1.12. $x(t)$, ω_0 radyan frekansına ve $T_0 = 2\pi/\omega_0$ temel periyoduna sahip bir karmaşık üstel sinyal olsun:

$$x(t) = e^{j\omega_0 t}$$

T_s örnekleme aralığıyla $x(t)$'nin düzgün olarak örneklenmesi sonucu elde edilen ayrık zamanlı $x[n]$ dizisini göz önüne alınız:

$$x[n] = x(nT_s) = e^{j\omega_0 n T_s}$$

$x[n]$'nin periyodik olabilmesi için T_s'nin sağlaması gereken koşulu bulunuz.

$x[n]$, N_0 temel periyoduyla periyodik ise

$$e^{j\omega_0(n+N_0)T_s} = e^{j\omega_0 n T_s} e^{j\omega_0 N_0 T_s} = e^{j\omega_0 n T_s}$$

yazılabilir. Dolayısıyla,

$$e^{j\omega_0 N_0 T_s} = 1 \Rightarrow \omega_0 N_0 T_s = \frac{2\pi}{T_0} N_0 T_s = m2\pi \qquad m = \text{pozitif tamsayı}$$

ya da

$$\frac{T_s}{T_0} = \frac{m}{N_0} = \text{rasyonel sayı} \tag{1.81}$$

koşullarının sağlanması gereklidir. Dolayısıyla, örnekleme aralığının $x(t)$'nin temel periyoduna oranı (T_s/T_0) bir rasyonel sayı ise, $x[n]$ periyodiktir. Bu koşul $x(t)= \cos(\omega_0 t + \theta)$ biçimindeki sinüzoidal sinyaller için de geçerlidir.

1.13. $x(t) = \cos 15t$ sinüzoidal sinyali için aşağıdaki soruları yanıtlayınız.

(*a*) $x[n] = x(nT_s)$ dizisinin periyodik olmasını sağlayacak T_s örnekleme aralığını bulunuz.

(*b*) $T_s = 0.1\pi$ saniye ise $x[n] = x(nT_s)$'nin temel periyodunu bulunuz.

(*a*) $x(t)$'nin temel periyodu $T_0 = 2\pi/\omega_0 = 2\pi/15$'dir. (1.81) eşitliğine göre, $x[n] = x(nT_s)$, yalnızca, m ve N_0 pozitif tam sayılar olmak üzere,

$$\frac{T_s}{T_0} = \frac{T_s}{2\pi/15} = \frac{m}{N_0} \tag{1.82}$$

koşulunun sağlanması durumunda periyodiktir. Dolayısıyla T_s için

$$T_s = \frac{m}{N_0} T_0 = \frac{m}{N_0} \frac{2\pi}{15} \tag{1.83}$$

koşulu gereklidir.

(*b*) (1.82) eşitliğinde $T_s = 0.1\pi = \pi/10$ kullanılırsa

$$\frac{T_s}{T_0} = \frac{\pi/10}{2\pi/15} = \frac{15}{20} = \frac{3}{4}$$

elde edilir. Dolayısıyla, $x[n] = x(nT_s)$ periyodiktir. (1.82) eşitliğinden

$$N_0 = m\frac{T_0}{T_s} = m\frac{4}{3}$$

bulunur. En küçük pozitif tamsayı N_0, m=3 ile elde edilir. Dolayısıyla, $x[n] = x(0.1\pi n)$ dizisinin temel periyodu $N_0 = 4$'tür.

1.14. $x_1(t)$ ve $x_2(t)$, temel periyotları T_1 ve T_2 olan periyodik sinyaller olsun. $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$ toplamı hangi koşullarda periyodiktir ve $x(t)$'nin periyodik olması durumunda, temel periyot nedir?

$x_1(t)$ ve $x_2(t)$'nin T_1 ve T_2 temel periyotlarıyla periyodik olması nedeniyle

$$x_1(t) = x_1(t + T_1) = x_1(t + mT_1) \quad m = \text{pozitif tamsayı}$$
$$x_2(t) = x_2(t + T_2) = x_2(t + kT_2) \quad k = \text{pozitif tamsayı}$$

yazılabilir. Dolayısıyla:

$$x(t) = x_1(t + mT_1) + x_2(t + kT_2)$$

$x(t)$'nin T periyoduna sahip olabilmesi için,

$$x(t + T) = x_1(t + T) + x_2(t + T) = x_1(t + mT_1) + x_2(t + kT_2)$$

koşulu sağlanmalıdır. Bunun için,

$$mT_1 = kT_2 = T \tag{1.84}$$

veya

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{k}{m} = \text{rasyonel sayı} \tag{1.85}$$

olmalıdır. Bir başka deyişle, iki periyodik sinyal, yalnızca sinyallerin periyotlarının oranı rasyonel bir sayı ise periyodiktir. Bu durumda temel periyot, T_1 ve T_2'nin ortak katlarının en küçüğü olup, m ve k'nin aralarında asal olması durumunda (1.84) eşitliğiyle verilir. T_1/T_2 oranı irrasyonel bir sayı ise, $x_1(t)$ ve $x_2(t)$ sinyallerinin ortak bir periyodu yoktur ve $x(t)$ periyodik olamaz.

1.15. $x_1[n]$ ve $x_2[n]$, N_1 ve N_2 temel periyotlarına sahip periyodik diziler olsun. $x[n] = x_1[n] + x_2[n]$ toplamı hangi koşullarda periyodiktir, ve $x[n]$ periyodikse temel periyodu nedir?

$x_1[n]$ ve $x_2[n]$, N_1 ve N_2 temel periyotlarıyla periyodik olduğundan

$$x_1[n] = x_1[n + N_1] = x_1[n + mN_1] \quad m = \text{pozitif tamsayı}$$
$$x_2[n] = x_2[n + N_2] = x_2[n + kN_2] \quad k = \text{pozitif tamsayı}$$

yazılabilir. Dolayısıyla

$$x[n] = x_1[n + mN_1] + x_2[n + kN_2]$$

olur. $x[n]$'nin N periyoduyla periyodik olması için

$$x[n + N] = x_1[n + N] + x_2[n + N] = x_1[n + mN_1] + x_2[n + kN_2]$$

koşulunun sağlanması gereklidir. Dolayısıyla,

$$mN_1 = kN_2 = N \tag{1.86}$$

olmalıdır. (1.86) eşitliğini sağlayacak tamsayılar bulmak her zaman olası olduğundan, iki periyodik dizinin toplamlarının da periyodik olduğu; temel periyodun da N_1 ve N_2'nin en küçük ortak katı olduğu görülür.

ÇALIŞMA ÖDEVİ:
SCHAUM – SİNYALLER VE SİSTEMLER KİTABI,
ÇÖZÜMLÜ PROBLEM 1.16'YI İNCELEYİNİZ

1.19 Aşağıdaki eşitlikler bu kitapta sıklıkla kullanılmaktadır. Bunların doğruluğunu kanıtlayınız.

$$(a) \quad \sum_{n=0}^{N-1} \alpha^n = \begin{cases} \dfrac{1-\alpha^N}{1-\alpha} & \alpha \neq 1 \\ N & \alpha = 1 \end{cases} \tag{1.90}$$

$$(b) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n = \frac{1}{1-\alpha} \qquad |\alpha| < 1 \tag{1.91}$$

$$(c) \quad \sum_{n=k}^{\infty} \alpha^n = \frac{\alpha^k}{1-\alpha} \qquad |\alpha| < 1 \tag{1.92}$$

$$(d) \quad \sum_{n=0}^{\infty} n\alpha^n = \frac{\alpha}{(1-\alpha)^2} \qquad |\alpha| < 1 \tag{1.93}$$

(*a*)

$$S = \sum_{n=0}^{N-1} \alpha^n = 1 + \alpha + \alpha^2 + \cdots + \alpha^{N-1} \tag{1.94}$$

olsun. Buna göre,

$$\alpha S = \alpha \sum_{n=0}^{N-1} \alpha^n = \alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \cdots + \alpha^N \tag{1.95}$$

yazılabilir. (1.95) eşitliğini (1.94) eşitliğinden çıkartırsak

$$(1-\alpha)S = 1 - \alpha^N$$

elde edilir. Dolayısıyla, $\alpha \neq 1$ için

$$S = \sum_{n=0}^{N-1} \alpha^n = \frac{1-\alpha^N}{1-\alpha} \tag{1.96}$$

ve $\alpha = 1$ için, (1.94) eşitliğinden

$$\sum_{n=0}^{N-1} \alpha^n = 1 + 1 + 1 + \cdots + 1 = N$$ bulunur.

(*b*) $|\alpha| < 1$ için, $\lim_{n\to\infty} \alpha^N = 0$ olur. Dolayısıyla (1.96) eşitliği kullanılarak

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N-1} \alpha^n = \lim_{N\to\infty} \frac{1-\alpha^N}{1-\alpha} = \frac{1}{1-\alpha}$$ elde edilir.

(*c*) (1.91) eşitliğinin kullanılmasından aşağıdaki sonuç elde edilir.

$$\sum_{n=k}^{\infty} \alpha^n = \alpha^k + \alpha^{k+1} + \alpha^{k+2} + \cdots$$

$$= \alpha^k (1 + \alpha + \alpha^2 + \cdots) = \alpha^k \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n = \frac{\alpha^k}{1-\alpha}$$

(d) (1.91) eşitliğinin her iki yanının α değişkenine göre türevinin alınmasıyla

$$\frac{d}{d\alpha}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n\right) = \frac{d}{d\alpha}\left(\frac{1}{1-\alpha}\right) = \frac{1}{(1-\alpha)^2}$$

ve

$$\frac{d}{d\alpha}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{d\alpha} \alpha^n = \sum_{n=0}^{\infty} n\alpha^{n-1} = \frac{1}{\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} n\alpha^n$$

elde edilir. Dolayısıyla:

$$\frac{1}{\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} n\alpha^n = \frac{1}{(1-\alpha)^2} \quad \text{ya da} \quad \sum_{n=0}^{\infty} n\alpha^n = \frac{\alpha}{(1-\alpha)^2}$$

ÇALIŞMA ÖDEVLERİ:

SCHAUM – SİNYALLER VE SİSTEMLER KİTABI,
ÇÖZÜMLÜ PROBLEM 1.27, 1.30 VE 1.31'İ İNCELEYİNİZ

SCHAUM – SİNYALLER VE SİSTEMLER KİTABI,
ÇÖZÜMLÜ PROBLEM 1.34, 1.35, 1.36, 1.37, 1.38 'İ İNCELEYİNİZ

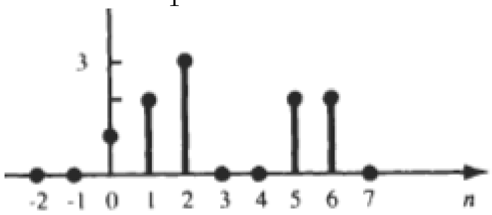
ÇÖZÜMLÜ SORULAR

SORU 1) Aşağıdaki şekillerde gösterilen $x_1[n]$ ve $x_2[n]$ işaretlerini kullanarak, istenilen sinyalleri çizimlerle ve sayı dizileriyle tanımlayınız.?

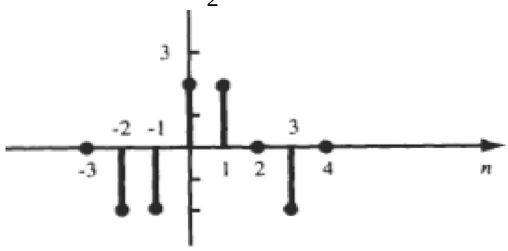
a) $y[n] = x_1[2n] + x_2[-n-2]$

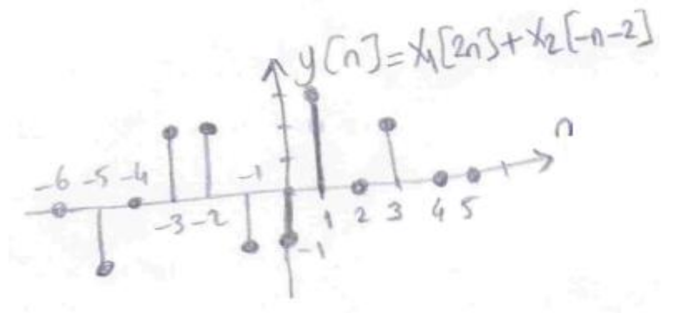
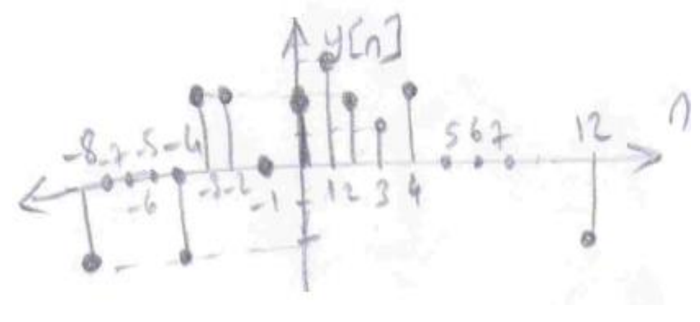
b) $y[n] = x_1[-n+3] + x_2[n/4]$

$x_1[n]$



$x_2[n]$

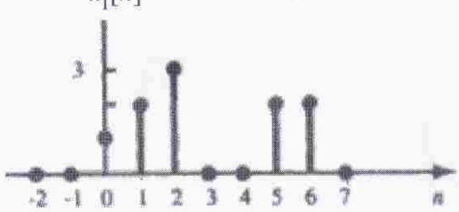


a) $y[n]$	**b)** $y[n]$
	

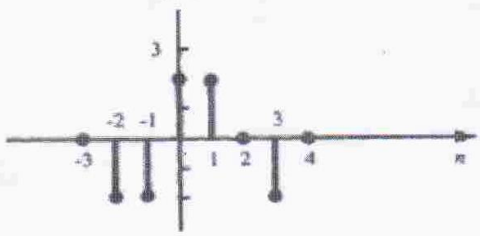
SORU 2)

Aşağıdaki şekillerde gösterilen $x_1[n]$ ve $x_2[n]$ işaretlerini kullanarak, aşağıda istenilen işaretleri çizimlerle sayı dizileriyle tanımlayınız?

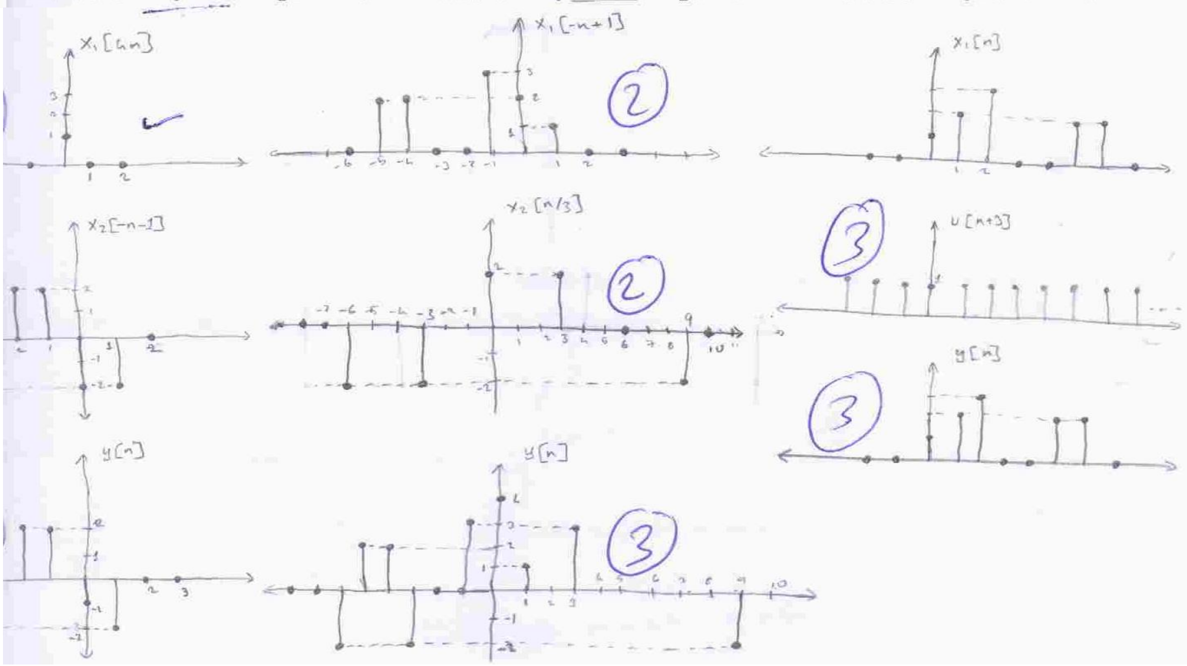
$x_1[n]$



$x_2[n]$



a) $y[n] = x_1[4n] + x_2[-n-1]$ b) $y[n] = x_1[-n+1] + x_2[n/3]$ c) $y[n] = x_1[n] \cdot u[n+3]$



SORU 3)

$x(n) = e^{j[(\frac{n}{4})+\frac{\pi}{3}]}$ ve $x(n) = \cos^2(\frac{\pi n}{8})$ işaretlerinin periyodik olup olmadıklarını gösteriniz. Şayet işaretler periyodik ise temel periyotlarını bulunuz?

$x(n) = e^{j(\frac{n}{4})+\frac{\pi}{3}}$

$= \underbrace{e^{j\frac{n}{4}}}\cdot \underbrace{e^{j\frac{\pi}{3}}}_{\text{sabit katsayı}}$

$w_0 = \frac{1}{4}$

$\frac{w_0}{2\pi} = \frac{\frac{1}{4}}{2\pi} = \frac{1}{8\pi}$

Rasyonel sayı değildir

Bu yüzden periyodik değildir.

$\cos 2t = \cos^2 t - 1$

$\cos^2 t = \cos 2t + 1$

$x[n] = \cos^2(\frac{\pi}{8} n) = (\cos \frac{\pi}{4} n) + 1$

şeklinde yazılabilir.

$w_0 = \frac{\pi/4}{2\pi} = \frac{1}{8}$ rasyonel sayıdır. ve periyodiktir.

$T_0 = \frac{2\pi}{w_0} = 8sn$

SORU 4) $x(n) = e^{j[(\frac{n}{3})+\frac{\pi}{4}]}$ işaretinin periyodik olup olmadığını gösteriniz, periyodik ise temel periyotu nedir.?

$$x(n) = e^{j\frac{n}{3}} \cdot \underbrace{e^{j\frac{\pi}{4}}}_{Katysayi}$$

$$\Omega_0 = \frac{1}{3}$$

$$N_0 = \frac{2\pi}{\frac{1}{3}} = 6\pi \quad \rightarrow \quad \text{Tamsayi degil. Periyodik degil.}$$

SORU 5) $x(t) = \sin(12t)$ sinyalinin Temel Periyodunu bulunuz. Sinyalin 0.2π sn. Örnekleme aralığı ile örneklenmesi durumunda örneklenen ayrık işaretin Temel Periyodunu bulunuz.?

$$x(t) = \sin(12t)$$

$$\omega_0 = 12 \quad \rightarrow \quad T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi}{12} = \frac{\pi}{6} \quad \rightarrow \quad T_S = 0.2\pi = \frac{\pi}{5}$$

$$\frac{T_S}{T_0} = \frac{\frac{\pi}{5}}{\frac{\pi}{6}} = \frac{6}{5} \quad \rightarrow \text{Rasyonel sayi. Dolayisiyla orneklenen } x[n] = x(n \cdot T_S) \text{ periyodiktir.}$$

$$N_0 = m\frac{T_0}{T_S} = m\frac{5}{6} \quad \rightarrow \text{Esitligi saglayan en kucuk pozitif tamsayi m=6 ile elde edilir.}$$

Dolayisiyla $N_0 = 5$ olur.

SORU 6)

$x(t) = \sin(9t)$ sinyalinin Temel Periyodunu bulunuz. Sinyalin 0.3π sn. Örnekleme Aralığı ile örneklenmesi durumunda örneklenen ayrık işaretin Temel Periyodunu bulunuz?

$x(t) = \sin(9t)$

$w_0 = 9 \qquad T_0 = \frac{2\pi}{w_0} = \frac{2\pi}{9} = \frac{\pi}{\frac{9}{2}} \qquad T_s = 0{,}3\pi = \frac{3\pi}{10} = \frac{\pi}{\frac{10}{3}}$

$\frac{T_s}{T_0} = \frac{\frac{3\pi}{10}}{\frac{2\pi}{9}} = \frac{3\pi}{10} \cdot \frac{9}{2\pi} = \frac{27}{20}$ —> Rasyonel sayı. Dolayısıyla örneklenen $x[n] = x(n.T_s)$ periyodiktir.

$N_0 = m \cdot \frac{T_0}{T_s} = m \cdot \frac{20}{27}$ eşitliğini sağlayan $m = 27$ ile elde edilir.

Dolayısıyla $N_0 = 20$ olur.

SORU 7) $x[n] = (0.4)^n \cdot u[n]$ ayrık sinyalinin enerji sinyali veya güç sinyali olup olmadığını belirleyiniz.

$$E = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \left|x[n]\right|^2 = \sum_{n=0}^{n=\infty} \left|(0.4)^n\right|^2 = \sum_{n=0}^{n=\infty} 0.16^n = \frac{1}{1-0.16} = 1.19 \langle \infty$$

$$P = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} \left|x[n]\right|^2 = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=0}^{N} \left|(0.4)^n\right|^2$$

$$= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=0}^{N} 0.16^n = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \frac{1-(0.16)^{N+1}}{1-0.16} = 0$$

$0 \langle \text{E} \langle \infty$ ve P=0 oldugundan $x[n]$ Enerji Sinyalidir.

SORU 8)

$x(t)=t^2\cdot u(t)$ ve $x[n]=n\cdot u[n]$ işaretlerinin enerji sinyali veya güç sinyali olup olmadıklarını belirleyiniz?

$$E=\int_{-\infty}^{\infty}|x(t)|^2\,dt=\int_{0}^{\infty}|t^2|^2\,dt=\int_{0}^{\infty}t^4\,dt$$

$$=\frac{t^5}{5}\Big|_0^{\infty}=\infty$$

$$P=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}t^4\,dt$$

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\cdot\left(\frac{t^5}{5}\Big|_{-T/2}^{T/2}\right)=\left(\frac{(T/2)^5}{5}+\frac{(-T/2)^5}{5}\right)$$

$$\lim_{T\to\infty}\frac{2\cdot(T/2)^5}{5}\cdot\frac{1}{T}=$$

$$\lim_{T\to\infty}\frac{2\cdot\frac{T^5}{2^2}}{5}\cdot\frac{1}{T}=\infty$$

Ne enerji ne güç sinyalidir.

$$x[n]=n\cdot u[n]$$

$$E=\sum_{n=-\infty}^{n=\infty}|x[n]|^2=\sum_{n=0}^{n=\infty}|n|^2=\infty$$

$$P=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{2N+1}\sum_{n=-N}^{n=N}|x[n]|^2=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{2N+1}\sum_{n=0}^{n=N}|n|^2$$

$$=\lim_{N\to\infty}\frac{N\cdot(N+1)}{2}=\infty \text{ çıkar}$$

Ne enerji ne güç sinyalidir.

SORU 9)

$x(t)=e^{3t}\cdot u(t)$ ve $x[n]=u[n+2]$ işaretlerinin enerji sinyali veya güç sinyali olup olmadıklarını belirleyiniz.?

$$E=\int_{-\infty}^{\infty}|x(t)|^2\cdot dt=\int_0^{\infty}e^{6t}\,dt=\frac{1}{6}e^{6t}\Big|_0^{\infty}=\infty \quad (2)$$

(1)

$$P=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}|x(t)|^2\cdot dt=\lim_{T\to\infty}\int_0^{T/2}e^{6t}\,dt=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\cdot\frac{1}{6}e^{6t}\Big|_0^{T/2}$$

(1)

$$P=\lim_{T\to\infty}\frac{e^{3T}}{6T}=\infty \quad (2)$$

, Ne enerji ne de güç sinyalidir. (4)

$$E=\sum_{n=-\infty}^{\infty}|x[n]|^2=\sum_{n=-2}^{\infty}1^2=\infty \quad (2)$$

(1)

$$P=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{2N+1}\sum_{n=-N}^{N}|x[n]|^2=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{2N+1}\sum_{n=-2}^{N}1^2=\lim_{N\to\infty}\frac{N+3}{2N+1}=\frac{1}{2}<\infty \quad (2)$$

(1)

Güç Sinyalidir. (4)

SORU 10)

1.) Bir x(n) dizisinin elemanları -2, -1, 0, 1, 2, ve 3 noktalarında sırasıyla x[-2]=5, x[-1]=4, x[0]=3, x[1]=2, x[2]=1, x[3]=2 değerlerini ve bunun dışındaki noktalarda ise sıfır değerlerini alıyorsa y1[n] = x[n-1]).δ[n-2] ve y2[n] = x[n].u[3-n] çıkış dizilerinin her birine ait çıkış işaretlerini çiziniz.?

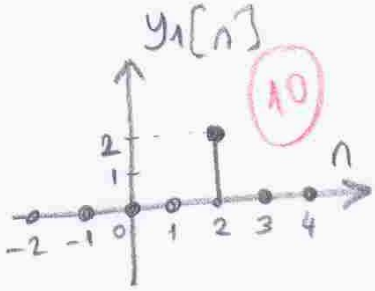
Cevap:

$$x[n] = \{5, 4, \underset{\uparrow}{3}, 2, 1, 2\}$$

$$x[n-1] = \{5, \underset{\uparrow}{4}, 3, 2, 1, 2\}$$

$$\delta[n-2] = \{\underset{\uparrow}{0}, 0, 1, 0, 0\}$$

$$y_1[n] = x[n-1] \cdot \delta[n-2] = \{\underset{\uparrow}{0}, 0, 2, 0, 0\}$$

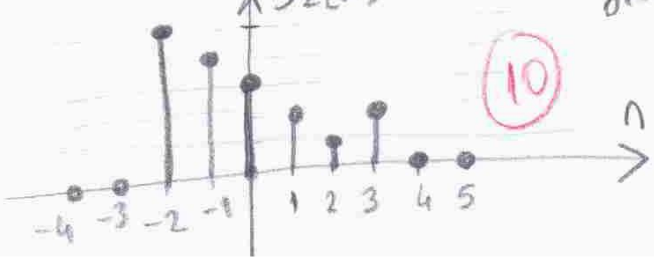


10

$$u[3-n] = \{\ldots, 1, 1, \underset{\uparrow}{1}, 1, 1, 1, 0, 0\}$$

$$y_2[n] = x[n] \cdot u[3-n] = \{5, 4, \underset{\uparrow}{3}, 2, 1, 2\}$$

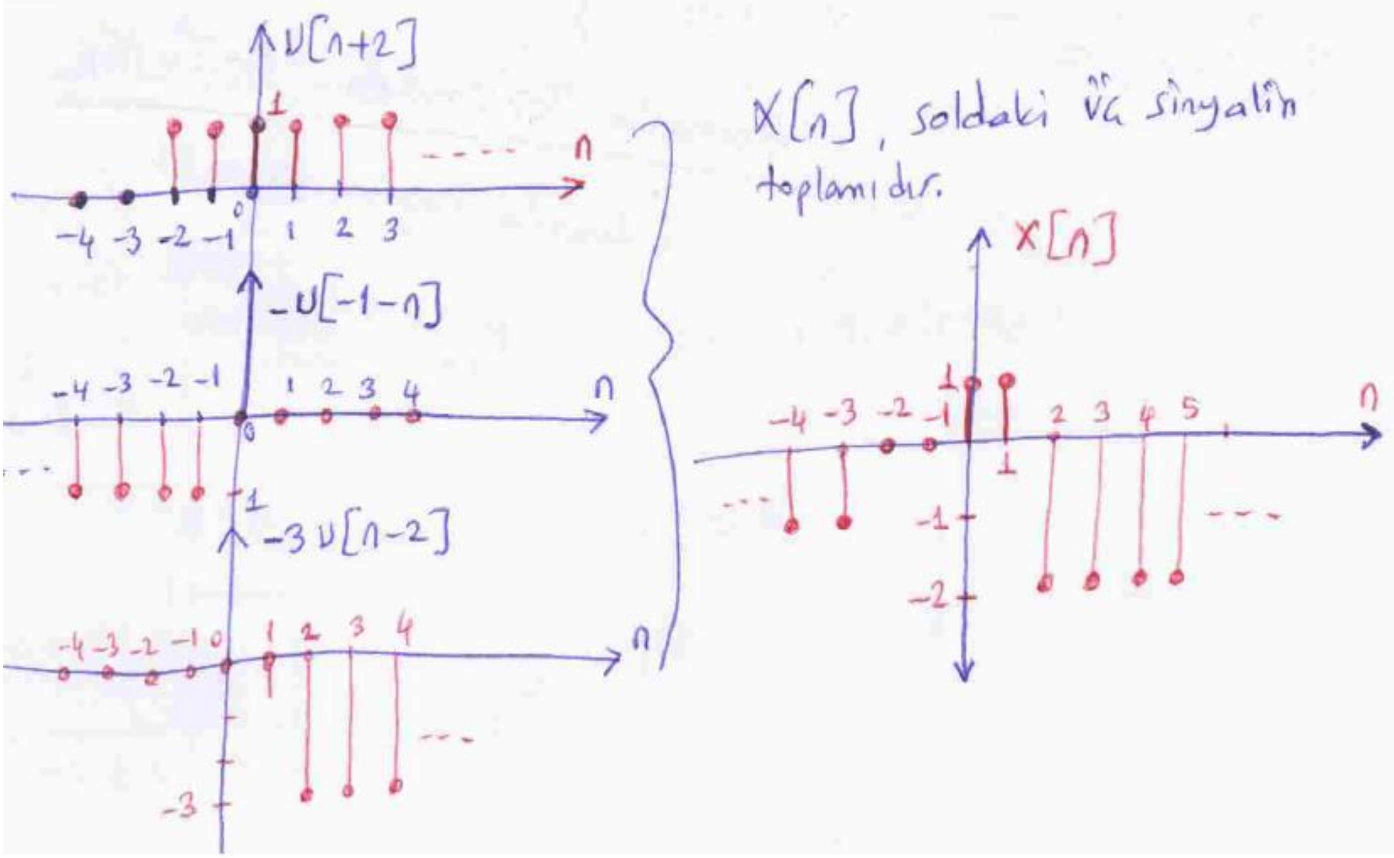
$y_2[n] \rightarrow x[n]$'in aynısı olur



10

SORU 11)

$x[n] = u[n+2] - u[-1-n] - 3 \cdot u[n-2]$ işaretini çiziniz.?



SORU 12)

Giriş-Çıkış ifadesi $y[n] = \mathbf{T}\{x[n]\} = (n+1) \cdot x[n]$ şeklinde verilen sistemin

a) Bellekli-Belleksiz b) Nedensel-Nedensel olmayan c) Doğrusal – Doğrusal Olmayan

d) Zamanla değişen- Zamanla Değişmeyen özelliklerini gösteriniz?

a) $y[n]$, $x[n]$'in o anki değerlerine bağlı old. BELLEKSİZ dir

b) $y[n]$, girişin gelecek değerlerine bağlı olmadığından NEDENSEL'dir

c) $y_1[n] = T\{x_1[n]\}$

$y_2[n] = T\{x_2[n]\}$

$T\{\alpha_1 x_1[n] + \alpha_2 \cdot x_2[n]\} = y_1[n] \cdot \alpha_1 + y_2[n] \alpha_2$ ise doğrusaldır.

$T\{\alpha_1 \cdot (n+1) x_1[n] + \alpha_2 \cdot (n+1) \cdot x_2[n]\}$

$= \alpha_1 \cdot T\{(n+1) x_1[n]\} + \alpha_2 \cdot T\{(n+1) x_2[n]\}$

$= \alpha_1 \cdot y_1[n] + \alpha_2 \cdot y_2[n]$ olduğundan

Toplamsallık ve çarpımsallık özelliklerini sağladığından dolayı DOĞRUSAL'dır.

d) $y[n-k] = (n-k+1) \cdot x[n-k]$

$T\{x[n-k]\} = (n+1) \cdot x[n-k]$

$y[n-k] \neq T\{x[n-k]\}$ eşit olmadığından

Zamanla Değişmeyen DEĞİLDİR.

(Zamanla Değişen sistemdir.)