Fourier dönüşümü

Genelde işaret ve sistemlere ait özelliklerin frekans domenindeincelenmesi için kullanılır.

- Sürekli Zamanlı Fourier Dönüşümü -Continuous Time FourierTransform
- Ayrık Zamanlı Fourier Dönüşümü-Discrete Time FourierTransform-DTFT

Sürekli Zamanlı Fourier Dönüşümü

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

Örnek: impulse fonksiyonu

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j\omega t} = 1$$

Örnek: $x(t) = e^{-at}u(t)$ üstel fonksiyon

$$X(j\omega) = \int_{0}^{\infty} e^{-at} e^{-j\omega t} dt = -\frac{1}{j\omega + a} e^{-(j\omega + a)t} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{j\omega + a}$$

Kaydırma özelliği

$$\mathrm{F}(x(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j(\omega - \omega_0)t} dt \;\; x(t) e^{j\omega_0 t} \Leftrightarrow X(\omega - \omega_0)$$

$$x(t) = \sin(\omega_0 t) = \frac{1}{2i}\left(e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}\right)$$

$$\sin(\omega_0 t) \Leftrightarrow j\pi\delta(\omega + \omega_0) - j\pi\delta(\omega - \omega_0)$$

Laplace'danFourier Dönüşümüne geçiş

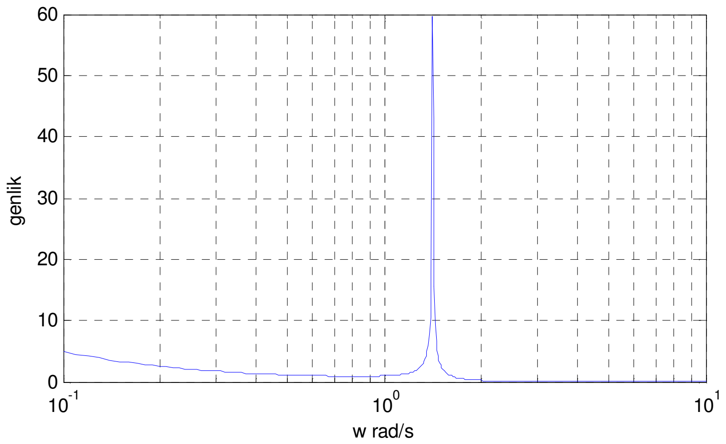
$$H(s)\big|_{j\omega} = H(j\omega)$$

Sürekli ya da ayrık zamanda, frekans cevabı fonksiyonun her hangi bir frekanstaki genlik değeri (karmaşık sayının modülü), sisteme genliği 1 olan bir sinüsoidal fonksiyon uygulandığında sistemin çıkışında elde edilecek sinüsoidal işaretin genlik değerini verir. Benzer şekilde faz değeri de sinüsoidal işaretin kaç derece (ya da radyan cinsinden) fark olacağını gösterir.

Örnek: Aşağıda bir transfer fonksiyonunun Fourier dönüşüm karşılığı verilmiştir.

$$H(s)\big|_{j\omega} = H(j\omega) = \frac{2}{s^2 + 2s + 2}\bigg|_{s=j\omega} = \frac{2}{2 - \omega^2 + 2j\omega}$$

```
% frekansa bağlı kazanç cevabı
w=[0.1:0.01:10];
H=2./((2-w.^2).*(2*j*w));
genlik=abs(H);
%çizim işlemleri
semilogx(w,genlik)
gridon
xlabel('w rad/s');ylabel('genlik')
```



Ayrık Zamanlı Fourier Dönüşümü

Ayrık bir işaret dizisinin Fourier dönüşümü aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n}$$

Örnek: $x(n) = a^n u(n)$ üstel dizisinin karşılığıZ dönüşümüne benzer şekilde,

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n e^{-jn\omega} = \sum_{n=0}^{\infty} (ae^{-j\omega})^n = \frac{1}{1-ae^{-j\omega}}$$

Z Dönüşümünden Ayrık Zamanlı Fourierdönüşümüne geçiş

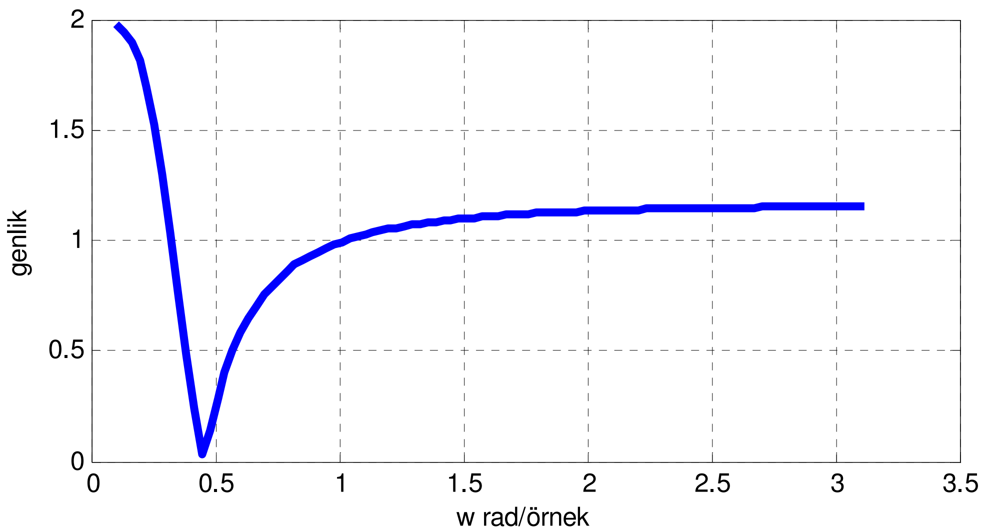
Sistemin Z dönüşümü karşılığı biliniyorsa $z = e^{j\omega}$ yazılarak frekans cevabı fonksiyonu elde edilir.

$$H(z)\Big|_{z=e^{j\omega}} = H(e^{j\omega})$$

Örnek: $H(z)=\dfrac{1-1.8z^{-1}+z^{-2}}{1+1.6z^{-1}+0.7z^{-2}}$ Transfer fonksiyonu verilen sistemin frekanscevabı fonksiyonunu bulunuz.

$$H(z)\Big|_{z=e^{j\omega}} = H(e^{j\omega}) = \frac{1-1.8e^{-j\omega}+e^{-2j\omega}}{1+1.6e^{-j\omega}+0.7e^{-2j\omega}}$$

```
% frekans aralığı tanımlanması
w=[0.1:pi/100:pi];
% Transfer fonksiyonunun tanımlanması
H=8./(8-6*exp(-j*w)+2*exp(-j*2*w));
genlik=abs(H);
%çizim işlemleri
semilogx(w,genlik)
gridon
xlabel('w rad/s');ylabel('genlik')
```



ÖRNEK: $y(n)+0.5y(n-1)+0.3y(n-2)=x(n)-0.5x(n-1)$ şeklinde verilen bir sistemin denklemi DTFT'nin $y(n-M)=Y(e^{j\omega})e^{-jM\omega}$ özelliğinden faydalanarak aşağıdaki gibi tekrar düzenlenebilir.

$$Y(e^{j\omega})+0.5Y(e^{j\omega})e^{-j\omega}+0.3Y(e^{j\omega})e^{-j2\omega}$$

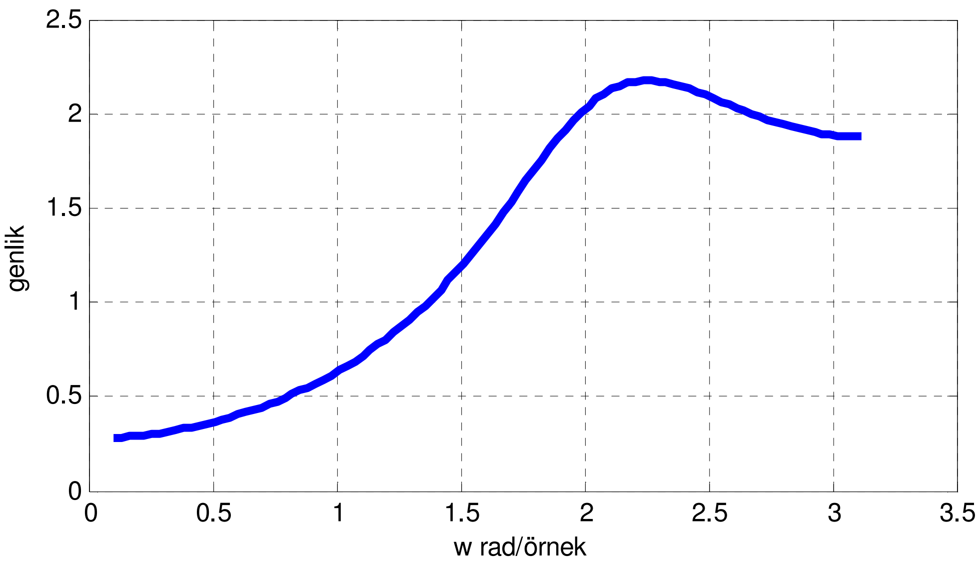
$$=X(e^{j\omega})-0.5X(e^{j\omega})e^{-j\omega}$$

$$H(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = \frac{1-1.5e^{-j\omega}}{1+0.5e^{-j\omega}+0.3e^{-2j\omega}}$$

```
% Frekans aralığının tanımlanması
w=[0.1:pi/100:pi];
% Transfer fonksiyonunun tanımlanması
H=(1-0.5*exp(-j*w))./(1+0.5*exp(-j*w)+0.3*exp(-j*2*w));
genlik=abs(H);
%çizim işlemleri
plot(w,genlik,'linewidth',3)
gridon
xlabel('w rad/örnek');ylabel('genlik')
```

Ayrık zamanlı Fourier dönüşümü ile bir sistemin frekans cevabı çizdirilirken frekans aralığı 0-π arası değiştirilir.

Sistem ayrık zamanlı olduğu için örneklenmiş işaretler üzerinde işlem yapılır ve bundan dolayı Nyquist örnekleme kuralına göre π değeri *Fs/2*, yani örnekleme frekansının yarısı, filtrenin çalışabileceği frekans sınırını tanımlar.

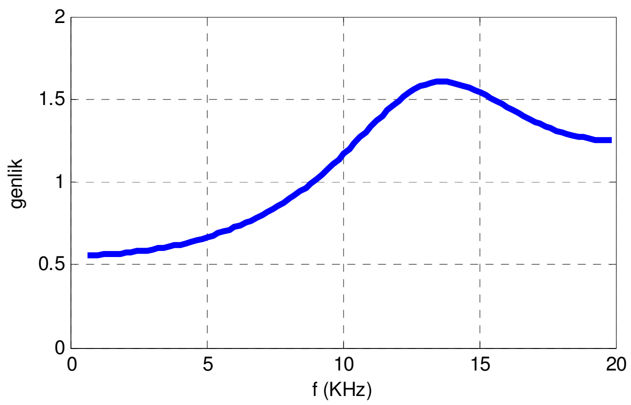


Örnekleme frekansı Fs=40Khz ise frekans cevabı 20KHz ile sınırlıdır.

```
% Frekans aralığının tanımlanması
w=[0.1:pi/100:pi];
```

```
% Transfer fonksiyonunun tanımlanması
H=(1-0.5*exp(-j*w))./(1+0.5*exp(-j*w)+0.3*exp(-j*2*w));
genlik=abs(H);

% Yatay ekseni örnekleme frekansına bağlı değiştir
Fs=40;% 40Khz=40000Hz
F=Fs*( w/(2*pi) );% yatay eksen hz cinsinden
%çizim işlemleri
plot(F,genlik,'linewidth',3)
gridon
xlabel('f (KHz)');ylabel('genlik')
```



Örnek: Bir sistemin transfer fonksiyonu $H(s)=\dfrac{s+10}{s^2+2s+5}$ olarak verildiğine göre bu sistemin ω=2 rad/s için kazanç ve faz değeri nedir?

Çözüm:

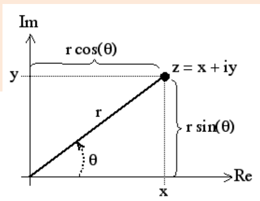
Sistemin frekans cevabı fonksiyonu Laplace dönüşümünden frekans dönüşümüne geçiş yapılarak belirlenir:

$$H(s)\big|_{s=j\omega}=H(j\omega)=\frac{j\omega+10}{(j\omega)^2+2j\omega+5}=\frac{j\omega+10}{5-\omega+2j\omega}$$

ω=2 rad/s için kazanç ve faz:

$$H(j\omega)\big|_{\omega=2}=\frac{10+2j}{3+4j}=\frac{(10+2j)(3-4j)}{(3+4j)(3-4j)}=\frac{38-j34}{25}=1.52-1.36j$$

Kazanç= $|H(j2)|=|1.52-1.36j|$ = 2.0396

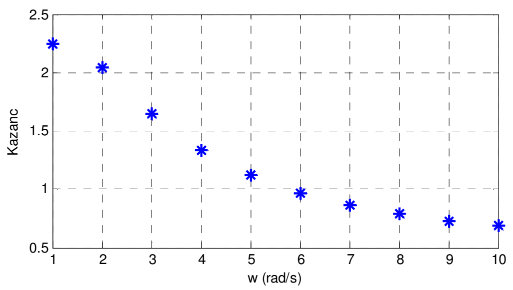


$$\text{Faz}= \angle H(j2) = \arctan\left(\frac{-1.36}{1.52}\right) = \text{-}0.7299\,\text{rad} = \text{-}0.7299 \times \frac{180}{\pi} = \text{-}41.82^{\circ}$$

Örnek: Önceki sorudaki sistem için ω=1 rad/s den ω=10 rad/s değerine kadar 1 rad/s adım aralığı ile elde edilecek kazanç ve faz değerlerini elde ediniz

Çözüm: Önceki soruda belirlenen kazanç ve faz değerlerine benzer şekilde ω değişkenine değer verilerek her bir nokta için kazanç değeri hesaplanır.

ω	H	Kazanç $\lvert H(j\omega)\rvert$	Faz $\angle H(j\omega)$
1	2.1000 + 0.8000i	2.2472	-20.8545
2	1.5200 + 1.3600i	2.0396	-41.8202
3	0.9500 + 1.3500i	1.6508	-54.8658
4	0.6462 + 1.1692i	1.3359	-61.0736
5	0.5000 + 1.0000i	1.1180	-63.4349
6	0.4276 + 0.8690i	0.9685	-63.7999
7	0.3900 + 0.7700i	0.8631	-63.1381
8	0.3698 + 0.6943i	0.7867	-61.9598
9	0.3588 + 0.6353i	0.7296	-60.5416
10	0.3529 + 0.5882i	0.6860	-59.0362

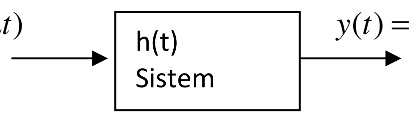



```
w=[1:1:10];
H=(j*w+10)./(5-w +2*j*w );
Kazanc=abs(H);
Faz=angle(H)*180/pi;
%ekrana yazdır
['w' 'Faz' 'Kazanc']
% genlik grafiği
plot(w,Kazanc,'b*')
xlabel('w (rad/s)');
ylabel('Kazanc');grid on
```

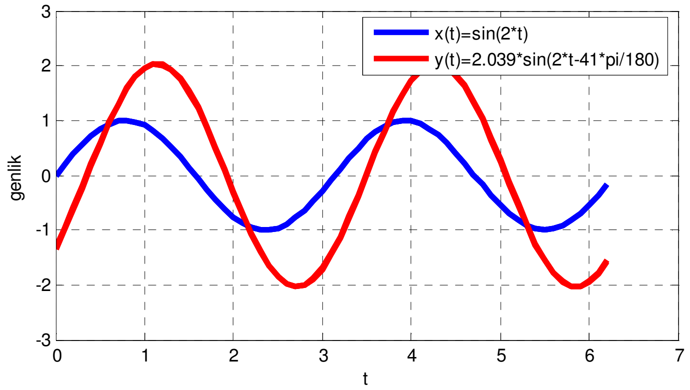
Örnek: Önceki soruda sistemin girişine x(t)=sin(2t) işareti uygulandığında çıkışındaki işaretin fonksiyonu ne olur?

Çözüm: Tablodaki değerlere bakılırsa ω=2 rad/s için genlik değeri 2.0396, faz değeri -41.8202 olduğu görülür. Yani giriş sinüsoidalinin genliği 2.0396 ile çarpılacak, ve 41.8202 derece geriden gelecektir.

$x(t) = \sin(2t)$



$y(t) = 2.0396\sin(2t - 41.85^{\circ})$



Örnek: Bir sistemin transfer fonksiyonu $H(z)=\dfrac{10}{1-0.5z^{-1}}$ olarak verildiğine göre bu sistemin ω=0.2 rad/örnek için kazanç ve faz değeri nedir?