İşaret ve Sistemler

Ders 12: Z Dönüşümleri

Giriş

- Ayrık zamanlı işaret ve sistemlerin z-dönüşümü analizi ele alınacaktır.
- Doğrusal zamanla değişmez ayrık zamanlı sistemlerin transfer fonksiyonu tanıtılarak, işaret ve sistemler için z-dönüşümü tanımlanmaktadır.
- Bir dizi için z dönüşümünün hesaplanması
- Z-dönüşümünün yakınsaklık bölgesi, kutup ve sıfırlar tanıtılacaktır.

z-Dönüşümü

- Fourier Dönüşümünün genelleştirilmesidir.
- Çünkü Fourier Dönüşümü pek çok işaret için hesaplanamaz!
- Çoğu durumda z-dönüşümünü hesaplamak daha uygundur.
- Tanımı:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n}$$

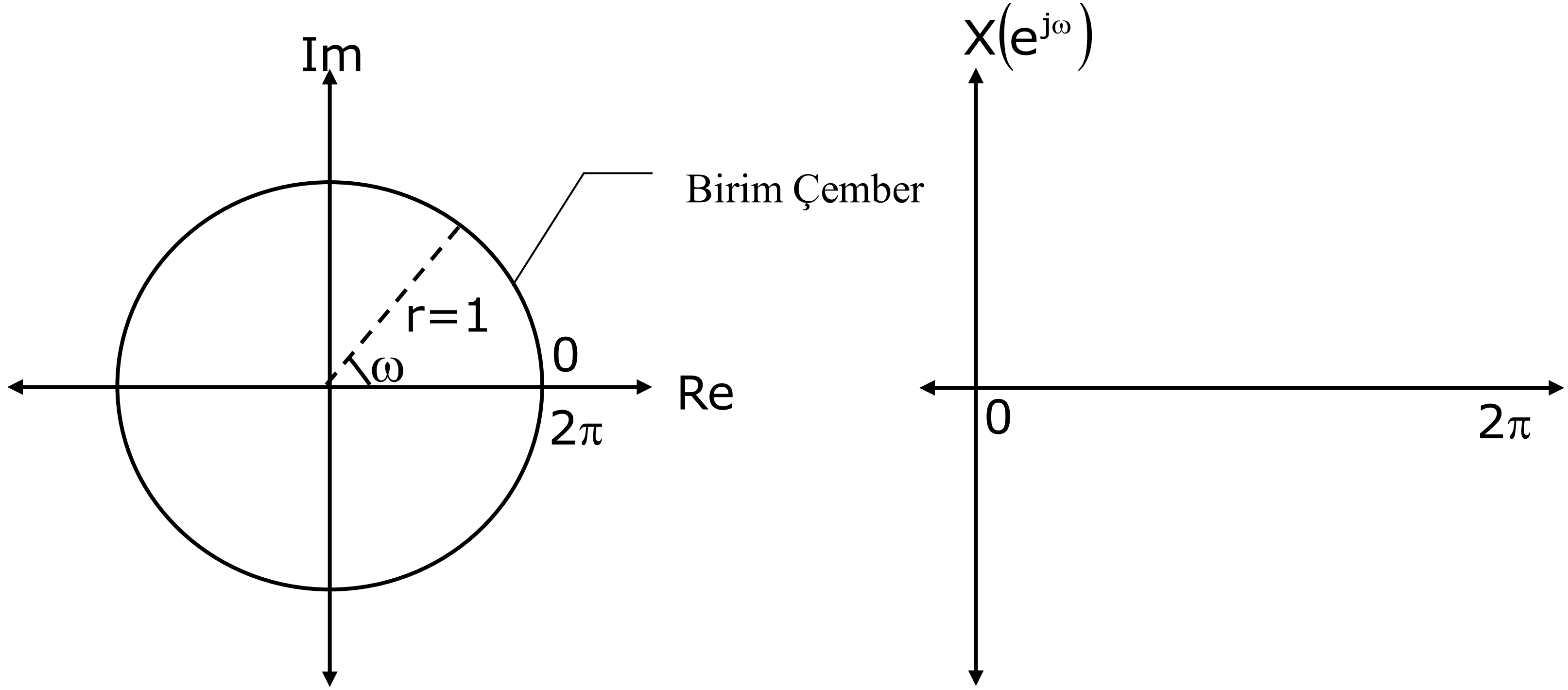
- DTFT (Ayrık Zaman FT) tanımıyla karşılaştırırsak:

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n}$$

- z karmaşık bir değişkendir, $z=r.e^{j\omega}$
- Eğer $z=e^{j\omega}$ yerine konulursa, z-dönüşümü DTFT'ye dönüşür.

z-Dönüşümü

- z-dönüşümü karmaşık z değişkeninin bir fonksiyonudur.
- Karmaşık z-düzlemi üstünde gösterilmeye uygundur.
- Eğer $\omega=0\text{-}2\pi$ aralığında $z=e^{j\omega}$ çizilirse, birim çember (unit circle) elde edilir.



z-Dönüşümü

- x[n] işaretinin nedensel olduğu durumlarda x[n]=0, n<0 olduğundan, işaretin z dönüşümü

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x[n] z^{-n}$$

olmaktadır.

Örnek 12.1

- x(n)=δ(n) dizisinin z–dönüşümünü bulunuz.
  - Doğrudan z-dönüşümünün tanımı kullanılarak, x(n) =δ (n) işaretinin z-dönüşümü

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[n] z^{-n} = \delta[0] z^{0} = 1$$

olarak bulunmaktadır.

Örnek 12.2

- x(n)=u(n) dizisinin z–dönüşümünü bulunuz.

$$X(z)=\sum_{n=0}^{\infty} u(n)z^{-n}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(z^{-1}\right)^{n}=1+\left(z^{-1}\right)+\left(z^{-1}\right)^{2}+\ldots.$$

$$1+r+r^2+\ldots=\frac{1}{1-r} \text{ when } |r|<1$$

$$X(z)=\frac{1}{1-z^{-1}}=\frac{1}{1-\frac{1}{z}}=\frac{z}{z-1} \qquad \left|z^{-1}\right|<1 \Rightarrow |z|>1$$

Örnek 12.3

- Sağ taraflı üstel x(n) =a^n u(n) dizisinin z–dönüşümünü bulunuz.

$$X(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a^n u(n) z^{-n}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(az^{-1}\right)^n=1+\left(az^{-1}\right)+\left(az^{-1}\right)^2+\ldots.$$

  - Bu yüzden,

$$X(z)=\frac{1}{1-az^{-1}}=\frac{1}{1-\frac{a}{z}}=\frac{z}{z-a} \qquad \left|az^{-1}\right|<1 \Rightarrow |z|>a$$

Örnek 12.4

- Sol taraflı bir diziye örnek olarak aşağıdaki dizi ele alınırsa,

$$x(n) = \begin{cases} 0 & n \geq 0 \\ -b^n & n \leq -1 \end{cases}$$

- x(n)'nin z-dönüşümü için aşağıdaki ifade yazılabilir.

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} -b^n.z^{-n} = \sum_{n=1}^{\infty} -b^{-n}.z^n = 1 - \sum_{n=0}^{\infty} b^{-n}.z^n = 1 - \sum_{n=0}^{\infty} (b^{-1}.z)^n$$

$$X(z) = 1 - \frac{1}{1-b^{-1}z} = \frac{-b^{-1}z}{1-b^{-1}z} = \frac{z}{-b+z} = \frac{z}{z-b} \qquad \left|b^{-1}z\right| < 1 \Rightarrow |z| < b$$

Yakınsaklık Bölgesi

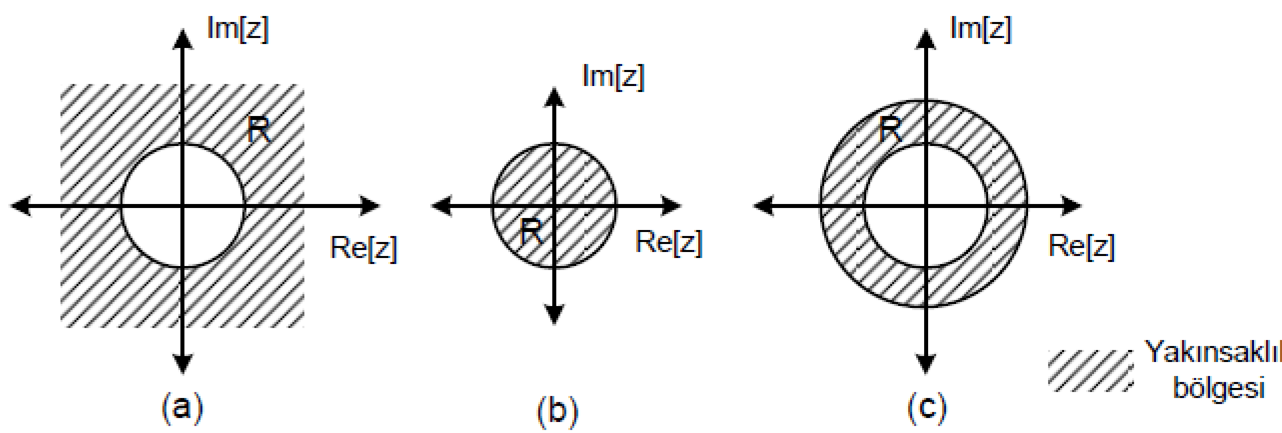
- Belirli bir x[n] işaretinin z-dönüşümünün hesaplanabildiği ve sonlu X(z) değerlerinin elde edildiği z değerleri aralığı yakınsaklık bölgesi olarak adlandırılır.
- Bir işaretin z-dönüşümünün sonlu olması için

$$\left|X(z)\right| = \left|\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n}\right| = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|x[n]z^{-n}\right| < \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|x[n]\right|\left|z^{-n}\right| < \infty$$

olmalıdır.

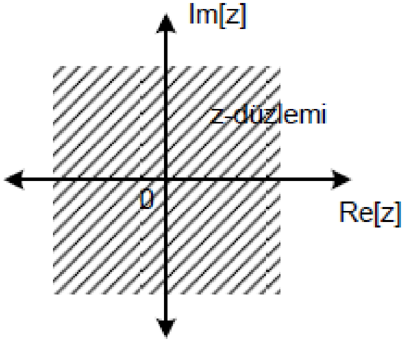
Yakınsaklık Bölgesi

- Yakınsaklık bölgesi, karmaşık sayı düzleminde çemberler şeklinde oluşmaktadır.

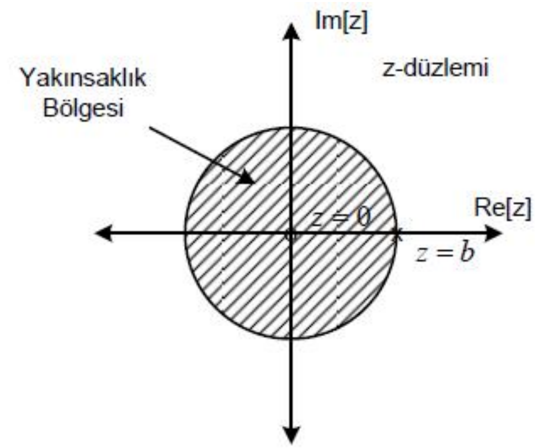


$|z|>a$ $|z|<a$ $a<|z|<b$

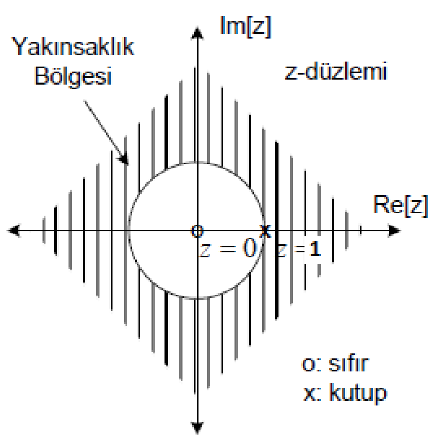
Yakınsaklık Bölgesi



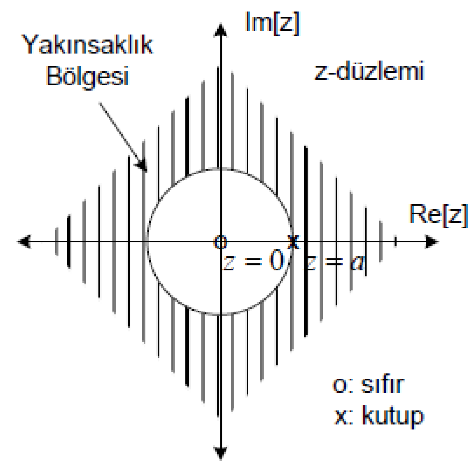
$x(n) = \delta(n)$ birim impuls dizisi için yakınsaklık bölgesi



$x(n) = -b^n u(-n-1)$ dizisi için sıfır-kutup diyagramı ve yakınsaklık bölgesi



$x(n) = u(n)$ dizisi için sıfır-kutup diyagramı ve yakınsaklık bölgesi



$x(n) = a^n u(n)$ dizisi için sıfır-kutup diyagramı ve yakınsaklık bölgesi

Yakınsaklık Bölgesi

- İki taraflı diziye örnek olarak

$$x(n) = \begin{cases} a^n & n \geq 0 \\ -b^n & n < 0 \end{cases}$$

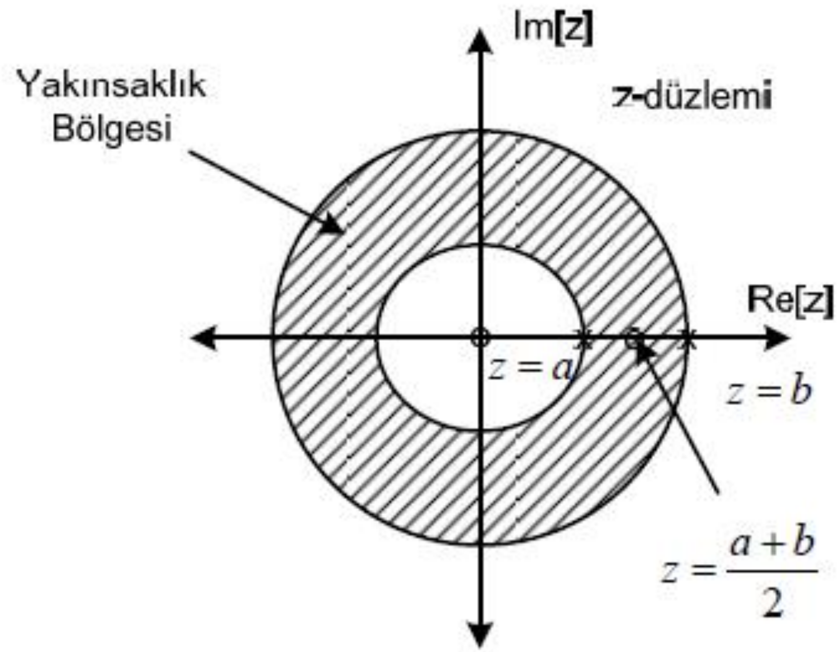
- dizisinin z-dönüşümünü bulalım.

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n).z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{-1} -b^n.z^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} a^n.z^{-n}$$

$$X(z) = \frac{z}{z-b} + \frac{z}{z-a} = \frac{z(2z-a-b)}{(z-a).(z-b)}$$

$|a| < |z| < |b|$ yakınsaklık bölgesidir.

Yakınsaklık Bölgesi



$x(n) = a^n u(n) - b^n u(-n-1)$ dizisi için sıfır-kutup diyagramı ve yakınsaklık bölgesi

Yakınsaklık Bölgesinin Özellikleri

- Yakınsaklık bölgesi z-düzlemindeki bir halka veya disk şeklindedir.
- x[n]’in Fourier dönüşümü, sadece x[n]’in yakınsaklık bölgesi birim çemberi kapsadığı taktirde hesaplanabilmektedir.
- Yakınsaklık bölgesi kutupları kapsayamaz.
- x[n] sınırlı uzunlukta bir dizi ise, yani x[n] herhangi bir $N1<n<N2$ aralığının dışında sıfır ise, yakınsaklık bölgesi tüm z bölgesidir.

Yakınsaklık Bölgesinin Özellikleri

- x[n] sağ taraflı bir dizi ise, yani x[n] dizisi herhangi bir $n<N1$ için sıfır değerinde ise, yakınsaklık bölgesi en dıştaki kutuptan dışarıya doğrudur. ($z=\infty$ dahil olabilir.)
- x[n] sol taraflı bir dizi ise, yani x[n] dizisi herhangi bir $n>N2$ için sıfır değerinde ise, yakınsaklık bölgesi en içteki kutuptan içeriye doğrudur. ($z=0$ dahil olabilir.)

Yakınsaklık Bölgesinin Özellikleri

- x[n] çift taraflı bir dizi ise, yani x[n] sonsuz uzunlukta bir dizi ise, yakınsaklık bölgesi içten ve dıştan bir kutup ile sınırlandırılmış bir halka şeklinde olmaktadır.
- Yakınsaklık bölgesi mutlaka bağlantılı olmalıdır.

z-Dönüşümünün Özellikleri

- Doğrusallık:
  - $x_1(n)$ ve $x_2(n)$ herhangi iki dizi ve z-dönüşümleri

$$Z[x_1(n)] = X_1(z) \qquad Z[x_2(n)] = X_2(z)$$

olarak verilsin. a ve b herhangi iki sabit katsayı olmak üzere aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$X_3(z) = Z[ax_1(n) + bx_2(n)] = aX_1(z) + bX_2(z) \qquad R.O.C._1 \cap R.O.C._2$$

$$Z[ax_1(n) + bx_2(n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [ax_1(n) + bx_2(n)]z^{-n} = a\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1(n)z^{-n} + b\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_2(n)z^{-n}$$

$$= aX_1(z) + bX_2(z)$$

Örnek 12.5

$x[n]=\left(0.5^{n}+2\right)u[n]$ işaretinin z-dönüşümünü bulunuz.

$x[n]=\left(0.5^{n}+2\right)u[n]$ $\quad x[n]=0.5^{n}u[n]+2u[n]$ olarak yazıldığı taktirde $0.5^{n}u[n]$ ve $u[n]$ dizilerinin doğrusal birleşimi şeklinde oluşmaktadır. Z-dönüşümünün doğrusallık özelliği kullanılarak işaretin z-dönüşümü

$$X(z)=\underbrace{\frac{1}{1-0.5z^{-1}}}_{R.O.C:|z|>0.5}+2\underbrace{\frac{1}{1-z^{-1}}}_{R.O.C:|z|>1}$$

olarak bulunmaktadır.

Yakınsaklık bölgesi her iki işaretin yakınsaklık bölgesinin kesişimi olmaktadır. Bu nedenle işaretin z-dönüşümü

$$X(z)=\frac{1}{1-0.5z^{-1}}+2\frac{1}{1-z^{-1}} \qquad R.O.C:|z|>1$$

z-Dönüşümünün Özellikleri

- Öteleme:
  - A) $Z[x(n+m)] = z^{m}X(z)$
  - Eğer x(n) dizisi sağ taraflı ise, yani n<0 için x(n)=0 olursa, pozitif m tamsayısı için aşağıdaki özelliklerin bulunduğu gösterilebilir.
  - B) $Z[x(n+m)] = z^{m}\left\{X(z) - \sum_{k=0}^{m-1} x(k)z^{-k}\right\}$
  - C) $Z[x(n-m)] = z^{-m}X(z)$

Örnek 12.6

- Geciktirilmiş impuls dizisi $x(n)=\delta(n-m)$ için,

  $X(z)=Z[\delta(n-m)]=z^{-m}$

  - bulunur. $0<|z|\leq\infty$ yakınsaklık bölgesidir. z=0'da yakınsamaz.

- İlerletilmiş impuls dizisi $x(n)=\delta(n+m)$ için,

  $X(z)=Z[\delta(n+m)]=z^{m}$

  - bulunacaktır. $0\leq|z|<\infty$ yakınsaklık bölgesidir. z=∞'da yakınsamaz.

z-Dönüşümünün Özellikleri

- Karmaşık türev:

$$Z[nx(n)] = -z\frac{dX(z)}{dz}$$

- İspat

$$\frac{dX(z)}{dz} = \frac{d}{dz}\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\left(\frac{d}{dz}z^{-n}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\left(-nz^{-n-1}\right)$$

- elde edilmektedir. Bu ifade $\frac{dX(z)}{dz} = -z^{-1}\sum_{n=-\infty}^{\infty} nx[n]z^{-n}$ şeklinde yazıldığında,
- $-z\frac{dX(z)}{dz} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} nx[n]z^{-n}$ elde edilmektedir.

Örnek 12.7

- $x[n] = na^n u[n]$ işaretinin z-dönüşümünü bulunuz.
  - $x_1[n] = a^n u[n]$ işaretinin z-dönüşümü $X_1(z) = \dfrac{1}{1-az^{-1}}$ R.O.C.: |z|>|a| bulunmaktadır.
  - $x[n] = nx_1[n]$ ilişkisinden dolayı x[n] işaretinin z-dönüşümü

$$X(z) = -z\frac{dX_1(z)}{dz} = -z\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{1-az^{-1}}\right) = \frac{az^{-1}}{\left(1-az^{-1}\right)^2}$$

  - R.O.C.: |z|>|a| olarak elde edilmektedir.

Dizi	z -Dönüşümü	Yakınsaklık Aralığı
$\delta(n)$	1	Tüm z
$\delta(n-m)\,,\;m>0$	z^{-m}	$\lvert z\rvert < 0$, yani $z=0$ hariç tüm z
$\delta(n+m)\,,\;m>0$	z^{m}	$\lvert z\rvert < \infty$, yani $z=\infty$ hariç tüm z
$u(n)$	$\dfrac{1}{1-z^{-1}}$	$\lvert z\rvert > 1$
$-u(-n-1)$	$\dfrac{1}{1-z^{-1}}$	$\lvert z\rvert < 1$
$a^{n}u(n)$	$\dfrac{1}{1-az^{-1}}$	$\lvert z\rvert > \lvert a\rvert$
$-a^{n}u(-n-1)$	$\dfrac{1}{1-az^{-1}}$	$\lvert z\rvert < \lvert a\rvert$
$u(n)\cos n\theta$	$\dfrac{1-z^{-1}\cos\theta}{1-2z^{-1}\cos\theta+z^{-2}}$	$\lvert z\rvert > 1$
$u(n)\sin n\theta$	$\dfrac{z^{-1}\sin\theta}{1-2z^{-1}\cos\theta+z^{-2}}$	$\lvert z\rvert > 1$
$u(n)r^{n}\cos n\theta$	$\dfrac{1-rz^{-1}\cos\theta}{1-2rz^{-1}\cos\theta+r^{2}z^{-2}}$	$\lvert z\rvert > \lvert r\rvert$
$u(n)r^{n}\sin n\theta$	$\dfrac{rz^{-1}\sin\theta}{1-2rz^{-1}\cos\theta+r^{2}z^{-2}}$	$\lvert z\rvert > \lvert r\rvert$

Sıfır/Kutup Gösterimi

- Z-dönüşümü, z değişkenine bağlı iki polinomun oranı olarak

$$X(z) = \frac{S(z)}{K(z)}$$

- şeklinde yazılabildiği durumlar, işaret ve sistemlerin analiz ve sentezinde sağlanan kolaylıklar nedeniyle tercih edilmektedir.

Sıfır/Kutup Gösterimi

- X(z)’nin kutupları z-dönüşümünün sonsuz olduğu z değerlerini belirttiğinden, yakınsaklık bölgesinin tanımı itibariyle, yakınsaklık bölgesi hiçbir şekilde bir kutup içerememektedir.
- Sıfırların ve kutupların z-dönüşümü hakkında verdiği bilgi ve yakınsaklık bölgesi ile kutuplar arasındaki ilişki dolayısıyla sıfırların ve kutupların karmaşık sayı düzleminde gösterimine yaygın olarak başvurulmaktadır.

Sıfır/Kutup Gösterimi

- Karmaşık sayı düzleminde sıfır ve kutupları gösteren grafikler kutup-sıfır grafiği olarak adlandırılmaktadır. Kutup-sıfır grafiğinde kutuplar ‘x’, sıfırlar ‘o’ ile gösterilmektedirler.

Örnek 12.8

- $X(z)=\dfrac{1-0.64z^{-2}}{1-0.2z^{-1}-0.08z^{-2}}$ için kutup-sıfır grafiğini çiziniz.
  - Pay ve payda çarpanlarına ayrıldığında

$$X(z)=\frac{\left(1-0.8z^{-1}\right)\left(1+0.8z^{-1}\right)}{\left(1-0.4z^{-1}\right)\left(1+0.2z^{-1}\right)}$$

$$s_1=0.8 \qquad s_2=-0.8$$

$$k_1=0.4 \qquad k_2=-0.2$$

Transfer Fonksiyonu

- Doğrusal zamanla değişmez bir sistemin dürtü yanıtı h[n] ile gösterilmektedir. Sisteme x[n]= z^n

  şeklinde tanımlanmış daimi bir üstel giriş uygulandığında sistemin çıkışı:

$$y[n]=x[n]*h[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}h[k]x[n-k]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}h[k]z^{n-k}=z^n\sum_{k=-\infty}^{\infty}h[k]z^{-k}$$

olarak bulunmaktadır.

Transfer Fonksiyonu

- $\sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]z^{-k}$ toplamı, bağımsız değişken n'ye bağlı olmayıp sadece sistemin dürtü yanıtı ile giriş işaretinin z değeri tarafından belirlenen bir katsayısıdır. Sistemin dürtü yanıtı ve $X(z)$ şeklindeki giriş işaretinin z değerine bağlı bu katsayı H(z) ile gösterildiği taktirde, $H(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]z^{-k}$ şeklinde tanımlanmaktadır.

Transfer Fonksiyonu

- Doğrusal zamanla değişmez ayrık zamanlı bir sisteme $X(z)$ şeklinde bir giriş uygulandığında sistem çıkışı

  $$Y(z) = H(z)X(z)$$

  şeklinde oluşmaktadır.
- Burada H(z), sistemin transfer fonksiyonu olarak adlandırılmaktadır.

Ters z-dönüşümü

- Basit bir ters z-dönüşümü ifadesi mevcut değildir. Bu nedenle, ters z-dönüşümü için genelde X(z)'nin bilinen dönüşüm biçimleri şekline getirilmesi amaçlanmaktadır.

Kısmi Kesirlere Açılım

- Z-dönüşümü X(z)'nin, iki polinomun oranı şeklinde rasyonel biçiminde olması durumunda bu yöntem kullanılır. Eğer, pay polinomunun derecesi paydanın derecesinden daha küçük ve kutupların tamamı birinci dereceden ise,

$$X(z) = \frac{A(z)}{B(z)} = X_1(z) + X_2(z) + \ldots = \sum_{k=1}^{N} X_k(z)$$

ve $x(n) = x_1(n) + x_2(n) + \ldots = \sum_{k=1}^{N} x_k(n)$ yazılabilir.

Kısmi Kesirlere Açılım

- $X_1(z)\,X_2(z)$ tek kutuplu z-dönüşümleridir. Z-dönüşümünün doğrusallık özelliğinden;

$$x(n) = Z^{-1}[X(z)] = \sum_{k=1}^{N} Z^{-1}[X_k(z)]$$

- p_k, X(z)'in tek katlı kutuplarını göstermek üzere,

$$X(z) = \sum_{k=1}^{N} \frac{R_k}{1 - p_k z^{-1}}$$

- Ayrıca her bir terimin ters z-dönüşümü bir üstel dizi olacağından, X(z)'in ters z-dönüşümü: $x(n) = \sum_{k=1}^{N} R_k\, p_k^n u(n)$

Seri Açılımı

- Z-dönüşümünün tanımından yola çıkarak X(z), bir seri şeklinde açıldığında

$$X(z) = \Lambda \; x[-2]z^{2} + x[-1]z^{1} + x[0]z^{0} + x[1]z^{-1} + x[2]z^{-2} + \Lambda$$

elde edilmektedir. Bu ifade kullanılarak ters z-dönüşümü

$$x[n] = \Lambda \; x[-2]\delta[n+2] + x[-1]\delta[n+1] + x[0]\delta[n] + x[1]\delta[n-1] + \Lambda$$

Örnek 12.9

$$X(z) = \frac{z^{-4}}{z-1} + z^{-6} + \frac{z^{-3}}{z+0.5}$$

$$x(n) = Z^{-1}\left(z^{-5}\frac{z}{z-1}\right) + Z^{-1}(z^{-6}\cdot 1) + Z^{-1}\left(z^{-4}\frac{z}{z+0.5}\right)$$

$$x(n) = u(n-5) + \delta(n-6) + (-0.5)^{n-4}u(n-4)$$

Örnek 12.10

- $F(z)=\dfrac{10\cdot z\cdot(z+5)}{(z-1)\cdot(z-2)\cdot(z+3)}$ ise F(n)=?
- Cevap:

$$F(z)=z\cdot\left[\frac{10\cdot(z+5)}{(z-1)\cdot(z-2)\cdot(z+3)}\right]=z\cdot\left[\frac{-15}{(z-1)}+\frac{14}{(z-2)}+\frac{1}{(z+3)}\right]$$

$$=\frac{z}{z+3}+14\cdot\frac{z}{z-2}-15\cdot\frac{z}{z-1}$$

$$Z^{-1}[F(z)]=(-3)^n\cdot u(n)+14\cdot(2)^n\cdot u(n)-15\cdot u(n)$$

Örnek 12.11

- $x[n] = 7 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^n \cdot u[n] - \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot u[-n-1]$ X[z]=?

Kutup-sıfır diyagramını ve yakınsaklık bölgesini çiziniz.

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} 7 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^n \cdot z^{-n} - \sum_{n=-\infty}^{-1} \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot z^{-n}$$

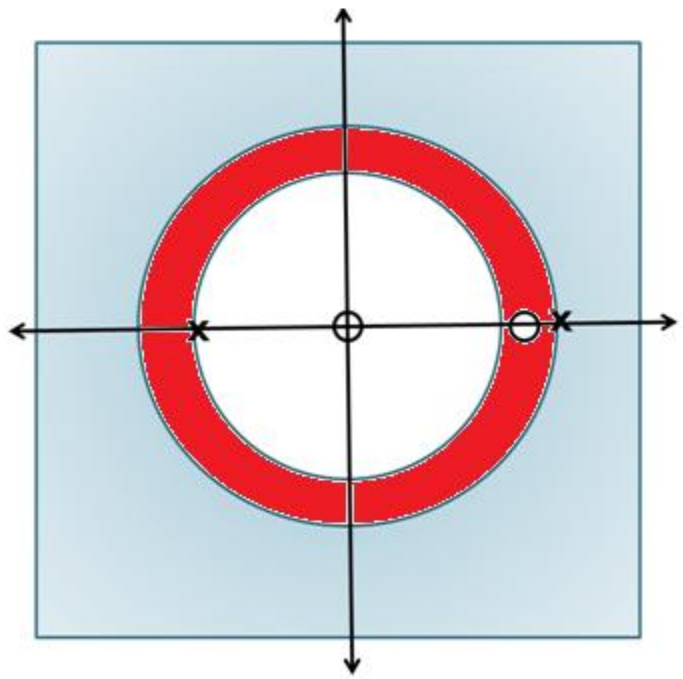
$$X(z) = 7 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{3}\right)^n \cdot z^{-n} - \sum_{n=-\infty}^{-1} \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot z^{-n}$$

$$X(z) = 7 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{3}\right)^n \cdot z^{-n} + 1 - \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{-n} \cdot z^{n}$$

$$X(z) = 7 \cdot \frac{z}{z+\frac{1}{3}} + \frac{z}{z-\frac{1}{2}} \qquad X(z) = \frac{z \cdot \left(8 \cdot z - \frac{19}{6}\right)}{\left(z+\frac{1}{3}\right) \cdot \left(z-\frac{1}{2}\right)}$$

Örnek 12.11

- Sıfırlar: 0, 19/48
- Kutuplar: -1/3, 1/2



Kısa Sınav

$$X(z) = \frac{z}{\left(z - \frac{1}{2}\right)\left(z - \frac{1}{4}\right)}$$ ise x(n)'i bulunuz.