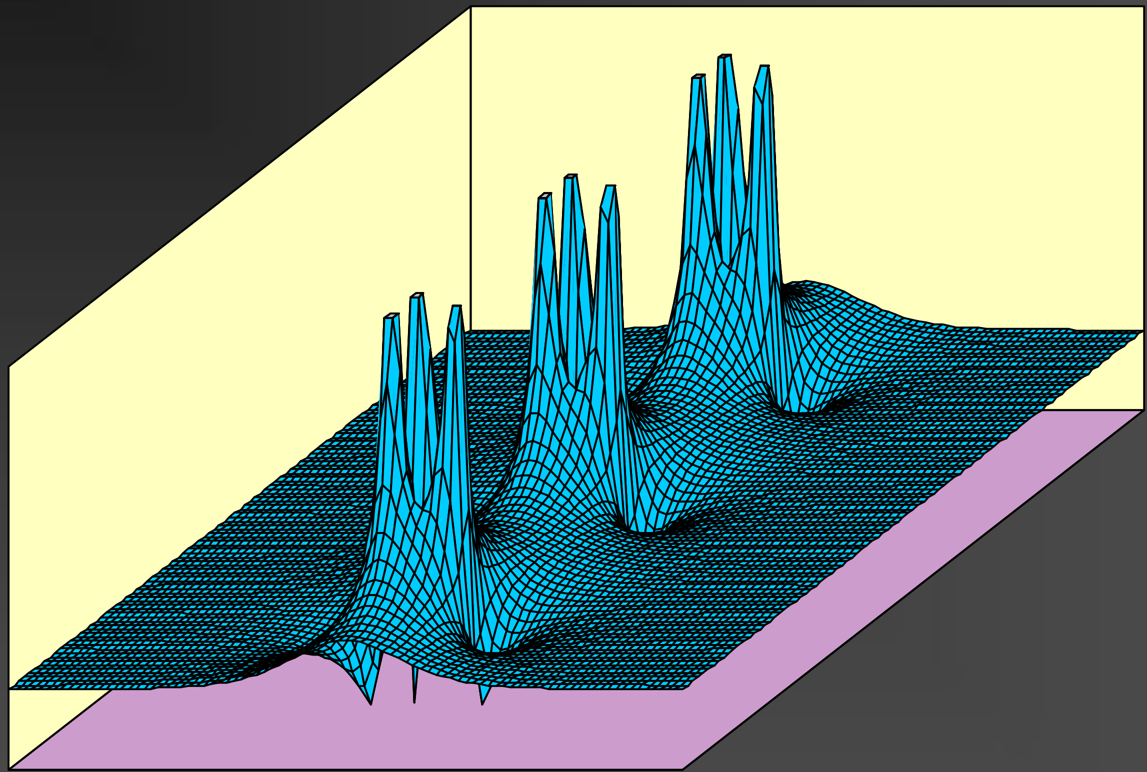
ELK 207

Sinyaller ve Sistemler



Sinyaller ve Sistemler; Ali Gangal;
KTÜ Elektrik-Elektronik Müh. Böl.

Konular

1. İşaret Türleri ve Tanımlar
2. Doğrusal Zamanla Değişmeyen (DZD) Sürekli Sistemlerin Zaman Domeni Modelleri
3. DZD Sürekli Sistemlerin Frekans Domeni Modelleri
4. DZD Sürekli Sistemlerin s Domeni Modelleri
5. Ayrık Sistemler, Ayrık Fourier Dönüşümü, z Dönüşümü
6. Rastlantı Girişli DZD Sistemler

1. İşaret Türleri ve Tanımlar

İşaret: Bir fiziksel olayda mevcut olan bağımsız değişkenler ile bunların arasındaki ilişkinin matematiksel olarak biçimlendirilmiş şeklidir.

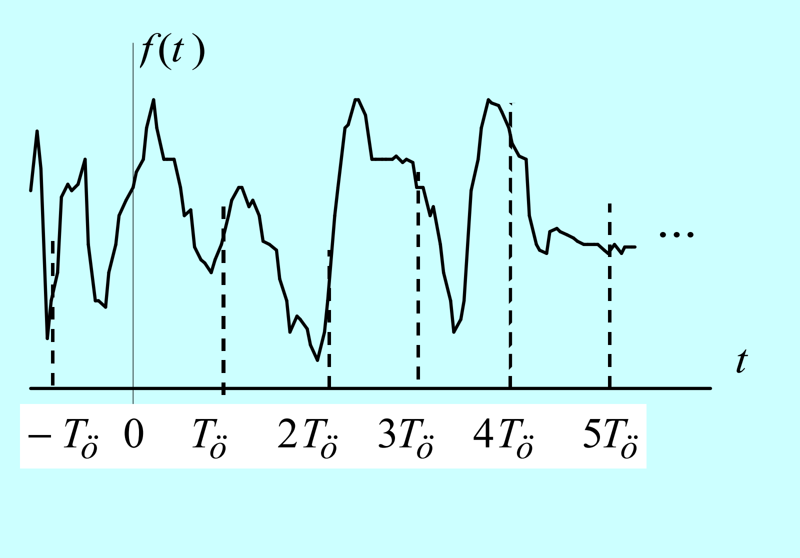
- Bir elektrik devresindeki bir elemanın uçlarındaki gerilimin şiddetinin zamana göre değişimi
- Bir sesin şiddetinin zamana göre değişimi
- Ortamda bulunan bir noktanın sıcaklığının zamana göre değişimi
- Sesin genliğinin yere ve zamana göre değişimi

İşaret Türleri

- Sürekli (analog) işaretler-ayrık işaretler,
- Periyodik (dönemli) işaretler-periyodik olmayan (dönemsiz) işaretler,
- Enerji işaretleri-güç işaretleri,
- Rastlantı işaretleri-deterministik işaretler.

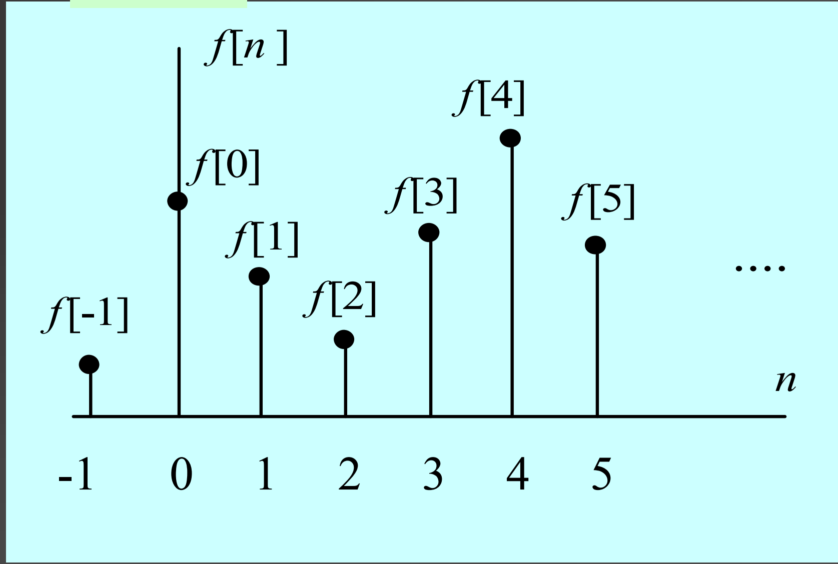
Sürekli İşaretler (analog işaretler) - Ayrık İşaretler

Sürekli (zamanlı) işaretler her t anı için tanımlıdırlar



$f(t),\ g(t),\ x(t)$ ve $y(t)$

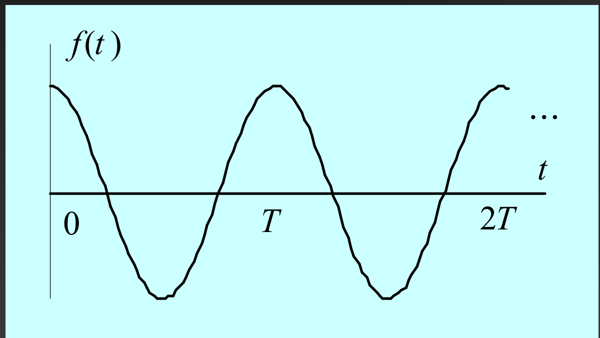
Ayrık (zamanlı) işaretler belirli $t = nT_ö$ anlarında tanımlıdırlar



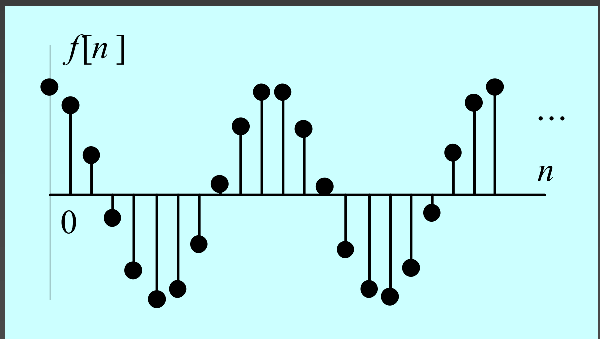
$f(nT_ö),\ g(nT_ö),\ x(nT_ö)$ ve $y(nT_ö)$

veya $f[n],\ g[n],\ x[n]$ ve $y[n]$

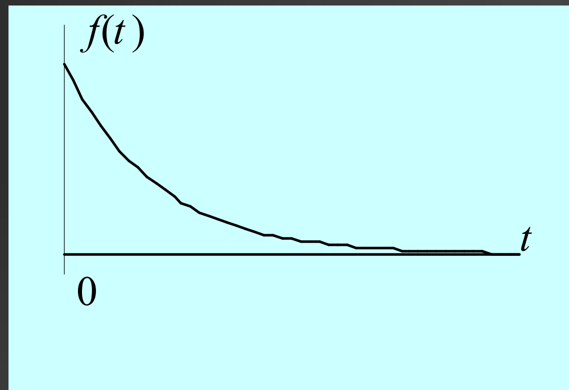
Periyodik İşaretler - Periyodik Olmayan İşaretler

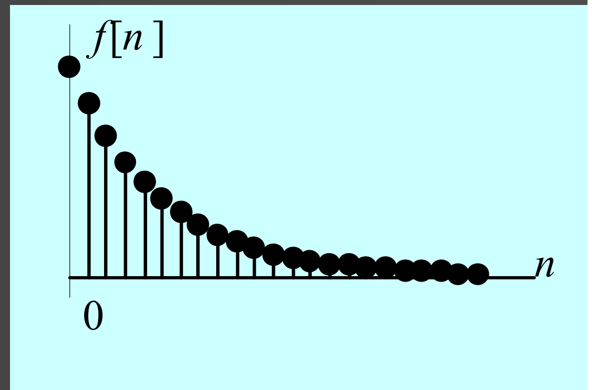


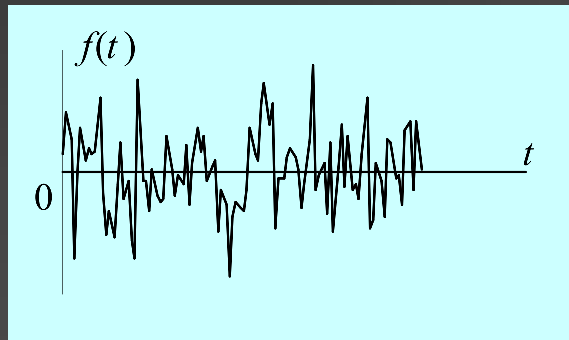
$$f(t) = f(t+T)$$

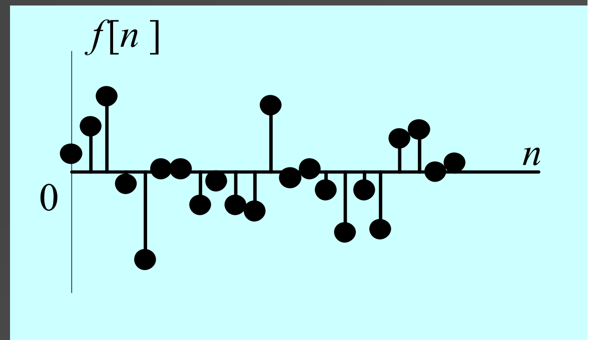


$$f[n] = f[n+N]$$









Periyodik davranış gösteren birçok işaret, sistem testi ve incelenmesi amacıyla sıkça kullanılırlar.

Örnek: sinüzoidal işaretler bir sistemin frekans tepkesinin belirlenmesinde, dikdörtgen biçimli periyodik vuruş işaretleri radarlarda, testere dişi işaretler ise osilaskoplarda tetikleme amacıyla kullanılır.

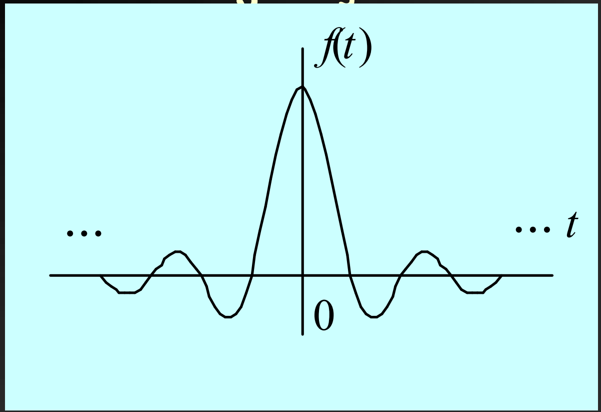
Pek çok biyolojik ve fiziksel işaret periyodik olmayan bir yapıya sahiptir.

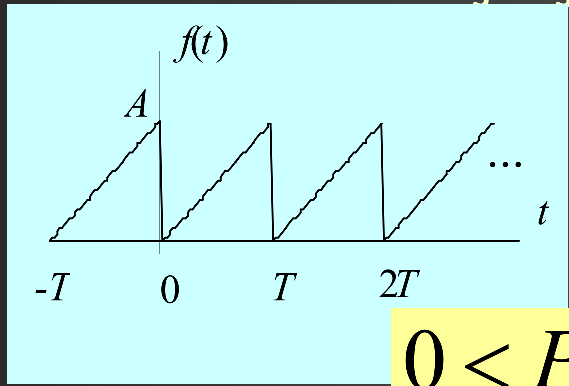
Örnek: EKG ve ses işareti.

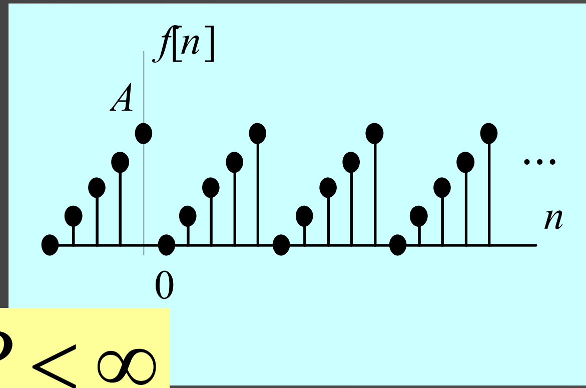
Yaklaşık periyodik işaretler: Bu tür işaretlerle bazı haberleşme sistemlerinin analizinde karşılaşılmaktadır.

Örnek: $f(t) = S\,\mathrm{int} + Sin\sqrt{2}t$

Enerji İşaretleri - Güç İşaretleri







$$0 < P < \infty$$

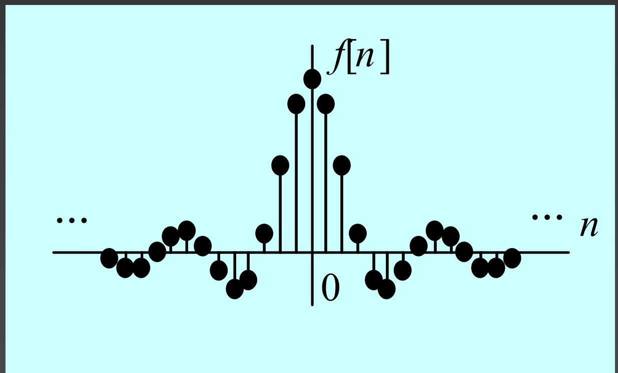
$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 \, dt < \infty$$

$$P = \lim_{T_M \to \infty} \frac{1}{T_M} \int_{t_1}^{t_1+T_M} |f(t)|^2 \, dt$$

$$P = \lim_{M \to \infty} \frac{1}{M+1} \sum_{n_1}^{n_1+M} |f[n]|^2$$

$$P = \lim_{T_M \to \infty} \frac{1}{T_M} \int_{-T_M/2}^{T_M/2} |x(t)|^2 \, dt$$

$$P = \lim_{M \to \infty} \frac{1}{2M+1} \sum_{-M}^{M} |f[n]|^2$$



$$P = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} |f(t)|^2 \, dt$$

$$P = \frac{1}{N+1} \sum_{n_0}^{n_0+N} |f[n]|^2$$

$$E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |f[n]|^2 < \infty$$

$$P = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |f(t)|^2 \, dt$$

$$P = \frac{1}{2N+1} \sum_{-N}^{N} |f[n]|^2$$

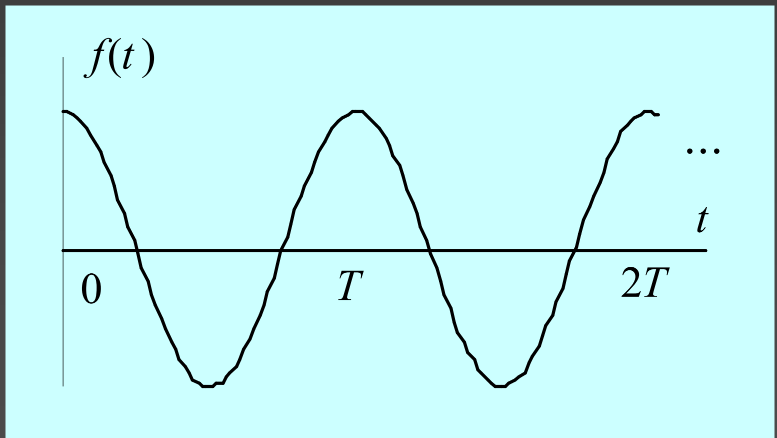
Bazı işaretler ne güç işareti ne de enerji işareti sınıfına girerler. Bunların enerjileri ve ortalama güçleri sonsuz olabilir.

Örnek:

$$f(t) = e^{-\alpha t}, \quad -\infty \leq t \leq \infty \quad , \; \alpha : \text{bir sabit}$$

Deterministik İşaretler - Rastlantı İşaretleri

Deterministik işaretlerin şimdiki ve gelecekteki değerleri, geçmişteki değerlerinden yararlanarak hesaplanabilir. Bundan dolayı bu işaretler kesin bir matematiksel formül ile ifade edilebilir.



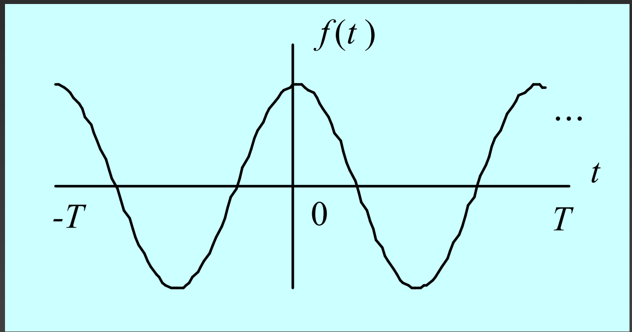
Bazı fiziksel işaretlerin şimdiki ve gelecekteki değerleri geçmişteki değerlerinden hesaplanamaz ya da tahmin edilemez. Rastlantı işaretleri için kesin bir matematiksel ifade yazmak mümkün değildir.

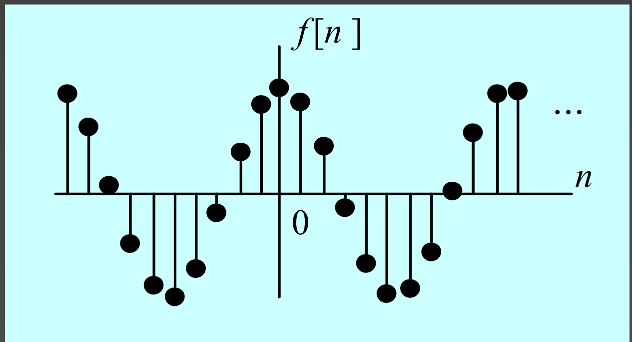
İşaretlerin Simetriklik Özellikleri

Çift işaretler

$f(t) = f(-t)$

$f(t)$ işareti $t=0$ dikey eksenine göre simetriktir

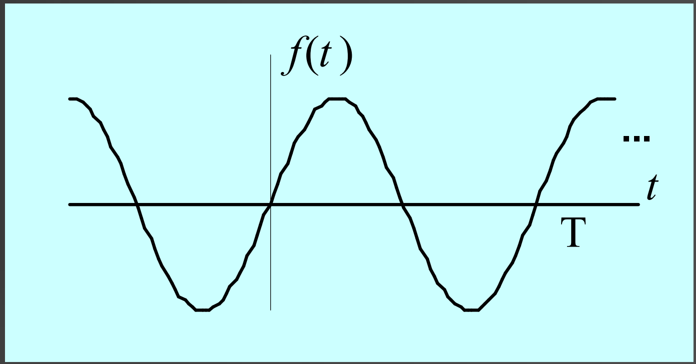


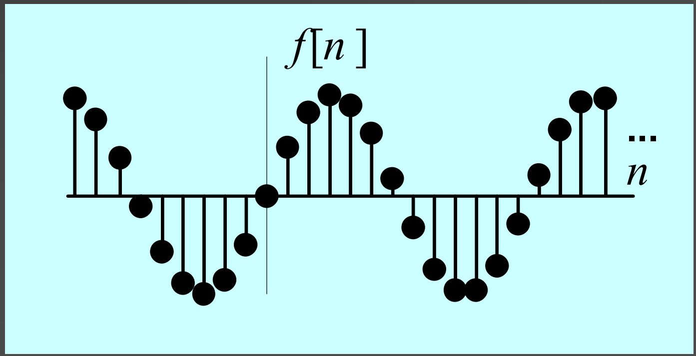


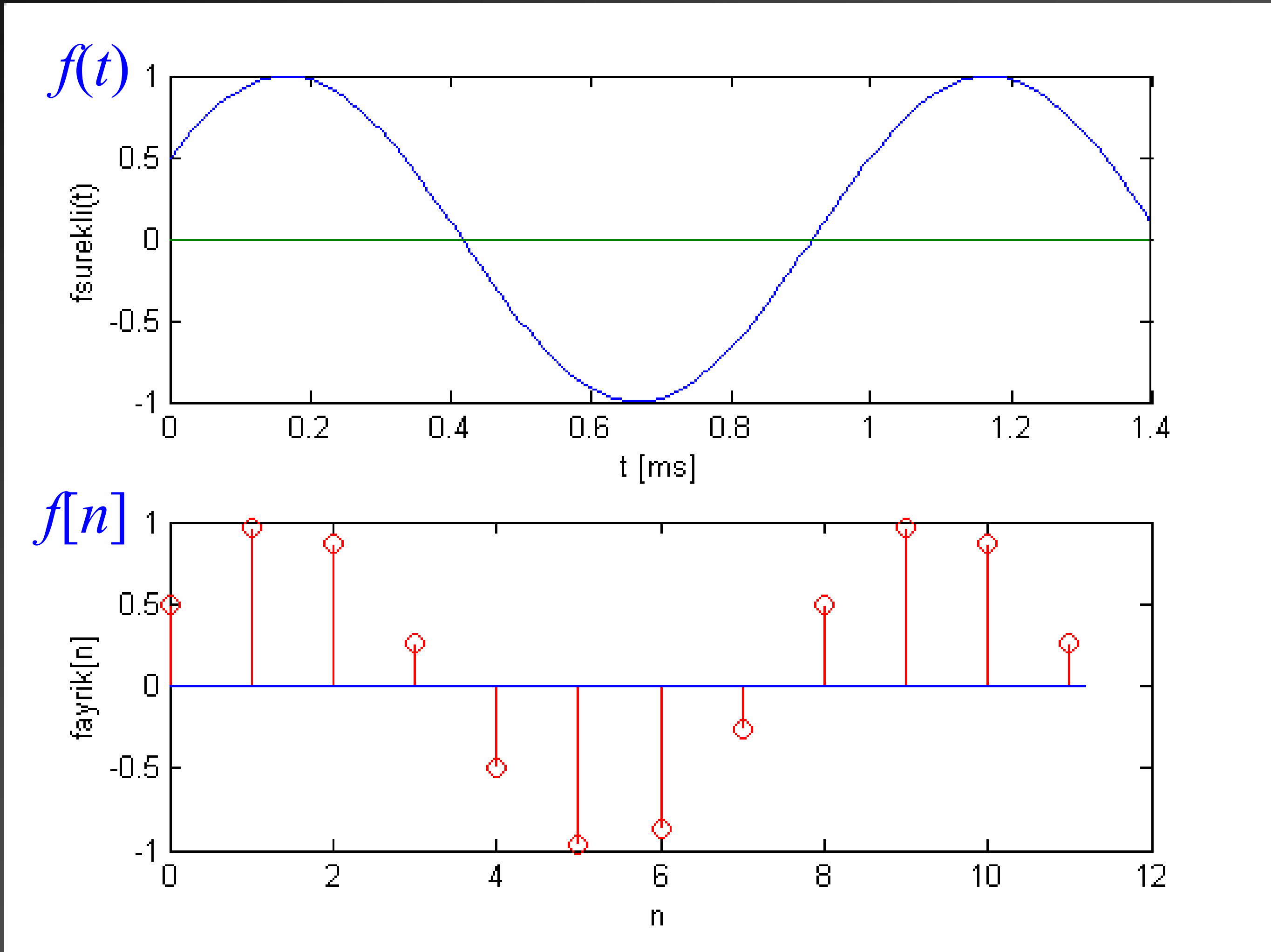
Tek işaretler

$f(t) = -f(-t)$

$f(t)$ işareti $t=0$ noktasına (orjine) göre simetriktir







f(t)
fsurekli(t)
1
0.5
0
-0.5
-1
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
1.2
1.4
t [ms]
f[n]
fayrik[n]
1
0.5
0
-0.5
-1
0
2
4
6
8
10
12
n

```
clear;% Sürekli ve ayrik sinüs isaretinin MATLAB ile cizimi

f0=1;      %frekans [Hz]

disp('bir periyottaki örnek sayisini giriniz')

input('os=');

os=ans;

t=0:0.01:1.4;

fs=sin(2*pi*f0*t+pi/6);%sürekli sinüs

e=0*t;

 subplot(2,1,1);

            plot(t,fs,t,e);

            xlabel('t [ms]')

            ylabel('fsurekli(t)')
```

```
t=0:(1/os):1.4;

fa=sin(2*pi*f0*t+pi/6);%ayrik sinüs

n=t*os;

    x=0:0.001:1.4*os;

    xx=0*x;

     subplot(2,1,2);

            %grid on;

            stem(n,fa,'r'),line(x,xx);

    xlabel('n')

            ylabel('fayrik[n]')
```

a pozitif bir sabit

$$\int_{-a}^{a} f(t)dt = 2\int_{0}^{a} f(t)dt$$

$f(t)$ çift fonksiyon

$$\int_{-a}^{a} f(t)dt = 0$$

$f(t)$ tek fonksiyon

(çift fonksiyon) x (çift fonksiyon) = çift fonksiyon
(çift fonksiyon) x (tek fonksiyon) = tek fonksiyon
(tek fonksiyon) x (tek fonksiyon) = çift fonksiyon

Bir işaretin tek ve çift bileşenlerinin elde edilmesi

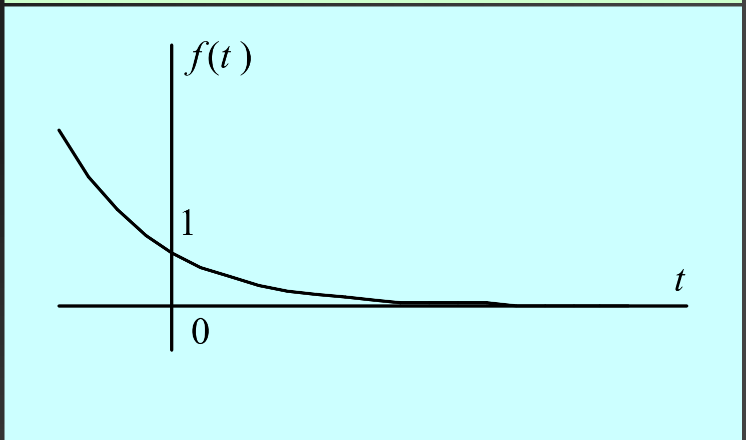
$$f(t) = f_e(t) + f_o(t)$$

$$f(-t) = f_e(t) - f_o(t)$$

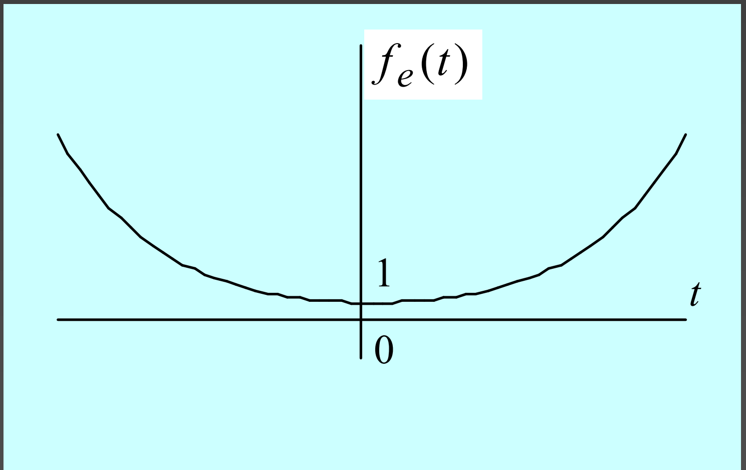
$$f_e(t) = \frac{f(t) + f(-t)}{2}$$

$$f_o(t) = \frac{f(t) - f(-t)}{2}$$

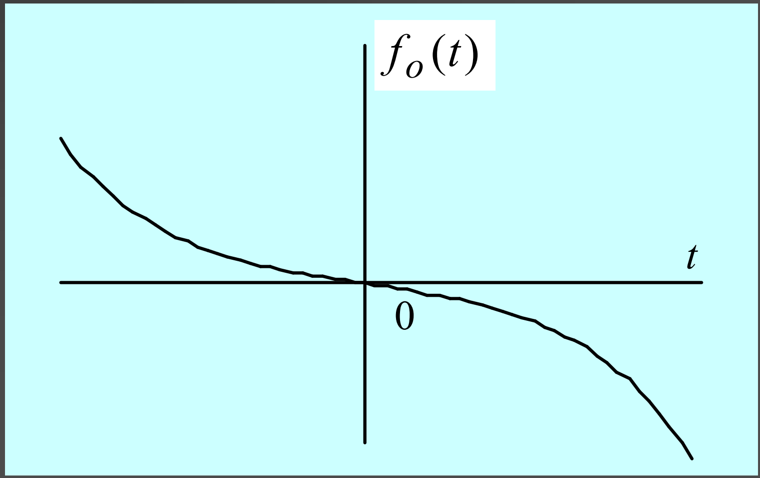
Örnek: $f(t) = e^{-t}, \quad -\infty < t < \infty$



$$f_e(t) = \frac{f(t) + f(-t)}{2} = \frac{e^{-t} + e^{t}}{2}$$



$$f_o(t) = \frac{f(t) - f(-t)}{2} = \frac{e^{-t} - e^{t}}{2}$$



Singüler Fonksiyonlar

Bu fonksiyonların kendileri ya da türevleri sonlu bir değere sahip değildir.

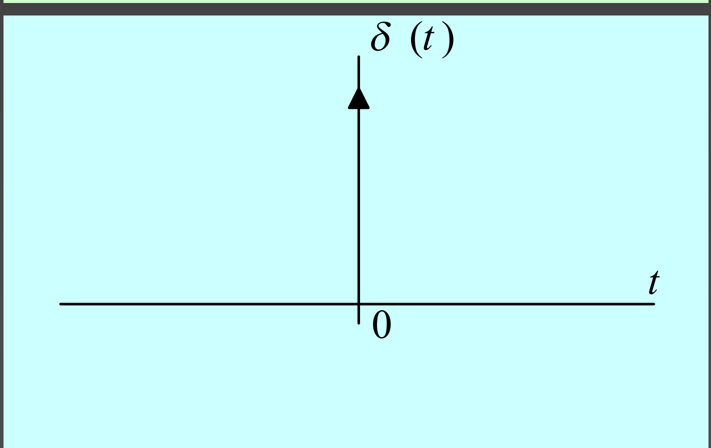
Birim vuruş fonksiyonu $\delta(t)$ (dirac delta)

$f(t)$ fonksiyonu $t = t_0$ da sürekli bir fonksiyon,

a ve b gerçel sayılar

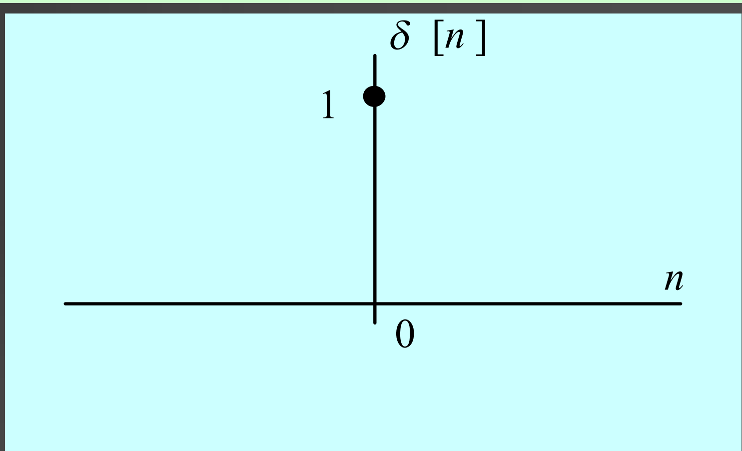
$$\int_a^b f(t)\delta(t-t_0)dt = \begin{cases} f(t_0), & a \le t_o \le b \text{ ise} \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

$$f(t_0) = 1 \quad \text{ise} \quad \int_a^b \delta(t-t_0)dt = 1$$



Birim örnek fonksiyonu $\delta[n]$

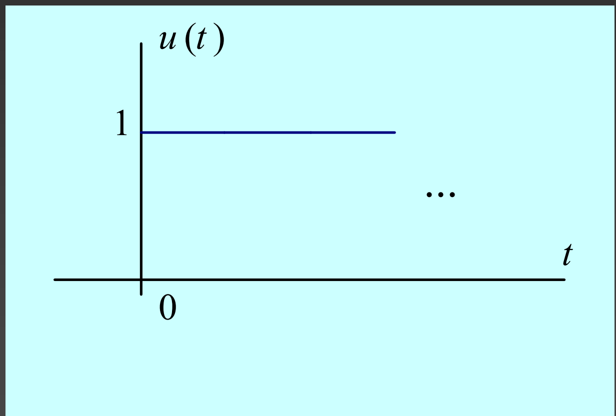
$$\sum_{n_a}^{n_b} f[n]\delta[n-n_0] = \begin{cases} f[n_0], & n_a \le n_0 \le n_b \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

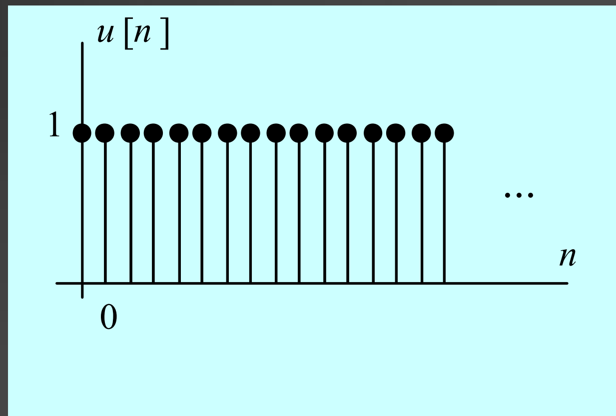


Birim basamak fonksiyonu

$$u(t)=\begin{cases}0, & t<0 \text{ ise},\\ 1, & t\geq 0 \text{ ise}\end{cases}$$

$$u[n]=\begin{cases}0, & \mathrm{n}<0 \text{ ise},\\ 1, & n\geq 0 \text{ ise}\end{cases}$$

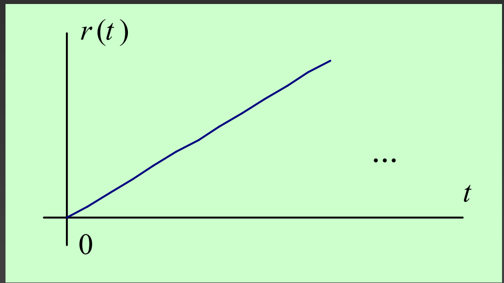


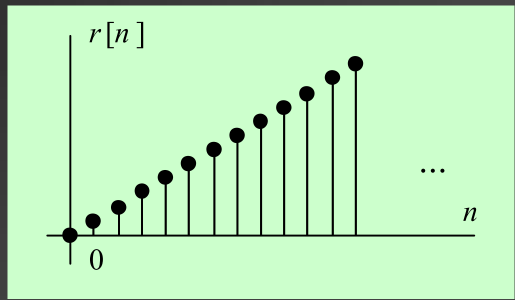


Birim Rampa Fonksiyonu

$$r(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \text{ ise,} \\ t, & t \geq 0 \text{ ise} \end{cases}$$

$$r[n] = \begin{cases} 0, & n < 0 \text{ ise,} \\ n, & n \geq 0 \text{ ise} \end{cases}$$

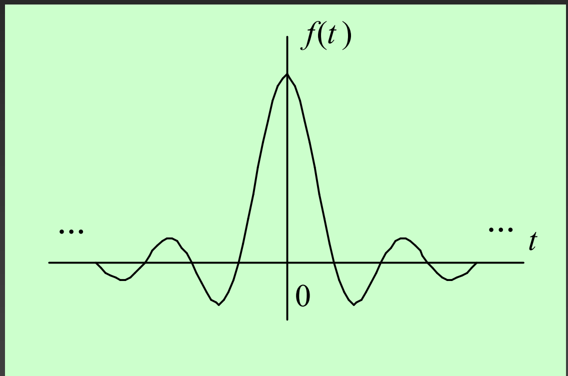


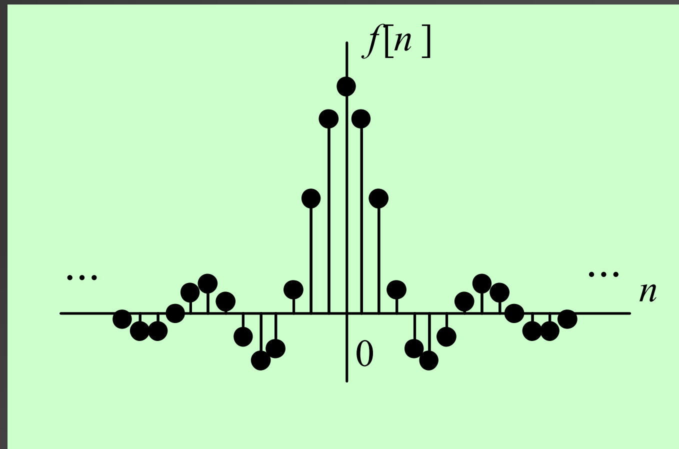


Sinc Fonksiyonu

$$Sinc\,at = \frac{Sin\,a\pi\,t}{a\pi\,t}$$

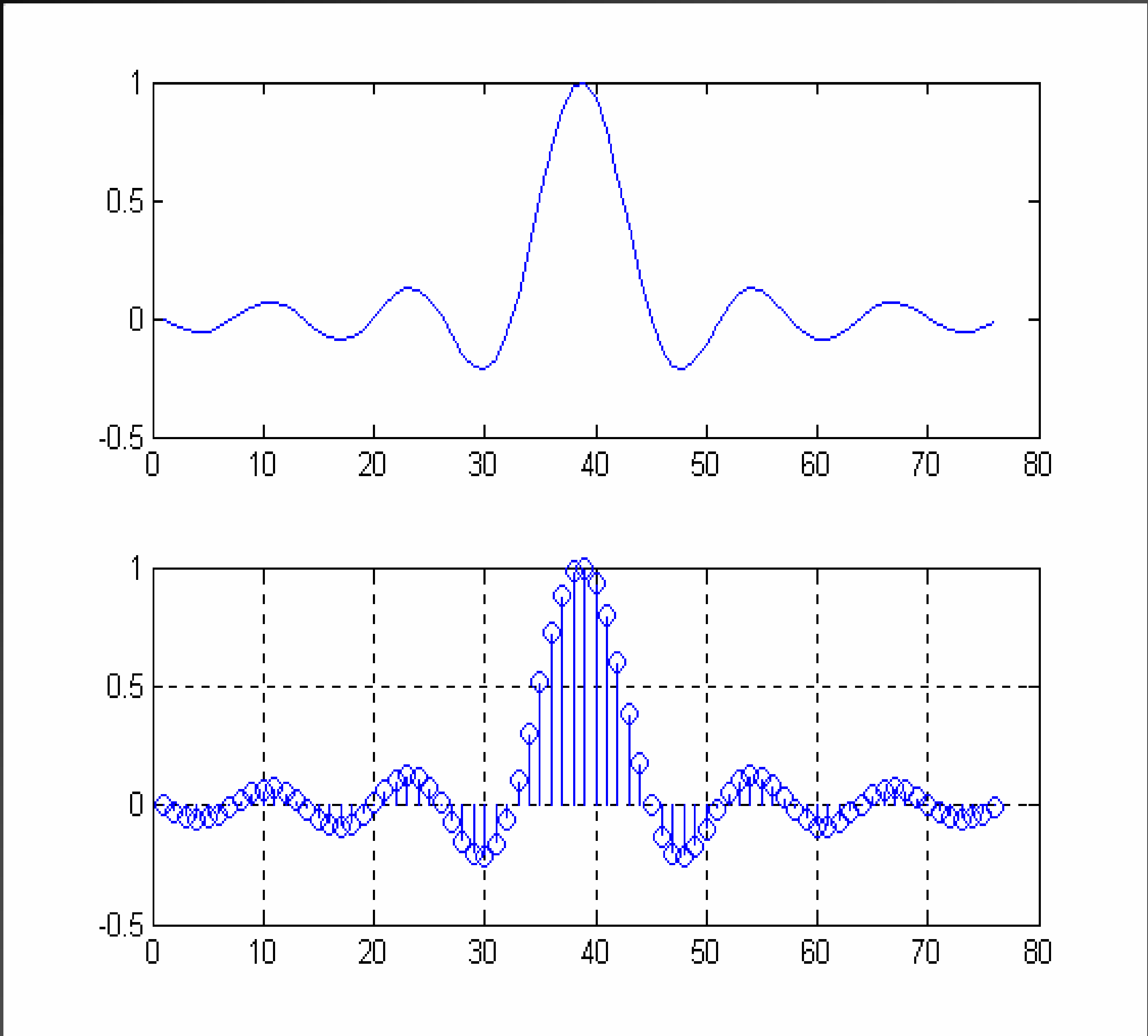
$$Sinc\,an = \frac{Sin\,a\pi\,n}{a\pi\,n}$$





$$t = k\frac{1}{a}, \quad k = \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots$$

$$n = k\frac{1}{a}, \quad k = \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots$$

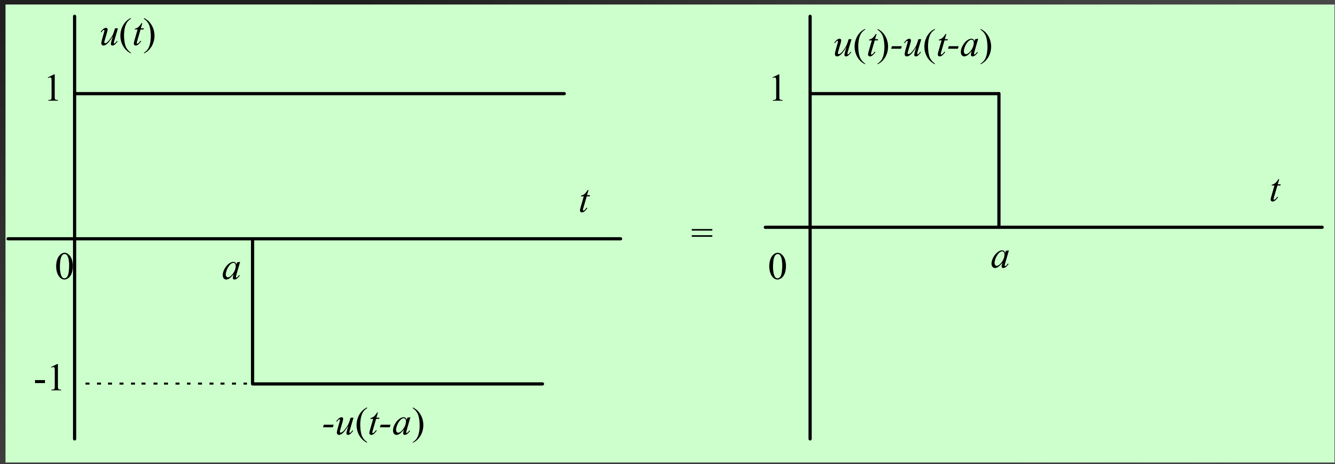

1
0.5
0
-0.5
0 10 20 30 40 50 60 70 80
1
0.5
0
-0.5
0 10 20 30 40 50 60 70 80

```
clear;
i=1;
for t=-6*pi:0.5:6*pi,
    if (t) == 0
        f(i) = 1;
    else
        f(i)=sin(t)/t;
    end
    i = i+1;
end
```

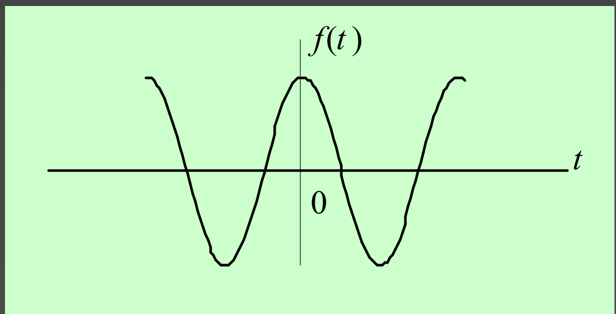
```
subplot(2,1,1);
plot(f);
subplot(2,1,2);
stem(f);
grid on
```

İşaretlerin Singüler Fonksiyonlarla Temsili

Dikdörtgen vuruş işareti

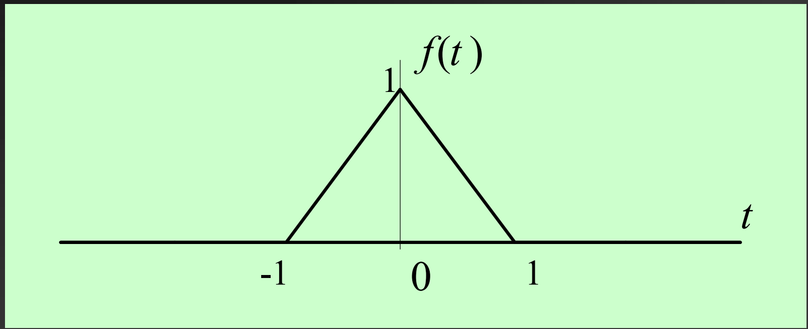


Yüksek frekanslı vuruş işareti



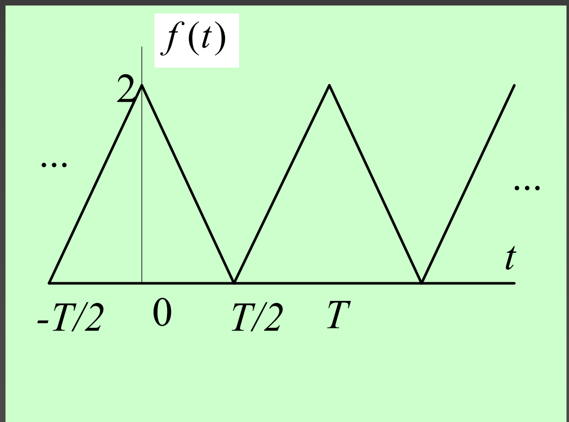
$$\big(u(t+\tau)-u(t-\tau)\big)Cos\omega t$$

Üçgen vuruş işareti



$$f(t) = r(t+1) - 2r(t) + r(t-1)$$

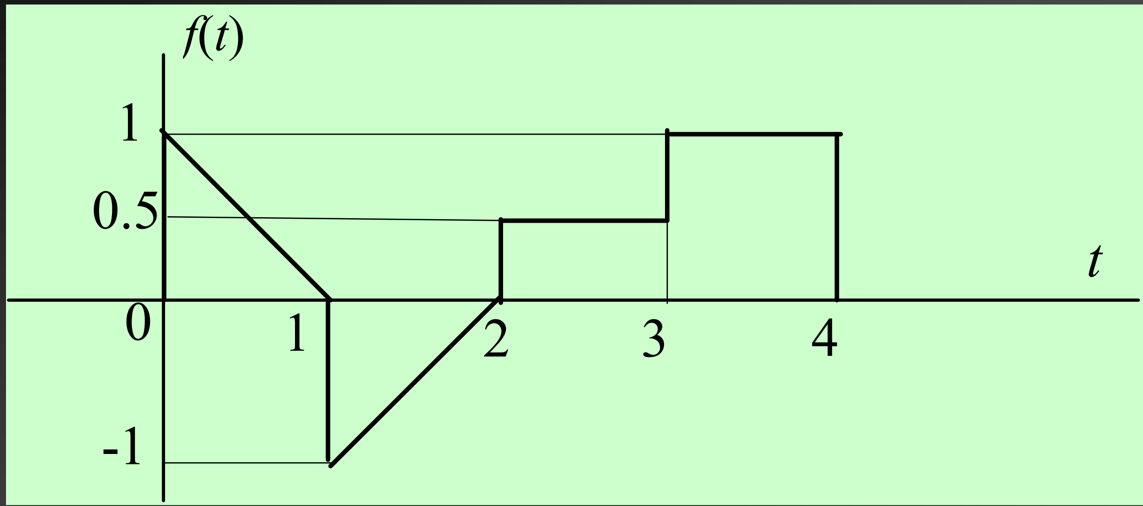
Periyodik işaretler



$$f(t) = \ldots + \frac{8}{T} r(t + \tfrac{T}{2}) - \frac{8}{T} r(t) + \frac{8}{T} r(t - \tfrac{T}{2}) - \frac{8}{T} r(t - T)$$
$$+ \frac{8}{T} r(t - \tfrac{3T}{2}) - \frac{8}{T} r(t - 2T) + \ldots$$

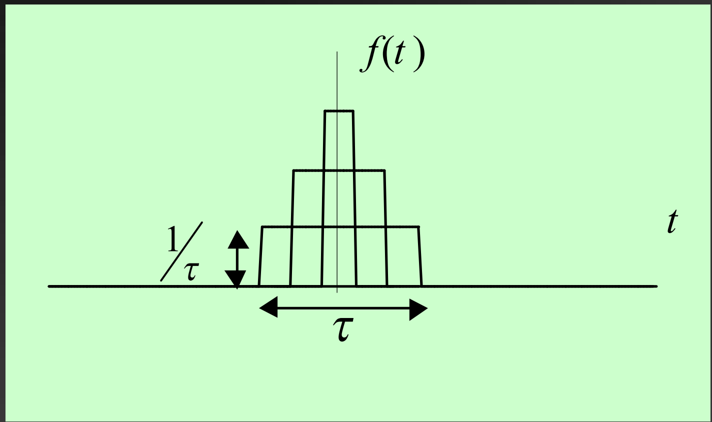
$$f(t) = \frac{8}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^{k+1} r\left(t - k\frac{T}{2}\right)$$

Karışık işaretler

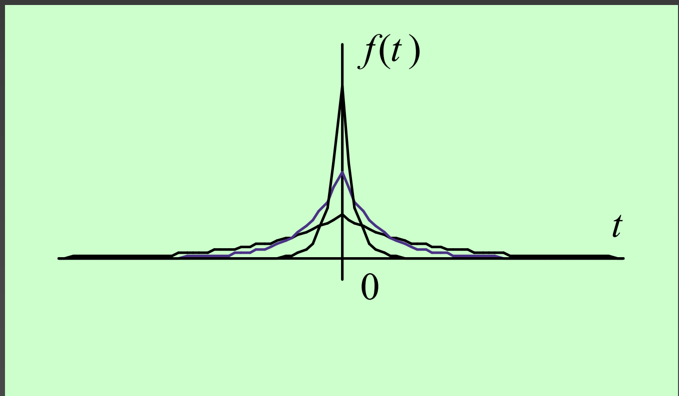


$$f(t) = -r(t) + u(t) + 2r(t-1) - u(t-1) - r(t-2)$$
$$+ 0.5u(t-2) + 0.5u(t-3) - u(t-4)$$

Birim vuruş işaretinin fiziksel fonksiyonlarla temsili



$$\delta(t) = \lim_{\tau \to 0} \frac{1}{\tau}\left[u\left(t+\frac{\tau}{2}\right) - u\left(t-\frac{\tau}{2}\right)\right]$$

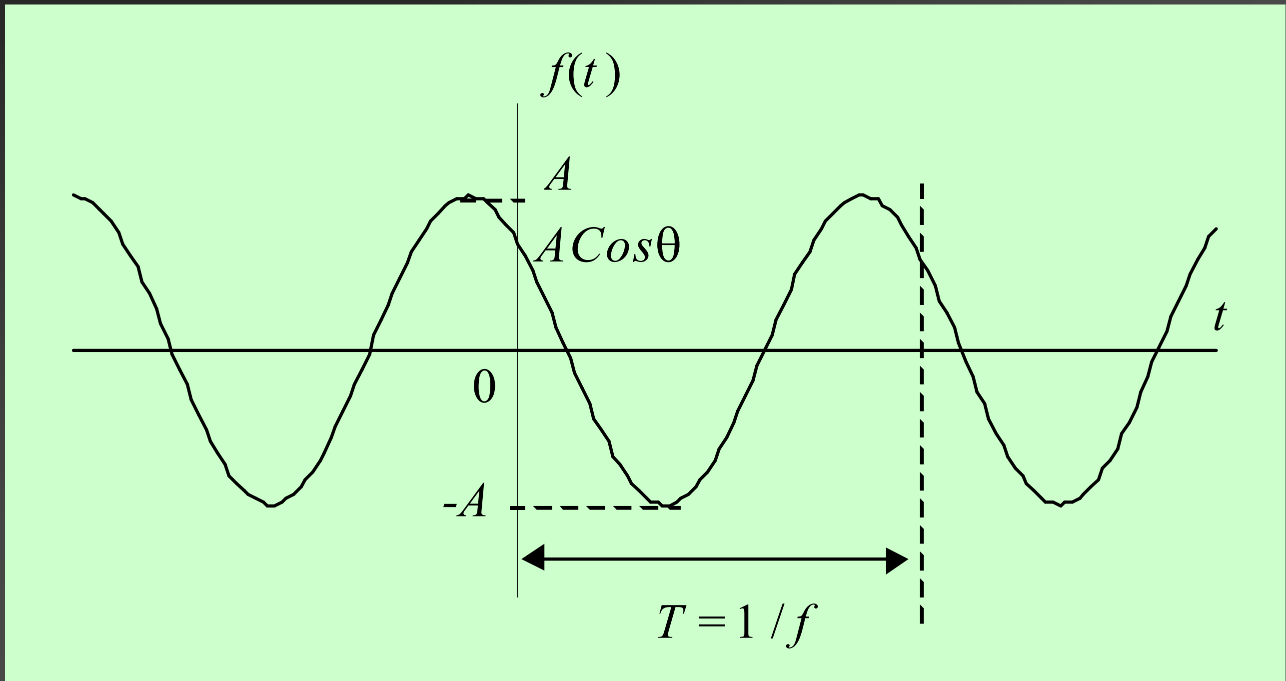


$$\delta(t) = \lim_{\tau \to 0} \frac{1}{\tau} e^{-|2t|/\tau}$$

Sürekli ve Ayrık Zamanlı İşaretlerde Frekans Kavramı

- Sürekli zamanlı sinüzoidal işaretler

$$f(t) = ACos(\omega t + \theta) \qquad -\infty < t < \infty$$

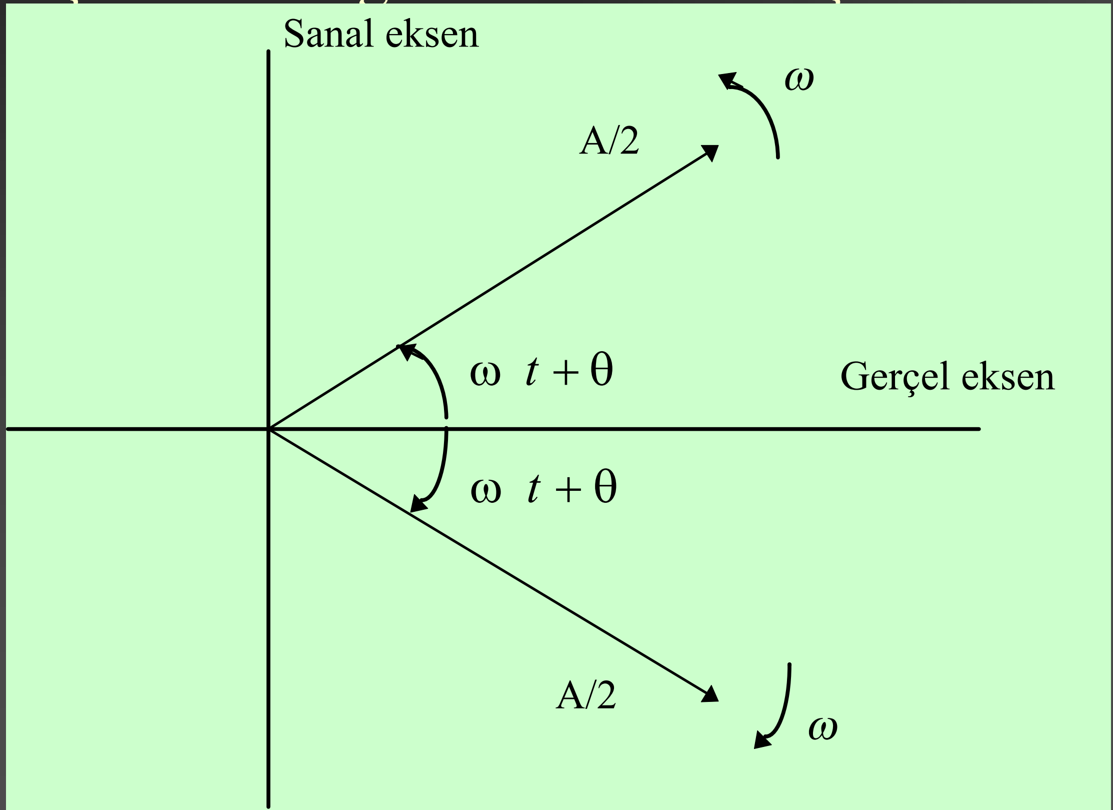


Euler eşitliği $e^{\pm j\phi} = cos\,\phi \pm j\,sin\,\phi$

kullanarak bir sinüzoidal işaret

$$f(t) = A\cos(\omega t + \theta) = \frac{A}{2}e^{j(\omega\ t+\theta)} + \frac{A}{2}e^{-j(\omega\ t+\theta)}$$

biçiminde de gösterilebilir. Bu işaretin **fazörel** gösterimi:



- Ayrık zamanlı zinüzoidal işaretler

$$f(nT_{\ddot{o}}) = A\cos(2\pi\ fT_{\ddot{o}}n + \theta) = A\cos(\omega\, T_{\ddot{o}}n + \theta) \qquad -\infty < n < \infty$$

$$\omega_s = \omega\, T_{\ddot{o}}$$

$$f[n] = A\cos(\omega_s n + \theta) \qquad -\infty < n < \infty$$

$$f_s = \frac{f}{f_{\ddot{o}}}$$

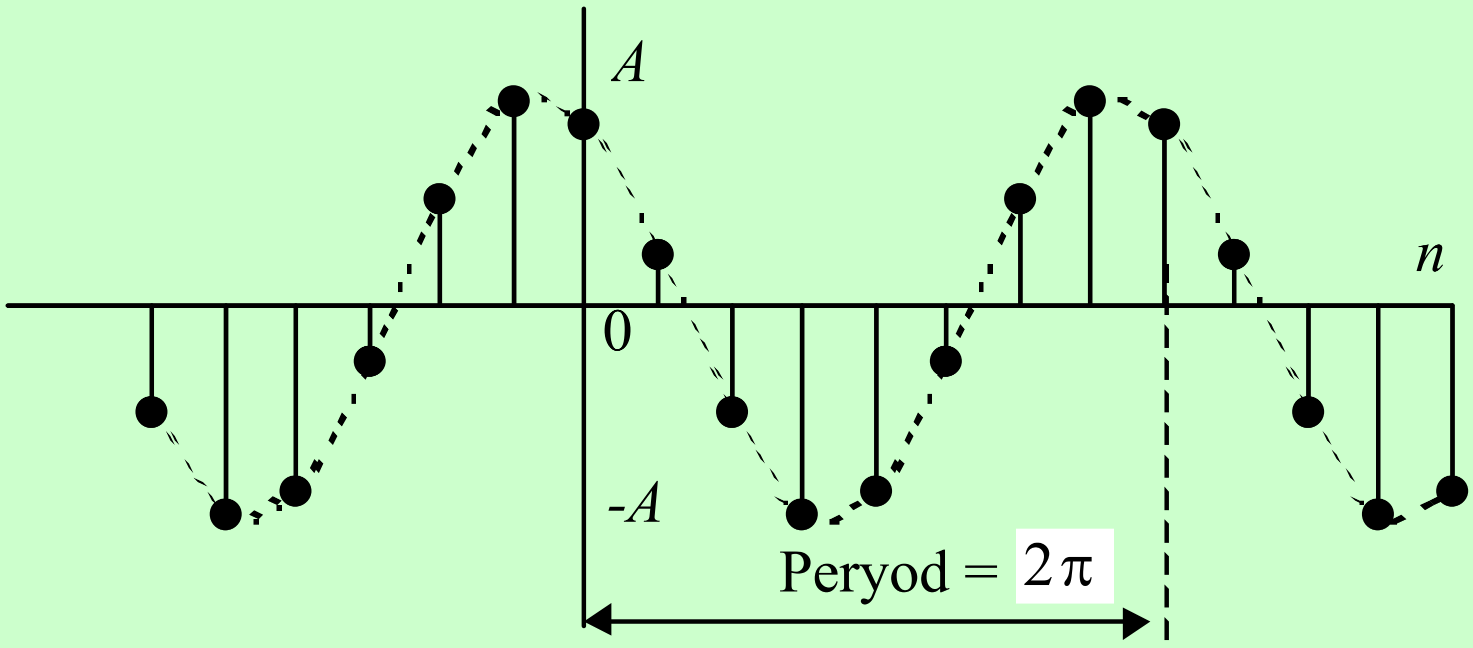
$$f[n] = A\cos(\omega\, n + \theta) \qquad -\infty < n < \infty$$

$$\frac{2\pi}{T} T_{\ddot{o}} = \frac{2\pi T_{\ddot{o}}}{NT_{\ddot{o}}} = \frac{[rad]}{[\ddot{o}rnek]}$$

Örnek:

$$f(t) = ACos\left(\frac{\pi}{4}n + \frac{\pi}{6}\right)$$

$$f[n] = A\cos(\omega\, n + \theta)$$



İşaretlerde Dikgenlik (ortogonallik) Şartı

Herhangi bir karmaşık fonksiyon setinin $\phi_k(t),\ k = 0, \pm 1, \pm 2, ...$

herhangi bir $-\infty \leq a < b \leq \infty$

aralığında dikgen set olabilmesi için bu setin

$$\int_a^b \phi_k(t)\phi_i^*(t)dt = E_k \delta(k-i) = \begin{cases} E_k, & k = i \\ 0, & k \neq i \end{cases}$$

şartını sağlaması gerekir.

Kronocker delta fonksiyonu: $$\delta(k-i) = \begin{cases} 1, & k = i \\ 0, & k \neq i \end{cases}$$

Enerji: $$E_k = \int_a^b \left|\phi_k(t)\right|^2 dt$$

Dikgenlik şartını sağlayan işaretler aynı zamanda ilgili aralıkta birim enerjiye sahipseler bu işaretler aynı zamanda **normalize dikgen**dirler.

Herhangi bir karmaşık ayrık fonksiyon setinin $\phi_k[n],\ k = 0,\pm1,\pm2,...$

herhangi bir $-\infty \le n_a < n_b \le \infty$

aralığında dikgen set olabilmesi için bu setin

$$\sum_{n_a}^{n_b} \phi_k[n]\phi_i^*[n] = E_k\delta[k-i] = \begin{cases} E_k, & k = i \\ 0, & k \ne i \end{cases}$$

şartını sağlaması gerekir.

Enerji: $$E_k = \sum_{n_a}^{n_b} \left|\phi_k(n)\right|^2$$

Örnek: $\phi_k(t) = \sin kt,\ \ k = 1,2,3,...$ işaret setinin $-\pi < t < \pi$ aralığında dikgen olup olmadığı araştırılsın

Çözüm:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \phi_k(t)\phi_i^*(t)dt = \int_{-\pi}^{\pi} (\sin kt)(\sin it)dt = \tfrac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(k-i)t\, dt - \tfrac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(k+i)t\, dt$$

$$= \begin{cases} \pi, & k = i \\ 0, & k \neq i \end{cases}$$

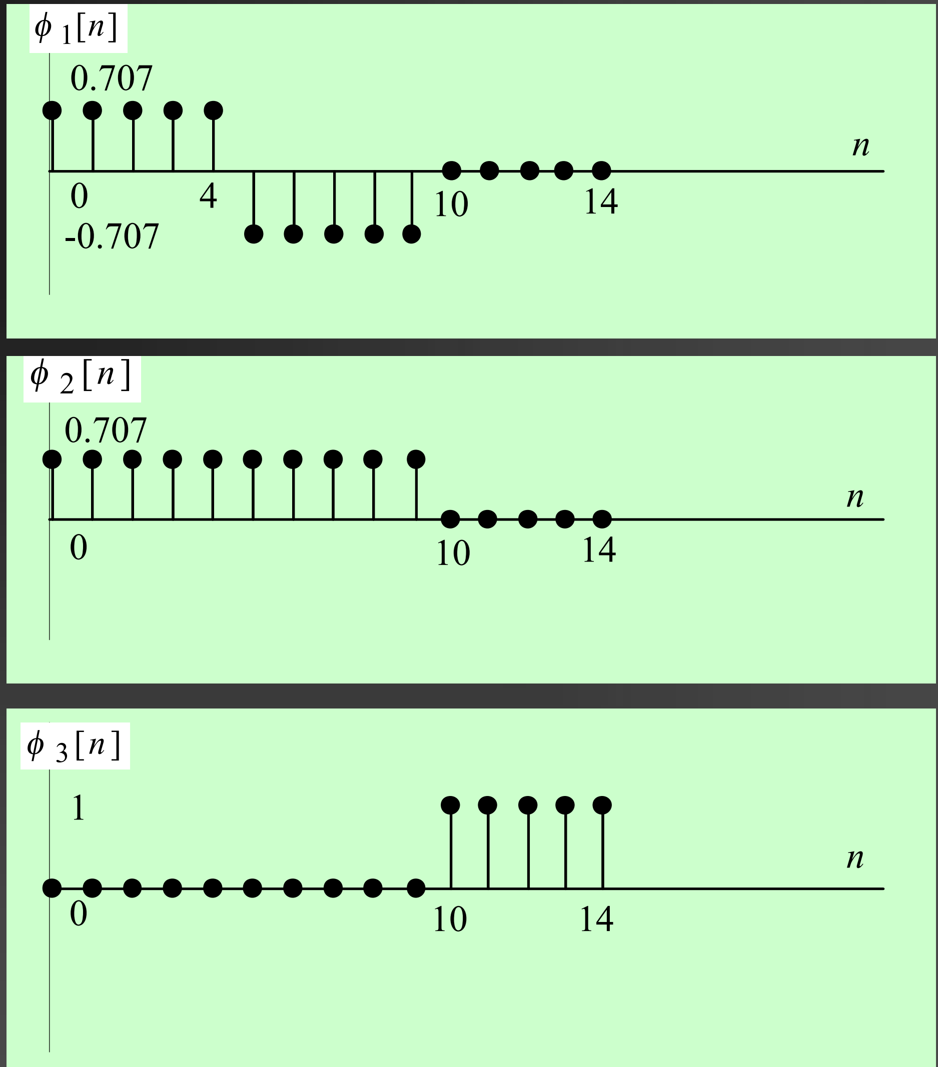
Örnek: $\phi_k(t) = e^{j(2\pi kt)/T}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ işaret setinin

$0 \le t \le T$ aralığında dikgen olup olmadığı araştırılsın

Çözüm:

$$\int_0^T \phi_k(t)\phi_i^*(t)dt = \int_0^T e^{\left(\frac{j(2\pi k\, t)}{T}\right)} e^{\left(\frac{-j(2\pi i\, t)}{T}\right)} dt = \begin{cases} T, & k = i \\ 0, & k \ne i \end{cases}$$

Örnek:



$0 \le n \le 14$ aralığında dikgen olup olmadıklarını araştırınız

İşaretlerin Dikgen Fonksiyonlarla Temsili

$\phi_k(t), \quad a < t < b$ aralığında dikgen bir işaret seti olsun

$f(t)$ bu aralıkta sonlu enerjili bir işaret olsun

$f(t)$ işareti bu dikgen set cinsinden yakınsak bir seriyle gösterilebilir.

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} F_k \phi_k(t)$$

$$F_k = \frac{1}{E_k} \int_a^b f(t)\phi_k^*(t)dt = \frac{\int_a^b f(t)\phi_k^*(t)dt}{\int_a^b \left|\phi_k(t)\right|^2 dt}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, ..$$

Ayrık işaretler için bu ifadelerin karşılığı

$$f[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}F(k)\phi_k[n]$$

$$F(k)=\frac{1}{E_k}\sum_{n_a}^{n_b}f[n]\phi_k^*[n]=\frac{\sum_{n_a}^{n_b}f[n]\phi_k^*[n]}{\sum_{n_a}^{n_b}\left|\phi_k[n]\right|^2},\qquad k=0,\pm1,\pm2,..$$

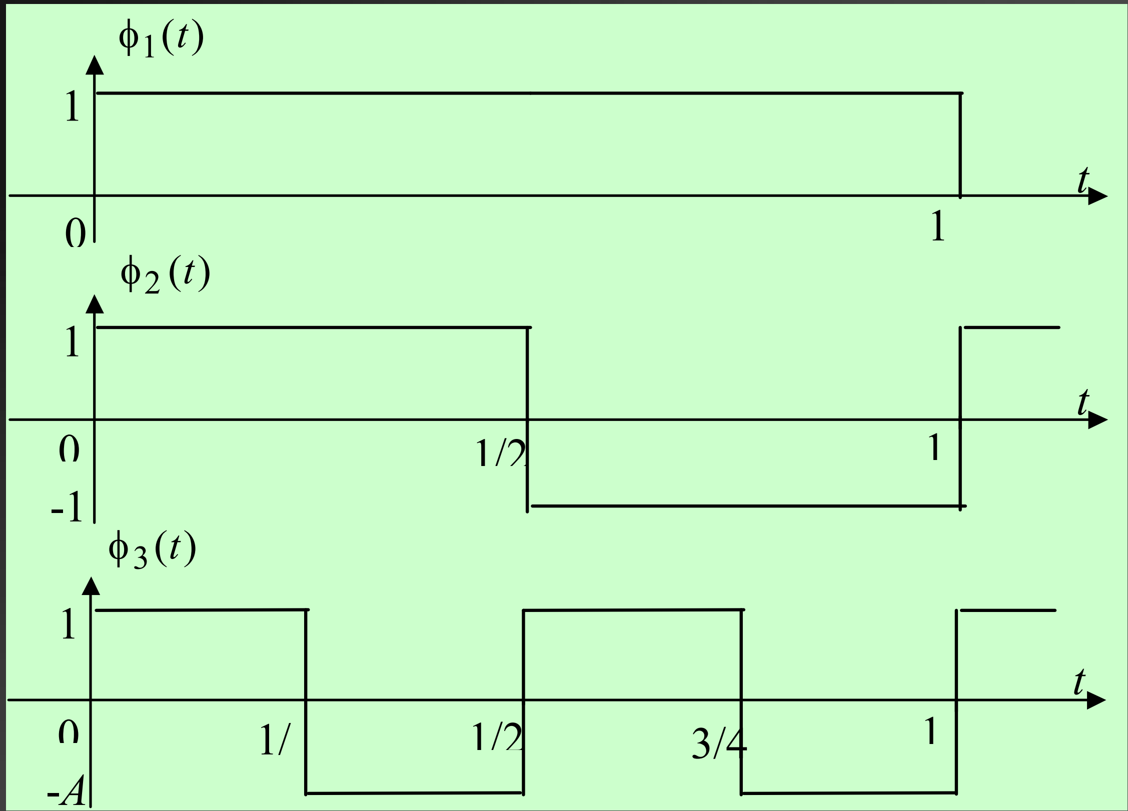
Örnek:

a) Aşağıda grafikleri verilen fonksiyonların $0<t<1$ aralığında dikgen bir set oluşturduğunu gösteriniz.

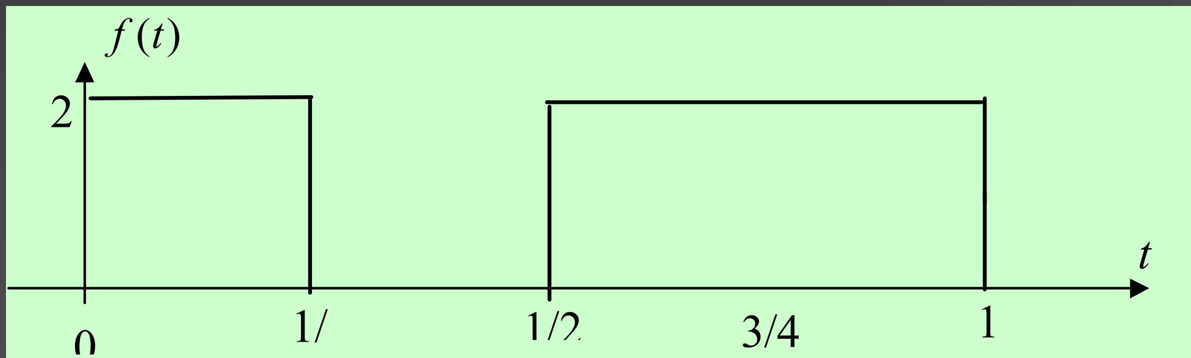
b)Aşağıda grafiği verilen $f(t)$ işaretini bu dikgen set cinsinden yazınız.

c) Hata fonksiyonunu çiziniz

d) Hatanın enerjisini hesaplayınız.



ϕ1(t)
1
0
1
t
ϕ2(t)
1
0
1/2
1
-1
t
ϕ3(t)
1
0
1/
1/2
3/4
1
-A
t



f(t)
2
0
1/
1/2
3/4
1
t

Çözüm:

$$\int_0^1 \phi_1(t)\phi_2(t)dt = 0$$

$$\int_0^1 \phi_1(t)\phi_3(t)dt = 0$$

$$\int_0^1 \phi_2(t)\phi_3(t)dt = 0$$

$$\int_0^1 \phi_1(t)\phi_1(t)dt = 1$$

$$\int_0^1 \phi_2(t)\phi_2(t)dt = 1$$

$$\int_0^1 \phi_3(t)\phi_3(t)dt = 1$$

$$\int_0^1 \phi_k(t)\phi_i^*(t)dt = \begin{cases} 1, & k = i \\ 0, & k \neq i \end{cases}$$

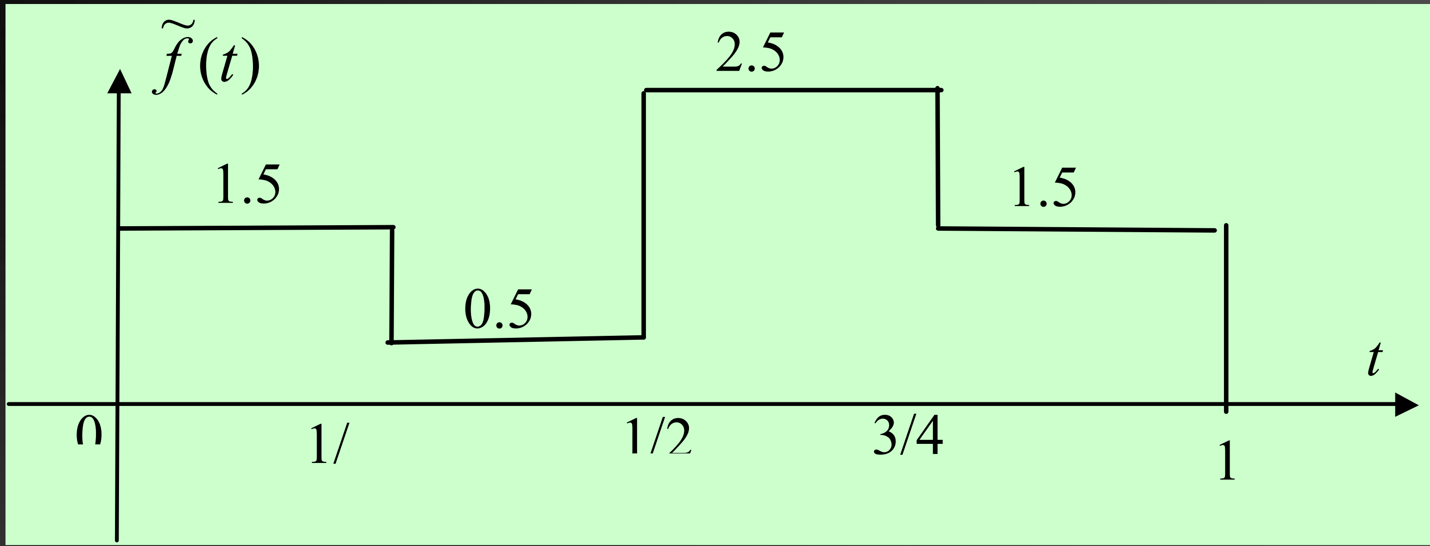
$$f(t) \approx \tilde{f}(t) = F_1\phi_1(t) + F_2\phi_2(t) + F_3\phi_3(t)$$

$$F_1 = \int_0^1 f(t)\phi_1(t)dt = 2\int_0^{1/4} 1.dt + 2\int_{1/2}^{1} 1.dt = 2\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}$$

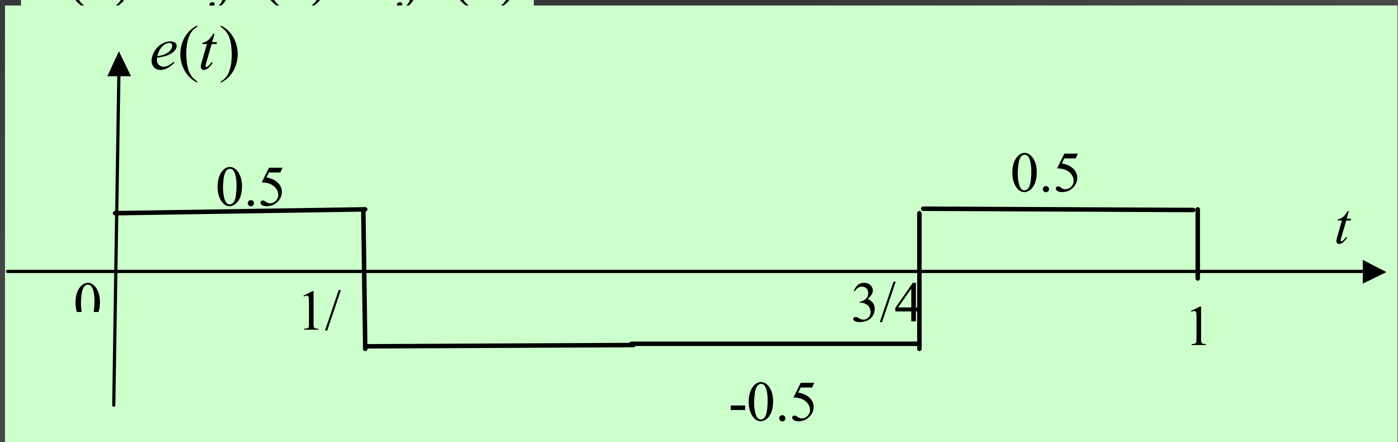
$$F_2 = \int_0^1 f(t)\phi_2(t)dt = 2\int_0^{1/4} 1.dt - 2\int_{1/2}^{1} 1.dt = -\frac{1}{2}$$

$$F_3 = \int_0^1 f(t)\phi_3(t)dt = 2\int_0^{1/4} 1.dt + 2\int_{1/2}^{3/4} 1.dt - 2\int_{3/4}^{1} 1.dt = \frac{1}{2}$$

$$\tilde{f}(t) = \frac{3}{2}\phi_1(t) - \frac{1}{2}\phi_2(t) + \frac{1}{2}\phi_3(t)$$

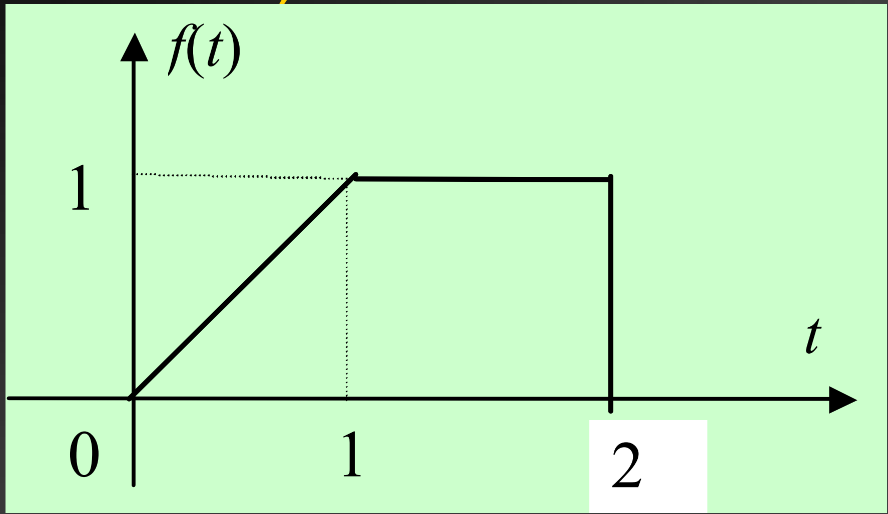


$$e(t) = f(t) - \tilde{f}(t)$$



$$\int_0^1 |e(t)|^2 dt = \frac{0.25}{4} + \frac{0.25}{4} + \frac{0.25}{4} + \frac{0.25}{4} = \frac{1}{4}$$

Problem-1)



a) $f\left(\frac{1}{2}t\right)$

b) $f(2t)$

c) $f(t-2)$

d) $f(t+2)$

e) $f(-t+2)$

f) $f(-t-2)$

g) $f(2t-3)$

Problem-2)

$$f[n] = (0.6)^n u[n]$$

a) $f[n-2]$

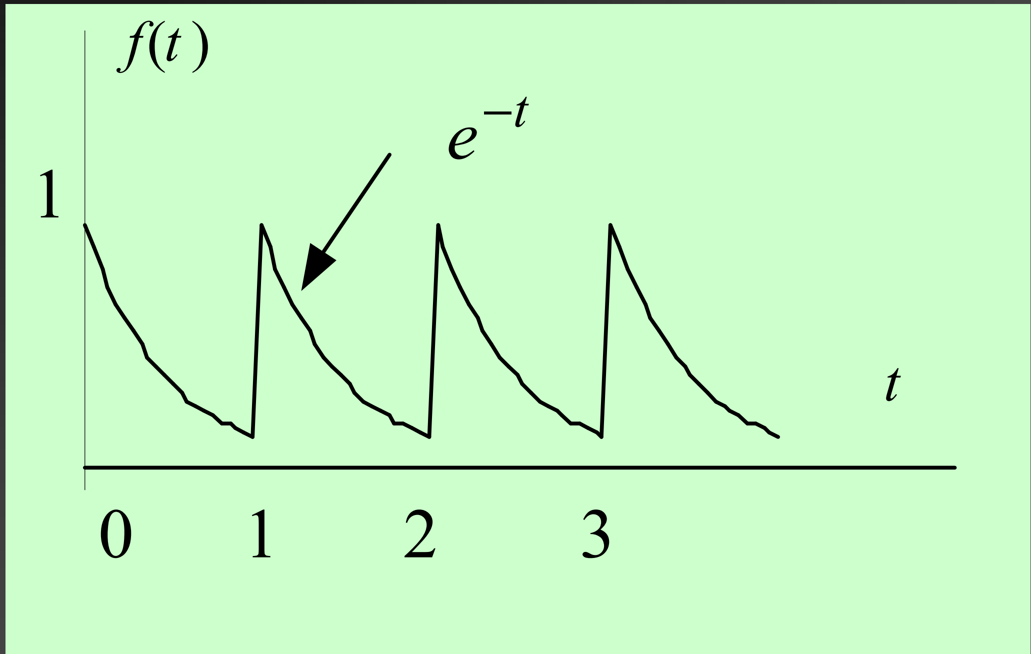
b) $f[-n+1]$

c) $f[n+1]$

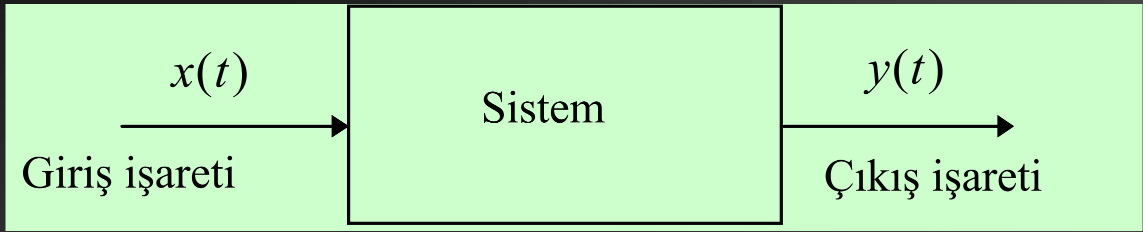
d) $f[-n-2]$

Problem-3)

Şekilde verilen işareti üstel ve singüler fonksiyonlar cinsinden ifade ediniz



2. Doğrusal Zamanla Değişmeyen (DZD) Sürekli Sistemlerin Zaman Domeni Modelleri



$$x(t) \rightarrow y(t)$$

- Diferansiyel Denklem Modeli
- Birim Vuruş Tepkesi Modeli
- Durum Uzayı Modeli

Doğrusallık özelliği:

$$x_1(t) \rightarrow y_1(t) \quad \text{ve} \quad x_2(t) \rightarrow y_2(t)$$

$$ax_1(t) + bx_2(t) \rightarrow ay_1(t) + by_2(t)$$

Doğrusallık özelliği süperpozisyon ve homojenlik özelliğiyle yakından ilgilidir:

Süperpozisyon özelliği:

$$x_1(t) \rightarrow y_1(t)$$
$$x_2(t) \rightarrow y_2(t)$$
$$.$$
$$.$$
$$.$$
$$x_n(t) \rightarrow y_n(t)$$

$$x_1(t) + x_2(t) + \ldots + x_n(\mathrm{t}) \rightarrow y_1(t) + y_2(t) + \ldots + y_n(\mathrm{t})$$

Homojenlik özelliği:

$$x_1(t) \rightarrow y_1(t)$$
$$ax_1(t) \rightarrow ay_1(t)$$

Örnek: $y(t) = \int x(t)dt$

$$x_1(t) \rightarrow y_1(t) = \int x_1(t)dt$$

$$x_2(t) \rightarrow y_2(t) = \int x_2(t)dt$$

$$ax_1(t) + bx_2(t) \rightarrow \int (ax_1(t) + bx_2(t))\, dt = \int ax_1(t)\, dt + \int bx_2(t)\, dt$$

Örnek:

$$y(t) = x^2(t)$$

$$x_1(t) \rightarrow y_1(t) = x_1^2(t)$$

$$x_2(t) \rightarrow y_2(t) = x_1^2(t)$$

$$ax_1(t) + bx_2(t) \rightarrow \left(ax_1(t) + bx_2(t) \right)^2 \neq ax_1^2(t) + bx_2^2(t)$$

Zamanla Değişmezlik Özelliği

$$x(t) \rightarrow y(t)$$
$$x(t-t_0) \rightarrow y(t-t_0)$$

Örnek:

$$y(t) = tx(t)$$

$$x(t) \rightarrow y(t) = tx(t)$$

$$x(t-t_0) \rightarrow tx(t-t_0) \neq (t-t_0)x(t-t_0)$$

Örnek:

$$y(t) = \int x(t)dt$$

$$x(t) \rightarrow y(t) = \int x(t)dt$$

$$x(t - t_0) \rightarrow \int x(t - t_0)dt$$

Örnek:

$$y(t) = x^2(t)$$

$$x(t) \rightarrow y(t) = x^2(t)$$

$$x(t - t_0) \rightarrow x^2(t - t_0)$$

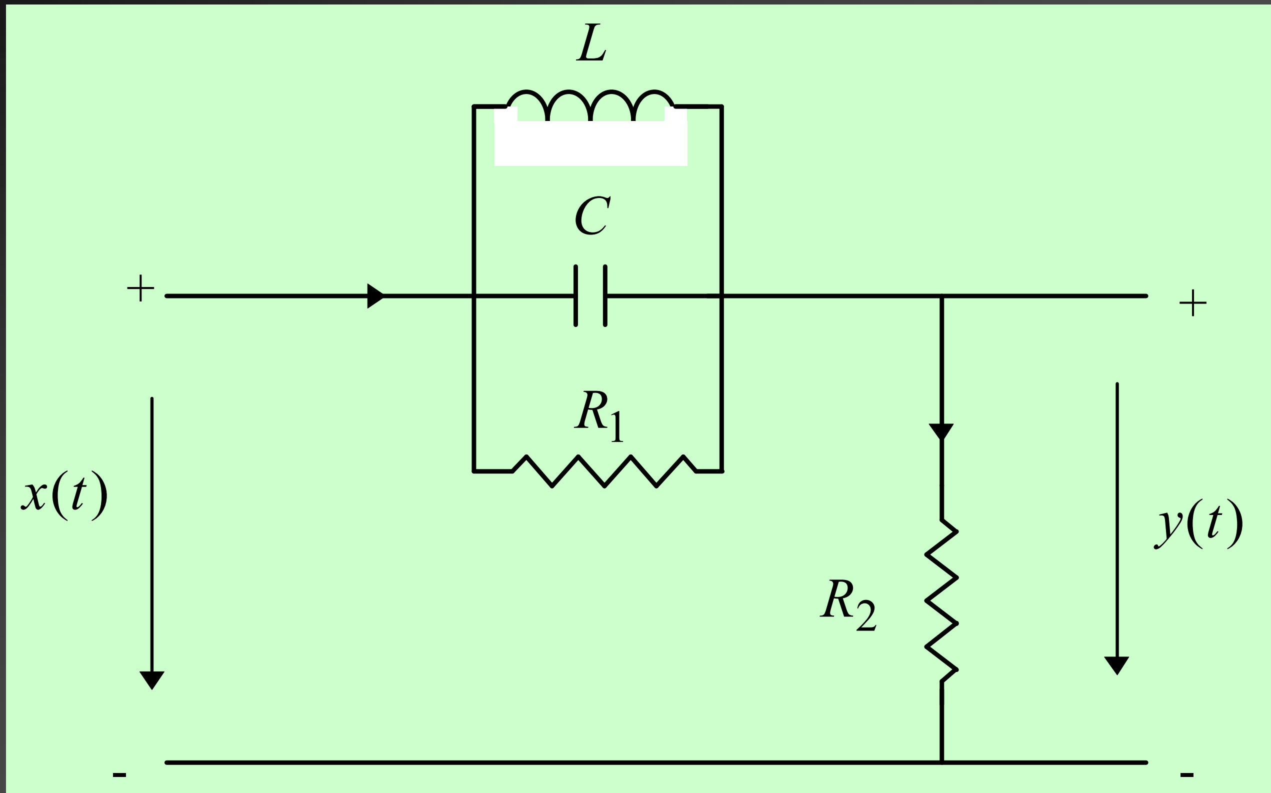
***Belleksiz (statik)-Bellekli (dinamik) Sistem**:* Doğrusal zamanla değişmeyen bir sistemin çıkışının belli bir zamandaki değeri sadece girişin o andaki değerine bağlıysa bu sistem *belleksiz (statik)* sistem olarak adlandırılır. Bu tür sistemlerin matematiksel modelleri diferansiyel denklem içermezler. Eğer doğrusal zamanla değişmeyen bir sistemin çıkışının belli bir zamandaki değeri girişin o andaki ve daha öncezamanlardaki değerlerine bağlı oluyorsa, bu sistem *bellekli (dinamik)* sistem olarak adlandırılır. Bu tür sistemlerin matematiksel modelleri diferansiyel denklem içerirler.

Diferansiyel Denklem Modeli

$$\sum_{n=0}^{N} a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} = \sum_{m=0}^{M} b_m \frac{d^m x(t)}{dt^m}, \qquad N \geq M$$

$$y(0), \frac{dy(0)}{dt}, \dots, \frac{d^{N-1} y(0)}{dt^{N-1}}$$

Örnek:



$$v_c(t) = x(t) - y(t)$$

$$i_L(t) = \frac{1}{L}\int_0^t v_L(t)dt + I_L(0)$$

$$i_C(t) = C\frac{dv_c(t)}{dt}$$

$$i_R(t) = \frac{v_c(t)}{R_1}$$

$$y(t) = \left(i_L(t) + i_C(t) + i_R(t)\right)R_2$$

$$y(t) = \frac{R_2}{L}\int_0^t v_c(t)dt + R_2 I_L(0) + R_2 C\frac{dv_c(t)}{dt} + \frac{R_2}{R_1}v_c(t)$$

$$\frac{dy(t)}{dt} = \frac{R_2}{L}v_c(t) + R_2 C\frac{d^2 v_c(t)}{dt^2} + \frac{R_2}{R_1}\frac{dv_c(t)}{dt}$$

$$\frac{dv_c(t)}{dt} = \frac{dx(t)}{dt} - \frac{dy(t)}{dt}$$

$$R_2 C \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) \frac{dy(t)}{dt} + \tfrac{R_2}{L} y(t)$$

$$= \tfrac{R_2}{L} x(t) + \frac{R_2}{R_1} \frac{dx(t)}{dt} + R_2 C \frac{d^2 x(t)}{dt^2}$$

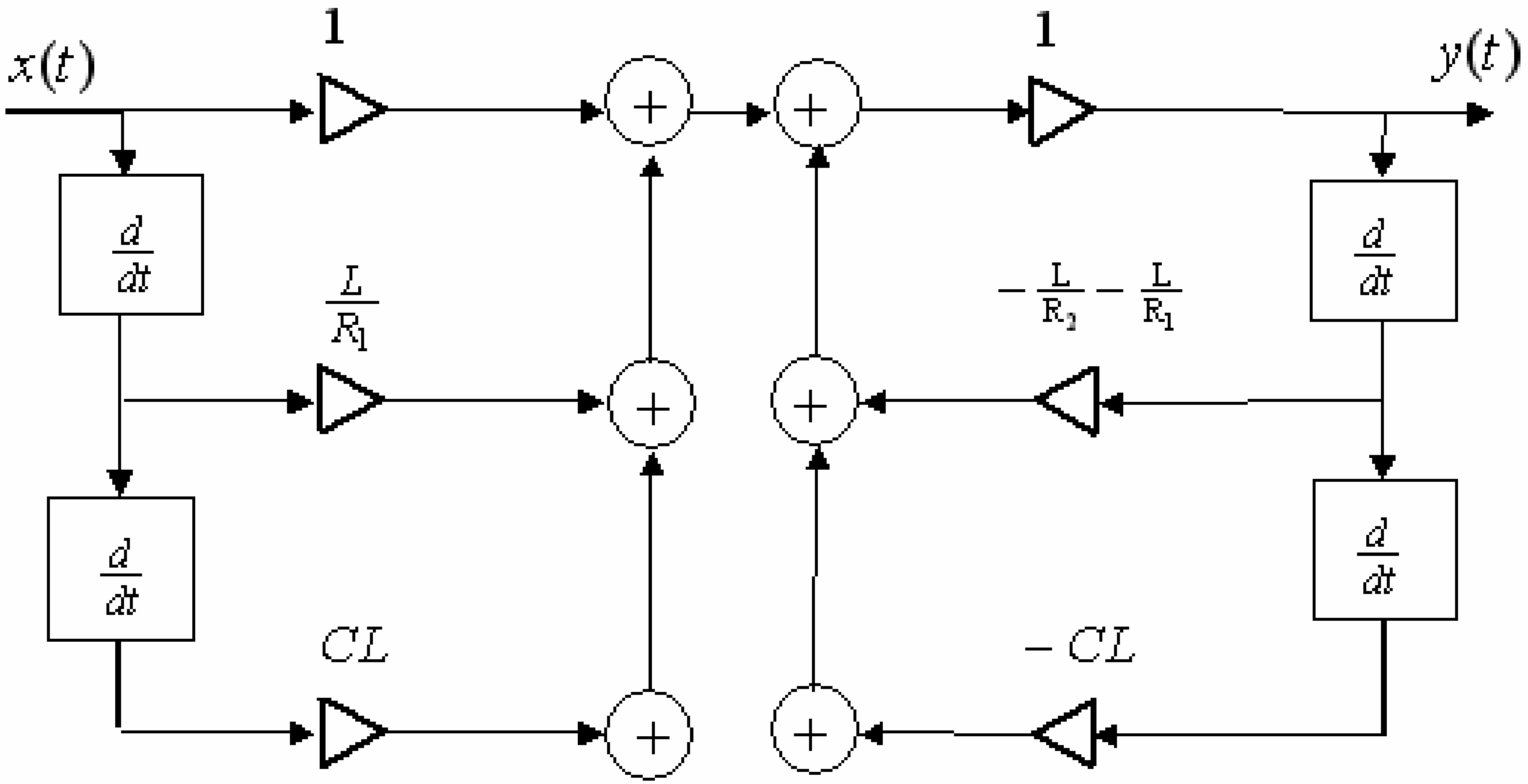
$$y(t) = x(t) + \tfrac{L}{R_1} \frac{dx(t)}{dt} + LC \frac{d^2 x(t)}{dt^2} - LC \frac{d^2 y(t)}{dt^2} - \left(\tfrac{L}{R_2} + \tfrac{L}{R_1}\right) \frac{dy(t)}{dt}$$

$$x(t) \longrightarrow \boxed{\frac{d}{dt}} \longrightarrow y(t) = \frac{dx(t)}{dt}$$

Türev alıcı

$$x(t) \longrightarrow \boxed{\int} \longrightarrow y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau$$

İntegral alıcı

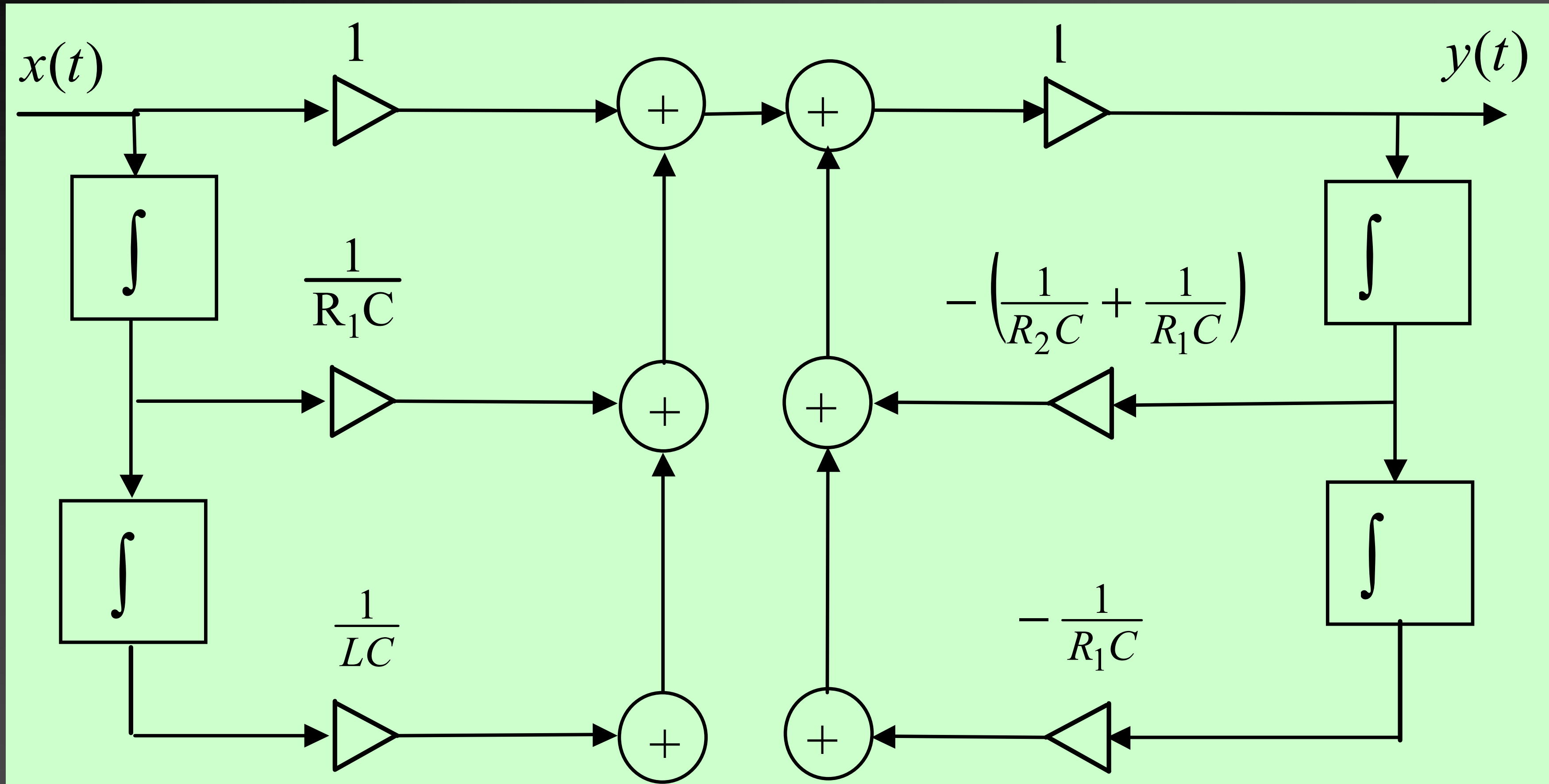


1
x(t)
1
y(t)
d/dt
d/dt
L/R1
− L/R2 − L/R1
d/dt
d/dt
CL
− CL

$$R_2Cy(t)+\left(1+\frac{R_2}{R_1}\right)\int y(t)dt+\tfrac{R_2}{L}\iint y(t)$$

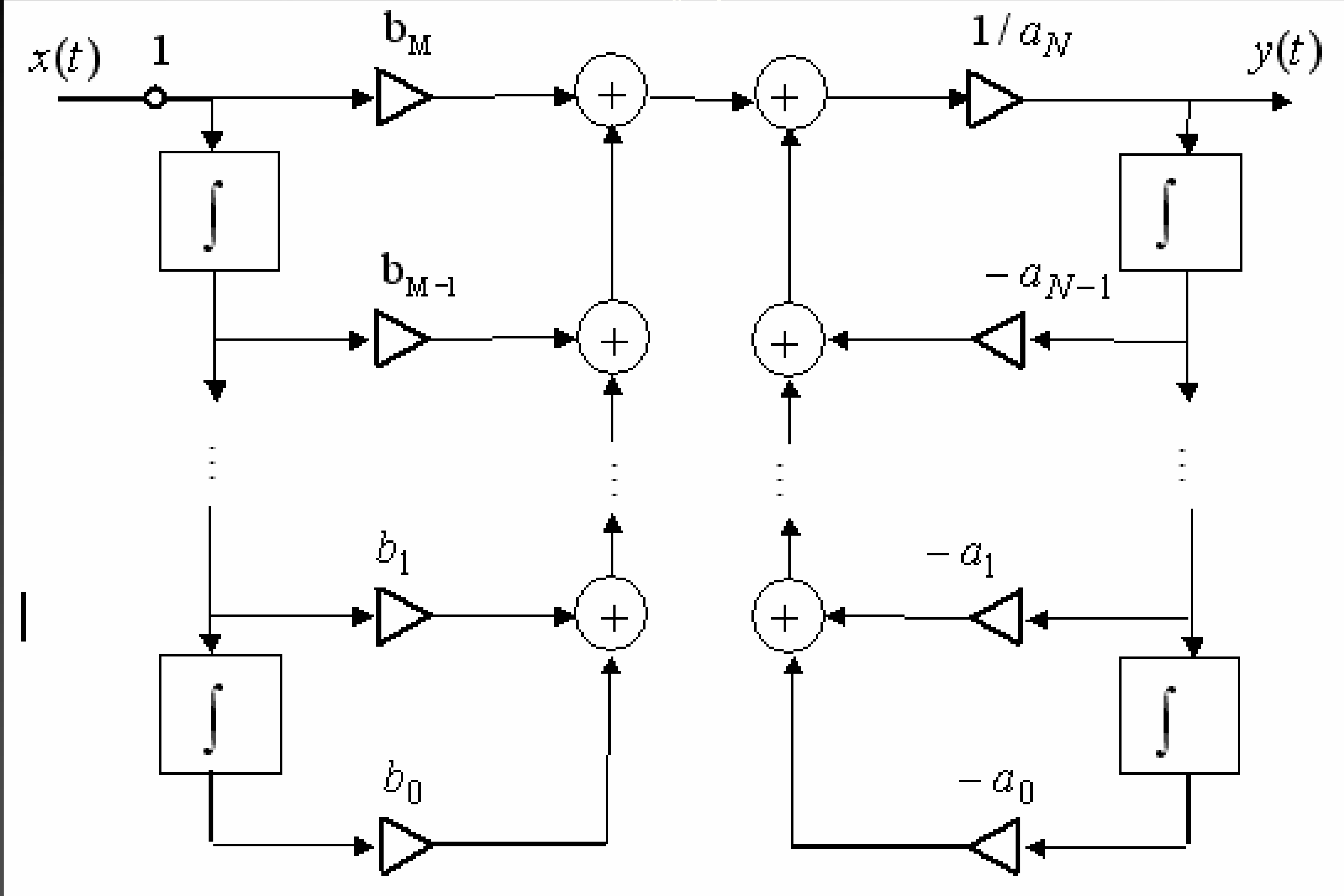
$$=\tfrac{R_2}{L}\iint x(t)+\frac{R_2}{R_1}\int x(t)+R_2Cx(t)$$

$$y(t)=x(t)+\tfrac{1}{R_1C}\int x(t)+\tfrac{1}{LC}\iint x(t)-\left(\tfrac{1}{R_2C}+\tfrac{1}{R_1C}\right)\int y(t)-\tfrac{1}{R_1C}\iint y(t)$$



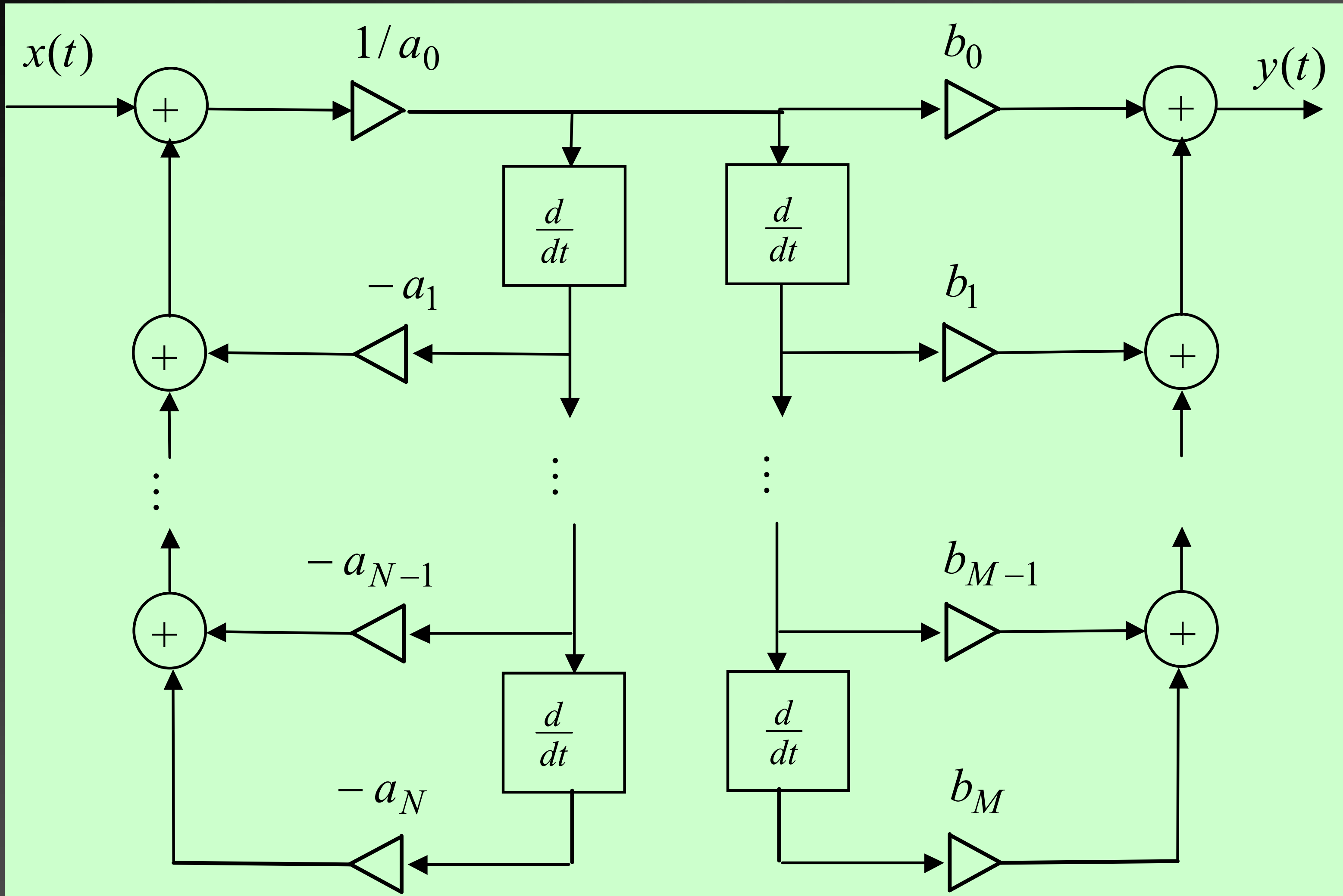
$x(t)$
1
$\frac{1}{R_1C}$
$\frac{1}{LC}$
1
$y(t)$
$-\left(\frac{1}{R_2C}+\frac{1}{R_1C}\right)$
$-\frac{1}{R_1C}$

Direk Form-I yapısı

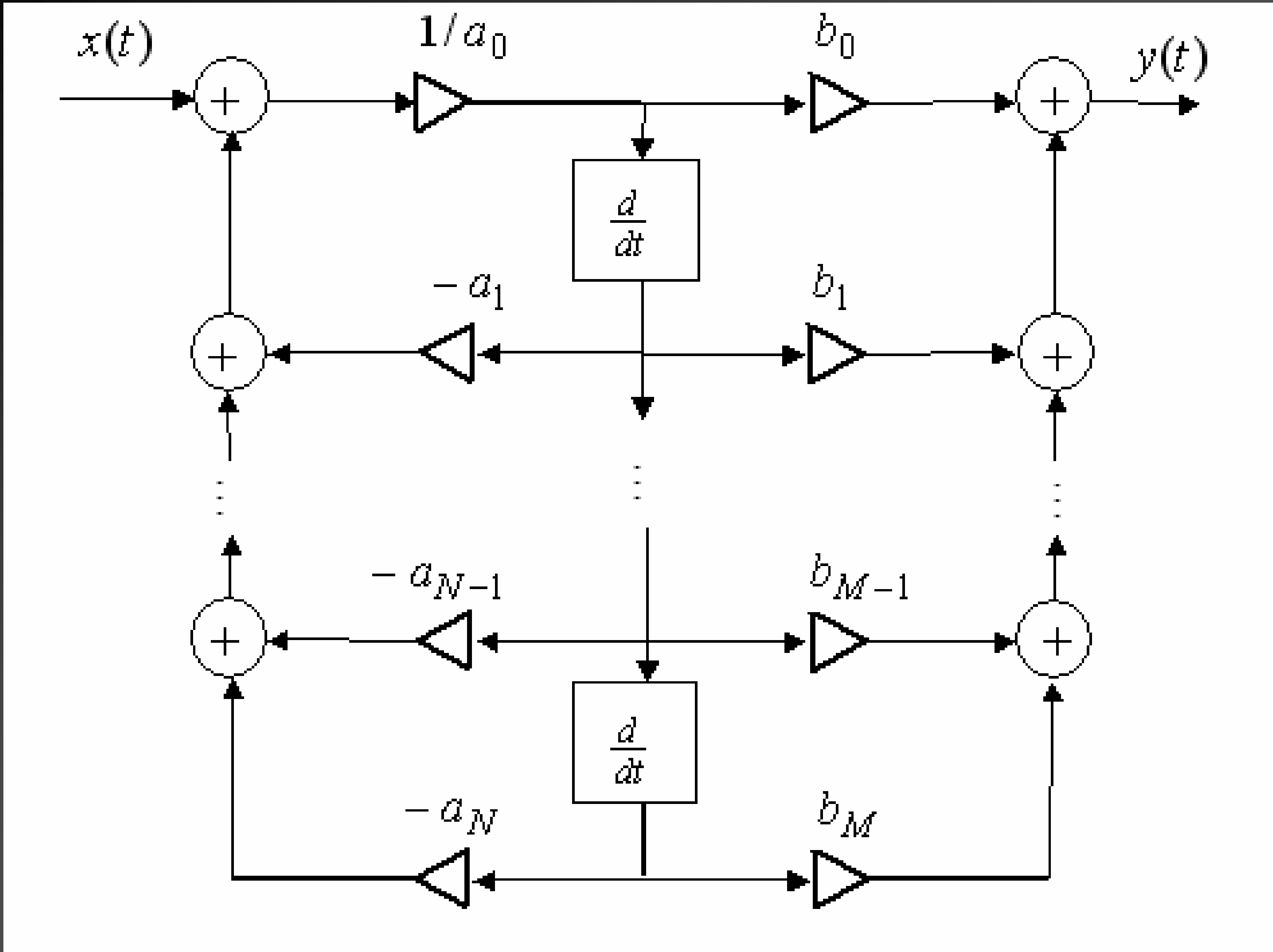


Direk Form-II yapısı

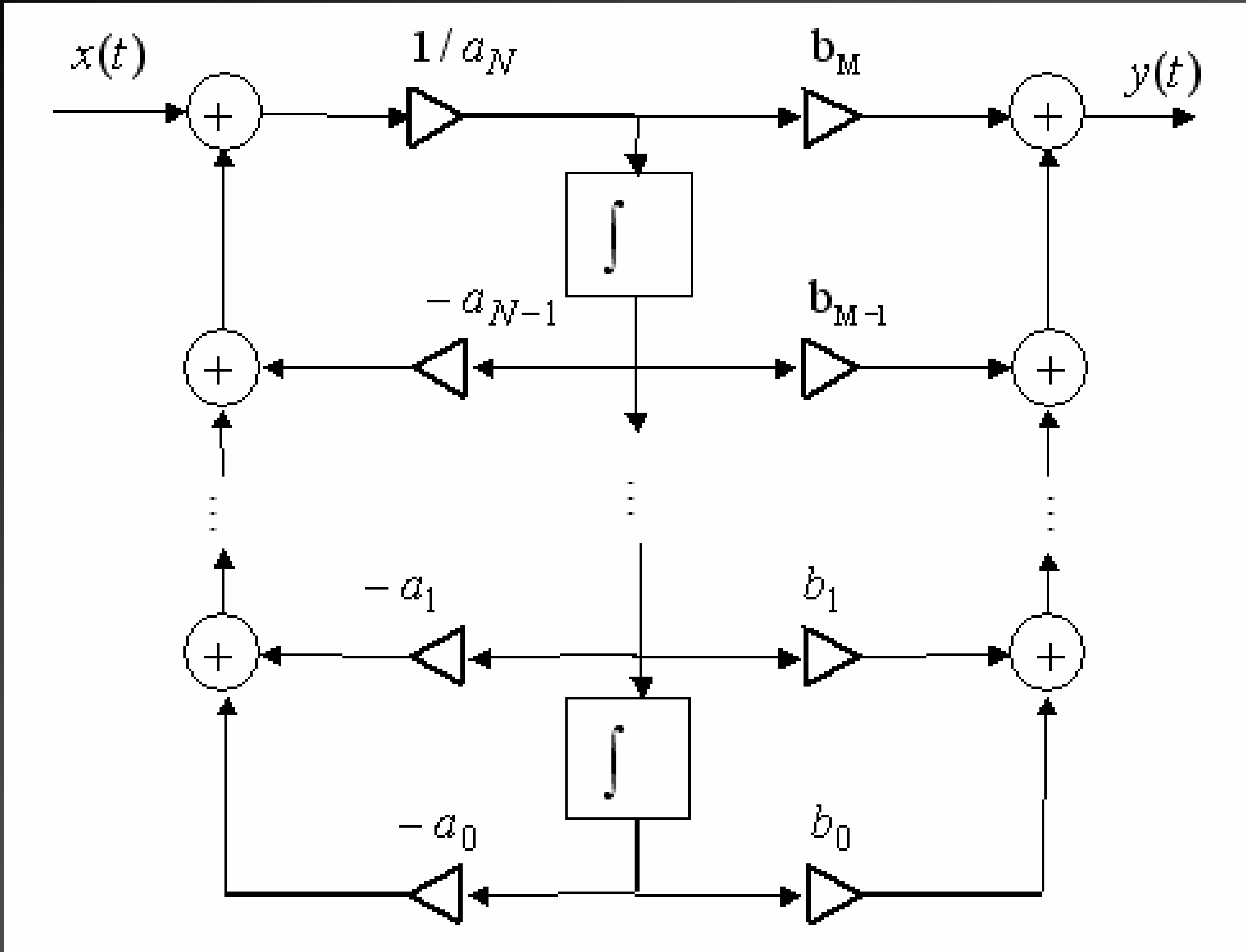
Yukardaki *N* inci mertebeden sistemde *N+M* adet türev alıcı (veya integral alıcı) bulunmaktadır. Bu yapı *minimal olmayan gerçekleme* ile elde edilmiştir. Aynı diferansiyel denkleme sahip sistemin fiziksel yapısı *N* adet türev alıcıyla da (veya integral alıcı) gerçekleştirilebilir. Bu işleme *minimal gerçekleme* denir. Bu şekilde minimum sayıda türev alıcı (veya integral alıcı) ile gerçekleştirilen sisteme de *kanonik sistem* denir. Direk form II, *N* adet türev devresi (veya integral devresi) içermekte olup, kanonik yapıdadır.



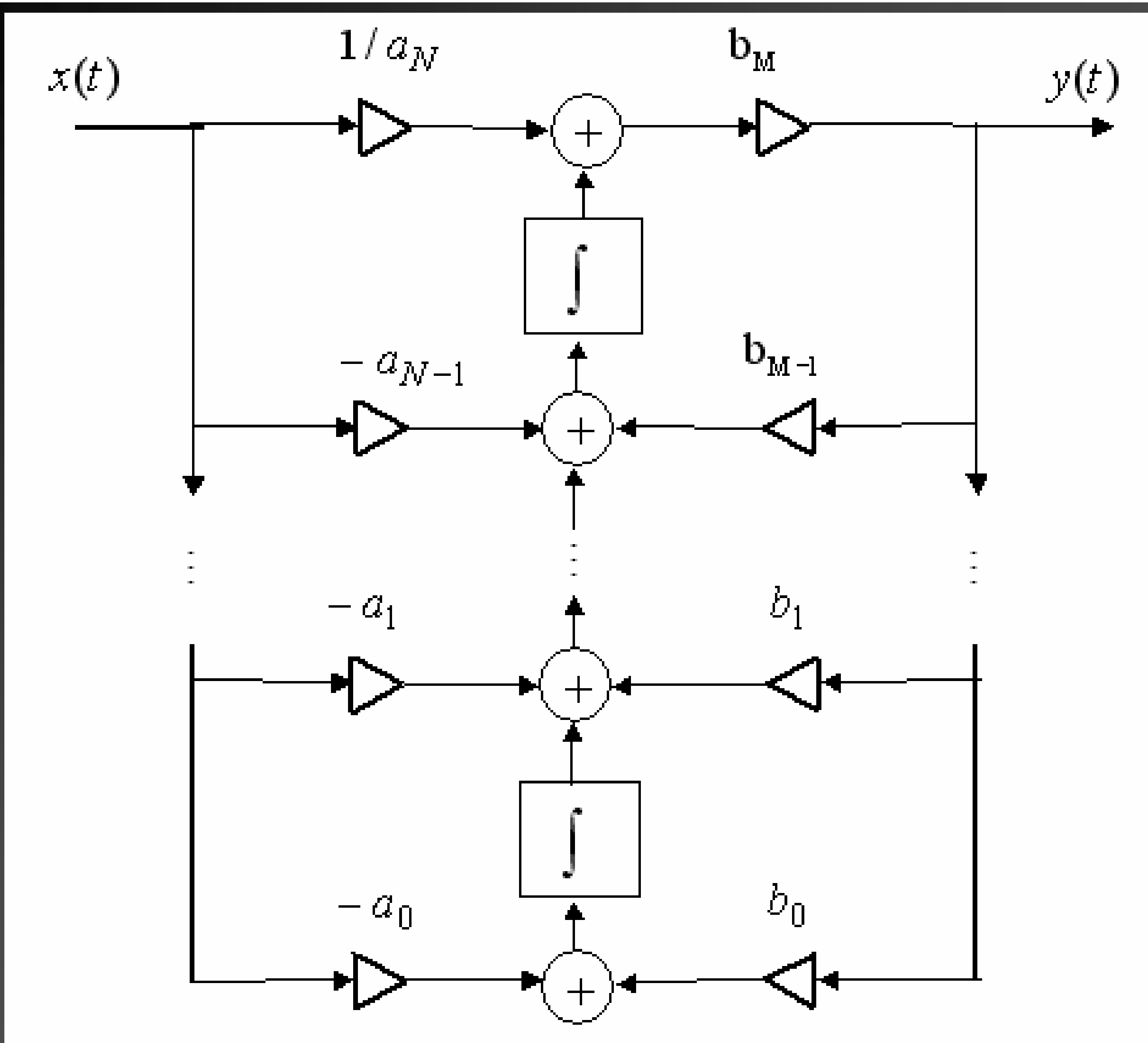
x(t)
1/a0
b0
y(t)
d/dt
d/dt
−a1
b1
−aN−1
bM−1
d/dt
d/dt
−aN
bM



$x(t)$
$1/a_0$
b_0
$y(t)$
$\frac{d}{dt}$
$-a_1$
b_1
$-a_{N-1}$
b_{M-1}
$\frac{d}{dt}$
$-a_N$
b_M



x(t)
1/a_N
b_M
y(t)
−a_{N−1}
b_{M-1}
−a_1
b_1
−a_0
b_0



$x(t)$
$1/a_N$
b_M
$y(t)$
$-a_{N-1}$
b_{M-1}
$-a_1$
b_1
$-a_0$
b_0

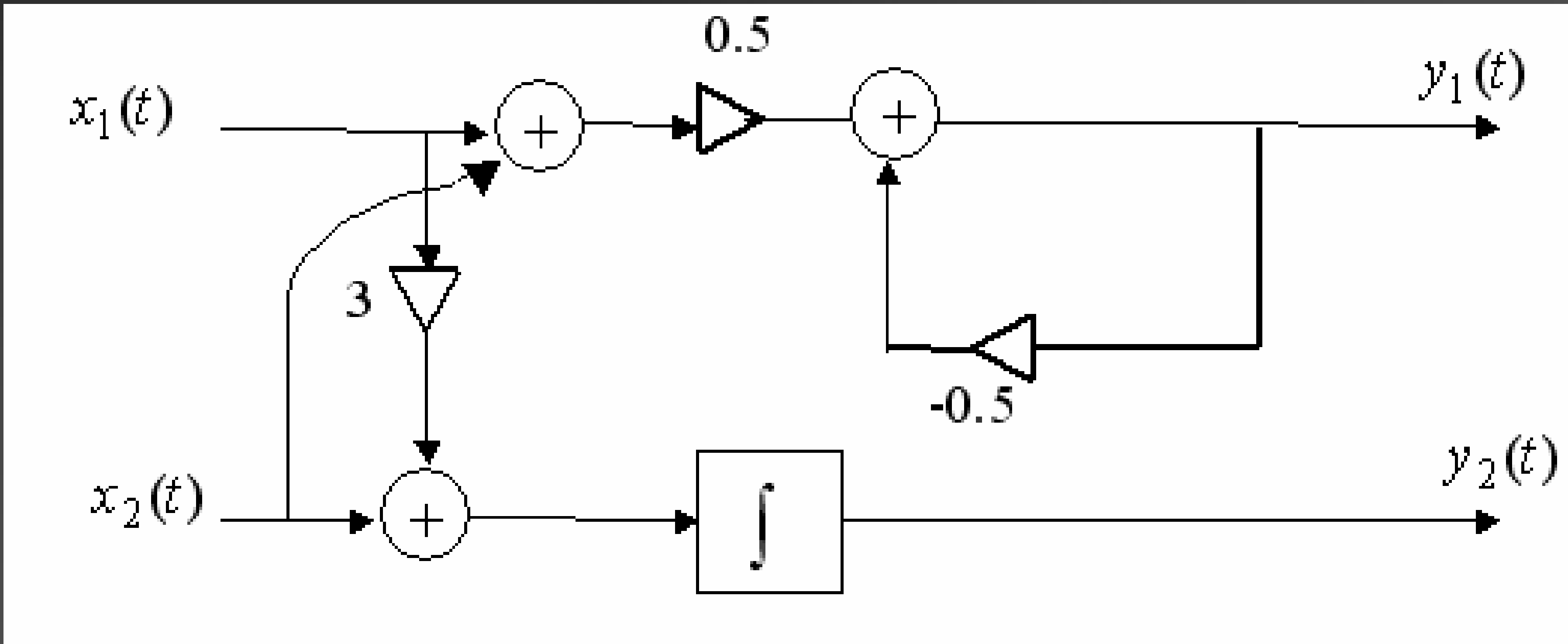
Örnek: Aşağıdaki denklem takımıyla verilen sistemin blok şemasını çiziniz

$$\frac{dy_1(t)}{dt} + 2y_1(t) = x_1(t) + x_2(t)$$

$$\frac{dy_2(t)}{dt} = 3x_1(t) + x_2(t)$$

$$y_1(t) = -\tfrac{1}{2}\frac{dy_1(t)}{dt} + \tfrac{1}{2}x_1(t) + \tfrac{1}{2}x_2(t)$$

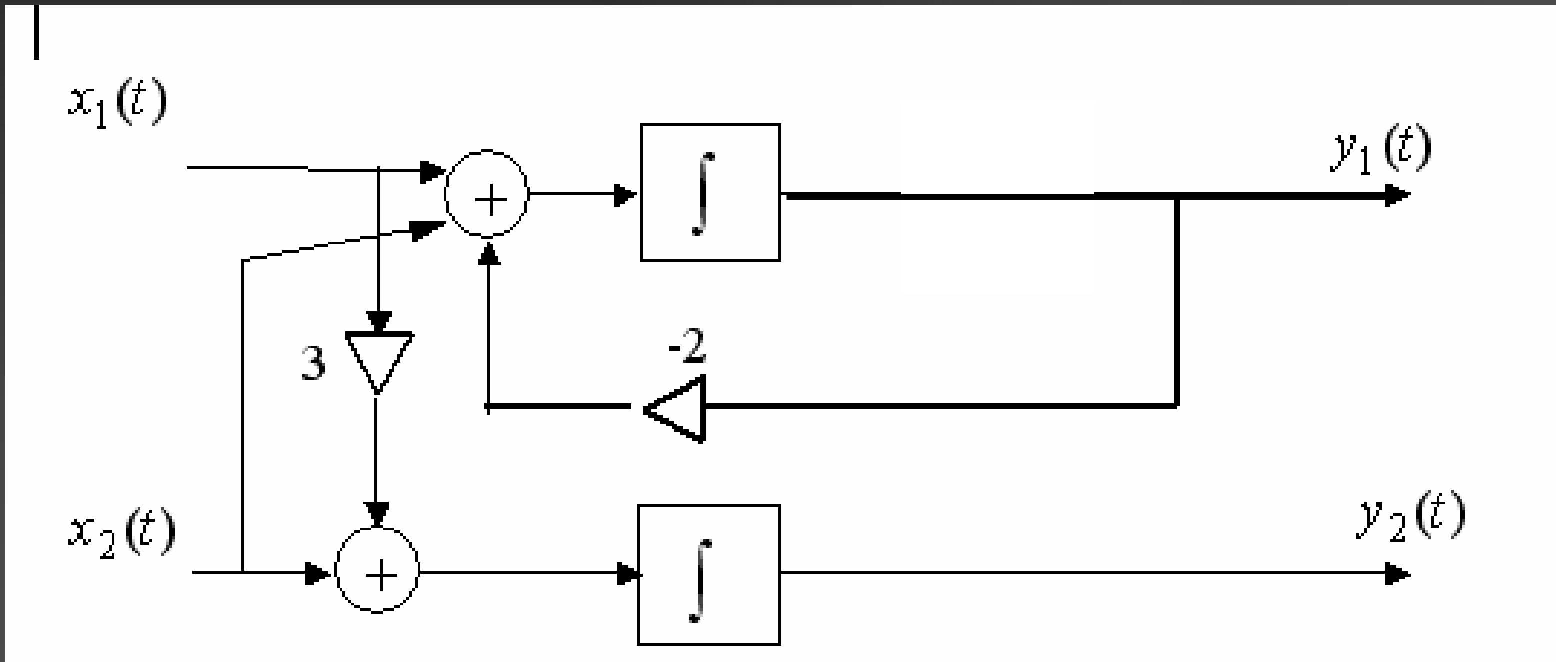
$$y_2(t) = \int 3x_1(t)dt + \int x_2(t)dt$$



Sinyaller ve Sistemler; Ali Gangal;
KTÜ Elektrik-Elektronik Müh. Böl.

$$y_1(t) = \int x_1(t)dt + \int x_2(t)dt - 2\int y_1(t)dt$$

$$y_2(t) = \int 3x_1(t)dt + \int x_2(t)dt$$



Diferansiyel Denklem Modelinin Çözümü

$$\sum_{n=0}^{N} a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} = \sum_{m=0}^{M} b_m \frac{d^m x(t)}{dt^m}, \qquad N \geq M$$

1- $\boxed{y(t) = y_h(t) + y_p(t)}$ formunda çözüm:

(Tam çözüm=homojen çözüm+özel çözüm)

Homojen çözüm:

$$a_N \frac{d^N y(t)}{dt^N} + a_{N-1} \frac{d^{N-1} y(t)}{dt^{N-1}} + \ldots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = 0$$

$$\lambda = \frac{d}{dt}$$

$$y(t)\left(a_N \lambda^N + a_{N-1}\lambda^{N-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0\right) = 0$$

$$a_N \lambda^N + a_{N-1}\lambda^{N-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0 = 0$$

- Kökler katsız ise:

Karakteristik denklemin N adet kökü $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_N$

katsız ise homojen çözüm aşağıdaki formdadır:

$$y_h(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} + \ldots + c_N e^{\lambda_N t}$$

- Katlı kök varsa:

karakteristik denklemin k ıncı kökü λ_k , r katlı olsun

Bu durumda homojen çözüm bu kök için aşağıdaki formdadır:

$$d_0 e^{\lambda_k t} + d_1 t e^{\lambda_k t} + d_2 t^2 e^{\lambda_k t} + \ldots + d_{r-1} t^{r-1} e^{\lambda_k t}$$

Özel çözüm:

- Denklemin sağ tarafı $p_i(t)$ şeklinde bir polinom ise

özel çözüm: $y_p(t) = K_i t^i + K_{i-1} t^{i-1} + \ldots + K_1 t + K_0$

- Denklemin sağ tarafı: $e^{\alpha t} p_i(t)$

özel çözüm: $y_p(t) = e^{\alpha t}(K_i t^i + K_{i-1} t^{i-1} + \ldots + K_1 t + K_0)$

- Denklemin sağ tarafı: $e^{\alpha t} p_i(t)(d_1 Sin\beta\, t + d_2 Cos\beta\, t)$

özel çözüm:

$$y_p(t) = e^{\alpha t}\Big[Sin\beta\, t(K_i t^i + K_{i-1} t^{i-1} + .. + K_1 t + K_0) + \\ + Cos\beta\, t(L_i t^i + L_{i-1} t^{i-1} + .. + L_1 t + L_0)\Big]$$

Özel çözümde karşılaşılan özel durumlar:

•Özel çözümün herhangi bir terimi, katsayıları dikkate alınmaksızın aynı zamanda homojen çözümün bir terimine benzeyebilir. Bu durumda, özel çözümün bu terimi homojen çözümün benzeyen terimine benzemeyecek şekilde, t^m çarpılmalıdır. Burada ***m***, benzerlik olmayacak şekilde seçilebilecek en küçük tamsayıdır.

- Giriş işareti verilen formların bir kombinasyonu biçiminde olabilir. Bu durumda özel çözümün formu da karşılık gelen formların uygun bir şekilde birleştirilmesiyle elde edilir

Özel çözüm formu belirlendikten sonra bu form diferansiyel denklemin sol tarafında bulunan *y(t)* nin yerine yazılır. Gerekli türev alma işlemlerinden sonra sol taraf eşitliğin sağ tarafında yer alan fonksiyonların formuna göre düzenlenir. Aynı formdaki ifadelerin katsayılarının birbirine eşitlenmesiyle elde edilen denklem takımı çözülerek *K* ve *L* katsayıları belirlenir.

$$\left(y_h(t)+y_p(t)\right)\Big|_{t=0}=y(0)$$

$$\frac{d}{dt}\left(y_h(t)+y_p(t)\right)\Big|_{t=0}=y^{'}(0)$$

.

.

.

$$\frac{d^{N-1}}{dt^{N-1}}\left(y_h(t)+y_p(t)\right)\Big|_{t=0}=y^{(N-1)}(0)$$

N adet doğrusal denklemin çözülmesiyle homojen çözümdeki bilinmeyen katsayılar bulunur. Böylece homojen çözüm ile özel çözümün toplanmasıyla tam çözüm elde edilmiş olur.

2- $$y(t) = y_{sg}(t) + y_{sd}(t)$$ formunda çözüm

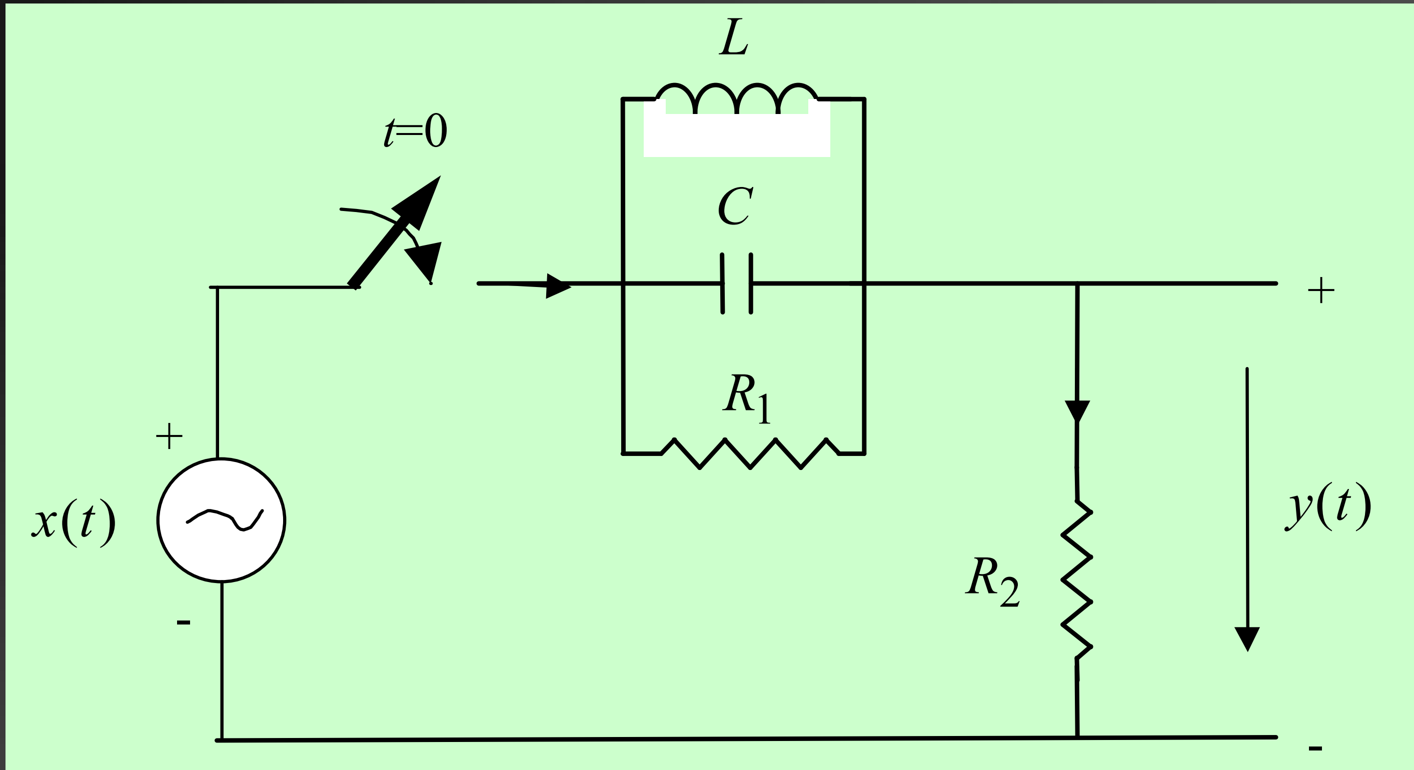
(Tam çözüm= sıfır girişli çözüm+sıfır durumlu çözüm)

Sıfır girişli çözüm: Bu çözüm formundaki c ve d katsayıları, tam çözümü elde etmeden önce başlangıç değerleri kullanılarak hesaplanır.

Sıfır durumlu çözüm: Bu çözüm sistemin birim vuruş tepkesiyle giriş işaretinin katlamasıdır.

$$y_{sd}(t) = \int_0^t x(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau$$

Örnek:



$x(t) = Sin\,2t \;\; L = 1H\,, \quad C = 0.5F\,, \quad R_1 = 1\Omega$ ve $R_2 = 2\Omega$

$t \leq 0$ için bütün başlangıç değerleri sıfır

$a) \quad y(t) = y_h(t) + y_p(t)$

$b) \quad y(t) = y_{sg}(t) + y_{sd}(t)$

$t \geq 0$

$$R_2C\frac{d^2y(t)}{dt^2}+\left(1+\frac{R_2}{R_1}\right)\frac{dy(t)}{dt}+\frac{R_2}{L}y(t)$$

$$=\frac{R_2}{L}x(t)+\frac{R_2}{R_1}\frac{dx(t)}{dt}+R_2C\frac{d^2x(t)}{dt^2}$$

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2}+3\frac{dy(t)}{dt}+2y(t)=2x(t)+2\frac{dx(t)}{dt}+\frac{d^2x(t)}{dt^2}$$

$a)$ $y(t)=y_h(t)+y_p(t)$ formunda çözüm

Homojen Çözüm:

$$\lambda^2+3\lambda+2=0 \quad \rightarrow \quad \lambda_1=-1 \text{ ve } \lambda_2=-2$$

$$y_h(t)=c_1e^{-t}+c_2e^{-2t}$$

Özel Çözüm:

$$y_p(t) = K_0 Sin2t + L_0 Cos2t$$

$$\frac{d^2}{dt^2}\left(y_p(t)\right) + 3\frac{d}{dt}\left(y_p(t)\right) + 2y_p(t) = 4Cos2t - 2Sin2t$$

Eşitliğin her iki yanındaki benzer dereceden terimlerin katsayıları birbirine eşitlenerek bilinmeyen katsayılar bulunur.

$L_0 = 0.1$ $K_0 = 0.7$

Bu katsayılar özel çözümde yerine yazılarak özel çözüm bulunur

$$y_p(t) = 0.7Sin2t + 0.1Cos2t$$

Tam Çözüm:

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t)$$

$$= c_1e^{-t} + c_2e^{-2t} + 0.7Sin2t + 0.1Cos2t$$

$$y(0) = c_1e^{-t} + c_2e^{-2t} + 0.7Sin2t + 0.1Cos2t\Big|_{t=0^+} = 0$$

$$y'(0) = -c_1e^{-t} - 2c_2e^{-2t} + 1.4Cos2t - 0.2Sin2t\Big|_{t=0} = 2$$

$$c_1 + c_2 + 0.1 = 0$$

$$-c_1 - 2c_2 + 1.4 = 2$$

$\Rightarrow$

$$c_1 = 0.4$$

$$c_2 = -0.5$$

$\Rightarrow$

$$y(t) = 0.4e^{-t} - 0.5e^{-2t} + 0.7Sin2t + 0.1Cos2t$$

$b) \quad y(t) = y_{sg}(t) + y_{sd}(t)$ formunda çözüm

Sıfır girişli çözüm:

$$y_{sg}(t) = c_1 e^{-t} u(t) + c_2 e^{-2t} u(t)$$

$$c_1 e^{-t} + c_2 e^{-2t} \Big|_{t=0^+} = y(0^+)$$

$$-c_1 e^{-t} - 2c_2 e^{-2t} \Big|_{t=0^+} = y'(0^+)$$

$$y'(0^+) = x'(0^+) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} c_1 + c_2 &= 0 \\ -c_1 - 2c_2 &= 0 \end{aligned} \Rightarrow c_1 = c_2 = 0 \Rightarrow y_{sg}(t) = 0$$

Sıfır durumlu çözüm:

$$y_{sd}(t) = \int_0^t x(\tau)\ h(t-\tau)\ d\tau$$

$$y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = 2x(t) + 2x'(t) + x''(t)$$

$$h''(t) + 3h'(t) + 2h(t) = 2\delta(t) + 2\delta'(t) + \delta''(t)$$

$$h(t) = e^{-t}u(t) - 2e^{-2t}u(t) + \delta(t)$$

$$y_{sd(t)} = \int_0^t Sin2\tau h(t-\tau)d\tau$$

$$y_{sd}(t) = \int_0^t Sin2\tau\left(\mathrm{e}^{-(t-\tau)} - 2\mathrm{e}^{-2(t-\tau)} + \delta(t-\tau)\right)d\tau$$

$$y_{sd}(t)=e^{-t}\int_0^t Sin2\tau e^{\tau}d\tau - 2\,e^{-2t}\int_0^t Sin2\tau e^{2\tau}d\tau+\int_0^t Sin2\tau\delta(t-\tau)d\tau$$

$$\int e^{ax}Sinbxdx=\frac{e^{ax}\left(aSinbx-bCosbx\right)}{a^2+b^2}$$

$$y_{sd}(t)=\left(\tfrac{1}{5}e^{-t}e^{\tau}\left(Sin2\tau-2Cos2\tau\right)-2\tfrac{1}{8}e^{-2t}e^{2\tau}\left(2Sin2\tau-2Cos2\tau\right)+Sin2t\right)\Big|_0^t$$

$$y_{sd}(t)=\left(\tfrac{1}{5}\left(Sin2t-2Cos2t\right)-\tfrac{1}{4}\left(2Sin2t-2Cos2t\right)+Sin2t\right)$$
$$-\tfrac{1}{5}e^{-t}\left(-2\right)+\tfrac{1}{4}e^{-2t}\left(-2\right)$$

$$y_{sd}(t)=0.4e^{-t}-0.5e^{-2t}+0.7Sin2t+0.1Cos2t=y(t)$$

Birim vuruş tepkesi modeli

$x(t) = \delta(t)$ → Sürekli, doğrusal zamanla değişmeyen dinlenmiş sistem → $y(t) = h(t)$

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

$$\delta(t) \rightarrow h(t)$$

$$a\delta(t-\tau) \rightarrow ah(t-\tau)$$

$$x(\tau)\delta(t-\tau) \rightarrow x(\tau)h(t-\tau)$$

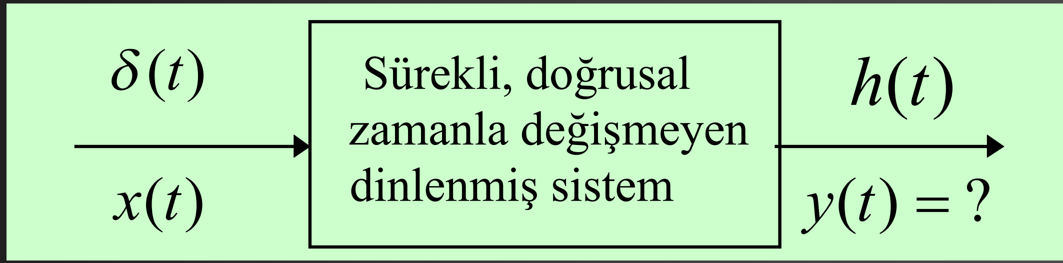
$$x(\tau) = \int_{\tau-\varepsilon}^{\tau+\varepsilon} x(t)\delta(t-\tau)dt$$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(\tau-t)d\tau$$

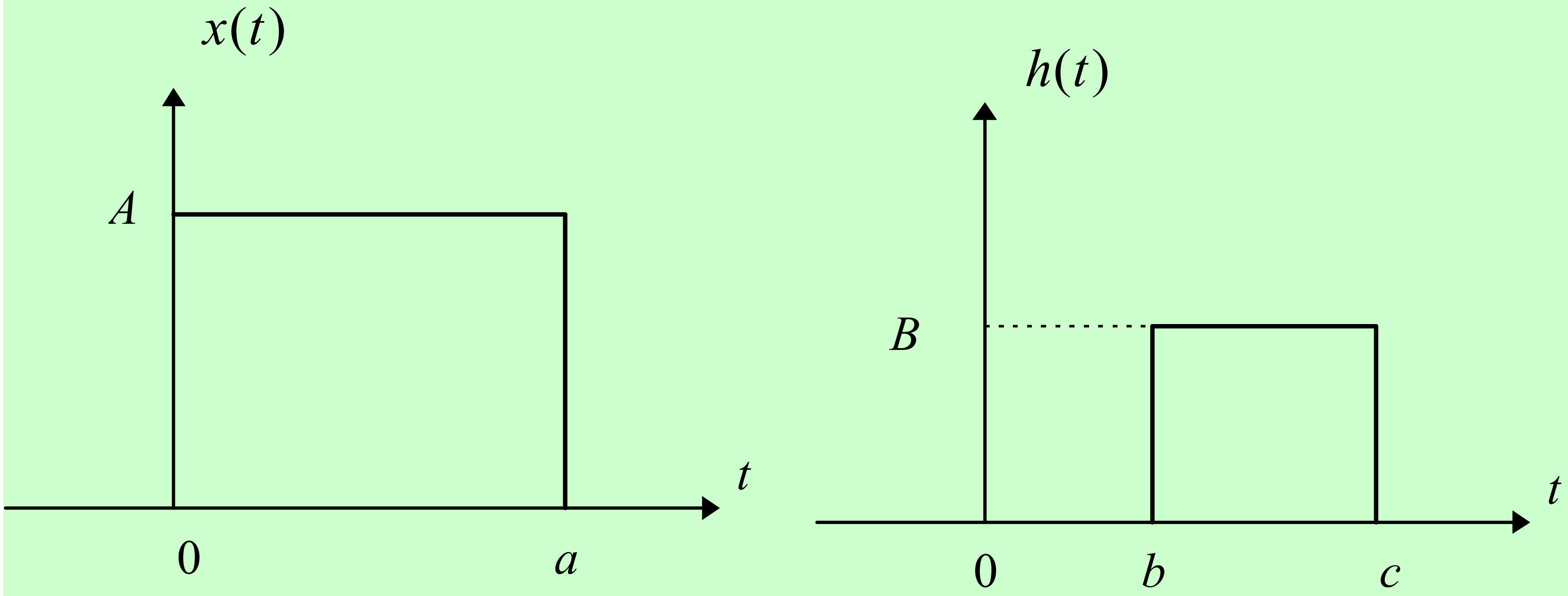
$$\delta(\tau-t) = \delta(t-\tau)$$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau \rightarrow y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

Örnek:

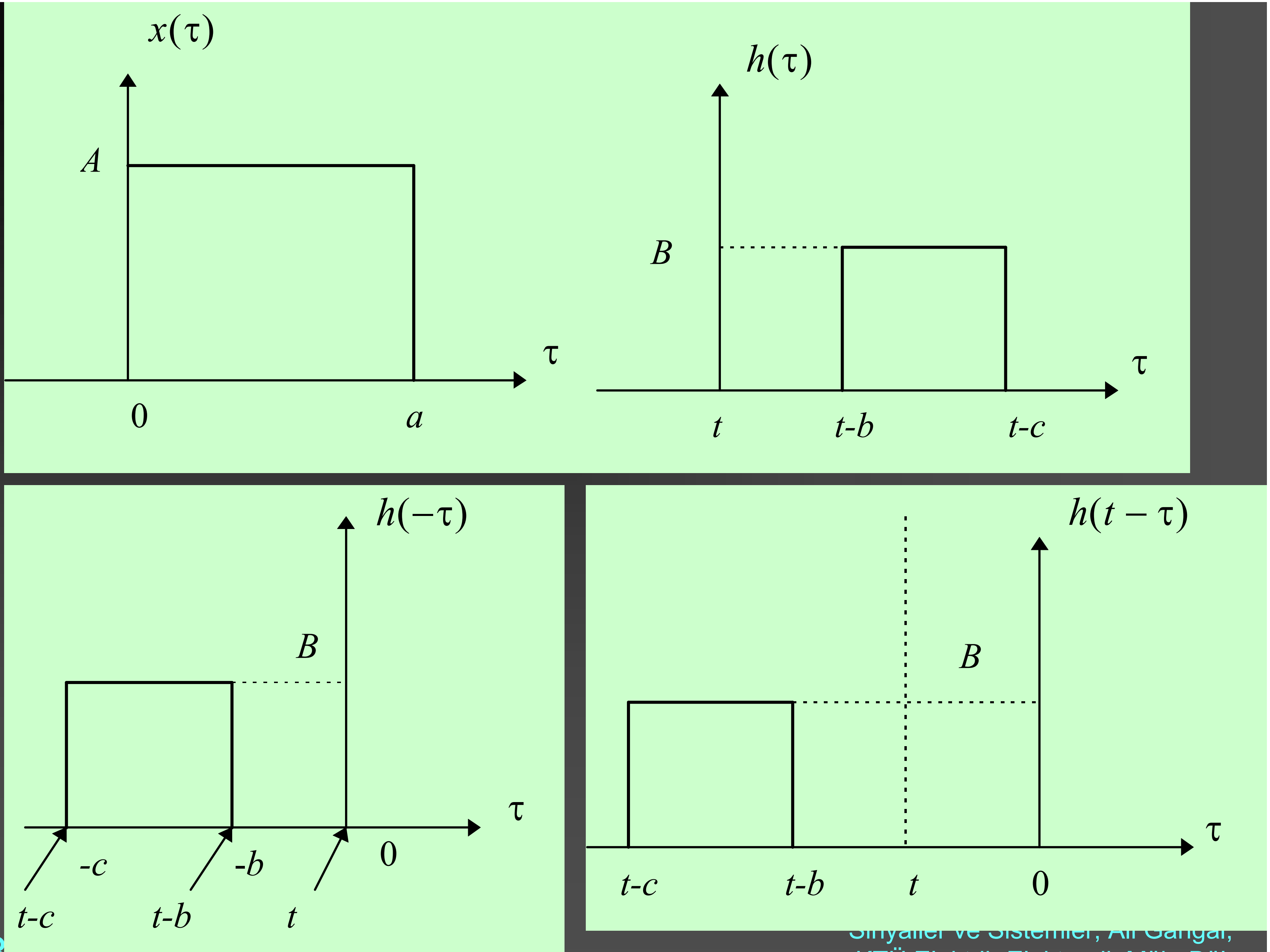


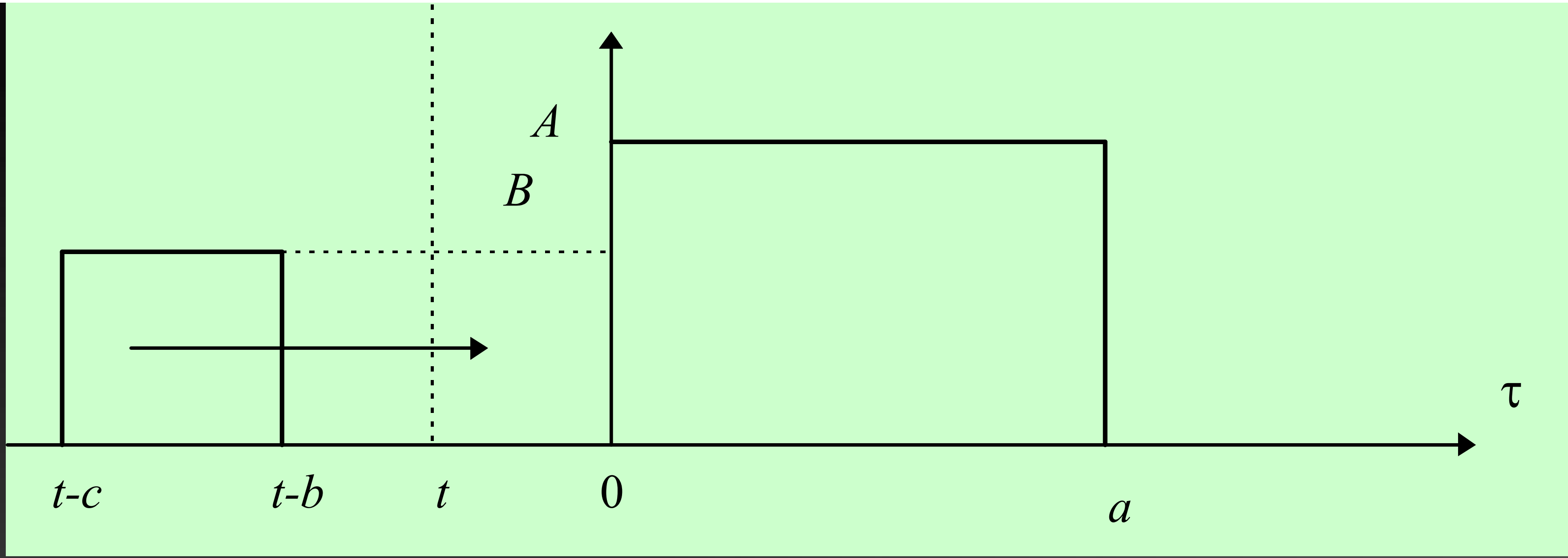
$\delta(t)$
$x(t)$
Sürekli, doğrusal zamanla değişmeyen dinlenmiş sistem
$h(t)$
$y(t) = ?$

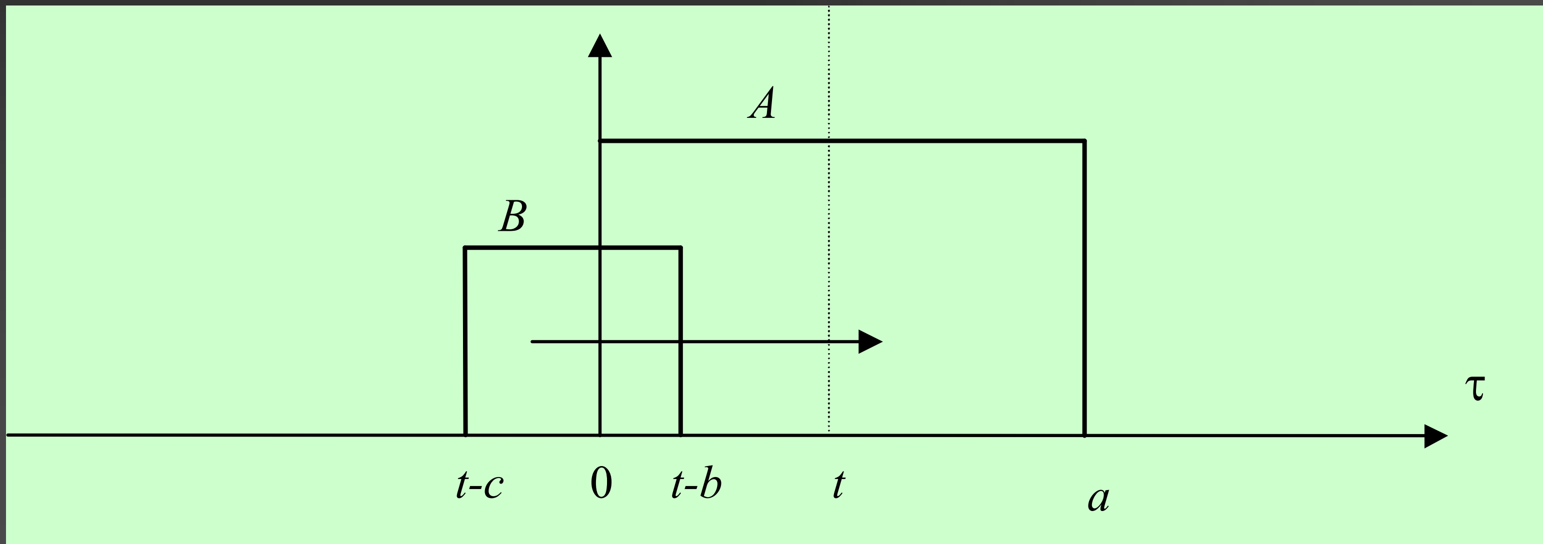


$x(t)$
A
t
0
a
$h(t)$
B
t
0
b
c

$$c - b < a$$

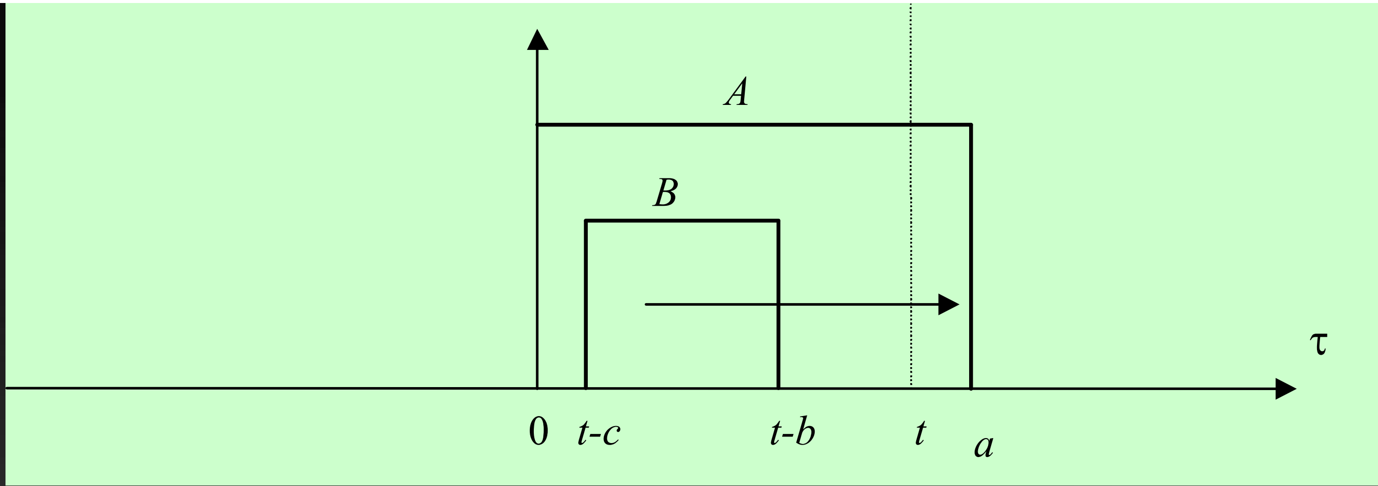

x(τ)
A
τ
0
a
h(τ)
B
τ
t
t-b
t-c
h(−τ)
B
τ
-c
-b
0
t-c
t-b
t
h(t − τ)
B
τ
t-c
t-b
t
0





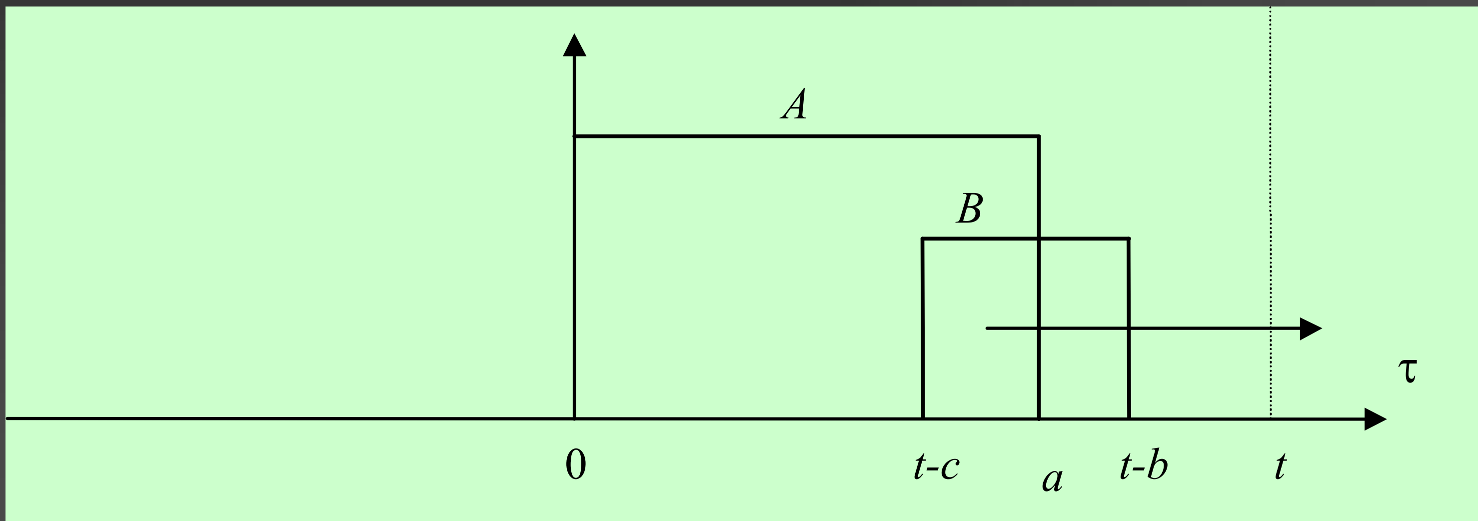
$$y_1(t) = \int_0^{t-b} AB\,d\tau = AB\tau\Big|_0^{t-b} = AB(t-b)$$

$$b \le t \le c$$



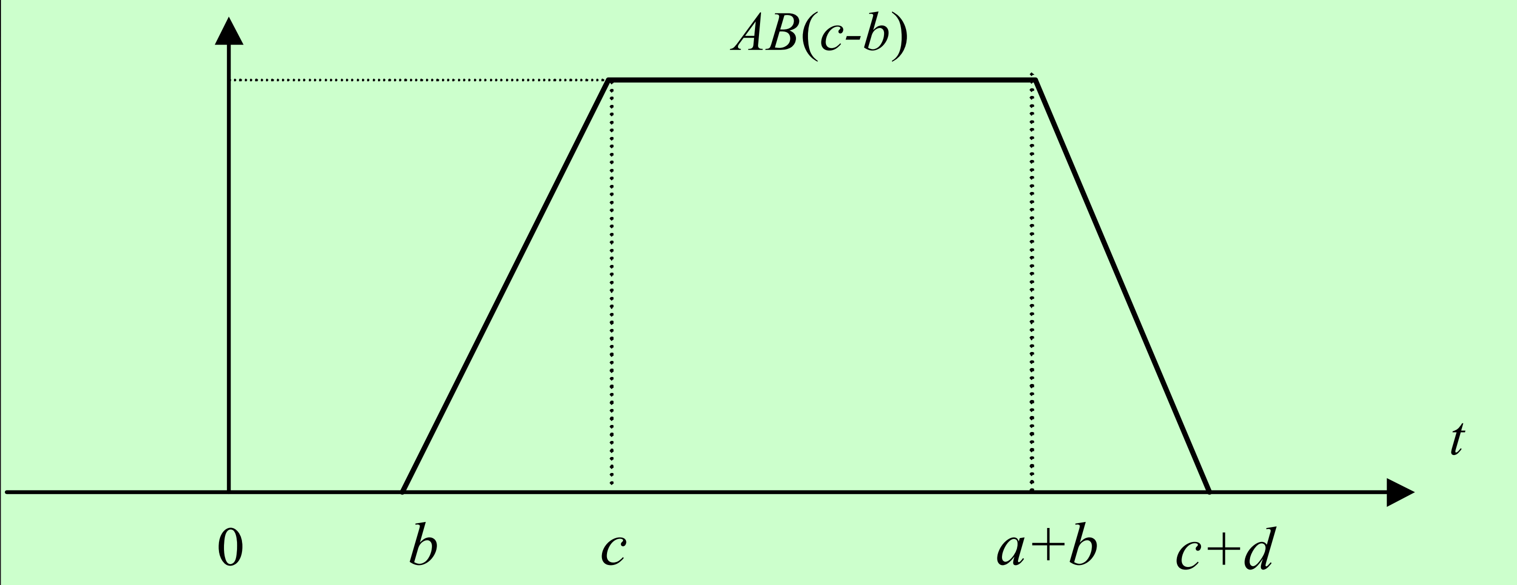
$$y_2(t) = \int_{t-c}^{t-b} AB\,d\tau = AB\tau\Big|_{t-c}^{t-b} = AB(t-b-t+c) = AB(c-b)$$

$$c \le t \le a+b$$



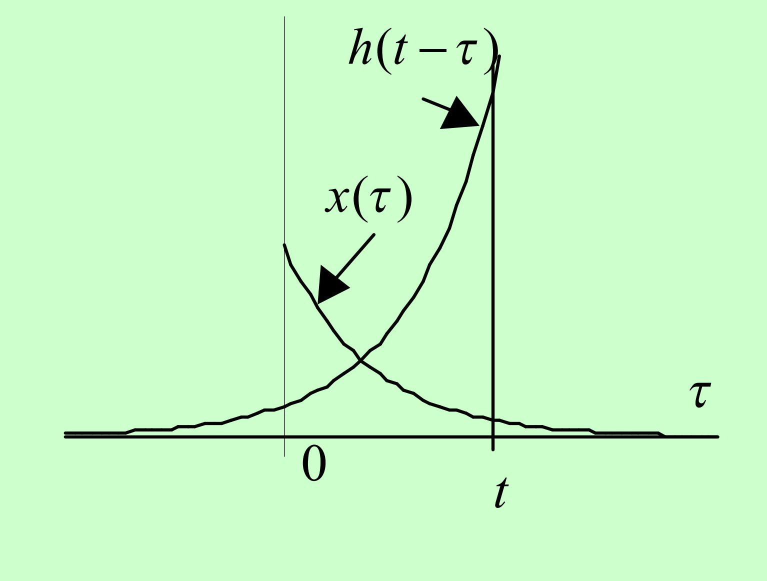
$$y_3(t) = \int_{t-c}^{a} AB\,d\tau = AB\tau\Big|_{t-c}^{a} = AB(a+c-t)$$

$$\mathrm{a+b \le t \le a+c}$$

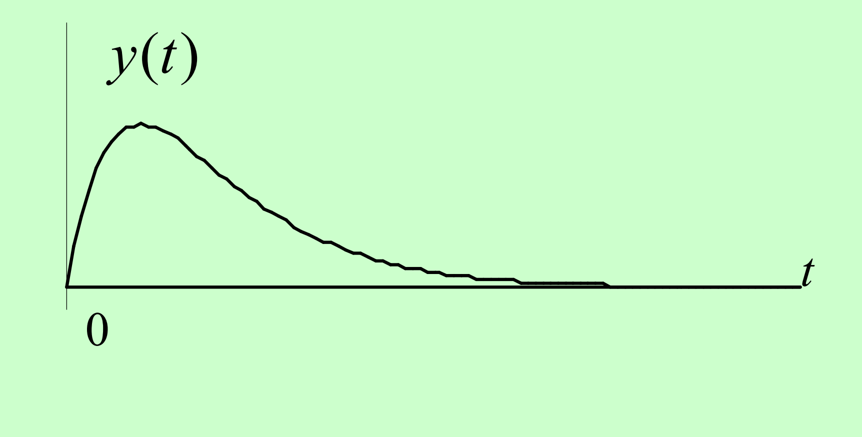


$$y(t) = y_1(t) + y_2(t) + y_3(t) = \begin{cases} AB(t-b), & b \le t \le c \\ AB(c-b), & c \le t \le a+b \\ AB(a+c-t), & a+b \le t \le a+c \end{cases}$$

Örnek: $h(t) = 2e^{-t}u(t)$ $x(t) = e^{-t}u(t)$



$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = \int_{0}^{t} e^{-\tau}2e^{-(t-\tau)}d\tau = 2e^{-t}\int_{0}^{t} 1d\tau = 2te^{-t}u(t)$$



Katlamanın Özellikleri:

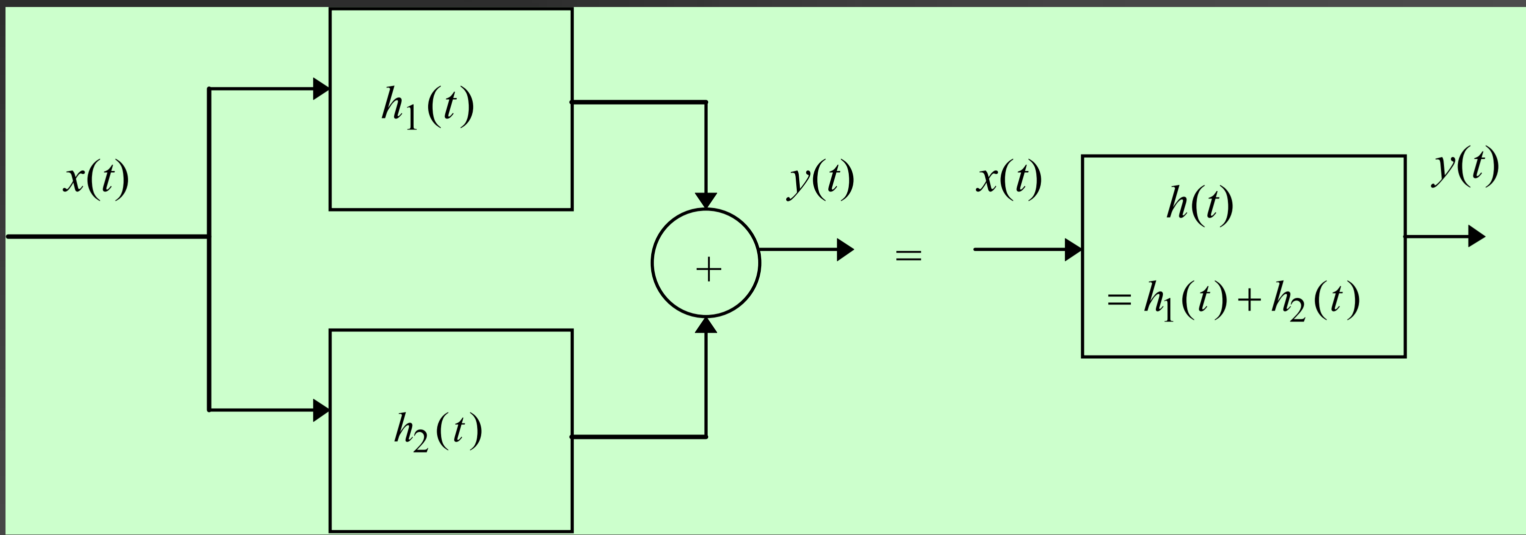
Komütatif özelliği

$$x(t) * h(t) = h(t) * x(t)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau)h(\tau)d\tau$$

Distribütif Özelliği

$$x(t) * \left[h_1(t) + h_2(t)\right] = x(t) * h_1(t) + x(t) * h_2(t)$$



Assosyatif Özelliği

$$x(t) * \left[h_1(t) * h_2(t) \right] = \left[x(t) * h_1(t) \right] * h_2(t)$$