Diferansiyel Denklemler

....../....../......

$y = f(x)$ → bağımsız değişken

↳ bağımlı değişken

DIFERANSIYEL DENKLEMLER

Tanım: Bir denklemin içerisinde türev veya diferansiyel bulunuyorsa bu denkleme diferansiyel denklem denir.

Diferansiyel denklemler iki grupta toplanır. Eğer denklem tek bağımsız değişken içeriyorsa "adi diferansiyel denklem" adını alır. Genel olarak

$$f(x, y, y', y'' \ldots y^{(n)}) = 0 \quad \text{veya} \quad f(x, y, dy/dx, d^2y/dx^2 \ldots d^ny/dx^n) = 0$$

şeklinde gösterilir.

Ör

$y' + 2xy = e^x$ → türev bulunduran denklem

$\frac{dy}{dx} + 2xy + e^x$

$dy + (2xy - e^x).dx = 0$ → diferansiyel bulunduran denklem.

Ör

$$e^y \frac{d^2y}{dx^2} + 2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1$$

Tanım: Bir diferansiyel denklem birden fazla bağımsız değişken bulunduruyorsa bu tür denklemlere "kısmi diferansiyel denklem" denir.

Ör

$$u = u(x, y)$$

$$x . \frac{\partial u}{\partial y} - y \frac{\partial u}{\partial x} = y^2 - x^2$$

Ör

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \quad , \quad \underset{\text{bağımlı değişken}}{u} = u(\underbrace{x, y, z}_{\text{bağımsız değişken}})$$

....../....../......

Tanım: Bir diferansiyel denklemde verilen en yüksek mertebeden türevin mertebesine diferansiyel denklemin mertebesi denir. Denklemdeki en yüksek mertebeden türevin kuvvetine ise "diferansiyel denklemin derecesi" denir.

Ör

$\frac{d^2y}{dx^2} - x\left(\frac{dy}{dx}\right) + e^x = 0$ mertebesini ve derecesini belirleyin.

En yüksek mertebeli terim $\frac{d^2y}{dx^2}$, denklemin mertebesi 2, derecesi 1'dir.

Ör

$x^6 (y''')^2 + (y')^7 = e^{3yx}$ mertebesini ve derecesini belirleyiniz.

$y' = \frac{dy}{dx}$ $\quad y''' = \frac{d^3y}{dx^3}$

Denklemin mertebesi 3, derecesi 2

$y^{iv} = y^{(4)}$ = değişik gösterim

Tanım. Bir diferansiyel denklemde bağımlı değişken ve türevleri 1. dereceden olup bunlar denklemde çarpma şeklinde bulunmuyorsa ve üstel, trigonometrik, logaritmik fonksiyonu biçiminde bulunmuyorsa bu tür denklemlere lineer diferansiyel denklem denir.

Ör

$xy'' - y' + 3xy = 0$ denklemini sınıflandırınız.

2. mertebeden, 1. dereceden lineer diferansiyel denklem.

Ör

$xy''' - (y')^3 + 3(xy) - y^2 = 0$ sınıflandır.

3. mertebeden, 1. dereceden lineer olmayan (non linear) diferansiyel denklem.

........../........../..................

Alıştırma :

Aşağıdaki denklemleri sınıflandırınız.

1. $\frac{d^2y}{dx^2}+3\frac{dy}{dx}+e^y=x$

2. mertebeden 1. dereceden lineer olmayan e^y'den dolayı

2. $y^{IV}+yy''-5y'+\sin y=3x^2-1$

4. mertebeden 1. dereceden, lineer olmayan $\sin y$'den dolayı

3. $\left(\frac{dy}{dx}\right)^3+y^2=\cos(x^2)+5$

1. mertebeden 3. dereceden lineer olmayan y^2'den dolayı $\cos(x^2)$ etkilemez çünkü x'e bağlı.

DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN ÇÖZÜMÜ

Bir diferansiyel denklemin çözümü denklemin mertebesi kadar keyfi sabit içerir. Bu tür çözümlere genel çözüm denir.

Ör

$y'=1 \Rightarrow \frac{dy}{dx}=1 \Rightarrow dy=dx \Rightarrow \int dy=\int dx = y=x+c$

Ör

$y=ax^2+bx+c$ fonksiyonunun diferansiyel denklemini yazınız. ((a,b,c) keyfi sabit)

$\frac{dy}{dx}=2ax+b$

$\frac{d^2y}{dx^2}=2a$

$$\boxed{\frac{d^2y}{dx^3}=0}$$

........../............/..................

Ör

$y = c_1 \sin 4x + c_2 \cos 4x$ fonksiyonunun diferansiyel denklemini oluşturunuz.
(c_1, c_2 keyfi sabit)

$\frac{dy}{dx} = 4c_1 \cos 4x - 4c_2 \sin 4x$

$\frac{d^2y}{dx^2} = -16 \cdot c_1 \sin 4x - 16 c_2 \cos 4x$

$= -16 \underbrace{(c_1 \sin 4x + c_2 \cos 4x)}_{y}$

$\frac{d^2y}{dx^2} = -16y$

$\frac{d^2y}{dx^2} + 16y = 0$

Diferansiyel denklemlerin genel çözümündeki keyfi sabitlere özel değerler vererek elde edilen çözümlere "özel çözüm" denir.

Diğer taraftan bazı diferansiyel denklemlerde ise bu denklemi sağlayan ancak genel çözümden elde edilemeyen çözümlerde bulunabilir. Bu tür çözümlere "tekil" ya da "singüler çözüm" denir.

Varlık - Teklik Teoremi:

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y) \quad --- (1)$$

I. mertebeden denklemi göz önüne alalım.

a) f fonksiyonu xy - düzleminin bir D bölgesinde x ve y'nin tek değerli bir fonksiyonu olsun.

b) $\frac{\partial f}{\partial y}$ kısmi türevide $(x,y) \in D$ için x ve y'nin sürekli bir fonksiyonu ayrıca $(x_0, y_0) \in D$ olsun.

Hüküm: (1) ile verilen denklemin $h > 0$ yeterince küçük bir sayı olmak üzere $|x - x_0| \leq h$ aralığında tanımlı ve $\varnothing(x_0) = y_0$ şartını sağlayan bir tek çözümü vardır.

......../......../........

Birinci Mertebeden Diferansiyel Denklemler

1. Değişkenlerine Ayrılabilen Denklemler

Eğer bir diferansiyel denklem $h(y) \neq 0$ olmak üzere $y' = f(x,y) = g(x) \cdot h(y)$ biçiminde veya buna denk olarak.

$$P(x)\,dx + Q(y)\,dy = 0$$

şeklinde yazılabiliyorsa bu denkleme değişkenlerine ayrılabilen denklem denir.

$$\int P(x)\,dx + \int Q(y)\,dy = c \qquad c \rightarrow \text{integral sabitidir.}$$

Ör

$x\,dx - y^2\,dy = 0$ diferansiyel denklemini çözünüz.

$$\int x\,dx - \int y^2\,dy = 0$$

$$\frac{x^2}{2} - \frac{y^3}{3} = c$$

Ör

$y' = x^3 y^2$ diferansiyel denklemini çöz.

$$\frac{dy}{dx} = x^3 y^2 \Rightarrow \frac{dy}{y^2} = x^3\,dx \Rightarrow \int \frac{dy}{y^2} = \int x^3\,dx \Rightarrow \frac{-1}{y} = \frac{x^4}{4} + c$$

$$\Rightarrow y(x) = \frac{-4}{x^4 + 4c}$$

Ör

$y' = \frac{x+1}{y^4+1}$ dif. denk. çöz.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+1}{y^4+1} \Rightarrow dy \cdot (y^4+1) = (x+1) \cdot dx = \int (y^4+1)\,dy = \int (x+1)\,dx$$

$$= \frac{y^5}{5} + y = \frac{x^2}{2} + x$$

$$\Rightarrow \frac{y^5+5y}{5} = \frac{x^2+2x}{2} + c$$

..0../........../......

Ör

$y' = -\frac{y}{x-3}$ denk. çöz.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-y}{x-3} = \int \frac{dy}{y} = -\int \frac{dx}{x-3} \Rightarrow \ln|y| = -\ln|x-3| + \ln c$$

$$\Rightarrow y(x-3) = c$$

Alıştırmalar:

Aşağıdaki diferansiyel denklemleri çözünüz.

1. $y' + y\cos x = 0$
2. $y\,dy + 2(xy + x)\,dx = 0$
3. $y' = e^{y}\sin x$
4. $y' = \frac{y+y^2}{x+x^2}$

$C_1 = \ln|y| + \sin x = c$

$C_2 = y - \ln|y+1| + x^2 = c$

C_3 $\cos x - e^{-y} = c$

C_4 $\frac{y(1+x)}{x(1+y)} = c$

....../....../......

3. Homojen Olmayan Ancak Homojen Hale Dönüştürülebilen Denklemler

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ax+by+c}{\alpha x+\beta y+\gamma}$$

şeklinde sabit katsayılı bir diferansiyel denklemle karşılaşılırsa $\Delta = a\beta - \alpha b$ ifadesinin değerine bakılır. (katsayılar determinantı).

i) $\Delta = a\beta - \alpha b = 0$ ise, bu durumda $ax+by+c=0$ ve $\alpha x+\beta y+\gamma=0$ şeklinde tanımlı doğrular birbirine paralel olacaktır. Başka bir deyişle $a=\alpha k$ ve $b=\beta k$ olarak yazılabilir.

$ax+by = k(\alpha x+\beta y)$ elde edilir. Buradan $\alpha x+\beta y = u$ dönüşümü yapılırsa

$$\alpha + \beta \frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx}$$

$$\Rightarrow \frac{du}{dx} = \alpha + \beta\left[\frac{ku+c}{u+\gamma}\right]$$ dur ki bu denklem değişkenlerine ayrılabilir hale dönüşür.

ii) $\Delta = a\beta - \alpha b \neq 0$ ise, bu durumda $x = X+h$ $y = Y+k$ değişken değişimi ile denklem aşağıdaki gibi homojen dif. denklemine dönüştürülerek çözülebilir.

$$x = X+h \Rightarrow dx = dX \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{dY}{dX}$$
$$y = Y+k \Rightarrow dy = dY$$

$$\frac{dY}{dx} = \frac{aX+bY+ah+bk+c}{\alpha X+\beta Y+\alpha h+\beta k+\gamma}$$

Buradan $ah+bk+c=0$ ve $\alpha h+\beta k+\gamma=0$ olacak şekilde h ve k sabitleri belirlenir. Böylece denklem.

$$\frac{dY}{dx} = \frac{aX+bY}{\alpha X+\beta Y}$$ homojen diferansiyel denklemine dönüşmüş olur.

......../......../........

ÖR

$\frac{dy}{dx} = \frac{4x+2y+5}{2x+y-1}$ dif denkleminin genel çözümünü bulunuz.

$\Delta = a\beta - \alpha b = 4.1 - 2.2 = 0$

$2x+y = u$

$2 + \frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} - 2$

$\frac{du}{dx} - 2 = \frac{2u+5}{u-1} \Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{2u+5}{u-1} + 2 = \frac{4u+3}{u-1}$

$\Rightarrow \frac{u-1}{4u+3} du = dx$

$\Rightarrow \frac{u}{4u+3} du - \frac{1}{4u+3} du = dx$

$\Rightarrow \frac{1}{4} \cdot \frac{4u+3-3}{4u+3} du - \frac{1}{4u+3} du = dx$

$\Rightarrow \frac{1}{4} du - \frac{3}{4} \frac{1}{4u+3} du - \frac{1}{4u+3} du = dx$

$\Rightarrow \frac{1}{4} \int du - \frac{7}{4} \int \frac{1}{4u+3} du = \int dx$

$\Rightarrow \frac{1}{4} u - \frac{7}{16} \ln|4u+3| = x + c$

$\frac{1}{4} 2x+y - \frac{7}{16} \ln|4(2x+y)+3| = x+c$

İÖR

$\frac{dy}{dx} = \frac{-x+y+1}{x+4y-1}$ dif denkleminin genel çözümünü bul.

$\Delta = a\beta - \alpha b = -1.4 - 1.1 = -5$

$x = X+h \qquad y = Y+k$

$dx = dX \qquad dy = dY$

$\frac{dy}{dx} = \frac{dY}{dX} = \frac{-X+Y-h+k+1}{X+4Y+h+4k-1}$

$-h+k+1 = 0$

$h+4k-1 = 0$

$5k = 0$

$k = 0$

$h = 1$

$\frac{dY}{dX} = \frac{-X+Y}{X+4Y}$ homogen dif denk. dönüşür.

$Y = u.X$ dönüşümü yapılırsa

$\frac{dY}{dX} = u + X\frac{du}{dX} = \frac{-X+u.X}{X+4uX}$

$= \frac{u-1}{1+4u} \Rightarrow X\frac{du}{dX} = \frac{u-1}{1+4u} - u = \frac{-1-4u^2}{1+4u}$

$\Rightarrow \frac{1+4u}{1+4u^2} du = -\frac{dX}{X} \Rightarrow \frac{1}{1+4u^2} du + \frac{4u}{1+4u^2} = -\frac{dX}{X}$

integrali alınmış hali

$1+4u^2 = t$

$8u\,du = dt$

$\Rightarrow \frac{1}{2} \arctan(2u) + \frac{1}{2} \ln|1+4u^2| + \ln X = C$

$u = \frac{Y}{X}$

$\frac{Y = y-k}{X = x-h} = \frac{y}{x-1}$

$\Rightarrow \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{2y}{x-1}\right) + \frac{1}{2} \ln\left|1 + 4\frac{4y^2}{(x-1)^2}\right| + \ln x = c$

Alıştırmalar

Aşağıdaki dif denkleminin genel çözümünü bulunuz.

1. $y' = \dfrac{2x - y + 3}{2x + 4y - 6}$

2. $y' = \dfrac{1 - 3x - 3y}{1 + x + y}$

3. $y' = \dfrac{x + 2y + 1}{2x + 4y + 3}$

4. $y' = \dfrac{2 - x - 2y}{3 + 2x - y}$

5. $y' = -\dfrac{x + y + 5}{2x + 2y}$

4. Tam Diferansiyel Denklemler

$$\boxed{M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0 \quad \text{--- (1)}}$$

şeklinde I. mertebeden dif denklemi göz önüne alalım. Bu denklemin çözümü $F(x,y)=c$ şeklinde bir fonksiyon olsun. Bu fonksiyon sürekli ve tek değerli olup x ve y'ye göre kısmi türevleri (1) denklemin $M(x,y)$ ve $N(x,y)$ fonksiyonlarını veriyorsa (1) denklemine tam diferansiyel denklem denir. Böyle bir denklem $M(x,y)dx + N(x,y)dy$ ifadesi de $F(x,y)$ fonksiyonunun bir tam diferansiyeli dur. Diğer taraftan bir $F(x,y)=c$ fonksiyonunun tam diferansiyeli,

$$dF(x,y) = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{dy} = 0 \quad \text{--- (2)}$$

şeklinde yazıldığından

$$M(x,y) = \frac{\partial F}{\partial x} \quad \text{ve} \quad N(x,y) = \frac{\partial F}{\partial y} \quad \text{--- (3)}$$

yazılır. Burada N'nin y'ye göre ve N'nin de x'e göre tekrar kısmi türevleri alınırsa,

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \quad \text{ve} \quad \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \quad \text{--- (4)}$$

ifadelerinin birbirine eşit olduğu görülür. O zaman (1) şeklindeki bir dif. denklemin tam diferansiyel denklem olması için

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \quad \text{---- (5)}$$

şartının sağlaması gerekir.

Şimdi $F(x,y)=c$ çözüm fonksiyonunun nasıl bulunduğunu görelim.

$$\frac{\partial F}{\partial x} = M(x,y) \Rightarrow F(x,y) = \int M(x,y)dx + h(y) \quad \text{--- (6)}$$

(6) bağıntısının y'ye göre kısmi türevi alınırsa ve (3) göz önüne alınırsa

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left[\int M(x,y)dx + h(y)\right] = N(x,y)$$

Burada $h(y)$ keyfi fonksiyonu bulunup (6) eşitliğinde yerine yazılır ve çözüm bulunmuş olur.

....../....../......

Ör:

$(2x+e^y)dx + xe^y dy = 0$ dif denklemini çöz.

$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ $\qquad \boxed{\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}}$

$M(x,y) = 2x+e^y$, $N(x,y) = x.e^y$

$$\underbrace{\frac{\partial M}{\partial y} = e^y \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = e^y}$$

$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ olduğundan tam diferansiyeldir.

Amacımız $F(x,y)=c$ şeklindeki genel çözümü bulmaktır.

$\frac{\partial F}{\partial x} = M(x,y) = 2x+e^y$

$\Rightarrow F(x,y) = \int (2x+e^y)dx + h(y)$

$= x^2 + xe^y + h(y)$ ---- $(*)$

$\frac{\partial F}{\partial y} = x.e^y + h'(y)$

Diğer taraftan $\frac{\partial F}{\partial y} = N(x,y) = x.e^y$

$x.e^y + h'(y) = xe^y$

$h'(y) = 0 \qquad h(y) = c$

h'in bu değeri $(*)$'da yerine yazılırsa

$F(x,y) = x^2 + xe^y + c$

......../......../........

Ör.

$3x(xy-2)dx + (x^3+2y)dy = 0$ diferansiyel denklemin genel çözümünü bul.

$M(x,y) = 3x(xy-2) = 3x^2y-6x \quad , \quad N(x,y) = x^3+2y$

$\frac{\partial M}{\partial y} = 3x^2 \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = 3x^2$ olduğundan Tam diferansiyeldir.

$\frac{\partial F}{\partial x} = M(x,y) = 3x^2y - 6x$

$\Rightarrow F(x,y) = \int (3x^2y - 6x)dx + h(y)$

$= x^3y - 3x^2 + h(y)$

$\frac{\partial F}{\partial y} = N(x,y) = x^3 + 2y$

$\frac{\partial F}{\partial y} = x^3 + h'(y)$

$x^3 + h'(y) = x^3 + 2y \Rightarrow h'(y) = 2y$

$\Rightarrow \frac{dh}{dy} = 2y \Rightarrow \int dh = \int 2y\,dy$

$\Rightarrow h(y) = y^2 + c$

$F(x,y) = x^3y - 3x^2 + y^2 + c$

Ör.

$(y\cos x + 2xe^y)dx + (\sin x + x^2e^y + 2)dy = 0$ diferansiyel denklemini çöz.

$M(x,y) = y\cos x + 2xe^y \quad , \quad N(x,y) = \sin x + x^2e^y + 2$

$\frac{\partial M}{\partial y} = \cos x + 2xe^y \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = \cos x + 2xe^y$

$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ olduğundan Tam diferansiyeldir.

$\frac{\partial F}{\partial x} = M(x,y) = y\cos x + 2xe^y$

$F(x,y) = \int (y\cos x + 2xe^y)dx + h(y)$

$= y\sin x + x^2e^y + h(y)$

$\frac{\partial F}{\partial y} = N(x,y)$

$\frac{\partial F}{\partial y} = \sin x + x^2e^y + h'(y) = \sin x + x^2e^y + 2$

$h'(y) = 2 \Rightarrow h(y) = 2y + c$

$F(x,y) = y\sin x + x^2e^y + 2y + c$

NETLOG
LOGISTICS

....../....../......

Ör.

$(2x^3+xy^2+2y+3)dx+(2x+x^2y)dy=0$ dif denklemini çözünüz.

$M(x,y)=2x^3+xy^2+2y+3$, $N(x,y)=2x+x^2y$

$\frac{\partial M}{\partial y}=2xy+2$ $\qquad \frac{\partial N}{\partial x}=2+2xy$ $\qquad$ Tam diferansiyeldir.

$\frac{\partial F}{\partial x}=M(x,y)=2x^3+xy^2+2y+3$ $\qquad \frac{\partial F}{\partial y}=N(x,y)$

$F(x,y)=\int(2x^3+xy^2+2y+3)dx+h(y)$ $\qquad \frac{\partial F}{\partial y}=x^2y+2x+h'(y)=2x+x^2y$

$=\frac{x^4}{2}+\frac{x^2y^2}{2}+3x+h(y)$ $\qquad h'(y)=0 \quad h(y)=c$

$F(x,y)=\frac{x^4}{2}+\frac{x^2y^2}{2}+2xy+3x+c$

Alıştırmalar

1. $(2+ye^{xy})dx-(2y-xe^{xy})dy=0$
2. $(2x\sin y+e^xy^3+3y)dx+(x^2\cos y+3e^xy^2+3x+2y)dy=0$
3. $(x^2-x+y^2)dx-(ye^y-2xy)dy=0$
4. $\left(\frac{2+x^3y}{x^3}\right)y\,dx=\left(\frac{1-2x^3y}{x^2}\right)dy$
5. $(x\ln y+y\ln x+y)dx+\left(\frac{x^2}{2y}+x\ln x\right)dy=0$

$C_1=F(x,y)=2x+e^{xy}-y^2+c$

$C_2=F(x,y)=x^2\sin y+e^xy^3+3xy+y^2+c$

..../..../....

5. İntegral Çarpanı

$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$ --- (1)

şeklinde verilen diferansiyel denklemin tam diferansiyel olmadığını varsayalım. Bu durumda öyle bir λ fonksiyonu bulunmalıdır ki bu fonksiyon verilen (1) denklemi ile çarpıldığında denklem tam diferansiyel denklem haline gelsin. Böyle bir λ fonksiyonuna "İntegral çarpanı" denir.

(1) denkleminin integral çarpanı λ ve
$\lambda M dx + \lambda N dy = 0$ ---- (2)
denklemi bir tam diferansiyel denklem olur. O halde

$$\frac{\partial}{\partial y}(\lambda M) = \frac{\partial}{\partial x}(\lambda N) \quad ---- (3)$$

olmalıdır. İntegral çarpanı bazen yalnız x'in bir fonksiyonu bazen de yalnız y'nin bir fonksiyonu olabilir.

Durum I : λ yalnız x'in fonksiyonu olsun. Bu durumda (3) denklemi:

$$\lambda \frac{\partial M}{\partial y} = \lambda \frac{\partial N}{\partial x} + N \frac{d\lambda}{dx}$$

$$\frac{d\lambda}{\lambda} = \frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)dx \quad ---- (4)$$

elde edilir. Eğer λ yalnız x'in bir fonksiyonu ise (4) denkleminde dx'in katsayısı yalnız x'in bir fonksiyonu olmalıdır. Bu fonksiyonu f(x) ile gösterirsek,

$$\frac{d\lambda}{\lambda} = f(x)\,dx \quad \text{veya} \quad \ln\lambda = \int f(x)dx$$

$$\Rightarrow \lambda(x) = e^{\int f(x)\,dx}$$

elde edilir.

Durum II : λ yalnız y'nin fonksiyonu olsun. Bu durumda (3) denkleminden

$$\lambda \frac{\partial M}{\partial y} + M \frac{d\lambda}{dy} = \lambda \frac{\partial N}{\partial x}$$

$$\frac{d\lambda}{\lambda} = \underbrace{\frac{1}{M}\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)}_{g(y)} dy \quad ---- (5)$$

elde edilir.

NETLOG LOGISTICS

....../....../......

Burada dy'nin katsayısı yalnız y'nin fonksiyonu olması gerektiğinden bu fonksiyona $g(y)$ dersek.

$$\frac{d\lambda}{\lambda} = g(y)\,dy \Rightarrow \ln\lambda = \int g(y)\,dy$$
$$\Rightarrow \lambda(y) = e^{\int g(y)\,dy} \quad \text{elde edilir.}$$

Ör

$y\,dx - x\,dy = 0$ diferansiyel denkleminin tam diferansiyel olup olmadığını araştırınız. Eğer tam diferansiyel değilse integral çarpanını bularak denklemin genel çözümünü bul.

$M(x,y) = y \quad , \quad N(x,y) = -x$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial M}{\partial y} = 1 \\ \frac{\partial N}{\partial x} = -1 \end{array}\right\} \frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x} \quad \text{Tam diferansiyel değil.}$$

$$f(x) = \frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) = \frac{1}{-x}\left(1-(-1)\right) = \underbrace{\frac{-2}{x}}_{\text{Sadece } x\text{'e bağlı}}$$

$$\lambda(x) = e^{\int f(x)\,dx} = e^{\int -\frac{2}{x}dx} = e^{-2\ln x} = e^{\ln x^{-2}} = \frac{1}{x^2}$$

$\lambda(x) = \frac{1}{x^2}$ Verilen denklemi $\lambda(x)$ ile çarpalım.

$$\frac{y}{x^2}dx - \frac{1}{x}dy = 0$$
$$\lambda M\,dx - \lambda N\,dy = 0$$

$\lambda M = \frac{y}{x^2} \qquad \lambda N = \frac{-1}{x}$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial \lambda M}{\partial y} = \frac{1}{x^2} \\ \frac{\partial \lambda N}{\partial x} = \frac{1}{x^2} \end{array}\right\} \text{Tam diferansiyel denklem}$$

$$F(x,y) = \int \lambda M\,dx + h(y) = \int \frac{y}{x^2}\,dx + h(y)$$
$$= \frac{-y}{x} + h(y)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{-1}{x} + h'(y)$$
$$\frac{\partial F}{\partial y} = \lambda N \Rightarrow \frac{-1}{x} + h'(y) = -\frac{1}{x}$$
$$\Rightarrow h'(y) = 0$$
$$h(y) = c$$

$$F(x,y) = \frac{-y}{x} + c$$

....../....../......

Ör:

$(xy-1)dx + (x^2 - xy)dy = 0$ dif denklemini çöz.

$M(x,y) = xy - 1$, $N(x,y) = x^2 - xy$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial M}{\partial y} &= x \\ \frac{\partial N}{\partial x} &= 2x - y \end{aligned}\right\} \frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$$ tam dif değil.

$f(x) = \frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) = \frac{1}{x^2 - xy}\left(x - (2x - y)\right) = -\frac{1}{x}$ → sadece x'e bağlı

$\lambda(x) = e^{\int -\frac{1}{x}dx} = e^{-\ln x dx} = \frac{1}{x}$

$(y - \frac{1}{x})dx + (x - y)dy = 0$

$\lambda M(x,y) = y - \frac{1}{x}$ $\quad \lambda N(x,y) = x - y$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \lambda M}{\partial y} &= 1 \\ \frac{\partial \lambda N}{\partial x} &= 1 \end{aligned}\right\} \frac{\partial \lambda M}{\partial y} = \frac{\partial \lambda N}{\partial x}$$ Tam dif. denklem.

$F(x,y) = \int (y - \frac{1}{x})dx = xy - \ln x + h(y)$

$\frac{\partial F}{\partial y} = x + h'(y)$

$\frac{\partial F}{\partial y} = \lambda N(x,y) \Rightarrow x + h'(y) = x - y$

$\Rightarrow h'(y) = -y$

$\Rightarrow h(y) = \frac{-y^2}{2} + c$ //