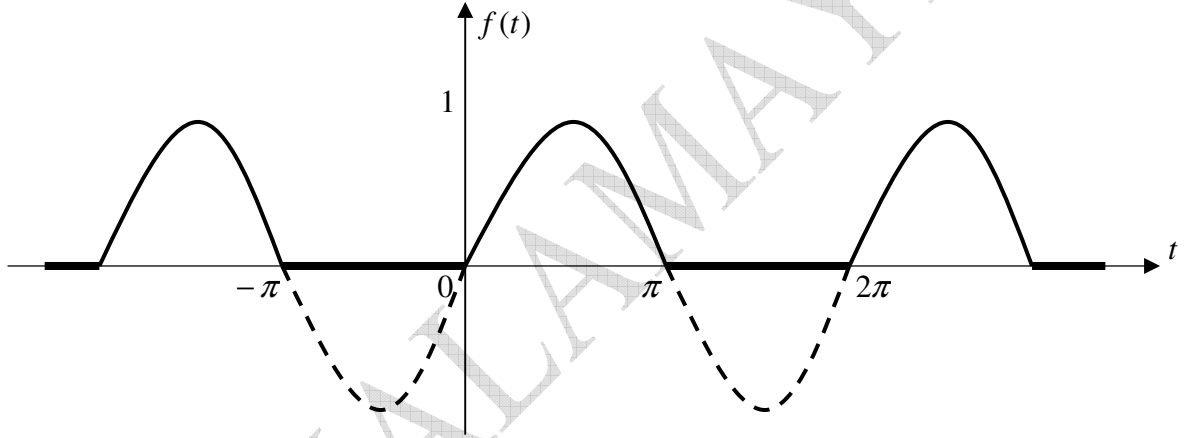
Örnek

Verilen yarım dalga doğrultucu işareti Fourier serisine açınız



Şekil 15 Yarım dalga doğrultucu

Çözüm



Şekil 16 Yarım dalga doğrultucu: Yarım dalgası doğrultulmuş sinüs dalgası

Çözüm

Şekilden görüldüğü gibi yarım dalga doğrultucu $(-\pi, 0)$ ve $(0, \pi)$ aralıklarında olmak üzere $(-\pi, \pi)$ aralıklı ve 2π periodlu bir işarettir. Çözüme de bu şekilde iki aşamalı olarak yaklaşabiliriz.

$$f(t) = \begin{cases} 0 & [-\pi, 0) \\ \sin t & [0, \pi) \end{cases}$$

ilk aralık olan $(-\pi, 0)$ sıfır olduğu için $(0, \pi)$ aralığındaki $f(t) = \sin t$ fonksiyonu dikkate alınacaktır. Bu yaklaşımda işaretin toplam periodu

$$T_0 = 2\pi$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = 1$$

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t$$

Fourier serisinde yerine yazılırsa,

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n t + b_n \sin n t$$

olur. Buradan a_0

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{T_0} \int_{t_1}^{t_1+T_0} f(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \sin t dt = -\frac{\cos t}{2\pi} \Big|_0^\pi = -\frac{(\cos \pi - \cos 0)}{2\pi} \\ &= \frac{1}{\pi} \end{aligned}$$

$$a_n = \frac{2}{T_0} \int_{t_1}^{t_1+T_0} f(t) \cos n \omega_0 t dt = \frac{2}{2\pi} \int_0^\pi \sin t \cos 2n t dt$$

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)]$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin t \cos n t dt = \frac{1}{\pi} \frac{1}{2} \int_0^\pi \sin[(n+1)t] dt + \frac{1}{\pi} \frac{1}{2} \int_0^\pi \sin[(1-n)t] dt$$

$$\begin{aligned} a_n &= -\frac{1}{2\pi(n+1)} \cos[(n+1)t]_0^\pi + \frac{1}{2\pi(n-1)} \cos[(n-1)t]_0^\pi \\ &= -\frac{1}{2\pi(n+1)} \cos(n\pi + \pi) + \frac{1}{2\pi(n+1)} + \frac{1}{2\pi(n-1)} \cos(n\pi - \pi) + \frac{1}{2\pi(n-1)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{2\pi(n+1)} \cos n\pi + \frac{1}{2\pi(n+1)} - \frac{1}{2\pi(n-1)} \cos n\pi + \frac{1}{2\pi(n-1)} \\ &= \cos n\pi \left[\frac{1}{2\pi(n+1)} - \frac{1}{2\pi(n-1)} \right] + \left[\frac{1}{2\pi(n+1)} + \frac{1}{2\pi(n-1)} \right] \end{aligned}$$

$$a_n = \cos n\pi \left[-\frac{2}{2\pi(n+1)(n-1)} \right] + \left[\frac{2n}{2\pi(n+1)(n-1)} \right] = \cos n\pi \left[-\frac{1}{\pi(n^2 - 1)} \right] + \left[\frac{n}{\pi(n^2 - 1)} \right]$$

$$a_n = \cos n\pi \left[-\frac{1}{\pi(n^2 - 1)} \right] + \left[\frac{n}{\pi(n^2 - 1)} \right]$$

$$a_n = \begin{cases} 0 & n = \text{çift} \\ \frac{2}{\pi(n^2 - 1)} & n = \text{tek} \end{cases}$$

$$b_n = \frac{2}{T_0} \int_{t_1}^{t_1+T_0} f(t) \sin n \omega_0 t \, dt = \frac{2}{2\pi} \int_0^\pi \sin t \sin n t \, dt$$

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin t \cos n t \, dt = \frac{1}{\pi} \frac{1}{2} \int_0^\pi \cos[(1-n)t] \, dt - \frac{1}{\pi} \frac{1}{2} \int_0^\pi \cos[(1+n)t] \, dt$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{2\pi(n-1)} \sin[(n-1)t]_0^\pi - \frac{1}{2\pi(n+1)} \sin[(n+1)t]_0^\pi \\ &= \frac{1}{2\pi(n-1)} \sin(n\pi - \pi) - \frac{1}{2\pi(n+1)} \sin(n\pi - \pi) \end{aligned}$$

$$b_n = -\frac{1}{2\pi(n-1)} \sin \pi + \frac{1}{2\pi(n+1)} \sin \pi$$

$$b_n = 0$$

sonuçları toplarsak,

$$a_0 = \frac{1}{\pi}$$

$$a_n = \begin{cases} 0 & n = \text{çift} \\ \frac{2}{\pi(n^2 - 1)} & n = \text{tek} \end{cases}$$

$$b_n = 0$$

Fourier serisini oluşturabiliriz ;

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t$$

$$f(t) = \frac{1}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{\pi(n^2 - 1)} \right) \cos n t \quad n = \text{tek} \quad \text{ve} \quad n > 1$$

$$f(t) = \frac{1}{\pi} + \frac{2}{\pi} \left(\frac{1}{8} \cos 3t + \frac{1}{24} \cos 5t + \frac{1}{48} \cos 7t + \dots \right)$$

$$C_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = \sqrt{\left(\frac{2}{\pi(n^2 - 1)} \right)^2 + 0} = \frac{2}{\pi(n^2 - 1)}$$

$$\theta_n = \tan^{-1} \left(\frac{-b_n}{a_n} \right) = 0$$

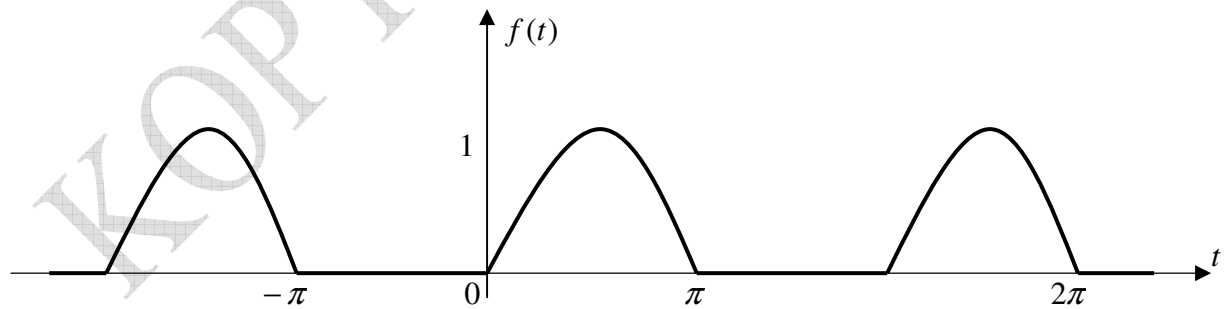
$$C_0 = a_0 = \frac{1}{\pi}$$

$$f(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(n\omega_0 t + \theta_n)$$

$$f(t) = \frac{1}{\pi} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{(n^2 - 1)} \right) \cos n t \quad n = \text{tek} \quad \text{ve} \quad n > 1$$

Örnek

Verilen yarım dalga doğrultucu işareti Fourier serisine açınız



Şekil 17 Yarım dalga doğrultucu

Çözüm

Şekilden görüldüğü gibi yarım dalga doğrultucu $(-l/2, 0)$ ve $(0, l/2)$ aralıklarında olmak üzere $(-l/2, l/2)$ aralıklı ve l periodlu bir işarettir. Çözüme de bu şekilde iki aşamalı olarak yaklaşabiliriz.

$$f(x) = \begin{cases} \cos \frac{\pi x}{l} & 0 \leq x \leq \frac{l}{2} \\ 0 & \frac{l}{2} \leq x \leq l \end{cases}$$

Buna göre $\cos \frac{\pi x}{l}$ işareti tanımlı olduğu $(-l/2, l/2)$ aralığında $f(x) = \cos \frac{\pi x}{l}$ olarak göz önüne alınacaktır. Bu yaklaşımda işaretin toplam periodu

$$T_0 = 2l$$

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t$$

Görüldüğü gibi $T_0 = 2\pi$ periodu yerine $T_0 = 2l$ periodu göz önüne alınabilir. Buna göre ω_0 temel frekansı $T_0 = 2l$ perioduna göre değerlendirilebilir.

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{2\pi}{2l} = \frac{\pi}{l}$$

eğer eksen olarak $t = x$ alınırsa

$$\omega_0 t = \frac{\pi x}{l}$$

buna göre $f(x)$ Fourier serisi aşağıdaki gibi oluşturulur.

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n \frac{\pi x}{l} + b_n \sin n \frac{\pi x}{l}$$

Buradan a_0

$$a_0 = \frac{1}{T_0} \int_{t_1}^{t_1+T_0} f(t) dt = \frac{1}{l} \int_{-l/2}^{l/2} \cos \frac{\pi x}{2l} dx = \frac{2}{2l} \int_0^{l/2} \cos \frac{\pi x}{l} dx = \frac{1}{\pi} \sin \frac{\pi x}{l} \Big|_0^{l/2} = \frac{1}{\pi} (\sin \frac{\pi l}{2l} - 0) = \frac{1}{\pi} \sin \frac{\pi}{2} = \frac{1}{\pi}$$

$$a_n = \frac{2}{T_0} \int_{t_1}^{t_1+T_0} f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx = \frac{2}{T_0} \int_{t_1}^{t_1+T_0} \cos \frac{\pi x}{l} \cos \frac{n\pi x}{l} dx = \frac{2}{2\pi} \int_{-l/2}^{l/2} \cos \frac{\pi x}{l} \cos \frac{n\pi x}{l} dx = \frac{2 \times 2}{2\pi} \int_0^{l/2} \cos \frac{\pi x}{l} \cos \frac{n\pi x}{l} dx$$

$$t = \frac{\pi x}{l}$$

$$x = \frac{l t}{\pi}$$

$$dx = \frac{l}{\pi} dt$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{l/2} \cos \frac{\pi x}{l} \cos \frac{n\pi x}{l} dx = \frac{2}{\pi} \times \frac{l}{\pi} \int_0^{l/2} \cos t \cos nt dt$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)]$$

$$a_n = \frac{2l}{\pi^2} \int_0^{l/2} \cos t \cos nt dt = \frac{2l}{\pi^2} \frac{1}{2} \int_0^{l/2} [\cos(n+1)t + \cos(n-1)t] dt$$

$$a_n = \frac{l}{\pi^2} \int_0^{l/2} \cos[(n+1)t] dt + \frac{l}{\pi^2} \int_0^{l/2} \cos[(n-1)t] dt$$

$$a_n = \frac{l}{\pi^2} \frac{1}{(n+1)} \sin(n+1)t \Big|_0^{l/2} + \frac{l}{\pi^2} \frac{1}{(n-1)} \sin(n-1)t \Big|_0^{l/2} = \frac{l}{\pi^2} \frac{1}{(n+1)} \sin(n+1) \frac{l}{2} + \frac{l}{\pi^2} \frac{1}{(n-1)} \sin(n-1) \frac{l}{2}$$

$$2\pi = 2l$$

$$\pi = l$$

$$a_n = \frac{\pi}{\pi^2} \frac{1}{(n+1)} \sin(n+1) \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{\pi^2} \frac{1}{(n-1)} \sin(n-1) \frac{\pi}{2}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi(n+1)} \sin(n+1) \frac{\pi}{2} + \frac{1}{\pi(n-1)} \sin(n-1) \frac{\pi}{2} \quad n > 1$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \left[\frac{1}{(n+1)} \sin(n+1) \frac{\pi}{2} + \frac{1}{(n-1)} \sin(n-1) \frac{\pi}{2} \right]$$

$$a_n = \frac{1}{\pi(n+1)} \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi n}{2}\right) + \frac{1}{\pi(n-1)} \sin\left(\frac{\pi n}{2} - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$a_n = -\frac{1}{\pi(n+1)} \cos \frac{\pi n}{2} - \frac{1}{\pi(n-1)} \cos \frac{\pi n}{2}$$

$$a_n = -\cos \frac{\pi n}{2} \left[\frac{1}{\pi(n+1)} + \frac{1}{\pi(n-1)} \right] = -\cos \frac{\pi n}{2} \left[\frac{2n}{\pi(n^2 - 1)} \right]$$

$$a_n = \begin{cases} -\frac{2(-1)^{n/2}}{\pi(n^2 - 1)} & n = \text{çift} \\ 0 & n = \text{tek } (n > 1) \end{cases}$$

Verilen fonksiyon $f(x) = \cos \frac{\pi x}{l}$ şeklinde çift olduğundan

$$b_n = 0$$

Sonuçları toparlarsak,

$$a_0 = \frac{1}{\pi}$$

$$a_n = -\frac{2(-1)^{n/2}}{\pi(n^2 - 1)} \quad n = 2n$$

$$a_n = -\frac{2(-1)^n}{\pi(4n^2 - 1)}$$

$$b_n = 0$$

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l}$$

$$f(x) = \frac{1}{\pi} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{(2n/2)}}{[(2n)^2 - 1]} \cos \frac{2n\pi x}{l}$$

$$C_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = \sqrt{\left(-\frac{2(-1)^n}{\pi(4n^2 - 1)}\right)^2 + 0} = \frac{2(-1)^n}{\pi(4n^2 - 1)}$$

$$\theta_n = \tan^{-1}\left(\frac{-b_n}{a_n}\right) = 0$$

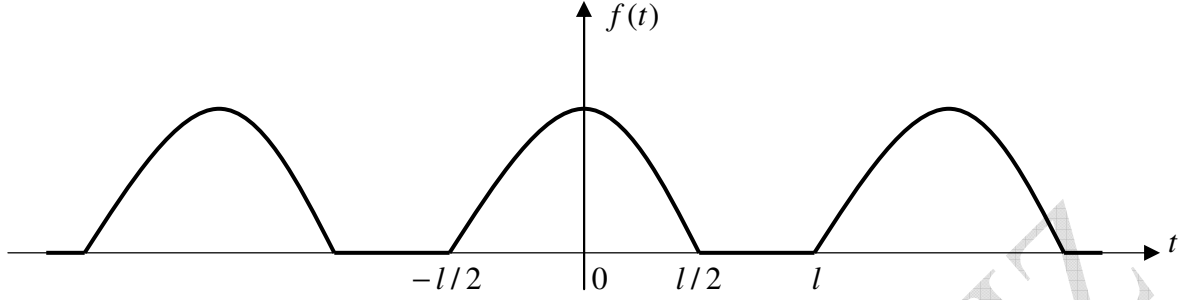
$$C_0 = a_0 = \frac{1}{\pi}$$

$$f(x) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos \frac{2\pi nx}{l}$$

$$f(x) = \frac{1}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n}{\pi(4n^2 - 1)} \cos \frac{2\pi nx}{l}$$

Örnek 2.yol

Verilen yarım dalga doğrultucu işareti Fourier serisine açınız



Şekil 18 Yarım dalga doğrultucu

Çözüm 2.yol

Şekilden görüldüğü gibi yarım dalga doğrultucu $(-l/2, 0)$ ve $(0, l/2)$ aralıklarında olmak üzere $(-l/2, l/2)$ aralıklı ve l periodlu bir işarettir. Çözümde de bu şekilde iki aşamalı olarak yaklaşabiliriz.

$$f(x) = \begin{cases} \cos t & 0 \leq x \leq \frac{l}{2} \\ 0 & \frac{l}{2} \leq x \leq l \end{cases}$$

Buna göre $\cos t$ işareti tanımlı olduğu $(-l/2, l/2)$ aralığında $f(x) = \cos t$ olarak göz önüne alınacaktır. Bu yaklaşımda işaretin toplam periodu

$$T_0 = 2l$$

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t$$

Görüldüğü gibi period $T_0 = 2l$ periodu göz önüne alınabilir. Buna göre ω_0 temel frekansı $T_0 = 2l$ perioduna göre değerlendirilebilir.

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{2\pi}{2l} = \frac{\pi}{l}$$

buna göre $f(t)$ Fourier serisi aşağıdaki gibi oluşturulur.

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\frac{\pi}{l}t + b_n \sin n\frac{\pi}{l}t$$

Buradan a_0

$$a_0 = \frac{1}{T_0} \int_{t_1}^{t_1+T_0} f(t) dt = \frac{1}{l} \int_{-l/2}^{l/2} \cos t dt = \frac{2}{l} \int_0^{\pi/2} \cos t dt = \frac{1}{\pi} \sin t \Big|_0^{\pi/2} = \frac{1}{\pi} (\sin \frac{\pi}{2} - 0) = \frac{1}{\pi} \sin \frac{\pi}{2}$$

$$= \frac{1}{\pi}$$

$$a_n = \frac{2}{T_0} \int_{t_1}^{t_1+T_0} f(t) \cos \frac{n\pi t}{l} dx = \frac{2}{2l} \int_{t_1}^{t_1+T_0} \cos t \cos \frac{n\pi t}{l} dt = \frac{1}{l} \int_{-l/2}^{l/2} \cos \frac{\pi x}{l} \cos \frac{n\pi x}{l} dx$$

$$= \frac{2}{l} \int_0^{l/2} \cos t \cos \frac{n\pi t}{l} dt$$

$$x = \frac{\pi t}{l}$$

$$\frac{l}{\pi} x = t$$

$$\frac{l}{\pi} dx = dt$$

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^{l/2} \cos t \cos \frac{n\pi t}{l} dt = \frac{2}{l} \int_0^{l/2} \cos \frac{lx}{\pi} t \cos \left(\frac{n\pi t}{l} \times \frac{lx}{\pi} \right) \frac{l}{\pi} dx$$

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^{l/2} \cos \frac{lx}{\pi} t \cos \left(\frac{n\pi t}{l} \times \frac{lx}{\pi} \right) \frac{l}{\pi} dx = \frac{2l}{l\pi} \int_0^{l/2} \cos \frac{lx}{\pi} \cos nx dx$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{l/2} \cos \frac{lx}{\pi} \cos nx dx$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)]$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{l/2} \cos \frac{lx}{\pi} \cos nx dx = \frac{2}{\pi} \frac{1}{2} \int_0^{l/2} [\cos(n + \frac{l}{\pi})x + \cos(n - \frac{l}{\pi})x] dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{l/2} [\cos(n + \frac{l}{\pi})x + \cos(n - \frac{l}{\pi})x] dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{l/2} \cos[(n + \frac{l}{\pi})x] dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{l/2} \cos[(n - \frac{l}{\pi})x] dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{l/2} \cos[(n + \frac{l}{\pi})x] dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{l/2} \cos[(n - \frac{l}{\pi})x] dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \frac{\pi}{(n\pi + l)} \sin[(n + \frac{l}{\pi})x] \Big|_0^{l/2} + \frac{1}{\pi} \frac{\pi}{(n\pi - l)} \sin[(n - \frac{l}{\pi})x] \Big|_0^{l/2}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \frac{\pi}{(n\pi + l)} \sin[(n + \frac{l}{\pi})x] \Big|_0^{l/2} + \frac{1}{\pi} \frac{\pi}{(n\pi - l)} \sin[(n - \frac{l}{\pi})x] \Big|_0^{l/2}$$

$$= \frac{1}{(n\pi + l)} \sin[(n + \frac{l}{\pi})x] \Big|_0^{\pi/2} + \frac{1}{(n\pi - l)} \sin[(n - \frac{l}{\pi})x] \Big|_0^{\pi/2}$$

$$a_n = \frac{1}{(n\pi + l)} \sin[(n + \frac{l}{\pi})x] \Big|_0^{\pi/2} + \frac{1}{(n\pi - l)} \sin[(n - \frac{l}{\pi})x] \Big|_0^{\pi/2}$$

$$= \frac{1}{(n\pi + l)} \sin[(n + \frac{l}{\pi}) \frac{\pi}{2}] + \frac{1}{(n\pi - l)} \sin[(n - \frac{l}{\pi}) \frac{\pi}{2}]$$

$$2\pi = 2l$$

$$\pi = l$$

$$a_n = \frac{1}{(n\pi + l)} \sin[(n + \frac{l}{\pi}) \frac{\pi}{2}] + \frac{1}{(n\pi - l)} \sin[(n - \frac{l}{\pi}) \frac{\pi}{2}]$$

$$= \frac{1}{(n\pi + \pi)} \sin[(n + \frac{\pi}{\pi}) \frac{\pi}{2}] + \frac{1}{(n\pi - \pi)} \sin[(n - \frac{\pi}{\pi}) \frac{\pi}{2}]$$

$$a_n = \frac{1}{(n\pi + \pi)} \sin[(n + \frac{\pi}{\pi}) \frac{\pi}{2}] + \frac{1}{(n\pi - \pi)} \sin[(n - \frac{\pi}{\pi}) \frac{\pi}{2}] = \frac{1}{\pi(n+1)} \sin[(n+1) \frac{\pi}{2}] + \frac{1}{\pi(n-1)} \sin[(n-1) \frac{\pi}{2}]$$

$$a_n = \frac{1}{\pi(n+1)} \sin(n+1) \frac{\pi}{2} + \frac{1}{\pi(n-1)} \sin(n-1) \frac{\pi}{2} \quad n > 1$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \left[\frac{1}{(n+1)} \sin(n+1) \frac{\pi}{2} + \frac{1}{(n-1)} \sin(n-1) \frac{\pi}{2} \right]$$

$$a_n = \frac{1}{\pi(n+1)} \sin(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi n}{2}) + \frac{1}{\pi(n-1)} \sin(\frac{\pi n}{2} - \frac{\pi}{2})$$

$$a_n = -\frac{1}{\pi(n+1)} \cos \frac{\pi n}{2} - \frac{1}{\pi(n-1)} \cos \frac{\pi n}{2}$$

$$a_n = -\cos \frac{\pi n}{2} \left[\frac{1}{\pi(n+1)} + \frac{1}{\pi(n-1)} \right] = -\cos \frac{\pi n}{2} \left[\frac{2n}{\pi(n^2 - 1)} \right]$$

$$a_n = \begin{cases} -\frac{2(-1)^{n/2}}{\pi(n^2 - 1)} & n = \text{çift} \\ 0 & n = \text{tek } (n > 1) \end{cases}$$

Verilen fonksiyon $f(x) = \cos \frac{\pi x}{l}$ şeklinde çift olduğundan

$$b_n = 0$$

Sonuçları toparlarsak,

$$a_0 = \frac{1}{\pi}$$

$$a_n = -\frac{2(-1)^{n/2}}{\pi(n^2 - 1)} \quad n = 2n$$

$$a_n = -\frac{2(-1)^n}{\pi(4n^2 - 1)}$$

$$b_n = 0$$

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n \frac{\pi}{l} t + b_n \sin n \frac{\pi}{l} t$$

$$f(t) = \frac{1}{\pi} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{(2n/2)}}{[(2n)^2 - 1]} \cos \frac{2n\pi t}{l}$$

$$C_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = \sqrt{\left(-\frac{2(-1)^n}{\pi(4n^2 - 1)}\right)^2 + 0} = \frac{2(-1)^n}{\pi(4n^2 - 1)}$$

$$\theta_n = \tan^{-1}\left(\frac{-b_n}{a_n}\right) = 0$$

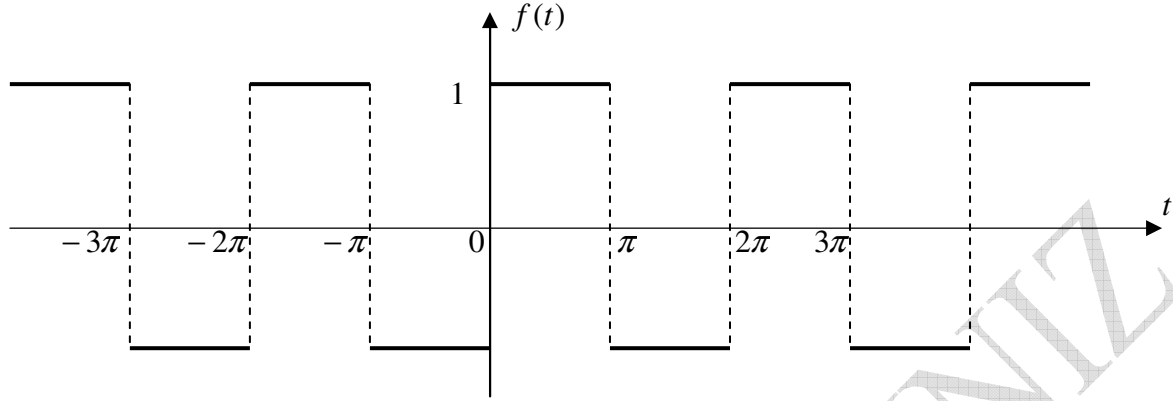
$$C_0 = a_0 = \frac{1}{\pi}$$

$$f(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos \frac{2\pi nt}{l}$$

$$f(t) = \frac{1}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n}{\pi(4n^2 - 1)} \cos \frac{2\pi nt}{l}$$

Örnek

Verilen dörtgen dalgayı Fourier serisine açınız



Şekil 19 Dörtgen dalga

Çözüm

Şekilden görüldüğü gibi dörtgen dalga $(0, \pi)$ aralıklı ve π periodlu bir işarettir. Çözüme de bu şekilde iki aşamalı olarak yaklaşabiliriz.

$$f(t) = 1, \quad 0 < t < \pi$$

Verilen işaretin periodu

$$T_0 = 2\pi$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = 1$$

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t$$

Fourier serisinde yerine yazılırsa,

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nt + b_n \sin nt$$

Buradan a_0 değeri şekle bakıldığında $f(t)$ fonksiyonu hem tek fonksiyon özelliğinde hem de sıfırda süreksiz özellik gösterdiğinden

$$a_0 = 0$$

$$a_n = \frac{2}{T_0} \int_{t_1}^{t_1+T_0} f(t) \cos n \omega_0 t dt = \frac{2}{2\pi} \int_0^\pi \cos n t dt$$

$$a_n = \frac{1}{\pi n} \sin n t \Big|_0^\pi = 0$$

$$b_n = \frac{2}{T_0} \int_{t_1}^{t_1+T_0} f(t) \sin n \omega_0 t dt = \frac{2}{2\pi} \int_0^\pi \sin n t dt$$

$$b_n = -\frac{1}{\pi n} \cos n t \Big|_0^\pi = -\frac{1}{\pi n} (\cos n\pi - \cos 0) = -\frac{1}{\pi n} (\cos n\pi - 1)$$

$$b_n = \begin{cases} \frac{2}{\pi n} & n = \text{tek} \\ 0 & n = \text{çift} \end{cases}$$

$$a_0 = 0$$

$$a_n = 0$$

$$b_n = \frac{2}{\pi n}$$

$$\theta_n = \tan^{-1}\left(\frac{-b_n}{a_n}\right) = -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$$

Fonksiyon tek olduğundan

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n t + b_n \sin n t$$

denklemini $a_0 = 0$ ve $a_n = 0$ katsayılarını da dikkate alarak

$$f(t) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n t$$

biçiminde düşünülecektir. Buna göre

$$f(t) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin n t \quad n = \text{tek}$$

veya

$$f(t) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)} \sin(2n-1) t$$

alternatif gösterim olarak ,

$$C_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = b_n$$

$$C_0 = a_0 = 0$$

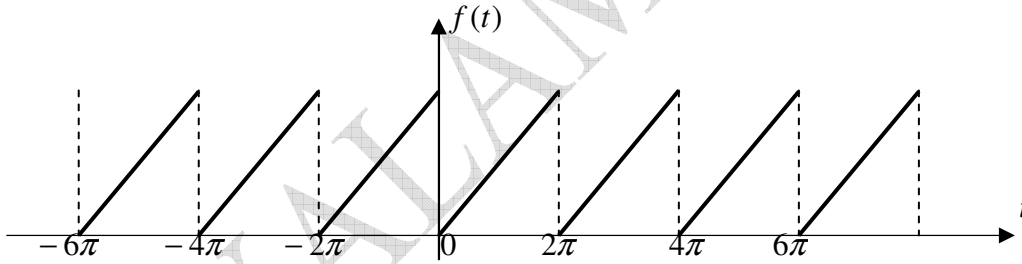
$$f(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(n\omega_0 t + \theta_n)$$

$$f(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(nt + \theta_n)$$

$$f(t) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)} \cos[(2n-1)t + \theta_n]$$

Örnek

Verilen işareti Fourier serisine açınız



Şekil 20 Periyodik işaret

Çözüm

Dikkatlice bakıldığında ilk anda şeklin ne çift ne de tek fonksiyon özelliği göstermediği görülmektedir. Bu Fourier serisinin tüm katsayılarınıninolabileceği anlamına gelmektedir. Şekilden görüldüğü gibi $f(t) = t$ dalgası $(0, 2\pi)$ aralıklı ve 2π periodlu bir işarettir. Verilen işaretin periodu

$$f(t) = t, \quad 0 < t < 2\pi;$$

$$T_0 = 2\pi$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = 1$$

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t$$

Fourier serisinde yerine yazılırsa,

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n t + b_n \sin n t$$

sırasıyla serinin katsayılarını bulmaya çalışalım.

$$a_0 = \frac{2}{T_0} \int_{t_1}^{t_1+T_0} f(t) dt = \frac{2}{2\pi} \int_0^{2\pi} t dt = \frac{1}{\pi} \left[\frac{t^2}{2} \right]_0^{2\pi}$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \left[\frac{t^2}{2} \right]_0^{2\pi} = 2\pi$$

$$a_n = \frac{2}{T_0} \int_{t_1}^{t_1+T_0} f(t) \cos n \omega_0 t dt = \frac{2}{2\pi} \int_0^{2\pi} t \cos n t dt$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} t \cos n t dt$$

$$u = t, \quad dv = \cos n t dt$$

$$du = dt, \quad v = \frac{1}{n} \sin n t$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u dv = \frac{1}{\pi} \left[uv - \int_0^{2\pi} v du \right]$$

eğer,

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} t \cos n t dt \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\frac{t}{n} \sin n t - \frac{1}{n} \int_0^{2\pi} \sin n t dt \right]_0^{2\pi} \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\frac{t}{n} \sin n t + \frac{1}{n^2} \cos n t \right]_0^{2\pi} \end{aligned}$$

$$= 0$$

aynı şekilde b_n çözümlerse,

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{T_0} \int_{t_1}^{t_1+T_0} f(t) \sin n\omega_0 t \, dt = \frac{2}{2\pi} \int_0^{2\pi} t \sin nt \, dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} t \sin nt \, dt \end{aligned}$$

burada da kısmi integrasyon gerekecektir.

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} t \sin nt \, dt$$

$$u = t \quad , \quad dv = \sin nt \, dt$$

$$du = dt \quad , \quad v = -\frac{1}{n} \cos nt$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u \, dv = \frac{1}{\pi} \left[uv - \int_0^{2\pi} v \, du \right]$$

eğer,

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} t \sin nt \, dt \\ &= \frac{1}{\pi} \left[-\frac{t}{n} \cos nt + \frac{1}{n} \int_0^{2\pi} \cos nt \, dt \right]_0^{2\pi} \\ &= \frac{1}{\pi} \left[-\frac{t}{n} \cos nt + \frac{1}{n^2} \sin nt \right]_0^{2\pi} = \frac{1}{\pi} \left[-\frac{2\pi}{n} \right] \\ &= -\frac{2}{n} \end{aligned}$$

$$a_0 = 2\pi$$

$$b_n = -\frac{2}{n}$$

$$\theta_n = \tan^{-1} \left(\frac{-b_n}{a_n} \right) = -\frac{\pi}{2} \quad , \quad \frac{\pi}{2}$$

katsayıları fonksiyonda yerine yazarsak

$$f(t) = 2\pi - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin nt$$

alternatif gösterim olarak ,

$$C_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = b_n$$

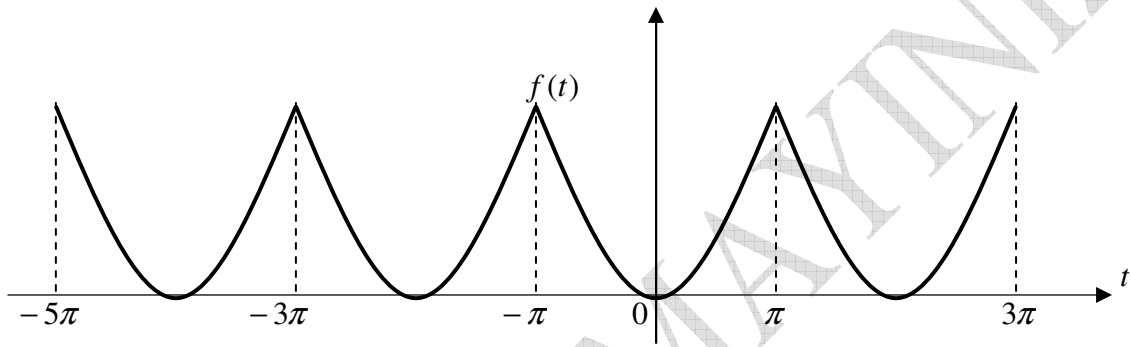
$$C_0 = a_0 = 2\pi$$

$$f(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(n\omega_0 t + \theta_n)$$

$$f(t) = 2\pi - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cos(nt + \tan^{-1}(\frac{-b_n}{0}))$$

Örnek

Verilen işareti Fourier serisine açınız



Şekil 21 Periyodik işaret

Çözüm

Şekilden verilen fonksiyonun çift olduğu görülmektedir. Buradan zaten $b_n = 0$ olacağı aşıkardır. $f(t) = t^2$ dalgası $(-\pi, \pi)$ aralıklı ve 2π periodlu bir işarettir. Verilen işaretin periodu

$$f(t) = t^2, \quad -\pi < t < \pi;$$

$$T_0 = 2\pi$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = 1$$

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t$$

Fourier serisinde yerine yazılırsa,

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nt + b_n \sin nt$$

sırasıyla serinin katsayılarını bulmaya çalışalım.

$$a_0 = \frac{2}{T_0} \int_{t_1}^{t_1+T_0} f(t) dt = \frac{2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t^2 dt = \frac{1}{\pi} \left[\frac{t^3}{3} \right]_{-\pi}^{\pi}$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \left[\frac{t^3}{3} \right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{\pi} \left(\frac{\pi^3}{3} + \frac{\pi^3}{3} \right) = \frac{2\pi^2}{3}$$

veya

$$a_0 = \frac{2}{T_0} \int_{t_1}^{t_1+T_0} f(t) dt = \frac{2 \times 2}{2\pi} \int_0^{\pi} t^2 dt = \frac{2}{\pi} \left[\frac{t^3}{3} \right]_0^{\pi}$$

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \left[\frac{t^3}{3} \right]_0^{\pi} = \frac{2\pi^2}{3}$$

$$a_n = \frac{2}{T_0} \int_{t_1}^{t_1+T_0} f(t) \cos n \omega_0 t dt = \frac{2 \times 2}{2\pi} \int_0^{\pi} t^2 \cos n t dt$$

kısmi integrasyon çözülürse

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} t^2 \cos n t dt = \frac{4}{n^2} \cos n \pi$$

$$a_n = \begin{cases} \frac{4}{n^2} & n = \text{çift} \\ -\frac{4}{n^2} & n = \text{tek} \end{cases}$$

aynı şekilde b_n çözülürse,

$$b_n = \frac{2}{T_0} \int_{t_1}^{t_1+T_0} f(t) \sin n \omega_0 t dt = \frac{2 \times 2}{2\pi} \int_0^{\pi} t^2 \sin n t dt$$

fonksiyon çift olduğundan

$$b_n = 0$$

katsayıları topladığımızda

$$a_0 = \frac{2\pi^2}{3}$$

$$a_n = \begin{cases} \frac{4}{n^2} & n = \text{cift} \\ -\frac{4}{n^2} & n = \text{tek} \end{cases}$$

$$b_n = 0$$

$$\theta_n = \tan^{-1}\left(\frac{-b_n}{a_n}\right) = 0$$

faz farkı yoktur. Katsayıları fonksiyonda yerine yazarsak

$$f(t) = \frac{2\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} [\cos 2n t - \cos(2n-1)t]$$

alternatif gösterim olarak ,

$$C_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = a_n$$

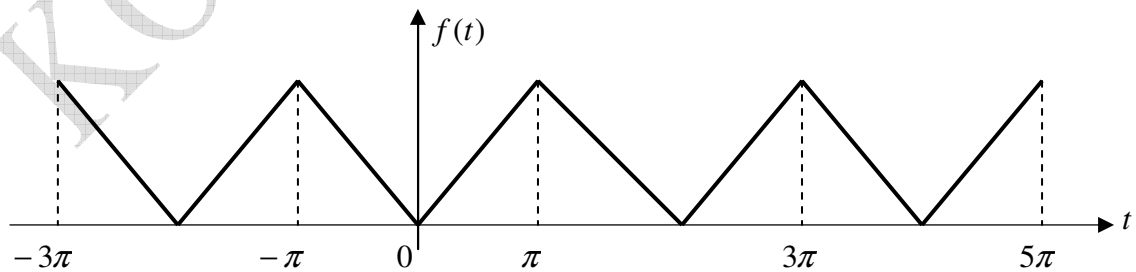
$$C_0 = a_0 = \frac{2\pi^2}{3}$$

$$f(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(n\omega_0 t + \theta_n)$$

$$f(t) = \frac{2\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} [\cos 2n t - \cos(2n-1)t]$$

Örnek

Verilen mutlak değer fonksiyonunu Fourier serisine açınız



Şekil 22 Periyodik işaret

Çözüm

Şeklin çift fonksiyon özelliği gösterdiği görülmektedir. Bu Fourier serisinin yalnızca a_n katsayılarının olabileceği, diğer bir deyişle $b_n = 0$ anlamına gelmektedir. Şekilden görüldüğü gibi $f(t) = |t|$ dalgası $(-\pi, \pi)$ aralıklı ve 2π periodlu bir işarettir. Verilen işaretin periodu

$$f(t) = |t|, \quad -\pi < t < \pi;$$

$$T_0 = 2\pi$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = 1$$

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t$$

Fourier serisinde yerine yazılırsa,

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n t + b_n \sin n t$$

sırasıyla serinin katsayılarını bulmaya çalışalım.

çift fonksiyon özelliğini kullanarak

$$a_0 = \frac{2}{T_0} \int_{t_1}^{t_1+T_0} f(t) dt = \frac{2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t dt = \frac{2 \times 2}{2\pi} \int_0^{\pi} t dt = \frac{2}{\pi} \left[\frac{t^2}{2} \right]_0^{\pi}$$

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \left[\frac{t^2}{2} \right]_0^{\pi} = \pi$$

$$a_n = \frac{2}{T_0} \int_{t_1}^{t_1+T_0} f(t) \cos n \omega_0 t dt = \frac{2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t \cos n t dt = \frac{2 \times 2}{2\pi} \int_0^{\pi} t \cos n t dt$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} t \cos n t dt$$

$$u = t, \quad dv = \cos n t dt$$

$$du = dt, \quad v = \frac{1}{n} \sin n t$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} u dv = \frac{2}{\pi} \left[uv - \int_0^{\pi} v du \right]$$

eğer,

$$\begin{aligned}
 a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} t \cos nt \, dt \\
 &= \frac{2}{\pi} \left[\frac{t}{n} \sin nt - \frac{1}{n} \int_0^{\pi} \sin nt \, dt \right] \\
 &= \frac{2}{\pi} \left[\frac{t}{n} \sin nt + \frac{1}{n^2} \cos nt \right]_0^{\pi} = \frac{2}{\pi} \left[\frac{1}{n^2} \cos n\pi - 1 \right] = \frac{2}{\pi n^2} \cos n\pi - \frac{2}{\pi n^2} \\
 &= \frac{2}{\pi n^2} [(-1)^n - 1]
 \end{aligned}$$

$$a_n = \begin{cases} 0 & n = \text{cift} \\ -\frac{4}{\pi n^2} & n = \text{tek} \end{cases}$$

aynı şekilde b_n çözülrse,

$$b_n = \frac{2}{T_0} \int_{t_1}^{t_1+T_0} f(t) \sin n\omega_0 t \, dt = \frac{2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t \sin nt \, dt$$

Verilen $f(t) = |t|$ fonksiyonu çift özellikte olduğundan, tek kısım içermeyecektir. Bundan dolayı $(-\pi, \pi)$ aralığındaki b_n integrasyonu sıfır verecektir.

$$b_n = \frac{2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t \sin nt \, dt = 0$$

Tüm katsayılar göz önüne alındığında

$$\begin{aligned}
 a_0 &= \pi \\
 a_n &= \begin{cases} 0 & n = \text{cift} \\ -\frac{4}{\pi n^2} & n = \text{tek} \end{cases}
 \end{aligned}$$

$$b_n = 0$$

$$\theta_n = \tan^{-1} \left(\frac{-b_n}{a_n} \right) = 0$$

katsayıları fonksiyonda yerine yazarsak

$$f(t) = \pi - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cos n t \quad n = \text{tek}$$

veya

$$f(t) = \pi - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \cos(2n-1)t = \pi - \frac{4}{\pi} \left(\cos t + \frac{1}{9} \cos 3t + \frac{1}{25} \cos 5t + \frac{1}{49} \cos 7t + \dots \right)$$

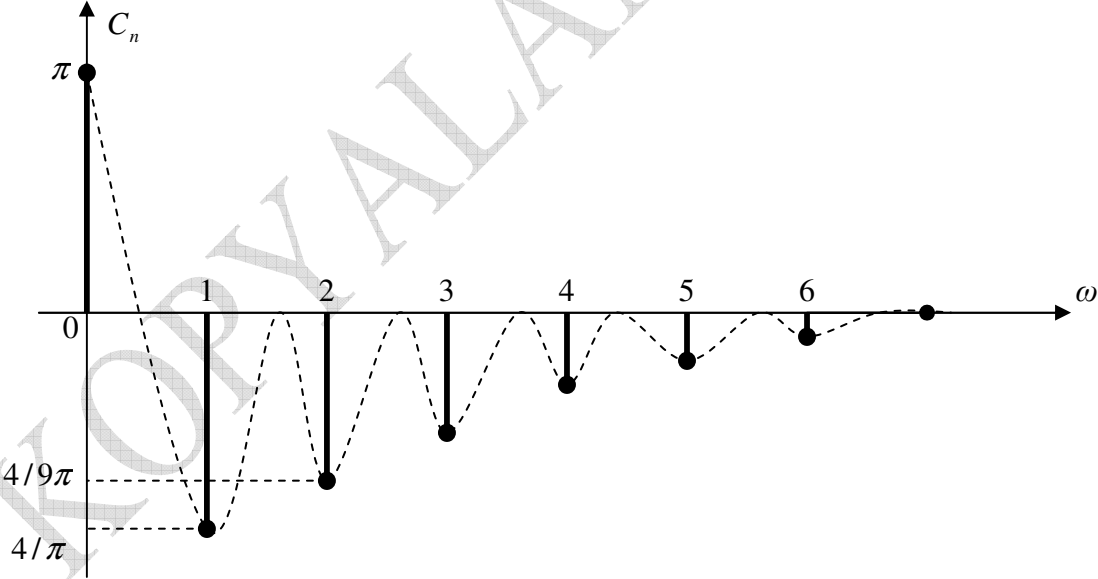
alternatif gösterim olarak ,

$$C_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = a_n$$

$$C_0 = a_0 = \pi$$

$$f(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(n\omega_0 t + \theta_n)$$

$$f(t) = \pi - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \cos(2n-1)t$$



Şekil 23 $f(t) = |t|$ Fonksiyonunun Fourier spektrumu

EXPONENSİYEL FOURIER SERİSİ

Daha önce trigonometrik formda gösterdiğimiz Fourier serisini,

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega_0 t + \theta_n) + b_n \sin(n\omega_0 t + \theta_n)$$

veya

$$f(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(n\omega_0 t + \theta_n)$$

ifadelerini üstel yani exponensiyel formatta elde etmeye çalışacağız. Bunun için ikinci denklemi göz önüne alarak bazı işlemler yapalım.

$$\begin{aligned} C_n \cos(n\omega_0 t + \theta_n) &= \frac{C_n}{2} \left[e^{j(n\omega_0 t + \theta_n)} + e^{-j(n\omega_0 t + \theta_n)} \right] \\ &= \underbrace{\left(\frac{C_n}{2} e^{j\theta_n} \right)}_{D_n} e^{jn\omega_0 t} + \underbrace{\left(\frac{C_n}{2} e^{-j\theta_n} \right)}_{D_{-n}} e^{-jn\omega_0 t} \\ &= D_n e^{jn\omega_0 t} + D_{-n} e^{-jn\omega_0 t} \end{aligned}$$

Bu ifade kompakt Fourier serisinde $f(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(n\omega_0 t + \theta_n)$ yerine konulursa,

$$\begin{aligned} f(t) &= D_0 + \sum_{n=1}^{\infty} D_n e^{jn\omega_0 t} + D_{-n} e^{-jn\omega_0 t} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n e^{jn\omega_0 t} \end{aligned}$$

veya

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n e^{jn\omega_0 t}$$

exponensiyel kompakt ifade elde edilir. Görüldüğü gibi, $C_0 = D_0$ alınmıştır. D_{-n} ile verilen katsayı, D_n 'in eşleniğidir. Buradan D_n katsayısı daha önceki hesaplamalardakine benzer,

$$D_n = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$$

olarak elde edilir. Başlangıcından beri göz önüne alırsak,

$$D_0 = a_0 = C_0$$

eğer,

$$D_n = \frac{1}{2} C_n e^{j\theta_n}$$

$$D_{-n} = \frac{1}{2} C_n e^{-j\theta_n}$$

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega_0 t + \theta_n) + b_n \sin(n\omega_0 t + \theta_n)$$

$$f(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(n\omega_0 t + \theta_n)$$

$$\begin{aligned} C_n \cos(n\omega_0 t + \theta_n) &= C_n \cos n\omega_0 t \cos \theta_n - C_n \sin n\omega_0 t \sin \theta_n \\ &= \underbrace{C_n \cos \theta_n}_{a_n} \cos n\omega_0 t + \underbrace{-C_n \sin \theta_n}_{b_n} \sin n\omega_0 t \\ &= a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t \end{aligned}$$

ise bu durumda exponensiyel ifadedeki D_n in a_n ve b_n katsayılarına bağlı terimlerinin karşılıkları,

$$D_n = \frac{1}{2}(a_n - jb_n)$$

$$D_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + jb_n)$$

olacaktır. Buradan

$$a_n = (D_n + D_{-n}) , \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$b_n = j(D_n - D_{-n}) , \quad n = 1, 2, \dots$$

ayrıca

$$|D_n| = |D_{-n}| = \frac{1}{2} C_n , \quad n \neq 0$$

$$\angle D_n = \theta_n \quad \text{ve} \quad \angle D_{-n} = -\theta_n$$

buradan da genlik (magnitud) – faz ilişkisi olarak,

$$D_n = |D_n| e^{j\theta_n} \quad \text{ve} \quad D_{-n} = |D_n| e^{-j\theta_n}$$

ifadeleri elde edilir. Görüldüğü gibi $f(t)$ gerçek bir işaret olduğu zaman, magnitud bir çift fonksiyon ($|D_n| = |D_{-n}|$) gibi, açı ise tek fonksiyon ($\angle D_n = \theta_n$, $\angle D_{-n} = -\theta_n$) gibi davranmaktadır.

Exponensiyel Formüller

Fourier serisinin exponensiyel karşılığını veren bağıntılar

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n e^{jn\omega_0 t}$$

$$D_n = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$$

Burada harmonik terimi durumundaki “n” değişkeni çeşitli harmonikleri göstermek üzere örneğin $n = 2n, (2n-1), 3n, 4n, \dots$, gibi istenen ardışık özelliğe uygun olarak alınabilir. Yalnızca tek sıralı klasik ardışık harmonikler düşünüldüğünde $n = (-\infty, \infty)$ aralığında sıralı harmoniklerin yazılacağı görülmektedir.

$$f(t) = \dots + a_{-3} \cos(-3\omega_0 t) + a_{-2} \cos(-2\omega_0 t) + a_{-1} \cos(-\omega_0 t) + a_0 + a_1 \cos \omega_0 t + a_2 \cos 2\omega_0 t + a_3 \cos 3\omega_0 t + \dots \\ + b_{-3} \sin(-3\omega_0 t) + b_{-2} \sin(-2\omega_0 t) + b_{-1} \sin(-\omega_0 t) + b_1 \sin \omega_0 t + b_2 \sin 2\omega_0 t + b_3 \sin 3\omega_0 t + \dots$$

Exponensiyel Analiz

Burada Fourier serisinin iki elemanı olan katsayı terimi D_n ile basis fonksiyon olan $e^{jn\omega_0 t}$ biraz daha yakından ele alınacaklardır.

D_n Katsayısı

Fourier serideki D_n terimi yalnızca işaretssel büyüklüğü değil, aynı zamanda faz bilgisini de içerdiğinden genel vektörel gösterimlerindeki içeriğinden farklıdır.

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n e^{jn\omega_0 t}$$

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega_0 t + \theta_n) + b_n \sin(n\omega_0 t + \theta_n)$$

$$C_n \cos(n\omega_0 t + \theta_n) = C_n \cos n\omega_0 t \cos \theta_n - C_n \sin n\omega_0 t \sin \theta_n \\ = \underbrace{C_n \cos \theta_n}_{a_n} \cos n\omega_0 t + \underbrace{-C_n \sin \theta_n}_{b_n} \sin n\omega_0 t \\ = a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t$$

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t$$

$$D_n = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$$

$$D_n = \frac{1}{2}(a_n - jb_n)$$

$$D_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + jb_n)$$

Denklemleri göz önüne alındığında, Fourier serisinin periodik ve sürekli trigonometrik fonksiyonlardan oluştuğunu biliyoruz. Bu durum direkt olarak sinüsel ifadelerin yazıldığı denklemlerde çok açıktır.

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega_0 t + \theta_n) + b_n \sin(n\omega_0 t + \theta_n)$$

Bu ifadelerde a_n ve b_n işaretin veya serinin katsayıları, $\cos n\omega_0 t$ ve $\sin n\omega_0 t$ ise serinin basis fonksiyonlarıdır. Durum biraz üstel yani exponensiyel formatla yazımda farklılık göstermektedir.

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n e^{jn\omega_0 t}$$

Bu yazımda yukarıdaki trigonometrik bağıntıda vurgulananlar tam olarak görülememektedir. Denklemden ifadenin içeriğinin tam algılanamayışı, exponensiyel gösterimin tek handikapı kabul edilebilir. Ancak bunun yanında, kompakt olması, dolayısıyla gösterimde sağladığı kolaylıklar ile işaret işlemede sağladığı yararlar da oldukça avantajlı taraflarıdır. Özüde trigonometrik formdan farklı değildir. D_n Fourier serisinin katsayısı, $e^{jn\omega_0 t}$ ise serinin basis fonksiyonudur. Her şeye rağmen bu iki terimin trigonometrik içerikleri net görünemeyebilir. Ama biliyoruz ki,

$$D_n = \frac{1}{2} C_n e^{j\theta_n}$$

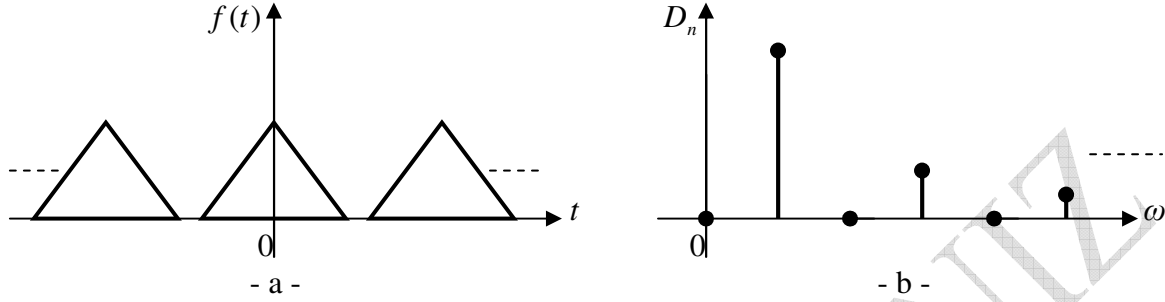
$$D_n = \frac{1}{2}(a_n - jb_n)$$

$$a_n = (D_n + D_{-n}) , \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$b_n = j(D_n - D_{-n}) , \quad n = 1, 2, \dots$$

$$a_n = C_n \cos \theta_n , \quad b_n = -C_n \sin \theta_n$$

Görüldüğü gibi D_n aslında bir genlik C_n ve faz θ_n bilgisinden oluşmaktadır. İşareti oluşturan olası harmoniklerin $n\omega_0$ genliğini ve bu harmonikler arasındaki faz farkı, D_n ile belirtilmektedir. Bunları yukarıda verilen örneklerde görmüş bulunuyoruz. Buna göre exponeysiyel haldeki $f(t)$ - D_n görünümü aşağıdaki gibi olacaktır.



Şekil 24 (a) Fourier serisinde sürekli işaret, (b) ayrık frekans spektrumu

Görüldüğü gibi, frekans spektrumu olarak karşımıza çıkan D_n , ayrık ve sonsuz formdadır. Diğer bir deyişle, harmoniklerin genlik dağılımı, ayrıktır. Daha önce ele alınan $f(t)$ işaretinin frekans cevabı olan

$$F(\omega) = |F(\omega)| e^{j\angle F(\omega)}$$

ifadesinden $|F(\omega)|$ genlik frekans cevabı, exponeysiyel gösterimdeki D_n katsayısına karşılık gelmektedir. Bu açıdan bakıldığında

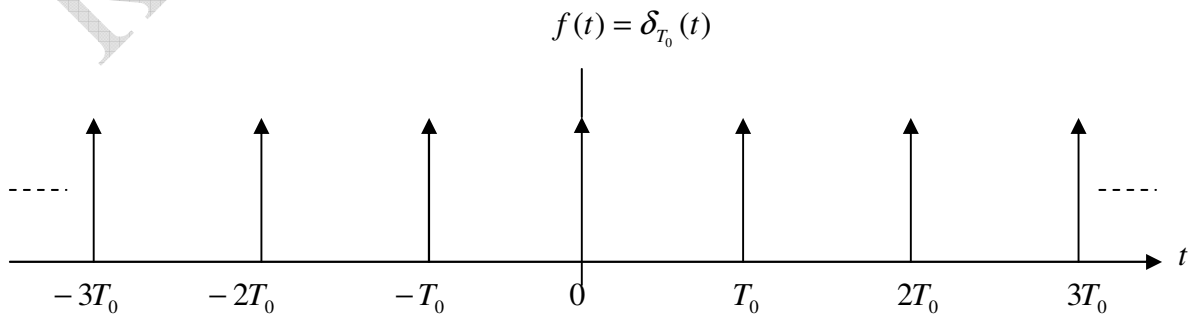
$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n e^{j(n\omega_0 t + \theta_n)}$$

gösterimindeki Fourier serisinin genlik ve faz frekans cevapları aşağıdaki gibi gösterilebilir.

$$D_n = |F(\omega)| \quad \text{ve} \quad \theta_n = \angle F(\omega)$$

Örnek

Aşağıda şekli verilen birim impuls fonksiyonunu $\delta_{T_0}(t)$ Fourier serisine açınız.



Şekil 25 Birim impuls fonksiyonu

Çözüm

Görüldüğü gibi impuls fonksiyonu T_0 periodlu aynı zamanda çift simetrik bir fonksiyon $\delta_{T_0}(t)$ olarak Fourier serisine açılacaktır. Bu fonksiyonu eksponensiyel formatta göz önüne alırsak,

$$\delta_{T_0}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n e^{jn\omega_0 t} \quad , \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

$$D_n = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \delta_{T_0}(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$$

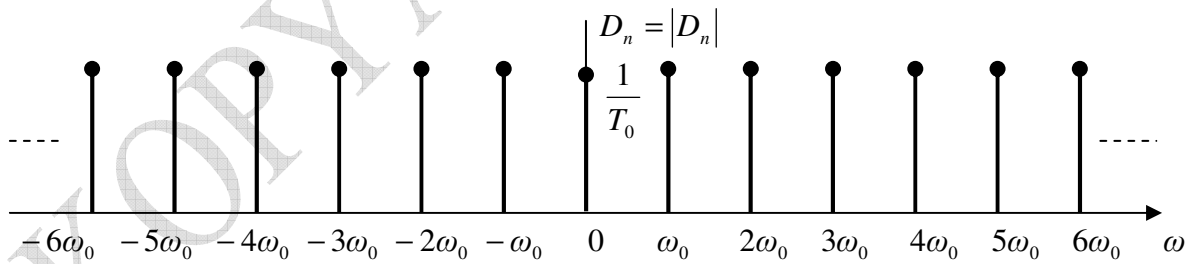
Period T_0 , $(-T_0/2, T_0/2)$, $\delta_{T_0}(t) = \delta(t)$ olarak alınırsa,

$$D_n = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \delta(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$$

İntegraldaki $\delta(t)$ yalnızca $t = 0$ için tanımlı ve bu değeride 1 olduğundan $\delta(0) = 1$

$$\begin{aligned} D_n &= \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \delta(t) e^{-jn\omega_0 t} dt = \frac{1}{T_0} \delta(0) e^0 \\ &= \frac{1}{T_0} \end{aligned}$$

Bunun anlamı D_n frekansın tüm (negatif ve pozitif) değerleri için $\pm\omega_0$ için $\frac{1}{T_0}$ değerini alacaktır. Bu aşağıdaki şekilden de görülebilmektedir.



Şekil 26 Birim impuls fonksiyonu D_n frekans spektrumu

Bulunan D_n eksponensiyel denklemde yerine konursa,

$$\delta_{T_0}(t) = \frac{1}{T_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jn\omega_0 t}$$

elde edilir. Buradan serinin diğer parametreleri D_0 , C_n ve faz bilgisi de θ_n aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$C_0 = D_0 = \frac{1}{T_0}$$

$$C_n = 2|D_n| = \frac{2}{T_0}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$\theta_n = 0$$

Görüldüğü gibi fonksiyon aralarında faz farkı olmayan eş fazlı ($\theta_n = 0$) olup aynı zamanda simetrik çift bir fonksiyon ($b_n = 0$) dur. Buradan $\delta_{T_0}(t)$ fonksiyonunun nihai Fourier serisi aşağıdaki gibi neticelenir.

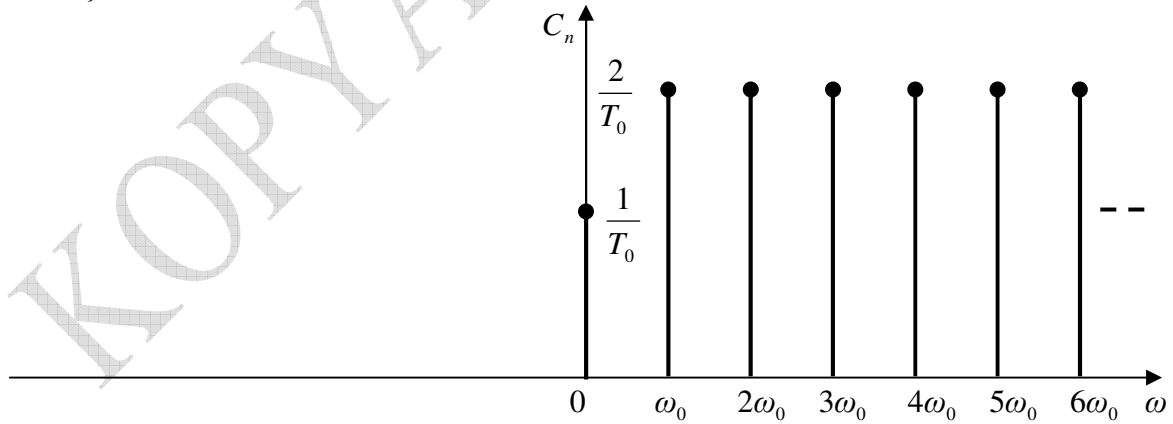
$$f(t) = \delta_{T_0}(t) = \frac{1}{T_0} [1 + 2(\cos \omega_0 t + \cos 2\omega_0 t + \cos 3\omega_0 t + \dots)] \quad , \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

$$f(t) = \delta_{T_0}(t) = \frac{1}{T_0} + \frac{2}{T_0} \sum_{n=1}^{\infty} \cos n\omega_0 t$$

Görüldüğü gibi $\delta_{T_0}(t)$ fonksiyonunun Fourier serisi \cos fonksiyonuna bağlı çıkmıştır. Bu durum zaten gerek

$$\delta_{T_0}(t) = \frac{1}{T_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jn\omega_0 t}$$

ifadesinden gerekse bu ifadeye ait yukarıdaki şekilden de açık olarak görülmektedir. Çünkü fonksiyon çift simetrik (tipik \cos fonksiyonu) özelliğindedir. Faz farkı sıfır olduğu için değişimine gerek kalmamıştır. Nihayetinde devam edilirse $C_n = 2|D_n| = \frac{2}{T_0}$ olarak aşağıdaki gibi oluşturulur.



Şekil 27 Birim impuls fonksiyonu C_n frekans spektrumu

D_n ve $|D_n|$ Katsayısı

Az önceki örnek ele alındığında D_n spektrumu $|D_n|$ olarak da gösterildi. Bunun sebebini düşünersek, D_n katsayısının aşağıdaki formlardan birinde olabileceğini biliyoruz.

$$D_n = \frac{1}{2}(a_n - jb_n)$$

$$D_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + jb_n)$$

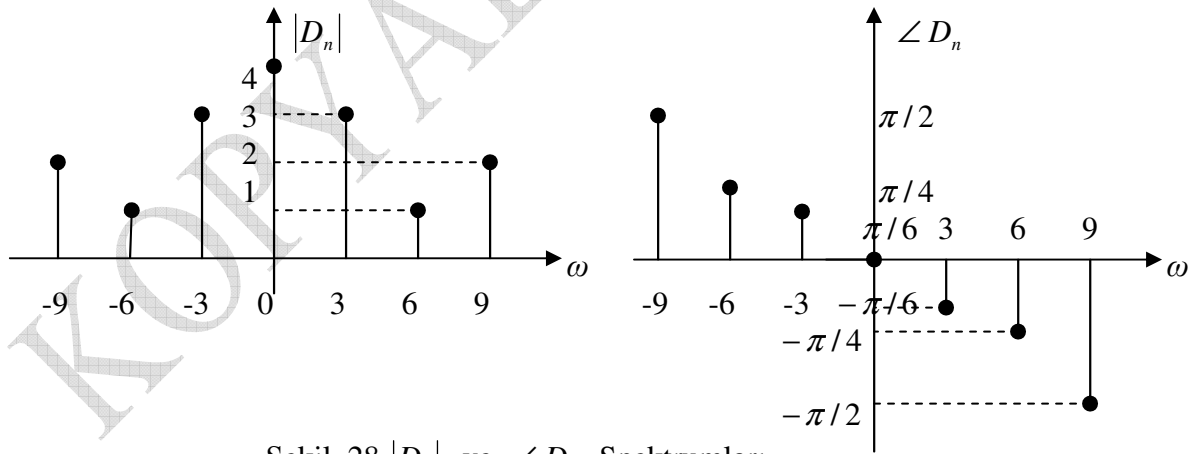
Her iki denklemde incelendiğinde D_n katsayısının kompleks olduğu veya olabileceği görülmektedir. Özellikle kompleks olması durumunda, kompleks bir değeri spektruma taşımak için $|D_n|$ yaklaşımının daha tutarlı olduğunu görmekteyiz. Çünkü bu yolla kompleks bir sayının

$$|D_n| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

şeklinde tek bir değerle gösterilebilmesi mümkündür. Bu yüzden Fourier serisinin exponensiyel formu için daha ziyade $|D_n|$ veya $C_n = 2|D_n|$ biçimi kullanılmaktadır.

Örnek

Aşağıda $|D_n|$ ve $\angle D_n$ değerleri verilmiş olan fonksiyonun Fourier serisini araştırınız



Şekil 28 $|D_n|$ ve $\angle D_n$ Spektrumları

Çözüm

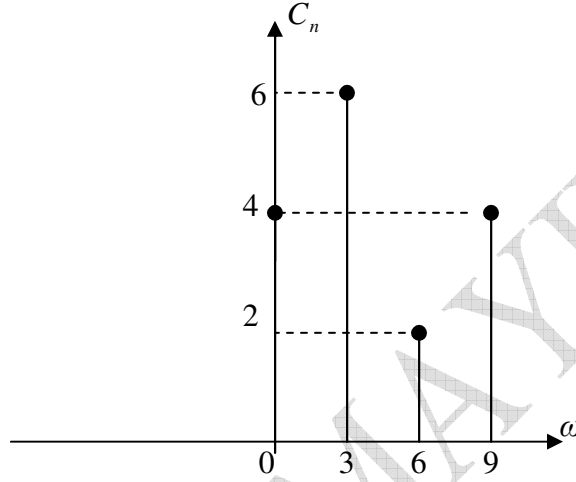
Görüldüğü gibi çift simetrlili ($b_n = 0$, $a_n = C_n = 2|D_n|$) ama aralarında faz farkı bulunan bir işaret vardır. Bu işaretin exponensiyel Fourier serisine açmak için gereken parametreleri hesaplamamız gerekiyor. İlk olarak şekilden yararlanarak D_n , C_n ve $\angle D_n$ sırasıyla hesaplanacaktır.

$$D_0 = 4 \quad , \quad D_3 = 3 \quad , \quad D_6 = 1 \quad , \quad D_9 = 2$$

$$|D_n| = C_n / 2$$

$$C_0 = 4 \quad , \quad C_3 = 6 \quad , \quad C_6 = 2 \quad , \quad C_9 = 4$$

Buna göre C_n spektrumu aşağıdaki gibi olacaktır.



Şekil 29 C_n Spektrumu

$$\angle D_n = \theta_n$$

$$\theta_3 = -\frac{\pi}{6} \quad , \quad \theta_6 = -\frac{\pi}{4} \quad , \quad \theta_9 = -\frac{\pi}{2}$$

Şimdi exponensiyel fourier serisi $n = 0, 3, 6, 9$ harmonikleri için aşağıdaki gibi oluşturulabilir.

$$f(t) = D_0 + \sum_{n=-9}^9 D_n e^{jn\omega_0 t + \theta_n}$$

$$f(t) = 4 + \left[3 e^{-j\frac{\pi}{6}} e^{j3t} + 3 e^{j\frac{\pi}{6}} e^{-j3t} \right] + \left[e^{-j\frac{\pi}{4}} e^{j6t} + e^{j\frac{\pi}{4}} e^{-j6t} \right] + \left[2 e^{-j\frac{\pi}{2}} e^{j9t} + 2 e^{j\frac{\pi}{2}} e^{-j9t} \right]$$

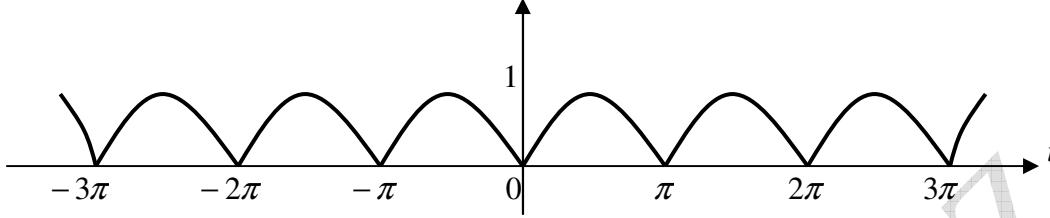
$$f(t) = 4 + \left[3 e^{j(3t-\frac{\pi}{6})} + 3 e^{-j(3t-\frac{\pi}{6})} \right] + \left[e^{j(6t-\frac{\pi}{4})} + e^{-j(6t-\frac{\pi}{4})} \right] + \left[2 e^{j(9t-\frac{\pi}{2})} + 2 e^{-j(9t-\frac{\pi}{2})} \right]$$

$$ae^{j\alpha} + ae^{-j\alpha} = 2a \cos \alpha$$

$$f(t) = 4 + 6 \cos\left(3t - \frac{\pi}{6}\right) + 2 \cos\left(6t - \frac{\pi}{4}\right) + 4 \cos\left(9t - \frac{\pi}{2}\right)$$

Örnek

Aşağıda değişimi verilen şekle ait fonksiyonu Fourier serisi ile ifade ediniz.



Şekil 30 Tam dalga sinüs doğrultucu

Şekilden görüldüğü gibi tam dalga doğrultucu sinus dalgasının $(-\pi, 0)$ ve $(0, \pi)$ aralıklarında bütünüünün doğrultulmuş versiyonu olarak $(0, \pi)$ aralıklı ve π periodlu bir işarettir. Buna göre aşağıdaki gibi çözüme gidilebilir.

$$T_0 = \pi$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = 2$$

Buna göre exponensiyel fourier serisi

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n e^{jn\omega_0 t}$$

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n e^{j2n t}$$

$$D_n = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} f(t) e^{-j2n t} dt$$

$$f(t) = \sin t$$

ise,

$$D_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin t e^{-j2n t} dt$$

$$\sin t = \frac{1}{2j}(e^{jt} - e^{-jt})$$

$$D_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{2j}(e^{jt} - e^{-jt}) e^{-j2n t} dt$$

$$\begin{aligned} D_n &= \frac{1}{2j\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} ((e^{jt} - e^{-jt}) e^{-j2n t}) dt \\ &= \frac{1}{2j\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{jt(1-2n)} dt - \frac{1}{2j\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{-jt(1+2n)} dt \end{aligned}$$

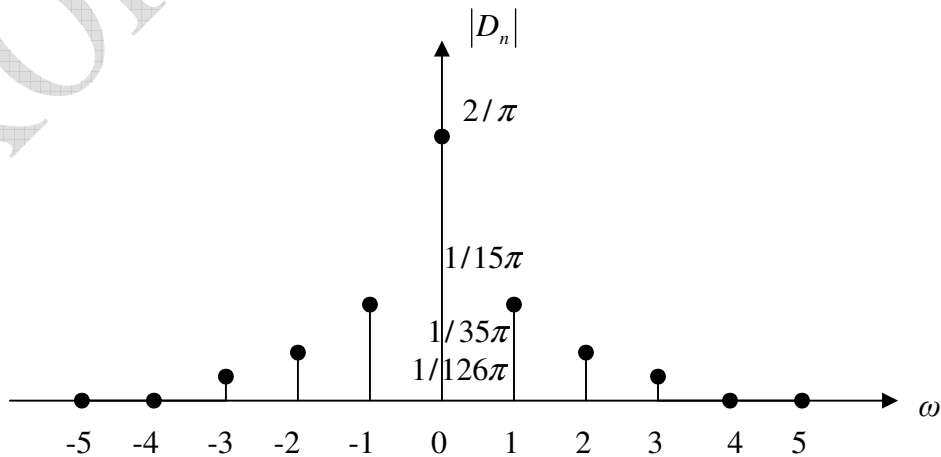
$$D_n = \frac{1}{2j\pi} \frac{1}{(1-2n)} e^{jt(1-2n)} \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} - \frac{1}{2j\pi} \frac{1}{(1+2n)} e^{-jt(1+2n)} \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2}$$

$$D_n = -\frac{1}{2j\pi(1-2n)} e^{jt(1-2n)} \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} + \frac{1}{2j\pi(1+2n)} e^{-jt(1+2n)} \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2}$$

$$D_n = -\frac{1}{2j\pi(1-2n)} 2j \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2n\pi}{2}\right) + \frac{1}{2j\pi(1+2n)} (-2j) \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{2n\pi}{2}\right)$$

$$\begin{aligned} D_n &= -\frac{2}{\pi(1-2n)} \cos n\pi - \frac{2}{\pi(1+2n)} \cos n\pi \\ &= -\frac{1}{\pi} \cos n\pi \left(\frac{1}{(1-2n)} + \frac{1}{(1+2n)} \right) \\ &= -\frac{2}{\pi(1-4n^2)} \cos n\pi \end{aligned}$$

$$D_n = -\frac{2}{\pi(1-4n^2)} \cos n\pi = \begin{cases} \frac{2}{\pi(1-4n^2)} & , \quad n = \text{tek} \\ -\frac{2}{\pi(1-4n^2)} & , \quad n = \text{çift} \end{cases}$$

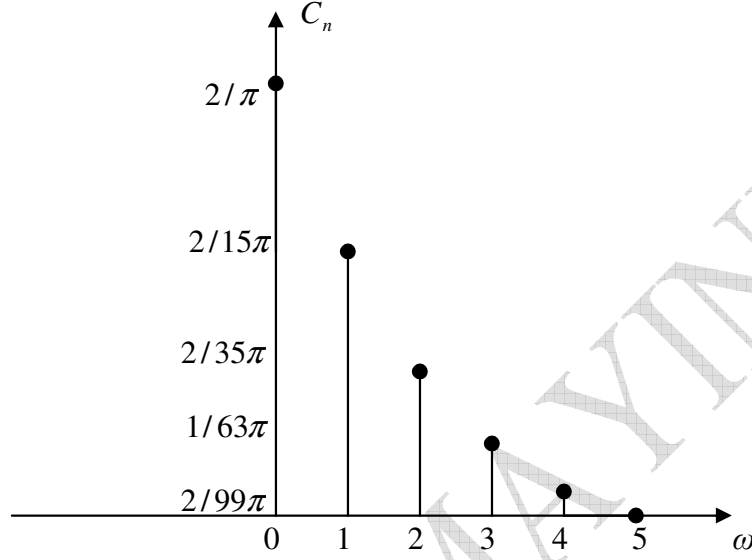


Şekil 31 $|D_n|$ Spektrumu

$$D_0 = -\frac{2}{\pi}$$

$$a_0 = D_0 = -\frac{2}{\pi}$$

$$a_n = 2|D_n| = C_n$$



Şekil 32 C_n Spektrumu

Tam (full) doğrultucu işaret çift simetrik olduğundan

$$b_n = 0$$

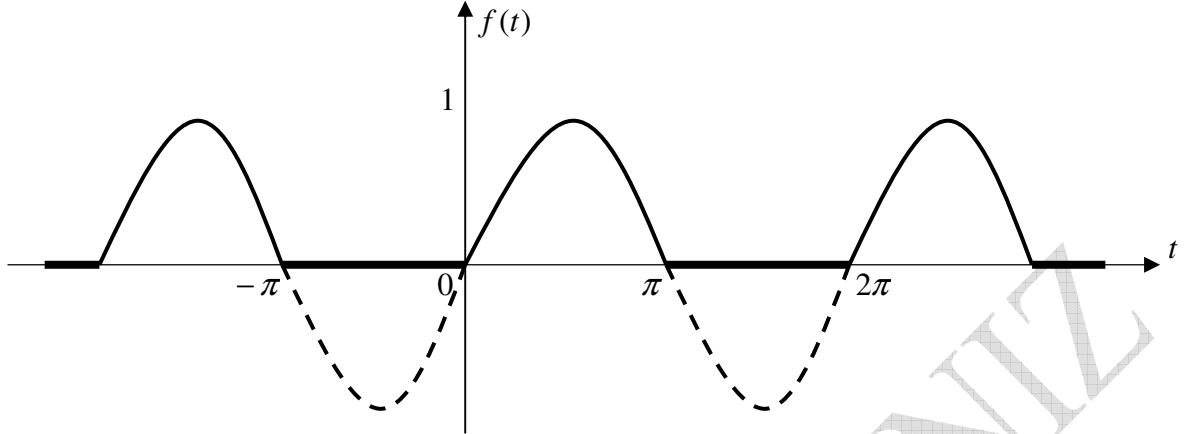
Şimdi Fourier serisi oluşturulabilir.

$$f(t) = -\frac{2}{\pi} + \left(-\frac{2}{3\pi} \cos 2t + \frac{2}{15\pi} \cos 4t - \frac{2}{35\pi} \cos 6t + \frac{2}{63\pi} \cos 8t - \frac{2}{99\pi} \cos 10t + \frac{2}{255\pi} \cos 12t + \dots \right)$$

$$f(t) = \frac{2}{\pi} \left(-1 - \frac{1}{3\pi} \cos 2t + \frac{1}{15\pi} \cos 4t - \frac{1}{35\pi} \cos 6t + \frac{1}{63\pi} \cos 8t - \frac{1}{99\pi} \cos 10t + \frac{1}{255\pi} \cos 12t + \dots \right)$$

$$f(t) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1-4n^2} e^{j2nt}$$

2.yol



Şekil 33 Tam dalga doğrultucu: Tam doğrultulmuş sinüs dalgası

Şekilden görüldüğü gibi tam dalga doğrultucu sinüs dalgasının $(-\pi, 0)$ ve $(0, \pi)$ aralıklarında tamamı doğrultulmuş biçimi olarak $(0, \pi)$ aralıklı ve π periyotlu bir işarettir. Bu haliyle $f(t) = |\sin t|$ biçimindedir. Buna göre aşağıdaki gibi göz önüne alınarak çözüme gidilebilir.

$$f(t) = |\sin t| = \begin{cases} \sin t & [-\pi, 0) \\ \sin t & [0, \pi) \end{cases}$$

EXPONENSİYEL GÖSTERİMDE ÖZELLİKLER

Gösterimi

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t$$

olan genel Fourier serisi ile bunun exponensiyel karşılığını oluşturan

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n e^{jn\omega_0 t}$$

İfadeleriyle oluşan Fourier serisinin birkaç özelliği göze çarpmaktadır. Bunlar sırasıyla ele alınacaktır.

1) Eğer birinci denklem $n = (-\infty, \infty)$ için göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t \\ &= \cdots + a_{-3} \cos(-3\omega_0 t) + a_{-2} \cos(-2\omega_0 t) + a_{-1} \cos(-\omega_0 t) + a_0 + a_1 \cos \omega_0 t + a_2 \cos 2\omega_0 t + a_3 \cos 3\omega_0 t + \cdots \\ &\quad + b_{-3} \sin(-3\omega_0 t) + b_{-2} \sin(-2\omega_0 t) + b_{-1} \sin(-\omega_0 t) + b_1 \sin \omega_0 t + b_2 \sin 2\omega_0 t + b_3 \sin 3\omega_0 t + \cdots \end{aligned}$$

görüldüğü gibi hem pozitif hem de negatif frekansları içeren bir dizi söz konusudur. Denklem eğer

$$\cos \alpha = \cos(-\alpha) \quad \text{ve} \quad -\sin \alpha = \sin(-\alpha)$$

$$a_n = a_{-n} \quad \text{ve} \quad b_n = b_{-n}$$

koşullarına göre düzenlersek

$$\begin{aligned} f(t) &= \cdots + a_3 \cos 3\omega_0 t + a_3 \cos 3\omega_0 t + a_2 \cos 2\omega_0 t + a_2 \cos 2\omega_0 t + a_0 + a_1 \cos \omega_0 t + a_1 \cos \omega_0 t + \cdots \\ &\quad - b_3 \sin 3\omega_0 t - b_2 \sin 2\omega_0 t - b_1 \sin \omega_0 t + b_1 \sin \omega_0 t + b_2 \sin 2\omega_0 t + b_3 \sin 3\omega_0 t + \cdots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(t) &= \cdots + a_3 \cos 3\omega_0 t + a_3 \cos 3\omega_0 t + a_2 \cos 2\omega_0 t + a_2 \cos 2\omega_0 t + a_0 + a_1 \cos \omega_0 t + a_1 \cos \omega_0 t + \cdots \\ &\quad + \underbrace{b_3 \sin 3\omega_0 t - b_3 \sin 3\omega_0 t}_0 + \underbrace{b_2 \sin 2\omega_0 t - b_2 \sin 2\omega_0 t}_0 + \underbrace{b_1 \sin \omega_0 t - b_1 \sin \omega_0 t}_0 + \cdots \end{aligned}$$

$$f(t) = \cdots + a_0 + 2a_1 \cos \omega_0 t + 2a_2 \cos 2\omega_0 t + 2a_3 \cos 3\omega_0 t + \cdots$$

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t \\ &= \cdots + a_0 + 2a_1 \cos \omega_0 t + 2a_2 \cos 2\omega_0 t + 2a_3 \cos 3\omega_0 t + \cdots \end{aligned}$$

$$f(t) = a_0 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n \omega t$$

görüldüğü gibi $n = (-\infty, \infty)$ aralığı için seri yalnızca $a_n \cos n\omega_0 t$ gibi çift fonksiyonlardan oluşmaktadır. Elde edilen

$$f(t) = a_0 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n \omega t$$

denklemini aynı zamanda **cosinus serisi** olarak da biliriz.

2) Eğer ikinci denklem $n = (-\infty, \infty)$ için göz önüne alınırsa

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n e^{jn\omega_0 t} = \dots + D_{-3}e^{-j3\omega_0 t} + D_{-2}e^{-j2\omega_0 t} + D_{-1}e^{-j\omega_0 t}$$

$$+ D_0 e^{-j0\omega_0 t} + D_1 e^{j\omega_0 t} + D_2 e^{j2\omega_0 t} + D_3 e^{j3\omega_0 t} + \dots$$

$$|D_n| = |D_{-n}|$$

$$e^{j\omega t} = \cos \omega t + j \sin \omega t$$

$$e^{-j\omega t} = \cos \omega t - j \sin \omega t$$

$$f(t) = \dots + D_3 e^{-j3\omega_0 t} + D_2 e^{-j2\omega_0 t} + D_1 e^{-j\omega_0 t} \\ + D_0 + D_1 e^{j\omega_0 t} + D_2 e^{j2\omega_0 t} + D_3 e^{j3\omega_0 t} + \dots$$

$$f(t) = \dots D_0 + D_3 (e^{-j3\omega_0 t} + e^{j3\omega_0 t}) + D_2 (e^{-j2\omega_0 t} + e^{j2\omega_0 t}) + D_1 (e^{-j\omega_0 t} + e^{j\omega_0 t}) + \dots$$

$$e^{-j\lambda\omega_0 t} + e^{j\lambda\omega_0 t} = (\cos \lambda\omega t - j \sin \lambda\omega t) + (\cos \lambda\omega t + j \sin \lambda\omega t) \\ = 2 \cos \lambda\omega t$$

$$f(t) = \dots + D_0 + D_3 (\cos 3\omega t - j \sin 3\omega t) + (\cos 3\omega t + j \sin 3\omega t) \\ + D_2 (\cos 2\omega t - j \sin 2\omega t) + (\cos 2\omega t + j \sin 2\omega t) \\ + D_1 (\cos \omega t - j \sin \omega t) + (\cos \omega t + j \sin \omega t) + \dots$$

$$f(t) = \dots D_0 + 2D_1 \cos \omega t + 2D_2 \cos 2\omega t + 2D_3 \cos 3\omega t + \dots$$

$$f(t) = D_0 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} D_n \cos n\omega t$$

görüldüğü gibi klasik ve exponeşiyel formdaki Fourier serileri $n = (-\infty, \infty)$ aralığı için denk görünmektedirler.

$$\dots + a_0 + 2a_1 \cos \omega_0 t + 2a_2 \cos 2\omega_0 t + 2a_3 \cos 3\omega_0 t + \dots \equiv \\ \dots D_0 + 2D_1 \cos \omega t + 2D_2 \cos 2\omega t + 2D_3 \cos 3\omega t + \dots$$

Ortak yanları her iki gösteriminde $n = (-\infty, \infty)$ aralığı için çift fonksiyonların temsil edilmesidir. Her iki ifadenin $a_n \cos n\omega_0 t$ veya $D_n \cos n\omega_0 t$ gibi çift fonksiyonlar içermesi, tespitimizi doğrulamaktadır.

3) Eğer ikinci denklem göz önüne alınırsa

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n e^{jn\omega_0 t}$$

buradan $|f(t)|$ hesaplanırsa

$$|f(t)| = \left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n e^{jn\omega_0 t} \right| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |D_n e^{jn\omega_0 t}| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |D_n| |e^{jn\omega_0 t}|$$

$$e^{jn\omega_0 t} = \cos n\omega t + j \sin n\omega t$$

$$|e^{jn\omega_0 t}| = \sqrt{\cos^2 n\omega t + \sin^2 n\omega t} = 1$$

$$|e^{jn\omega_0 t}| = 1$$

$$|f(t)| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |D_n|$$

4) Eğer ikinci denklem göz önüne alınırsa

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n e^{jn\omega_0 t}$$

buradan $f^2(t)$ hesaplanırsa

$$f^2(t) = |f(t)|^2 = \left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n e^{jn\omega_0 t} \right|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |D_n e^{jn\omega_0 t}|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |D_n|^2 |e^{jn\omega_0 t}|^2$$

$$e^{jn\omega_0 t} = \cos n\omega t + j \sin n\omega t$$

$$|e^{jn\omega_0 t}| = \sqrt{\cos^2 n\omega t + \sin^2 n\omega t} = 1$$

$$|e^{jn\omega_0 t}| = 1$$

$$f^2(t) = |f(t)|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |D_n|^2$$

Elde edilen denklem $f(t)$ işaretinin **enerji bağıntısı** olarak bilinir, ve **Parseval teoreminin** uygulanmasında yararlanır.

5)

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n e^{j n \omega_0 t} = \dots + D_{-3} e^{-j 3 \omega_0 t} + D_{-2} e^{-j 2 \omega_0 t} + D_{-1} e^{-j \omega_0 t} + D_0 e^{j 0 \omega_0 t} \\ + D_1 e^{j \omega_0 t} + D_2 e^{j 2 \omega_0 t} + D_3 e^{j 3 \omega_0 t} + \dots$$

$$D_n = \frac{1}{2}(a_n - j b_n)$$

$$D_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + j b_n)$$

$$D_0 = a_0 = C_0$$

$$f(t) = a_0 + \frac{1}{2}(a_3 + j b_3) e^{-j 3 \omega_0 t} + \frac{1}{2}(a_3 - j b_3) e^{j 3 \omega_0 t} \\ + \frac{1}{2}(a_2 + j b_2) e^{-j 2 \omega_0 t} + \frac{1}{2}(a_2 - j b_2) e^{j 2 \omega_0 t} \\ + \frac{1}{2}(a_1 + j b_1) e^{-j \omega_0 t} + \frac{1}{2}(a_1 - j b_1) e^{j \omega_0 t} + \dots$$

$$f(t) = a_0 + \frac{1}{2} a_3 e^{-j 3 \omega_0 t} + \frac{1}{2} j b_3 e^{-j 3 \omega_0 t} + \frac{1}{2} a_3 e^{j 3 \omega_0 t} - j b_3 e^{j 3 \omega_0 t} \\ + \frac{1}{2} a_2 e^{-j 2 \omega_0 t} + \frac{1}{2} j b_2 e^{-j 2 \omega_0 t} + \frac{1}{2} a_2 e^{j 2 \omega_0 t} - \frac{1}{2} j b_2 e^{j 2 \omega_0 t} \\ + \frac{1}{2} a_1 e^{-j \omega_0 t} + \frac{1}{2} j b_1 e^{-j \omega_0 t} + \frac{1}{2} a_1 e^{j \omega_0 t} - \frac{1}{2} j b_1 e^{j \omega_0 t} + \dots$$

$$f(t) = a_0 + \frac{1}{2} a_3 (e^{j 3 \omega_0 t} + e^{-j 3 \omega_0 t}) + \frac{1}{2} j b_3 (-e^{j 3 \omega_0 t} + e^{-j 3 \omega_0 t}) \\ + \frac{1}{2} a_2 (e^{j 2 \omega_0 t} + e^{-j 2 \omega_0 t}) + \frac{1}{2} j b_2 (-e^{j 2 \omega_0 t} + e^{-j 2 \omega_0 t}) \\ + \frac{1}{2} a_1 (e^{j \omega_0 t} + e^{-j \omega_0 t}) + \frac{1}{2} j b_1 (-e^{j \omega_0 t} + e^{-j \omega_0 t}) + \dots$$

$$f(t) = a_0 + \frac{1}{2} a_3 (e^{j 3 \omega_0 t} + e^{-j 3 \omega_0 t}) + \frac{j}{2j} j b_3 (-e^{j 3 \omega_0 t} + e^{-j 3 \omega_0 t}) \\ + \frac{1}{2} a_2 (e^{j 2 \omega_0 t} + e^{-j 2 \omega_0 t}) + \frac{j}{2j} j b_2 (-e^{j 2 \omega_0 t} + e^{-j 2 \omega_0 t}) \\ + \frac{1}{2} a_1 (e^{j \omega_0 t} + e^{-j \omega_0 t}) + \frac{j}{2j} j b_1 (-e^{j \omega_0 t} + e^{-j \omega_0 t}) + \dots$$

$$f(t) = a_0 + \frac{1}{2}a_3(e^{j3\omega_0 t} + e^{-j3\omega_0 t}) + \frac{b_3}{2j}(e^{j3\omega_0 t} - e^{-j3\omega_0 t}) \\ + \frac{1}{2}a_2(e^{j2\omega_0 t} + e^{-j2\omega_0 t}) + \frac{b_2}{2j}(e^{j2\omega_0 t} - e^{-j2\omega_0 t}) \\ + \frac{1}{2}a_1(e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}) + \frac{b_1}{2j}(e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}) + \dots$$

$$f(t) = a_0 + a_3 \cos 3\omega_0 t + a_3 \sin 3\omega_0 t + a_2 \cos 2\omega_0 t + b_2 \sin 2\omega_0 t + a_1 \cos \omega_0 t + b_1 \sin \omega_0 t + \dots$$

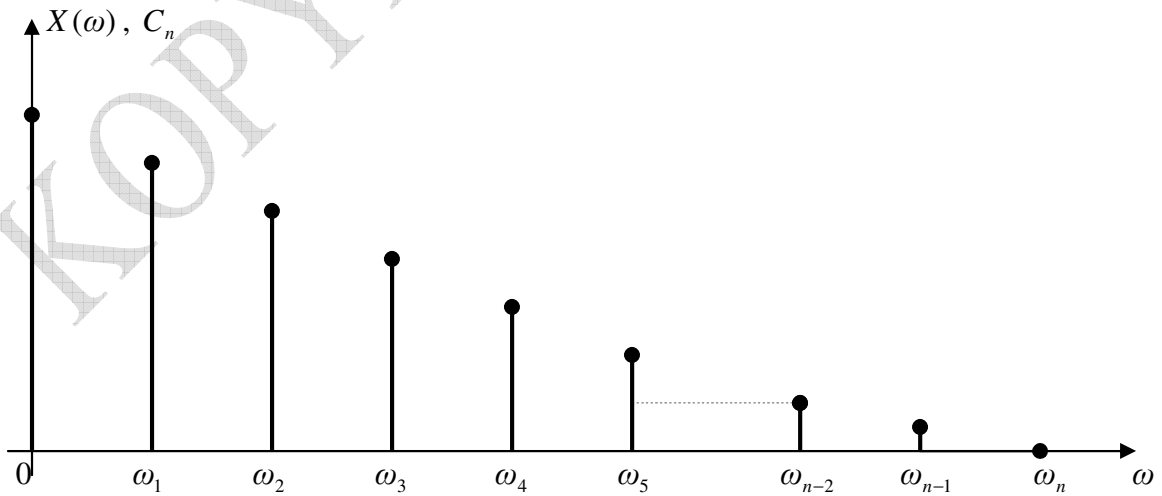
$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t$$

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n e^{jn\omega_0 t} \\ = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t$$

Görüldüğü gibi $n = (-\infty, \infty)$ aralığındaki exponensiyel gösterim $n = (0, \infty)$ aralığındaki klasik gösterime eşit olmaktadır.

Harmonikler ve Katsayılar arasındaki ilişki

Yukarıda ele alınan örneklerdeki Fourier spektrumlarına bakıldığında zaman genel anlamda aşağıdaki gibi gösterilebilecek bir durumun söz konusu olduğu görülmektedir.



Şekil 34 Fourier katsayıları $C_n(a_n, b_n)$ ve harmoniklerin $(\omega_0, \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)$ değişimi

Görüldüğü gibi harmoniklerin genlikleri frekanslar arasında ters bir orantı söz konusudur. Küçük harmoniklerin genlikleri C_n veya (a_n, b_n) katsayıları büyük iken, büyük harmoniklerin genlikleri gittikçe küçülmektedir. Buradan Fourier serisinin harmonikleri küçükten büyüğe doğru artarken, genlikleride bağlı oldukları aynı harmoniklerle ters orantılı olarak büyükten küçüğe doğru azalarak nihayetinde sıfır olmaktadır. Bu yüzden Fourier serisini küçük harmonikler için büyük genlik, büyük harmonikler için ise küçük genliklerin söz konusu olduğu bir seri olarak hatırlamaktayız.

Fourier Serisi ve Hilbert Uzayları

Fourier serisinin Hilbert uzaylarının tüm özelliklerinin gösterdiği görülmektedir. Fourier serisi sinusoid terimler üzerine kurulduğundan,

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n e^{jn\omega_0 t}$$

serisi ortogonal özelliklerinden dolayı

$$D_n = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$$

ifadesine benzer olarak,

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{T_0} f(t) \overline{g(t)} dt$$

ilişkisi gibi

$$e_n = e^{jn\omega_0 t}$$

kabulüyle

$$f = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \langle f, e_n \rangle e_n$$

bağıntısı mevcuttur. Görüldüğü gibi ifade kompleks değerlikleri de içeren Hilbert uzayına uygun olarak $\langle f, e_n \rangle$ ve e_n terimlerinin içsel çarpımlarına yani **inner product** ile tanımlanmaktadır. Buradan görülebileceği gibi $\langle f, e_n \rangle$ terimi D_n katsayısı gibi davranmaktadır. Duruma vektör analiz açısından bakıldığında aslında yukarıdaki denklem

$$f = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\langle f, e_n \rangle}{\langle e_n, e_n \rangle} e_n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\langle f, e_n \rangle}{\|e_n\|^2} e_n$$

olarak da düşünülebilir. Kullanılan $e_n = e^{jn\omega_0 t}$ fonksiyonu için

$$\|e_n\|^2 = \|(\cos n\omega_0 t + j \sin n\omega_0 t)\|^2 = \sqrt{\cos^2 n\omega_0 t + \sin^2 n\omega_0 t} = 1$$

olacağından ifade,

$$f = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\langle f, e_n \rangle}{\langle e_n, e_n \rangle} e_n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\langle f, e_n \rangle}{\|e_n\|^2} e_n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\langle f, e_n \rangle}{1^2} e_n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \langle f, e_n \rangle e_n$$

$$f = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \langle f, e_n \rangle e_n$$

olarak elde edilir. Elde edilen ifade de

$$\|e_n\|^2 = \|(\cos n\omega_0 t + j \sin n\omega_0 t)\|^2 = \sqrt{\cos^2 n\omega_0 t + \sin^2 n\omega_0 t} = 1$$

durumu

$$\|e_n\|^2 = 1$$

olarak $\cos n\omega_0 t$ ve $j \sin n\omega_0 t$ sinusoidal fonksiyonların hem ortogonal hem de ortonormal olduklarını göstermektedir. Sinusoidal fonksiyonların ortogonal ve ortonormal olan bu özelliğini başından beri bilmekteyiz. $\|e_n\|^2 = 1$ özelliğinden dolayı **ortonormal projeksiyon** uygulanmıştır. Bu anlamda

$$\text{Proj}_{e_n} f = \frac{\langle f, e_n \rangle}{\langle e_n, e_n \rangle} e_n = \frac{\langle f, e_n \rangle}{\|e_n\|^2} e_n = \frac{\langle f, e_n \rangle}{1^2} e_n = \langle f, e_n \rangle e_n$$

projeksiyonu söz konusudur. İfadedeki $\text{Proj}_{e_n} f$ teriminin, f in e_n üzerine olan projeksiyonu olarak okunduğunu bilmekteyiz. Bunun Fourier serisi açısından nasıl yorumlanacağı önem taşımaktadır. Vektör analiz açısından eğer $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \dots, \mathbf{v}_n$ vektörleri ortogonal kabul edilirse, bunların süperpozisyonundan oluşan \mathbf{u} vektörü aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$\mathbf{u} = c_1 \mathbf{v}_1 + c_2 \mathbf{v}_2 + c_3 \mathbf{v}_3 + \dots + c_n \mathbf{v}_n$$

Bunu Fourier serisiyle karşılaştırsak,

$$f(t) = D_1 e^{j\omega_0 t} + D_2 e^{j2\omega_0 t} + D_3 e^{j3\omega_0 t} + \dots + D_n e^{jn\omega_0 t}$$

benzerliğinin olduğu görülecektir. Diğer yandan

$$c_i = \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_i \rangle}{\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i \rangle} = \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_i \rangle}{\|\mathbf{v}_i\|^2} = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}_i}{\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i}$$

ve

$$\mathbf{u} = \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_1 \rangle}{\|\mathbf{v}_1\|^2} \mathbf{v}_1 + \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_2 \rangle}{\|\mathbf{v}_2\|^2} \mathbf{v}_2 + \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_3 \rangle}{\|\mathbf{v}_3\|^2} \mathbf{v}_3 + \dots + \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_n \rangle}{\|\mathbf{v}_n\|^2} \mathbf{v}_n$$

$$\mathbf{u} = \sum_{k=1}^n \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_k \rangle}{\|\mathbf{v}_k\|^2} \mathbf{v}_k$$

oldukları göz önüne alındığında ise,

$$D_n = \frac{\langle \mathbf{f}, \mathbf{e}_n \rangle}{\langle \mathbf{e}_n, \mathbf{e}_n \rangle} = \frac{\langle \mathbf{f}, \mathbf{e}_n \rangle}{\|\mathbf{e}_n\|^2} = \frac{\mathbf{f} \cdot \mathbf{e}_n}{\mathbf{e}_n \cdot \mathbf{e}_n}$$

yazılabileceği görülmektedir. Ortonormal projeksiyondan $\langle \mathbf{e}_n, \mathbf{e}_n \rangle = 1$ olacağından,

$$D_n = \langle \mathbf{f}, \mathbf{e}_n \rangle$$

yazılabileceği görülmektedir. Zaten $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n e^{jn\omega_0 t}$ ve $f = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \langle f, \mathbf{e}_n \rangle \mathbf{e}_n$

denklemlerini karşılaştırdığımızda

$$D_n = \frac{\langle f, \mathbf{e}_n \rangle}{\langle \mathbf{e}_n, \mathbf{e}_n \rangle} = \langle f, \mathbf{e}_n \rangle$$

olduğu görülmektedir. Bu anlamda, Fourier serisindeki D_n katsayısının, $Proj_{\mathbf{e}_n} f$ olarak, $f(t)$ fonksiyonunun $\mathbf{e}_n = e^{jn\omega_0 t}$ üzerine olan projeksiyonu olduğu görülmektedir. Bunun anlamı ise, $f(t)$ fonksiyonunun $\mathbf{e}_n = e^{jn\omega_0 t}$ gibi fonksiyonlar üzerine olan n tane farklı (uzunluk gibi) ölçekteki bileşenleri (gölgeleri, izdüşümleri, projeksiyonları), D_n katsayısıyla verilmektedir. Bu yolla bir $f(t)$ fonksiyonunun bütünü farklı yerlerdeki parçalarının toplamı olarak düşünülmektedir. Bu da tutarlı bir yaklaşımdır. Böyle olduğunu vektör uzayı ve vektörel analizden bilmekteyiz.

Eğer $\mathbf{u} = c_1 \mathbf{v}_1 + c_2 \mathbf{v}_2 + c_3 \mathbf{v}_3 + \dots + c_n \mathbf{v}_n$ ifadesi tekrar göz önüne alındığında, \mathbf{u} vektörünün çeşitli ortogonal $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \dots, \mathbf{v}_n$ vektörleri üzerine olan düşen belli ölçeklerdeki $(c_1, c_2, c_3, \dots, c_n)$ gölgelerinin (izdüşümlerinin, ortogonal projeksiyonlarının) toplamından oluştuğu düşünülmekteydi. Fourier serisinde de, $f(t)$ fonksiyonunun $e^{j\omega_0 t}, e^{j2\omega_0 t}, e^{j3\omega_0 t}, \dots, e^{jn\omega_0 t}$ vektörleri üzerine düşen belli ölçeklerdeki $(D_1, D_2, D_3, \dots, D_n)$ gölgelerinin (izdüşümlerinin, ortonormal projeksiyonlarının) toplamından oluştuğu düşünülebilir. Fourier serisi açısından böyle olmasında $e^{j\omega_0 t}, e^{j2\omega_0 t}, e^{j3\omega_0 t}, \dots, e^{jn\omega_0 t}$ tipli fonksiyonların üzerine kuruldukları $\cos n\omega t$ ve $\sin n\omega t$ tipteki ortogonal özellikteki sinusoidlerin önemi büyüktür.

Fourier Serisi ve ortogonalite

Fourier serisinin daha önce ortogonal özelliği belirtilmişti. Eğer seri

$$f(t) = a_1 \cos \omega_0 t + a_2 \cos 2\omega_0 t + \dots + b_1 \sin \omega_0 t + b_2 \sin 2\omega_0 t + \dots$$

şeklinde düşünülürse, örneğin a_2 katsayısını bulmak istediğimizi süşünelim. Bunun için eşitliğin her iki yanını a_2 katsayısının basis fonksiyonu durumundaki $\cos 2\omega_0 t$ ile çarptığımızı düşünelim.

$$f(t) \cos 2\omega_0 t = a_1 \cos \omega_0 t \cos 2\omega_0 t + a_2 \cos 2\omega_0 t \cos 2\omega_0 t + \dots + b_1 \sin \omega_0 t \cos 2\omega_0 t + b_2 \sin 2\omega_0 t \cos 2\omega_0 t + \dots$$

ortogonalite koşulundan dolayı $a_2 \cos 2\omega_0 t \cos 2\omega_0 t$ teriminin dışındaki tüm değerler sıfır olacaktır.

$$f(t) \cos 2\omega_0 t = \underbrace{a_1 \cos \omega_0 t \cos 2\omega_0 t}_0 + a_2 \cos 2\omega_0 t \cos 2\omega_0 t + \dots + \underbrace{b_1 \sin \omega_0 t \cos 2\omega_0 t}_0 + \underbrace{b_2 \sin 2\omega_0 t \cos 2\omega_0 t}_0 + \dots$$

böylece

$$f(t) \cos 2\omega_0 t = a_2 \cos 2\omega_0 t \cos 2\omega_0 t$$

$$a_2 = \frac{f(t) \cos 2\omega_0 t}{\cos 2\omega_0 t \cos 2\omega_0 t}$$

elde edilecektir. Bu ortogonal özelliğin sağladığı bir avantaj olup, işaret analizde oldukça faydalı bir yaklaşım olarak kabul görmektedir. Gerçekte Fourier serisindeki a_2 katsayısının, verilen periodik bir aralıkta bulduğumuz benzer ifadenin integrasyonu ile aşağıdaki gibi elde edildiğini biliyoruz.

$$a_n = \frac{\int_{t_1}^{t_1+T_0} f(t) \cos n\omega_0 t \, dt}{\int_{t_1}^{t_1+T_0} \cos n\omega_0 t \cos m\omega_0 t \, dt}$$

Burada a_n , genelleştirilmiş katsayı olarak düşünülürse a_2 katsayısını da sağlayacağı görülmektedir.

İşaretlerin Gösterimi ve Fourier serisi

İşaretlerin çeşitli gösterimleri vardır. Fourier serisi de bir işaretin alternatif gösterimini sağlayan yöntemlerden biri olarak düşünülebilir. Örneğin bir $x(t)$ işareti konvülsiyonla

$$x(t) = x(t) * \delta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \delta(t - \tau) d\tau$$

olarak gösterilebildiği gibi, vektörel olarak

$$\mathbf{x} = c_1 \mathbf{v}_1 + c_2 \mathbf{v}_2 + c_3 \mathbf{v}_3 + \dots + c_n \mathbf{v}_n$$

Biçiminde, \mathbf{x} vektörünün $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \dots, \mathbf{v}_n)$ basisleri üzerine olan ortogonal projeksiyonların toplamı gibi de gösterilebilir. Nihayet vektörel gösterimden esinlenilerek

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n e^{jn\omega_0 t}$$

biçimindeki Fourier serisi gibi olarak da gösterilebilir. Bu açıdan, Fourier serisinin $x(t)$ işaretinin $e^{jn\omega_0 t}$ basis fonksiyonları üzerine olan D_n ortogonal projeksiyonların süper pozisyonu olarak düşünülebilir.

Fourier Serisi ve Ortogonal Projeksiyon

Daha önceki vektör bölümünde inner product vektör uzayında $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \dots, \mathbf{v}_n\}$ vektörlerinin sıfırdan farklı ve ortogonal bir vektör kümesini göstermesi durumunda, bu kümedeki vektörler linear bağımsız iseler ve yine eğer aynı inner product uzayındaki bir \mathbf{u} vektörü $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \dots, \mathbf{v}_n)$ ortogonal vektörlerinin aşağıdaki gibi linear kombinasyonları gibi yazılabileceğini biliyoruz.

$$\mathbf{u} = c_1 \mathbf{v}_1 + c_2 \mathbf{v}_2 + c_3 \mathbf{v}_3 + \dots + c_n \mathbf{v}_n$$

Linear bağımsızlık kriteri için $c_1 = c_2 = c_3 = \dots = c_n = 0$ olduğunu biliyoruz. Böyle bir yaklaşımda \mathbf{u} vektörünün \mathbf{v} ortonormal basis vektörleri üzerine olan $\frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_n \rangle}{\langle \mathbf{v}_n, \mathbf{v}_n \rangle} (\|\mathbf{v}_n\|^2 = 1)$ ortogonal projeksiyonlarının aşağıdaki gibi süperpozisyonlarından oluştuğunu biliyoruz.

$$\mathbf{u} = \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_1 \rangle}{\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1 \rangle} \mathbf{v}_1 + \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_2 \rangle}{\langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_2 \rangle} \mathbf{v}_2 + \dots + \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_n \rangle}{\langle \mathbf{v}_n, \mathbf{v}_n \rangle} \mathbf{v}_n$$

$$\mathbf{u} = \sum_{k=1}^n \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_k \rangle}{\langle \mathbf{v}_k, \mathbf{v}_k \rangle} \mathbf{v}_k$$

Eğer ortonormal senaryoya göre hareket edilirse, $\langle \mathbf{v}_n, \mathbf{v}_n \rangle = \|\mathbf{v}_n\|^2 = 1$ alınmasının yeterli olacağını biliyoruz. Bu yaklaşım Fourier serisi içinde geçerlidir. Fourier serisini göz önüne alırsak,

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n e^{jn\omega_0 t}$$

$e_n = e^{jn\omega_0 t}$ gösterimiyle ortonormal projeksiyonun

$$f = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \langle f, e_n \rangle e_n$$

olarak yazılabildiğini görmekteyiz. Burada $u = f$, $c_1, c_2, \dots, c_n = D_n$, $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n = e^{jn\omega_0 t}$ ve $(c_1 \mathbf{v}_1 + c_2 \mathbf{v}_2 + c_3 \mathbf{v}_3 + \dots + c_n \mathbf{v}_n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n e^{jn\omega_0 t}$

Bunların ışığında, Fourier serisi ile ortonormal vektör projeksiyonu arasındaki ilişkiyi net olarak görebilmekteyiz.

Fourier Serisinin Yakınsaması

Fourier serisinde başlangıçta verilen bir $f(t)$ orijinal fonksiyonla, bunun Fourier serisine açılmış verisinin gösteren örneğin $f_s(t)$ işaretlerinin teorik olarak aynı olması gerekmektedir.

$$f(t) \stackrel{?}{=} f_s(t)$$

Ancak Fourier serisinin $(-\infty, \infty)$ gibi sonsuz aralıkta yazılması bu eşitliği zorlaştırmaktadır. Çünkü açılan seride ancak sonsuz tane terim yani harmonik alırsak, bunun mümkün olabileceği görülmektedir. Ancak pratikte bunun mümkün olmayışından dolayı ancak yaklaşık anlamda

$$f(t) \cong f_s(t)$$

bağıntısının olabileceği görülmektedir. Bundan dolayı her zaman için $f(t)$ ile $f_s(t)$ arasında bir fark yani hata olur. Ancak hata değeri olabildiğince fazla terim alınarak küçük tutulmaya çalışılır. Bu yüzden genellikle, $f_s(t)$ Fourier serisinin orijinal $f(t)$ fonksiyonuna yakınsamasından bahsedilir. Bahsedilen hata değerinin kaçınılmazlığı band genişliği ile de açıklanabilir. Normalde işaretler belirli bölgedeki enerji yoğunluğu ifade eden band genişliği kavramıyla tanımlanabilmekte. Bu açıdan yaklaşıldığında band genişliğiyle belirli aralıktaki yoğunlaşma olarak belirli yani sonlu sayıdaki terim veya harmonik değerinin alındığı vurgulanmaktadır. Bu yaklaşım bile pratikteki bir işaretin ideal işaretten farklı olacağını göstermektedir. Bunları göstermek üzere eğer Fourier serisi

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n e^{jn\omega_0 t}$$

veya daha açık olarak

$$f(t) = a_0 \cos(0 \times \omega_0 t) = 1 + a_1 \cos \omega_0 t + a_2 \cos 2\omega_0 t + \dots + b_1 \sin \omega_0 t + b_2 \sin 2\omega_0 t + \dots$$
$$= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t$$

şeklinde ifade edilirse, serinin sonsuz harmonikten ifade edilmesi anında ancak ilgili $f(t)$ fonksiyonunu temsil edebileceği görülmektedir. Pratikte sonsuz tane terimi yazmanın sıkıntısından dolayı, burada bir yaklaşıklık yani **yakınsama** söz konusu olacaktır. Bu yüzden ifade pratiğe dönük daha gerçekçi olarak

$$f_s(t) \cong \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n e^{jn\omega_0 t}$$

olarak düşünülebilir. Buna göre her zaman $f(t)$ ile $f_s(t)$ arasında bir hata payı söz konusu olacaktır.

$$f(t) - f_s(t) = E = \text{hata}$$

Bu hatanın teorik anlamda sıfır $E = 0$ pratikte oldukça küçük $E \ll$ olması halinde ancak

$$f_s(t) \cong f(t)$$

durumunun mümkün olabileceği görülmektedir. Bu anlamda Fourier serisinde sonlu terim alınması halinde, orijinal fonksiyon aynen elde edilebileceği gibi, çok küçük hatalarla yaklaşık olarak da elde edilebilir. Sıfır hata garanti edilemeyecektir. Bu açıdan serinin orijinal fonksiyona yakınsaması (yaklaşacağı) hep gündemde olacaktır.

Negatif Frekans

Pozitif frekans normal frekans gibi bilinmesine rağmen, negatif frekans konusu biraz ilginçtir. Frekans saniyedeki salınım sayısını gösteren bir büyüklük veya miktar olduğuna göre, negatif frekansın karşılığını bu tanım içinde mantıksal açıdan bulmak güç iştir. Bu açıdan en azından fiziksel açıdan var olmayan bir frekans türüdür. Eğer frekans titreşim veya salınım olarak dönen dairesel bir harekete benzetilirse, bir tekerleğin saat yönünde ve saatin ters yönündeki hareketi gibi düşünüldüğünde, ters yöndekini negatif frekans olarak algılanabilir. Somutlaştırmaya çalışırsak, örneğin $\cos[(-\omega)t + \theta]$ ifadesindeki $(-\omega)$ şeklindeki negatif gibi görünen frekansın aslında $\cos(-\omega t + \theta)$ gibi düşünülerek bu ifadenin de

$$\cos[(-\omega)t + \theta] = \cos(-\omega t + \theta) = \cos(\omega t - \theta)$$

gibi düşünülmesinden dolayı $\cos[(-\omega)t + \theta]$ ifadesindeki $(-\omega)$ negatif frekansın $\cos(-\omega t + \theta) = \cos(\omega t - \theta)$ gösterimiyle pozitif olduğu görülecektir.

Eğer Euler denkleminde normal $e^{j\omega t}$ ifadesinin eşleniği durumundaki negatif frekanslı $e^{-j\omega t}$ ($e^{-j\omega t} = e^{j(-\omega)t}$) exponensiyel formu göz önüne alırsak,

$$e^{j\omega t} = \cos \omega t + j \sin \omega t$$

$$e^{-j\omega t} = e^{j(-\omega)t} = \cos(-\omega)t + j \sin(-\omega)t = \cos \omega t - j \sin \omega t$$

durumunda $(-\omega)$ olarak $e^{-j\omega t}$ de görünen negatif frekans, elde edilen $\cos \omega t - j \sin \omega t$ ifadesinde direkt olarak $(-\omega)$ negatif frekans olarak görünmemektedir. Böyle bir gösterimin aslında $\cos(-\omega) t + j \sin(-\omega) t$ ifadesinden elde edildiğini görmekteyiz.

$$\cos(-\omega) t + j \sin(-\omega) t = \cos \omega t - j \sin \omega t$$

Bunu göstermek üzere $e^{j\omega t}$ genel gösterimindeki frekansı $(-\omega)$ biçiminde negatif olarak göz önüne alıp $e^{j(-\omega) t}$ olarak yazabiliriz. Bununla oluşacak ifade

$$e^{j\omega t} \big|_{\omega=-\omega} = e^{j(-\omega) t} = \cos(-\omega) t + j \sin(-\omega) t$$

şeklinde düşünüldüğünden bunun sonucunda negatif frekansın

$$\begin{aligned} e^{j(-\omega) t} &= \cos(-\omega) t + j \sin(-\omega) t \\ &= \cos \omega t - j \sin \omega t \end{aligned}$$

gösterimiyle ortadan kalktığı görülmektedir. Yani sonuçta negatif frekans $\cos \omega t - j \sin \omega t$ gösteriminde ortadan kalkarak bir tür pozitif duruma gelmiştir. Bundan dolayı negatif frekansın aslında bir tür pozitif, hatta mutlak pozitif frekans olduğunu söyleyebiliriz ve buna dayanarak,

$$\omega = |\omega_0|$$

olduğunu düşünebiliriz. Bunun yanında negatif frekansı daha belirgin göstermek üzere genellemek de mümkündür. Bunun için $e^{j\omega t}$ ifadesinde $\omega = \pm n \omega_0$ olarak alınırsa

$$e^{j\omega t} = e^{\pm j n \omega_0 t} = \cos n \omega_0 t \pm j \sin n \omega_0 t$$

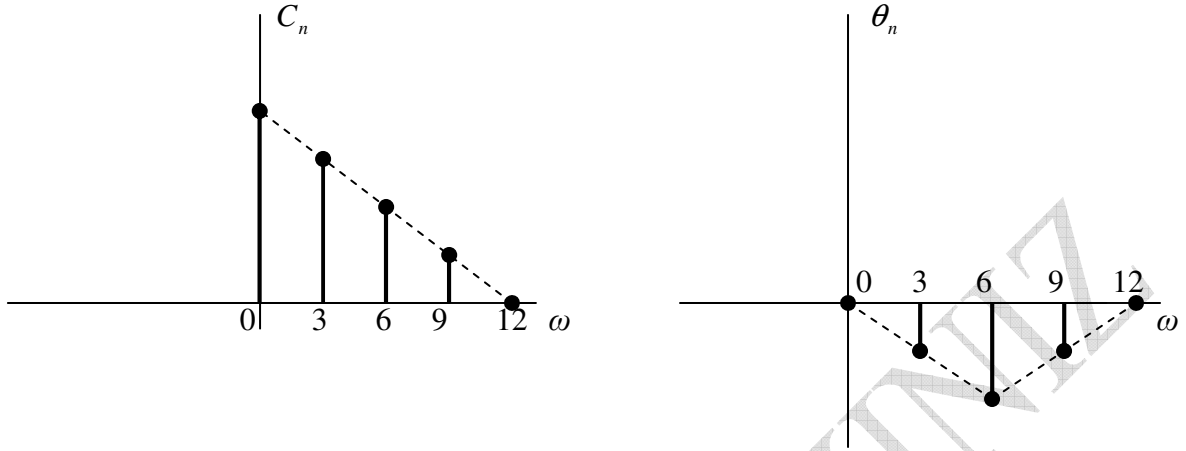
görülmektedir ki $-\omega$ şeklindeki negatif frekans aslında $\omega = -n \omega_0$ gösteriminden ibaret olup işlem sırasında doğal olarak pozitif olarak değerlendirilmektedir. Burada $e^{\pm j n \omega_0 t}$ şeklindeki gösterimin işaret analizinde oldukça önemli yeri olduğunu vurgulamamız gerekiyor. Periyodik işaretlerin analizini oluşturan Fourier serisi $e^{\pm j n \omega_0 t}$ şeklindeki kompakt gösterimlerle ifade edilmektedirler. Böyle bir gösterimi vermek üzere Fourier serisini gösterdiği düşünülen $f(t)$ fonksiyonunu

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n e^{j n \omega_0 t}$$

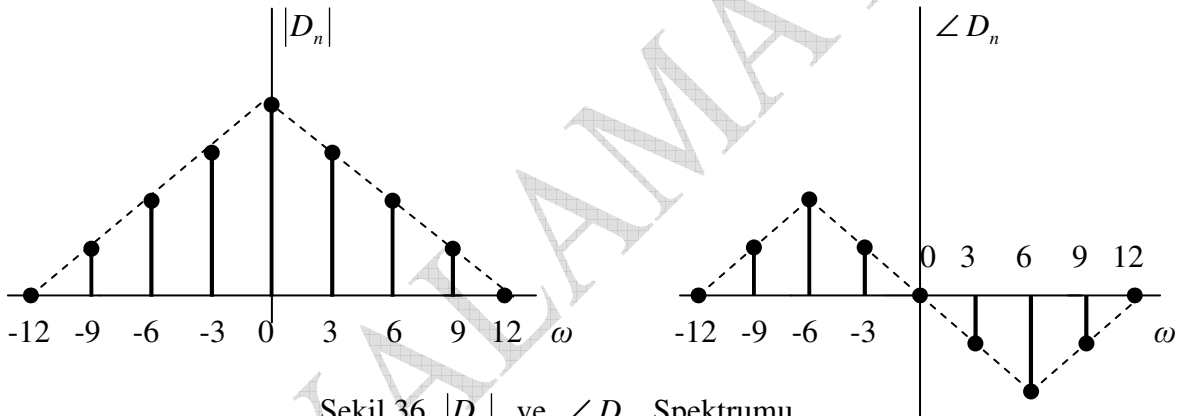
olarak ifade edilmektedir.

Örnek

Aşağıdaki verilmiş genlik ve açı spektrumlarını göz önüne alalım.



Şekil 35 C_n ve θ_n Spektrumu



Şekil 36 $|D_n|$ ve $\angle D_n$ Spektrumu

Çözüm

Her iki şekile bakarak Fourier serisini temsil eden $f(t)$ fonksiyonunu elde etmeye çalışalım.

$$|D_n| = |D_{-n}| = \frac{1}{2} C_n, \quad n \neq 0$$

İfadesi göz önüne alındığında negatif frekans $(-\omega_0)$ için bile işaret genlik değerinin değişmeyeceği $|D_n| = |D_{-n}|$ görülmektedir. Vurgulanmak istenen şudur, frekans pozitif veya negatif de olsa alacağı değer D_n değişmemektedir. Durum şekilde de verilmiştir. İşaretin genliğinin değişmemesi her frekans (pozitif – negatif) için aynı sabit kalması zaten distorsiyonsuz iletimin en önemli gereğidir. Yani bir bilgiyi iletirken istenen, bilgiyi gösteren işaretin genliğinin tüm iletim boyunca sabit kalmasıdır. Sistem giriş işareti $f(t)$ ve çıkışı $y(t)$ ise **distorsiyonsuz iletim**

$$y(t) = k f(t - t_d)$$

yazılabilir. k sabit olup, t_d gecikmeyi göstermektedir. Bu ifadenin frekans spektrumundaki karşılığı

$$Y(\omega) = k F(\omega) e^{-j\omega t_d}$$

$$Y(\omega) = F(\omega) H(\omega)$$

$$H(\omega) = k e^{-j\omega t_d}$$

$$|H(\omega)| = k$$

$$\angle H(\omega) = -j\omega t_d$$

$H(\omega)$ sistem frekans cevabı olarak daha önce gördüğümüz sistem impuls cevabının frekans spektrumundaki karşılığıdır. Bazen sistem transfer fonksiyonu olarak da bilinir (sistem çıkışının, girişine oranı). Görüldüğü gibi genlik veya magnitud olarak tüm frekans değerleri için aynı “ k ” değerini $|H(\omega)| = k$ alması, distorsiyonsuz iletim için önemlidir. İşaret genliği için bunlar olmasına rağmen faz için durum daha farklıdır.

$$\angle D_n = \theta_n \quad \text{ve} \quad \angle D_{-n} = -\theta_n$$

Görüldüğü faz spektrumu negatif açıdan etkilenmektedir. Yani negatif fazlar veya açılar için farklı tam anti simetriği değerler elde edilmektedir. Bu durumda yukarıdaki şekilden açıkça görülmektedir. Faz olayındaki bu durumda yine distorsiyonsuz haberleşmede veya iletimde önemlidir. Çünkü distorsiyonsuz iletim için veri paketleri veya frekans bileşenleri açısından bir gecikme olması gerekiyor. Bu gecikmenin gerekliliği distorsiyonsuz yaklaşımdaki

$$\angle H(\omega) = -j\omega t_d$$

ifadesinden de görülebilecektir. Buna göre pozitif ve negatif frekans değerleri için farklı fazlar veya açılar θ_n söz konusudur ve daha da önemlisi distorsiyonsuz iletimde frekansın faz veya açı ile doğrusal (linear) değiştiği görülmektedir. Buna göre aslında Fourier seri yaklaşımında ortaya çıkan

$$|D_n| = |D_{-n}|$$

ve

$$\angle D_{\pm n} = \pm \theta_n$$

durumlarının distorsiyonsuz iletimin gerekliliğinden kaynaklandığını öne sürmek makul bir gerekçe olabilir. Bu bilgilerden sonra yukarıdaki şekillerde $|D_n|$ ve $\angle D_n$ olarak verilen örneğimize dönecek olursak, $f(t)$ i oluşturmak için $|D_n|$ ve $\angle D_n, \theta_n$ leri tesbit etmemiz gerekiyor. Öncesinde şekillere bakacak olursak,

$$C_0 = 16$$

$$D_0 = C_0 = 16$$

$|D_n|$ için

ω	$ D_n $
3	6
6	4
9	2
12	0
0	8
-3	6
-6	4
-9	2
-12	0

$\angle D_n$ için

ω	$\angle D_n$
3	-45°
6	-90°
9	-45°
12	0
0	0
-3	45°
-6	90°
-9	45°
-12	0

Tablolara ve

$$D_n = |D_n| e^{j\theta_n}$$

$$\begin{aligned}
 f(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n e^{jn\omega_0 t} \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} D_n e^{jn\omega_0 t} + D_{-n} e^{-jn\omega_0 t} \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} |D_n| e^{j(n\omega_0 t + \theta_n)} + |D_n| e^{-j(n\omega_0 t + \theta_n)}
 \end{aligned}$$

ifadelerine göre

$$\begin{aligned}
 f(t) &= D_0 + |D_3| [e^{-j\frac{\pi}{4}} e^{j3t} + e^{j\frac{\pi}{4}} e^{-j3t}] + |D_6| [e^{-j\frac{\pi}{2}} e^{j6t} + e^{j\frac{\pi}{2}} e^{-j6t}] + |D_9| [e^{-j\frac{\pi}{4}} e^{j9t} + e^{j\frac{\pi}{4}} e^{-j9t}] \\
 &= 16 + [6e^{-j\frac{\pi}{4}} e^{j3t} + 6e^{j\frac{\pi}{4}} e^{-j3t}] + [4e^{-j\frac{\pi}{2}} e^{j6t} + 4e^{j\frac{\pi}{2}} e^{-j6t}] + [2e^{-j\frac{\pi}{4}} e^{j9t} + 2e^{j\frac{\pi}{4}} e^{-j9t}] \\
 &= 16 + 6[e^{j(3t-\frac{\pi}{4})} + e^{-j(3t-\frac{\pi}{4})}] + 4[e^{j(6t-\frac{\pi}{2})} + e^{-j(6t-\frac{\pi}{2})}] + 2[e^{j(9t-\frac{\pi}{4})} + e^{-j(9t-\frac{\pi}{4})}] \\
 &= 16 + 12\cos(3t - \frac{\pi}{4}) + 8\cos(6t - \frac{\pi}{2}) + 4\cos(9t - \frac{\pi}{4})
 \end{aligned}$$

Görüldüğü gibi, negatif görünümündeki frekansların sonuç

$$f(t) = 16 + 12\cos(3t - \frac{\pi}{4}) + 8\cos(6t - \frac{\pi}{2}) + 4\cos(9t - \frac{\pi}{4})$$

ifadesinde bu yönde negatif frekans $-\omega$ olarak $(-3t, -6t, -9t)$ gibi bir etkisi olmamıştır.

Fourier Serisi ve Negatif Frekanslar

Fourier serisinin genel gösterimi olarak

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t$$

veya (1)

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t$$

veya exponeşiyel formda

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n e^{jn\omega_0 t} \quad (2)$$

biçiminde göstermekteyiz. İlk yani (1) nolu ifadede serinin alt ve üst sınır olarak $n = (0, \infty)$ olarak alındığını, alternatif yazım olan (2) ifadesinde ise sınırların $n = (-\infty, \infty)$ alındığını görmekteyiz. Eğer birinci durumu göz önüne alırsak örneğin seriyi

$$f(t) = a_0 + a_1 \cos \omega_0 t + a_2 \cos 2\omega_0 t + a_3 \cos 3\omega_0 t + \dots + b_1 \sin \omega_0 t + b_2 \sin 2\omega_0 t + b_3 \sin 3\omega_0 t + \dots$$

gibi yazabilmekteyiz. Görüldüğü gibi yalnızca pozitif frekanslar veya harmoniklerden oluşan bir seri söz konusudur. Eğer (1) durumunu $n = (-\infty, \infty)$ için alırsak serinin

$$\begin{aligned} f(t) &= \dots + a_{-3} \cos(-3\omega_0 t) + a_{-2} \cos(-2\omega_0 t) + a_{-1} \cos(-\omega_0 t) + a_0 + a_1 \cos \omega_0 t + a_2 \cos 2\omega_0 t + a_3 \cos 3\omega_0 t + \dots \\ &\quad + b_{-3} \sin(-3\omega_0 t) + b_{-2} \sin(-2\omega_0 t) + b_{-1} \sin(-\omega_0 t) + b_1 \sin \omega_0 t + b_2 \sin 2\omega_0 t + b_3 \sin 3\omega_0 t + \dots \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t \end{aligned}$$

görüldüğü gibi hem pozitif hem de negatif frekansları içeren bir dizi söz konusudur. Bu ifadeyi eğer

$$\cos \alpha = \cos(-\alpha) \quad \text{ve} \quad -\sin \alpha = \sin(-\alpha)$$

$$a_n = a_{-n} \quad \text{ve} \quad b_n = b_{-n}$$

koşullarına göre düzenlersek

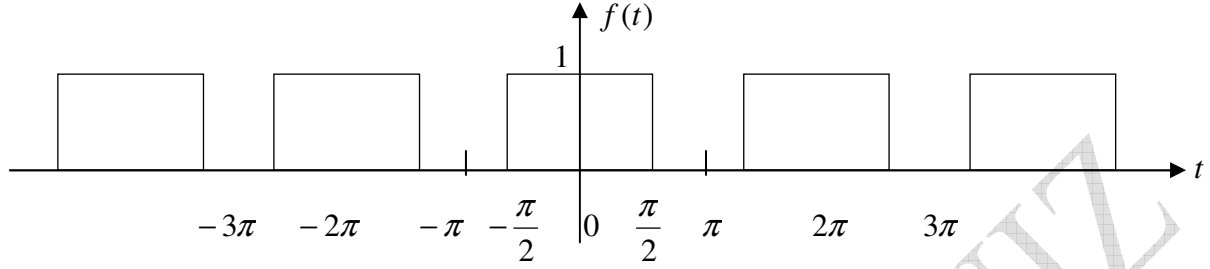
$$f(t) = \dots + a_3 \cos 3\omega_0 t + a_3 \cos 3\omega_0 t + a_2 \cos 2\omega_0 t + a_2 \cos 2\omega_0 t + a_0 + a_1 \cos \omega_0 t + a_1 \cos \omega_0 t + \dots \\ - b_3 \sin 3\omega_0 t - b_2 \sin 2\omega_0 t - b_1 \sin \omega_0 t + b_1 \sin \omega_0 t + b_2 \sin 2\omega_0 t + b_3 \sin 3\omega_0 t + \dots$$

$$f(t) = \dots + a_3 \cos 3\omega_0 t + a_3 \cos 3\omega_0 t + a_2 \cos 2\omega_0 t + a_2 \cos 2\omega_0 t + a_0 + a_1 \cos \omega_0 t + a_1 \cos \omega_0 t + \dots \\ + \underbrace{b_3 \sin 3\omega_0 t - b_3 \sin 3\omega_0 t}_0 + \underbrace{b_2 \sin 2\omega_0 t - b_2 \sin 2\omega_0 t}_0 + \underbrace{b_1 \sin \omega_0 t - b_1 \sin \omega_0 t}_0 + \dots$$

$$f(t) = \dots + a_0 + 2a_1 \cos \omega_0 t + 2a_2 \cos 2\omega_0 t + 2a_3 \cos 3\omega_0 t + \dots$$

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t \\ &= \dots + a_0 + 2a_1 \cos \omega_0 t + 2a_2 \cos 2\omega_0 t + 2a_3 \cos 3\omega_0 t + \dots \end{aligned}$$

Görüldüğü gibi harmoniklerin $n = (-\infty, \infty)$ aralığında negatif frekanslar dikkate alındığında Fourier serisi **çift fonksiyon** özellikte olup, yalnızca cosinüs ($a_n \cos n\omega_0 t$) olarak elde edilmektedir. Diğer bir deyişle serinin sinus yani ($b_n \sin n\omega_0 t$) kısmı yok olmaktadır. Böyle bir özelliği yukarıda ele alınan



Şekil 37 Periyodik darbe işaretinin Fourier serisi

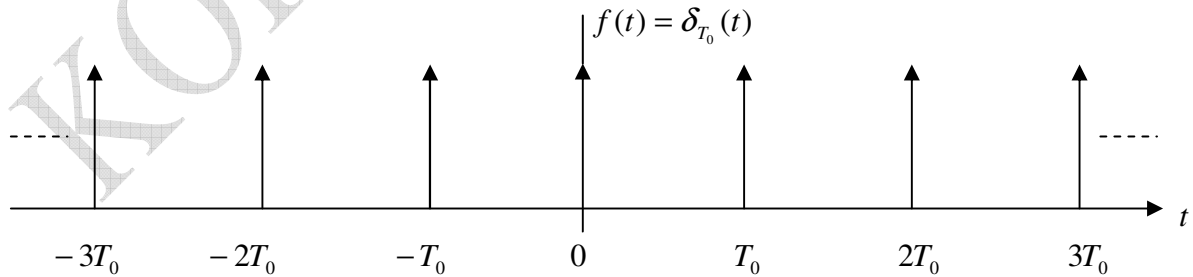
kare dalga örneğinde Fourier serisini

$$f(t) = \frac{1}{\pi} \left(\dots - \frac{1}{7} \cos(-7t) + \frac{1}{5} \cos(-5t) - \frac{1}{3} \cos(-3t) + \cos(-t) + \frac{\pi}{2} \right. \\ \left. + \cos t - \frac{1}{3} \cos 3t + \frac{1}{5} \cos 5t - \frac{1}{7} \cos 7t + \dots \right)$$

$$f(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \left(\cos t - \frac{1}{3} \cos 3t + \frac{1}{5} \cos 5t - \frac{1}{7} \cos 7t + \dots \right)$$

$$f(t) = \frac{1}{2} - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-1)} \cos(2n-1)t$$

olarak yalnızca $a_n \cos n\omega_0 t$ çift fonksiyonu özelliğinde elde ederken gözlemlemiştik. Veya bir diğer örnek olan



Şekil 38 Birim impuls fonksiyonu

birim impuls fonksiyonunu $\delta_{T_0}(t)$ Fourier serisine açtığımızda karşılığının

$$\delta_{T_0}(t) = \frac{1}{T_0} [1 + 2(\cos \omega_0 t + \cos 2\omega_0 t + \cos 3\omega_0 t + \dots)]$$

veya

$$\delta_{T_0}(t) = \frac{1}{T_0} + \frac{2}{T_0} \sum_{n=1}^{\infty} \cos n\omega_0 t$$

şeklinde bu kısmın, başında ele aldığımız

$$f(t) = \dots + a_0 + 2a_1 \cos \omega_0 t + 2a_2 \cos 2\omega_0 t + 2a_3 \cos 3\omega_0 t + \dots = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t$$

fonksiyonuna oldukça benzeyen özellikte oluştuğunu görmekteyiz. Bu doğrultuda düzenlersek,

$$\begin{aligned} \delta_{T_0}(t) &= \frac{1}{T_0} [1 + 2(\cos \omega_0 t + \cos 2\omega_0 t + \cos 3\omega_0 t + \dots)] \\ &= f(t) = \frac{1}{T_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t \end{aligned}$$

Buradan şekilden de görüldüğü gibi periodik $f(t) = \delta_{T_0}(t)$ impuls fonksiyonunda (dizisinin) çift fonksiyon özellikte olduğunu görmekteyiz. Bu yüzden T_0 periodlu impuls fonksiyonunun exponensiyel formda

$$\delta_{T_0}(t) = \frac{1}{T_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jn\omega_0 t}$$

biçiminde gösterilebildiği görülmektedir. Sonuçta kare dalgayı

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{ah}{T} \sin c(n f_0 a) e^{j2\pi n f_0 t}$$

ve impuls dizisini de

$$\delta_{T_0}(t) = \frac{1}{T_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jn\omega_0 t}$$

ifadesi ile $n = (-\infty, \infty)$ aralığında Fourier serisine açabilmekteyiz. Bunun mümkün oluşu her iki fonksiyonun **çift fonksiyon** olmasından kaynaklanmaktadır. Ancak exponensiyel olarak ilgili fonksiyonları $n = (-\infty, \infty)$ aralığında ifade etmemize rağmen, klasik gösterimlerinin

$$f(t) = \frac{1}{2} - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-1)} \cos(2n-1)t$$

ve

$$\delta_{T_0}(t) = \frac{1}{T_0} + \frac{2}{T_0} \sum_{n=1}^{\infty} \cos n\omega_0 t$$

şeklinde $n = (0, \infty)$ gibi yarı aralıkta olduğunu görmekteyiz. Çift fonksiyonlar için hem $n = (-\infty, \infty)$ hem de $n = (0, \infty)$ aralıkları ile gösterim mümkün iken, tek veya içinde bir şekilde tek fonksiyonları içeren işaretlerin $n = (-\infty, \infty)$ aralığında gerek

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t$$

gerekse

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n e^{jn\omega_0 t}$$

olarak gösterilmeleri mümkün değildir. Çünkü her iki gösterimde

$$\begin{aligned} f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t = & \dots + a_{-3} \cos(-3\omega_0 t) + a_{-2} \cos(-2\omega_0 t) + a_{-1} \cos(-\omega_0 t) + a_0 \\ & + a_1 \cos \omega_0 t + a_2 \cos 2\omega_0 t + a_3 \cos 3\omega_0 t + \dots \\ & + b_{-3} \sin(-3\omega_0 t) + b_{-2} \sin(-2\omega_0 t) + b_{-1} \sin(-\omega_0 t) \\ & + b_1 \sin \omega_0 t + b_2 \sin 2\omega_0 t + b_3 \sin 3\omega_0 t + \dots \end{aligned}$$

$b_{-3} \sin(-3\omega_0 t) + b_{-2} \sin(-2\omega_0 t) + b_{-1} \sin(-\omega_0 t) + b_1 \sin \omega_0 t + b_2 \sin 2\omega_0 t + b_3 \sin 3\omega_0 t + \dots$ gibi ifadenin olması, ve bu ifadenin de sıfır olması

$$b_{-3} \sin(-3\omega_0 t) + b_{-2} \sin(-2\omega_0 t) + b_{-1} \sin(-\omega_0 t) + b_1 \sin \omega_0 t + b_2 \sin 2\omega_0 t + b_3 \sin 3\omega_0 t + \dots = 0$$

serideki tek özellikteki terimleri yani $b_n \sin n\omega_0 t$ terimlerini sürekli ortadan kaldırmaktadır. Bu şekliyle yani $n = (-\infty, 0)$ aralığı dikkate alındığı sürece tek bir fonksiyonun Fourier serisi ile gösterimi mümkün olmaz. Bu nedenle tek fonksiyonların gösterimini mümkün kılmak veya garanti etmek adına $n = (-\infty, \infty)$ aralığı yerine, $n = (0, \infty)$ aralığı dikkate alınır. Bu gösterim çift fonksiyon özelliğini otomatikman garanti ederken aynı zamanda tek fonksiyonun gösterimini de mümkün kılmaktadır.

Ancak çift fonksiyonun $n = (-\infty, \infty)$ aralığında Fourier serisine açılımı mümkün iken bunun yerine $n = (0, \infty)$ alındığında arada küçük bir fark olacaktır, o da $n = (0, \infty)$ spektrumunun iki katı olarak alınmasıdır.

$$\begin{aligned}n &= (-\infty, \infty) = (-\infty, 0) + (0, \infty) \\ &= 2(0, \infty)\end{aligned}$$

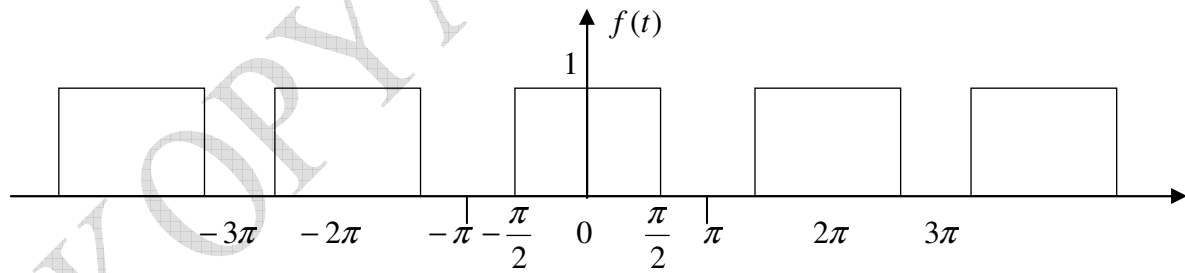
bunun bir çift fonksiyon özelliği olduğunu biliyoruz. İncelendiğinde ilgili örneklerden bu özelliği gözlemleyebilmekteyiz. Normal koşullarda çift bir fonksiyonun $n = (0, \infty)$ aralığında gösterimi, seriye ait toplam spektrumunun yarısının alınacağı anlamını ortaya çıkarmaktadır. Bu yüzden $2(0, \infty)$ düşüncesi bu eksikliği gidermektedir. Diğer yandan tek bir fonksiyon için $n = (0, \infty)$ alınmasının uygun olması, böyle bir fonksiyonun yalnızca pozitif $\omega > 0$ frekanslar için düşünülebileceği gibi bir durumu ortaya çıkarmaktadır. Oysa önceki bilgilerimizden $n = (-\infty, 0)$ aralığında $\omega < 0$ negatif frekansın alınması bilginin temsilinde gerçekte bir handikap veya eksiklik yaratmamaktadır. Örneğin $e^{j\omega t}$ işareti $\omega < 0$ için $e^{-j\omega t}$ olarak alındığında

$$\begin{aligned}e^{-j\omega t} &= e^{-j(-\omega)t} = \cos(-\omega)t + j\sin(-\omega)t \\ &= \cos \omega t - j\sin \omega t\end{aligned}$$

görüldüğü gibi aslında frekansın gerçekte negatif olduğu anlamına gelmemektedir. Bu nedenle tek fonksiyon yalnızca $n = (0, \infty)$ aralığı için seriye açılrsa da, seri sonucunun aslında $n = (-\infty, 0)$ aralığını da dikkate alacak şekilde iki kat şeklinde oluşturulması gerekmektedir. Diğer bir deyişle $n = (0, \infty)$ aralığı için var olan tek bir fonksiyon için duruma böyle yaklaşmamız gerekmektedir. Simetriden dolayı $n = (-\infty, 0)$ kısmını da dikkate alarak, spektrumun toplam iki kat olarak $2(0, \infty)$ gibi alınması gerekmektedir. Bu yaklaşım yalnızca $n = (0, \infty)$ aralığında ele alınan tek fonksiyon analizi için geçerlidir.

Örnek

Aşağıda verilen kare dalgaya ilişkin Fourier serisini eksponansiyel formda analizini yapınız.



Şekil 39 Periyodik darbe işaretinin Fourier serisi

Çözüm

Şekilden de görüldüğü gibi işaret $f(t) = 1$, $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ aralığında tanımlı ama periodu

$$[-\pi, \pi], \quad T_0 = 2\pi \quad \text{ve} \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = 1.$$

Seri periyodik olduğundan, Fourier serisi karşılığı olarak,

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n e^{jn\omega_0 t} \quad , \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

$$D_n = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$$

Period T_0 , $(-\pi/2, \pi/2)$, olarak düşünülürse, $T_0 = 2\pi$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{2\pi} = 1$$

$$\begin{aligned} D_n &= \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1) e^{-jn t} dt = \frac{1}{2\pi} \left[-\frac{1}{jn} e^{-jn t} \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = -\frac{1}{2jn\pi} \left[e^{-jn t} \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} \\ &= -\frac{1}{2jn\pi} \left[e^{-jn(\pi/2)} - e^{-jn(-\pi/2)} \right] = -\frac{1}{2jn\pi} \left[e^{-jn\pi/2} - e^{jn\pi/2} \right] = \frac{1}{2j\pi n} \left[e^{jn\pi/2} - e^{-jn\pi/2} \right] \\ &= \frac{1}{n\pi} \left[\frac{e^{jn\pi/2} - e^{-jn\pi/2}}{2j} \right] = \frac{1}{n\pi} \left[\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \right] = \frac{1 \times (1/2)}{n\pi \times (1/2)} \left[\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \right] \\ &= \frac{\frac{1}{2}}{\frac{n\pi}{2}} \left[\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \right] = \frac{\frac{1}{2} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{\frac{n\pi}{2}} = \frac{1}{2} \frac{\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{\frac{n\pi}{2}} \\ &= \frac{1}{2} \text{sinc}\left(\frac{n\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

$$D_n = \frac{1}{2} \text{sinc}\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

$n=0$ için, $\text{sinc}(0)=1$ olduğundan

$$D_0 = \frac{1}{2} \text{sinc}\left(\frac{0\pi}{2}\right) = \frac{1}{2} \text{sinc}(0) = \frac{1}{2}$$

$n=2,6,10,14,18,\dots$ için

$$D_n = \frac{1}{2} \text{sinc}\left(\frac{n\pi}{2}\right) = \frac{1}{2} \frac{\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{\frac{n\pi}{2}} = 0$$

$n=1,5,9,13,17,\dots$ için

$$D_n = \frac{1}{2} \text{sinc}\left(\frac{n\pi}{2}\right) = \frac{1}{2} \frac{\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{\frac{n\pi}{2}} = \frac{1}{n\pi}$$

$n=3,7,11,15,19,\dots$

$$D_n = \frac{1}{2} \sin c\left(\frac{n\pi}{2}\right) = \frac{1}{2} \frac{\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{\frac{n\pi}{2}} = -\frac{1}{n\pi}$$

$$D_0 = \frac{1}{2}, \quad D_n = \begin{cases} 0 & n = \text{çift} \\ \frac{1}{\pi n} & n = 1,5,9,13,\dots \\ -\frac{1}{\pi n} & n = 3,7,11,15,\dots \end{cases}$$

$$D_n = \frac{1}{2} \sin c\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

$$\theta = \begin{cases} 0 & n = \text{çift} \\ -\pi & n = \text{tek}, \quad n = 3,7,11,15,\dots \end{cases}$$

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n e^{jn\omega_0 t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2n\pi} \sin c\left(\frac{n\pi}{2}\right) e^{jn t} = \frac{1}{2n\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sin c\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \sin c\left(\frac{n\pi}{2}\right) \right) e^{jn t} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2n\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sin c\left(\frac{(4n-3)\pi}{2}\right) + \sin c\left(\frac{(4n-1)\pi}{2}\right) \right) e^{jn t} \end{aligned}$$

Eğer θ fazı da $\theta = \begin{cases} -\pi & n = \text{tek}, \quad n = 3,7,11,15,\dots \end{cases}$ için dikkate alınırsa,

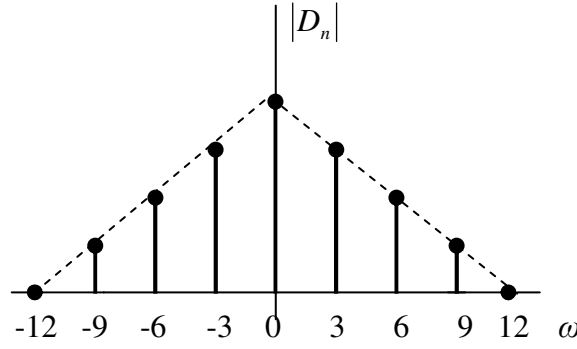
$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n e^{jn\omega_0 t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2n\pi} \sin c\left(\frac{n\pi}{2}\right) e^{jn t} = \frac{1}{2n\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sin c\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \sin c\left(\frac{n\pi}{2}\right) \right) e^{jn t} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2n\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sin c\left(\frac{(4n-3)\pi}{2}\right) + \sin c\left(\frac{(4n-1)\pi}{2} - \pi\right) \right) e^{jn t} \end{aligned}$$

elde edilir.

İşaret Band Genişliği

İşaretin enerjisinin belirli bir bölgede yoğunlaşması olarak tanımladığımız işaretin band genişliğinin, Fourier serisi ile yakından ilgisi vardır. Çünkü işaretin enerjisinin belirli bölgede yoğunlaşmasının sebebi, sahip olduğu frekanslar yani harmoniklerinin belirli bölgede yoğunlaşmasıdır.

Fourier spektrumu küçükten başlayarak gittikçe büyüyen harmoniklerden oluşan bir spektrum olduğundan, böyle bir spektrumun sahip olduğu en yüksek değerlikli harmonik ile en düşük değerlikli harmoniğinin arasındaki fark, band genişliği denen kavramı gündeme getirmektedir. Bu farkı oluşturan aralık aynı zamanda işaretin enerjisiyle de ilgili olup, işarete ait enerjinin yoğunlaştığı bölgeyi tanımlamaktadır. Böyle bir örnek Fourier spektrumu aşağıda ele alınmıştır. Bu spektrum işaretinin enerjisinin yoğunlaştığı bölgedir ve ayırık olup, her bir harmoniğin hangi C_n veya D_n büyüklüğünde olduğunu göstermektedir.



Şekil 40 Fourier spektrumu ve band genişliği

Şekilden bir işaretin band genişliği hakkında bazı fikirler edinebiliriz. Band genişliği frekansa bağlı bir kavram olup, işaretin frekans eksenindeki almış olduğu değerlerle belirlenir. Bu anlamda frekans ekseninde band genişliğini bulmamıza yarayacak $(-12, -9, -6, -3, 0, 3, 6, 9, 12)$ değerleri mevcuttur. $(-12$ ve $12)$ değerleri için frekanslar sıfır olduklarından bunlar dikkate alınmayacaklardır. Bu durumda $(-9, -6, -3, 0, 3, 6, 9)$ değerlerini göz önüne alacağız. Az önceki “negatif frekanslar” bahsinden biliyoruz ki, negatif frekansların fiziksel bir etkileri yok ve pozitif frekanslar olarak düşünülebilirler. Buna göre $(-9, -6, -3)$ gibi frekanslar $(9, 6, 3)$ olarak alınabilirler. Bu durumda değerlendirmeye alacağımız frekans eksenindeki değerler $(0, 3, 6, 9)$ değerlerinden oluşacaktır. Buna göre bu spektrumun en düşük frekans değeri 0, en yükseği ise 9 dur. Bu durumda band genişliği B ,

$$B = W = f_{\max} - f_{\min}$$

bağıntısına göre en yüksek ve en düşük frekanslar arasındaki fark olacaktır. Buna göre bizim örneğimizde

$$B = W = 9 - 0 = 9$$

dur. Band genişliğinin hesaplanmasında yapılan kabul şudur, işaretin enerjisinin toplandığı ve odaklandığı aralık göz önüne alınır ve bu enerji yoğunluğunu oluşturan aralık band genişliği olarak kabul edilir.

Hesaplamalarda bizim kullandığımız band genişliği olan B nin bu anlamda işaretin %95’nin yoğunlaştığı bölge kabul edilerek hesaplanır. Bu band genişliğine “*esas band genişliği*” (essential bandwidth) denilmektedir. Burada önemli olan şudur biz genellikle belli bir band da olan diğer deyişle **band sınırlı** (band limited) işaretlerin band genişliği ile ilgileniyoruz.

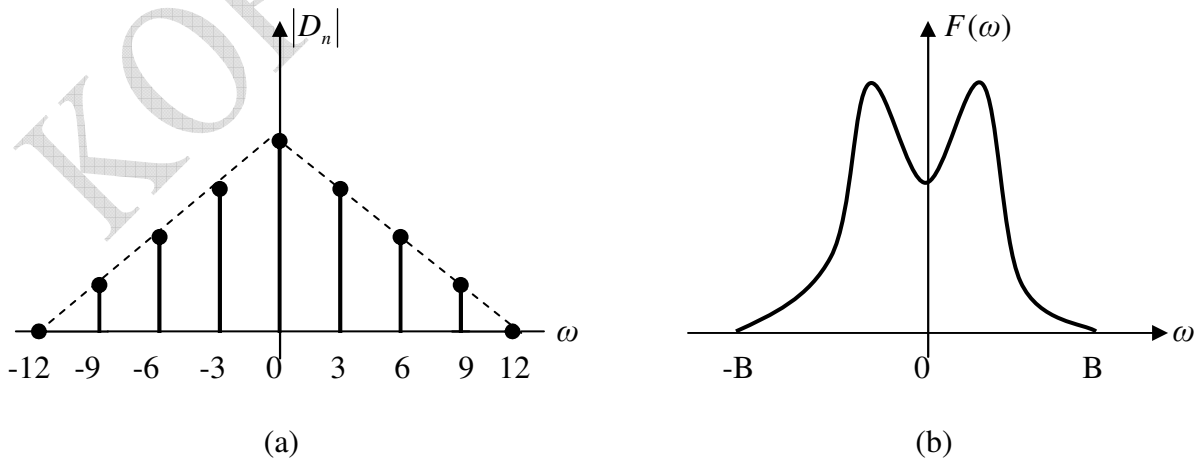
Band genişliği yaklaşımı, daha önce Fourier serisinin yakınsaması üzerine ele alınmıştı. Verilen orijinal fonksiyonun, Fourier serisine açılan fonksiyona eşit olması teorik açıdan bir beklentiye de, pratikte bunun mümkün olmadığını biliyoruz. Çünkü bunu sağlamak adına Fourier serisinde $(-\infty, \infty)$ aralığında sonsuz tane terim veya harmonik alınması gerekmektedir. Bunun pratik olarak fiziki koşullar da göz önüne alındığında gerçekleştirilebilirliği olmadığından, her zaman için Fourier serisi ile orijinal fonksiyon arasında küçükte olsa bir hata olacaktır. Bu hatanın olabildiğince fazla terim yani harmonik alınmasıyla bir ölçüde optimize edilmesi ancak mümkündür. Bundan dolayı Fourier serisi ile ilgili daima bir yakınsaklık söz konusu olacaktır. Bahsedilen aradaki farkın veya hata miktarının band genişliği ile açıklanabileceğini görmekteyiz.

Band genişliği belirli bölgedeki işaretin enerji yoğunlaşması olarak görülebileceğinden, söz konusu belirli bölge bile zaten işaretin frekansına dair tüm harmoniklerin veya terimlerin dikkate alınamayacağına dair önemli bir bulgudur. Bundan dolayı, band genişliğinden hareketle bile ideal işaretin, pratik işaretten her zaman için farklı olabileceğini düşünebiliriz. Bu yüzden bu durum Fourier serisinde de hata miktarı olarak görülmekte, ve bundan dolayı ancak Fourier serisinin gerçek işarete yakınsamasından bahsedilmektedir.

Band limitli işaretler

İşaretin band genişliği, işaretin enerjisinin belirli bölgede yoğunlaşması olarak tanımlanmaktadır. Bu yoğunlaşmayı, işaretin sahip olduğu frekanslar tarafından band genişliği kavramıyla açıklamıştık. İşaretin frekanslarının Fourier serisi ile ifade edilebilen harmoniklerden oluştuğu da izah edilmişti. Pratikte işaretin sonsuz tane frekansı dikkate alınamayacağından, veya $(-\infty, \infty)$ aralığında Fourier serisinin sonsuz harmoniği göz önüne alınamayacağından, daha dar hatta sınırlı bir bandda yoğunlaşan sınırlı işaretlerle çalışmak zorundayız. Belki orijinal işaretin band genişliği daha büyük olmasına rağmen, daha sınırlı bir bandın alınması bazı hatalara sebebiyet verse de, uygulama açısından ve de fiziki şartlar açısından bunu yapmak kaçınılmazdır. Bu yapılırken işaretin genel karakteristiğini bozmayacak optimum band genişliği esas alınır. Bu açıdan sınırlı banda sahip, band sınırlı olarak anılan işaretlerin analizleri önemlidir.

Band sınırlı işaretler, Fourier transformu veya güç spektrum yoğunluğu belirli frekansın üzerinde sıfır olan işaretlerdir. Diğer bir deyişle transformasyon veya güç spektrum yoğunluğu *sonlu desteğe* sahipse, işarete band sınırlı denir. Burada *sonlu destek* olarak kastedilen örneğin Eğer f fonksiyonu X kümesindeki bir alt fonksiyon $f(x)$ ise, bu fonksiyonunun çok sayıdaki sonlu sayıdaki x ($x \in X$) değeri için sıfır olması $f(x) = 0$ dır. Bunun anlamı aslında f fonksiyonu, X kümesinin alt kümesi olan Y kümesidir. Bu durumda $\{X/Y \subseteq \{0\}\}$ olur. Bunun da anlamı Y nin desteği demek $X - Y$ farkında sıfır olması demektir veya f fonksiyonu X de yer alan x değerleri için ($f(x)$) ve Y nin dışında sıfır demektir $f(x) = 0$. Aşağıda $(-9,9)$ arasında 18 band genişliğindeki ayırık ve $(-B,B)$ arasında $2B$ band genişliğinde ise sürekli formdaki band limitli işaretler verilmiştir.



Şekil 41 Band sınırlı işaret : (a): ayırık, (b): sürekli

Band sınırlı işaretler kesinlikle örneklerinden tekrar oluşturulabilirler. Bunun sağlanması için band sınırlı işaretin örneklenirken Nyquist örnekleme frekansı f_s olan

$$f_s = \frac{1}{T} \geq 2B$$

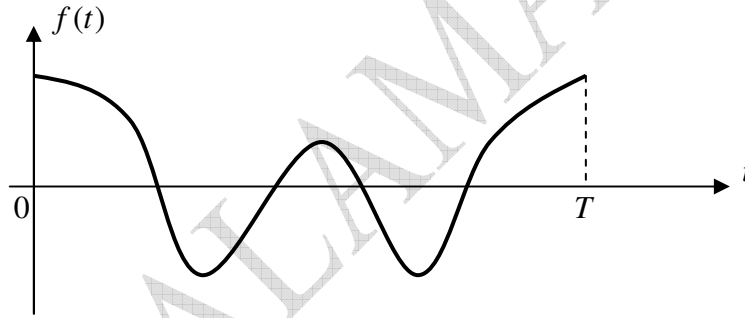
kriterine göre örneklenmesi gerekir. Band genişliği bilgi kapasitesinin hesaplanması açısından da önemlidir.

$$C = B \log_2 \left(1 + \frac{s}{N}\right)$$

C toplam bilgi kapasitesini, B band genişliğini, s işaret, N ise gürültüyü göstermektedir. Bu yolla bir haberleşme sisteminde toplam taşınacak bilgi miktarını belirlemek mümkündür.

Zaman limitli işaretler

Eğer bir $f(t)$ işareti aşağıdaki gibi davranış gösteriyorsa,



Şekil 42 Zaman sınırlı işaret

$(0, T)$ aralığında zaman limitli olup

$$f(t) = 0 \quad , \quad t < 0 \quad \text{ve} \quad t > T$$

koşullarını sağlaması gerekir. Başlangıçta frekans olarak band sınırlı analizler üzerine kurulu sistem ve işaretlerin günümüzde modern anlayış çerçevesinde daha ziyade zaman sınırlı işaretler üzerine yoğunlaştığı görülmektedir. Bu sebepten uygulamalarda “durum – uzay” (space-state) tabanlı model ve analizlerinin kullanılmakta olduğu gözlemlenmektedir.

Band – Zaman limitli işaretler

Son duruma göre, band limitli işaretlerin aynı zamanda zaman limitli olduğunu söyleyemeyiz. Çünkü işareti belirli zaman aralığında tutarak onun gerçek band limitli iddia etmek mümkün değildir. Band genişliği işaretin sonsuz aralıktaki değerinin göz önüne alınmasıyla hesaplanır ve bu durumda işaret sonsuz olsa bile, enerjisinin yinede belirli bölgede yoğunlaşması mümkündür. Aşağıdaki denklemde bu görüşü desteklemektedir.

$$F\{x(t)\} = X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

Görüldüğü gibi band sınırlı olduğu düşünülen $x(t)$ işaretinin $X(\omega)$ ile gösterilen frekans domeni, zamanın $t = (-\infty, \infty)$ gibi sonsuz yani sınırlı olmayan aralığı göz önüne alınarak elde edilmiştir. Bunun örnekleme teorisi ile de ispatı mümkündür. Belirli zaman aralığındaki işaretin örneklenmesi ile o işaretin örneklerinden tekrar elde edilmesi mümkün olmaz. Bundan dolayı bir işaret aynı anda hem band hem de zaman limitli olamaz. Bunun terside doğrudur. Öte yandan zaman limitli olan bir işaretin de band limitli olamayacağı da doğrudur. Bunu aşağıdaki denklemde de teyid edebiliriz.

$$x(t) = F^{-1}\{X(\omega)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{-j\omega t} d\omega$$

Görüldüğü gibi zaman sınırlı olduğu düşünülen $x(t)$ işaretinin, frekansın $\omega = (-\infty, \infty)$ gibi sonsuz yani sınırlı olmayan aralığı göz önüne alınarak elde edilmiştir. Bunların ayrıntıları Fourier transformasyonu bölümünde ele alınmıştır.

Parseval Teoremi

Parseval ismi, daima işaretlerin enerjisiyle yan yana anılan bir kavramdır. Bilindiği gibi Parseval teoremi olarak bilinen yaklaşım

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |x(f)|^2 df$$

denklemleri verilen, işaretin zaman domenindeki enerjisinin frekans domenindeki enerjine denk olacağı yönündedir. Bu işaret işlemede enerjinin sakınım kanununa da atıf yapan önemli bir tespit olup, ilk olarak Fransız matematikçi ve bilim adamı olarak 1800 lerde Parseval tarafından ortaya atılmıştır. Verilen denklemin evveliyatı, norm ve içsel çarpım (inner product) olarak vektör analiz tabanlı olup, aşağıdaki denklemden esinlenmektedir.

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t) \bar{y}(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) \bar{Y}(f) df$$

Eğer $x(t) \bar{y}(t)$ yerine $x(t) \bar{x}(t)$ alınırsa, enerji ifadelerinin elde edileceği görülür. Buna göre bir $f(t)$ işaretinin Parseval teoremine göre enerjisi

$$E_f = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt$$

Bu ifadenin Fourier serisi için nasıl yazılacağını araştıralım. Eğer Fourier serisi

$$1) f(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(n\omega_0 t + \theta_n)$$

ise bunun Parseval karşılığı

$$\begin{aligned} P_f &= \int_{-\infty}^{\infty} \left| C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(n\omega_0 t + \theta_n) \right|^2 dt \\ &= |C_0|^2 + \frac{1}{2} \left| \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(n\omega_0 t + \theta_n) \right|^2 \\ P_f &= C_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} C_n^2 \end{aligned}$$

Buna göre $f(t)$ olarak gösterilen Fourier serisinin enerjisi, seriyi oluşturan her bir harmoniğin enerjilerinin toplamından oluşmaktadır. Eğer Fourier serisi

$$2) f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega_0 t + \theta_n) + b_n \sin(n\omega_0 t + \theta_n)$$

yapısında ise bunun Parseval karşılığı da aşağıdaki gibi olacaktır.

$$E_f = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$$

kompleks Fourier serisi olarak

$$E_f = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = 2\pi \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2$$

veya,

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2$$

3) Eğer Fourier serisi

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n e^{jn\omega_0 t}$$

exponensiyel durumdaysa,

$$\begin{aligned} P_f &= \int_{-\infty}^{\infty} \left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n e^{jn\omega_0 t} \right|^2 dt \\ &= |D_0|^2 + \left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n e^{jn\omega_0 t} \right|^2 \end{aligned}$$

$$P_f = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |D_n e^{jn\omega_0 t}|^2 = |D_0|^2 + \sum_{n=-\infty}^{\infty} |D_n|^2 |e^{jn\omega_0 t}|^2$$

$$e^{jn\omega_0 t} = \cos n\omega t + j \sin n\omega t$$

$$|e^{jn\omega_0 t}| = \sqrt{\cos^2 n\omega t + \sin^2 n\omega t} = 1$$

$$|e^{jn\omega_0 t}| = 1$$

yerine yazılırsa Parseval yaklaşımıyla Fourier serisinin enerjisi

$$P_f = D_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} |D_n|^2$$

olarak bulunur.

Fourier Serisi ve Güç İşareti

Hatırlanacağı gibi, güç işaretleri

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt$$

denklemiyle tanımlanan periodik işaretler olup, enerjisi $E \rightarrow \infty$ ve aşağıdaki gibi tanımlanan ortalama gücü

$$P_{AV} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt$$

sıfırdan farklı ($P_{AV} \neq 0$) ve sonlu olan bir işaret idi. Bu açıdan periodik işaretler, tipik güç işaretleriydi. Dolayısıyla Fourier serisi ile gösterilen işaretler, n gücü aynı zamanda bir güç işaretine ait işaretin gücü olarak değerlendirilebilir.

Harmonik Distorsiyonun Hesaplanması

Daha önce Fourier serisinin başında orijinal sinüs serisindeki bozulmanın Fourier serisine ve işaret işlemeye olumlu katkıları olduğundan söz ettik. Aslında bu bozulmayı ayırd etmek gerekiyor. Eğer işaret işleme teknikleri ile bu bozulma sağlanıyorsa bu kontrollü bir proses olup, bunun sonucunda fayda numulmaktadır. Bunun dışında bir şekilde kontrolsüz olarak işaretin bozulması söz konusu ise, bunun dezavantajları söz konusu olacaktır. Bu istenmeyen durum için bozulmanın tesbiti ve sonrasında da giderilmesi gibi işlemlerle bozulmanın sebep olacağı riskler ve istenmeyen durumlar bertraf edilmelidir.

Bozulma dediğimiz gibi istenmeyen durumda örneğin elektrik (enerji) şebekelerinde olması gereken sinüs eğrisinin bir şekilde bozulmasıyla sanki bozulan şeklin birkaç harmoniğin toplamından oluştuğu gibi bir izlenim oluşmaktadır. Bunun evloerde ve işyerlerinde kullanılan çeşitli cihazlara zararları olabileceği gibi, tehlikeli kullanımlara varan riskler de oluşturabilmektedir.

Bunun yanında bilerekten ve kontrollü olarak orijinal bir şeklin başından, sonundan veya uçlarından keserek (kırparak) de bilinçli bozulmaya sebebiyet verebiliriz. Veya bir işaretin haberleşme veya iletim hatlarından taşınması durumunda gürültü veya diğer maruz kaldığı dış etkenlerden dolayı işaretle yine zayıflama veya aşırı yükselme gibi orijinalinden veya olması gerekenden farklı bir işaretle karşılaştığımızda, distorsiyonlu işaretin veya dalganın bozuk olduğuna karar veririz.

Artık biliyoruzki bozuk bir işaret, kendisini oluşturan harmoniklerden kaynaklanmaktadır. Harmonik bozulma olarak anılan bu istenmeyen durumların ölçümü mümkündür. Bu ölçüm yollarıyla bozulmaya hangi harmoniğin ne oranda etkisi olduğu hesaplanarak sorunun tesbiti ve giderilmesine katkı verilebilmektedir. Distorsiyonlu işarete sebep olan harmonik distorsiyonu hesaplamak için işaretin enerjisinden hareket edilmektedir. Eğer çıkıştaki işaret $x(t)$ ve buna ait çıkıştaki işaret $y(t)$ ise, bunların arasındaki fark, distorsiyonlu işareti $y_d(t)$ verecektir.

$$y_d(t) = x(t) - y(t)$$

Böylece distorsiyonlu bölümün enerjisi hesaplanabilir.

$$P_{yd} = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} |y_d(t)|^2 dt$$

Buradan bozulmaya sebep olan harmoniklere ait toplam enerjisi hesaplanır,

$$D_{top} = \frac{P_{yd}}{P_f} \times 100$$

Bulunan harmoniklere ait toplam enerjideki D_{top} her bir harmoniğin ne kadar payının olduğunu hesaplamak için de,

$$D_n = \frac{P_{D_n}}{P_f} \times 100$$

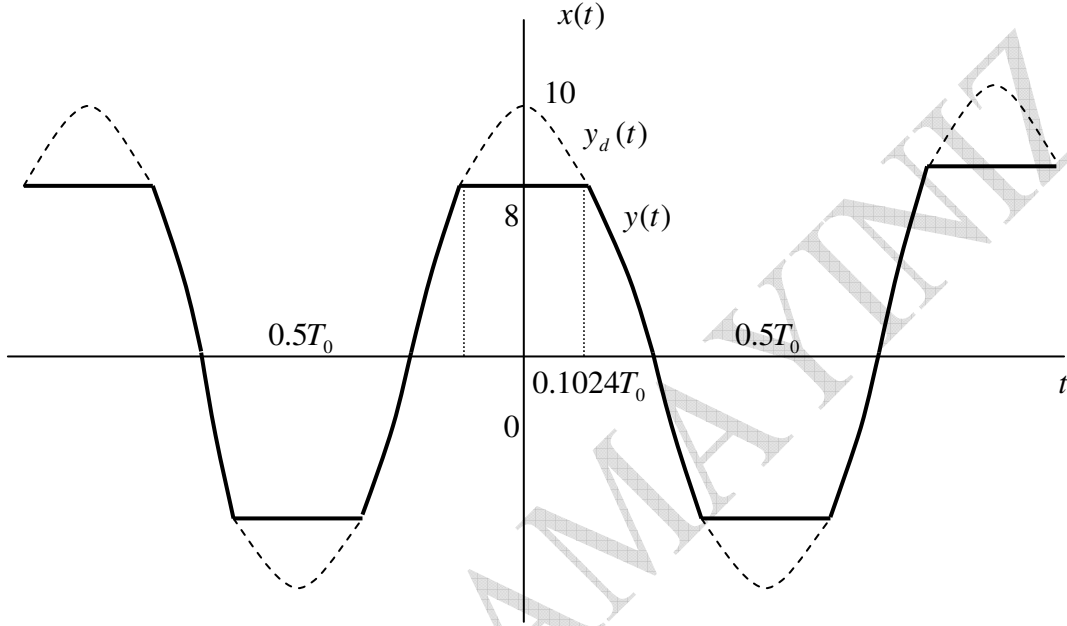
olarak hesaplanır.

Örnek

Giriş işareti $x(t) = 10\cos\omega_0 t$ olarak verilen bir işaret çıkışında ± 8 volt seviyesinden kırılırsa oluşan bozulmuş işarettaki harmoniklerin seviyesini hesaplayın.

Çözüm

$x(t) = 10\cos\omega_0 t$ işareti aşağıdaki gibidir.



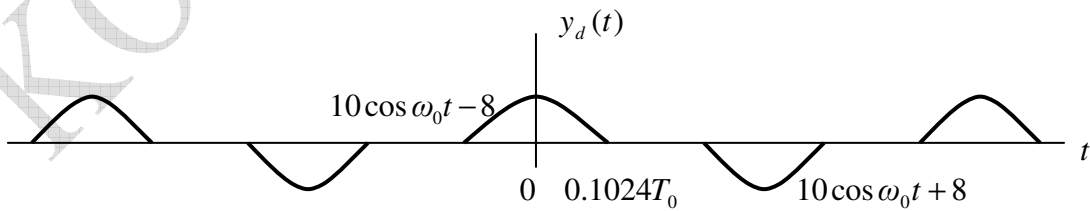
Şekil 43 Distorsiyonlu dalga : kırılmış $\cos\omega_0 t$ işareti

Görüldüğü gibi kırılan kısım $y_d(t)$ (kesik çizgili)

$$y_d(t) = x(t) - y(t)$$

$$y_d(t) = 10\cos\omega_0 t - 8$$

Buna göre $y_d(t)$ aşağıdaki gibi olacaktır.



Şekil 44 Distorsiyonlu işaretin kırılmış parçaları

Görüldüğü gibi kırılmış işaretin de değişimi çift fonksiyon gibidir. Buna göre $y_d(t)$ aşağıdaki gibi düzenlenir.

$$y_d(t) = \begin{cases} 10 \cos \omega_0 t - 8 & |t| \leq 0.1024 T_0 \\ 10 \cos \omega_0 t + 8 & \frac{T_0}{2} - 0.1024 T \leq |t| \leq \frac{T_0}{2} + 0.1024 T \\ 0 & \end{cases}$$

Bu fonksiyonun Fourier serisi için gerekli işlemler yapılır. $y_d(t)$ çift fonksiyon olduğu için $b_n = 0$ ve $C_n = a_n$ olur. Bu durumda Fourier serisi,

$$y_d(t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos n\omega_0 t$$

olur. Buradan C_n

$$C_n = \begin{cases} \frac{20}{\pi} \left[\frac{\sin 0.6435(n+1)}{n+1} + \frac{\sin 0.6435(n-1)}{n-1} \right] - \frac{32}{\pi} \left[\frac{\sin 0.6435n}{n} \right] & n = \text{tek} \\ 0 & n = \text{çift} \end{cases}$$

buradan seri,

$$y_d(t) = 1.04 \cos \omega_0 t + 0.733 \cos 3\omega_0 t + 0.311 \cos 5\omega_0 t + \dots$$

olarak hesaplanır.

$$\begin{aligned} P_{yd} &= \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} |y_d(t)|^2 dt \\ &= \frac{1}{T_0/4} \int_0^{T_0/4} y_d^2(t) dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_{yd} &= \frac{4}{T_0} \int_0^{0.1024T_0} (10 \cos \omega_0 t - 8)^2 dt \\ &= 0.865 \end{aligned}$$

Giriş işaretinin $x(t) = 10 \cos \omega_0 t$ enerjisi

$$P_f = \frac{10^2}{2} = 50$$

Buradan bozulmaya sebep olan harmoniklere ait toplam enerjisi hesaplanır,

$$D_{top} = \frac{P_{yd}}{P_f} \times 100$$

$$D_{top} = \frac{0.865}{50} \times 100 = \%1.73$$

Bulunan harmoniklere ait toplam enerjideki D_{top} her bir harmoniğin ne kadar payının olduğunu hesaplamak için de,

$$D_n = \frac{P_{D_n}}{P_f} \times 100$$

Bağıntısından yararlanılır. Buradan birinci ve üçüncü harmoniklere ait bozulmayı hesaplayalım. Birinci harmonik için,

$$P_{D_1} = \frac{(1.04)^2}{2} = 0.5408$$

$$D_1 = \frac{0.5408}{50} \times 100 = \%1.08$$

üçüncü harmonik için,

$$P_{D_3} = \frac{(0.726)^2}{2} = 0.2635$$

$$D_3 = \frac{0.2635}{50} \times 100 = \%0.527$$

Böylece toplam %1.73 lük bozulmanın %1.08 i birinci, %0.527 side üçüncü harmonikten gelmektedir. Sonuçta işaretin bozulan kısmı Fourier serisine açıldığı sürece, her bir harmoniğine ait bozulma rahatlıkla hesaplanabilir.

LINEAR ZAMANDAN BAĞIMSIZ SÜREKLİ SİSTEMLERİN PERIODİK GİRİŞLERE CEVABI

Şu ana kadar Fourier serisi altında detaylı gördüğümüz periodik formdaki işaretlerin sistem cevabını inceleyeceğiz. Periodik işaretlerin linear zamandan bağımsız sürekli (LTIC) sistemlerde oluşturduğu cevap araştırılacaktır. Bunun için özel bir üstel fonksiyon olan sonsuz özellikteki (everlasting) exponensiyel bir işareti giriş olarak düşüneceğiz. Bu giriş karşılık sistemin cevabını bulmaya çalışacağız. Çünkü sinusoid işaretler bir tür exponensiyel işaret formunda olduğundan ve bu tür işaretler tarafından yapılan girişlerin oluşturduğu bir sistem cevabı varsa, bu kez de sonsuz exponensiyel olarak andığımız benzer formdaki fonksiyonunda LTI sistemler tarafından oluşturulacak bir çıkışı olduğunu düşünüyoruz. Sözü geçen sonsuz exponensiyel işaretimiz (everlasting işaret),

$$e^{st}$$

formundadır. Bu şekilde tanımlanan işaretlere everlasting işaret (sonsuz desüren) denilmektedir. Bu tür işaretlerin tanım aralıkları $(-\infty, \infty)$ aralığında olduğundan, tipik periodik işareti çağrıştırmaktadır. Bu nedenle bu bölümde, Fourier serisi ile ele alınmaya oldukça uygun bir işarettir. Bahsedildiği gibi bu işaretin özelliği zaman değişkeninin $t = -\infty$ dan başlamasından yani periodik oluşundan gelmektedir. Bu vesileyle girişi sinusoid olan LTI sistemlerin cevabı araştırılmaktadır. Eğer sistem impuls cevabı $h(t)$ ve girişi e^{st} ise sistem toplam çıkışı $y(t)$

$$y(t) = h(t) * e^{st} = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{s(t-\tau)} d\tau$$

e^{st} fonksiyonunun özelliğinden dolayı burada “ s ” sabit durumundadır. İfade biraz düzenlenirse,

$$y(t) = e^{st} \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-s\tau} d\tau$$

$$H(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-s\tau} d\tau$$

Burada bahsettiğimiz gibi “ s ” in değerleri için $H(s)$ transfer fonksiyonu sabit (reel veya kompleks) gibi davranmaktadır. Bu yüzden $H(s)$ fonksiyonu vektörel yaklaşımla, özdeğer (eigenvalue) olarak düşünülebilir.

$$y(t) = H(s) e^{st}$$

Bu yazımda “ s ” in kompleks değişken değeri için $H(s)$ transfer fonksiyonu olarak anılmaktadır. Bu durumda giriş işareti olarak $f(t)$ nin

$$f(t) = e^{st}$$

alınması durumunda transfer fonksiyonu,

$$H(s) = \frac{y(t)}{f(t)}$$

olacaktır. Bu yazım yalnızca LTIC sistemler için geçerli olacaktır, linear olmayan sistemler için geçerli değildir. Bu durumu Fourier serisine uyarlırsak,

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n e^{jn\omega_0 t}$$

Biliyoruz ki, giriş $f(t) = e^{st}$ için çıkış,

$$y(t) = H(s) e^{st}$$

idi. Bu yaklaşımı frekansa göre yazarsak girişte e^{st} yerine $e^{j\omega t}$ buna uygun olarak da $H(s) e^{st}$ çıkış yerine de $H(j\omega) e^{j\omega t}$ alınacağından

$$\underbrace{e^{j\omega t}}_{\text{giriş}} = \underbrace{H(j\omega) e^{j\omega t}}_{\text{çıkış}}$$

elde edilir. Buna göre,

$$\underbrace{\sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n e^{jn\omega_0 t}}_{\text{giriş}} = \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n H(jn\omega_0 t) e^{jn\omega_0 t}}_{\text{cevap}}$$

olacaktır. Böylece periodik bir giriş

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n e^{jn\omega_0 t}, \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

için LTIC sistem cevabı olarak

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n H(jn\omega_0 t) e^{jn\omega_0 t}$$

elde edilecektir. $H(jn\omega_0 t)$ nin sistem transfer fonksiyonu olduğu düşünülürse, periodik LTIC sistem için

$$H(jn\omega_0 t) = \frac{y(t)}{\sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n e^{jn\omega_0 t}}$$

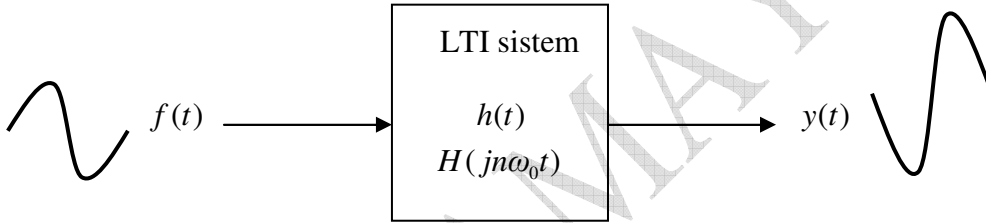
Bunların sonucunda gerek elde edilen

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n H(jn\omega_0 t) e^{jn\omega_0 t}$$

gerekse

$$H(jn\omega_0 t) = \frac{y(t)}{\sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n e^{jn\omega_0 t}}$$

ifadelerinden girişi sinusoid olan sistemin çıkışı veya transfer fonksiyonu da sinusoid özellikte elde edilmiştir. Ancak dikkat edilirse, çıkış girişiyle aynı frekansta olmasına rağmen, farklı genlik ve fazda oluşabilmektedir. Bu girişi sinusoid olan sistemlerin frekans cevaplarının önemli özelliğidir. Bunu aşağıdaki şekilden de teyit edebiliriz.



Şekil 45 LTI Sistemin $f(t) = e^{st}$ sinusoid işarete sinusoid cevabı

Bu, tipik sistem özelliklerini içeren filtrelerin tasarımında önemlidir. Filtreler bu şekilde girişi sinusoid olan sistemin bu giriş vereceği cevabın hesaplanması üzerine kurulu, sistem frekans cevabı prensibine göre alçak geçiren, yüksek geçiren, band geçiren ve band durduran özelliğinde tasarlanırlar.

SÜREKLİ FOURIER SERİSİNİN ÖZELLİKLERİ

$f(t)$ Fourier serisinin

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n e^{jn\omega_0 t}$$

D_n katsayıları elde edildiğini biliyoruz.

$$f(t) \xrightarrow{FS} D_n$$

Detaylarıyla ele alınan Fourier serisinin sistem açısından önemli olan bazı özellikleri aşağıda ele alınmıştır.

Lineerlik

$x(t)$ ve $y(t)$ T_0 periodlu fonksiyonlar ve a_n ve b_n de bunların ilgili Fourier seri katsayıları ise,

$$x(t) \xrightarrow{FS} a_n$$

$$y(t) \xrightarrow{FS} b_n$$

bu fonksiyonların linear olması için çıkışın $z(t)$,

$$z(t) = c_1 x(t) + c_2 y(t)$$

olması gerekir.

$$c_1 x(t) + c_2 y(t) \xrightarrow{FS} c_1 a_n + c_2 b_n$$

Zaman öteleme (time shifting)

$$f(t) \xrightarrow{FS} D_n$$

$$\begin{aligned} f(t - t_0) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n e^{jn\omega_0(t-t_0)} \\ &= e^{-jn\omega_0 t_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n e^{jn\omega_0 t} \\ &= e^{-jn\omega_0 t_0} f(t) \end{aligned}$$

$$f(t - t_0) \xrightarrow{FS} e^{-jn\omega_0 t_0} D_n$$

Zaman tersleme (time reversal)

$$f(t) \xrightarrow{FS} D_n$$

$$\begin{aligned} f(-t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n e^{jn\omega_0(-t)} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n e^{jn(-\omega_0)t} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_{-n} e^{jn\omega_0 t} \end{aligned}$$

$$f(-t) \xrightarrow{FS} D_{-n}$$

Görüldüğü gibi, $f(-t)$ için seride negatif frekansların $(-\omega_0)$ göz önüne alınacağı görülmektedir. Daha önceki bilgilerimizden biliyoruz ki negatif frekansların sistem cevabı üzerinde bir etkisi yoktur

$$|D_n| = |D_{-n}|$$

ve yalnızca seri katsayısı terslenmektedir.

Zaman ölçekleme (time scaling)

$$f(t) \xrightarrow{FS} D_n$$

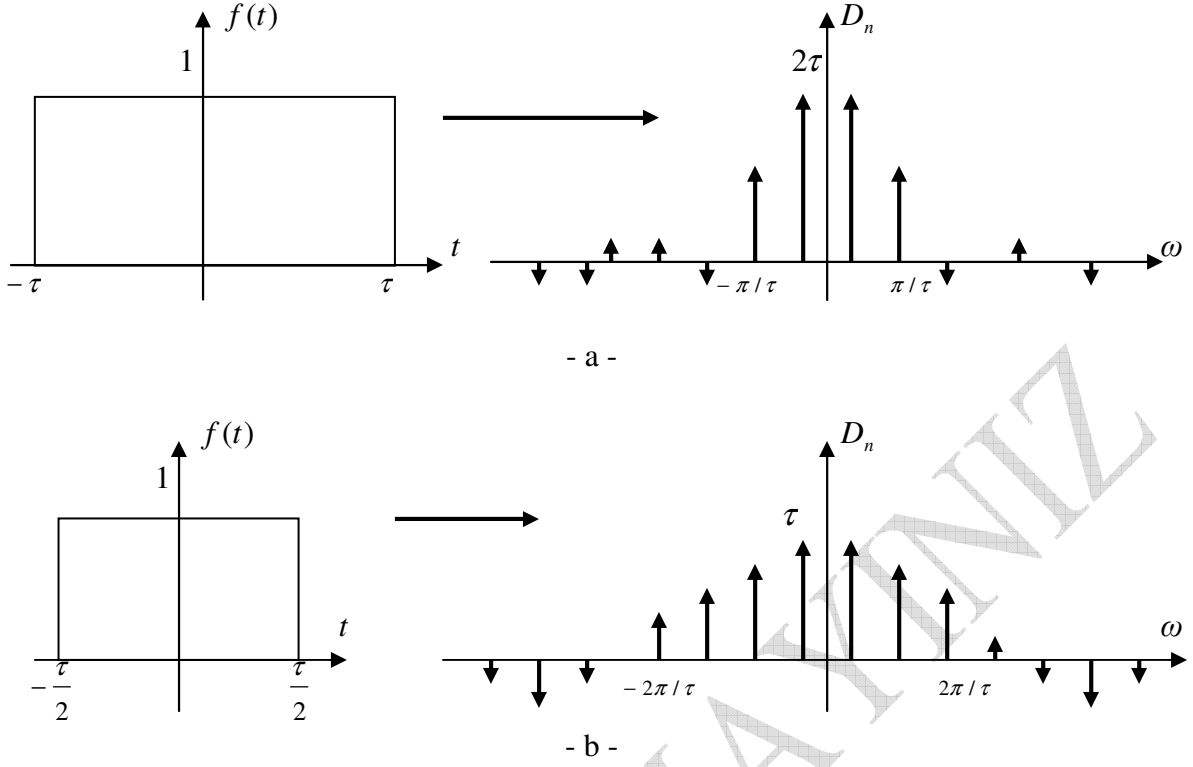
$$\begin{aligned} f(\alpha t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n e^{jn\omega_0(\alpha t)} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n e^{jn(\alpha\omega_0)t} \end{aligned}$$

Görüldüğü gibi Fourier serisindeki $t = \alpha t$ durumu aslında işaretin temel frekansını “ α ” kadar $\alpha\omega_0$ değiştirmektedir. Ancak serinin katsayıları görüldüğü gibi bu değişiklikten etkilenmemektedir. Bu yaklaşımdan sonuçta direkt olarak işaretin periodu etkilendiğini söyleyebiliriz. Temel period $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$ yerine $T_0 = \frac{2\pi}{\alpha\omega_0}$ ifadesi ile $\alpha > 1$ durumunda daha

da küçülmektedir. Sonuçta işaret zaman domeninde daha yoğun ve sıkışık bir görüntü almaya başlar. Bu nedenle α , sıkıştırma faktörü olarak düşünülebilir. Çünkü bir bakıma zaman domenindeki $f(t)$ işareti bu faktörle beraber $f(\alpha t)$ şeklinde sıkışmaktadır (compressing).

Bu sonuç temel frekansın $T_0 = \frac{2\pi}{\alpha\omega_0}$ ile daralmasıyla oluşmaktadır. Bu daralma sonucu aynı

period içine daha fazla ekstra harmonikler girecektir (dahil olacaktır). Daha fazla harmoniğin dahil olmasıyla Fourier spektrumu bu anlamda genişleyecektir. Yani zaman domenindeki sıkışmaya karşın, spektrumda bir genişleme söz konusu olacaktır. Durumu aşağıdaki gibi düşünebiliriz.



Şekil 46 Fourier serisinin ölçekleme özelliği

Görüldüğü gibi (a) daki zaman domeninde $(-\tau, \tau)$ aralığındaki işareti, (b) deki gibi $(-\tau/2, \tau/2)$ yarı aralığa düşürülmesine rağmen, spektrumu aynı oranda artış göstermiştir. Bu artış spektruma daha fazla bileşenin (harmoniğin) katılımıyla açıklanabilir. Zaman domenindeki sıkışmanın, frekans domenindeki spektrum genişlemesi olarak algılanmasını, aşağıdaki yaklaşımdan da gösterebiliriz.

$$f(\alpha t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n e^{jn(\alpha \omega_0)t}$$

$$D_n = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} f(t) e^{-jn \omega_0 t} dt$$

buradan aşağıdaki bağıntı yazılabilir.

$$D_n = \frac{1}{T_0} F(n \omega_0)$$

eğer $t = \alpha t$ alınırsa

$$D_n = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} f(\alpha t) e^{-jn \omega_0 t} dt$$

$$u = \alpha t$$

$$dt = \frac{du}{\alpha}$$

$$D_n = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} f(u) e^{-jn \omega_0 \frac{u}{\alpha}} \frac{du}{\alpha}$$

$$= \frac{1}{\alpha T_0} \int_{T_0} f(u) e^{-jn \frac{\omega_0}{\alpha} u} du$$

bu kez yukarıda yazılan $D_n = \frac{1}{T_0} F(n \omega_0)$ ifadesi aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$D_n = \frac{1}{\alpha T_0} F(n \frac{\omega_0}{\alpha})$$

Buradan zaman domenindeki işaretin α faktörüyle sıkışmasına karşın D_n spektrumunun $F(n \frac{\omega_0}{\alpha})$ ifadesine bağlı olarak $\frac{\omega_0}{\alpha}$ ile genişlediğini görmekteyiz. Buradan zaman ve frekans domenleri arasında sanki

$$\alpha t \leftrightarrow \frac{\omega_0}{\alpha}$$

αt = zaman domeninde sıkışma (compressing)

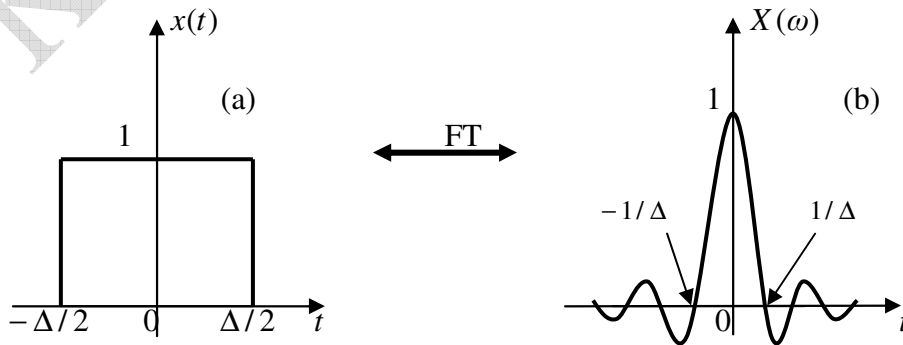
$\frac{\omega_0}{\alpha}$ = frekans domeninde genişleme (expanding)

gibi ters yönlü bir bağıntının olduğu ortaya çıkmaktadır. Yani **zaman domenindeki sıkışma, frekans domenindeki genişlemeye denktir**. Yukarıda verilen örnek şekiller de bunu teyit eder özelliğindedir. Ayrıca ele alınan $D_n = \frac{1}{\alpha T_0} F(n \frac{\omega_0}{\alpha})$ ifadesinin başlangıçtaki T periodu T_0

yani $T = T_0$, sonrada $T = \alpha T_0$ şeklinde artırılması halinde ($\alpha > 1$), bu değerin çok büyük veya $T = \infty$ sonsuz olması halinde çok özel bir spektrum ortaya çıkmaktadır ki, bu durumda ayırık olan Fourier serisinin spektrumu, sürekli hale dönüşmekte $[D_n \rightarrow F(\omega)]$, ve bu dönüşümü sağlayan yaklaşım da **Fourier transformasyonu** olarak anılır ki, bu yöntemi bir sonraki bölümde ayrıntılarıyla ele alacağız.

Zaman Domenindeki Sıkışma-Frekans Domenindeki Genleşme

Yukarıda Fourier serisi spektrumu için öne sürülen görüşleri alternatif olarak Fourier Transformasyonu (FT) yoluyla da gözlemlememiz mümkündür.



Şekil 47 $x(t)$ - $X(\omega)$ Fourier transformasyonu ve işaret spektrumu

Şekilden Δ genişliğinde bir dikdörtgen $x(t)$ işareti ile bunun frekans içeriğini gösteren $X(\omega)$ spektrumuna, Fourier transformasyonu (FT) gereği bakıldığında verilen,

$$x(t) = \text{rect}\left(\frac{t}{\Delta}\right) \leftrightarrow X(\omega) = \Delta \sin c\left(\frac{\omega\Delta}{2}\right)$$

dönüşüm denklemi gereği şekil (a) ve (b) nin oluştuklarını görmekteyiz. Buna göre şekil (a) daki $\Delta \rightarrow 0$ limit hali için yani darbe genişliğinin zaman domeninde yeterince dar alınması durumunda frekans domeninde $(1/\Delta) \rightarrow \infty$ olduğu görülecektir. Bunun anlamı, zaman domeninde dar alınan bir işaretin frekans veya band genişliği sonsuz olabilecektir. Öte yandan eğer $\Delta \rightarrow \infty$ olarak darbe oldukça geniş alınırsa bu kez frekans domeni $(1/\Delta) \rightarrow 0$ olarak sıfır band genişliğinde oluşacaktır. Buna göre zaman domeni ile frekans domeninin ters orantılı olarak çalıştığını görmekteyiz. Buradan, zaman domeninde $\Delta \rightarrow 0$ için $x(t) = \delta(t)$ ve $X(\omega) = 1$

olarak zaman domeninde genişliği oldukça dar olan $x(t) = \delta(t)$ biçiminde impuls fonksiyonunun ve frekans domeni olarak da sonsuz band anlamına gelen $X(\omega) = 1$ fonksiyonunun söz konusu olduğunu görmekteyiz. Diğer yandan

$$\Delta \rightarrow \infty \text{ için } x(t) = 1 \text{ ve } X(\omega) = \delta(\omega)$$

olarak zaman domeninde genişliği nerdeyse sonsuz olan $x(t) = 1$ biçiminde impuls fonksiyonunun ve frekans domeni olarak da çok dar bir banda karşılık gelen $X(\omega) = \delta(\omega)$ fonksiyonunun söz konusu olduğunu görmekteyiz.

Eşlenik ve simetrik eşlenik

Zaman tersleme özelliğinden biliyoruz ki,

$$|D_n| = |D_{-n}|$$

$$f(-t) \xrightarrow{FS} D_{-n}$$

Eşlenik durumunu göz önüne alırsak,

$$f^*(t) \xrightarrow{FS} D_{-n}^*$$

$$D_{-n} \xrightarrow{FS} D_{-n}^*$$