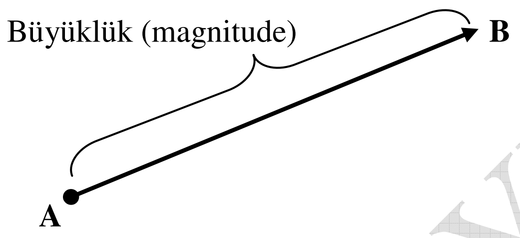
BÖLÜM 1

VEKTÖR ANALİZ VE İŞARET UZAYI

VEKTÖRLER

Vektörler belirli koordinatlarda uzunluk, yön ve şiddete (büyüklüğe, magnitud) sahip geometrik doğru parçalarıdır.

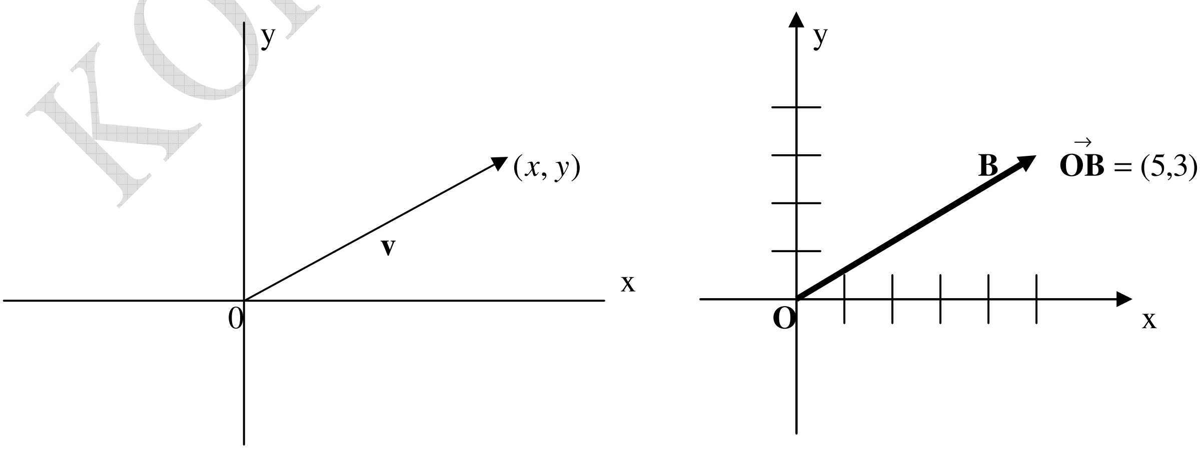


Şekil 1 Vektör gösterimi

A ucu (noktası) başlangıç, **B** ise bitiş ucudur. Vektörlerin değişik gösterim şekilleri olabilir. Örneğin yukarıdaki AB uzunluğu ile ifade edilen vektör koyu harf " **v** " ilede gösterilebilirdi.

$$\mathbf{v} = \overrightarrow{\mathbf{AB}}$$

Bunun yanısıra " **v** " olarak gösterilen vektör aslında (x, y) gibi iki boyutlu uzayda belirli koordinatları işaret etmektedir. Buna göre, kartezyan koordinatlarda bir vektörün $\mathbf{v} = (x, y)$ genel ve $\overrightarrow{\mathbf{OB}}$ örnek gösterimleri aşağıdaki şekillerde yapılabilir.



Şekil 2 **v** vektörünün (x,y) koordinatlarıyla gösterimi

Genellikle **v** vektörü (x, y) koordinatları yerine kendi cinsinden,

$$\mathbf{v} = (v_1, v_2)$$

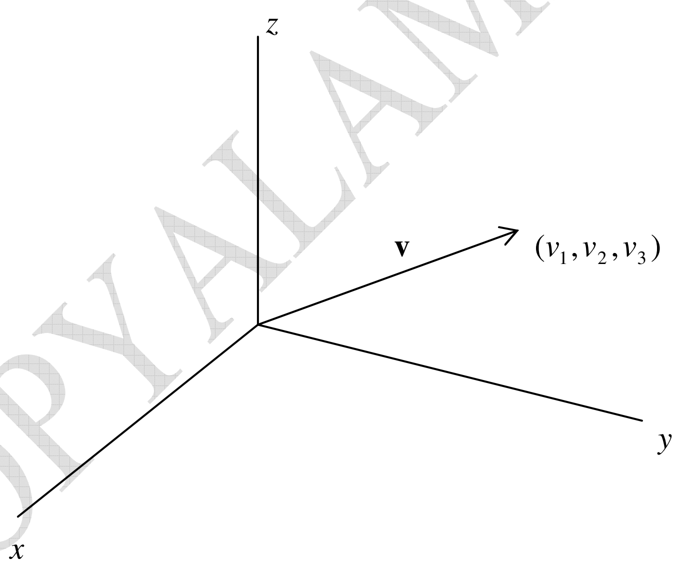
olarakda yazılabilir. Bu durumda v_1'in x eksendeki değere, v_2 ninde y eksendeki değere karşılık geldiğini düşünmeliyiz.

$$\mathbf{v} = (x, y) = (v_1, v_2) = \begin{cases} v_1 = x \\ v_2 = y \end{cases}$$

Bu şekilde **v** vektörünün boyutu daha anlaşılırdır. Bu örnekte (v_1, v_2) olduğundan, **v** vektörü 2 boyutludur denilir. Eğer **v** vektörü,

$$\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3, \cdots, v_n)$$

olarak verilseydi bu durumda da " n " boyutlu **v** vektöründen söz edilirdi.



Şekil 3 3-Boyutlu $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ vektör gösterimi

Yukarıdaki $\mathbf{v} = \overrightarrow{AB}$ örneğini göz önüne alırsak burada başlangıç noktasının,

$$A = (0,0)$$

Bitiş noktasının ise,

$B = (0 + v_1, 0 + v_2)$
olduğu görülecektir. Bu durumda başlangıç noktası (0,0) da olduğu için, bitiş noktası olan B aynı zamanda v vektörünüde oluşturmaktadır. Çünkü A başlangıç noktasından itibaren bunun koordinatlarının üstüne **v** vektörünün koordinatları eklenmektedir. Eğer A başlangıç noktası $A = (x_1, y_1)$ ve bitiş noktası B ise $B = (x_2, y_2)$ olsaydı bu durumda,

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$$

olurdu.

Vektörlerin skalerle çarpımı

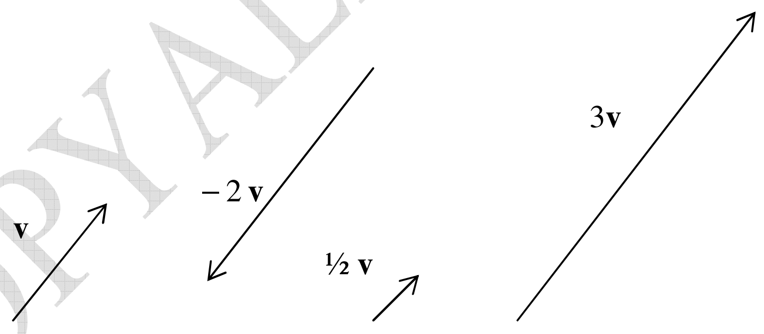
Eğer vektörümüz

$$\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$$

ise, bir " c " sabiti (skaler) ile çarpımı,

$$c\,\mathbf{v} = c\,(v_1, v_2, v_3) = (cv_1, cv_2, cv_3)$$

olurdu.



Şekil 4 Vektörlerin skalerlerle çarpımı

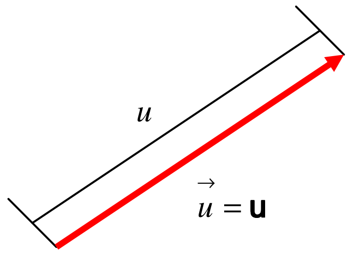
Verilen şekillerden de görülebileceği gibi c sabiti, skaler olarak sırasıyla, 1, -2, 1/2 ve 3 değerlerini almıştır.

Not : $-2\,\mathbf{v}$ veya $3\mathbf{v}$ formundaki vektör, miktar açısından hem yönü hem de genliği olan (yönlendirilmiş, ağırlıklandırılmış) bir büyüklüğü, miktarı (magnitude)gösterirken, sabit sayı görünümündeki skaler ise yalnız genlik anlamındaki miktarı (magnitude), büyüklüğü gösteren kavramlardır.

Vektör Gösterimleri

Skaler çarpımlar dikkate alınarak vektörlerin değişik gösterimleri mevcuttur. Eğer bir $\mathbf{u}$ veya $\vec{u} = \mathbf{u}$ vektörü

$\vec{u} = u\,\vec{e} = \mathbf{u}$

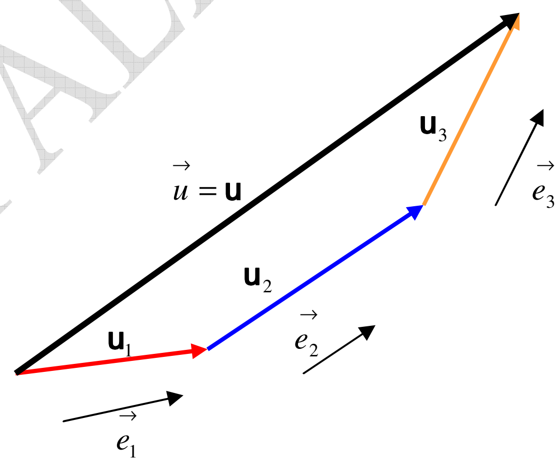


Şekil. 5. Vektörlerin base ve bileşenleriyle gösterimi

$\vec{u} = u\,\vec{e} = \mathbf{u}$ gösterimindeki u vektör bileşeni (vector component) olup koordinat değerlerini göstermektedir. Aynı ifadedeki $\vec{e}$ vektörü ise, temel vektör (**base vector, basis vector**) olarak bilinmektedir. Her $\vec{u} = \mathbf{u}$ vektörü, bir temel vektörün ($\vec{e}$), koordinat durumundaki vektör bileşeni (u) ile çarpılmasından elde edilmektedir. $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ vektörlerinin toplamından

$\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3$

oluşuyorsa, gösterimi aşağıdaki gibi olur.



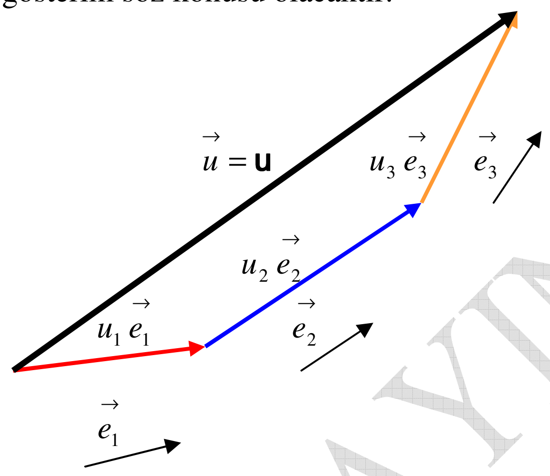
Şekil. 6 Vektörlerin base ve bileşenlerinden oluşturulması

Görüldüğü gibi $\mathbf{u}$ vektörü, $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ ve $\vec{e}_3$ temel vektörlerine (base vector) paralel $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ vektörlerinin toplamından oluşmuştur. Eğer $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ vektörleri, u_1, u_2 ve u_3 bileşenleri olarak

$\mathbf{u}_1 = u_1 \vec{e}_1 \;, \quad \mathbf{u}_2 = u_2 \vec{e}_2 \;, \quad \mathbf{u}_3 = u_3 \vec{e}_3$

$\vec{e}$ = temel vektör (**base vector, basis vector**)
u = vektör bileşeni

biçiminde yazılırsa, aşağıdaki gösterim söz konusu olacaktır.



Şekil. 7 Vektörlerin base ve bileşenlerinden oluşturulması

Görüldüğü gibi, $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ ve $\vec{e}_3$ temel vektörler (base vector), u_1, u_2 ve u_3 vektör bileşenlerinin kendileriyle çarpımlarından oluşan $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ vektörlerinin toplamına eşittir.

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3 \\ &= u_1 \vec{e}_1 + u_2 \vec{e}_2 + u_2 \vec{e}_3 \end{aligned}$$

veya

$$\vec{u} = \sum_{k=1}^{n} u_k \vec{e}_k = \mathbf{u}$$

Eğer $\vec{e}$ temel vektörü $\vec{e} = \vec{e}_1 = \vec{e}_2 = \vec{e}_3 = 1$ olarak birim vektör gibi düşünülürse, bu kez $\mathbf{u}$ vektörü yalnızca u_1, u_2 ve u_3 bileşenlerinin toplamından oluşacaktır.

VEKTÖR UZAYLARI

Vektör uzayı toplanabilir ve çarpılabilir özellikteki vektörlerden oluşmuş bir uzaydır. Vektör uzay bu anlamda linear cebirin en temel elemanı olup, matematik, bilim ve mühendislikte yoğun şekilde kullanılmaktadır. Linear uzay olarak adlandırılabilecek başlıca vektör uzayları ;

1. Euclidean uzayı

2. Inner product uzayı

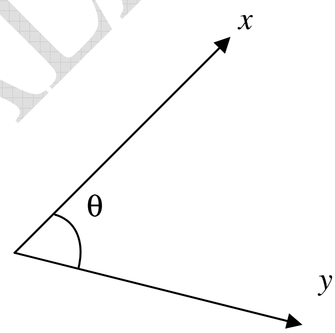
3. Hilbert uzayı

4. Banach uzayı

Bunlardan Euclidean uzayı vektörlerin uzunluk ve mesafeleriyle ilgiliyken, iner product ve Hilbert uzayları, reel ve kompleks özellikli vektörel işlemlerin görüldüğü vektör uzayıdır. Banach uzayı ise daha çok topolojik vektör uzayları olduğu, bu açıdan diğerlerinden farklı ve, reel veya kompleks gösterimlerin ötesinde $\| \|_1$ ve $\| \|_2$ olarak gösterilen normlarla ilgili norm uzayıdır. Bu açıdan banach uzaylarının tam, eksiksiz (complete normed vector space) norm vektör uzayı olarakda anılır.

HILBERT - İÇSEL ÇARPIM VEKTÖR UZAYLARI

Hilbert veya Inner product space (içsel çarpım uzayı), aşağıdaki şekle uygun bir vektör uzayıdır.



Şekil 8. Hilbert space de vektörel gösterim

İçsel çarpım uzayları (inner product spaces), vektörlerin boyutlarına, uzunluklarına, aralarındaki açılar ve var olan ilişkilerine göre incelendiği bir uzaydır. Euclidean uzaylarını genelleştirdiği gibi Hilbert uzayları olarakda bilinirler.

Gerçek Değerli Hilbert Space'in (Inner product Space) Özellikleri

İçsel çarpım olarak (inner products) anılan uzaylar, vektör uzaylarıdır ve daha genel adıyla Hilbert uzayları olarak bilinirler. Bu vektör uzaylarında hem gerçek hemde kompleks vektörler üzerlerine çeşitli işlem ve operatörler tanımlıdır. İlk olarak gerçek (real) değerlikli vektörler üzerine Hilbert uzaylarını (içsel çarpım) ele alacağız. Bu uzay içersinde sırasıyla vektör işlemlerini tanıtmaya çalışacağız.

Gerçek vektörlerin içsel çarpımı

Eğer iki gerçek vektör, $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ ve $y = (y_1, y_2, \cdots, y_n)$ iseler, $x, y \in R^n$ olmak üzere bunların içsel çarpımları $x \cdot y$,

$$x \cdot y = < x, y > = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n$$

veya;

$$\sum_{k=1}^{n} x_k \cdot y_k = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n$$

Buna göre

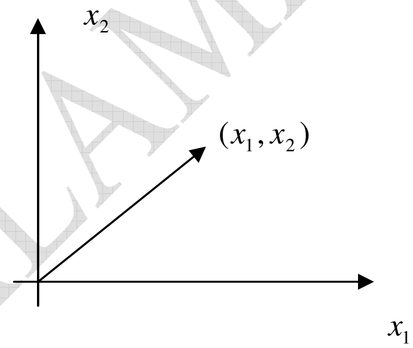
$$x.x = x^2$$

olur, ki bu durum

$$x.x = x^2 = \|x\|^2$$

alternatif gösterimiyle norm olarak adlandırılır.

Norm : Vektör uzunluğu



Şekil 9. Gerçek vektörlerin R^2 deki uzunluğu

Burada x_1 ve x_2 R^2 de yani iki boyutlu gerçek sayılar için tanımlıdırlar. Şekilden görüldüğü gibi x_1 ve x_2 vektörlerinden oluşan R^2 deki x vektörünün uzunluğu **norm** olarak anılır ve $\|x\|$ ile gösterilir. Buna göre $x = (x_1, x_2) \in R^2$ olarak verilen x in uzunluğu :

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$$

olarak hesaplanır. Eğer iki boyutlu R^2 yerine gerçek vektörler n boyutlu R^n de alınsalardı, $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in R^n$ vektör uzunluğu norm olarak

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$$

hesaplanacaktır.

Tespit : Norm görüldüğü kadarıyla bir vektörün büyüklüğünü gösteren kavramdır. Bu anlamda bir vektörün büyüklüğünü gösteren bu kavramın, işaret analizde işaretin enerjine karşılık gelmektedir. Çünkü vektörün büyüklüğüne karşılık vektörün normu gelirken, işaretin büyüklüğüne karşılık da işaretin enerjisi gelmektedir. Bu açıdan işaretin enerjisi olarak

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 \, dt$$

biçiminde gösterilen ifade bir tür işaretin büyüklüğü anlamında işaretin normuna karşılık düşünülebilir. Bu yüzden vektör normu ve işaret enerjisi arasında belirgin bir ilişki vardır.

Birim Vektör

Uzunluğu "1" olan vektördür.

$$\|x\| = 1 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$$

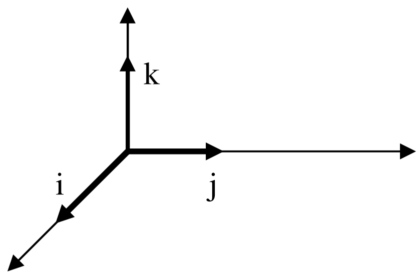
Verilen herhangi bir vektörü birim vektör yapmak için, vektörü kendi uzunluğuna bölmek yeterli olacaktır. Bu proses aynı zamanda bir normalizasyon işlemidir.Buna göre x vektörünü normalize etmek olan, kendi uzunluğuna bölme işlemi

$$\frac{x}{\|x\|} = 1$$

Aşağıda uzunlukları 1 olan

$$\|\mathbf{i}\| = \|\mathbf{j}\| = \|\mathbf{k}\| = 1$$

i , j , k birim vektörleri gösterilmiştir.



Şekil 10 Birim vektörler

Örnek

$\mathbf{u} = (-4,8,4)$ vektörünü birim vektör yapınız

$$\frac{\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|} = \frac{\mathbf{u}}{\sqrt{(-4)^2 + 8^2 + 4^2}} = \frac{1}{\sqrt{96}}(-4,8,4) = \frac{1}{4\sqrt{6}}(-4,8,4)$$
$$= (-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}})$$

Örnek

Aşağıdaki vektörlerin uzunluklarını (normlarını) hesaplayınız.

a) $\mathbf{u} = (-8,-4,8)$ b) $\mathbf{v} = (1,0,0)$ c) $\mathbf{w} = (4,-2,-4)$

Çözüm

a) $\|\mathbf{u}\| = \sqrt{(-8)^2 + (-4)^2 + 8^2} = \sqrt{144} = 12$

b) $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{1^2 + 0^2 + 0^2} = \sqrt{1} = 1 = i$ birim vektor

c) $\|\mathbf{w}\| = \sqrt{4^2 + (-2)^2 + (-4)^2} = \sqrt{36} = 6$

Son örnekten görüldüğü gibi $\mathbf{w} = (4,-2,-4)$ vektörü birim vektör olmamasına rağmen $\frac{\mathbf{w}}{6}$ birim vektördür.

Norm R^n de linear operatör olmadığı için onun yerine, içsel çarpım kavramı kullanılır. Buna göre eğer iki gerçek vektör, $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ ve $y = (y_1, y_2, \cdots, y_n)$ iseler, $x, y \in R^n$ olmak üzere bunların içsel çarpımları $x \cdot y$,

$$x \cdot y = < x, y >= x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n$$

$$\sum_{k=1}^{n} x_k \cdot y_k = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n$$

bulunur.

Kompleks Değerli Hilbert Space'in (Inner product Space) Özellikleri

Şimdi vektörleri daha genel olacak şekilde kompleks değerlikli olarak kompleks Hilbert vektör uzayında (içsel çarpım) ele alacağız. Öncesinde bazı ön ifadeleri verelim.

$$z = a + bi$$

$$\bar{z} = a - bi$$

$$i^2 = -1$$

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$
$$|z|^2 = z\bar{z}$$

x kompleks vektörünün satır ve sütün gösterimleride mümkündür.

$$x = (a_1 + ib_1, a_2 + ib_2, \cdots, a_n + ib_n)$$

$$= \begin{bmatrix} a_1 + ib_1 \\ a_2 + ib_2 \\ \vdots \\ a_n + ib_n \end{bmatrix}$$

Örnek

$x = (2 - 3i, 1 + 2i)$ ve $y = (3 + 2i, -4 + 5i)$ ise,

$x - 3y\,i$ hesaplayalım.

Öncelikle her iki vektörüde sütün formatına dönüştürelim.

$$x = \begin{bmatrix} 2 - 3i \\ 1 + 2i \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} 3 + 2i \\ -4 + 5i \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} x - 3y\,i &= \begin{bmatrix} 2 - 3i \\ 1 + 2i \end{bmatrix} - 3i \begin{bmatrix} 3 + 2i \\ -4 + 5i \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 - 3i \\ 1 + 2i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 - 9i \\ 15 + 12i \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 8 - 12i \\ 16 + 14i \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 4 - 6i \\ 8 + 7i \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Kompleks vektörlerin içsel çarpımı

x ve y vektörleri kompleks olduklarından,

$x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ ve $y = (y_1, y_2, \cdots, y_n)$ $\quad x, y \in C^n$ olmak üzere,

$$\sum_{k=1}^{n} x_k \cdot y_k = x_1 \overline{y_1} + x_2 \overline{y_2} + \cdots + x_n \overline{y_n}$$

Euclidean içsel çarpım ifadesi geçerli olacaktır. Buradaki $\overline{y_n}$ kompleks (eşlenik, conjugate) y vektörünü göstermektedir. Bu nedenle

$$x \cdot \overline{y} \neq y \cdot \overline{x}$$

olduğundan, gerçek sayılardaki R^n, $x \cdot y = y \cdot x$ ifadesi ile karıştırılmamalıdır.

Kompleks vektörün uzunluğu

Burada kompleks vektörlerin, $z = (z_1, z_2, \cdots, z_n) \in C^n$ olduğunu göz önüne alarak ilk olarak uzunluğunu hesaplayalım.

$$\|z\| = \sqrt{z_1^2 + z_2^2 + \cdots + z_n^2} = \sqrt{|z_1|^2 + |z_2|^2 + \cdots + |z_n|^2}$$

Ayrıca x ve y vektörleri kompleks olduklarından,

$x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ ve $y = (y_1, y_2, \cdots, y_n)$ $\quad x, y \in C^n$ olmak üzere,

$$\sum_{k=1}^{n} x_k \cdot y_k = x_1 \overline{y_1} + x_2 \overline{y_2} + \cdots + x_n \overline{y_n}$$

Euclidean içsel çarpım ifadesi geçerli olacaktır. Buradaki $\overline{y_n}$ kompleks (eşlenik, conjugate) y vektörünü göstermektedir. Bu nedenle

$$x \cdot \overline{y} \neq y \cdot \overline{x}$$

olduğundan, gerçek sayılardaki R^n, $x \cdot y = y \cdot x$ ifadesi ile karıştırılmamalıdır.

Örnek

$x = (4 + i, -3 - i)$ ve $y = (-1 + 5i, 3 - 7i)$ ise,

$x \cdot y$ Euclidean içsel çarpımını hesaplayalım. Öncelikle her iki vektörüde sütün formatına dönüştürelim.

$$x = \begin{bmatrix} 4+i \\ -3-i \end{bmatrix} \quad , \qquad y = \begin{bmatrix} -1+5i \\ 3-7i \end{bmatrix}$$

Euclidean içsel çarpım :

$$\begin{aligned} x \cdot y = \langle x, y \rangle &= x_1 \overline{y_1} + x_2 \overline{y_2} \\ &= (4+i)(-1-5i) + (-3-i)(3+7i) \\ &(-4-20i-i+5) + (-9-21i-3i+7) \\ &= -1-45i \end{aligned}$$

Kompleks vektörler arasındaki mesafe

$$\begin{aligned} d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \\ &= \sqrt{|x_1 - y_1|^2 + |x_2 - y_2|^2 + \cdots + |x_n - y_n|^2} \end{aligned}$$

Örnek

$x = (4+i, -3-i)$ ve $y = (-1+5i, 3-7i)$ ise,

a) x ve y vektörlerinin normunu (uzunluğunu) ve aralarındaki mesafesini hesaplayınız.

$$\begin{aligned} \|x\| &= \sqrt{x_1^2 + x_2^2} = \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2} \\ &= \sqrt{(4^2 + 1^2) + ((-3)^2 + (-1)^2)} \\ &= 3\sqrt{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|y\| &= \sqrt{y_1^2 + y_2^2} = \sqrt{|y_1|^2 + |y_2|^2} \\ &= \sqrt{(-1)^2 + 5^2) + (3^2 + (-7)^2)} \\ &= 2\sqrt{21} \end{aligned}$$

b) $d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ mesafesini hesaplayınız.

$$\begin{aligned} d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \\ &= (|x_1 - y_1|^2 + |x_2 - y_2|^2 + \cdots + |x_n - y_n|^2) \\ &= (|4 + i - (-1+5i)|^2 + |(-3-i) - (3-7i)|^2 \\ &= |5-4i|^2 + |-6+6i|^2 \\ &= \sqrt{5^2 + (-4)^2 + (-6)^2 + 6^2} \\ &= \sqrt{113} \end{aligned}$$

Kompleks Euclidean İçsel Çarpım Özellikleri

$\mathbf{x}$ ve $\mathbf{y}$ ve $\mathbf{w}$ kompleks vektörler olmak üzere $\mathbf{x},\mathbf{y} \in C$,

1. $<\mathbf{x},\mathbf{y}>=\overline{<\mathbf{y},\mathbf{x}>}$
2. $<k\mathbf{x},\mathbf{y}>=k<\mathbf{x},\mathbf{y}>$
3. $<\mathbf{x},k\mathbf{y}>=\overline{k}<\mathbf{x},\mathbf{y}>$
4. $<\mathbf{x},\mathbf{x}> \geq 0$
5. $<\mathbf{x},\mathbf{x}>=0$ yalnızca $\mathbf{x}=0$
6. $<\mathbf{x}+\mathbf{y},\mathbf{w}>=<\mathbf{x},\mathbf{w}>+<\mathbf{y},\mathbf{w}>$
7. $<\mathbf{x},\mathbf{x}>=\|\mathbf{x}\|^2=\mathbf{x}^2$

Verilen kuralların tümü kompleks içsel çarpım gösterimi içinde geçerlidir.

Örnek

$$\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}=\overline{\mathbf{y}\cdot\mathbf{x}}$$

Olduğunu ispat edelim.

$$\begin{aligned}\overline{\mathbf{y}\cdot\mathbf{x}} &= \overline{y_1\overline{x_1}+y_2\overline{x_2}+\cdots+y_n\overline{x_n}}\\ &= \overline{y_1}\overline{\overline{x_1}}+\overline{y_2}\overline{\overline{x_2}}+\cdots+\overline{y_n}\overline{\overline{x_n}}\\ &= \overline{y_1}x_1+\overline{y_2}x_2+\cdots+\overline{y_n}x_n\\ &= \mathbf{x}\cdot\mathbf{y}\end{aligned}$$

Örnek

$$<\mathbf{x},\mathrm{k}\mathbf{y}>=\overline{k}<\mathbf{x},\mathbf{y}>$$

Olduğunu ispat edelim.

İspat :

$$\begin{aligned}<\mathbf{x},k\mathbf{y}> &= (x_1\overline{ky_1}+x_2\overline{ky_2}+\cdots+x_n\overline{ky_n})=\overline{k}(x_1\overline{y_1}+x_2\overline{y_2}+\cdots+x_n\overline{y_n})\\ &= \overline{k}<\mathbf{x},\mathbf{y}>\end{aligned}$$

Örnek

$$<\mathbf{x}+\mathbf{y},\mathbf{w}>=<\mathbf{x},\mathbf{w}>+<\mathbf{y},\mathbf{w}>$$

Olduğunu ispat edelim.

İspat :

$$\begin{aligned}<\mathbf{x},\mathbf{w}>+<\mathbf{y},\mathbf{w}> &= (x_1\overline{w_1}+x_2\overline{w_2}+\cdots+x_n\overline{w_n})+(y_1\overline{w_1}+y_2\overline{w_2}+\cdots+y_n\overline{w_n})\\ &=(x_1\overline{w_1}+y_1\overline{w_1})+(x_2\overline{w_2}+y_2\overline{w_2})+\cdots+(x_n\overline{w_n}+y_n\overline{w_n})\\ &=(x_1+y_1)\overline{w_1}+(x_2+y_2)\overline{w_2}+\cdots+(x_n+y_n)\overline{w_n}\\ &=<\mathbf{x}+\mathbf{y},\mathbf{w}>\end{aligned}$$

İki Vektör Arasındaki Açı

$$\mathbf{x.y} = <\mathbf{x},\mathbf{y}> = |\mathbf{x}|\ |\mathbf{y}|\cos\theta$$

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{x.y}}{|\mathbf{x}|\ |\mathbf{y}|}$$

$$\theta = \cos^{-1}\ \frac{\mathbf{x.y}}{|\mathbf{x}|\ |\mathbf{y}|}$$

Görüldüğü gibi, iki vektörün içsel çarpımları bir sayı olup vektör değildir. Buradan eğer iki vektör x ve x ise, içsel çarpımları,

$$x \cdot x = \|x\|^2$$

biçiminde vektörün uzunluğunu gösteren norm olarak hesaplanabilir. İçsel çarpımın diğer bir faydası da seçilen vektörlerin *ortogonal* olmalarıyla ilgilidir. İki vektör birbirlerine dik iseler (aralarındaki açının cos'u 90^0)

$$x \cdot y = |x||y|\cos 90$$

$$x \cdot y = y \cdot x = 0$$

oluşur. Bu yaklaşım vektörlerin birbirlerine benzerliklerini inceleme açısından önemlidir.

Örnek

$\mathbf{x} = (0,0,3)$, $\mathbf{y} = (2,0,2)$, $\theta = \dfrac{\pi}{4}$ ise $\mathbf{x}\,.\,\mathbf{y} = ?$

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{0^2 + 0^2 + 3^2} = 3$$

$$\|\mathbf{y}\| = \sqrt{2^2 + 0^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{x.y} &= <\mathbf{x},\mathbf{y}> = 3.2\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{4} \\ &= 3.2\sqrt{2}\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= 6\end{aligned}$$

Ortogonal Vektörler

Bir birine benzemeyen aralarında ilişki bulunmayan vektörlerdir. Bu tip vektörleri tanımlamanın en basit yolu aralarındaki açılardan hareket etmektir. Eğer yukarıda iki vektör arasındaki açı bağıntısı

$$\cos\theta = \frac{<\mathbf{x},\mathbf{y}>}{|\mathbf{x}|\ |\mathbf{y}|}$$

olarak göz önüne alınırsa, vektörlerin bahsedildiği gibi birbirine benzememesi veya aralarında bir ilişki bulunmaması için,

$$\cos\theta = 0$$

veya

$$\theta = 90^0 = \frac{\pi}{2}$$

olması gerekiyor. Böyle bir durum varsa, vektörler arasında bir ilişki yoktur veya vektörler ilişkisiz (uncorrelated) kabul edilirler. Bu durumdaki **x** ve **y** vektörlerinin ortogonal olduğu kabul edilir. Verilen bağıntıdan yararlanarak alternatif olarak ortogonallik koşulunun $\theta = 90^0$ yanısıra

$$<\mathbf{x},\mathbf{y}>= 0$$

olması gerektiğini biliyoruz. Bu yüzden pratikte aralarında $\theta = 90^0$ bulunan vektörlere ortogonal vektörler söylenebilmektedir. $\theta = 90^0$ diklik koşulu olduğundan, dikliğin veya ortogonalliğin bir birine benzememezliği içerdiğini bilmemiz gerekiyor. Buna göre eğer iki vektör bir birine kesinlikle benzemiyorsa, ortogonal demektir ($\theta = 90^0$). Bu yüzden dolayısıyla içsel çarpım $<\mathbf{x},\mathbf{y}>$ olarak, ortogonal özelliğiyle vektörler arasındaki ilişkiyi ortaya koyan bir yöntem olarak da düşünülebilir.

Ortonormal Vektörler

$\mathbf{x}$ ve $\mathbf{y}$ vektörleri ortogonal

$\mathbf{x}.\mathbf{y} = 0$
ve uzunlukları "1" ise

$\|\mathbf{x}\| = 1$ ve $\|\mathbf{y}\| = 1$
vektörler ortonormal olarak anılırlar.

Ortogonalite ve Benzerlik

İki vektör arasında içsel çarpımla elde edilen

$$\cos\theta = \frac{<\mathbf{x},\mathbf{y}>}{|\mathbf{x}|\ |\mathbf{y}|}$$

bağıntısıyla $\theta = 90^0 = \pi/2$ değerinin bulunması, iki vektörün birbirine dik, dolayısıyla ortogonal oldukları anlamına gelmekteydi. Ortogonal olan vektörler pozitif veya negatif açıya bağlı olarak aynı veya farklı yönlerde olmayacağından, ortogonal vektörlerin benzerliğinden söz edilemez. Buna göre ortogonal olan vektörler birbirine benzemeyen vektörlerdir. Diğer bir deyişle birbiriyle ilişkisiz (unrelated) vektörlerdir. Hatta ortogonal vektörlerin, birbirinden bağımsız oldukları da söylenebilir. Ancak bunun tersi doğru değildir. Yani bağımsız vektörler ortogonal demek değildir. Benzerlik, iki vektör arasındaki $\cos\theta$ ile belirlenebilmektedir. Buna göre $\cos\theta$ ne kadar büyükse (açı o kadar küçük), benzerlik te o denli fazla olacaktır. Nitekim en küçük $\theta = 0^0$ durumunda $\cos 0 = 1$ olarak en büyük değerini aldığından, en fazla benzerliğin olduğu durum söz konusu olur.

Burada $\cos\theta$ bir tür benzerlik katsayısı olarak görev yapmaktadır. Bu da, korelasyon olarak anılmaktadır. Korelasyon ile kastedilen ilişkinin derecesidir. Yani iki vektörün aynı yönde (pozitif/negatif) değişme beraberliğidir. Vektörler şekil olarak birbirinin aynısı değildir, ama aynı yöde olmaları da bir ilişki/korelasyonun olduğunu gösterir. Keza tamamen zıt yönde olmaları da aralarında ilişkinin zıt yönde olmak üzere mevcut olduğunu gösterir. Buna göre, dik/ortogonal olmadıkları sürece, her durumda kuvvetli veya zayıf bir korelasyondan/ilişkiden söz edilebileceği görülmektedir.

Korelasyon

Eğer vektör uzayını göz önüne alıyorsak, iki vektör arasındaki ilişkiyi (korelasyon) göstermek üzere,

$$\cos\theta = \frac{<\mathbf{x},\mathbf{y}>}{|\mathbf{x}|\ |\mathbf{y}|}$$

bağıntısının kullanıldığını biliyoruz. Buradan vektörler arasındaki korelasyonun hesaplanabileceğini artık biliyoruz. Önemli bir ayrıntı, bağıntıdan da görülebileceği gibi korelasyonun vektörlerin uzunluğuna bağlı olmaması́dır. Diğer bir deyişle korelasyon, vektörlerin uzunluğundan bağımsızdır.

Vektörlerden herhangi birinin uzunluğunu iki katına çıkarmak veya azaltmak, vektörler arasındaki $\cos\theta$ korelasyonu etkilemektedir. Belirleyici olan aralarındaki θ açısıdır. Bu açı küçüldükçe benzerlikleri, dolayısıyla korelasyon artmaktadır. Veya tersi bir yaklaşımla, korelasyon veya benzerlik katsayısı olarak $\cos\theta$ büyüdükçe, benzerlikte büyümektedir/artmaktadır.

Vektör ve Olasılık Uzayında İşlemler

Vektör uzayının temel elemanları vektör iken, olasılık uzayının temel elemanları da rastlantı değişkenleridir. İki uzay arasındaki benzer işlemlerin denkliğini sağlamak üzere vektör uzayındaki içsel çarpım, olasılık uzayındaki beklenti değerine karşılık göz önüne alınacaktır.

$$< X, Y > \equiv E(X, Y)$$

Beklenti değer olarak bilinen $E(X,Y)$, X ve Y rastlantı değişkenlerinin ortalamasını göstermektedir. İç içe kavramlar olan vektörler ve rastlantı değişkenleri bu şekilde birlikte göz önüne alınabilir. Bununla kastedilen, vektör uzayındaki iki vektör için içsel çarpım, olasılık uzayındaki rastlantı değişkeni içinse bir tür ortalama anlamına gelen, (*E*) beklenen değer kullanılacaktır. Örneğin eğer vektörler yerine olasılık veya rastlantısal uzayı kullanılıyorsa iki rastgele değişken arasındaki korelasyonu (ilişkiyi) göstermek üzere, Eğer *X* ve *Y* vektörlerinin (rastlantı değişkenlerinin) korelasyonu

$R_{XY} = E(XY)$ **korelasyon**
$R_{XY} = E(X)E(Y)$ **dekorelasyon** (ilişkisizlik, uncorrelated)

ise Pearson korelasyon katsayısı,

$$\rho = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$$

bağıntısı yazılabilir. Görüldüğü gibi vektörlerdeki $\cos\theta$, rastlantısal uzaydaki ρ, vektörlerdeki $< \mathbf{x}, \mathbf{y} >$ ise rastlantısal uzayda $\mathrm{cov}(X,Y)$, nihayet vektörlerdeki uzunluklar $|\mathbf{x}|$ ve $|\mathbf{y}|$ ise, rastlantısal uzayda σ_X ve σ_Y standart sapmalarına karşı gelmektedir. Korelasyon ile kovaryans arasında

$$\begin{aligned} \mathrm{Cov}(X,Y) &= E(XY) - E(X)E(Y) \\ &= R_{XY} - E(X)E(Y) \end{aligned}$$

E, beklenti (expected) değişkeni olup $E(X)$ ve $E(Y)$, X ve Y rastlantı (rassal) değişkenlerinin beklenti (ortalama) değerleridir. Kovaryans iki değişken arasındaki ilişkinin varlığını gösterirken, korelasyon daha fazlasına sahip olarak ilişkinin derecesi ve yönü hakkında da bilgi sağlamaktadır. Buna göre eğer *X* ve *Y* istatistiksel olarak bağımsız iseler, *X* ve *Y* değişkenlerinin aynı anda olma olasılıkları (ortak olasılık fonksiyonu $E(XY)$)

$$E(XY) = E(X)E(Y)$$

yazılır. Eğer vektörlerdeki gibi X ve Y değişkenleri bir birlerine benzemiyorsa (uncorrelated), vektörlerdeki $<\mathbf{x},\mathbf{y}>=0$ gibi, $\mathrm{Cov}(X,Y)=0$ olmalıdır. Yukarıdaki kovaryans bağıntısına göre, eğer vektörler veya rassal değişkenler ilşkisiz (uncorrelated) iseler, $\mathrm{Cov}(X,Y)=0$ bağıntısının sağlanması için vektörlerinin (rastlantı değişkenleri) istatistiksel veya lineer bağımsız olmaları $[\,E(XY)=E(X)E(Y)\,]$ kaçınılmazdır. İstatistiksel/lineer bağımsız durumunu ispat edebiliriz.

$$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\,dx$$
$$E(Y)=\int_{-\infty}^{\infty} y f_Y(y)\,dy$$
$$E(XY)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xy f_{XY}(x,y)\,dxdy$$

Görüldüğü gibi bu yazılanlara göre

$$E(X)E(Y)=\left(\int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\,dx\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty} y f_Y(y)\,dy\right)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xy\, f_X(x)f_Y(y)\,dxdy$$

eğer vektörler istatistiksel olarak bağımsız iseler $E(XY)=E(X)E(Y)$ gereği,

$$\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xy\, f_X(x)f_Y(y)\,dxdy}_{E(X)E(Y)}=\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xy f_{XY}(x,y)\,dxdy}_{E(XY)}$$

olması gerekecektir. Bu eşitliğin ancak

$f_{XY}(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$ **istatistiksel bağımsızlık**

durumunda mümkün olacağından, istatistiksel bağımsızlık sağlanmış olur. Burada,

$f_X(x)$ ve $f_Y(y)$ sırasıyla X ve Y rastlantısal değişkenlerin olasılık yoğunluk fonksiyonları olmak üzere ($f_X(x)=\dfrac{dF_X(x)}{dx}$, $f_Y(y)=\dfrac{dF_Y(y)}{dy}$, ifadelerinden $F_X(x)$ ve $F_Y(y)$ olasılık dağılım fonksiyonu olarak bilinirler). Buna benzer olarak bir diğer sonuç ispatıyla aşağıda verilmiştir.

• **vektörler (rastlantı değişkenleri) <u>istatistiksel olarak bağımsız</u> iseler, vektörler ilişkisizdir** (uncorrelated). Çünkü bağımsızlık durumunda

$$E(XY)=E(X)E(Y)$$

olacağından, vektörlerin ilişkisiz durumları için de $\mathrm{Cov}(X,Y)=0$ olması gerektiğinden bunu ispat edebiliriz. Genel kovaryans ifadesi yazılırsa,

$$\mathrm{cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)$$

X ve *Y* vektörlerinin bağımsızlığı durumunda $E(XY) = E(X)E(Y)$ ifadesi denklemde yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} \mathrm{cov}(X,Y) &= E(X)E(Y) - E(X)E(Y) \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = 0$$

sağlandığından, istatistiksel olarak bağımsız vektörlerin (rastlantı değişkenleri) aynı zamanda ilişkis (uncorrelated) oldukları da görülür.

Öte yandan vektörlerin istatistiksel olarak bağımsız olması için $\mathrm{Cov}(X,Y) = 0$ olması gerekirken, bunun tersi doğru değildir, yani $\mathrm{Cov}(X,Y) = 0$ veya vektörler ilişkisiz olduğu için vektörler bağımsız olmak zorunda değildir. Buna göre,

- **vektörler (rastlantı değişkenleri) <u>ilişkisiz</u> (uncorrelated) iseler** [$\mathrm{Cov}(X,Y) = 0$], **bağımsız oldukları söylenemez** (garanti değildir). Bu iki yolla gösterilebilir.

1) İlişkisiz durumda $\mathrm{Cov}(X,Y) = 0$ olacağından

$$\begin{aligned} \mathrm{Cov}(X,Y) &= E(XY) - E(X)E(Y) \\ &= R_{XY} - E(X)E(Y) \end{aligned}$$

ve iki vektör/(rastlantı değişkeni) ilişkisiz ise $E(X)$ veya $E(Y)$ değerlerinden herhangi biri sıfır ise, bu durumda $\mathrm{Cov}(X,Y) = 0$ olmasına rağmen, $E(XY) = E(X)E(Y)$ sağlanamayacaktır.

$$0 = E(XY) - [E(X) = 0]E(Y)$$

2) $E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\,dx$

$E(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} y f_Y(y)\,dy$

$$E(XY) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xy f_{XY}(x,y)\,dxdy$$

denklemlerine göre yazılırsa,

$$\begin{aligned} \mathrm{Cov}(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xy\, f_{XY}(x,y)\,dxdy - \left(\int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\,dx\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty} y f_Y(y)\,dy\right) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xy\, f_{XY}(x,y)\,dxdy - \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xy\, f_X(x) f_Y(y)\,dxdy \end{aligned}$$

Bu bağıntıya göre denklemdeki x, y, $f_X(x)$, veya $f_Y(y)$ terimlerinden birinin bile sıfır olması durumunda $\mathrm{Cov}(X,Y) = 0$ olacağından, vektörlerin (bağımsız değişkenlerin) bağımsız olması gerekmemektedir. Buna göre $\mathrm{Cov}(X,Y) = 0$ olması, yani vektörlerin (rastlantısal değişkenlerin) ilişkisiz (uncorrelated) olmaları için bağımsız olmaları gerekmiyor.

Ortogonallik ve Korelasyon

Bu bilgilerin ışığında şimdi ortogonallik ve korelasyon arasındaki ilişkiyi arayalım. Vektörler veya rastlantı değişkenleri hangi durumlarda ilişkili veya ilişkisiz bu durumlara bakalım. Bunun için korelasyonun beklenti değerlerine göre tanımı,

$$R_{XY} = E(XY)$$

olmalıdır. R_{XY} , *X* ve *Y* rastlantısal değişkenleri (vektörler) arasındaki ilişkiyi (korelasyonu) göstermektedir. Eğer *X* ve *Y* rastlantısal değişkenleri (vektörler) ortogonal iseler, tanım gereği aralarında ilişki bulunmaması gerekiyor. Bunun için vektörlerden $\cos\theta = 0$ durumunun, rastlantısal değişkenlerle ilgili olarak ise,

$$R_{XY} = E(XY) = 0$$

olmalıdır. R_{XY} korelasyon katsayısı, $\cos\theta$ gibi düşünülmelidir. Burdan çıkan sonuç şudur:

• **İlişkisiz vektörler, orotogonal vektörlerdir :** vektörler (rastlantı değişkenleri) ilişkisiz (uncorrelated) iseler [$\mathrm{Cov}(X,Y) = 0$], ve de değişkenlerden en az birinin sıfır ortalamalı olması durumunda, vektörler aynı zamanda ortogonaldirler. Çünkü ilişkisiz durumda

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = 0 \text{ ve } \quad R_{XY} = E(X)E(Y)$$

ortogonallik koşulu

$$R_{XY} = E(XY) = 0$$

daha önceden

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = R_{XY} - E(X)E(Y)$$

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = E\left[(X-\mu_x)(Y-\mu_y)\right] - E(X)E(Y)$$

Her ikisinin $(\mu_x = \mu_y = 0)$ veya en az birinin $(\mu_x = 0$ veya $\mu_y = 0)$ sıfır ortalamaya sahip olması durumunda

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(X,Y) &= E\left[(X-\mu_x)(Y-\mu_y)\right] - E(X)E(Y)\\ &= E(XY) - E(X)E(Y)\\ &= R_{XY} - E(X)E(Y)\end{aligned}$$

$\mathrm{Cov}(X,Y) = 0$ ilişkisizlik için vektörlerin ortogonal olmaları gerekmektedir. Orotogonal vektörler, lineer/istatistiksel bağımsız olduklarından, $\mathrm{Cov}(X,Y) = 0$ için $E(XY) = E(X)E(Y)$ olduğunu göstermemiz gerekmektedir. Yukarıdaki bağıntı tekrar göz önüne alındığında,

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = 0 = E(XY) - E(X)E(Y)$$
$$E(XY) = E(X)E(Y)$$

elde edileceğinden, ilişkisiz vektörlerin, orotogonal oldukları ispatlanmış olur. Ancak bunun tersi doğru değildir, yani

• Ortogonal vektörler (restlantısal değişkenler), ilişkisiz (uncorrelated) değildirler.
En azından böyle bir sonuç çıkarmanın garantisi yoktur ve genelleme yapılamaz. Çünkü eğer ortogonal olarak $R_{XY} = E(XY) = 0$ alınırsa, bunun ilişkisiz olup olmadığını görmek için kovaryansına bakmamız lazım. Eğer kovaryans sıfır değilse, her ortogonal vektör ilişkisiz değildir diyebileceğiz. Bunun için aşağıdaki kovaryans ifadesini göz önüne alalım.

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

Eğer X ve Y rastlantısal değişkenleri (vektörleri) ortogonal iseler, $R_{XY} = E(XY) = 0$ olması gerekiyor. Bunu kovaryans denkleminde yerine yazarsak,

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = 0 - E(X)E(Y)$$
$$= -E(X)E(Y)$$

veya

$$\mathrm{Cov}(X,Y) \neq 0$$

olduğundan, buradan her ortogonal ($R_{XY} = E(XY) = 0$) vektör veya rastlantısal değişkenin aynı zamanda, ilişkisiz (uncorrelated) oldukları söylenemeyecektir.

İçsel Çarpım ve Benzerlik Ölçüsü

İçsel çarpım yoluyla vektörlerin benzerliği test edilebilir (ölçülebilir). Eğer iki vektör ortogonal iseler aralarındaki açı $\theta = 90^0$ olacağından

$$\mathbf{x}.\mathbf{y} = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = |\mathbf{x}|\,|\mathbf{y}|\cos 90^0$$

bağıntısı gereği $\mathbf{x}.\mathbf{y} = 0$ olacağından vektörlerin birbirine benzemesi mümkün değildir. Bu şekilde en azından aynı yönde benzerlik söz konusu olmaz. Eğer ortogonal vektörler benzer hatta aynı iseler açı, $\theta = 0^0$ olacağından

$$\mathbf{x}.\mathbf{y} = |\mathbf{x}|\,|\mathbf{y}|$$

söz konusu olacağından vektörlerin benzer olacakları düşünülebilir. $\theta = 0^0$ Açısı, vektörlerin çakışık ve üst üste olması gibi düşünülebilir. Böyle olması zaten vektörlerin benzer olmasıyla açıklanabilir. Diğer yandan $\mathbf{x}.\mathbf{y} = |\mathbf{x}|\,|\mathbf{y}|$ bağıntısının vektörlerin tek tek çarpımlarının (içsel çarpım), uzunluklarının tek tek çarpımlarına eşit olması da benzer olmalarının bir sonucudur.

Örnek

$\mathbf{x} = (9,-2)$, $\mathbf{y} = (4,18)$, ise $\theta = ?$

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{9^2 + (-2)^2} = \sqrt{85}$$
$$\|\mathbf{y}\| = \sqrt{4^2 + 18^2} = \sqrt{340}$$

$$\mathbf{x.y} = <\mathbf{x}, \mathbf{y}> = |\mathbf{x}|\,|\mathbf{y}|\cos\theta$$
$$\cos\theta = \frac{\mathbf{x.y}}{|\mathbf{x}|\,|\mathbf{y}|} = \frac{\mathbf{x.y}}{|\mathbf{x}|\,|\mathbf{y}|}\frac{(9.4 + (\text{-}2)18)}{\sqrt{85}\sqrt{340}} = \frac{0}{\sqrt{85.340}} = 0$$
$$\cos\theta = 0$$
$$\theta = \frac{\pi}{2} = 90^0$$

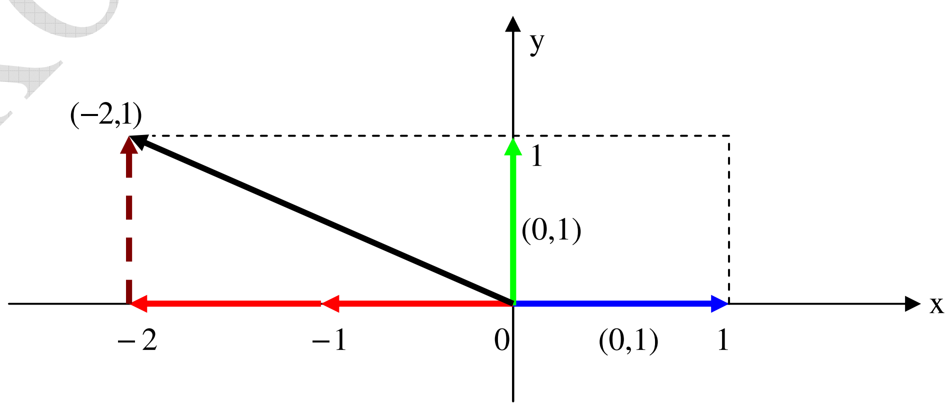
Bu durumda $\mathbf{x}$ ve $\mathbf{y}$ vektörleri ortogonaldir.

Örnek

$\vec{u}$ ve $\vec{v}$ vektörleri ortogonal ise $\vec{u} \bullet \vec{v} = ?$

Basis Vektörler

Daha önce $\vec{u} = u\,\vec{e} = \mathbf{u}$ gösteriminde açıklandığı gibi u vektör bileşeni (vector component) olup koordinat değerlerini gösterirken, $\vec{e}$ vektörü ise, temel vektör (**base vector, basis vector**) olarak bilinmekteydi. Hatta her $\vec{u} = \mathbf{u}$ vektörü, bir temel vektörün ($\vec{e}$), koordinat durumundaki vektör bileşeni (u) ile çarpılmasından elde edilmekteydi. Ayrıca eğer $\vec{e}$ basis vektörü uzunluğu $\left\|\vec{e}\right\| = 1$ olan birim vektör biçiminde de gösterilebilmekteydi. Buna uygun aşağıdaki şekil örnek alınabilir.



Şekil 11 Basis vektörler

Şekilde mavi (+x ekseninde) ve yeşil (+y) eksenindeki vektörler, temel veya basis vektörlerdir. Yatay sol taraftaki -2 uzunluğundaki vektör ise, $u\vec{e}$ çarpım durumundaki sonucu göstermektedir. Buna göre $\vec{e}=1$, $u=-2$ değerindedir. Düşey konumdaki kahverengi vetör içinse, $\vec{e}=1$, $u=1$ durumu söz konusudur. Bu gösterimde temel yani basis vektörlerin önemi daha iyi anlaşılmıştır. Tüm hesaplamalar onların koordinat durumundaki bir u bileşeniyle çarpılmından yeni vektörler elde edilmesi üzerine kurulmuştur. Nitekim siyah kalın $(-2,1)$ vektörü, $(-2,0)$ ve $(0,1)$ basis vektörlerin lineer toplamından oluşmaktadır.

$$(-2,1)=-2(1,0)+1(0,1)=(-2,0)+(0,1).$$

Burada önemli olan şunu bilmektir ; basis vektörler x ve y ekseni üzerinde $(x,0)$ ve $(0,y)$ veya $u_x(x,0)$ ve $u_y(0,y)$ $[\,x=1, u_x=-2\ ;\ y=1, u_y=1\,]$ konum değerlerindeki vektörlerdir. Örneğin $(1,0)$, $2(1,0)=(2,0)$, $3(-3,0)=(-9,0)$ veya $(0,1)$, $3(0,1)=(0,3)$, $-2(0,4)=(0,-8)$ gibi vektörler basis yani temel vektörlerdir.

Farkedildiği gibi basis vektör ya x ya da y ekseninde bulunmaktadır. Bu iki eksenlerin toplamı olan $(-2,1)$ biçimindeki vektör basis vektör değildir. Ancak bu vektörler, basis vektörlerin çeşitli u_x ve u_y gibi bileşenleriyle olan çarpımlarının toplamından (lineer süperpozisyonundan) elde edilmektedir. Buna göre $(-2,1)$ vektörü standart basis vektör olmayıp, standart basis vektörlerin lineer süperpozisyonlarından elde edilmektedir. Bu yüzden, $(-2,1)$ vektörü basis vektörlerden elde edilen bağımlı vektördür. Bunun gibi $(4,-3)$ veya $(-5,-2)$ gibi vektörler de basis vektörlerden elde edilen bağımlı vektörlerdir. Burda dikkati çeken bazı bağımlı vektörlerinde basis vektör oluşturmasıdır $[\,(-3,2)+(3,-5)=(0,-2)\,]$ Aşağıda bu özelliklere sahip, basis vektörlerin bazı özellikleri ele alınacaktır.

Trigonometrik Basis Fonksiyonlar

Basis hatta ortogonal basis fonksiyonların en bilinenleri trigonometrik olanlarıdır. Örneğin bir Fourier serisini aşağıdaki gibi göz önüne alalım.

$$f(t)=\sum_{n=0}^{\infty} D_n\, e^{j\,n\,\omega_0\,t}$$

$$e^{j\,n\,\omega_0\,t}=\cos n\omega_0 t + j\sin n\omega_0 t$$
$$e^{-j\,n\,\omega_0\,t}=\cos n\omega_0 t - j\sin n\omega_0 t$$

Bu gösterimde $e^{j\,n\,\omega_0\,t}$ fonksiyonun basis fonksiyon olduğu görülmektedir. Çünkü $(\cos n\omega_0 t, \sin n\omega_0 t)$ ifadeleri bir D_n sabiti ile çarpılmaktadır ($\vec{u}=u\,\vec{e}=\mathbf{u}$ gösterimindeki $\vec{e}$ olarak, bir u koordinatı veya sabitle çarpılmaktadır). Bu şekilde $D_n(\cos n\omega_0 t, \sin n\omega_0 t)$ gibi oluşan basis fonksiyonları $\sum$ operatörü ile toplanarak, $f(t)$ fonksiyonunu oluşturmaktadır ($\vec{u}=u\,\vec{e}=\mathbf{u}$ gösterimindeki $\vec{u}$ gibi).

Buna göre $f(t)$ fonksiyonuda aynen $\vec{u}$ gibi basis fonksiyonların/vektörlerin toplamından oluşan bağımlı bir fonksiyondur. Trigonometrik basis fonksiyonlar, $(\cos n\omega_0 t, \sin n\omega_0 t)$ gibi pratik ve de aynı zamanda ortogonal olma özelleiklerinden dolayı, özellikle işaret işleme ve analizlerinde Fourier serisi ve Fourier transformasyonlarıyla oldukça sık kullanılan yararlı fonksiyonlardır.

Trigonometrik fonksiyonların $-1 \le (\cos n\omega_0 t, \sin n\omega_0 t) \le 1$ özellikli olması $(\pm 1{,}0)$ ve $(0{,}\pm 1)$ gibi birim vektörleri gibi yazılmalarını sağlamaktadır. Bu özelliği sağlayan trigonometrik fonksiyonlar, $\vec{u\,e}$ benzeri yeni basis vektörlerin elde edilmesine imkan sağladığından, bu avantajından dolayı ayrıca tercih edilmektedirler.

Orthogonal – Orthonormal Tabanlar (basis)

Yukarıda vurgulanan bağımsız ve lineer (lineer bağımsız) basis vektörlerin bir diğer özelliğide, ortogonal özellikte oluşlarıdır. Böylece lineer bağımsız ve ortogonal özellikteki basis vektörler söz konusudur. Örneğin ileride Fourier serisi olarak karşımıza çıkacak

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} D_k \, e^{j k \omega_0 t}$$

denklemi incelendiğinde, basis olarak $e^{j k \omega_0 t}$ terimiyle karşımıza çıkacak ifadeye bakıldığında, $k = (-\infty, \infty)$ biçiminde sonsuz tane farklı genlik (D_k) ve lineer bağımsız basis vektörün ($e^{j\omega_0 t}$) süperpozisyonundan oluşan bir ifadenin söz konusu olduğunu görmekteyiz. Burada yeni bir özellik olarak, tanımlanan basis vektörün aynı zamanda ortogonal olduğunu düşüneceğiz. Buna göre örneğin verilen Fourier serisinin sozsuz tane ortogonal lineer bağımsız basis vektörün kombinasyonundan oluştuğunu düşünebiliriz. Fourier serisindeki bu özelliği, Fourier transformasyonu ve benzer başka kavramlarda da görebiliriz. Bu yüzden ortogonal basis kavramını, vektörel açıdan tanımlamaya çalışalım.

Alt uzay olarak $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \cdots, \mathbf{v}_n\}$ değerleri V vektör uzayında $V = span(S)$ ve S deki vektörlerin linear bağımsız olmasıyla basis olma koşulu sağlanır. Eğer bu basisler birbirlerine dik iseler ortogonal basis olarak anılırlar. Bu durumda S kümesi ortogonal olduğu için S ortogonal basis olarak tanımlanır. Eğer küme ortonormal ise de bu durumda S ortonormal basis olarak tanımlanır. Eğer aynı ortogonal inner product uzayında $\mathbf{u}$ bir vektör ise, ortogonal basisler $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \cdots, \mathbf{v}_n\}$ ve $\mathbf{u}$ vektörü arasındaki aşağıdaki linear kombinasyon mevcuttur

$$\mathbf{u} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + c_3\mathbf{v}_3 + \cdots + c_i\mathbf{v}_i + \cdots + c_n\mathbf{v}_n$$

Bunun anlamı, S alt uzayındaki herhangi bir $\mathbf{u}$ vektörü alt uzay kümesindeki ortogonal basislerin linear kombinasyonları olarak yazılabilmektedir. Ortogonal yazımda katsayıları $(c_1, c_2, c_3, \cdots, c_n)$ hesaplamak için, yukarıdaki denklemin her iki tarfını $\mathbf{v}_i$ ($i = 1,2,\cdots,n$) ile çarparsak,

$$<\mathbf{u},\mathbf{v}_i>=<c_1\mathbf{v}_1+c_2\mathbf{v}_2+c_3\mathbf{v}_3+\cdots+c_i\mathbf{v}_i+\cdots+c_n\mathbf{v}_n\ ,\mathbf{v}_i>$$

$$<\mathbf{u},\mathbf{v}_i>=c_1<\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_i>+c_2<\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_i>+c_3<\mathbf{v}_3,\mathbf{v}_i>+\cdots+c_i<\mathbf{v}_i,\mathbf{v}_i>+\cdots+c_n<\mathbf{v}_n,\mathbf{v}_i>$$

Ortogonal basis için $<\mathbf{v}_i,\mathbf{v}_j>=0$, $i\neq j$ koşulundan dolayı,

$$<\mathbf{u},\mathbf{v}_i>=c_i<\mathbf{v}_i,\mathbf{v}_i>$$

$$c_i=\frac{<\mathbf{u},\mathbf{v}_i>}{<\mathbf{v}_i,\mathbf{v}_i>}=\frac{<\mathbf{u},\mathbf{v}_i>}{\|\mathbf{v}_i\|^2}=\frac{\mathbf{u}.\mathbf{v}_i}{\mathbf{v}_i.\mathbf{v}_i}$$

Yukarıdaki ortogonal basisleri içeren linear süperpozisyon denklemi

$$\mathbf{u}=\frac{<\mathbf{u},\mathbf{v}_1>}{\|\mathbf{v}_1\|^2}\ \mathbf{v}_1+\frac{<\mathbf{u},\mathbf{v}_2>}{\|\mathbf{v}_2\|^2}\ \mathbf{v}_2+\frac{<\mathbf{u},\mathbf{v}_3>}{\|\mathbf{v}_3\|^2}\ \mathbf{v}_3+\cdots+\frac{<\mathbf{u},\mathbf{v}_n>}{\|\mathbf{v}_n\|^2}\ \mathbf{v}_n$$

$$\mathbf{u}=\sum_{k=1}^{n}\frac{<\mathbf{u},\mathbf{v}_n>}{\|\mathbf{v}_n\|^2}\ \mathbf{v}_n$$

orthonormal basis için tek farklılık ortogonal vektörlerin uzunluğu ile ilgili olacaktır. Çünkü ortogonal bir vektörün uzunluğunun aynı zamanda " 1 " $\|\mathbf{v}_n\|^2=1$ alınması durumunda yukarıdaki ortogonal durum için yazılan ifadeler bu kez ortonormal durum için aşağıdaki gibi olacaktır.

$$c_i=\frac{<\mathbf{u},\mathbf{v}_i>}{<\mathbf{v}_i,\mathbf{v}_i>}=\frac{<\mathbf{u},\mathbf{v}_i>}{\|\mathbf{v}_i\|^2}=\frac{\mathbf{u}.\mathbf{v}_i}{\mathbf{v}_i.\mathbf{v}_i}$$

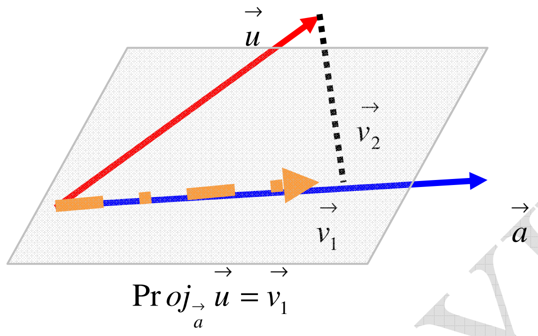
$$c_i=<\mathbf{u},\mathbf{v}_i>=<\mathbf{u},\mathbf{v}_i>=\mathbf{u}.\mathbf{v}_i$$

$$\mathbf{u}=<\mathbf{u},\mathbf{v}_1>\ \mathbf{v}_1+<\mathbf{u},\mathbf{v}_2>\ \mathbf{v}_2+<\mathbf{u},\mathbf{v}_3>\ \mathbf{v}_3+\cdots+<\mathbf{u},\mathbf{v}_n>\ \mathbf{v}_n$$

$$\mathbf{u}=\sum_{k=1}^{n}<\mathbf{u},\mathbf{v}_n>\ \mathbf{v}_n$$

Orthogonal projeksiyon (orthogonal projection)

Bir izdüşüm yöntemi olarak projeksiyon, bir vektöre en yakın noktaların bulunmasının kestirimi üzerine kurulu bir yaklaşımdır. Bu yaklaşım, bir vektörün bir başka vektör üzerindeki, kendisine en yakın olan bileşeninin (projeksiyon veya izdüşümünün) hesaplanması üzerine kurulu, vektörel ve işaret analizde oldukça önemlidir. Bir vektörün yatay ve düşey bileşenleri bu açıdan önemlidir. Bu anlamda projeksiyon en kısa yolun bulunması gibi optimizasyon problemlerinde de kullanılabilecek bir yaklaşımdır.



Şekil 12 $\vec{u}$ vektörünün $\vec{a}$ üzerine projeksiyonu

$\vec{u} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$

Görüldüğü gibi projeksiyon, $\vec{u}$ vektörünün $\vec{a}$ vektörü üzerine izdüşümü veya gölgesidir. Bununla yatay (a) ekseni üzerindeki $\vec{u}$ vektörüne en yakın nokta vurgulanmak istenmektedir. Diğer bir deyişle $\vec{u}$ vektörüne en yakın ve en benzeyen bir başka vektörün varlığı araştırılmaktadır. Eğer $\vec{v}_1$ vektörü $\vec{u}$ vektörünün izdüşümü (projeksiyonu) ise, $\vec{u}$ ve $\vec{v}_1$ vektörü arasında bir ilişki, bir benzerlik olması gerekiyor. Hatta aynı veya eşit bile olabilirler. Çünkü sonuçta $\vec{v}_1$ vektörü, $\vec{u}$ vektöründen bağımsız olmayıp (olabilirde), $\vec{a}$ vektörü üzerindeki yatay bileşenidir. Diğer bir deyişle $\vec{v}_1$ vektörü, $\vec{u}$ vektörünün, $\vec{a}$ vektörü cinsinden yazılmış yatay bileşenidir ($\vec{v}_1 = c\,\vec{a}$). Bu anlamda $\vec{u}$ ve $\vec{v}_1$ vektörleri arasında bir ilişki kaçınılmazdır. Bu ilişki neticesinde birbirlerinin aynısı olabilecekleri gibi, birbirlerinden tamamen farklı da olabilirler.

Ancak izdüşüm yaklaşımı, daha ziyade aralarındaki ilişkinin yani benzerliğin olduğu durumla ilgilenmektedir. Eğer izdüşüm varsa, ideal anlamda tam benzer olurlar ki bu durum yaklaşık olarak

$$\vec{u} \cong \vec{v}_1$$

veya

$$\vec{u} \cong c\,\vec{a}$$

biçiminde ifade edilir. Bununla verilen şekil üzerinde $\vec{u} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$ olarak gösterilen ifade de görülen $\vec{v}_2$ vektörü, $\vec{u}$ ve $\vec{v}_1$ vektörleri arasındaki farkı (hatayı) göstermektedir. $\vec{u} \cong c\,\vec{a}$ ifadesinde görülen yaklaşıklık, iki vektör arasındaki farkı (hatayı) gösteren $\vec{v}_2$ vektörünün yaklaşık olarak sıfır alınmasından kaynaklanmaktadır ($\vec{v}_2 \approx 0$). Bu şekilde $\vec{u}$ vektörünün bir $\vec{a}$ vektörü boyunca (üzerinde) olan bileşeni yani projeksiyonu $c\,\vec{a}$ veya kısaca $\vec{v}_1 = c\,\vec{a}$ dir. İki vektörün aynımı veya benzerse ne kadar benzer olduğunu gösteren bu projeksiyon yoluyla, uygulamalarda örneğin havalanan bir uçağın bir süre sonra yere göre hangi noktada veya mesafede olduğu bulunabileceği gibi aynı zamanda hava tahmin çalışmalarında da yararlanılabilir. $\vec{u}$ ve $\vec{v}_1$ vektörleri arasındaki benzerliği (ilişkiyi) bulmak için, $\vec{u}$ vektörünün yatay $\vec{a}$ vektörü üzerindeki izdüşümü anlamına gelen projeksiyonunu hesaplamamız gerekmektedir. Bu durumda $\vec{u}$ vektörünün $\vec{a}$ vektörü üzerine projeksiyonu (projection of $\vec{u}$ onto $\vec{a}$) aşağıdaki adımlardan oluşacaktır. Önce, şekilden görüldüğü gibi $\vec{u}$ vektörünün bitim noktasından, $\vec{a}$ vektörü üzerine bir dikme inilmektedir. Bu suretle $\vec{u}$ vektörünün $\vec{a}$ üzerindeki $\vec{v}_1$ projeksiyonu belirlenmektedir. İndirilen dikmenin ($\vec{v}_2$), $\vec{u}$ ve $\vec{v}_1$ vektörleri arasındaki farkı (hatayı) minimize eden en küçük değer (en kısa yol, vektör) olduğunu biliyoruz. Bunun ardından sırasıyla aşağıdaki adımlar gerçekleştirilerek, projeksiyon bulunur. Önce,

$$\vec{v}_1 = c\,\vec{a}$$

olarak alınırsa,

$$\vec{u} = c\,\vec{a} + \vec{v}_2$$

Her iki tarafı $\vec{a}$ ile çarparsak,

$$\vec{u}.\vec{a} = (c\,\vec{a} + \vec{v}_2).\vec{a} = c\,\vec{a}.\vec{a} + \underbrace{\vec{v}_2.\vec{a}}_{0}$$

$$= c\,\vec{a}.\vec{a}$$

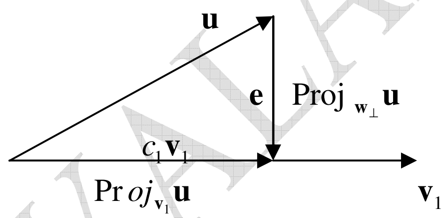
$\vec{v}_2$ ve $\vec{a}$ ortogonal olduklarından $\vec{v}_2.\vec{a} = 0$ alınmıştır. Bunun anlamı $\vec{v}_2$ ve $\vec{a}$ vektörleri arasında hiçbir surette bir ilişki veya benzerlik yoktur. Bunu zaten şekil üzerinden de teyit edebilmekteyiz. Diğer yandan hesaplaması sırasında $\vec{a}$ vektörünün $\vec{u}$ vektörü ile içsel çarpım yoluyla yapılan işlemindeki $\vec{u}.\vec{a}$ ifadesinin sıfırdan farklı ($\vec{u}.\vec{a} \neq 0$) olacağı, diğer bir deyişle ortogonal olmayacaklarının göz önüne alındığını görmekteyiz. Bu tutarlı bir yaklaşımdır. Çünkü projeksiyon veya izdüşüm, ilişkinin (benzerliğin) varlığı üzerine kurulu yaklaşım olduğundan, burada da aynı düşünce benimsenmiştir. Kaldığımız yerden işlem devam ettirilirse,

$$c = \frac{\vec{u}\,.\,\vec{a}}{\vec{a}\,.\,\vec{a}} = \frac{\mathbf{u}\,.\,\mathbf{a}}{\mathbf{a}\,.\,\mathbf{a}} = \frac{<\mathbf{u},\mathbf{a}>}{<\mathbf{a},\mathbf{a}>}$$
$$= \frac{\mathbf{u}\,.\,\mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|^2}$$

Bu durumda aranan projeksiyon,

$$\mathrm{Pr}\,oj_{\vec{a}}\,\vec{u} = \vec{v}_1 = \mathrm{Pr}\,oj_{\mathbf{a}}\mathbf{u} = \mathbf{v}_1 = c\,\mathbf{a}$$
$$= \frac{\mathbf{u}\,.\,\mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|^2}\ \mathbf{a}$$
$$= \frac{<\mathbf{u},\mathbf{a}>}{<\mathbf{a},\mathbf{a}>}\ \mathbf{a}$$
$$= \frac{<\mathbf{u},\mathbf{a}>}{\|\mathbf{a}\|^2}\ \mathbf{a}$$

olarak bulunur. Burada $\mathrm{Pr}\,oj_{\vec{a}}\,\vec{u} = \mathrm{Pr}\,oj_{\mathbf{a}}\mathbf{u}$ ifadeleri “$\vec{u}$ (**u**) vektörünün $\vec{a}$ (**a**) vektörü üzerine projeksiyonu” olarak okunur. Buna göre **a** ortogonal $\mathbf{a} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \cdots, \mathbf{v}_n)$ basis vektörlerinden oluşuyorsa**,** **u** bunların linear süperpozisyonu olarak yazılabilir.



Şekil 13 Vektör projeksiyon

$$\mathbf{u} = c_1\mathbf{v}_1 + \mathbf{e}$$

$$\mathbf{e} = \mathbf{u} - c_1\mathbf{v}_1$$

u vektörü projeksiyonlar türünden yazılırsa,

$$\mathbf{u} = \mathrm{Proj}_{\,\mathbf{w}}\mathbf{u} + \mathrm{Proj}_{\,\mathbf{w}_\perp}\mathbf{u}$$

$$\mathrm{Proj}_{\,\mathbf{w}_\perp}\mathbf{u} = \mathbf{u} - \mathrm{Proj}_{\,\mathbf{w}}\mathbf{u}$$

$\mathrm{Proj}_{\,\mathbf{w}}\mathbf{u} = c_1\mathbf{v}_1$; **u** vektörünün w, $(\mathbf{v}_1)$ vektörü üzerine ortogonal projeksiyonu

$\mathrm{Proj}_{\,\mathbf{w}_\perp}\mathbf{u} = \mathbf{e}$; **u** vektörünün w**,** $(\mathbf{v}_1)$ vektörüne göre ortogonal vektör bileşeni

Görüldüğü gibi $\text{Proj}_{\mathbf{w}}\mathbf{u} = c_1\mathbf{v}_1$ yatay, $\text{Proj}_{\mathbf{w}_\perp}\mathbf{u} = \mathbf{e}$ ise düşey projeksiyonları gçstermektedir. Buna göre $\text{Proj}_{\mathbf{w}}\mathbf{u} = c_1\mathbf{v}_1$ daha da genelleştirilip tüm ortogonal basisleri de kapsayacak olursa, genel ifade aşağıdaki gibi olacaktır.

$$\text{Proj}_{\mathbf{w}}\mathbf{u} = \text{Proj}_{\mathbf{v}_1}\mathbf{u} + \text{Proj}_{\mathbf{v}_2}\mathbf{u} + \text{Proj}_{\mathbf{v}_3}\mathbf{u} + \cdots + \text{Proj}_{\mathbf{v}_n}\mathbf{u}$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \text{Proj}_{\mathbf{v}_n}\mathbf{u}$$

$$\text{Proj}_{\mathbf{w}}\mathbf{u} = \frac{\mathbf{u}.\mathbf{v}_1}{\|\mathbf{v}_1\|^2}\mathbf{v}_1 + \frac{\mathbf{u}.\mathbf{v}_2}{\|\mathbf{v}_2\|^2}\mathbf{v}_1 + \frac{\mathbf{u}.\mathbf{v}_3}{\|\mathbf{v}_3\|^2}\mathbf{v}_3 + \cdots + \frac{\mathbf{u}.\mathbf{v}_n}{\|\mathbf{v}_n\|^2}\mathbf{v}_n$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{\mathbf{u}.\mathbf{v}_k}{\|\mathbf{v}_k\|^2}\mathbf{v}_k$$

Tespit : Yukarıda ele alınan ortogonal projeksiyon tanımlamasında $\vec{u}$ vektörünün $\vec{a}$ vektörü üzerine olan projeksiyonunu (izdüşümünü) gösteren $\vec{u} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$ ifadesinin ortaya çıkardığı daha genel bir sonuç vardır. Bu yolla bir $\vec{u}$ vektörü $\vec{a}$ vektörü üzerine olan yalnızca $\vec{v}_1$ projeksiyondan değil, aynı zamanda $\vec{v}_2, \vec{v}_3, \cdots$ gibi ortogonal projeksiyonlarının toplamından (süperpozisyonundan) da oluşturulabilirdi. Bu durumda genel anlamda

$$\mathbf{u} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + c_3\mathbf{v}_3 + \cdots + c_n\mathbf{v}_n$$

yazımı benimsenirdi.

Ortonormal Projeksiyon

Orthonormal basis için daha önce açıklandığı gibi tek farklılık ortogonal vektörlerin uzunluğu ile ilgili olacaktır. Çünkü ortogonal bir vektörün uzunluğu aynı zamanda “ 1 “ olduğundan yukarıdaki ortogonal projeksiyon için yazılan ifadeler de yalnızca $\|\mathbf{v}_n\|^2 = 1$ alınması ortonormal anlatım ve yazımlar için yeterli olacaktır.

Örnek

$\mathbf{u} = (-3,1) \quad , \quad \mathbf{a} = (7,2)$

ise, $\Pr oj_{\mathbf{a}}\mathbf{u} = ?$

$\mathbf{u}\,.\,\mathbf{a} = (-3.7 + 1.2) = -19$

$\|\mathbf{a}\|^2 = (\sqrt{7^2 + 2^2})^2 = 53$

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_1 = \Pr oj_{\mathbf{a}}\mathbf{u} &= \frac{\mathbf{u}\,.\,\mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|^2}\ \mathbf{a} \\
&= \frac{-19}{53}(7,2) \\
&= \left(-\frac{133}{53}, -\frac{38}{53}\right)
\end{aligned}$$

Örnek

$\mathbf{u} = (4,-2,1) \quad , \quad \mathbf{v} = (-3,1,2)$ ise,

a) Ortogonal projeksiyonu hesaplayınız, $\Pr oj_{\mathbf{v}}\mathbf{u} = ?$
b) Ortonormal projeksiyonu hesaplayınız.

a) $\mathbf{u}\,.\,\mathbf{v} = (4(-3) + (-2)1 + 1.2) = -12$

$\|\mathbf{v}\|^2 = (\sqrt{(-3)^2 + 1^2 + 2^2})^2 = 14$

$$\begin{aligned}
\Pr oj_{\mathbf{v}}\mathbf{u} = \frac{\mathbf{u}\,.\,\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|^2}\ \mathbf{v} &= \frac{-12}{14}(-3,1,2) \\
&= \left(\frac{36}{14}, -\frac{12}{14}, -\frac{24}{14}\right)
\end{aligned}$$

b) Ortonormal projeksiyon ($\Pr oj_{\mathbf{v}\perp}\mathbf{u}$), bulunan ortogonal projeksiyondaki vektörün $\mathbf{v}$ uzunluğunun 1 alınmasıyla $\|\mathbf{v}\| = 1$ elde edilir. Buradan aranan projeksiyon,

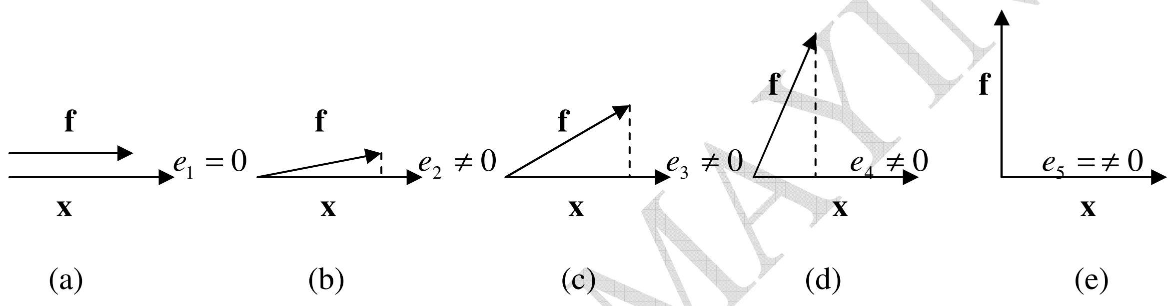
$$\begin{aligned}
\Pr oj_{\mathbf{v}\perp}\mathbf{u} &= \frac{\mathbf{u}\,.\,\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|^2 = 1}\ \mathbf{v} \\
&= -12\,(-3,1,2) \\
&= (36,-12,-24)
\end{aligned}$$

İŞARETLER VE VEKTÖRLER

Şu ana kadar ele almaya çalıştığımız vektör kavramının işaret kavramıyla çok yakın ilişkisi olduğunu biliyoruz. Bir vektör yukarıda bahsedildiği gibi nasıl ki çeşitli bileşenlerinin süperpozisyonundan oluşuyorsa, benzer şekilde işaret de kendi bileşenlerinin süperpozisyonunda oluşmaktadır. Bu durumda aralarındaki ilişkiyi vurgulama adına, işaretlerin aslında vektörler olduğunu düşünebiliriz. Bu ilişkiyi ayrı ayrı ele alarak ortaya koymaya çalışacağız. Öncelikle vektörlerden başlayalım.

Vektörler

Yukarıda ele alınan ortogonal projeksiyon bahsinde, bir vektörün bir başka vektör üzerindeki kendisiyle benzeşim içinde olan bileşeniyle, iki vektör arasındaki ilişki ve bunun bir anlamda derecesi gösterilmişti. Durumu aşağıdaki gibi şematize edebiliriz.



Şekil 14 Vektörlerin benzerliği ve ortogonallik

Görüldüğü gibi **f** ve **x** vektörleri arasındaki benzerlik incelendiğinde benzerliğin, vektör uzunluklarından bağımsız olduğu ve en fazla benzerliğin (a) da olduğu görülmektedir. Çünkü buradaki

$$\mathbf{f} = \mathbf{x} + \mathbf{e_1}$$

olarak yazılabilecek ifade de **f** ve **x** vektörleri arasındaki farkı gösteren hata değeri sıfırdır ($e_1 = 0$). Birbiriyle aynı yönde örtüşük görünen iki işaretin aynı veya oldukça benzer olduğu sürpriz değildir (genlikleri farklı olsa da). Bu anlamda (a) da iki vektör arasında tam bir ilişki (korelasyon) olduğu düşünülebilir.

Şekil (b) dikkate alındığında artık iki vektörün aynı veya çok benzer olmadıkları, bu durumda **f** vektörü ile onun **x** üzerindeki projeksiyonu arasında e_2 hatasına bağlı bir ilişkini varlığı söz konusudur. İfade yazılırsa,

$$\mathbf{f} = c_2\mathbf{x} + \mathbf{e_2}$$

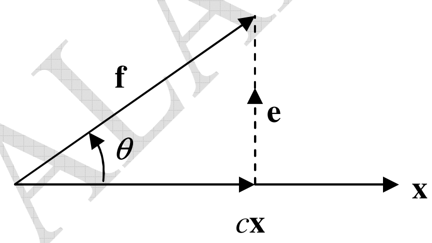
Bağıntısı gereği artık aralarındaki benzerliğin biraz kaybolmakta olduğunu gösteren $e_2 \neq 0$ hata değerinin olduğu görülmektedir. Bu durumda artık $\mathbf{f} = c_2\mathbf{x}$ durumunun olamayacağı ve $e_2 \approx 0$ durumunda ancak $\mathbf{f} \cong c_2\mathbf{x}$ denkliğinin söz konusu olabileceği görülmektedir.

Şekil (c) ve (d) de benzer durumların söz konusu olduğunu görmekteyiz. Buralarda **f** ve **x** vektörleri arasındaki $\mathbf{f} = c_3\mathbf{x} + \mathbf{e_3}$ ve $\mathbf{f} = c_4\mathbf{x} + \mathbf{e_4}$ denklemleriyle aralarındaki benzerliği ölçen farkların (hataların) gittikçe arttığını, diğer bir deyişle vektörlerin birbirlerine giderek çok daha az benzediğini görmekteyiz. Bunun sonucunda $\mathbf{f} = c_3\mathbf{x}$ ve $\mathbf{f} = c_4\mathbf{x}$ eşitliklerinin ancak $e_3 \approx 0$ ve $e_4 \approx 0$ alınması durumunda $\mathbf{f} \cong c_3\mathbf{x}$ ve $\mathbf{f} \cong c_4\mathbf{x}$ olarak gerçekleşebileceğini görmekteyiz.

Nihayet şekil (e) de **f** ve **x** vektörleri arasında artık hiçbir ilişkinin veya benzerliğin bulunmadığını görmekteyiz. Bu durumda **f** vektörünün **x** vektörü üzerinde bileşeni olmadığından $\mathbf{f} = c_5\mathbf{x} + \mathbf{e_5}$ olarak gösterilebilecek ifade de $c_5 = 0$ olacaktır. Diğer bir deyişle **f** vektörünün **x** vektörü üzerinde izdüşümü (projeksiyonu) söz konusu değildir ve dolayısıyla **f** ve **x** vektörleri arasında da bir ilişki yoktur. Bu durumdaki **f** ve **x** vektörlerine ortogonal vektörler denilir. Zaten daha önceden de gösterildiği üzere, ortogonal vektörler, aralarındaki açı dik (90^0) olan vektörlerdi. Zaten şekil (e) den ortogonalliği vurgulayan bu diklik fark edilmektedir.

Bu pratik yaklaşımımızı destekleyecek şekilde vektör analizine bir başka boyuttan devam edelim. Bildiğimiz üzere bir vektör doğrultu ve genliği ile gösterilir. Eğer iki vektör **f** ve **x** ise aralarında,

$$\mathbf{f}\cdot\mathbf{x} = |\mathbf{f}||\mathbf{x}|\cos\theta$$



Şekil 15 Vektör bileşenleri

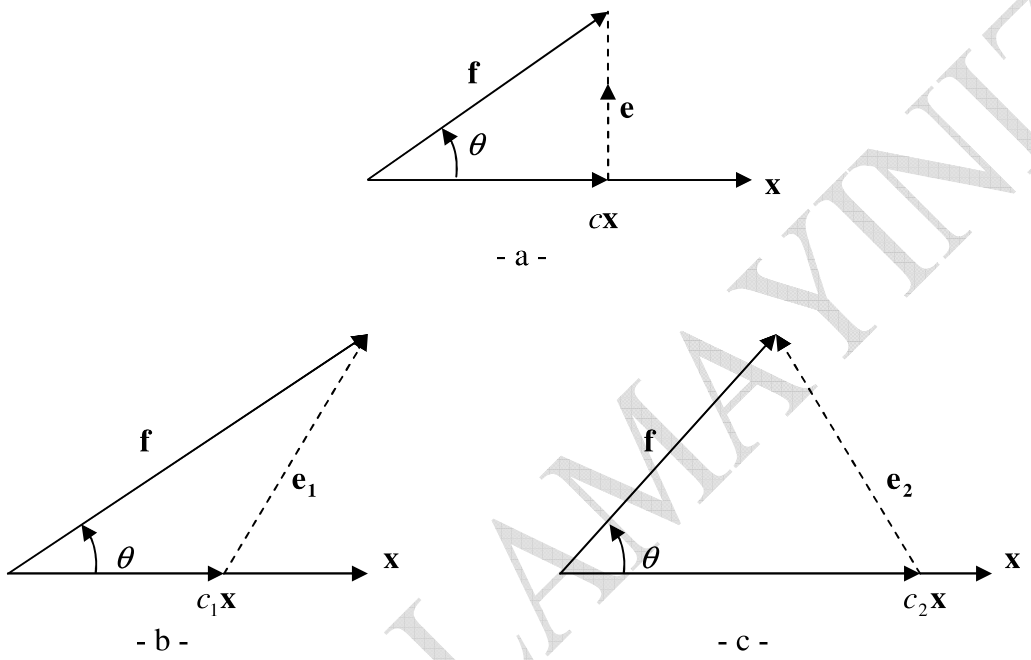
ilişkisinin mevcut olduğunu şekilden görebilmekteyiz. Yazılan denklemdeki ifadeleri detaylandıralım.

$\mathbf{f}\cdot\mathbf{x} =$ **f** ve **x** vektörlerinin içsel çarpım (inner product)
$|\mathbf{f}| =$ **f** vektörünün genliği (magnitude)
$|\mathbf{x}| =$ **x** vektörünün genliği (magnitude)
$\theta =$ **f** ve **x** vektörleri arasındaki açı
$c\mathbf{x} =$ **f** vektörünün **x** vektörü üzerindeki bileşeni (projeksiyonu)
$\mathbf{e} =$ hata vektörü
$|\mathbf{x}|^2 = \mathbf{x}\cdot\mathbf{x} =$ **x** vektörünün uzunluğu (norm)

Yukarıdaki şekilde de görüldüğü gibi, $\mathbf{f}\cdot\mathbf{x}=|\mathbf{f}||\mathbf{x}|\cos\theta$ gösteriminde, $\mathbf{f}$ vektörünün $\mathbf{x}$ vektörü uzantısındaki bileşeni (projeksiyonu) $c\mathbf{x}$ dir. Buna göre $\mathbf{f}$ vektörü bileşenleri ($c\mathbf{x}$, $\mathbf{e}$) cinsinden aşağıdaki şekilde yazılır.

$$\mathbf{f}=c\mathbf{x}+\mathbf{e}$$

Bu gösterimin elde edildiği vektör ve bileşenlerinin oluşturduğu şekli aşağıda verilen alternatif biçimlere göre de değiştirerek elde etmemiz mümkündür.



Şekil 16 Vektörlerin bileşenlerinden oluşturulması

Verilen şekilden (a) yukarıda da ele alınan temel şeklimizdi. Bunun alternatifleri (b) ve (c) de gösterilmiştir. Her birinde ortak görünen

$$\mathbf{f}=c\mathbf{x}+\mathbf{e}=c_1\mathbf{x}+\mathbf{e}_1=c_2\mathbf{x}+\mathbf{e}_2$$

vektörleri karşılaştırıldıklarında en küçük hatanın (a) daki formda olduğu görülmektedir. Gerek (b) gerek (c) şekillerine dikkat edilirse, $\mathbf{f}$ vektörünün $\mathbf{x}$ vektörü boyunca olan bileşenlerine yani projeksiyonuna (izdüşümüne) bakıldığında, her ikisinde de hata miktarının (a) ya göre büyük olduğu görülmektedir. Bu nedenle $\mathbf{f}$ vektörünün kendisine en yakın noktadaki bileşeninin (projeksiyonunun) hesaplanmasında, (a) temel şekil olarak alınmaktadır. Bundan dolayı ortogonal özelliği sahip olan (a) şekli üzerinden analizler yapılmaktadır. Buradan devamla (b) ve (c) durumlarında

$$\mathbf{f}=c_1\mathbf{x}+\mathbf{e}_1=c_2\mathbf{x}+\mathbf{e}_2$$

olarak ifade edilen $\mathbf{f}$ vektörünün izdüşümü (projeksiyonu) görünümündeki $c\mathbf{x}$ olarak görünen vektörü üzerinde biraz durmamız gerekiyor. $\mathbf{f}$ nin $\mathbf{x}$ vektörü üzerindeki projeksiyonu olarak görünen $c\mathbf{x}$ vektörü aslında $\mathbf{f}$ vektörünün $\mathbf{x}$ deki görüntüsü veya $\mathbf{x}$ üzerine düşen gölgesinden başka bir şey değildir. Bu yüzden kaba bir yaklaşımla $\mathbf{f}$ in $c\mathbf{x}$ e eşit olmasının veya onun büyüklüğüne yakın beklenmesi doğaldır ($\mathbf{f} \cong c\mathbf{x}$). Bu varsayımın olabilmesi için hata vektörünü $\mathbf{e}$ yaklaşık sıfır kabul edersek ($\mathbf{e} \approx 0$), bu durumda $\mathbf{f}$ vektörünün yaklaşık değeri

$$\mathbf{f} \cong c\mathbf{x}$$

olacaktır. Bu durum $\mathbf{e}$ vektörünün sıfır veya minimize edilmesi durumunda oluşur. Bunun anlamı şudur : eğer $\mathbf{f}$ in kendi gölgesi olan $c\mathbf{x}$ e çok yakın veya ona eşit olması bekleniyorsa, bunu belli bir hata miktarı ile sağlayan $\mathbf{e}$ vektörünün sıfır veya oldukça küçük (minik, minimize) olması gerekecektir. Bunun içinde $\mathbf{e}$ vektörünü sıfır sayan yaklaşım, bu vektörün varlığıyla ilgili enerjisinin olmaması gerektiğini veya oldukça minimize edilmiş olması gerektiği yönündedir. Eğer $\mathbf{e} = 0$ alınırsa $\mathbf{f} = c\mathbf{x}$, $\mathbf{e} <<$ gibi çok küçük bir değerde ise de $\mathbf{f} \cong c\mathbf{x}$ olacaktır. Gerçekte hata vektörünün değeri,

$$\mathbf{e} = \mathbf{f} - c\mathbf{x}$$

$\mathbf{f}$ vektörünün $\mathbf{x}$ vektörü üzerindeki bileşeninin $c\mathbf{x}$ uzunluğu $|\mathbf{f}| \cos\theta$ ise;

$$c\,|\mathbf{x}| = |\mathbf{f}| \cos\theta$$

yazılabilir. Her iki tarafı $|\mathbf{x}|$ ile çarparsak

$$c\,|\mathbf{x}|^2 = |\mathbf{f}||\mathbf{x}|\cos\theta = \mathbf{f}\cdot\mathbf{x}$$

oluşur. Buradan,

$$c = \frac{\mathbf{f}\cdot\mathbf{x}}{\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}} = \frac{1}{|\mathbf{x}|^2}\,\mathbf{f}\cdot\mathbf{x}$$

elde edilir. Şekil (a) dikkate alınırsa, $\mathbf{f}$ ve $\mathbf{x}$ vektörleri eğer bir birine dik veya vektörel deyişle birbirlerine ortogonal iseler, içsel çarpımları (inner product) sıfır olacağından,

$$\mathbf{f}\cdot\mathbf{x} = 0$$

ise

$$c = 0$$

bulunur. İki vektörün ortogonal olmalarının anlamı ;

1. iki vektörün birbirine dik olduğunu gösterir.
2. iki vektörün içsel çarpımlarının sıfır olması ise ($\theta = 90^\circ$, $\cos\theta = 0$)
3. iki vektörün birbirinden farklı ve aralarında benzerlik olmadığı anlamına gelmektedir.

İşaretler

Yukarıda vektörle işaret arasında sıkı bir bağlantı olduğu vurgulanmış, hatta işaretlerin vektörler olduğu iddia edilmişti. Bu anlamda ilk olarak vektörler ele alınmış, projeksiyon ve ortogonallik açısından incelenmişti. Şimdi vektör analiz için kullanılan analojiyi işaret üzerine uyarlayarak sonuçlarını elde etmeye çalışacağız. İnceleme sırasında doğal olarak vektörler için kullanılan notasyonlar, işaret formatına dönüştürülerek kullanılacaktır. Bu anlamda daha önce gördüğümüz $\mathbf{f}$ vektörü yerine $f(t)$ gerçek işareti ve $\mathbf{x}$ vektörü yerine de $x(t)$ gerçek işaretini alarak, $[t_1, t_2]$ aralığında, $f(t)$ işaretini $x(t)$'e bağlı olarak yaklaşık yazmaya çalışalım. Dikkat edilirse işaret analiz için $[t_1, t_2]$ aralığı göz önüne alınmıştır. Bunun vektör analizde de karşılığı olduğunu biliyoruz. Nasıl ki, vektörün bir başlangıç ve bitiş noktası varsa, işaret içinde benzer düşünceyle t_1 başlangıç ve t_2 bitiş noktası dikkate alınmıştır. Bunun için daha önce $\mathbf{f} = c\mathbf{x} + \mathbf{e}$ olarak ele alınan vektörde $\mathbf{e} \approx 0$ için $\mathbf{f} \cong c\mathbf{x}$ biçimindeki ifadeyi, yeni işaret notasyonumuzla

$$f(t) = cx(t) + e(t) \qquad , \qquad t_1 \le t \le t_2$$

biçiminde yazalım. Bununla vektör analizdekine benzer olarak bu kez işaret analizde $f(t)$ işaretinin, $x(t)$ işareti üzerindeki $cx(t)$ ortogonal projeksiyonu (izdüşümü) vurgulanmaktadır. Dolayısıyla yine vektör analizdekine benzer olarak bu kez işaret analizde $f(t)$ işaretinin, $x(t)$ işareti üzerindeki $cx(t)$ ortogonal projeksiyonu (izdüşümü) ile $e(t)$ hata işaretinin toplamlarından oluştuğu ifade edilmektedir. Diğer bir deyişle $f(t)$ nin $x(t)$ üzerinde kendisine en yakın noktanın $cx(t)$ projeksiyonu (izdüşümü) olduğu belirtilmektedir. Hatanın sıfır veya minimum düşünülmesi sonucu aşağıdaki ifade söz konusu olur.

$$f(t) \cong cx(t) \qquad , \qquad t_1 \le t \le t_2$$

Bu yazımı sağlayan vektör analizde $\mathbf{e}$ biçimindeki hata değeri işaret analizdeki $e(t)$ yapısıyla aşağıdaki gibi olacaktır.

$$e(t) = \begin{cases} f(t) - cx(t) & t_1 \le t \le t_2 \\ 0 & \end{cases}$$

Burada $f(t)$ ‘i hesaplayabilecek iyi bir optimizasyon (yaklaştırma) yaklaşımına ihtiyaç var. En iyi yol olarak hata işaretini ve büyüklüğünü minimize edebilecek parametre olarak hatanın enerjisini göz önüne alabiliriz. Vektör analizde de büyüklük anlamına gelen norm kullanıldığına dikkat çekmek isteriz. Neticede norm vektör analizde miktar belirten bir büyüklük olarak kullanılırken, işaret analizde de işaretin büyüklüğünü gösterecek norm benzeri kullanılabilecek kavram da işaretin enerjisidir. Yani vektörde norm, işarette ise eşdeğer parametre olarak enerji göz önüne alınır. Buna göre hataya dair enerji aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$\begin{aligned} E_e &= \int_{t_1}^{t_2} e^2(t)dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} [f(t) - cx(t)]^2\, dt \end{aligned}$$

Bu ifadede " t " düşecek, değer alacak (dummy) değişken olduğundan E_e, c ye bağlı bir fonksiyon olarak değişir. Dolaysıyla E_e, c'nin değerlerine bağlı olarak minimize edilebilir. E_e nin minimize olması için,

$$\frac{dE_e}{dc} = 0$$

veya

$$\frac{d}{dc}\left[\int_{t_1}^{t_2} [f(t) - cx(t)]^2\, dt\right] = 0$$

koşulunun olması gerekir. Çünkü E_e, c nin değişimiyle değişmemesi gerekiyor, bunun için de c nin değişken özellikli bir fonksiyon değil bir sabit veya gerçek sayı olması gerekir. Eğer c, bir tür korelasyon katsayısı ise, zaten sabit formda olacaktır. Aksi taktirde c nin zamanla değişen bir fonksiyon olması durumunda minimizasyon işlemi mümkün olmayabilirdi. Buna göre yukarıdaki son denklemin karesini alıp ona göre düzenleme yapılırsa,

$$\frac{d}{dc}\left[\int_{t_1}^{t_2} [f(t) - cx(t)]^2\, dt\right] = \frac{d}{dc}\left[\int_{t_1}^{t_2} f^2(t)dt\right] - \frac{d}{dc}\left[2c\int_{t_1}^{t_2} f(t)x(t)dt\right] + \frac{d}{dc}\left[c^2\int_{t_1}^{t_2} x^2(t)dt\right] = 0$$

buradan

$$\frac{dE_e}{dc} = 0$$

Koşulundan dolayı, ikinci ve üçüncü terimlerin toplamı sıfır olacağından,

$$-2\int_{t_1}^{t_2} f(t)x(t)dt + 2c\int_{t_1}^{t_2} x^2(t)dt = 0$$

$$c = \frac{\int_{t_1}^{t_2} f(t)x(t)dt}{\int_{t_1}^{t_2} x^2(t)dt}$$

Bu ifadenin vektör analizdeki

$$c = \frac{\mathbf{f} \cdot \mathbf{x}}{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}} = \frac{1}{|\mathbf{x}|^2}\ \mathbf{f} \cdot \mathbf{x}$$

İfadesinin dengi olduğu görülmektedir. Devam edersek son "c" ifadesinden $x(t)$ nin enerjisi olarak

$$E_x = \int_{t_1}^{t_2} x^2(t)dt$$

yazılırsa, katsayı c

$$c = \frac{1}{E_x}\int_{t_1}^{t_2} f(t)x(t)dt$$

olarak bulunur. Görüldüğü gibi integrasyondaki " t " dummy değişken olduğundan ve işlemde düşeceğinden, c gerçek veya komplex yapıda bir sabit yapısında elde edilir. Buradan yaklaşımla,

$$f(t) \cong cx(t) \qquad , \quad t_1 \le t \le t_2$$

yaklaşık ifadesinde bulunmak istenen $f(t)$

$$\frac{d}{dc}\left[\int_{t_1}^{t_2} f^2(t)dt\right] - \frac{d}{dc}\left[2c\int_{t_1}^{t_2} f(t)x(t)dt\right] + \frac{d}{dc}\left[c^2\int_{t_1}^{t_2} x^2(t)dt\right] = 0$$

denkleminde

$$-\frac{d}{dc}\left[2c\int_{t_1}^{t_2} f(t)x(t)dt\right] + \frac{d}{dc}\left[c^2\int_{t_1}^{t_2} x^2(t)dt\right] = 0$$

olduğundan

$$\int_{t_1}^{t_2} f(t)x(t)dt = 0$$

olacaktır. Bu da bize vektörlerdeki $\mathbf{f} \cdot \mathbf{x} = 0$ sonucunu hatırlatmaktadır. Buna göre, $f(t)$ ve $x(t)$ işaretlerinin $[t_1, t_2]$ aralığında birbirlerine dik yani ortogonal olduğunu, ayrıca integrasyonun (içsel çarpım, inner product) sıfır olmasının sebebinide her iki işaret fonksiyonunun birbirlerinden farklı ve benzerlikleri olmadığı yönünde değerlendirilmelidir.

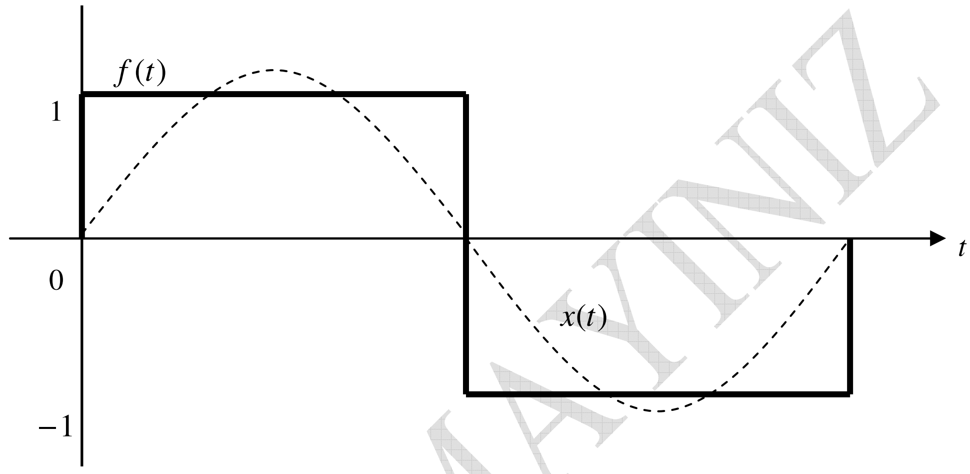
Tespit : Vektör analizdeki neticeler, özellikle de ortogonal projeksiyonla ilgili olanlar bu kez $[t_1, t_2]$ aralığı dikkate alınarak benzer biçimde işaret analizde de görülmektedir. Bu, işaret ve vektör arasındaki sıkı ve anlamlı ilişkiyi teyit eden bir sonuçtur. İki vektör veya vektörler arasındaki ilişki veya benzerlik nasılsa, iki işaret veya işaretler arasındaki ilişkide benzer manada düşünülebilir.

Örnek

Aşağıdaki şekilde diktörtgen olarak verilen $f(t)$ işaretini (koyu çizgili)

$$f(t) \cong c \sin t \quad , \quad 0 \le t \le 2\pi$$

yaklaşık değerini sağlayacak şekilde c sabitini bulunuz.



Şekil 17 Diktörtgen ve sinüs işareti arasındaki korelasyon

Çözüm

Verilen denklemde aslında söylenen şudur ; $f(t)$ diktörtgen işaretin $x(t) = \sin t$ işareti (şekilde kesik çizgili) üzerindeki projeksiyonunun hesaplanmasıdır. Bununla dörtgen ve $\sin t$ sinusoidal işaret arasındaki ilişki sorgulanmaktadır. Dörtgen işaretin, sinusoidal işarete ne kadar benzediği gösterilecektir. Şekilden görüldüğü gibi iki işaret biçim açısından farklı gibi görünmesine rağmen, büyüklükleri ve yönleri dahil olmak üzere, aynı zamanda benzer özelliklerde taşımaktadırlar. Bunu göstermek adına $f(t) \cong c \sin t \quad , \quad 0 \le t \le 2\pi$ denklemi verilmiştir. Bununla anlatılmak istenen aslında başlangıçta iki fonksiyon arasında

$$f(t) = c \sin t + e(t) \quad , \quad 0 \le t \le 2\pi$$

biçiminde yazılabilecek projeksiyon yaklaşımına göre $f(t)$ ye en fazla benzerlik noktasındaki $x(t) = \sin t$ işareti $e(t) \approx 0$ kabulüyle, $f(t)$ nin $\sin t$ üzerindeki projeksiyonu olan,

$$f(t) \cong c \sin t \quad , \quad 0 \le t \le 2\pi$$

ifadesidir. Buradan bir tür benzerlik katsayısı (korelasyon) anlamına gelen "c" sabitinin hesaplanması, elimizdeki bilgilerin ışığında mümkündür.

$f(t) \cong c\sin t \quad , \quad 0 \le t \le 2\pi$

$x(t) = \sin t$

$x(t)$ işareti şekil üzerinde kesik çizgilerle gösterilen $\sin t$ işaretidir. Buradan hata işaretinin enerjisi minumum olacağından,

$$E_x = \int_{t_1}^{t_2} x^2(t)dt = \int_0^{2\pi} \sin^2 t\, dt = \pi$$

minimizasyonu sağlayacak c değeri ise,

$$c = \frac{1}{E_x}\int_{t_1}^{t_2} f(t)x(t)dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin t\, dt = \frac{1}{\pi}\left[\int_0^{\pi} (1)\sin t\, dt + \int_{\pi}^{2\pi} (-1)\sin t\, dt\right]$$
$$= \frac{1}{\pi}\left[\int_0^{\pi} \sin t\, dt - \int_{\pi}^{2\pi} \sin t\, dt\right] = \frac{1}{\pi}\left[(-\cos t)_0^{\pi} - (-\cos t)_{\pi}^{2\pi}\right]$$
$$= \frac{1}{\pi}\left[\left[-\cos(\pi) - (-\cos 0)\right] - \left[-\cos 2\pi - (-\cos\pi)\right]\right] = \frac{1}{\pi}\left[1 + 1 - (-1-1)\right]$$
$$= \frac{4}{\pi}$$

Buna göre $f(t)$ işaretinin yaklaşık değeri,

$$f(t) \cong \frac{4}{\pi}\sin t$$

olarak hesaplanacaktır. Buradan diktörtgen dalga olarak verilen $f(t)$ işareti ile $x(t)$ arasındaki ilişkinin yaklaşık olarak $f(t) \cong \frac{4}{\pi}x(t) = \frac{4}{\pi}\sin t$ benzerliğinde olduğu görülmektedir. Verilen $\sin t$ işaretinin $c = \frac{4}{\pi}$ katı, yaklaşık olarak $f(t)$ dikdörtgen işarete denk çıkmaktadır. Zaten şeklen ve fonksiyonel anlamdaki var olan benzerliğin ayrıca $\sin t$ işaretinin salındıkları genlik değerleri ($[-1,1]$) ve dörtgen işaretin $[-4/\pi, 4/\pi]$) genlik değerleri açısından da benzer oldukları fark edilmektedir. Burada ayrıca vurgulanabilecek hususlar şunlardır ;

2. $f(t)$ ve $x(t)$ işaretleri arasında aşağıdaki gibi ifade edilen bir ilişki ve benzerlik vardır.

$$f(t) \cong \frac{4}{\pi}x(t) = \frac{4}{\pi}\sin t$$

1. $f(t)$ ve $x(t)$ işaretleri benzer özellik taşımaktadırlar. Dolayısıyla birbirlerine dik yani ortogonal değildirler.

$$\int_{t_1}^{t_2} f(t)x(t)dt \ne 0$$

3. Eğer benzerlik olmasaydı :

$$\int_{t_1}^{t_2} f(t)x(t)dt = 0$$

olması gerekirdi.

ORTOGONAL İŞARET UZAYI

Vektör uzayında tanımlanmış $x_1(t), x_2(t), \cdots\cdots, x_N(t)$ işaret vektörlerinin $[t_1, t_2]$ aralığında ortogonal olduklarını düşünelim. Buna göre ;

$$\int_{t_1}^{t_2} x_m(t) x_n(t) dt = \begin{cases} 0 & , \ m \neq n \\ E_n & , \ m = n \end{cases}$$

E_n işaret enerjisini göstermektedir. Eğer tüm *n* değerleri için $E_n = 1$ ise, verilen işaret seti (vektörleri) ortonormaldir. Bilindiği gibi ortogonal hal için işaret setini $1/\sqrt{E_n}$ 'e bölmek gerekir. Aynı işaret aralığını $[t_1, t_2]$ gözönüne alarak aynı ortogonal işaret setinden $x_1(t), x_2(t), \cdots\cdots, x_N(t)$ oluşan bir $f(t)$ işareti olduğunu düşünelim. $f(t)$'i yaklaşık olarak verilen işaret setinden oluşturmak istiyorsak,

$$\begin{aligned} f(t) &\approx c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) + \cdots\cdots + c_N x_N(t) \\ &= \sum_{n=1}^{N} c_n x_n(t) \qquad ; \qquad t_1 \leq t \leq t_2 \end{aligned}$$

Burada terim sayısının $N \to \infty$ olması durumunda işaret setinin tam yani "complete" olduğu kabul edilir ve bu durumda

$$\begin{aligned} f(t) &= c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) + \cdots\cdots + c_N x_N(t) + \cdots + \cdots \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n(t) \qquad ; \qquad t_1 \leq t \leq t_2 \end{aligned}$$

oluşur. Bu durumda oluşan işaret setinin hangi tip elemanlardan oluştuğunu bulmak mümkün olabilir. Örneğin verilen işaret dizisinde $x_2(t)$ elemanının olup olmadığını aşağıdaki gibi test edebiliriz. Ortogonal işaretin her iki yanı $x_2(t)$ ile çarpılır.

$$x_2(t) f(t) = c_1 x_1(t) x_2(t) + c_2 x_2(t) x_2(t) + \cdots\cdots + c_N x_N(t) x_2(t) + \cdots + \cdots$$

Ortogonal özellikten dolayı ($x_m(t) x_n(t) = 0$, $m \neq n$) olacağından, serinin bir ifadesi dıınında tüm terimleri sıfır olacaktır. Yalnızca $c_2 x_2(t) x_2(t)$ ifadesinden bir değer elde edilebilecektir. Bu şekilde verilen sette $x_2(t)$ işaretinin varlığı teyit edilecektir. Bu yaklaşımdan yararlanarak serinin katsayılarını oluşturan $c_1, c_2, \cdots, c_N, \cdots$ değerlerini hesaplamakta mümkün olacaktır. Yukarıdaki gibi $f(t)$ işaretinin her iki tarafı setteki işaretlerle çarpıldıktan sonra her iki tarafın integrali alınırsa ;

$$\int_{t_1}^{t_2} x_n(t) f(t)dt = \int_{t_1}^{t_2} x_n(t)\sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n(t)dt$$

$$\int_{t_1}^{t_2} f(t)x_n(t)dt = \int_{t_1}^{t_2} c_n x_n^2(t)dt$$

$$c_n = \frac{\int_{t_1}^{t_2} f(t)x_n(t)dt}{\int_{t_1}^{t_2} x_n^2(t)dt}$$

buradan, enerji ifadesi

$$E_n = \int_{t_1}^{t_2} x_n^2(t)dt$$

oluşuyorsa, c_n aşağıdaki nihai ifadeye dönüşür.

$$c_n = \frac{1}{E_n}\int_{t_1}^{t_2} f(t)x_n(t)dt$$

Bu yaklaşım

1. Fourier serisinin temelini teşkil etmektedir.
2. $[t_1, t_2]$ aralığında, $N \to \infty$ yaklaşımıyla "*tam, tamamlanmış (complete)*" olduğunu gösterir, ve $\{x_n(t)\}$ ifadesi ile gösterilen *basis işaretleri/fonksiyonları* kavramı oluşmuştur.
3. Perseval enerji teoreminin temelini teşkil etmektedir.

$$\int_{t_1}^{t_2} f^2(t)dt = c_1^2 E_1 + c_2^2 E_2 + \cdots\cdots$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 E_n$$

Verilen ortogonal setteki işaret vektörlernin gerçek değil karmaşık olması durumunda aşağıdaki ifadeler söz konusu olacaktır.

$$\int_{t_1}^{t_2} x_m(t)x_n^*(t)dt = \begin{cases} 0 & , \ m \neq n \\ E_n & , \ m = n \end{cases}$$

;

$$f(t) = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) + \cdots\cdots + c_N x_N(t) + \cdots + \cdots$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n(t) \qquad ; \qquad t_1 \leq t \leq t_2$$

ve ;

$$c_n = \frac{1}{E_n}\int_{t_1}^{t_2} f(t)x_n^*(t)dt$$

* işareti komplex eşleniği (conjugate) göstermektedir.

Ortogonal Basislerin Elde edilmesi

V vektör uzayında $S = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$, V için verilmiş bir vektör kümesi ise, $(v_1, v_2, \cdots, v_n)$ vektörleri linear bağımsız ve $V = Span(S)$ durumunda S nin basis olduğunu biliyoruz. Ortogonal basislerin ise, iner product uzayında birbirleriyle çarpımları sıfır yani birbirine dik olan vektörler olduğunu biliyoruz. Bu hatırlatmalardan sonra, V vektör uzayında $S = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ basislerinin verilmiş olduğunu, bunları yine S alt uzayında tanımlı $S = \{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$ ortogonal basislerine nasıl dönüştürüldüğü üzerinde durulacaktır. Normal – ortogonal basis dönüşümünü sağlamaya yönelik iyi bilinen teknik olan Gram – Schmidt algoritması bir sonraki bölümde ele alınmıştır. Önceki bölümlerden vektör ifadelerini hatırlayacak olursak

$$\mathbf{e} = \mathbf{u} - c_1 \mathbf{v}_1$$

ve ;

$$\text{Proj}_{\mathbf{w}_\perp} \mathbf{u} = \mathbf{u} - \text{Proj}_{\mathbf{w}} \mathbf{u}$$

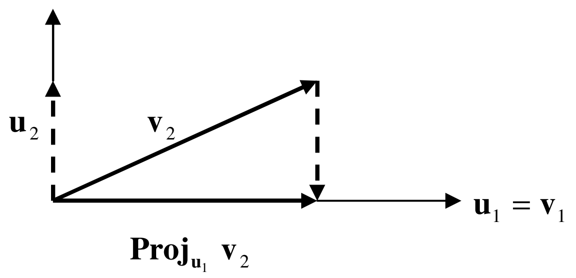
ifadeleri üzerine kurulu olduğunu biliyoruz. Burada düşey bileşen $\text{Proj}_{\mathbf{w}_\perp} \mathbf{u}$, $\mathbf{u}$ ortogonal vektörün $\mathbf{w}$ vektörüne göre ($\mathbf{v}_1$) vektör bileşeni olarak yeni ortogonal basislerin elde edilmesinde kullanılan faydalı bir yaklaşımdır. Daha önceki ifadelerden V vektör uzayındaki W , $S = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ kümesi ile verilmişken, böyle bir uzayda $\mathbf{u}$ vektörünün $\mathbf{w}$ üzerindeki projeksiyonu olarak, $\mathbf{u}$ nun her bir $\mathbf{w}$ vektörü üzerindeki projeksiyonundan $\text{Proj}_{\mathbf{w}} \mathbf{u}$ oluşan linear kombinasyonları olarak aşağıdaki gibi yazılabilmekteydi.

$$\text{Pr}\,oj_{\mathbf{w}} \mathbf{u} = \frac{<\mathbf{u}, \mathbf{v}_1>}{\|\mathbf{v}_1\|^2} \mathbf{v}_1 + \frac{<\mathbf{u}, \mathbf{v}_2>}{\|\mathbf{v}_2\|^2} \mathbf{v}_2 + \cdots + \frac{<\mathbf{u}, \mathbf{v}_n>}{\|\mathbf{v}_n\|^2} \mathbf{v}_n$$

Bu gösterim,

$$\mathbf{u} = c_1 \mathbf{v}_1 + c_2 \mathbf{v}_2 + c_3 \mathbf{v}_3 + \cdots + c_n \mathbf{v}_n$$

yazımına uygundur. Buradan yola çıkarak $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \cdots, \mathbf{v}_n)$ setinden yararlanarak her bir $\mathbf{v}_n$ için ortogonal bir $\mathbf{u}_n$ basis vektörünün nasıl bulunabileceğini inceleyeceğiz. Gram-Schmidt yaklaşımı bu amacı sağlamaktadır. Yaklaşım şema olarak aşağıda gösterilmiştir.



Şekil 18 Ortogonal projeksiyon

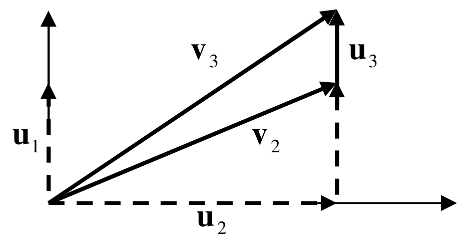
$\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_1$

$\mathbf{v}_2 = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2$

$\mathbf{v}_2 = c_1\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2$

$\mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_2 - c_1\mathbf{u}_1$

$\mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_2 - \mathrm{Pr}\,oj_{\mathbf{u}_1}\mathbf{v}_2$



Şekil 19 Ortogonal projeksiyon

$\mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_2 + \mathbf{u}_3$

$\mathbf{v}_3 = c\,\mathbf{v}_2 + \mathbf{u}_3$
$\mathbf{u}_3 = \mathbf{v}_3 - c\,\mathbf{v}_2$

$\mathbf{u}_3 = \mathbf{v}_3 - \mathrm{Pr}\,oj_{\mathbf{v}_2}\,\mathbf{v}_3$

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_3 &= \mathbf{v}_3 - \mathrm{Pr}\,oj_{(\mathbf{u}_1+\mathbf{u}_2)}\mathbf{v}_3 \\ &= \mathbf{v}_3 - \mathrm{Pr}\,oj_{\mathbf{u}_1}\mathbf{v}_3 - \mathrm{Pr}\,oj_{\mathbf{u}_2}\mathbf{v}_3\end{aligned}$$

$\mathbf{u}_n = \mathbf{v}_n$ - Proj $_{\mathbf{w}}\mathbf{v}_n$

$$\mathbf{u}_n = \mathbf{v}_n - \frac{<\mathbf{v}_n,\mathbf{u}_1>}{\|\mathbf{u}_1\|^2}\,\mathbf{u}_1 + \frac{<\mathbf{v}_n,\mathbf{u}_2>}{\|\mathbf{u}_2\|^2}\,\mathbf{u}_2 + \frac{<\mathbf{v}_n,\mathbf{u}_3>}{\|\mathbf{u}_3\|^2}\,\mathbf{u}_3 + \cdots + \frac{<\mathbf{v}_n,\mathbf{u}_{n-1}>}{\|\mathbf{u}_{n-1}\|^2}\,\mathbf{u}_{n-1}$$

$$\mathbf{u}_n = \mathbf{v}_n - \sum_{k=1}^{n-1}\frac{<\mathbf{v}_n,\mathbf{u}_k>}{\|\mathbf{u}_k\|^2}\,\mathbf{u}_k$$

Böylece sonuçta her biri ortogonal olan $(\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_3,\cdots,\mathbf{u}_n)$ basis vektörleri elde edilmiş olunur.

Gram – Schmidt Algoritması

Bütün bu noktaları göz önüne alarak Gram – Schmidt algoritmasının adımlarına geçebiliriz.

Adım 1

Başlangıçta

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_1$$

alınır veya kabul edilir. Vektör uzayındaki $\mathbf{v}_1$, S alt uzayına ilk ortogonal vektör kabul edilmektedir. Çünkü $\mathbf{v}_2$ vektörünün S uzayı üzerinde projelendirileceği vektöre gerek vardır.

Adım 2

Bu adımda $\mathbf{v}_2$ vektörünün S uzayına ortogonalliği araştırılacaktır. $\mathbf{v}_2$ vektöründen önce $\mathbf{v}_1$ ve onun ortogonal tamamlayıcısı (complement) bileşeni $\mathbf{u}_1$ işlendiğinden, bu kez $\mathbf{v}_2$ için yalnızca $\mathbf{u}_2$ değil daha önceki $\mathbf{v}_1$ ve $\mathbf{u}_1$ de göz önüne alınacaktır. Bu durumda

$$\mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_2 - \text{proj}_{\mathbf{u}_1}\mathbf{v}_2$$

yazılır.

$$\mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_2 - \frac{\mathbf{v}_2 . \mathbf{u}_1}{\|\mathbf{u}_1\|^2}\mathbf{u}_1$$

$$\mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_2 - \frac{< \mathbf{v}_2 , \mathbf{u}_1 >}{< \mathbf{u}_1 , \mathbf{u}_1 >}\mathbf{u}_1$$

Adım 3

Bu adımda V vektör uzayındaki bir diğer basis vektör olan $\mathbf{v}_3$ göz önüne alınacaktır. Bu vektörün ortogonal basise dönüştürülmesi işlenecektir. Buradan $\mathbf{v}_3$ vektörünün S alt uzayındaki projeksiyonu $\mathbf{u}_1$ ve $\mathbf{u}_2$ vektörlerinin her birine olan projeksiyonları toplamı olacağı görülecektir.

$$\text{Proj}_S\mathbf{v}_3 = \text{Proj}_{\mathbf{u}_1}\mathbf{v}_3 + \text{Proj}_{\mathbf{u}_2}\mathbf{v}_3$$

Buradan $\mathbf{v}_3$ vektörünün S alt uzayına ortogonal olan $\mathbf{u}_3$ bileşeninin ,

$$\mathbf{u}_3 = \mathbf{v}_3 - \text{Proj}_S\mathbf{v}_3$$

olacağı bilinmektedir. İşlemler devam ettirilir ve $\text{Proj}_S\mathbf{v}_3$ karşılığı yerine yazılırsa aranan ortogonal bileşen

$$\mathbf{u}_3 = \mathbf{v}_3 - \text{proj}_{\mathbf{u}_1+\mathbf{u}_2}\mathbf{v}_3$$
$$= \mathbf{v}_3 - \text{proj}_{\mathbf{u}_1}\mathbf{v}_3 - \text{proj}_{\mathbf{u}_2}\mathbf{v}_3$$

olarak elde edilir.

$$\mathbf{u}_3 = \mathbf{v}_3 - \frac{\mathbf{v}_3.\mathbf{u}_1}{\|\mathbf{u}_1\|^2}\mathbf{u}_1 - \frac{\mathbf{v}_3.\mathbf{u}_2}{\|\mathbf{u}_2\|^2}\mathbf{u}_2$$
$$\mathbf{u}_3 = \mathbf{v}_3 - \frac{<\mathbf{v}_3,\mathbf{u}_1>}{<\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_1>}\mathbf{u}_1 + \frac{<\mathbf{v}_3,\mathbf{u}_2>}{<\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_2>}\mathbf{u}_2$$

Adım 4

Bu adımda da üçüncü adıma benzer işlemler yapılacaktır. V Vektör uzayındaki bir diğer basis vektör olan $\mathbf{v}_4$ göz önüne alınacaktır. Bu vektörün ortogonal basise dönüştürülmesi işlenecektir. Buradan $\mathbf{v}_4$ vektörünün S alt uzayındaki projeksiyonu $\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_3$ vektörlerinin her birine olan projeksiyonları toplamı olacağını biliyoruz.

$$\text{Proj}_S\mathbf{v}_4 = \text{Proj}_{\mathbf{u}_1}\mathbf{v}_4 + \text{Proj}_{\mathbf{u}_2}\mathbf{v}_4 + \text{Proj}_{\mathbf{u}_3}\mathbf{v}_4$$

Buradan $\mathbf{v}_4$ vektörünün S alt uzayına ortogonal olan $\mathbf{u}_4$ bileşeninin ,

$$\mathbf{u}_4 = \mathbf{v}_4 - \text{Proj}_S\mathbf{v}_4$$

olacağı bilinmektedir. İşlemler devam ettirilir ve $\text{Proj}_S\mathbf{v}_4$ karşılığı yerine yazılırsa aranan ortogonal bileşen

$$\mathbf{u}_4 = \mathbf{v}_4 - \text{proj}_{\mathbf{u}_1+\mathbf{u}_2+\mathbf{u}_3}\mathbf{v}_4$$
$$= \mathbf{v}_4 - \text{proj}_{\mathbf{u}_1}\mathbf{v}_4 - \text{proj}_{\mathbf{u}_2}\mathbf{v}_4 - \text{proj}_{\mathbf{u}_3}\mathbf{v}_4$$

olarak elde edilir.

$$\mathbf{u}_4 = \mathbf{v}_4 - \frac{\mathbf{v}_4.\mathbf{u}_1}{\|\mathbf{u}_1\|^2}\mathbf{u}_1 - \frac{\mathbf{v}_4.\mathbf{u}_2}{\|\mathbf{u}_2\|^2}\mathbf{u}_2 - \frac{\mathbf{v}_4.\mathbf{u}_3}{\|\mathbf{u}_3\|^2}\mathbf{u}_3$$

$$\mathbf{u}_4 = \mathbf{v}_4 - \frac{<\mathbf{v}_4,\mathbf{u}_1>}{<\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_1>}\mathbf{u}_1 - \frac{<\mathbf{v}_4,\mathbf{u}_2>}{<\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_2>}\mathbf{u}_2 - \frac{<\mathbf{v}_4,\mathbf{u}_3>}{<\mathbf{u}_3,\mathbf{u}_3>}\mathbf{u}_3$$

Adım n

$$\mathbf{u}_n = \mathbf{v}_n - \mathrm{proj}_{\mathbf{u}_1+\mathbf{u}_2+\cdots \mathbf{u}_{n-1}} \mathbf{v}_n = \mathbf{v}_3 - \mathrm{proj}_{\mathbf{u}_1} \mathbf{v}_3 - \mathrm{proj}_{\mathbf{u}_2} \mathbf{v}_3 - \mathrm{proj}_{\mathbf{u}_3} \mathbf{v}_3 - \cdots - \mathrm{proj}_{\mathbf{u}_{n-1}} \mathbf{v}_n$$

$$\mathbf{u}_n = \mathbf{v}_n - \frac{<\mathbf{v}_n, \mathbf{u}_1>}{<\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1>}\mathbf{u}_1 - \frac{<\mathbf{v}_n, \mathbf{u}_2>}{<\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_2>}\mathbf{u}_2 - \frac{<\mathbf{v}_n, \mathbf{u}_3>}{<\mathbf{u}_3, \mathbf{u}_3>}\mathbf{u}_3 - \cdots - \frac{<\mathbf{v}_n, \mathbf{u}_{n-1}>}{<\mathbf{u}_{n-1}, \mathbf{u}_{n-1}>}\mathbf{u}_{n-1}$$

$$\mathbf{u}_n = \mathbf{v}_n - \frac{\mathbf{v}_n . \mathbf{u}_1}{\|\mathbf{u}_1\|^2}\mathbf{u}_1 - \frac{\mathbf{v}_n . \mathbf{u}_2}{\|\mathbf{u}_2\|^2}\mathbf{u}_2 - \frac{\mathbf{v}_n . \mathbf{u}_3}{\|\mathbf{u}_3\|^2}\mathbf{u}_3 - \cdots - \frac{\mathbf{v}_n . \mathbf{u}_{n-1}}{\|\mathbf{u}_{n-1}\|^2}\mathbf{u}_{n-1}$$

$$\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{v}_{n+1} - \sum_{k=1}^{n} \frac{<\mathbf{v}_{n+1}, \mathbf{u}_k>}{<\mathbf{u}_k, \mathbf{u}_k>}\mathbf{u}_k$$

Sonuçta vektör uzayı V için verilmiş $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \cdots, \mathbf{v}_n)$ basis vektörleri ortogonal özellikteki $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \cdots, \mathbf{u}_n)$ basis vektörlerine Gram – Schmidt algoritmasıyla dönüştürülmüşlerdir. Eğer ortonormal basis vektörler istenseydi tüm ifadelerde

$$\|\mathbf{u}_k\|^2 = \mathbf{u}_k . \mathbf{u}_k = <\mathbf{u}_k, \mathbf{u}_k> = 1$$

alınması yeterli olacaktı.

Örnek

R^2 vektör uzayında $S = \left\{ v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \; v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ ise, Gram-Schmidt algoritmasıyla ortogonal vektörleri elde ediniz.

1.Adım

$u_1 = v_1$ olsun. Buna göre,

$$u_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2.Adım

$$u_2 = v_2 - proj_{u_1} v_2 = v_2 - \frac{<v_2, u_1>}{\|u_1\|^2} u_1$$

$$u_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{<\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}>}{\left\| \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|^2} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{(6+2)}{\left(\sqrt{3^2+1^2}\right)^2} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{12}{5} \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-2}{5} \\ \frac{6}{5} \end{pmatrix}$$

u_1 ve u_2 ortogonal vektörlerdir :

$$< u_1, u_2 >= 0$$

$$< \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \left(\begin{pmatrix} \frac{-2}{5} \\ \frac{6}{5} \end{pmatrix} \right) > \; = \frac{-6}{5} + \frac{6}{5} = 0$$

u_1 ve u_2 vektörleri aşağıdaki gibi normalize edilerek ortonormal vektörler olarak ifade edilebilirler.

$$e_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|} = \begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{10}} \\ \frac{1}{\sqrt{10}} \end{pmatrix}$$

ve

$$e_2 = \frac{u_2}{\|u_2\|} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{10}} \\ \frac{3}{\sqrt{10}} \end{pmatrix}$$

Görüldüğü gibi, elde edilen e_1 ve e_2 ortonormal vektörleride aynı zamanda ortogonaldir :

$$< e_1, e_2 >= 0$$

Örnek

Gram-Schmidt algoritmasını kullanarak linear bağımsız $\mathbf{v}_1 = (2, -1, 0)$, $\mathbf{v}_2 = (1, 0, -1)$, $\mathbf{v}_3 = (3, -7, -1)$ vektörlerinden ortogonal basis vektörlerini elde edin.

Çözüm

$\mathbf{v}_1 = (2, -1, 0)$, $\mathbf{v}_2 = (1, 0, -1)$, $\mathbf{v}_3 = (3, -7, -1)$ vektörlerinden ortogonal $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ basis vektörleri Gram-Schmidt algoritmasına göre aşağıdaki gibi üretilir :
1.Adım

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_1 = (2, -1, 0)$$

2.Adım

$$\mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_2 - \frac{< \mathbf{v}_2, \mathbf{u}_1 >}{< \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1 >} \mathbf{u}_1$$

$$< \mathbf{v}_2, \mathbf{u}_1 >= (1 \times 2 + 0 \times (-1) + (-1) \times 0) = 2$$

$$< \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1 >= \|\mathbf{u}_1\|^2 = \left(\sqrt{(2)^2 + (-1)^2 + 0^2} \right)^2 = 5$$

$$\mathbf{u}_2 = (1, 0, -1) - \frac{2}{5} (2, -1, 0) = (\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, -1)$$

3.Adım

$$\mathbf{u}_3 = \mathbf{v}_3 - \frac{<\mathbf{v}_3,\mathbf{u}_1>}{<\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_1>}\,\mathbf{u}_1 - \frac{<\mathbf{v}_3,\mathbf{u}_2>}{<\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_2>}\,\mathbf{u}_2$$

$$<\mathbf{v}_3,\mathbf{u}_1>=(3\times 2+(-7)\times(-1)+(-1)\times 0)=13$$

$$<\mathbf{v}_3,\mathbf{u}_2>=(3\times\frac{1}{5}+(-7)\times\frac{2}{5}+(-1)\times(-1))=-\frac{6}{5}$$

$$<\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_1>=\|\mathbf{u}_1\|^2=\left(\sqrt{(2)^2+(-1)^2+0^2}\right)^2=5$$

$$<\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_2>=\|\mathbf{u}_2\|^2=\left(\sqrt{(\frac{1}{5})^2+(\frac{2}{5})^2+(-1)^2}\right)^2=\frac{6}{5}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_3 &= (3,-7,-1)-\left[\frac{13}{5}(2,-1,0)+(-1)\ (\frac{1}{5},\frac{2}{5},-1)\right]=(3,-7,-1)-(5,-3,1)\\ &=(-2,-4,-2)\end{aligned}$$

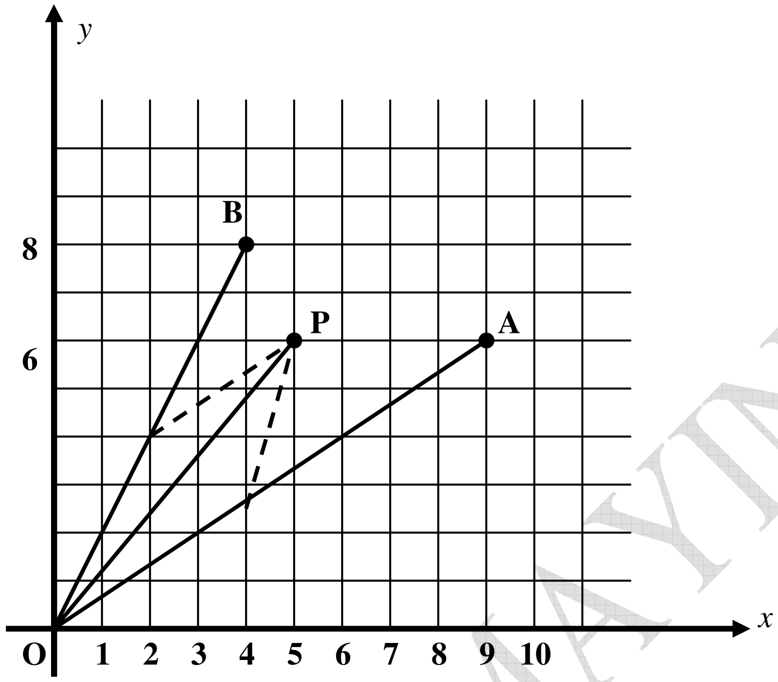
$\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_3$ orthogonal olduklarından ayrıca aşağıdaki eşitlikleri sağlamaları gerekiyor :

$$<\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2>=0 \quad ; \quad <\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_3>=0 \quad ; \quad <\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_3>=0$$

bunlar sırasıyla aşağıda ispatlanmıştır.

$$<\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2>=<(2,-1,0),(\frac{1}{5},\frac{2}{5},-1)>=[2\times\frac{1}{5}+(-1)\times\frac{2}{5}+0\times(-1)]=0$$
$$<\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_3>=<(2,-1,0),(-2,-4,-2)>=[2\times(-2)+(-1)\times(-4)+0\times(-2)]=(-4+4+0)=0$$
$$<\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_3>=<(\frac{1}{5},\frac{2}{5},-1),(-2,-4,-2)>=[\frac{1}{5}\times(-2)+\frac{2}{5}\times(-4)+(-1)\times(-2)]=0$$

LİNEER BAĞIMLILIK - BAĞIMSIZLIK



Şekil 20 Bağımlı-bağımsız vektörler

$$\vec{OA} = \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{OB} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Şekilden görüldüğü gibi xy düzleminde $\vec{OA} = \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \end{pmatrix} = (9,6)$ ve $\vec{OB} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix} = (4,8)$ koordinatlarındaki bağımsız vektörlerdir. Öte yandan $\vec{OP}$ vektörü bağımsız olmayıp, $\vec{OA}$ ve $\vec{OB}$ vektörlerinin belli oranlardaki paylarının toplamından oluşan bağımlı vektördür. Bunların ışığında yukarıda verilen vektörel diagrama ait vektörlerden $\vec{OP}$ aşağıdaki gibi yazılır.

$$\vec{OP} = c_1\,\vec{OA} + c_2\,\vec{OB} = c_1 \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Görüldüğü gibi $\vec{OP}$ bağımlı vektörü $\vec{OA}$ bağımsız vektörünün c_1 oranındaki değeriyle diğer bağımsız $\vec{OB}$ vektörünün c_2 oranındaki değerlerinin lineer toplamından (süperpozisyonundan) oluşmaktadır. Şekilden

$c_1 = \frac{1}{3}$ ve $c_2 = \frac{1}{2}$

olduğundan veya böyle seçildiklerinde

$$\vec{OP} = c_1 \vec{OA} + c_2 \vec{OB} = \frac{1}{3}\vec{OA} + \frac{1}{2}\vec{OB} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}9\\6\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix}4\\8\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\6\end{pmatrix}$$

$$\vec{OP} = \begin{pmatrix}5\\6\end{pmatrix} = (5,6)$$

Buna göre $\vec{OP}$ vektörü bağımsız $\vec{OA}$ vektörünün $c_1 = \frac{1}{3}$ katıyla, diğer bağımsız $\vec{OB}$ vektörünün $c_2 = \frac{1}{2}$ katının toplamlarından oluşan $\begin{pmatrix}5\\6\end{pmatrix} = (5,6)$ koordinatlarındaki bağımlı vektördür.

Lineer Bağımlı –Lineer Bağımsız Vektör Değerlendirmesi

Yukarıda ele alınan ifadelerden bazı sonuçlar çıkarılabilir. Hatırlayacağımız gibi

$\vec{OP} = c_1 \vec{OA} + c_2 \vec{OB}$ **lineer <u>bağımlılık</u> koşulu**

yazımında $\vec{OP}$ vektörü $\vec{OA}$ ve $\vec{OB}$ vektörlerine bağımlı elde edilmektedir. Diğer bir deyişle $\vec{OA}, \vec{OB}$ ve $\vec{OP}$ vektörleri birlikte düşünüldüğünde bu vektörlerin lineer bağımsız oldukları söylenemez. Buna göre $\vec{OA}, \vec{OB}$ ve $\vec{OP}$ vektörleri **<u>lineer bağımlı</u>** vektörlerdir. Öte yandan

eğer $\vec{OP} = 0$ alınırsa

$c_1 \vec{OA} + c_2 \vec{OB} = 0$ **lineer <u>bağımsızlık</u> koşulu**

bu durumda $\vec{OA}$ ve $\vec{OB}$ vektörlerinin lineer toplamı herhangi bir vektörü vermeyeceğinden, $\vec{OA}$ ve $\vec{OB}$ vektörlerinin bağımsız oldukları kabul edilir. Diğer bir deyişle $\vec{OA}, \vec{OB}$ ve $\vec{OP}$ vektörleri birlikte düşünüldüğünde bu vektörlerin lineer bağımlı oldukları söylenemez. Buna göre $\vec{OA}, \vec{OB}$ ve $\vec{OP}$ vektörleri **<u>lineer bağımsız</u>** vektörlerdir.

NOT : Burada $c_1 \vec{OA} + c_2 \vec{OB} = 0$ lineer bağımsızlığı için önemli olan c_1 ve c_2 katsayılarının nasıl elde edileceğidir. Bu katsayıların hangi değerleri için lineer bağımsızlık koşulu olan $c_1 \vec{OA} + c_2 \vec{OB} = 0$ sağlanmaktadır. Bu, aşağıdaki başlık altında incelenecektir.

Lineer Bağımlı –Lineer Bağımsız Vektörlerin Genel Değerlendirilmesi

Eğer $\vec{OA}$ ve $\vec{OB}$ gibi bağımsız vektörleri gibi bağımsız vektörleri göstermek üzere n tane $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3}, \cdots, \mathbf{v_n}$ bağımsız vektörü alınırsa bunların lineer bağımsızlığını denetlemek veya test etmek yukarıdaki iki vektörünkünü test etmekten daha zor olacaktır. Bu durumda yukarıdakine benzer olarak bu vektörlerin lineer katsayıları da $c_1, c_2, c_3, \cdots, c_n$ düşünülebilecektir. Bu durumdayken $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3}, \cdots, \mathbf{v_n}$ vektörlerinin lineer bağımsız olduklarını test edebilmek için

$$c_1\mathbf{v_1} + c_2\mathbf{v_2} + c_3\mathbf{v_3} + \cdots + c_n\mathbf{v_n} = \mathbf{0} \qquad \text{lineer bağımsızlık}$$

koşulu ortaya konulmaktadır. Eğer $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3}, \cdots, \mathbf{v_n}$ vektörleri örnekteki $\vec{OA}$ ve $\vec{OB}$ vektörleri gibi bağımsız iseler $c_1\mathbf{v_1} + c_2\mathbf{v_2} + c_3\mathbf{v_3} + \cdots + c_n\mathbf{v_n} = \mathbf{0}$ koşulunun sağlanması gerekmektedir. Verilen $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3}, \cdots, \mathbf{v_n}$ vektörlerinin lineer bağımsız olabilmeleri için vektörlerden hiç birinin diğerleri cinsinden yazılmaması gerektiğini biliyoruz. Yani vektörlerden hiç biri bir diğerinin belli oranlardaki değerinden oluşmayacaktır. Veya vektörlerden herhangi biri iki veya çok sayıdaki vektörün toplamı veya belli oranlardaki toplamlarından oluşmamalıdır. Bu şartlar sağlandığı taktirde ancak $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3}, \cdots, \mathbf{v_n}$ vektörlerinin lineer bağımsız oldukları kabul edilir. Buna göre bağımsız vektörlerin lineer olarak herhangi bir vektörü oluşturmaması için $c_1\mathbf{v_1} + c_2\mathbf{v_2} + c_3\mathbf{v_3} + \cdots + c_n\mathbf{v_n} = \mathbf{0}$ sağlanmalıdır. Ancak bunun sağlanabilmesi için $c_1, c_2, c_3, \cdots, c_n$ katsayıların belirlenmesi önem arz etmektedir. Bu katsayıların hangi değerleri için $c_1\mathbf{v_1} + c_2\mathbf{v_2} + c_3\mathbf{v_3} + \cdots + c_n\mathbf{v_n} = \mathbf{0}$ elde edilebilir. Yapılan çalışmalar sonucu katsayıların ancak

$$c_1 = c_2 = c_3 = \cdots = c_n = 0$$

olması durumunda lineer bağımsızlık ifade si olan $c_1\mathbf{v_1} + c_2\mathbf{v_2} + c_3\mathbf{v_3} + \cdots + c_n\mathbf{v_n} = \mathbf{0}$ elde edilebilmektedir. Yani $c_1, c_2, c_3, \cdots, c_n$ katsayılarının tümü sıfır olduğunda ($c_i = 0$, $i = 1,2,\cdots,n$) vektörler lineer bağımsız olmaktadırlar. Buna göre

$$\begin{aligned} &c_1\mathbf{v_1} + c_2\mathbf{v_2} + c_3\mathbf{v_3} + \cdots + c_n\mathbf{v_n} = \mathbf{0} \\ &c_1 = c_2 = c_3 = \cdots = c_n = 0 \end{aligned} \qquad \textbf{Lineer } \underline{\textbf{bağımsızlık}}$$

koşullarında $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3}, \cdots, \mathbf{v_n}$ vektörlerini lineer bağımsızdırlar. Bu koşulların sağlanmaması halinde vektörlerin lineer bağımlı oldukları kabul edilmektedirler.

$c_1\mathbf{v_1} + c_2\mathbf{v_2} + c_3\mathbf{v_3} + \cdots + c_n\mathbf{v_n} \neq \mathbf{0}$

$c_i \neq 0$, $i = 1,2,\cdots,n$ **Lineer <u>bağımlılık</u>**

Çünkü bu durumda vektörlerin içinden herhangi biri, diğerlerinin lineer toplamı gibi elde edilebilecektir ($\overrightarrow{OP} = c_1 \overrightarrow{OA} + c_2 \overrightarrow{OB}$ gibi) .

Liner Bağımlı-Bağımsız Vektörlerin Matris Gösterimleri

Matematiksel olarak $\mathbf{u} = c_1\mathbf{v_1} + c_2\mathbf{v_2} + c_3\mathbf{v_3} + \cdots + c_n\mathbf{v_n}$ veya $c_1\mathbf{v_1} + c_2\mathbf{v_2} + c_3\mathbf{v_3} + \cdots + c_n\mathbf{v_n} = \mathbf{0}$ gösterimleri aslında sistem gösterimleridir. Herhangi bir elektrik, enerji veya kontrol sistemi benzer denklemlerle ifade edilebilmektedir. Bu anlamda denklemdeki $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3}, \cdots, \mathbf{v_n}$ vektörlerin sistem karşılıkları kondansatör veya endüktans gibi elemanlar olabilmektedir. Denklemdeki $c_1, c_2, c_3, \cdots, c_n$ katsayıları ise sistemde sabit anlamındaki direnç benzeri elemanlar olarak düşünülebilir. Demek ki şu ana kadar genel veya mühendislik matematiği veya lineer cebir veya fonksiyonel analiz kapsamlarında karşımıza çıkan vektörlerin lineer kombinasyonlarıyla oluşan lineer bağımlı veya bağımsız ifadelere, bu andan itibaren ek olarak sistem açısından da bakmamız gerektiğini görmekteyiz. Dersimizin içeri itibariyle bu denklemleri sistem özelliğiyle ele almak veya düşünmek yararlı olacaktır. Buna göre herhangi bir sistem vektörlerin lineer kombinasyonlarıyla gösterilebilmektedir. Bu gösterim kendi içersinde ikiye ayrılmaktadır.

a. Sistemin tek denklemle ifade edilmesi ve matrisyel gösterimi

Bir sistem lineer bağımlı $\mathbf{u} = c_1\mathbf{v_1} + c_2\mathbf{v_2} + c_3\mathbf{v_3} + \cdots + c_n\mathbf{v_n}$ veya lineer bağımsız $(\mathbf{u} = 0,\ c_1, c_2, c_3, \cdots, c_n = 0)$ formlarından biriyle tek bir denklemle gösterilebilir. Bu durumda denklemin matrisyel gösteriminin nasıl olacağına bir göz atalım. Eğer $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3}, \cdots, \mathbf{v_n}$ vektörleri m boyutlu (m koordinattan) oluşuyorsa, $\mathbf{u} = c_1\mathbf{v_1} + c_2\mathbf{v_2} + c_3\mathbf{v_3} + \cdots + c_n\mathbf{v_n}$ gösterimindeki vektörler ve katsayılar sütun matrisi gösterimine göre aşağıdaki gibi düzenlenebilirler.

$$\mathbf{v_1} = \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{12} \\ v_{13} \\ \vdots \\ v_{1m} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v_2} = \begin{bmatrix} v_{21} \\ v_{22} \\ v_{23} \\ \vdots \\ v_{2m} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v_3} = \begin{bmatrix} v_{31} \\ v_{32} \\ v_{33} \\ \vdots \\ v_{3m} \end{bmatrix}, \quad \ldots\ldots\ldots, \quad \mathbf{v_n} = \begin{bmatrix} v_{n1} \\ v_{n2} \\ v_{n3} \\ \vdots \\ v_{nm} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad c = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ \vdots \\ c_m \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{12} \\ v_{13} \\ \vdots \\ v_{1m} \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} v_{21} \\ v_{22} \\ v_{23} \\ \vdots \\ v_{2m} \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} v_{31} \\ v_{32} \\ v_{33} \\ \vdots \\ v_{3m} \end{bmatrix} + \cdots + c_n \begin{bmatrix} v_{n1} \\ v_{n2} \\ v_{n3} \\ \vdots \\ v_{nm} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} u_1 &= c_1 v_{11} + c_2 v_{21} + c_3 v_{31} + \cdots + c_n v_{n1} \\ u_2 &= c_1 v_{12} + c_2 v_{22} + c_3 v_{32} + \cdots + c_n v_{n2} \\ u_3 &= c_1 v_{13} + c_2 v_{23} + c_3 v_{33} + \cdots + c_n v_{n3} \\ \vdots &= \qquad\qquad \vdots \\ u_m &= c_1 v_{1n} + c_2 v_{2n} + c_3 v_{3n} + \cdots + c_n v_{nm} \end{aligned}$$

Böyle bir sistemin çözümü $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3}, \cdots, \mathbf{v_n}$ vektörlerinin lineer bağımlı veya bağımsız olduklarını gösterir. Örneğin eğer $m = n$ düşünülürse, sistemin çözümü n tane bilinmeyen n tane denklem esasına göre çok bilinen cebirsel veya matrisyel yöntemlerin biri yoluyla yapılabilir. Buna ilişkin örneği, yukarıda ele alınan

$\vec{OA} = \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \end{pmatrix}$, $\vec{OB} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix}$, $\vec{OP} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$ vektörlerini göz önüne alarak yapabiliriz. Verilen vektörler kullandığımız notasyona uygun olarak

$$\mathbf{v_1} = \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \end{pmatrix} \ , \ \mathbf{v_2} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix} \ , \ \mathbf{v_3} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

biçiminde ele alınırsa, bu durumdaki $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}$ ve $\mathbf{v_3}$ vektörlerinin lineer bağımlı veya bağımsız olduklarının analizi yapılabilir. Vektörleri c_1, c_2 ve c_3 katsayılarına göre

$$c_1 \mathbf{v_1} + c_2 \mathbf{v_2} + c_3 \mathbf{v_3} = 0$$

çözümünü matris yaklaşımıyla araştıralım. Görüldüğü gibi çözümün sonucunu bilmeden, $c_1 \mathbf{v_1} + c_2 \mathbf{v_2} + c_3 \mathbf{v_3} = 0$ gibi bağımsız oldukları düşüncesiyle çözüm araştırılmaktadır.

$$c_1 \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{12} \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} v_{21} \\ v_{22} \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} v_{31} \\ v_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$c_1 \begin{bmatrix} 9 \\ 6 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$c_1 v_{11} + c_2 v_{21} + c_3 v_{31} = 0$$
$$c_1 v_{12} + c_2 v_{22} + c_3 v_{32} = 0$$

$$9c_1 + 4c_2 + 5c_3 = 0$$
$$6c_1 + 8c_2 + 6c_3 = 0$$

Denklem sayısı bilinmeyen sayısına denk olmadığı için çözüm adına $c_3 = k$ kabulünü yapalım. Buna göre,

$$\begin{matrix} 9c_1 + 4c_2 + 5k = 0 \\ 6c_1 + 8c_2 + 6k = 0 \end{matrix} \quad \text{buradan} \quad \begin{matrix} 9c_1 + 4c_2 = -5k \\ 6c_1 + 8c_2 = -6k \end{matrix}$$

Çözüm araştırılırsa,

$$\begin{matrix} 2/9c_1 + 4c_2 = -5k \\ -3/6c_1 + 8c_2 = -6k \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 18c_1 + 8c_2 = -10k \\ -18c_1 - 24c_2 = 18k \end{matrix}$$

$$-16c_2 = 8k \rightarrow c_2 = -\frac{k}{2}, \quad c_1 = -\frac{k}{3}, \quad c_3 = k$$

$$c_1\mathbf{v_1} + c_2\mathbf{v_2} + c_3\mathbf{v_3} = 0 \rightarrow (-\frac{k}{3})\mathbf{v_1} + (-\frac{k}{2})\mathbf{v_2} + (k)\mathbf{v_3}$$

$$k\mathbf{v_3} = \frac{k}{3}\mathbf{v_1} + \frac{k}{2}\mathbf{v_2}$$

$$\mathbf{v_3} = \frac{1}{3}\mathbf{v_1} + \frac{1}{2}\mathbf{v_2}$$

Görüldüğü gibi $\mathbf{v_3}$ vektörü $\mathbf{v_1}$ ve $\mathbf{v_2}$ vektörlerinin lineer toplamlarından elde edilmektedir. Diğer bir deyişle $\mathbf{v_3}$ vektörü $\mathbf{v_1}$ ve $\mathbf{v_2}$ vektörlerine bağımlı olarak elde edilmiştir. Bu nedenle $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3}$ vektörleri lineer bağımlı vektörlerdir. Bu aynı zamanda daha önce $\vec{OP} = c_1\vec{OA} + c_2\vec{OB} = \frac{1}{3}\vec{OA} + \frac{1}{2}\vec{OB}$ bağıntısından elde edilen bağımlı sonucu aynen teyit etmektedir. Öte yandan matris formunda çözüm araştırıldığında ise,

$$\begin{bmatrix} 9 & 4 & 5 \\ 6 & 8 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 9 & 4 & 5 \\ 6 & 8 & 6 \end{bmatrix} \quad , \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Ax} = \begin{bmatrix} 9 & 4 & 5 \\ 6 & 8 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{Ax} = 0$ yapısındaki denklem ile gösterilen $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}$ ve $\mathbf{v_3}$ vektörlerinin lineer bağımsızlığı/bağımlılığı çözümü araştırılırsa, **A** matrisinin rankı lineer bağımsız satır veya sütün sayısını göstereceğinden rankın 3 olmayacağı açıktır. Çünkü **A** matrisi 3x3 özelliğinde kare bir matris olmadığından işin başında rankın 3 olmayacağı gerçeği ortaya çıkar. Buna göre rank en fazla 2 olabilecektir. Rankın sistem veya denklemdeki vektör sayısından ($\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3}$) az olması, vektörlerin lineer bağımsız olmayacağı anlamına geleceğinden sistemde görünen $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}$ ve $\mathbf{v_3}$ vektörleri arasında daha önce tespit ettiğimiz ($\mathbf{v_3} = \frac{1}{3}\mathbf{v_1} + \frac{1}{2}\mathbf{v_2}$) gibi bir ilişkinin söz konusu olduğu sonucuna varılır ki, bu $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3}$ vektörlerinin lineer bağımlı olduğunu göstermesi için yeterlidir.

Örnek

$$\mathbf{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad , \quad \mathbf{v_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad , \quad \mathbf{v_3} = \begin{pmatrix} 2 \\ -8 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$ vektörlerinin lineer bağımsızlığını araştırın.

Çözüm

$$c_1\mathbf{v_1} + c_2\mathbf{v_2} + c_3\mathbf{v_3} = 0$$

$$c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + c_3\begin{pmatrix} 2 \\ -8 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$$

$$c_1 + 2c_2 + 2c_3 = 0$$
$$c_1 - 2c_2 - 8c_3 = 0$$
$$-c_1 + 3c_3 = 0$$
$$2c_1 + 2c_2 - c_3 = 0$$

Çözüm adına $c_3 = k$ kabulünü yapalım. Buna göre

$$\begin{aligned} c_1 + 2c_2 &= -2k \\ c_1 - 2c_2 &= 8k \\ c_1 &= 3k \\ 2c_1 + 2c_2 &= k \end{aligned} \quad , \; 2c_2 = k - 2c_1 \;\; , \;\; 2c_2 = k - 2(3k) \;\; , \;\; c_2 = -\frac{5k}{2}$$

$$c_1 = 3k \quad , \quad c_2 = -\frac{5k}{2} \quad , \; c_3 = k$$

Bunlar $c_1\mathbf{v_1} + c_2\mathbf{v_2} + c_3\mathbf{v_3} = 0$ denklemde yerine konulursa,

$$3k\mathbf{v_1} - \frac{5k}{2}\mathbf{v_2} + k\mathbf{v_3} = 0 \quad , \quad k\mathbf{v_3} = -3k\mathbf{v_1} + \frac{5k}{2}\mathbf{v_2}$$

$$\mathbf{v_3} = -3\mathbf{v_1} + \frac{5}{2}\mathbf{v_2}$$

Bu sonuca göre $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3}$ vektörleri lineer bağımlıdır.

Örnek

$\mathbf{v_1} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ vektörlerinin lineer bağımsızlığını araştırın.

Çözüm

$$c_1\mathbf{v_1} + c_2\mathbf{v_2} = 0$$

$$c_1\begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{aligned} -3c_1 + 2c_2 &= 0 \\ 3c_1 - c_2 &= 0 \end{aligned}$$

Bunun çözümü için $c_1 = 0$ ve $c_2 = 0$ olacağından $\mathbf{v_1}$ ve $\mathbf{v_2}$ vektörleri lineer bağımsızdırlar.

Örnek

$\mathbf{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$ vektörlerinin lineer bağımsızlığını araştırın.

Çözüm

$$c_1\mathbf{v_1} + c_2\mathbf{v_2} + c_3\mathbf{v_3} = 0$$

$$c_1\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + c_3\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{aligned} c_1 - c_2 + c_3 &= 0 \\ -2c_1 + 3c_2 + c_3 &= 0 \\ 3c_1 + 4c_2 - 2c_3 &= 0 \\ -4c_1 + 2c_2 - 2c_3 &= 0 \end{aligned}$$

Bu sonuçların elde edilebilmesi için $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ olması gerektiğinden $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3}$ vektörleri lineer bağımsızdır.

b. Sistemin birden fazla lineer denklemle ifade edilmesi ve matrisyel gösterimi

Herhangi bir sistem gerek lineer bağımlı $c_1\mathbf{v_1} + c_2\mathbf{v_2} + c_3\mathbf{v_3} + \cdots + c_n\mathbf{v_n} \neq \mathbf{0}$ ($\mathbf{u} = c_1\mathbf{v_1} + c_2\mathbf{v_2} + c_3\mathbf{v_3} + \cdots + c_n\mathbf{v_n}$ gibi) gerekse lineer bağımsız $c_1\mathbf{v_1} + c_2\mathbf{v_2} + c_3\mathbf{v_3} + \cdots + c_n\mathbf{v_n} = \mathbf{0}$ formlarında gösterilebilmektedir. Dolayısıyla artık sistemlerin vektörel gösterimleri söz konusu olmaktadır. Bu durumda sistemi oluşturan vektörlerin değil, aynı zamanda sistemin kendisinin de lineer bağımlı/bağımsız olduğu önem kazanmaktadır. Bir sistemin lineer bağımlı veya bağımsız olmasının tespiti, sistemlerin analizinde ve anlaşılmasında önemlidir. Bu anlamda herhangi bir sistem $\mathbf{u} = c_1\mathbf{v_1} + c_2\mathbf{v_2} + c_3\mathbf{v_3} + \cdots + c_n\mathbf{v_n}$ veya $c_1\mathbf{v_1} + c_2\mathbf{v_2} + c_3\mathbf{v_3} + \cdots + c_n\mathbf{v_n} = \mathbf{0}$ gibi gösterimlerden farklı olarak bunlara benzer çok sayıda denklemle de gösterilebilmektedirler. Yani bir sistem $\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, \mathbf{u_3}, \cdots, \mathbf{u_m}$ yapısında m tane lineer denklem yoluyla aşağıdaki gibi gösterilebilir.

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1 &= c_{11}\mathbf{v_1} + c_{12}\mathbf{v_2} + c_{13}\mathbf{v_3} + \cdots + c_{1n}\mathbf{v_n} \\ \mathbf{u}_2 &= c_{21}\mathbf{v_1} + c_{22}\mathbf{v_2} + c_{23}\mathbf{v_3} + \cdots + c_{2n}\mathbf{v_n} \\ \mathbf{u}_3 &= c_{31}\mathbf{v_1} + c_{32}\mathbf{v_2} + c_{33}\mathbf{v_3} + \cdots + c_{3n}\mathbf{v_n} \\ \vdots &= \qquad\quad \vdots \\ \mathbf{u}_m &= c_{m1}\mathbf{v_1} + c_{m2}\mathbf{v_2} + c_{m3}\mathbf{v_3} + \cdots + c_{mn}\mathbf{v_n} \end{aligned}$$

veya ;

$$
\begin{aligned}
&c_{11}\mathbf{v_1} + c_{12}\mathbf{v_2} + c_{13}\mathbf{v_3} + \cdots + c_{1n}\mathbf{v_n} = 0 \\
&c_{21}\mathbf{v_1} + c_{22}\mathbf{v_2} + c_{23}\mathbf{v_3} + \cdots + c_{2n}\mathbf{v_n} = 0 \\
&c_{31}\mathbf{v_1} + c_{32}\mathbf{v_2} + c_{33}\mathbf{v_3} + \cdots + c_{3n}\mathbf{v_n} = 0 \\
&\vdots \; = \qquad\qquad \vdots \\
&c_{m1}\mathbf{v_1} + c_{m2}\mathbf{v_2} + c_{m3}\mathbf{v_3} + \cdots + c_{mn}\mathbf{v_n} = 0
\end{aligned}
$$

Bu durumlarda tek tek denklemlerin değil, bu denklemlerden oluşan sistemin lineerliği bağımsızlığı veya bağımlılığı önem kazanmaktadır. Bu bölümde bu denklem sistemlerinden biri yoluyla gösterilebilecek sistemlerin lineer bağımsız veya bağımlı olma analizlerinden önce, sırasıyla bu tür vektörel sistemlerin matris formları kısaca izah edilecektir.

1. Lineer Bağımlı Vektörlerin Matris Formları

Eğer $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3}, \cdots, \mathbf{v_n}$ vektörleri ve $c_1, c_2, c_3, \cdots, c_n$ katsayıların lineer toplamından oluşan bir $\mathbf{u}$ vektöründen söz ediyorsak,

$$\mathbf{u} = c_1\mathbf{v_1} + c_2\mathbf{v_2} + c_3\mathbf{v_3} + \cdots + c_n\mathbf{v_n}$$

gösterimi yazılabilir. Buna göre $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3}, \cdots, \mathbf{v_n}$ vektörlerinin lineer toplamından oluşan m tane $\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, \mathbf{u_3}, \cdots, \mathbf{u_m}$ bağımlı vektörü söz konusuysa

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{u}_1 = c_{11}\mathbf{v_1} + c_{12}\mathbf{v_2} + c_{13}\mathbf{v_3} + \cdots + c_{1n}\mathbf{v_n} \\
&\mathbf{u}_2 = c_{21}\mathbf{v_1} + c_{22}\mathbf{v_2} + c_{23}\mathbf{v_3} + \cdots + c_{2n}\mathbf{v_n} \\
&\mathbf{u}_3 = c_{31}\mathbf{v_1} + c_{32}\mathbf{v_2} + c_{33}\mathbf{v_3} + \cdots + c_{3n}\mathbf{v_n} \qquad \text{Lineer denklem sistemi} \\
&\vdots \; = \qquad\qquad \vdots \\
&\mathbf{u}_m = c_{m1}\mathbf{v_1} + c_{m2}\mathbf{v_2} + c_{m3}\mathbf{v_3} + \cdots + c_{mn}\mathbf{v_n}
\end{aligned}
$$

formu yazılabilir. Bu gösterimde $\mathbf{u} = c_1\mathbf{v_1} + c_2\mathbf{v_2} + c_3\mathbf{v_3} + \cdots + c_n\mathbf{v_n}$ yapısındaki denklem bir lineer sistemi temsil etmektedir. Buna göre görüldüğü gibi $\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, \mathbf{u_3}, \cdots, \mathbf{u_m}$ yapısında m tane sistem söz konusudur. Sistem bölümlerinde de göreceğimiz gibi herhangi bir sistem m sayıda denklem vasıtasıyla gösterilebilmektedir. Bu özellikteki sistemlerin çözüm ve lineerlik testleri önemlidir. Bu formdaki sistem analiz edilirse

$$\mathbf{u}=\begin{bmatrix}\mathbf{u_1}\\ \mathbf{u_2}\\ \mathbf{u_3}\\ \vdots\\ \mathbf{u_m}\end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad c_1=\begin{bmatrix}c_{11}\\ c_{21}\\ c_{31}\\ \vdots\\ c_{m1}\end{bmatrix},\ c_2=\begin{bmatrix}c_{12}\\ c_{22}\\ c_{32}\\ \vdots\\ c_{m2}\end{bmatrix},\ c_3=\begin{bmatrix}c_{13}\\ c_{23}\\ c_{33}\\ \vdots\\ c_{m3}\end{bmatrix},\ \ldots\ldots.,\ c_n=\begin{bmatrix}c_{1n}\\ c_{2n}\\ c_{3n}\\ \vdots\\ c_{mn}\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\mathbf{u_1}\\ \mathbf{u_2}\\ \mathbf{u_3}\\ \vdots\\ \mathbf{u_m}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}c_{11} & c_{12} & c_{13} & \cdots & c_{1n}\\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & \cdots & c_{2n}\\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & \cdots & c_{3n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ c_{m1} & c_{m2} & c_{m3} & \cdots & c_{mn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{v_1}\\ \mathbf{v_2}\\ \mathbf{v_3}\\ \vdots\\ \mathbf{v_n}\end{bmatrix}$$

2. Lineer Bağımsız Vektörlerin Matris Formları

Eğer $\mathbf{v_1},\mathbf{v_2},\mathbf{v_3},\cdots,\mathbf{v_n}$ vektörleri lineer bağımsız iseler, $c_1,c_2,c_3,\cdots,c_n$ katsayıların lineer toplamından oluşan toplamın

$$c_1\mathbf{v_1}+c_2\mathbf{v_2}+c_3\mathbf{v_3}+\cdots+c_n\mathbf{v_n}=\mathbf{0}$$

olacağını biliyoruz. Buna göre $\mathbf{v_1},\mathbf{v_2},\mathbf{v_3},\cdots,\mathbf{v_n}$ lineer bağımsız vektörlerinin lineer toplamından oluşan m tane $\mathbf{u_1},\mathbf{u_2},\mathbf{u_3},\cdots,\mathbf{u_m}$ bağımlı vektörü söz konusuysa

$$\begin{aligned}
&c_{11}\mathbf{v_1}+c_{12}\mathbf{v_2}+c_{13}\mathbf{v_3}+\cdots+c_{1n}\mathbf{v_n}=0\\
&c_{21}\mathbf{v_1}+c_{22}\mathbf{v_2}+c_{23}\mathbf{v_3}+\cdots+c_{2n}\mathbf{v_n}=0\\
&c_{31}\mathbf{v_1}+c_{32}\mathbf{v_2}+c_{33}\mathbf{v_3}+\cdots+c_{3n}\mathbf{v_n}=0 \qquad \text{Lineer homojen denklem sistemi}\\
&\vdots\ = \qquad\quad \vdots\\
&c_{m1}\mathbf{v_1}+c_{m2}\mathbf{v_2}+c_{m3}\mathbf{v_3}+\cdots+c_{mn}\mathbf{v_n}=0
\end{aligned}$$

formu yazılabilir. Bu form analiz edilirse

$$\mathbf{0}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad c_1=\begin{bmatrix}c_{11}\\ c_{21}\\ c_{31}\\ \vdots\\ c_{m1}\end{bmatrix},\ c_2=\begin{bmatrix}c_{12}\\ c_{22}\\ c_{32}\\ \vdots\\ c_{m2}\end{bmatrix},\ c_3=\begin{bmatrix}c_{13}\\ c_{23}\\ c_{33}\\ \vdots\\ c_{m3}\end{bmatrix},\ \ldots\ldots.,\ c_n=\begin{bmatrix}c_{1n}\\ c_{2n}\\ c_{3n}\\ \vdots\\ c_{mn}\end{bmatrix}$$

matris formunda aşağıdaki lineer homojen denklem sistemi elde edilir.

$$\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & \cdots & c_{2n} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & \cdots & c_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & c_{m3} & \cdots & c_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v_1} \\ \mathbf{v_2} \\ \mathbf{v_3} \\ \vdots \\ \mathbf{v_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

Gerek homojen gerekse homojen olmayan sistemlerin çözümleri ve lineerlik testlerini yapmak mümkündür. Bu yaklaşımla vektörlerin değil, dolaylı olarak sistemlerin lineer bağımlı veya bağımsız oldukları da anlaşılmaktadır. Bu gösterime dair lineer bağımsızlık/bağımlılık çözümü de ilkine benzer biçimde matris rankının araştırılması yoluyla yapılabilir.

Ortogonal Lineer Bağımsızlık

Eğer bir **v** vektörünün bulunduğu V vektör uzayının alt kümesi olan S,

$$\mathbf{S} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \cdots, \mathbf{v}_n\}$$

ortogonal vektörlerinden oluşuyorsa, **v** vektörünün basis vektörlerin linear kombinasyonlarının toplamından oluşuyorsa, S'ye ait vektörlerin linear kombinasyonlarının toplamı,

$$\mathbf{v} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_n\mathbf{v}_n$$

veya alternatif olarak

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_n\mathbf{v}_n \\ &= \sum_{k=1}^{n} c_n\mathbf{v}_n \end{aligned}$$

biçiminde yazılır. Bu tarz yazımda

$$\mathbf{v} \neq 0$$

koşulu göz önüne alınarak vektörlerin lineer bağımsız durumları araştırılacaktır. Buna göre eğer vektörler linear ve bağımsız iseler linear kombinasyonun sonucunun sıfır olması gerekecektir.

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + c_3\mathbf{v}_3 + \cdots + c_i\mathbf{v}_i + \cdots + c_n\mathbf{v}_n = 0$$

olması gerekir. Burada $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \cdots, \mathbf{v}_i, \cdots, \mathbf{v}_n)$ vektörlerinin sıfır olmadığını kabul ediyoruz. Eğer vektörlerden biri sıfır olsaydı, vektörler linear bağımlı olurlardı. Buna göre linear kombinasyonun sıfır olabilmesi için eşitliğin her iki tarafını $\mathbf{v}_i$ ile çarpalım.

$$< c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + c_3\mathbf{v}_3 + \cdots + + c_i\mathbf{v}_i + \cdots + c_n\mathbf{v}_n \,, \mathbf{v}_i > = < 0, \mathbf{v}_i >$$

$$c_1 < \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_i > + c_2 < \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_i > + c_3 < \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_i > + \cdots + c_i < \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i > + \cdots + c_n < \mathbf{v}_n, \mathbf{v}_i > = 0$$

Burada iki durum vardır.

a) Vektörler sıfırdan farklı olmasına $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \cdots, \mathbf{v}_i, \cdots, \mathbf{v}_n) \neq 0$ rağmen sonucun sıfır olabilmesi için katsayıların sıfır olması gerekir.

$$c_1 = c_2 = c_3 = \cdots = c_i = \cdots = c_n = 0$$

b) Bu yol ortogonal yaklaşım üzerine kurulmuştur. Eğer $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \cdots, \mathbf{v}_i, \cdots, \mathbf{v}_n)$ vektörleri ortogonal iseler bu vektörler linear bağımsız basisler olup, linear kombinasyonları aşağıdaki

$$\mathbf{v} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + c_3\mathbf{v}_3 + \cdots + c_n\mathbf{v}_n$$

gibi ifade edilebilir. Ve bu koşullarda $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \cdots, \mathbf{v}_i, \cdots, \mathbf{v}_n)$ vektörlerinin ortogonal olabilmesi için,

$$< \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j > = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ E & i = j \end{cases}$$

Farklı vektörlerin çarpımı (iner product) sıfır olacağından,

$$c_1\underbrace{< \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_i >}_{0} + c_2\underbrace{< \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_i >}_{0} + c_3\underbrace{< \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_i >}_{0} + \cdots + c_i < \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i > + \cdots + c_n\underbrace{< \mathbf{v}_n, \mathbf{v}_i >}_{0} = 0$$

sonuç olarak

$$c_i < \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i > = 0$$

elde edilir. Ortogonal yaklaşımdan dolayı biliyoruzki,

$$< \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i > \neq 0$$

olacağından, geriye kalan tek alternatif ortogonal katsayıları gösteren

$$c_i = 0$$

olmak zorundadır. Dolaysıyla ortogonal basislerden oluşan $c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + c_3\mathbf{v}_3 + \cdots + c_n\mathbf{v}_n$ linear kombinasyonunun linear bağımsız olabilmesi için

$$c_1 = c_2 = c_3 = \cdots = c_n = 0$$

olmalıdır.

Örnek

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \;;\; \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix} \;;\; \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \;;\; \mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

a) $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2,$ ve $\mathbf{v}_3$ vektörlerinin lineer bağımlı/bağımsızlığını
b) $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ ve $\mathbf{v}_4$ vektörlerinin lineer bağımlı/bağımsızlığını araştıralım.

Çözüm

a) Verilen vektörlerden $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2,$ ve $\mathbf{v}_3$ linear bağımsızdırlar. Çünkü her bir vektörün sırasıyla $c_1, c_2,$ ve c_3 ile çarpımlarını $c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + c_3\mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$ bağıntısına göre göz önüne alırsak,

$$c_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + c_3\mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$$

bağıntısı gereği

$$c_3 = 0$$
$$2c_2 - 2c_3 = 0$$
$$c_1 - 2c_2 + c_3 = 0$$

denklem sisteminin çözümünün ancak

$$c_1 = c_2 = c_3 = 0$$

koşuluyla mümkün olmasından dolayı $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2,$ ve $\mathbf{v}_3$ vektörleri lineer bağımsızdır.

b) Devreye $\mathbf{v}_4$ vektörü girdiğinde sistemin artık lineer bağımsız olamayacağı görülmektedir. Çünkü bu vektörü de değerlendirmeye aldığımızda yukarıdaki işlemler

$$c_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} + c_4 \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$c_3 + 4c_4 = 0$$
$$2c_2 - 2c_3 + 2c_4 = 0$$
$$c_1 - 2c_2 + c_3 + 3c_4 = 0$$

buradan sistem çözülürse

$$c_1 = -9c_4$$
$$c_2 = -5c_4$$
$$c_3 = -4c_4$$

elde edilir. Buradan görülmektedir ki, $c_1, c_2,$ ve c_3 katsayıları c_4 katsayısına bağlı olarak değişmektedir. Dolayısıyla $c_1, c_2, c_3, c_4 \neq 0$ olduklarından $\mathbf{v}_4$ vektörünün katılımıyla oluşan $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ ve $\mathbf{v}_4$ vektörleri artık lineer bağımsız değildirler, diğer bir deyişle lineer bağımlıdırlar. Bu $c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + c_3\mathbf{v}_3 + c_4\mathbf{v}_4 = \mathbf{0}$ denklemi üzerinde de gösterilebilir.

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + c_3\mathbf{v}_3 + c_4\mathbf{v}_4 = \mathbf{0}$$

veya

$$c_1\mathbf{v}_1 = -c_2\mathbf{v}_2 - c_3\mathbf{v}_3 - c_3\mathbf{v}_4$$

$$\mathbf{v}_1 = -\frac{c_2}{c_1}\mathbf{v}_2 - \frac{c_3}{c_1}\mathbf{v}_3 - \frac{c_4}{c_1}c_3\mathbf{v}_4$$

$c_1 = -9c_4$, $c_2 = -5c_4$ ve $c_3 = -4c_4$ eşitlikleri yerine konulursa

$$\mathbf{v}_1 = -\frac{(-5c_4)}{(-9c_4)}\mathbf{v}_2 - \frac{(-4c_4)}{(-9c_4)}\mathbf{v}_3 - \frac{c_4}{(-9c_4)}\mathbf{v}_4$$

$$\mathbf{v}_1 = -\frac{5}{9}\mathbf{v}_2 - \frac{4}{9}\mathbf{v}_3 + \frac{1}{9}\mathbf{v}_4$$

Görüldüğü gibi $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ ve $\mathbf{v}_4$ vektörleri arasında bir bağlantı söz konusu olduğundan, örneğin $\mathbf{v}_1$ vektörü gösterildiği gibi diğer üç vektörün ($\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ ve $\mathbf{v}_4$) $-\frac{5}{9}$, $-\frac{4}{9}$, ve $\frac{1}{9}$ biçimindeki oranlarına bağlı çıktığından sonuçta $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ ve $\mathbf{v}_4$ vektörleri lineer bağımlıdır.

Örnek

$\mathbf{v}_1 = (3,-2) \quad , \quad \mathbf{v}_2 = (-2,2)$

ise vektörlerin lineer bağımlı/bağımsız durumlarını araştıralım.

Çözüm

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 = \mathbf{0}$$

$$c_1\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} 3c_1 - 2c_2 &= 0 \\ -c_1 + 2c_2 &= 0 \end{aligned}$$

Burada çözüm ancak

$$c_1 = 0 = c_2$$

ile sağlanabildiğinden sistem veya $\mathbf{v}_1$ ve $\mathbf{v}_2$ vektörleri lineer bağımsızdır.

Örnek

$\mathbf{v}_1 = (12,-8) \quad , \quad \mathbf{v}_2 = (-9,6)$

ise vektörlerin linear bağımlı/bağımsız durumlarını araştıralım.

Çözüm

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 = \mathbf{0}$$

$$c_1\begin{bmatrix} 12 \\ -8 \end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix} -9 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} 12c_1 - 9c_2 &= 0 \\ -8c_1 + 6c_2 &= 0 \end{aligned}$$

Burada $c_1 = c_2 = 0$ dışında $c_1, c_2 \neq 0$ olarak çözüm olduğundan sistem veya $\mathbf{v}_1$ ve $\mathbf{v}_2$ vektörlerinin lineer bağımlı oldukları görülmektedir. Bunu gösterebiliriz. Eğer

$$c_2 = k$$

olarak kabul edilirse c_1 değeri c_2 ye bağlı olarak

$$c_1 = \frac{3}{4}k$$

gibi elde edildiğinden sistem veya $\mathbf{v}_1$ ve $\mathbf{v}_2$ vektörleri lineer bağımlıdır. Bulunan katsayılar $c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 = 0$ eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\frac{3}{4}k\mathbf{v}_1 + k\mathbf{v}_2 = 0$$

buradan $\mathbf{v}_1$ vektörünün $\mathbf{v}_2$ vektörüne bağlı ifadesi

$$\mathbf{v}_1 = -\frac{4}{3}\mathbf{v}_2$$

olduğundan $\mathbf{v}_1$ ve $\mathbf{v}_2$ vektörleri lineer bağımlıdır.

Örnek

$\mathbf{v}_1 = (1,1,-1,2)$, $\mathbf{v}_2 = (2,-2,0,2)$, $\mathbf{v}_3 = (2,-8,3,-1)$

Vektörlerinin lineer bağımlı/bağımsız durumlarını araştıralım.

Çözüm

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + c_3\mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$$

$$c_1\begin{bmatrix}1\\1\\-1\\2\end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix}2\\-2\\0\\2\end{bmatrix} + c_3\begin{bmatrix}2\\-8\\3\\-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&c_1 + 2c_2 + 2c_3 = 0\\
&c_1 - 2c_2 - 8c_3 = 0\\
&-c_1 + 3c_3 = 0\\
&2c_1 + 2c_2 - c_3 = 0
\end{aligned}$$

Bu sistemin çözümünün ancak

$$c_1 = c_2 = c_3 = 0$$

ile mümkün olmasından dolayı sistem veya $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ ve $\mathbf{v}_3$ vektörleri lineer bağımsızdır.

Örnek

$\mathbf{v}_1 = (1,-2,3,-4)$, $\mathbf{v}_2 = (-1,3,4,2)$, $\mathbf{v}_3 = (1,1,-2,-2)$

Vektörlerinin lineer bağımlı/bağımsız durumlarını araştıralım.

Çözüm

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + c_3\mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$$

$$c_1\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ -4 \end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} + c_3\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} & c_1 - c_2 + c_3 = 0 \\ & -2c_1 + 3c_2 + c_3 = 0 \\ & 3c_1 + 4c_2 - 2c_3 = 0 \\ & -4c_1 + 2c_2 - 2c_3 = 0 \end{aligned}$$

Bu sistemin $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ dışında $c_1, c_2, c_3 \neq 0$ olarak çözümü olduğundan sistem veya $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ ve $\mathbf{v}_3$ vektörleri lineer bağımlıdır. Bunu gösterebiliriz. Eğer

$$c_3 = k$$

olarak kabul edilirse c_1 ve c_2 değeri c_3 ye bağlı olarak

$$c_1 = 3k \quad \text{ve} \quad c_2 = -\frac{5}{2}k$$

gibi elde edildiğinden sistem veya $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ ve $\mathbf{v}_3$ vektörleri lineer bağımlıdır. Bulunan katsayılar $c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + c_3\mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$ eşitliğinde yerine yazılırsa

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + c_3\mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$$

veya

$$c_1\mathbf{v}_1 = -c_2\mathbf{v}_2 - c_3\mathbf{v}_3$$

$$\mathbf{v}_1 = -\frac{c_2}{c_1}\mathbf{v}_2 - \frac{c_3}{c_1}\mathbf{v}_3$$

$c_1 = 3k$, $c_2 = -\frac{5}{2}k$ ve $c_3 = k$ değerleri yerine konulursa

$$\mathbf{v}_1 = -\frac{(-5/2k)}{(3k)}\mathbf{v}_2 - \frac{k}{(3k)}\mathbf{v}_3$$

$$\mathbf{v}_1 = \frac{5}{6}\mathbf{v}_2 - \frac{1}{3}\mathbf{v}_3$$

Görüldüğü gibi $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ ve $\mathbf{v}_3$ vektörleri arasında bir bağlantı söz konusu olduğundan, örneğin $\mathbf{v}_1$ vektörü gösterildiği gibi diğer iki vektörün ($\mathbf{v}_2$ ve $\mathbf{v}_3$) $\frac{5}{6}$ ve $-\frac{1}{3}$ biçimindeki oranlarına bağlı çıktığından sonuçta $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ ve $\mathbf{v}_3$ vektörleri lineer bağımlıdır.

Lineer bağımsızlık/bağımlılık yorumu-1

Eğer bir kişi bulunduğu noktayı bir *X* referansının örneğin 5 km kuzeyi ve 8 km doğusu diye tanımlayabilir. Alternatif olarak *X* referansına göre 9.7 km kuzeydoğu olarak da tanımlayabilir. İlk durumda bağımsız 5 ve 8 km lik iki vektöre göre tanımlama yapılmıştır. Çünkü kuzey vektörü, doğu vektörüne bağlı olarak verilmemiştir. Halbuki ikinci örnekte, "kuzeydoğu" olarak, kuzey vektörü, doğu vektörüne bağlı olarak ifade edildiğinden, bu durumda vektörlerin bağımsız oldukları söylenemez.

Lineer Denklem Sistemleri

Bu bölümde vektörlerin lineer bağımlı/bağımsızlıkları lineer denklem sistemlerinden yararlanılarak ele alınacaktır. Bu nedenle yararlanılacak olan lineer denklem sistemleri ve homojen denklem sistemleri kısaca hatırlatılacaktır. Eğer $x_1, x_2, \cdots, x_n$ gibi *n* tanebilinmeyenli ve *m* tane denklemden meydana gelen

$$\begin{aligned}
y_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\
y_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\
&\vdots \\
y_m &= a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n
\end{aligned}$$

Sistemine lineer denklem sistemi denir. Sistemin basitçe matrisyel formu vurgulamak üzere $\mathbf{y} = \mathbf{Ax}$ biçimide mevcuttur. Önceki bilgilerimizden $\mathbf{Ax} = 0$ gösteriminin lineer - homojen denklem sistemi olduğunu da biliyoruz. Devam edersek, lineer denklem sistemi kompakt olarak $\mathbf{y} = \mathbf{Ax}$ biçimiyle

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}$$

matris formunda da gösterilebilmektedir. Bu gösterim

$$\underbrace{\mathbf{y}}_{m\times 1} = \underbrace{\mathbf{A}}_{m\times n}\ \underbrace{\mathbf{x}}_{n\times 1}$$

boyutlarındadır. Diğer yandan, $[\mathbf{A}\ \ \mathbf{y}]$ matrisi de arırılmış matristir.

$$[\mathbf{A}\ \ \mathbf{y}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & y_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & y_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & y_m \end{bmatrix}$$

Buradan eğer **A** katsayılar matrisinin full rankı ile $[\mathbf{A}\ \ \mathbf{y}]$ biçimindeki birleştirilmiş matrisin rankı eşit ve bu rank sistemdeki bilinmeyenlerin sayısına eşit çıkarsa sistemin tek çözümü mevcuttur.

1)

a) $\text{rank}\,\mathbf{A} = \text{rank}\,[\mathbf{A}\ \ \mathbf{y}] = n$ tek çözüm

Veya yalnızca

$\text{full rank}\,\mathbf{A} = n$ tek çözüm

Çünkü **A** katsayılar matrisinin full rankı zatene $[\mathbf{A}\ \mathbf{y}]$ biçimindeki birleştirilmiş matrisin rankına eşit olacaktır. Diğer yandan A katsayılar matrisinin determinantının sıfırdan farklı olması durumu da, full rankı verecektir. **A** katsayılar matrisinin full rankı diye kastedilen, maksimum boyuttaki yazılabilecek kare matrisidir. Eğer **A** katsayılar matrisi full olarak $n\times n$ boyutunda iken determinantı sıfırdan farklı bulunursa ($|\mathbf{A}| = \det(\mathbf{A}) \neq 0$, nonsingular), sistemin rankı n olacaktır.

Aynı şekilde $[\mathbf{A}\ \mathbf{y}]$ birleşik matristen de yazılabilecek en yüksek boyutlu kare matris kastedilmektedir. Bu durumlarda çözümün tek (unique solution) olduğunu da hatırlayacağız. Eğer **A** katsayılar matrisi ve $[\mathbf{A}\ \mathbf{y}]$ birleşik matrisin rankı rankı eşit ama, bilinmeyenlerin (vektörlerden) sayısından küçük ise, bu durumda çözüm sonsuzdur. $|\mathbf{A}| = \det(\mathbf{A}) \neq 0$ koşuluyla

b) $\text{rank}\,[\mathbf{A}\ \ \mathbf{y}] = \text{rank}\,\mathbf{A} =$ vektör sayısı (bilinmeyen sayısı) $\longrightarrow$ **Lineer bağımsızlık**

2) $\text{rank}\,\mathbf{A} = \text{rank}\,[\mathbf{A}\ \ \mathbf{y}] < n$ sonsuz çözüm

Veya yalnızca

$\text{full rank}\,\mathbf{A} < n$ sonsuz çözüm

durumlarında bir biçimde çözüm olabileceğini görmekteyiz. Bunların dışında eğer

3) $\det(\mathbf{A}) = 0$ çözüm yok

veya

$\text{rank}\,\mathbf{A} \neq \text{rank}\,[\mathbf{A}\ \ \mathbf{y}]$ çözüm yok

durumları söz konusuysa, sistemin çözümü yoktur. Tüm bunları lineer cebir konularından biliyoruz. Yine rankı bulmak için **A** katsayılar matrisinin ve $[\mathbf{A}\ \ \mathbf{y}]$ birleşik matrislerin determinantlarının sıfırdan farklı olması (nonsingular) gerektiğini biliyoruz ($|\mathbf{A}| = \det(\mathbf{A}) \neq 0$, nonsingular),.

Örnek

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 8 \\ -2x_1 + x_2 - x_3 &= -9 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 &= 3 \end{aligned}$$

Lineer denklem sisteminin çözümü ve bağımsızlığını araştırın.

Çözüm

$\mathbf{Ax} = \mathbf{y}$ yazımına uygun olarak **A** katsayılar matrisi

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Görüldüğü gibi **A** matrisi 3x3 boyutlu en yüksek dereceli kare matristir. Çözüm için rankına bakalım. Bunun için katsayılar matrisin determinantının sıfırdan farklı çıkması gerekmektedir. Çözüm Cramer kralına uygun yapılırsa,

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A}) &= (1.1.1 + 1.(-1).(-1) + (-2).2.1 - (1.1.(-1) + (-1).2.1 + 1.(-2).1) = 1 + 1 - 4 - (-1 - 2 - 2) \\ &= -2 - (-5) \\ &= 3 \neq 0 \end{aligned}$$

$\det(\mathbf{A}) \neq 0$ olduğundan sistemin çözümü vardır. Bu durumda **A** matrisi 3x3 boyutlu olduğundan $\text{rank} = 3$ olur. Bu değer aynı zamanda lineer denklem sistemindeki bilinmeyen sayısına (x_1, x_2, x_3) eşit olduğundan, sistemin çözümü tektir. Ayrıca $\text{rank}\,\mathbf{A} = \text{rank}\,[\mathbf{A}\ \ \mathbf{y}]$ koşulu aranmamıştır. Çünkü $[\mathbf{A}\ \ \mathbf{y}]$ birleşik matrisin rankı minumum **A** nın rankına eşit olacaktır. **Bu durumda sistemdeki üç vektöründe bağımsız olduğu düşünülebilir.** Sistem herhangi bir biçimde çözüldüğünde, tek çözüm

$x_1 = 3$, $x_2 = 1$, $x_3 = 4$

değerlerinde bulunur.

Örnek

$$x_1 + x_2 + 2x_3 = 1$$
$$2x_1 + 7x_3 = 4$$ Lineer denklem sisteminin çözümü ve bağımsızlığını araştırın
$$3x_1 + 3x_2 + 6_3 = 3$$

Çözüm

$\mathbf{Ax} = \mathbf{y}$ yazımına uygun olarak $\mathbf{A}$ katsayılar matrisi

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 7 \\ 3 & 3 & 6 \end{bmatrix}$$

Görüldüğü gibi **A** matrisi 3x3 boyutlu en yüksek dereceli kare matristir. Çözüm için rankına bakalım. Bunun için katsayılar matrisin determinantının sıfırdan farklı çıkması gerekmektedir. Çözüm Cramer kralına uygun yapılırsa,

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A}) &= (1.0.6 + 1.7.3 + 2.3.2 - (2.0.3 + 3.7.1 + 1.2.6 = 0 + 21 + 12 - (0 + 21 + 12) \\ &= 33 - 33 \\ &= 0 \end{aligned}$$

$\det(\mathbf{A}) = 0$ olduğundan sistemin tek çözümü yoktur, ama sonsuz çözümü olabilir. Bu durumda **A** matrisi 3x3 boyutlu olduğundan $\text{rank} < 3$ olacaktır. Sonsuz çözümü bulmak için **A** matrisiyle $[\mathbf{A}\ \ \mathbf{y}]$ matrislerinin rankı araştırılacaktır. Bunun için ilk olarak 3x3 boyutlu **A** matrisinin 2x2 boyutlu daha küçük boyutlu kare matrislerinin determinantları araştırılacaktır. Mevcut haliyle verilen **A** matrisinden üretilebilecek $\overline{\mathbf{A}}$ olarak 2x2 kare matrisleri aşağıdaki formlarda olacaktır.

$$\overline{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 7 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

Bu matrislerden herhangi birinin determinantı sıfırdan farklı olursa, sistemin rankı 2x2 boyutlu matrislerin boyutunu gösteren değer olacaktır ($\text{rank}\,\mathbf{A} = 2$). Bunu göstermek için herhangi bir 2x2 matrisinin determinantına bakalım.

$$\begin{aligned} \det\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \right) &= 1.0 - (1.2) \\ &= -2 \neq 0 \end{aligned}$$

Buradan $\text{rank}\,\mathbf{A} = 2$ elde edilir. Şimdi benzer yollarla $[\mathbf{A}\ \ \mathbf{y}]$ birleşik matrisinin rankını araştıralım.

$$[\mathbf{A}\ \ \mathbf{y}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 7 & 4 \\ 3 & 3 & 6 & 3 \end{bmatrix}$$

Bu durumda birinci satır önce (-2) ile çarpılıp ikinci satırla ardından da (-3) ile çarpılıp üçüncü satırla toplandığında, $[\mathbf{A}\ \ \mathbf{y}]$ birleşik matrisi aşağıdaki duruma gelir.

$$[\mathbf{A}\ \ \mathbf{y}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Bu durumdaki birleşik bir matristen yazılabilecek en büyük boyutlu kare matrisler 2x2 boyutlu olacaktır.

$$\overline{[\mathbf{A}\ \ \mathbf{y}]} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Bunların determinantlarının sıfırdan farklılığı araştırılır.

$$\det\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}\right) = 1.3 - (2.(-2)) = 3 + 4$$
$$= 7 \neq 0$$

Bundan dolayı $\operatorname{rank}[\mathbf{A}\ \ \mathbf{y}] = 2$ elde edilir. Bunların sonucunda $\operatorname{rank}\mathbf{A} = \operatorname{rank}[\mathbf{A}\ \ \mathbf{y}] = 2$ olduğundan sistemin sonsuz çözümü olduğu kabul edilir. Bu durumda $\operatorname{rank} = 2$ olduğundan 3x3 **verilen lineer sistemde asıl iki tane bağımsız değişken (vektör) vardır. Üçüncü, bağımsız ikisinin bir şekilde lineer kombinasyonundan oluşmaktadır. Buna göre başlangıçta verilen lineer denklem sisteminde** x_1 **ve** x_2 **bağımsız değişkenler,** x_3 **değişkeninin ise bunların lineer toplamından oluştuğu düşünülebilir.**

Örnek

$$\begin{aligned} x_1 + 4x_2 - x_3 &= 7 \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 &= 9 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 4 \\ 3x_1 + 12x_2 + x_3 &= 21 \end{aligned}$$

Lineer denklem sisteminin çözümü ve bağımsızlığını araştırın.

Çözüm

$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{y}$ yazımına uygun olarak $\mathbf{A}$ katsayılar matrisi

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 12 & 1 \end{bmatrix}$$

Görüldüğü gibi **A** matrisi 4x3 boyutludur. Buradan üretilebilecek en yüksek dereceli kare matristirin boyutu 3x3 olabilir. Çözüm için **A** matrisinin rankını bulmak üzere oluşturulacak 3x3 lük kare matrislerin determinantlarının sıfırdan farklılığı araştırılacaktır. Yazılabilecek 3x3 matrislerden biri aşağıdaki formda olabilir.

$$\overline{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det(\overline{\mathbf{A}}) &= 1.3.1 + 4.(-2).1 + 2.1.(-1) - ((-1).3.1 + (-2).1.1 + 4.2.1) = 3 - 8 - 2 - (-3 - 2 + 8) \\ &= -7 - (3) \\ &= -10 \neq 0 \end{aligned}$$

Buradan **A** matrisinin rankı ($r = 3$) olacaktır. Bu durumda $[\mathbf{A}\ \ \mathbf{y}]$ birleşik matrisin rankına bakmak gerekiyor. Bunun için $[\mathbf{A}\ \ \mathbf{y}]$ matrisi aşağıdaki gibi oluşturulur.

$$[\mathbf{A}\ \ \mathbf{y}] = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 & 7 \\ 2 & 3 & -2 & 9 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \\ 3 & 12 & 1 & 21 \end{bmatrix}$$

Görüldüğü gibi $[\mathbf{A}\ \ \mathbf{y}]$ matrisi 4x4 boyutludur. Böyle bir matrisin rankının 4 olabilmesi için $[\mathbf{A}\ \ \mathbf{y}]$ matrisinin determinantının sıfırdan farklı olması gerekmektedir. $[\mathbf{A}\ \ \mathbf{y}]$ matrisinin determinantı lineer cebirden bildiğimiz elemanter matris işlemlerinin yerine getirilmesi suretiyle hesaplanmaya çalışılır. Bunun için ilk olarak $[\mathbf{A}\ \ \mathbf{y}]$ matrisinin ilk satırı ayrı ayrı (-2), (-1) ve (-3) ile çarpıldıktan sonra sırasıyla ikinci, üçüncü ve dördüncü satırlarla toplandığında aşağıdaki matris elde edilecektir.

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 & 7 \\ 2 & 3 & -2 & 9 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \\ 3 & 12 & 1 & 21 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 & 7 \\ 0 & -5 & 0 & -5 \\ 0 & -3 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

Bunun ardından elde edilen matrisin dördüncü satırı önce (1/4) ile çarpılır, ardından, ikinci satır $(-1/5)$ ile çarpılır, oluşan matris

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 & 7 \\ 0 & -5 & 0 & -5 \\ 0 & -3 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

oluşan matrisin ikinci satırı (-4) ile çarpılıp birinci satırla, ardından 3 ile çarpıldıktan sonra üçüncü satır ile toplanırsa, aşağıdaki matris elde edilir.

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Üçüncü satır $(-1/2)$ ile çarpıldıktan sonra dördüncü satır ile toplanırsa, nihai matris aşağıdaki gibi elde edilecektir

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Nihayet üçüncü satır aynen birinci satır ile toplanırsa, nihai matris aşağıdaki gibi elde edilecektir.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

oluşan bu matrisin determinantı arandığında boyut 3x3 olacaktır. Bu boyuttaki matris olarak

$$\det\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\right) = -3 \neq 0$$

Dolayısıyla araştırılan $[\mathbf{A}\ \ \mathbf{y}]$ matrisinin rankı 3 olacaktır ($\operatorname{rank}[\mathbf{A}\ \ \mathbf{y}] = 3$). Bundan dolayı $\operatorname{rank}\mathbf{A} = \operatorname{rank}[\mathbf{A}\ \ \mathbf{y}] = 3$ olduğundan verilen lineer denklem sisteminin çözümü vardır. Üstelik sistemin rankı değişken sayısına eşit olduğundan ($\operatorname{rank}\mathbf{A} = \operatorname{rank}[\mathbf{A}\ \ \mathbf{y}] = n = 3$) tek çözüm söz konusudur. Tek çözümde değişkenlerin değerleri, herhangi bir yöntem kullanılarak

$$x_1 = 3\ ,\quad x_2 = 1\ ,\quad x_3 = 0$$

değerlerinde elde edilirler. Diğer yandan dört denklem, 3 vektör (bilinmeyen) olmasına karşın

$\text{rank}\,\mathbf{A} = \text{rank}\,[\mathbf{A}\;\;\mathbf{y}] = n = 3 = \text{vektör sayısı}$

olduğundan **sistem lineer bağımsızdır.**

Lineer - Homojen Denklem Sistemleri

Yukarıda $x_1, x_2, \cdots, x_n$ gibi n tanebilinmeyenli ve m tane denklemden oluşan

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= y_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= y_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= y_m \end{aligned}$$

lineer denklem sistemini biliyoruz. Bu sistemde $\mathbf{y} = 0$ veya $\mathbf{Ax} = 0$ alınmasıyla oluşan

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= 0 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= 0 \end{aligned}$$

sisteme lineer - homojen denklem sistemi denilmektedir. Lineer-homojen denklem sistemi kompakt olarak $\mathbf{Ax} = 0$ biçimiyle

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

matris formunda da gösterilebilmektedir. Diğer yandan, $[\mathbf{A}\;\;\mathbf{y}]$ matrisi de arırılmış matristir.

$$[\mathbf{A}\;\;\mathbf{y}] = [\mathbf{A}\;\;0] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & 0 \end{bmatrix}$$

Lineer homojen denklem sisteminde **A** katsayılar matrisinin full rankı ile $[\mathbf{A}\;\;0]$ biçimindeki matrisin rankları eşit olacağından, sistemin tek çözümü vardır. Bu tek veya sıfır söz konusu olup, çözüm durumunda $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$ elde edilir. Buradan tek çözüm aşağıda özetlenmiştir.

1) $\text{rank}\,\mathbf{A} = \text{rank}\,[\mathbf{A}\;\;0] = n$ tek çözüm

Veya yalnızca

full rank $\mathbf{A} = n$ tek çözüm

A katsayılar matrisinin full rankı diye kastedilen, maksimum boyuttaki yazılabilecek kare matrisidir. Eğer **A** katsayılar matrisi full olarak $n \times n$ boyutunda iken determinantı sıfırdan farklı bulunursa ($|\mathbf{A}| = \det(\mathbf{A}) \neq 0$, nonsingular), sistemin rankı n olacaktır.

Benzer şekilde **A** veya birleşik [**A** 0] matrisinin rankı, değişken sayısından küçük olması halinde, sonsuz çözüm söz konusudur.

2) rank $\mathbf{A} = \text{rank}\,[\mathbf{A}\ \ \mathbf{y}] < n$ sonsuz çözüm

Veya yalnızca

full rank $\mathbf{A} < n$ sonsuz çözüm

durumlarında bir biçimde çözüm olabileceğini görmekteyiz.

3) Bunların yanında eğer denklem sayısı bilinmeyen sayısına eşit ise, sıfır çözüm dışındaki çözüm olarak **A** katsayılar matrisinin determinantının sıfır olması gerekmektedir ($\det(\mathbf{A}) = 0$).

4) Bir başka yaklaşım olarak eğer bilinmeyen sayısı, denklem sayısından büyükse ($n > m$), katsayılar matrisinin rankı bilinmeyen sayısından küçük ($r < n$) olacağından, sıfır çözümün dışında çözüm söz konusudur.

dışında eğer

$\det(\mathbf{A}) = 0$ çözüm yok

Veya

rank $\mathbf{A} \neq \text{rank}\,[\mathbf{A}\ \ \mathbf{y}]$ çözüm yok

durumları söz konusuysa, sistemin çözümü yoktur. Tüm bunları lineer cebir konularından biliyoruz. Yine rankı bulmak için **A** katsayılar matrisinin ve [**A** **y**] birleşik matrislerin determinantlarının sıfırdan farklı olması (nonsingular) gerektiğini biliyoruz ($|\mathbf{A}| = \det(\mathbf{A}) \neq 0$, nonsingular),

Örnek

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= 0 \\ 2x_1 + 5x_2 + 2x_3 &= 0 \\ 3x_1 - x_2 - 4x_3 &= 0 \end{aligned}$$
Lineer homojen denklem sisteminin çözümü ve bağımsızlığını araştırın.

Çözüm

$\mathbf{Ax} = 0$ yazımına uygun olarak $\mathbf{A}$ katsayılar matrisi

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 5 & 2 \\ 3 & -1 & -4 \end{bmatrix}$$

Görüldüğü gibi **A** matrisi 3x3 boyutlu kare matristir. Çözüm için rankına bakalım. Bunun için katsayılar matrisin determinantının sıfırdan farklı çıkması gerekmektedir. Çözüm Cramer kralına uygun yapılırsa,

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A}) &= (1.5.(-4) + 2.2.3 + 2.(-1).(-3) - ((-3).5.3 + 2.(-1).1 + 2.2.(-4)) = -20 + 12 + 6 - (-45 - 2 - 16) \\ &= -2 - (-63) \\ &= 61 \neq 0 \end{aligned}$$

$\det(\mathbf{A}) \neq 0$ olduğundan sistemin çözümü vardır. Bu durumda **A** matrisi 3x3 boyutlu olduğundan $\text{rank} = 3$ olur. Bu değer aynı zamanda lineer denklem sistemindeki bilinmeyen sayısına (x_1, x_2, x_3) eşit olduğundan, sistemin çözümü tektir, diğer bir deyişle sıfır çözüm söz konusudur ($x_1 = x_2 = x_3 = 0$). Sistemin katsayıları olarak **A** matrisi sıfırdan farklı olduğundan ($\det(\mathbf{A}) \neq 0$), $\mathbf{Ax} = 0$ lineer homojen sistemin çözümü için tek alternatif $x_1 = x_2 = x_3 = 0$.

Örnek

$$\begin{aligned} x_1 + 5x_2 + 2x_3 &= 0 \\ 2x_1 + 11x_2 + 4x_3 &= 0 \\ 3x_1 + 12x_2 + 6x_3 &= 0 \end{aligned}$$
Lineer homojen denklem sisteminin çözüm ve bağımsızlığını araştırın.

Çözüm

$\mathbf{Ax} = 0$ yazımına uygun olarak $\mathbf{A}$ katsayılar matrisi

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 2 & 11 & 4 \\ 3 & 12 & 6 \end{bmatrix}$$

A matrisi 3x3 boyutlu kare matris olduğundan, çözüm için rankına bakalım. Bunun için katsayılar matrisin determinantının sıfırdan farklı çıkması gerekmektedir. Çözüm Cramer kralına uygun yapılırsa,

$$\det(\mathbf{A}) = (1.11.6 + 5.4.3 + 2.12.2) - (2.11.3 + 4.12.1 + 2.5.6) = 66 + 60 + 48 - (66 + 48 + 60)$$
$$= 0$$

$\det(\mathbf{A}) = 0$ olduğundan, dolayısıyla $\text{rank}\ \mathbf{A} < n$ olduğundan sıfır çözümün dışında çözümü vardır. Buradan **A** matrisinin rankı 3 den küçük olacağından, ne olduğu araştırılır. Bunun için **A** matrisinin 3x3 den küçük boyutlu 2x2 kare matrislerinin determinantları araştırılır. Bunlar içinden herhangi birinin determinantı sıfırdan farklı bulunursa, $\text{rank} = 2$ olacaktır. Bunun için mevcut 2x2 matrisleri göz önüne alınır.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 2 & 11 & 4 \\ 3 & 12 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\overline{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 11 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 12 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 11 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 12 & 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 11 \\ 3 & 12 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 11 & 4 \\ 12 & 6 \end{bmatrix}$$

Bu matrislerden herhangi birinin determinantı sıfırdan farklı bulunursa, $\text{rank} = 2$ olacaktır.

$$\det(\overline{\mathbf{A}}) = \det\left(\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 11 \end{bmatrix} \right) = 1.11 - (5.2)$$
$$= 1 \neq 0$$

Buradan $\text{rank} = 2$ dir. Bu durumda $\text{rank} = 2 < n$ olduğundan sistemin sonsuz çözümü mevcuttur. **Bunun anlamı değişkenlerden ikisi bağımsız, üçüncüsü ise diğerlerinin lineer kombinasyonundan oluşmaktadır, anlamı ortaya çıkmaktadır.**

Örnek

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 2x_3 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 &= 0 \\ 3x_1 + 4x_2 - 6x_3 &= 0 \\ 3x_1 - 11x_2 + 12x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Lineer homojen denklem sisteminin çözüm ve bağımsızlığını araştırın..

Çözüm

$\mathbf{Ax} = 0$ yazımına uygun olarak **A** katsayılar matrisi

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 4 & -6 \\ 3 & -11 & 12 \end{bmatrix}$$

Görüldüğü gibi **A** matrisi 4x3 boyutludur. Buradan üretilebilecek en yüksek dereceli kare matristirin boyutu 3x3 olabilir. Çözüm için **A** matrisinin rankını bulmak üzere oluşturulacak 3x3 lük kare matrislerin determinantlarının sıfırdan farklılığı araştırılacaktır. Yazılabilecek 3x3 matrislerden biri aşağıdaki formda olabilir.

$$\overline{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 4 & -6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det(\overline{\mathbf{A}}) &= 1.1.(-6) + (-2).(-2).3 + 2.4.2 - (2.1.3 + (-2).4.1 + 2.(-2).(-6)) = -6 + 12 + 16 - (6 - 8 + 24) \\ &= 22 - (22) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Verilen örnekte yazılabilecek tüm 3x3 matrislerinin determinantı sıfır olduğundan, buradan **A** matrisinin rankı ($r = 3$) de olamayacaktır. Bu durumda rank 2 olabilecektir. Bunun için de 2x2 lik matrislerin determinantına bakmak lazım.

$$\overline{\mathbf{A}}^* = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det(\overline{\mathbf{A}}^*) &= 1.1 - (2.(-2)) \\ &= 1 - (-2) \\ &= 2 \neq 0 \end{aligned}$$

Böylece verilen lineer homojen sistemin rankı 2 olacaktır. Bunun anlamı sistemin rankı, bilinmeyen sayısından küçük olduğundan ($\text{rank } \mathbf{A} = 2 < n$) sıfır olmayan çözüm mevcuttur. Dolayısıyla

$$\text{rank } \mathbf{A} = \text{rank } [\mathbf{A} \;\; \mathbf{y}] = 2 \neq \text{vektör sayısı}$$

olduğundan **sistem lineer bağımsız değildir. Bu durumda söz konusu 4 değişkenden ikisi bağımsız, diğer ikisi ise bağımsızların lineer kombinasyonlarının süperpozisiyonundan oluşacaktır.** Başlangıçta verilen lineer homojen sistemin rankının 2 olduğu, elemanter işlemlerle yoluyla da gösterilebilir.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 4 & -6 \\ 3 & -11 & 12 \end{bmatrix}$$

Bunun için birinci satır tek tek (-2) , (-3) ve (-3) ile çarpılıp, ikinci, üçüncü ve dördüncü satırlarla toplanırsa, aşağıdaki matris elde edilir.

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 4 & -6 \\ 3 & -11 & 12 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 5 & -6 \\ 0 & 10 & -12 \\ 0 & -5 & 6 \end{bmatrix}$$

İkinci satır, dördüncü satırla aynen toplanırsa,

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 5 & -6 \\ 0 & 10 & -12 \\ 0 & -5 & 6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 5 & -6 \\ 0 & 10 & -12 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

İkinci satır (-2) ile çarpıldıktan sonra, üçüncü satırla toplanırsa

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 5 & -6 \\ 0 & 10 & -12 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 5 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Bu durumda **A** matrisinin rankının 2 olacağı açıktır. Çünkü

$$\overline{\mathbf{A}}^* = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 5 & -6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det(\overline{\mathbf{A}}^*) &= (-2).(-6) - (2.5) \\ &= 12 - (10) \\ &= 2 \neq 0 \end{aligned}$$

ÖZDEĞER – ÖZVEKTÖR (eigenvalue – eigenvector)

Özdeğer-özvektör (*eigenvalue – eigenvector*) olarak da bilinen bu kavram, lineer cebir, fonksiyonel analiz, vektör analiz, sistem-kontrol teorileri ve nihayetinde işaret işlemede büyük öneme haiz kavramlardır. Vektör ve işaretlerin analizi özdeğer-özvektör kavramlarıyla yakından alakalıdır.

A kare matrisi olmak üzere, bu matristen elde edilecek özdeğerler λ sabitleri (skaler) olmak üzere bir matrisin bir **x** vektörü üzerindeki etkisini incelemeye çalışacağız. Bunun için bir kolon matrisi olarak **x** öz vektörünü göz önüne alındığında, lineer transformasyon gereği

$$\mathbf{A}\,\mathbf{x} = \lambda\,\mathbf{x}$$

işlemi (lineer transformasyon) özdeğer-özvektör yaklaşımının temelini oluşturmaktadır. Bilindiği gibi bir vektörün hem büyüklüğü (magnitude) hemde yönü değiştirilebilirken, eğer yalnızca büyüklüğü değiştirilmek isteniyorsa, bu işlem ilgili vektörün özdeğer denilen bir skaler ile çarpılmasıyla mümkün olur. λ olarak öngörülen bu skaler bir **A** kare matrisi tarafından üretilmektedir. Bu yüzden λ, özel bir terim olarak özdeğer (eigenvalue) olarak anılır. Burada esas olan **A** kare matrisinin **x** vektörünün yönünü değil, yalnızca büyüklüğünü (magnitude) değiştirmesidir. Bundan dolayı $\mathbf{A}\,\mathbf{x} = \lambda\,\mathbf{x}$ bağıntısı söz konusudur. Bununla amaçlanan vektörün yönünün değil büyüklüğünün değiştirilmesidir. Böyle bir **x** vektörüne özvektör (eigenvector), bunu sağlayacak, yalnızca vektörün büyüklüğünü değiştirmeye yarayan λ değerine de özdeğer (eigenvalue) denilmektedir. Burada önemli olan böyle bir operasyon için λ özdeğerinin bir **A** kare matrisiyle sağlanmasıdır. Buradanda anlaşılacağı gibi, gerek özdeğer gerekse özvektör genel anlamda bir matris özelliği olarak algılanabilir. Bu yüzden λ, **A** matrisinin özdeğeri, **x** ise aynı matrisin özvektörüdür. Özdeğer ve özvektör özelliğindeki matris işlemleri mühendislikte ve lineer cebirde yoğun olarak kullanılan işlemlerdir. Burada oluşan lineer transformasyon, yönün (açı) sabit tutularak (pozitif veya negatif yönde), genliğin değişimi üzerine olan bir transformasyondur. Bu açıdan bir ekmeğe yağ veya çikolata sürmek veya bir elastik cismi çekerek uzatmak işlemleri özdeğer-özvektör (eigenvector-eigenvalue) işlemlerine örnektir. Çünkü bıçakla ekmeğe herhangi bir şey sürerken sürülen şey aynı yönde olmak üzere, sürülen alanın büyüklüğü değişmektedir. Elastik cisimde ise, cisim yönü değişmeksizin bir yönde çekilerek uzamaktadır yani büyüklüğü değişmektedir. Buna göre özdeğer-özvektör, aynı yöndeki genlik değişimlerini (bir tür çarpma işlemi gibi) ifade etmektedir. Burada özvektörün bir sayıyla çarpımı söz konusudur. Eğer özdeğer olarak $\lambda > 1$ ile çarpılırsa, boyutu büyüyecek (genleşeme), eğer $\lambda < 1$ ile çarpılırsa boyutu kısalacak (büzüşme), veya $\lambda = 1$ ile çarpılırsa boyutu değişmeyecektir. Her üç durumda yönü aynı, büyüklüğü farklı özvektör oluşturacaktır. Ayrıca bir kare **A** matrisinin birden çok özvektörü vardır (özvektör unique değildir), bunlar lineer bağımsız olup, ayrıca bu vektörler sıfırdan farklıdır, öylede olmalıdır. Aksi taktirde özvektör söz konusu olmaz. Bununla beraber özdeğer sıfır olabilir. Belirtildiği gibi bir kare matrisin sonsuz sayıda özvektörü olabilir. Çünkü eğer **x** bir öz vektör ise bunun ölçeklendirilmiş versiyonu olan $\beta\,\mathbf{x}$ de özvektör olacağından burada β sabit değeri olarak sonsuz alınabileceğinden, sonuçta sonsuz tane özvektör mümkündür. Diğer bir deyişle her bir özdeğere karşılık, sonsuztane özvektör söz konusudur.

Bir **A** kare matrisinin özdeğerleri reel olup, farklı özdeğerlere ait özvektörler ortogonal olurlar. Bununla beraber eğer bir **A** kare matrisi simetrik ise onun özvektörleri ortogonal olur. Bu durumda bu tür vektörler vektör uzayının ortonormal basislerini oluştururlar. Bu açıdan özvektör-özdeğer yaklaşımı ortogonal/ortonormal basisleri (tabanları) elde etmede önem kazanmaktadır. Gerek vektör gerekse işaretlerin aşağıdaki genel gösterimlerine bakarsak

- $y = ax$
- $f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k e^{jk\omega x}$
- $\vec{u} = u\,\vec{e}$
- $\mathbf{u} = u\mathbf{e}$
- $\mathbf{Ax} = \lambda\,\mathbf{x}$
- $F(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\phi(x)dx$

$\phi(x) =$ olasılık yoğunluk fonksiyonu (probability density function)
$F(X) =$ rassal değişkenin beklenen değeri (expected value of X random variable)

- $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad , \quad a_n = \dfrac{n!}{2\pi\, j} \oint_C \dfrac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz$

$$y(t) = \mathbf{T}\{e^{st}\} = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{s(t-\tau)}d\tau = \left[\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{-s\tau}d\tau\right]e^{st}$$

- $= H(s)\, e^{st}$

$= \lambda\, e^{st}$

$$\lambda = H(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{-s\tau}d\tau$$

her bir ifadenin $a, A_k, u, \lambda, x, a_n$ ve $H(s)$ terimleri klasik anlamda katsayı, $x, e^{jk\omega x}, \vec{e}, \mathbf{e}, \mathbf{x}, \phi(x), (z - z_0)^n$ ve e^{st} terimleri ise temel (basis) fonksiyon özelliğindedir. İşaret analiz ise genellikle katsayılar üzerine kurulu onların bulunması ve elde edilmesiyle ilgili işlemlerdir. Bu anlamda katsayılar tipik $\mathbf{Ax} = \lambda\,\mathbf{x}$ gösterimindeki **A** veya λ gibi özdeğerler, temel fonksiyonlar ise verilen aynı örnekteki **x** gibi öz vektör durumundadır.

Bir vektör uzunluğu ve yönü olan doğru parçası olduğundan iki, üç veya daha yüksek boyutlu olabilir. Bir vektörün uzunluğu magnitude olarak anılır. Bu vektör belli bir yönü gösterdiğine göre, böyle bir vektörün hem uzunluğunu hem yönünü değiştirme işlemi lineer transformasyon olarak anılır. Eğer bir vektör yalnızca vektörün büyüklüğünü değiştirecek bir tür lineer transformasyona maruz kalıyorsa, işlem gören vektör eigenvector (öz vektör) ve bu vektörün hem uzunluğunun hem de yönünün değişmesine sebebiyet veren çarpım durumundaki sabit (skaler) değer ise eigenvalue (öz değer) olarak anılır.

Bahsedilen transformasyon aslında isminden de anlaşılacağı gibi bir "dönüşüm" dür. Burada vektör, bir durumdan diğer bir duruma dönüşmektedir. Bu dönüşüm vektör (eigenvector) ile çarpım durumundaki skaler (sabit) eigenvalue (öz değer) nin yalnızca bir yöndeki (pozitif-negatif) değerlerine bağlı olarak yalnizca büyüklüğü itibariyle değişir. Bahsedilen lineer transformasyon aşağıdaki gibi düşünülebilir.

$$\vec{y} = \lambda \vec{x}$$

Burada $\vec{x}$ vektörü belli bir uzunluğu ve yönü olan vektör olarak eigenvector (öz vektör) konumundadır. Burada özel bir durum vardır. Çünkü eigenvector olarak $\vec{x}$ nin uzunluğu "1" olarak görünmektedir. Bu tip özel eigenvector "*normalize edilmiş eigenvector*" olarak bilinir. Bu vektör bir λ sabiti veya skaleri ile çarpım durumundadır. Bu halde artık $\vec{x}$ vektörü bir değişime uğrayacak, dolaysıyla dönüşüm geçirerek yeni vektör olan $\vec{y}$ vektörüne dönüşecektir. Çarpım işlemi olan $\lambda \vec{x}$ ise doğrudan lineer dönüşümün (transformasyonun) kendisi olacaktır. Yalnız burada bilinmesi gereken lineer transformasyon olarak $\lambda \vec{x}$ çarpımı ile $\vec{x}$ öz vektörünün (eigen vector) uzunluğu ve yönü (artı, eksi) değişmekte ancak doğrultusu (direction, açısı) değişmemektedir. Dolayısıyla burada doğrultusu yani yönü değil (sabit), yalnızca uzunluğu değişebilen lineer bir transformasyondan söz edilmektedir. Buna göre

$\vec{x} =$ eigenvector (öz vektör) , $\vec{x} \neq 0$
$\lambda =$ eigen value (öz değer)
$\lambda \vec{x} =$ lineer transformasyon (dönüşüm)

Lineer transformasyonun doğası gereği öz vektör (eigenvector) sıfırdan farklı olmalıdır ($\vec{x} \neq 0$), aksi taktirde transformasyon söz konusu olmaz. Buna mukabil öz değer yani eigenvalue sıfır olabilir ($\lambda = 0$).

Kare matrisin öz değerleri

Vektör analizde veya lineer cebirde bilinen en önemli lineer transformasyon, matrisler üzerine olanıdır. Örneğin **A** bir $n \times n$ tipinde kare matris olsun. **A** matrisi ***singular***

$(\det(\mathbf{A}) = 0)$

veya

nonsingular $(\det(\mathbf{A}) \neq 0)$

olabileceği gibi

$$\mathbf{A}^T\ \mathbf{A} = \mathbf{A}\ \mathbf{A}^T$$

olarak ***normal*** veya

$$\mathbf{A}^T\,\mathbf{A} = \mathbf{A}\,\mathbf{A}^T = \mathbf{I} \quad \text{veya} \quad \mathbf{A}^T = \mathbf{A}^{-1}$$

olarak da ***ortogonal*** formlardan biri olabilir. Bizim üzerinde duracağımız $n \times n$ kare ve normal bir **A** matrisinin öz değerleri ne olabilir onu araştıralım. Sonuçta verilen $n \times n$ tipindeki **A** kare matrisinden λ sabitleri (skaler) elde etmeye çalışacağız. Bunun için bir kolon matrisi olarak **x** öz vektörünü göz önüne alarak lineer transformasyon gereği

$$\mathbf{A}\,\mathbf{x} = \lambda\,\mathbf{x}$$

durumunun olduğunu kabul edelim. Buradaki lineer transformasyon görüldüğü gibi bir *vektör uzayından yine aynı vektör uzayına* doğrudur. Bu denklemden **A** kare matrisinin, bir tür λ özdeğerleri üreten kaynak konumunda olduğu görülmektedir. İfade içine **I** köşegen (diagonal) matrisini aşağıdaki gibi yerleştirmek eşitliği bozmayacaktır.

$$\mathbf{A}\,\mathbf{x} = \lambda\,\mathbf{I}\,\mathbf{x}$$

$\mathbf{A}\,\mathbf{x} = \lambda\,\mathbf{x}$ ifadesindeki sağ tarafı ($\lambda\,\mathbf{x}$) diagonal (**I**) matrisiyle çarptıktan sonra $\mathbf{A}\,\mathbf{x} = \lambda\,\mathbf{I}\,\mathbf{x}$ eşitliğinin amacı, **A** matrisinin de $\lambda\,\mathbf{I}\,\mathbf{x}$ gibi diagonal formunu bulmaktır. Çünkü öz vektör **x** bir kolon matrisi olduğu için yapılan iş, **A** matrisinin köşegen matris eş değerini araştırmaktır. Diğer bir deyişle **A** matrisini diagonal yapacak bir basis yani öz vektör (eigenvector) aramaktayız.

$\mathbf{A}\,\mathbf{x} = \lambda\,\mathbf{I}\,\mathbf{x}$ yazımından tekrar hareket edersek buradan doğal olarak

$$\lambda\,\mathbf{I}\,\mathbf{x} - \mathbf{A}\,\mathbf{x} = 0$$

veya homojen yazım olarak

$$(\lambda\,\mathbf{I} - \mathbf{A})\,\mathbf{x} = 0$$

elde edilecektir. Burada önemli bir nokta şudur ; $(\lambda\,\mathbf{I} - \mathbf{A})$ gibi matris katsayısı olarak tanımlanan ifadenin invertibil yani tersi alınabilir özelliği yoktur. Eğer olsaydı, öz vektör mümkün olmazdı. Çünkü eğer bir an için tersini $(\lambda\,\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$ olarak düşünürsek,

$$\begin{aligned}(\lambda\,\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}(\lambda\,\mathbf{I} - \mathbf{A})\,\mathbf{x} &= 0\\ \mathbf{x} &= 0\end{aligned}$$

elde edilirdi ki bu öz vektörün sıfır olması anlamına gelir ve mümkün değildir, yani öz vector daima sıfırdan farklı vektördür ($\mathbf{x} \neq 0$). Konumuza devam edersek bulunan $(\lambda\,\mathbf{I} - \mathbf{A})\,\mathbf{x} = 0$ ifadesinin sıfır olabilme koşullarını araştırdığımızda öz vektör sıfır olamayacağından ($\mathbf{x} \neq 0$), geriye $(\lambda\,\mathbf{I} - \mathbf{A})$ ifadesinin (matris katsayısı olarak anılır) sıfır olma seçeneği kalmaktadır ($(\lambda\,\mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0$). Bu seçenek determinant olarak aşağıdaki biçimde gösterilir.

$$\det(\lambda\,\mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0 = |\lambda\,\mathbf{I} - \mathbf{A}|$$

Şimdi $|\lambda\mathbf{I}-\mathbf{A}|$ determinantını göz önüne alalım. Verilen **I** diagonal (köşegen) birim matristir. Verilen determinant ifadesi $\det(\lambda\mathbf{I}-\mathbf{A})$ özel olup, **A** matrisinin *karekteristik polinomu* olarak anılır. Bir kare **A** matrisin karekteristik polinomuna biraz açmamız faydalı olacaktır. Her hangi bir "*x*" değişkenine ait polinom

$$p(x)=a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1 x + a_0$$

olarak ifade edilirken, bir **A** kare matrisinin *Cayley-Hamilton* teoreminegöre polinom ifadesi,

$$p(\mathbf{A})=a_n\mathbf{A}^n + a_{n-1}\mathbf{A}^{n-1}+\cdots+a_1\mathbf{A}+a_0\mathbf{I}$$

olarak gösterilmektedir. İşin içine **A** kare matrisinin üstel kuvvetleri dahil edilmiştir. Bunu fikir vermesi açısından hatırlatıyoruz. Böyle düşünmekte amacımız karekteristik polinomun kökleri **A** matrisinin λ öz değerleri olacağı içindir. Bununla bir matrisi öz değerlere bağlı olarak ifade edebilmemiz mümkün olacaktır. Burada **A** matrisi $n\times n$ boyutunda olduğundan karekteristik polinom da "*n*".ci dereceden dolayısıyla "*n*" tane kökü olacaktır. Eğer $|\lambda\mathbf{I}-\mathbf{A}|$ determinantı karekteristik polinom ise, **A** nın karekteristik polinomu $p_A(\lambda)$ veya kısaca $p(\lambda)$ olarak [$p(\lambda)=p_A(\lambda)$] olarak gösterilir.

$$p(\lambda)=(\lambda\mathbf{I}-\mathbf{A})=p_A(\lambda)$$

Bu bağıntıda *Cayley-Hamilton* teoremine göre $p(\lambda)$ değerinin sıfır olacağı aşikardır [$p_A(\mathbf{A})=0=p(\mathbf{A})$]. Karekteristik polinom gösterimindeki "λ" öz değerinin fiziksel yorumu hem kontrol hem de işaret işleme açısından önemlidir. Bu değer çoğu kez işaret işlemedeki titreşim frekansına (ω) veya bir sistem transfer fonksiyonundaki $H(s)$ veya $s=\sigma+j\omega$ tipindeki kompleks frekansına karşılık gelmektedir. Burada $\sigma=0$ değeri için transfer fonksiyonunun direkt frekans karşılığı olan $H(j\omega)$ gösterimi elde edilmektedir. Buna göre öz değer (eigen value) frekansa bağlı transfer fonksiyonu olarak $\lambda=H(s)=H(j\omega)_{\sigma=0}$ gibi gösterilebilir. **A** matrisinin karekteristik polinomu $p(\lambda)$ dan devam edersek aşağıdaki gibi gösterilmektedir.

$$p(\lambda)=|\lambda\mathbf{I}-\mathbf{A}|$$

$p(\lambda)$ polinomı eğer *karekteristik denklem* olarak ifade edilecekse $p(\lambda)=0$ olmalıdır. Buna göre karekteristik denklem

$$|\lambda\mathbf{I}-\mathbf{A}|=0$$

olacaktır. Buradan "*n*" ci dereceden polinomun kökleri olarak n tane öz değer (λ) hesaplanacağı görülmektedir. Bunun için $|\lambda\mathbf{I}-\mathbf{A}|$ determinantı açık olarak aşağıdaki gibi yazılır.

$$|\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}| = \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \lambda^{n} + a_1 \lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0$$

Görüldüğü gibi karekteristik denklem özdeğerlere bağlı olarak elde edilmiştir. Karekteristik denklemin n tane kökü ise $n \times n$ tipli **A** kare matrisinin öz değerleridir (eigenvalue). Buradan bir kare matrisin öz değerlerinin elde edilebileceğini görmekteyiz. Bunu basit örnek üzerinde somutlaştırmaya çalışalım. A matrisi 2×2 kare matris olsun.

$$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

aynı işlemi öz değerler yoluyla yaparsak

$$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda(a_{11} + a_{22}) + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\mathbf{A} = \lambda^2 - \lambda \underbrace{(a_{11} + a_{22})}_{a_1} + \underbrace{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}_{a_2}$$

Buradan da karekteristik denklem gereği ($\mathbf{A} = 0$)

$$\lambda^2 - \lambda a_1 + a_2 = 0$$

elde edilir. Denklemde kompakt olarak görülen

$$a_1 = a_{11} + a_{22}$$
$$a_2 = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

buradan alternatif yazımla $p_A(\lambda)$

$$p_A(\lambda) = \lambda^2 - tr(\mathbf{A}) + \det(\mathbf{A})$$

$$tr(\mathbf{A}) = a_{11} + a_{22}$$

$$\det(\mathbf{A}) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

olarak yazılabilmektedir. İfade de yer alan "$tr(\mathbf{A})$" terimi "**tr**ace (iz)" den gelmektedir. İşlemde diagonal eksendeki aynı indislerin toplamını göstermektedir. Örneğimizi $\mathbf{A}_{3\times3}$ kare matrisi üzerinden incelersek bu kez de karekteristik denklemin

$$\lambda^3 - \lambda^2 a_1 + \lambda a_2 + a_3 = 0$$

olduğunu, ilgili katsayıların daha kompleks yapıda olduklarını görüyoruz.

$$a_1 = a_{11} + a_{22} + a_{33}$$
$$a_2 = a_{11}a_{22} + a_{11}a_{33} + a_{22}a_{33} - a_{13}a_{31}$$
$$a_3 = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{13}a_{22}a_{31} + a_{23}a_{23}a_{31}$$

Örnek

A 2×2 kare matris olsun.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 13 & 5 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

A matrisinin öz değerlerini hesaplamaya çalışalım.

Çözüm

Bunun için karekteristik polinom $|\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}|$ den karekteristik denklem $|\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}| = 0$ oluşturalım. Köşegen matris **I**,

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad \mathbf{Z} = \lambda\mathbf{I} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

$$\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 13 & 5 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda - 13 & -5 \\ -2 & \lambda - 4 \end{bmatrix}$$

$p_A(\lambda) = 0$ gereğince

$$|\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}| = 0 = \begin{vmatrix} \lambda - 13 & -5 \\ -2 & \lambda - 4 \end{vmatrix}$$

buradan da öz değerler

$$\lambda^2 - 17\lambda + 42 = 0$$

$$\lambda_1 = 3 \quad \text{ve} \quad \lambda_2 = 14$$

olarak bulunur. Doğal olarak **A** matrisinin öz değerleri, $p_A(\lambda)$ karekteristik polinomun kökleri olarak bulunmuştur. Öte yandan bilgi açısından **A** nın determinantını $|\mathbf{A}|$ da hesaplayalım.

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 13 & 5 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 52 - 10 = 42$$

buradan

$$\lambda_1 \times \lambda_2 = |\mathbf{A}| = 42$$

olduğu net olarak çıkmaktadır. Bu bir matris-özdeğer özelliği gibi görülebilir. Bunların ışığında acaba $|\lambda\,\mathbf{I} - \mathbf{A}|$ veya $|\lambda\,\mathbf{I} - \mathbf{A}| = 0$ ile yapılmak istene nedir? veya $\lambda_{1,2}$ öz değerlerini $\lambda_1 = 3$ ve $\lambda_2 = 14$ olarak bulmamızın amacı ve faydası ne olmuştur, ve bulunan değerler neyi ifade etmektedir?.

Ek olarak "**A** matrisinin öz değerleri, $p_A(\lambda)$ karekteristik polinomun kökleri olarak bulunmuştur " bilgisinin anlamını analiz etmemiz gerekecektir. Bunların cevabını verdiğimizde mesele hallolmuş olacaktır. Yukarıda elde edilen $\lambda_1 = 3$ ve $\lambda_2 = 14$ öz değerlerine karşılık gelen öz vektörleri hesaplamaya çalışalım. Bunun için $(\lambda\,\mathbf{I} - \mathbf{A})\,\mathbf{x} = 0$ koşulu gereğince önce $\lambda_1 = 3$ için hesaplamaya çalışalım.

$$(\lambda\,\mathbf{I} - \mathbf{A})\,\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \lambda_1 - 13 & -5 \\ -2 & \lambda_1 - 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3-13 & -5 \\ -2 & 3-4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 & -5 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} -10 & -5 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0$$

$$10x_1 + 5x_2 = 0$$
$$2x_1 + x_2 = 0$$

Görüldüğü gibi vektörler veya diğer adıyla özvektörler birbirlerine bağımlı olarak bulunmuşlardır. Bu açıdan özvektörler lineer bağımsız değildirler. Buna göre özvektör araştırılırsa,

x_1	1	2	3	………	x_1
x_2	-2	-4	-6	……..	$-2x_1$

Buna göre

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ -2x_1 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

olarak hesaplanır. Tablodan da görüldüğü gibi bir öz değer için ($\lambda_1 = 3$), öz vektör olarak yazılabilecek sonsuz vektör mümkündür. $\lambda_1 = 3$ öz değeri için bulunan öz vektör

$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix}1 & -2\end{bmatrix}^T$ basisdir veya ***basis vektör*** olarak anılır. Basis (temel) denmesinin sebebi ondan yararlanarak yeni öz vektörler oluşturulabilir.

Diğer bir deyişle $\lambda_1 = 3$ değerine karşılık gelen basis vektör olan öz vektör (eigenvector) aynı zamanda "*eigen space* (*öz vektör uzayı*)" olarak da anılmaktadır. Çünkü söz konusu basis vektörden hareketle bir uzay oluşturacak sonsuz tane yeni vektör oluşturulabilir.

Burada $\mathbf{A\,x} = \lambda\,\mathbf{x}$ verilmişken $\mathbf{A\,x} = \lambda\,\mathbf{I\,x}$ yazılımıyla A matrisinin köşegen versiyonunu bulmaya çalıştığımızı belirtmiştik. Diğer bir deyişle A matrisini köşegenleştirecek bir basis vektör gibi öz vektör (eigenvector) bulmaya çalışıyoruz. Bunu göstermek üzere $\mathbf{A\,x} = \lambda\,\mathbf{I\,x}$ bağıntısı gereği

$$\begin{bmatrix}13 & 5\\ 2 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ -2\end{bmatrix} = 3\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ -2\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}3\\ -6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3\\ -6\end{bmatrix}$$

eşitliğinin elde edilişi bir şekilde **A** matrisinin **I** gibi diagonalleştirildiğine işarettir. Aynı şekilde $\lambda_2 = 14$ için öz vektörü bulmaya çalışalım.

$$(\lambda\,\mathbf{I} - \mathbf{A})\,\mathbf{x} = \begin{bmatrix}\lambda_1 - 13 & -5\\ -2 & \lambda_1 - 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}14-13 & -5\\ -2 & 14-4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & -5\\ -2 & 10\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix}1 & -5\\ -2 & 10\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} = 0$$

$$x_1 - 5x_2 = 0$$
$$2x_1 - 10x_2 = 0$$

Görüldüğü gibi burada da vektörler veya diğer adıyla özvektörler birbirlerine bağımlı olarak bulunmuşlardır. Bu açıdan özvektörler lineer bağımsız değildirler. Buna göre özvektör araştırılırsa,

x_1	5	10	15	………	$5x_2$
x_2	1	2	3	………	x_2

Buna göre

$$\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix}5x_2\\ x_2\end{bmatrix} = x_2\begin{bmatrix}5\\ 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}5\\ 1\end{bmatrix}$$

Burada da tablodan görüldüğü gibi bir öz değer için ($\lambda_2 = 14$), öz vektör olarak yazılabilecek sonsuz vektör mümkündür. $\lambda_2 = 14$ öz değeri için bulunan öz vektör $\mathbf{x}_2 = [5 \quad 1]^T$ basis vektördür. Öz vektör olarak elde edilen

$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ ve $\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$ basis vektörlerine bakıldığında iki vektörün lineer bağımsız olduklarını görmekteyiz. Çünkü

$$c_1\mathbf{x_1} + c_2\mathbf{x_2} = 0$$

$$c_1\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$c_1 + 5c_2 = 0$$
$$-2c_1 + c_2 = 0$$

Bunun çözümü için $c_1 = 0$ ve $c_2 = 0$ olacağından $\mathbf{x_1}$ ve $\mathbf{x_2}$ vektörleri lineer bağımsızdırlar.

Karekteristik Denklem – Özdeğerler – Kontrol Sistemleri

Kapalı-çevrim control sisteminin $x(t)$ giriş ve $y(t)$ çıkışına göre diferansiyel denkleminin

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 12\frac{dy(t)}{dt^2} + 27y(t) = 8\frac{dx}{dt}$$

olduğunu düşünelim. Burada diferansiyel operator olarak

$$D = \frac{d}{dt}$$

veya Laplace operatörü olarak,

$$sY(s) = \frac{d}{dt}$$

kabullerinden birini yaparak aşağıdaki gibi yazmamız mümkündür.

$$(D^2 + 12D + 27)y(t) = 8Dx(t) \quad \text{veya} \quad (s^2 + 12s + 27)Y(s) = 8sX(s)$$

$$h(t) = \frac{y(t)}{x(t)} = \frac{D}{D^2 + 12D + 27} \quad \text{veya} \quad H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{s}{s^2 + 12s + 27}$$

Görüldüğü gibi her iki durumda da çıkışın girişe oranı olarak oluşan $h(t)$ veya $H(s)$ transfer kapalı-çevrim control sisteminin (veya böyle düşünülebilecek sistemin) transfer fonksiyonudur. Her ikisinde de

$$D^2 + 12D + 27 \quad \text{veya} \quad s^2 + 12s + 27$$

denklemleri söz konusu system veya kapalı-çevrim control sisteminin karekteristik denklemidir. Bu denklemlerde

$\lambda = D$ veya

$\lambda = s$

alındığında,

$$\lambda^2 + 12\lambda + 27$$

gibi özdeğerlerden oluşan tek bir forma dönüşür. Buradan kapalı-çevrim control sisteminin karekteristik denkleminin, aynen matris-vektör yaklaşımındaki

$$Q(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0 = 0$$

denklemine benzer olarak elde edildiğini görmekteyiz. Sonuçta matris-vektör yaklaşımındaki $Q(\lambda) = 0$ çözümü, kapalı-çevrim control sistemindeki

$$\lambda^2 + 12\lambda + 27 = 0$$

yaklaşımıyla ele alınacaktır. Bu yaklaşımın $h(t) = H(s) = 0$ şeklinde girişin olmadığı ve başlangıç koşullarına gore çözümün söz konusu olduğu natural veya homojen çözümlere dayalı olduğunu görmekteyiz. Sonuçta $\lambda^2 + 12\lambda + 27 = 0$ denklemiyle elde edilen özdeğerler alternatif olarak $\mathbf{Ax} = 0$ tabanlı $Q(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0 = 0$ denkleminden elde edilen özdeğerlere denktir. Verilen $\lambda^2 + 12\lambda + 27 = 0$ denklemi

$$(\lambda + 3)(\lambda + 9) = 0$$

gibi düşünülüp, çözümü

$$\lambda_1 = -3 \quad \text{ve} \quad \lambda_2 = -9$$

olarak elde edilir. Bunların ters Laplace karşılıklarını,

$$\frac{1}{s+\lambda} = e^{-\lambda t}u(t)$$

kuralı gereği,

$$\frac{1}{s+3} = e^{-3t}u(t) \qquad \text{ve} \qquad \frac{1}{s+9} = e^{-9t}u(t)$$

Bunun çözümüde

$$\frac{1}{s+\lambda} = e^{-\lambda t} u(t)$$

bunların ardından aşağıdaki tespitler yapılabilir.

ÖZDEĞERLER ve KARARLILIK ÜZERİNE

$$\mathbf{Ax} = \lambda \mathbf{x}$$

Biçiminde **A** matrisinden elde edilen ve lineer denklem sistemine ait λ özdeğerleri, aynı zamanda sistemin stabilitesi açısından önemli bir kriter oluşturur. Bu değerin negatif olarak kompleks frekans düzleminin sol yarı düzleminde yer aldığı sistemler asimtotik kararlı iken, pozitif olması durumunda ise sağ yarı düzlemde yer alarak stabil olmayan sistemleri oluştururlar. Kompleks frekans düzleminin imajiner ekseni üzerinde yer alan ve katlı kök durumunda olmayan özdeğerlere sahip sistemin ise marjinal kararlı olduğu kabul edilir.

Tespit : A matrisiyle $\mathbf{y} = \mathbf{Ax}$ olarak verilen sistemin özdeğerleri (**A** matrisinden elde edilecek özdeğerler), kapalı-çevrim sisteminin (transfer fonksiyonunun) kutuplarıdır.

Eğer bir kapalı-çevrim kontrol sistemin transfer fonksiyonu çıkışın bulmak üzere diferansiyel denklemi aşağıdaki gibi ifade ediliyorsa

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = b_m \frac{d^m x(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} x(t)}{dt^{m-1}} + \cdots + b_1 \frac{dx(t)}{dt} + b_0 x(t)$$

"s" domeninde ise transfer fonksiyonunun

$$[a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0] Y(s) = [b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0] X(s)$$

buradan çıkışın girişe oranı olarak system transfer fonksiyonunun

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0}$$

olarak elde edildiğini görmekteyiz. Transfer fonksiyonunu sistemin kutup ve sıfırlarına göre oluşturmak istersek

$$H(s) = K \frac{(s - z_1)(s - z_2) \cdots (s - z_{m-1})(s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2) \cdots (s - p_{n-1})(s - p_n)}$$

Buradan $p = \lambda$ kabul edilirse, kapalı-çevrim sisteminin denklemi,

$$H(s) = K\frac{(s-z_1)(s-z_2)\cdots(s-z_{m-1})(s-z_m)}{(s-\lambda_1)(s-\lambda_2)\cdots(s-\lambda_{n-1})(s-\lambda_n)}$$

sisteminin paydasındaki ifadeden karektersitik denklem olarak

$$(s-\lambda_1)(s-\lambda_2)\cdots(s-\lambda_n) = 0$$

denkleminin kökleri (özdeğerleri) olarak sistem kutuplarını göstermektedir. Bu değerler (kutuplar veya özdeğerler), **A** matrisinin özdeğerlerini bulmak amacıyla kullanılan $(\lambda\mathbf{I}-\mathbf{A})=0$ ifadesinden elde edilen

$$Q(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0 = 0$$

denkleminden bulunacak λ_n, özdeğerlerle aynı olacağından, bu şekilde bulunan **A** matrisinin özdeğerleri transfer fonksiyonunun (sistemin) kutuplarına karşılık gelecektir. Bunu da kapsayan bazı tespitler aşağıya çıkarılmıştır.

Tespit 1 : $\mathbf{y}=\mathbf{A}\mathbf{x}$ veya $\mathbf{A}\mathbf{x}=\lambda\mathbf{x}$ formunda ifade edilen lineer matris transformasyonundan $|\lambda\mathbf{I}-\mathbf{A}|=0$ yoluyla **A** matrisinin elde edilecek λ_n özdeğerleri, transfer fonksiyonunun (sistemin) kutuplarına karşılık gelecektir.

Tespit 2 : Elde edilen **A** matrisinin λ özdeğerleri, sistem transfer fonksiyonunun kutupları olarak , $\dfrac{1}{s+\lambda} = e^{-\lambda t}u(t)$ denklemiyle verilen kapalı-çevrim sistemlerinin kutuplarını göstermektedir.

Tespit 3 : Burada λ özdeğeri sistemin stabilitesi açısından önemlidir. Hesaplanan λ özdeğeri pozitif ($\lambda > 0$) olduğu sürece (aksi taktirde sistem kararsız demektir), λ sistemin kutupları olarak $s=\sigma + j\omega$ kompleks frekans düzleminin sol yarı düzleminde yer alacağından sistemi kararlı yapacaktır. Bununla birlikte λ özdeğeri büyüdüğü sürece, sistemin sönümleme hızı da artarak, sistem daha kısa sürede rejime, yani kararlı hale gelecektir.

Tespit 4 : Bazı literatürlerde karşılaşılan notasyon gösterimine açıklık getirmek istiyoruz. Eğer lineer zamanla değişmeyen (LTI) sistemde $x(t)$ giriş, ve değeri $x(t)=e^{st}$ ve $h(t)$ sistem impuls cevabı ise, bu sistemin oluşturacağı $y(t)$ cevabı

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau)h(\tau)\,d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} e^{s(t-\tau)}\,h(\tau)\,d\tau = e^{st}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-s\tau}\,h(\tau)\,d\tau$$

$$= e^{st}H(s)$$

$$H(s) = \lambda = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-s\tau}\,h(\tau)\,d\tau$$

buradan sistem çıkışı $y(t)$

$$
\begin{aligned}
y(t) &= H(s)\, x(t) \\
&= \lambda\, e^{s\,t}
\end{aligned}
$$

olarak göz önüne alınırsa, bir tür katsayı durumundaki $H(s)$ LTI sistemler için kompleks özellikteki sabit görünümündedir ($\lambda = H(s)$). Bir anlamda elde edilen $H(s)$, vektörel anlamda $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ olarak gösterilen ifadedeki λ özdeğerinin karşılığı gibi düşünülmesi doğru olmaz. Bunun genel olarak özdeğerin λ notasyonu ile verilmesi ve bazı literatürlerdeki $\lambda = H(s)$ gibi gösterilen yazımın sonucu olduğu düşünülebilir. Gerçekte λ özdeğeri yalnızca tespit 1 de ifade edilen, sistem transfer fonksiyonunun kutup değerlerine karşılık gelmektedir.

Ancak buna rağmen $\lambda = H(s)$ gösterimiyle $H(s)$ in sabit katsayı rolüne benzer olarak, istenirse $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ gösterimindeki λ de bir tür katsayı gibi düşünülebilir. Bu açıdan λ, $\mathbf{x}$ özvektörün **A** matrisinden elde edilmiş katsayısı gibi düşünülebilir. Netice de eğer ısrarla λ'e sabit (katsayı) rolü verilecekse, bu yaklaşım daha doğru olur.