

SİSTEMLER : BÖLÜM 3.2

LINEER ZAMANLA DEĞİŞMEYEN SİSTEMLERİN CEVABI

Bu bölümde ele alacağımız sistem ağırlıklandırma ve süperpozisyon (çarpımsallık-toplamsallık) özelliklerini içeren sürekli zaman lineer ve zamanla değişmez özellikteki lineer zamanla değişmez yani kısaca LTI (lineer time invariant) olacaktır. Burada lineer özellik olarak sistemin en basit haliyle toplamsallık ve çarpımsallık özelliğini sağlayan ve zamandan bağımsızlık olarak ise, girişteki gecikmenin (kaymanın), sistem çıkışında da aynen görüldüğü, yani çıkışın kaymayla değişmeme özelliği vurgulanmaktadır. Her iki özelliği sağlayan lineer (doğrusal) zamandan bağımsız (LTI, lineer, time-invariant) sistemlerin bir önceki bölümde aktarılan özelliklerinin yanı sıra burada da sistem cevapları ve bu cevapların hesaplanmasına yönelik yöntemler üzerinde durulacaktır. Bu açıdan ilk olarak sistem cevabının hesaplanmasında en önemli yaklaşım olan konvülyasyon kavramına eğileceğiz. Aşağıda bu tekniğin temel özellikleri genel hatlarıyla ve örnekleriyle ele alınmıştır.

Lineer-Zamanla Değişmeyen (LTI) Sistemler ve Konvülyasyon

Lineer zamanla değişmeyen sistemler (LTI) girişleri $x[n]$ veya $x(t)$, impuls cevapları $h[n]$ veya $h(t)$ ve çıkışları $y[n]$ veya $y(t)$ olan sistemlerdir. Çıkışlar gerek ayrık gerekse sürekli formda bu sistemlerin giriş ve impuls cevaplarının convolution işlemlerinden elde edilmektedirler.

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] h[n-k]$$
$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t-\tau) d\tau$$

Dolayısıyla LTI sistemlerin aşağıdaki incelenecek özelliklerinden de görülebileceği gibi işlem türü olarak tümünde ortaya çıkan ortak özellik işlemlerin “**convolution**” (konvülyasyon) olacaktır. Ayrıca mevcut özellikler sistemin en önemli parçası olan ve sistem impuls cevabı olarak bilinen $h[n]$ ve $h(t)$ üzerinde icra edileceklerdir.

Lineer-Zamanla Değişmeyen (LTI) Sistemlerin Girişleri

Yukarıda lineer zamanla değişmeyen sistemlerin (LTI) girişleri $x[n]$ veya $x(t)$, impuls cevapları $h[n]$ veya $h(t)$ ve çıkışları $y[n]$ veya $y(t)$ olan sistemler olduğunu belirtmiş ve bunların her iki haldeki çıkışlarının, sistem girişleri ile impuls cevaplarının konvülyasyon (convolution) işlemlerinden

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] h[n-k]$$
$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t-\tau) d\tau$$

gibi elde edildiğini vermiştik. Bu özellikteki sistemlerin ayrık veya sürekli formda $x[n]$ veya $x(t)$ olarak gösterilebilecek giriş değerlerinin sisteme nasıl verilecekleri önemli bir ayrıntıdır. Girişin tamamı yerine girişi oluşturan her bir noktanın sırayla verilmesi genelde benimsenen bir yöntemdir. Bu şekilde bütün yerine nokta nokta verilecek girişin her bir değerine karşılık sistemin bir cevap üretmesi sağlanacaktır.

Sonuçta lineer sistem gereği girilen tek tek noktaların toplamı nasıl ki girişi oluşturacaksa, her bir giriş noktasına karşılık üretilecek sistem çıkışlarının (cevaplarının) toplamı da, toplam sistem cevabını (çıkışını) oluşturacaktır ki, bu da lineer sistemin gereğidir. Buna göre sistem girişinin nasıl algılanacağı ve sisteme nasıl gireceği ortaya çıkmış olmaktadır. Şimdi bahsedilen giriş işaretini sisteme nokta nokta olarak girmeyi sağlayan yöntem üzerinde duracağız.

1. Giriş İşaretinin İmpulslerden Üretilmesi

Yukarıda bahsedilen sistem girişini nokta nokta sisteme girmenin yolu, girişin her bir noktasının $\delta(t)$ delta fonksiyonu yani impuls fonksiyonuyla ifade edilmesinden geçmektedir. Eğer sistem cevabı

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau$$

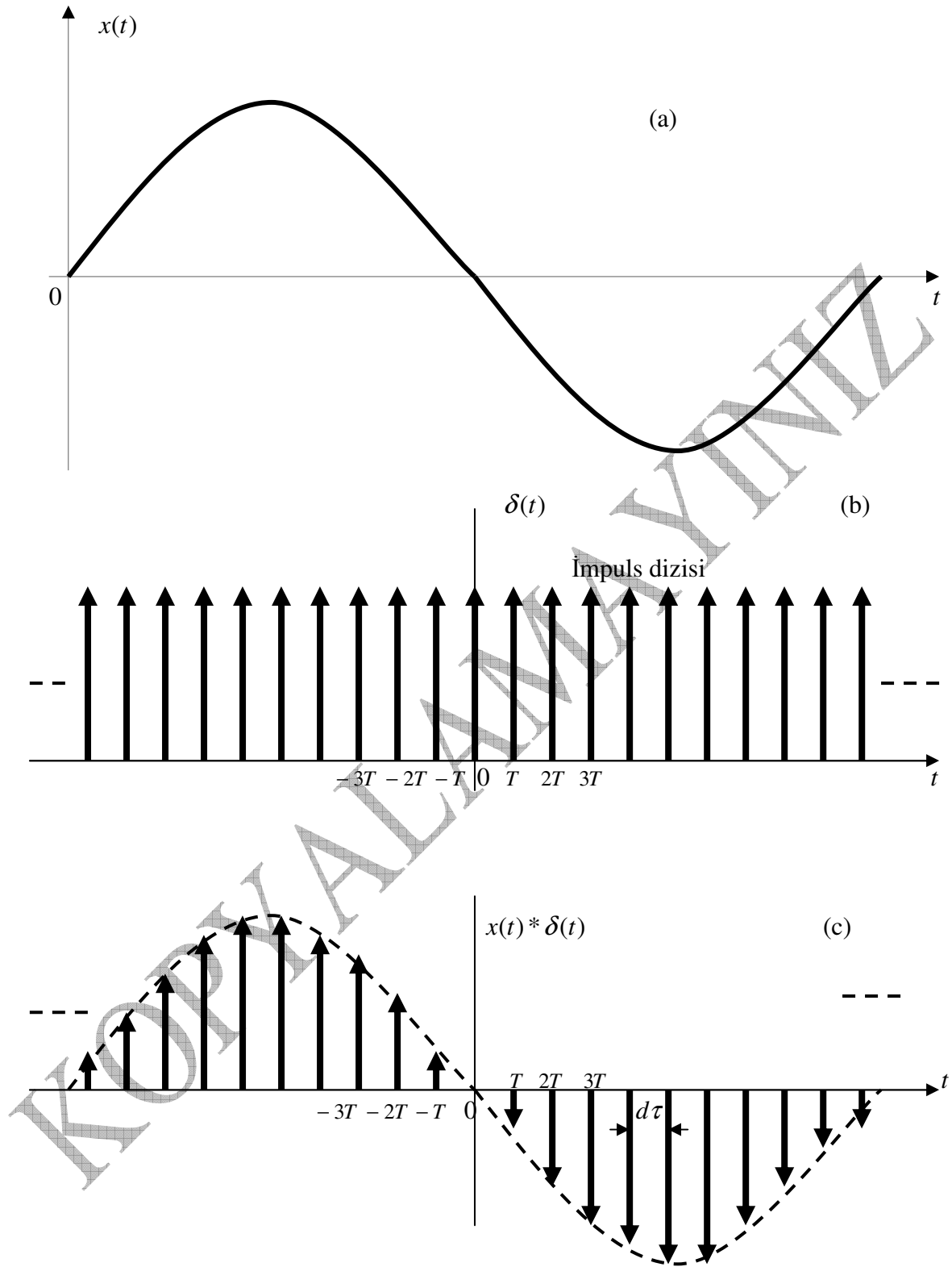
ise, burada $x(t)$ işaretin her bir noktasını $\delta(t)$ fonksiyonuyla gösterilebilecek biçimde $x(\tau) \delta(t - \tau)$ olarak ifade edebiliriz, bu yazım $x(t)$ girişinin her bir noktasını impuls hale getirir. Örneğin girişte yüz tane nokta varsa, giriş yüz tane impulsten oluşacaktır. Eğer işaret sürekli ve sonsuz noktadan oluşuyorsa, sonsuz tane impulsten oluşacaktır. Verilen $x(\tau) \delta(t - \tau)$ yazımı, $x(t)$ girişinin “ τ ” anlarındaki genliğini gösterecektir. Dikkat edilirse integralde “ τ ”, “ t ” zamanına bağlı olarak $t = (-\infty, \infty)$ aralığında değişeceğinden, bu demektir ki, $x(t)$ girişinin $t = (-\infty, \infty) = \tau$ aralığındaki tüm noktaları değişen genliklere göre impuls olarak oluşturulacaktır. Bunun sonucunda $x(t)$ işaretinin sonsuz tane impulsten yani tamamının impuls olarak oluşturulması sağlanacaktır.

Bu şekilde sistemlerin ayrık veya sürekli formda $x[n]$ veya $x(t)$ olarak gösterilebilecek giriş değerlerinin Delta fonksiyonu ($\delta[n]$ veya $\delta(t)$) ile sisteme verilmesi, sistem ve işlem analizi açısından pratik bir yaklaşımdır. Buna göre sistem girişini delta fonksiyonu ($\delta[n], \delta(t)$) yardımıyla aşağıdaki biçimlerde ifade edebiliriz.

$$x[n] = x[n] * \delta[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \delta[n - k]$$

$$x(t) = x(t) * \delta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \delta(t - \tau) d\tau$$

Görüldüğü gibi sistem girişleri delta fonksiyonu şeklindeki impulsler olarak düşünülmektedir. Her bir impuls genişliği sıfır gibi algılanan impulsler olduğundan herhangi bir sürekli işaretin bu şekilde sonsuz tane birbirine çok yakın (adeta bitişik) impulslerden oluştuğu kabul edilir. Aşağıdaki şekilden de görüldüğü gibi (a) daki giriş $x(t)$ işareti genişlikleri çok az, dar ($d\tau$) olan impulslerin toplamından oluşmaktadır.

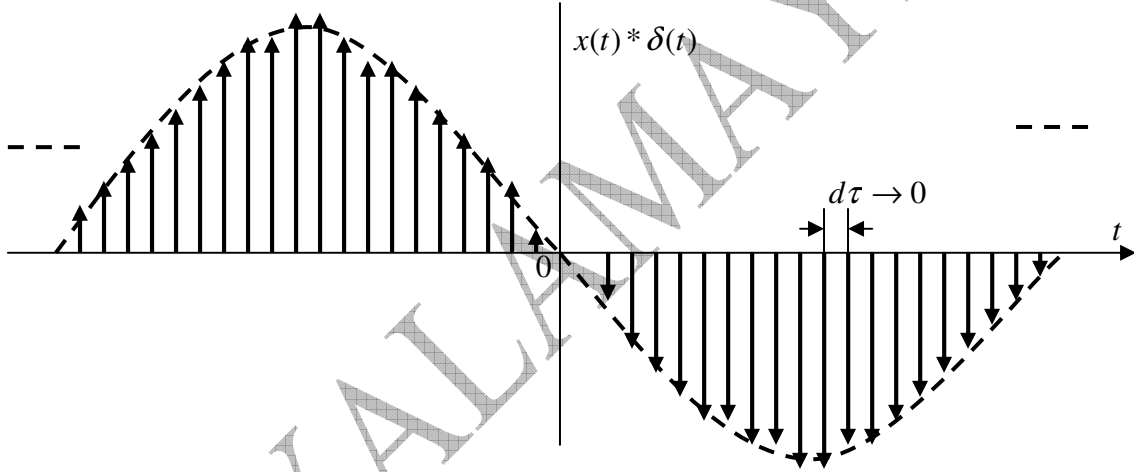


Şekil 1 Giriş $x(t)$ işaretinin impuls fonksiyonuyla ifade edilmesi : $x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \delta(t - \tau) d\tau$

Görüldüğü gibi girişteki bir $x(t)$ işaretinin $\delta(t)$, impuls dizisi ; $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-kT)$ ile konvülasyonu, (c) de görüldüğü gibi, yine $x(t)$ işaretini oluşturmaktadır. Bir işaretin, impuls fonksiyonuyla konvülasyonu, işaretin kendisini oluşturmaya ($x = x * \delta$), zaten konvülasyon tekniğinin önemli kurallarından biridir.

$$x(t) = x(t) * \delta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \delta(t - \tau) d\tau$$

Bunu (c) de, impulslerin üzerindeki kesikli işareten görebilmekteyiz. Şekil (c) bu anlamda impuls genlik modülasyonu olarak da düşünülebilir. Impuls dizisi, giriş işaretinin genliğine göre değişime uğramıştır. Görselliği artırma adına (b) deki impuls dizisinin T periodlu olarak fark edilebilir aralıkta ve biraz genişçe göz önüne alındığı görülmektedir. Gerçekte sürekli formdaki $x(t)$ işaretini oluşturmak üzere $\delta(t)$ impuls dizisinin daha sık, ve daha dar periodlu olduğunu bilmeliyiz. Böyle bir durumda şekil (c) belki biraz daha gerçeğe uygun olarak aşağıdaki gibi düşünülebilir.



Şekil 2 Giriş $x(t)$ işaretinin impuls fonksiyonuyla ifade edilmesi : $x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \delta(t - \tau) d\tau$

Görüldüğü gibi impuls dizisinin daha düşük periodlu ve dar düşünüldüğü bu uygulamada, impulslerin sıfıra yakın aralıkla dizildikleri ($d\tau \rightarrow 0$) göz önüne alınırsa, yoğun impulslerin birleşiminden söz konusu $x(t)$ işaretinin elde edilebileceğini görmekteyiz. Konvülasyonla verilen integralin, aslında impulslerin lineer toplamından oluştuğunu ve lineer kuralının geçerli olduğunu görebiliriz. İmpulslere bağlı elde edilen giriş fonksiyonunun lineerliğini,

$$L[c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) + \dots + c_n x_n(t)] = c_1 L[x_1(t)] + c_2 L[x_2(t)] + \dots + c_n L[x_n(t)]$$

gibi düşünersek, bunun impulslerle bağlı tam yazımı aşağıdaki gibi düşünülebilir.

$$\begin{aligned} x(t) &= L[x(\tau_1)\delta(t - \tau_1) + x(\tau_2)\delta(t - \tau_2) + \dots + x(\tau_n)\delta(t - \tau_n)] \\ &= x(\tau_1)L[\delta(t - \tau_1)] + x(\tau_2)L[\delta(t - \tau_2)] + \dots + x(\tau_n)L[\delta(t - \tau_n)] \end{aligned}$$

Bu şekilde sistem giriş işaretinin, daha önce tanımlanan impuls fonksiyonuna bağlı üretilmesi mümkün olmuştur ve bu yaklaşım, sistem toplam cevaplarının elde edilmesinde önemli bir yaklaşımdır. Buna göre $\delta(t)$ impuls fonksiyonuna bağlı olarak aşağıdaki biçimde ifade edilen $x(t)$ sistem giriş fonksiyonu

$$x(t) = x(t) * \delta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \delta(t - \tau) d\tau$$

görüldüğü gibi, sonsuz sayıdaki bitişik gibi impulslerden (genliklerden) oluşan $\delta(t)$ fonksiyonunun t ekseninde τ ötelenmesiyle ifade edilen impuls fonksiyonunun $\delta(t - \tau)$, τ anındaki $t - \tau = 0$, $\delta(t - \tau) = 1$ sonsuz/bitişik alanların toplamı giriş işaretini $x(t)$ oluşturmaktadır. Buradaki gösterimde delta fonksiyonunun

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau) d\tau = 1$$

özelliğinden yararlanılmıştır. İfadedeki $d\tau$ impuls aralıklarını göstermekte olup değeri sıfıra yakın kabul edilmektedir ($\lim d\tau \rightarrow 0$).

Bu şekilde impulslerden elde edilen giriş fonksiyonunu şimdi sisteme ayrı ayrı impulsler olarak girmek, sistemin her bir impulse karşı düşen cevabının elde edilmesini kolaylaştırmaktadır. Bu yaklaşımla sistem girişi kaç tane impulsten oluşuyorsa, lineer sistem gereği sistem çıkışı da aynı sayıda impuls cevabından oluşacaktır. Bu şekilde elde edilen sistem impuls cevaplarının toplamıda, toplam sistem cevabını oluşturacaktır. Şimdi söz konusu impuls cevabının nasıl elde edileceğine bakalım.

LTIC Sistemlerde Girişin Lineer Impuls Dizisinden Üretilmesi

Yukarıda bir $x(t)$ işaretin veya sistem giriş işaretinin impulslerle elde edilmesi

$$x(t) = x(t) * \delta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \delta(t - \tau) d\tau$$

olarak verilmişti. Buna göre eğer bu bir sistem giriş işaretiyse, bu işaret impulslerden oluşmaktadır. Ancak söz konusu impulsler giriş işaretinin genliği olan $x(\tau)$ ile modifiye edilmiş $x(\tau) \delta(t - \tau)$ formunda olup, bu girişin ağırlıklandırılmış impulslerle gösterimi olarak yorumlanmaktaydı.

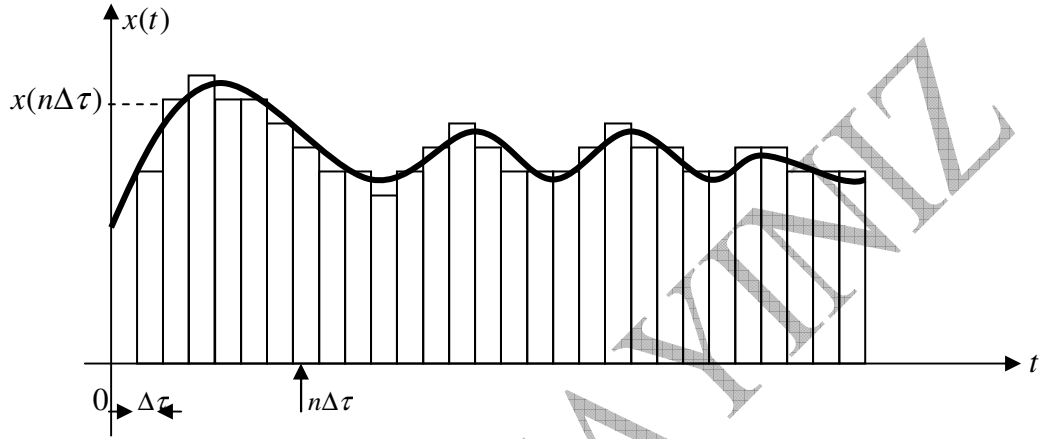
$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \delta(t - \tau) d\tau = \cdots + x(-2)\delta(t - (-2)) + x(-1)\delta(t - (-1)) + x(0)\delta(t - 0) + \\ + x(1)\delta(t - 1) + x(2)\delta(t - 2) + \cdots$$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \delta(t - \tau) d\tau = \cdots + x(-2)\delta(t + 2) + x(-1)\delta(t + 1) + x(0)\delta(t) \\ + x(1)\delta(t - 1) + x(2)\delta(t - 2) + \cdots$$

veya

$$x(t) = \dots + x(-2)\delta(t+2) + x(-1)\delta(t+1) + x(0)\delta(t) + x(1)\delta(t-1) + x(2)\delta(t-2) + \dots$$

görüldüğü gibi $x(t)$ sistem işareti, ağırlıklandırılmış lineer impuls dizisinin süperpozisyonundan oluşturulmuştur. Bu yazımı daha gerçekçi kılmak için sistem giriş işareti $x(t)$, aşağıdaki şekilde koyu renkli eğriyle verilmiş olsun.



Şekil 3 Giriş işaretinin birim impulslerden elde edilmesi

Böyle bir işareti bahsedildiği gibi lineer impuls dizisinin kombinasyonundan (süperpozisyonundan) elde etmek için işaretin altındaki alanı yazalım.

$$x(t) = \text{Toplam alan} = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \delta(t-\tau) d\tau = \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n\Delta\tau) \delta(t-n\Delta\tau) \Delta\tau$$

görüldüğü gibi integral ile yazılan alan, sürekli işaretlerin hesaplanmasına özgü biçimde, $\Delta\tau \rightarrow 0$ alınarak toplam ifadesiyle yazılmıştır. Eğer toplam ifadesini tekrar göz önüne alırsak,

$$x(t) = \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n\Delta\tau) \delta(t-n\Delta\tau) \Delta\tau$$

Bu şekilde $\delta(t)$ veya ötelenmiş $\delta(t-\tau)$ impuls dizisi, $x(t)$ işaretinin $x(n\Delta\tau)\Delta\tau$ genliği ile ağırlıklandırılmış olarak $x(n\Delta\tau) \delta(t-n\Delta\tau) \Delta\tau$ olarak gösterilmektedir. Yazılan ifadede $x(t)$ işaretinin $n\Delta\tau$ anı (noktası), $\delta(t-n\Delta\tau)$ ile gösterilmektedir. Bu noktadaki $x(t)$ işaretinin genliği $x(n\Delta\tau)\Delta\tau$ dir. Tüm bunlar $x(n\Delta\tau) \delta(t-n\Delta\tau) \Delta\tau$ ile gösterilmektedir. Buna göre $x(n\Delta\tau) \delta(t-n\Delta\tau) \Delta\tau$ ifadesi, $\delta(t-n\Delta\tau)$ impuls dizisinin $x(n\Delta\tau)\Delta\tau$ ile ağırlıklandırıldığını (katsayılandırıldığını) göstermektedir. Bunu sağlamak üzere aşağıdaki gösterim göz önüne alınabilir.

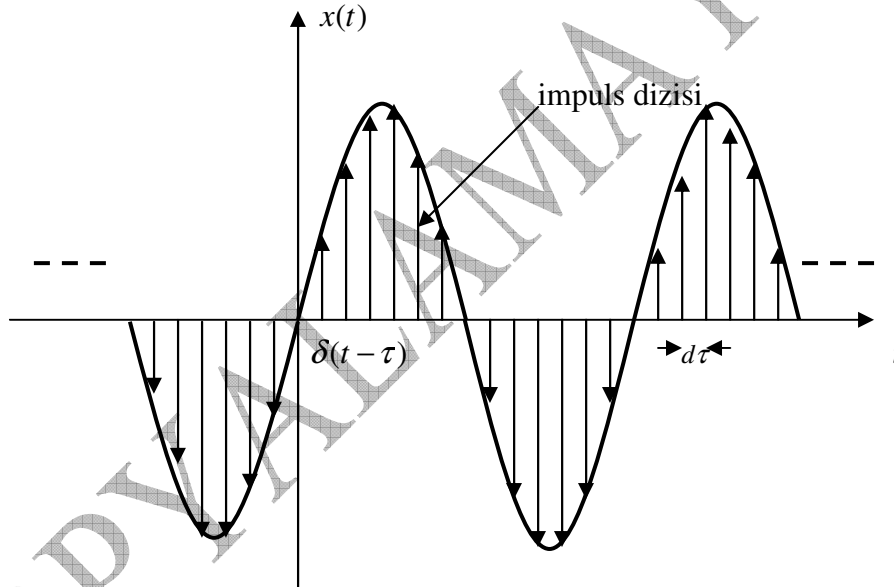
$$x(t) = \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n\Delta\tau) \delta(t - n\Delta\tau) \Delta\tau = \dots + x(-2\Delta\tau) \delta(t - (-2\Delta\tau)) \Delta\tau + x(-\Delta\tau) \delta(t - (-\Delta\tau)) \Delta\tau \\ + x(0) \delta(t - 0) \Delta\tau + x(\Delta\tau) \delta(t - \Delta\tau) \Delta\tau + x(2\Delta\tau) \delta(t - 2\Delta\tau) \Delta\tau + \dots$$

$$x(t) = \dots + x(-2\Delta\tau) \delta(t + 2\Delta\tau) \Delta\tau + x(-\Delta\tau) \delta(t + \Delta\tau) \Delta\tau + x(0) \delta(t) \Delta\tau \\ + x(\Delta\tau) \delta(t - \Delta\tau) \Delta\tau + x(2\Delta\tau) \delta(t - 2\Delta\tau) \Delta\tau + \dots$$

görüldüğü gibi $x(t)$ işareti ağırlıklandırılmış lineer impuls dizisinin süperpozisyonundan elde edilmiştir.

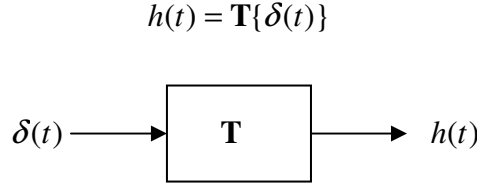
2. Impuls Cevabı

Bir LTI sistemin impulse cevabı, genel olarak sistem girişinin, delta-dirac fonksiyonu ile ifade edilen impulslerin uygulanması durumundaki oluşan çıkış veya cevaptır. Eğer giriş fonksiyonu aşağıdaki gibi impulslerden elde edildiyse



Şekil 4 $x(t)$ giriş işaretinin $\delta(t)$ ile gösterimi

sistemin girişi oluşturan söz konusu impulslere karşı oluşturacağı cevaplara **impuls cevap** diyebiliriz. Bu şekilde girişteki lineerliği çıkışa da uyarlayabiliriz. Her bir giriş impulsinin oluşturacağı $h(t)$ veya $h(t - \tau)$ şeklindeki impuls cevaplarının toplamı da, toplam sistem çıkışını oluşturacaktır. Her bir impulse karşı gelen impuls cevabının nasıl oluşturulacağına bir göz atalım. Eğer LTI sistemin impulse cevabı $h(t)$ ise, bu değer sistem girişinin $\delta(t)$ olduğundaki değerine karşılık üretilen cevaptır.



Şekil 5 Sistem impuls cevabı

Bu şekilde bir $h(t)$ sistem impuls cevabının $\delta(t)$ impuls fonksiyonuyla elde edilebileceğini görmekteyiz. Bundan yararlanarak şimdi $x(t)$ sistem girişini gösteren $\delta(t)$ impulslerinden (giriş impulsleri, $x(\tau)\delta(t-\tau)$) nasıl impuls cevaplarının elde edileceğini araştıralım.

3. LTI Sistem Girişinde Üretilen Cevap

Burada bahsedilen sistem girişinin impulslerden oluştuğunu, ve bu giriş impulslerinin sistem impuls cevaplarını nasıl oluşturacağı ele alınacaktır. Bildiğimiz gibi eğer sistem lineer ise, $x(t)$ girişinin oluşturacağı $y(t)$ çıkışı aşağıdaki gibi düzenlenebilir.

$$x(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t-\tau) d\tau$$

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathbf{T}\{x(t)\} = \mathbf{T}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau\right\} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\mathbf{T}\{\delta(t-\tau)\}d\tau \end{aligned}$$

Eğer impuls cevabı, $\delta(t)$ impuls fonksiyonuyla üretiliyorsa

$$h(t) = \mathbf{T}\{\delta(t)\}$$

buna uygun $\delta(t-\tau)$ sistem girişi ile de $h(t-\tau)$ impuls cevabı da

$$h(t-\tau) = \mathbf{T}\{\delta(t-\tau)\}$$

şeklinde olacağından, bu şekildeki her bir impuls cevabının toplamı da sistem toplam cevabını oluşturacaktır. Burada önemli bir tespit vardır ;

TESPİT : $t < 0$ için $h(t) = 0$ Nedensellik Durumu

$h(t) \leftarrow \delta(t)$ ve $h(t - \tau) \leftarrow \delta(t - \tau)$ durumunun anlamı şudur ; sistem girişi $x(t)$

$$x(t) = x(t) * \delta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \delta(t - \tau) d\tau$$

biçiminde impulslerden elde edildiği için bunun anlamı, $x(t)$ girişi sisteme $\delta(t)$ impulsler olarak uygulanacaktır. Bu durumdaki her bir $\delta(t)$ impuls girişi sistem çıkışında $h(t)$ impuls cevaplarını oluşturacaktır. Bu işlemin sonunda $x(t)$ girişi $\delta(t)$ impulsleri olarak, sistem çıkışları da $h(t)$ impuls cevapları olarak elde edilecektir. Girişte uygulanan impulslerin toplamı $x(t)$ girişini oluştururken, bunlara bu impulslerin genliklerine uygun olarak karşılık gelen $h(t)$ impuls cevaplarının toplamı da $y(t)$ sistem çıkışını oluşturacaktır. Burada önemli olan $\delta(t)$ impuls fonksiyonunun cevabıdır.

$$\delta(t) = \begin{cases} 1 & t = 0 \\ 0 & t \neq 0 \end{cases}$$

Bu tanıma göre $t < 0$ durumunda sistem girişini oluşturan $\delta(t)$ girişi, $\delta(t < 0) = 0$ olacaktır. Bunun anlamı, $t < 0$ için sisteme giriş yapılmayacağıdır. Eğer sisteme giriş yapılmayacaksa, bu durumda da $\delta(t) \rightarrow h(t)$ gereği sistemin çıkış oluşturmaları mümkün olmayacaktır. Diğer bir deyişle $t < 0$ için sistem girişi olan impuls sıfır olacağından ($t < 0$ için $\delta(t) = 0$), impulslerle ilgili olan $h(t)$ sistem impuls cevabının da $t < 0$ için sıfır olacağı çok açıktır ($t < 0$ için $h(t) = 0$). Bundan dolayı, sisteme giriş yapılmadan sistemin cevap üretmeyeceği kabul edilmektedir. Bu durumu tanımlayan $t < 0$ için $h(t) = 0$ ifadesi, bir gerçeklik ve nedensellik tanımı olarak kabul edilmiştir.

Sistem girişinin $\delta(t - \tau)$ olarak uygulanması halinde de bu kez $t - \tau < 0$ için $\delta(t - \tau) = 0$ olacağından benzer durum impuls cevabı içinde düşünülebilir. Bu durumda $t - \tau < 0$ için $\delta(t - \tau) = 0$ olacağından buna uygun bir $h(t - \tau)$ üretilemeyecektir, yani $t - \tau < 0$ için $h(t - \tau) = 0$ nedensel (causality) durumu tekrar söz konusu olacaktır. Bu önemli tespit ve hatırlatmanın ardından şimdi toplam değer, yani impuls cevaplarının toplamı aşağıdaki gibi integrasyonla

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau$$

olarak elde edilecektir. Bu şekliyle girişteki toplam impulslerden oluşan aynı sayıdaki impuls cevabının toplamından da sistem toplam cevabı oluşmuştur. Durumu lineer sistem açısından ele alırsak, nasıl ki lineer bir sistemde giriş

$$\begin{aligned} x(t) &= L[x(\tau_1)\delta(t - \tau_1) + x(\tau_2)\delta(t - \tau_2) + \dots + x(\tau_n)\delta(t - \tau_n)] \\ &= x(\tau_1)L[\delta(t - \tau_1)] + x(\tau_2)L[\delta(t - \tau_2)] + \dots + x(\tau_n)L[\delta(t - \tau_n)] \end{aligned}$$

idiyse, bu kez de benzer olarak çıkış veya çıkışı oluşturan impuls cevapları da giriş gibi lineer kombinasyonlardan aşağıdaki gibi oluşturulabilecektir.

$$\begin{aligned} y(t) &= L[x(\tau_1)h(t-\tau_1) + x(\tau_2)h(t-\tau_2) + \dots + x(\tau_n)h(t-\tau_n)] \\ &= x(\tau_1)L[h(t-\tau_1)] + x(\tau_2)L[h(t-\tau_2)] + \dots + x(\tau_n)L[h(t-\tau_n)] \end{aligned}$$

Veya girişteki impulserin lineer süperpozisyonu, çıkıştaki impuls cevaplarının süperpozisyonu olarak da aşağıdaki gibi düşünülebilir.

$$\begin{aligned} L[x(\tau_1)\delta(t-\tau_1) + x(\tau_2)\delta(t-\tau_2) + \dots + x(\tau_n)\delta(t-\tau_n)] \\ = L[x(\tau_1)h(t-\tau_1) + x(\tau_2)h(t-\tau_2) + \dots + x(\tau_n)h(t-\tau_n)] \end{aligned}$$

veya ;

$$\begin{aligned} x(\tau_1)L[\delta(t-\tau_1)] + x(\tau_2)L[\delta(t-\tau_2)] + \dots + x(\tau_n)L[\delta(t-\tau_n)] \\ = x(\tau_1)L[h(t-\tau_1)] + x(\tau_2)L[h(t-\tau_2)] + \dots + x(\tau_n)L[h(t-\tau_n)] \end{aligned}$$

Böylece sistem impuls giriş ve impuls cevaplarının süperpozisyonunu lineer sisteme göre ifade edebilmekteyiz. Sistem çıkış veya cevaplarının benzer analogi ve yaklaşımla elde edilmesindeki ana işlemin görüldüğü gibi **konvolüsyon** işlemi olduğu fark edilmektedir. Böyle bir işlemler sistem cevabının bulunmasında aşağıdaki değerlendirmelerin yapıldığı gözlemlenmiştir

1- Girişteki değerin cevabı τ kadar gecikmeyle oluşmaktadır.

2- Eşleştirme veya korelasyon işlemlerinde kullanılmaktadır. τ anında sisteme olan girişle, bu ana karşılık gelen $(t-\tau)$ gecikmesi ile aynı anlardaki iki işaretin karşılaştırılması yapılmaktadır.

3- Eşleme (matched) filtreleme özelliği ile radarlarda, filtrelemede ve görüntü işleme proseslerinde yoğun olarak kullanılmaktadır. Bu tip alanlarda, τ gecikme ile sisteme gelen (yansıyarak) sinyalin $x(\tau)$, başlangıçtaki orijinal (gönderilen) sinyal ile karşılaştırılması için, başlangıç işaretinin de τ kadar gecikmiş versiyonu olan $h(t-\tau)$ ifadesine ihtiyaç vardır. Artık eğer $x(\tau)$ işareti ile $h(t-\tau)$ işareti arasında bir benzerlik (korelasyon) aranıyorsa, aynı noktada örtüşen iki işarete benzer durum söz konusudur. Eğer benzerlik varsa, korelasyon katsayısı ile ölçülmüş olacaktır.

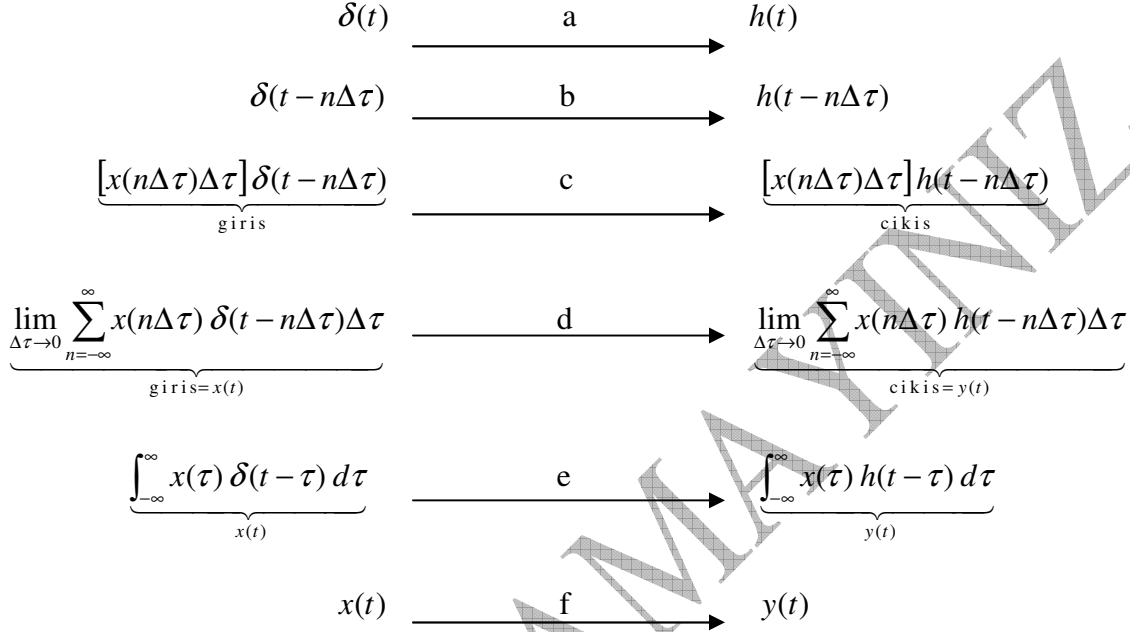
LTIC Sistemlerde Harici Girişe Sistemin Cevabı

Yukarıdaki genel formuyla verilen impuls cevabına bağlı LTIC (lineer zamandan bağımsız sürekli, linear time-invariant continuous) sistem çıkışının elde edilmesi, daha açık olarak aşağıda grafik olarak ele alınmıştır. Daha önce bir $x(t)$ işaretin veya sistem giriş işaretinin impulslarla elde edilmesi

$$x(t) = x(t) * \delta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \delta(t-\tau) d\tau$$

olarak verilmişti. Buna göre eğer bu bir sistem giriş işaretiyse, bu işaret impulslardan oluşmaktadır. Ancak söz konusu impulslar giriş işaretinin genliği olan $x(\tau)$ ile modifiye edilmiş $x(\tau) \delta(t-\tau)$ gormunda olup, bu girişin ağırlıklandırılmış impulslarla gösterimi olarak yorumlanmaktaydı.

Bu şekilde girişteki $\delta(t)$ veya girişin ilgili $\tau, \Delta\tau$ veya $n\Delta\tau$ anlarındaki (noktalarındaki) değerleriyle ağırlıklandırılmış, $x(\tau)\delta(t-\tau)$, $\delta(t-\Delta\tau)$, $\delta(t-n\Delta\tau)$ veya $x(n\Delta\tau)\delta(t-n\Delta\tau)\Delta\tau$ değerleriyle ilgili sistem impuls girişlerine karşılık gelen sistemin impuls cevaplarının elde edilmesini araştıralım. Buna göre sistemin girişi olarak her $\delta(t)$ impulsle ifade edilen değere karşılık gelen bir $h(t)$ impuls cevabı var olacaktır. Bunu aşağıdaki gibi şematize edebiliriz.



Şekil 6 Lineer sistem ve cevabı

Verilenlerden (a) impuls girişine, impuls cevabının karşılık geldiğini, (b) de ise $\delta(t - n\Delta\tau)$ ile $x(t)$ işaretinde $n\Delta\tau$ noktasındaki değere karşılık aynı noktadaki $h(t - n\Delta\tau)$ sistem impuls cevabının karşılık geldiği görülmektedir. Dikkat edilirse (b) şıkında zamandan bağımsızlık (time-invariant) özelliği görülmektedir.

Devamla (c) de ise, (b) deki $\delta(t - n\Delta\tau)$ impulsu, girişin $x(n\Delta\tau)\Delta\tau$ değeriyle ağırlıklandırılırken, buna karşılık gelen $h(t - n\Delta\tau)$ impuls cevabıda girişin yine aynı $x(n\Delta\tau)\Delta\tau$ değeriyle ağırlıklandırılmaktadır. Bu aşamada daha önceki zamandan bağımsızlık (time-invariant) özelliğinin yanına şimdi de, ağırlıklandırmayla, lineerlik özelliği eklenmiştir. Şuna dikkat etmeliyiz, (c) aşamasında $n\Delta\tau$ noktasındaki (an veya zaman değil) sistem girişine karşılık gelen sistem cevabı bulunmaktadır. Çünkü (b) de hala impuls girişine karşılık gelen impuls cevabı söz konusudur, ve bu anda henüz sisteme giriş yapılmamıştır. Sisteme ilk girişin (c) anında yapıldığını görmekteyiz. Çünkü $n\Delta\tau$ noktasında sistem giriş noktasını belirleyen $\delta(t - n\Delta\tau)$ fonksiyonu iken, bu ana karşılık gelen sistem giriş değeri de $x(n\Delta\tau)\Delta\tau$ olarak göz önüne alınmaktadır. Sonuçta sisteme ilk giriş $[x(n\Delta\tau)\Delta\tau]\delta(t - n\Delta\tau)$ ile yapılırken, buna karşılık gelen cevabıda impuls cevabı olarak $[x(n\Delta\tau)\Delta\tau]h(t - n\Delta\tau)$ biçimindedir. Bu şekilde sisteme girişler, impulslerle, çıkışlar ise impuls cevaplarıyla elde edilmektedir.

Buna benzer olarak her bir $n\Delta\tau$ anındaki $[x(n\Delta\tau)\Delta\tau]\delta(t-n\Delta\tau)$ gibi sistem girişlerine karşılık gelen cevaplar $[x(n\Delta\tau)\Delta\tau]h(t-n\Delta\tau)$ olarak hesaplandıktan sonra, girişler kendi aralarında toplanarak toplam girişi, çıkışlar ise benzer şekilde toplanarak sistem toplam çıkışını (cevabını) oluştururlar. Bunları ifade etmek üzere (d) ve (e) adımları düzenlenmiştir. Toplam giriş ve toplam çıkış alternatifli olarak integral veya toplam sembolüyle elde edilmişlerdir. Dahası bu adımlarda hem lineerlik hemde zamandan bağımsızlık özellikleriyle tanımlanabilecek LTI sistem ortaya çıkmıştır.

Gerek girişteki impuls dizisi, gerekse çıkıştaki impuls cevabı dizisi, girişin değerleriyle lineer olarak ağırlıklandırıldıklarından, toplam sistem girişi ve ona karşılık gelen toplam sistem çıkışını temsil edebilmektedirler. Bir diğer elde edilen tespit ise giriş impuls dizisinin, çıkış ise impuls cevabı dizisinin lineer kombinasyonlarından (süperpozisyonundan) oluşmaktadır. Bunların hepsini (d),(e) ve (f) den gözlemleyebilmekteyiz. Bunların neticesinde sürekli vurgulanan lineerite ve zamandan bağımsızlık kriterlerinin, LTI sistemlerin cevapların hesaplanmasında oldukça önemli rol oynadığını görmekteyiz. Özellikle (d) veya (e) olarak lineer olarak ağırlıklandırılmış impulslerle oluşan sistem girişlerinin toplanarak toplam sistem girişini, lineer ağırlıklandırılmış sistem impuls cevaplarıyla oluşan sistem cevaplarının toplanarak toplam sistem çıkışının elde edilmesi aşamasında lineerite kriteri hem giriş hem de çıkış için önemli rol oynamaktadır. Daha önce giriş için düzenlenen

$$x(t) = \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n\Delta\tau) \delta(t-n\Delta\tau)\Delta\tau = \dots + x(-2\Delta\tau) \delta(t-(-2\Delta\tau))\Delta\tau + x(-\Delta\tau) \delta(t-(-\Delta\tau))\Delta\tau \\ + x(0) \delta(t-0)\Delta\tau + x(\Delta\tau) \delta(t-\Delta\tau)\Delta\tau + x(2\Delta\tau) \delta(t-2\Delta\tau)\Delta\tau + \dots$$

$$x(t) = \dots + x(-2\Delta\tau) \delta(t+2\Delta\tau)\Delta\tau + x(-\Delta\tau) \delta(t+\Delta\tau)\Delta\tau + x(0) \delta(t)\Delta\tau \\ + x(\Delta\tau) \delta(t-\Delta\tau)\Delta\tau + x(2\Delta\tau) \delta(t-2\Delta\tau)\Delta\tau + \dots$$

ifadesinden, girişin bahsedildiği gibi lineer ağırlıklandırılmış sistem impulslerinin süperpozisyonundan elde edildiği görülmektedir. Verilen denklem benzer olarak bu kez de çıkışta aşağıdaki gibi gözlemlenecektir.

$$y(t) = \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n\Delta\tau) h(t-n\Delta\tau)\Delta\tau = \dots + x(-2\Delta\tau) h(t-(-2\Delta\tau))\Delta\tau + x(-\Delta\tau) h(t-(-\Delta\tau))\Delta\tau \\ + x(0) h(t)\Delta\tau + x(\Delta\tau) h(t-\Delta\tau)\Delta\tau + x(2\Delta\tau) h(t-2\Delta\tau)\Delta\tau + \dots$$

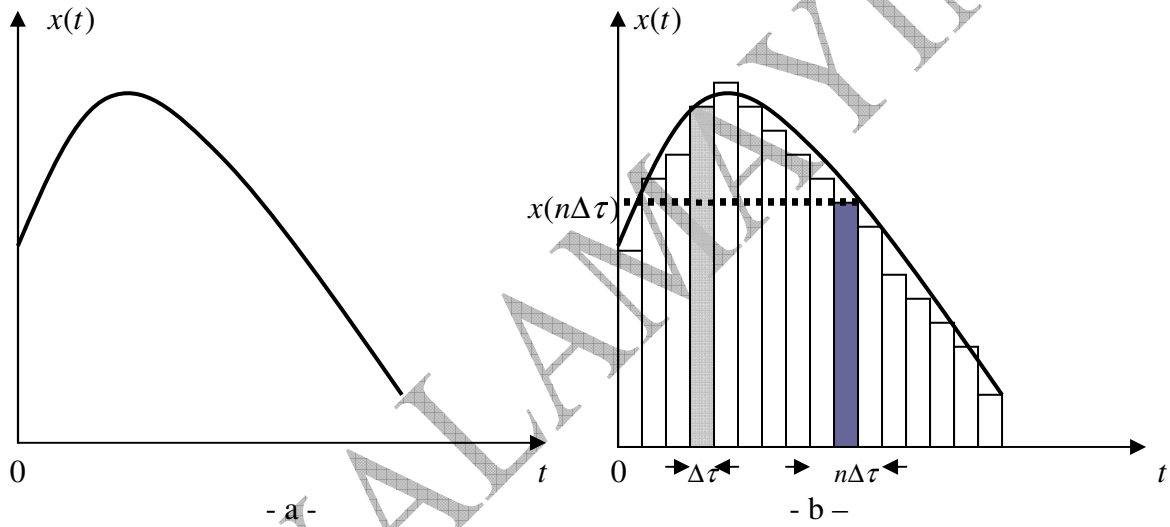
$$y(t) = \dots + x(-2\Delta\tau) h(t+2\Delta\tau)\Delta\tau + x(-\Delta\tau) h(t+\Delta\tau)\Delta\tau + x(0) h(t)\Delta\tau \\ + x(\Delta\tau) h(t-\Delta\tau)\Delta\tau + x(2\Delta\tau) h(t-2\Delta\tau)\Delta\tau + \dots$$

ifadelerinden çıkışın girişten farklı olarak bu kez lineer ağırlıklandırılmış sistem impuls cevaplarının süperpozisyonundan elde edildiği görülmektedir. Yukarıda (a)-(f) arasında yapılan açıklamaların grafik görünümü aşağıda gösterilmiştir.

Harici giriş Sistemcevabının grafik gösterimi

Burada başlangıç koşullarının sıfır alındığı, dışarıdan (zorlamalı) bir girişe karşı sistemin cevabı araştırılacaktır. Bu yüzden *sıfır durum cevabı* (zero-state response) olarak da anılmaktadır. Bunun konvülyasyon yoluyla yapılacağını biliyoruz. Konvülyasyon lineer zamanla değişmez sistem olduğundan, dolayısıyla LTI bir sistemin dışarıdan girişe karşı cevabı, bu prensipler çerçevesinde ele alınacaktır. Böyle bir yaklaşım yukarıda (a)-(f) arasındaki adımlarda ele alınmışken, aşağıda bu safhaların grafik eşdeğerleri, lineer ve zamandan bağımsız prensibe göre tekrarlanmıştır.

İlk olarak örnek $x(t)$ sistem girişi daha önceden bildiğimiz girişin, impulslerle oluşturulduğu $x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \delta(t - \tau) d\tau$ formda göz önüne alınmıştır. Buradan bu gösterimdeki giriş işareti $x(t)$ ile bu impuls fonksiyonuna arasındaki ilişkiyi bu kez $h(t)$ impuls cevabı arasında arayacağız. Bunun için (a)-(f) adımları aşağıdaki grafik gösterimlerle verilmiştir.

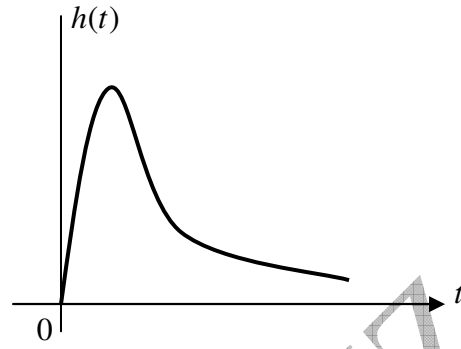
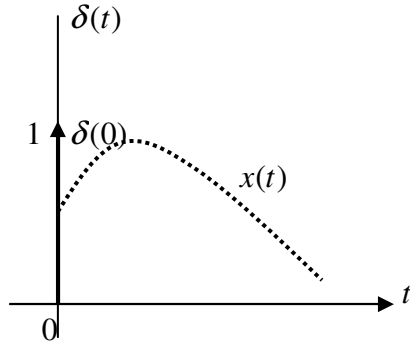


Şekil 7 Giriş işareti ve impulslerle gösterimi

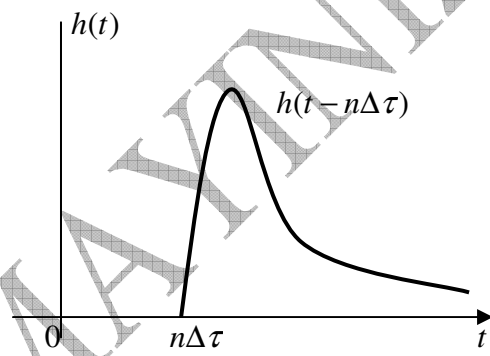
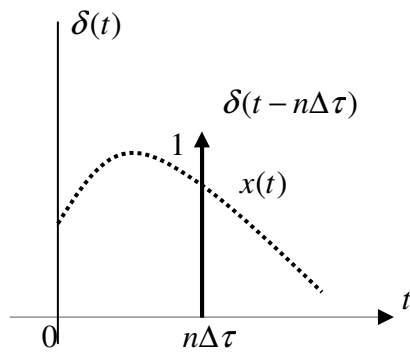
Görüldüğü gibi, (a) da bir işaret veya giriş $x(t)$ işareti (b) de impulslerden elde edilmiştir. Şekil (b) de, her impuls $\Delta\tau$ genişliğinde ve $x(n\Delta\tau)$ yüksekliğinde düşünüldüğünden, dikdörtgenlerin alanları toplamaları (integrasyonu), giriş işaretini oluşturmaktadır. Böyle bir giriş işaretinin zamandan bağımsız özellik olarak belirtilen $(t - n\Delta\tau)$ ile $n\Delta\tau$ ötede bulunan $\Delta\tau$ genişliğindeki impuls ve $x(n\Delta\tau)$ yüksekliğinin (genliğinin) çarpımlarının süperpozisyonu olarak gösterilen

$$\lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n\Delta\tau) \delta(t - n\Delta\tau) \Delta\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \delta(t - \tau) d\tau$$

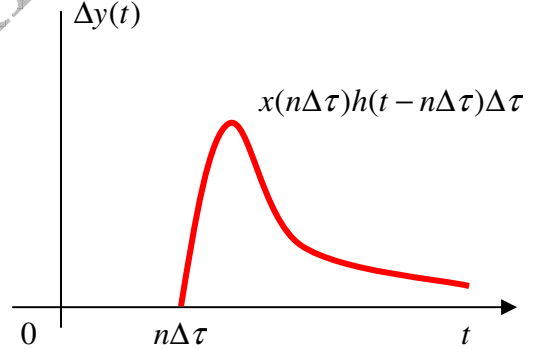
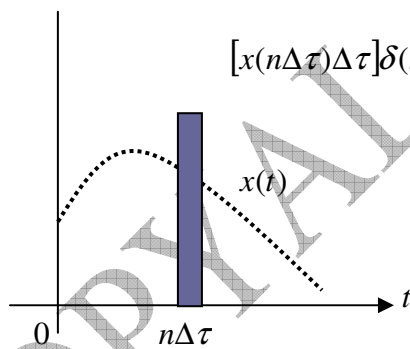
ifadesiyle elde edilebileceğini görmekteyiz. Aşağıda bu yaklaşımın lineerite ve zamandan bağımsızlık özelliklerini gösteren grafik gösterimleri daha açıklayıcıdır.



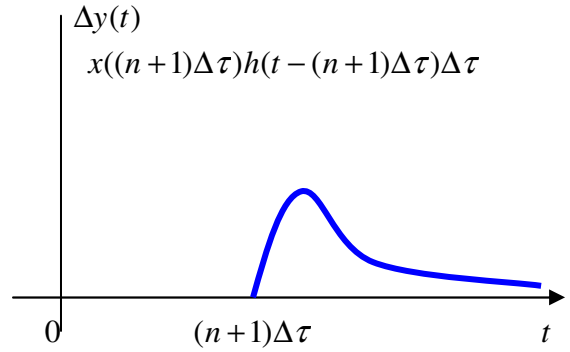
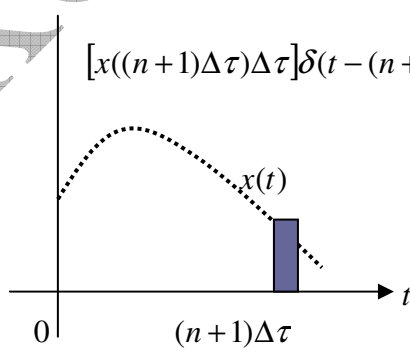
- a -



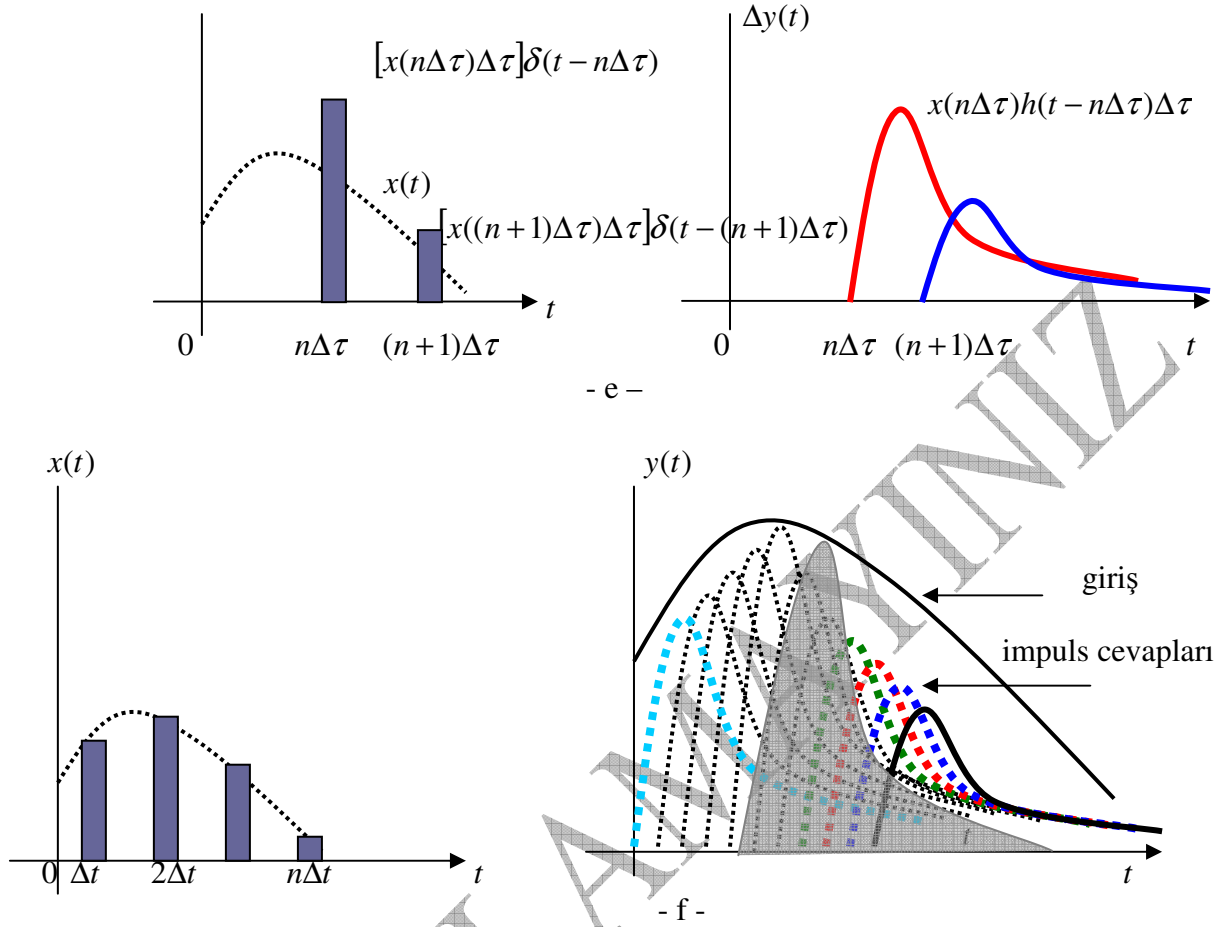
- b -



- c -



- d -



Şekil 8 Toplam cevabının $x(t)$ birim impuls girişi-birim impuls cevaplarıyla elde edilmesi

Burada görüldüğü $x(t)$ sistem girişini gösteren her $\delta(t)$ impuls girişine olan sistem impuls cevabı $h(t)$ olarak şekil (a) da verilmiştir. Buna paralel olarak girişin sonraki değeri olan τ kadar ötedeki değerini gösteren $\delta(t-\tau)$ impuls girişine karşı sistemin impuls cevabı da olarak şekil (b) de görülmektedir. Bu yolla giriş işaretinin “ n ” ci değerine karşılık gelen impuls, $\delta(t-n\Delta\tau)$ olurken, buna karşılık gelen çıkıştaki “ n ”.ci sistem impulse cevabı da $h(t-n\Delta\tau)$ olarak şekil (b) de gösterilmiştir. $n\Delta\tau$ ötedeki giriş ve impuls cevabının $\delta(t-n\Delta\tau)$ ve $h(t-n\Delta\tau)$ değerleri zamandan bağımsız özelliğini göstermektedir.

Öte yandan (c) de lineer sistemin gereğini uygulamak için $n\Delta\tau$ ötedeki impuls, $\Delta\tau$ genişliğinde ve $x(\Delta\tau)$ yüksekliğindeki giriş olarak düşünmek için *çarpımsallık* özelliği uygulanmaktadır. Bu yolla $\delta(t-n\Delta\tau)$ impuls girişi $[x(n\Delta\tau)\Delta\tau]$ ile $[x(n\Delta\tau)\Delta\tau]\delta(t-n\Delta\tau)$ olarak çarpılıyor (ağırlıklandırılıyor). Sonuçta sisteme bu yolla gerçek giriş uygulanmaktadır. Burada önemli olan çarpımsallıkla oluşan impuls girişe karşılık gelen impuls cevabının yazılmasıdır. $h(t-n\Delta\tau)$ noktasındaki impuls cevabında lineerlik gereği aynı $[x(n\Delta\tau)\Delta\tau]$ katsayısıyla çarpılması gerekmektedir. Bundan dolayı $x(n\Delta\tau)h(t-n\Delta\tau)\Delta\tau$ sistem cevabı elde edilmektedir. Bu lineer işlemle giriş durumundaki $\delta(t-n\Delta\tau)$ ve çıkış durumundaki $h(t-n\Delta\tau)$, aynı $[x(n\Delta\tau)\Delta\tau]$ değeriyle çarpılıyor.

Diğer bir deyişle gerek $\delta(t)$ impulsinin gerekse $h(t)$ impuls cevabının genliği girişin ilgili anlardaki genlik değerleriyle belirlenmektedir. Şekil (d) de bu kez, az önce (c) de $n\Delta\tau$ noktası için ağırlıklandırılan giriş ve çıkış impuls cevapları benzer biçimde bu kez, $(n+1)\Delta\tau$ noktası için tekrarlanmaktadır. Buradan da farklı zaman ve genliklerdeki girişlere karşılık gelen, sistem çıkışları elde edilmiştir. Bu durumda, lineerlikle uyumludur.

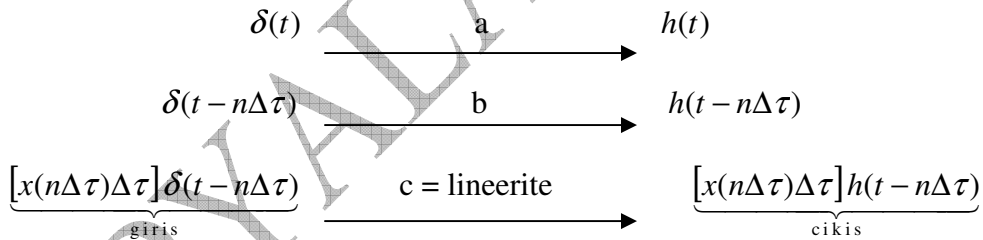
Şekil (e) de ise, daha önce (c) ve (d) de ağırlıklandırılmış (çarpımsallık özelliği) olan sistem giriş ve çıkışlarına bu kez, lineerlik prensibinin süperpozisyon özelliği uygulanmıştır. Basit olarak toplam iki lineer giriş, iki lineer çıkışın toplamı olarak değerlendirilmektedir.

Şekil (f) de ise, sistem girişini oluşturan n tane ağırlıklandırılmış girişlerin toplamına karşılık gelen, sistemin impuls cevaplarıyla gösterilen çıkışlarının toplamı, sistem toplam cevabı olarak elde edilmiştir. Bu şekilde sistem girişi, lineer ağırlıklandırılmış impuls dizisinin süperpozisyonundan, sistem çıkışı da, yine lineer ağırlıklandırılmış impuls cevabı dizisinin süperpozisyonundan oluşan lineer özellik göstermektedir.

Ağırlıklandırılmış sistem impuls cevaplarının lineer süperpozisyonundan oluşan sistem toplam cevabının gösterildiği (f) de, aynı zamanda, lineer ağırlıklandırılmış impulsler dizisinin toplamından oluşan $x(t)$ toplam sistem girişi, (f) de gölgeli şekil ile ifade gösterilmiştir.

Sistemin Lineerliği

Şu ana kadar ele aldığımız ve incelediğimiz sistem aşağıdaki sistemden de görülebileceği gibi



Şekil 9 Lineer sistem ve cevabı

(c) deki özelliğiyle sistemin toplamsallık ve çarpımsallık özelliğini yansıtan lineerlik özelliğinin bulunduğunu görmekteyiz. Burada lineerlik zamandan bağımsız $\delta(t - n\Delta\tau)$ fonksiyonunun, $[x(n\Delta\tau)\Delta\tau]$ ile ağırlıklandırılmak suretiyle, aslında lineer kılınmaktadır.

Örnek

$$\frac{dy}{dt} + 5y(t) = f(t)$$

Sisteminin lineerliğini araştırın.

Çözüm

Lineer koşulların gereği toplamsallık ve çarpımsallığın sağlanıp sağlanamadığına bakalım. Bunun için, $f_1(t)$ girişi için $y_1(t)$ çıkışı, ve $f_2(t)$ girişi için $y_2(t)$ çıkışı düşünülürse,

$$\frac{dy_1}{dt} + 5y_1(t) = f_1(t)$$

$$\frac{dy_2}{dt} + 5y_2(t) = f_2(t)$$

Eğer birinci denklemin k_1 katını, ikinci denklemin k_2 katını aldıktan sonra,

$$k_1 \left[\frac{dy_1}{dt} + 5y_1(t) = f_1(t) \right] = k_1 \frac{dy_1}{dt} + 5k_1 y_1(t) = k_1 f_1(t)$$
$$k_2 \left[\frac{dy_2}{dt} + 5y_2(t) = f_2(t) \right] = k_2 \frac{dy_2}{dt} + 5k_2 y_2(t) = k_2 f_2(t)$$

ifadelerini $f(t) = k_1 f_1(t) + k_2 f_2(t)$ toplam girişine göre sistemin toplam çıkışını araştırmak üzere toplarsak,

$$k_1 \left[\frac{dy_1}{dt} + 5y_1(t) = f_1(t) \right] + k_2 \left[\frac{dy_2}{dt} + 5y_2(t) = f_2(t) \right] = k_1 \frac{dy_1}{dt} + k_2 \frac{dy_2}{dt} + 5k_1 y_1(t) + 5k_2 y_2(t)$$
$$= k_1 f_1(t) + k_2 f_2(t)$$

$$k_1 \frac{dy_1}{dt} + k_2 \frac{dy_2}{dt} + 5k_1 y_1(t) + 5k_2 y_2(t) = k_1 f_1(t) + k_2 f_2(t)$$

$$\frac{d}{dt} [k_1 y_1(t) + k_2 y_2(t)] + 5[k_1 y_1(t) + k_2 y_2(t)] = k_1 f_1(t) + k_2 f_2(t)$$

$$f(t) = k_1 f_1(t) + k_2 f_2(t)$$

$$y(t) = k_1 y_1(t) + k_2 y_2(t)$$

Buna göre sistem girişi $f(t) = k_1 f_1(t) + k_2 f_2(t)$ olarak girişlerin toplamı olarak uygulanırsa, sistem çıkışı da aynı katsayıların lineer kombinasyonu olarak $y(t) = k_1 y_1(t) + k_2 y_2(t)$ elde edilmiştir. Bu da, lineerliği sağlamaktadır. Dolayısıyla verilen $\frac{dy}{dt} + 5y(t) = f(t)$ sistemi lineerdir.

Sistemin Zamandan Bağımsızlığı

Şu ana kadar ele aldığımız sistemlerin toplamsallık ve çarpımsallık özelliğini sağlaması dolayısıyla, lineer olduklarını vurguladık. Ve yukarıdaki yaklaşımlarımızda da sürekli olarak **lineer ağırlıklandırılmış süperpozisyon** (kombinasyon) ifadeleriyle de sürekli olarak, lineerliğe (doğrusallığa) vurgu yaptık. Ancak zamandan bağımsızlık durumunu lineerite kadar vurgulamadık. Ancak az önce yukarıda ele aldığımız sistem girişlerinin “lineer ağırlıklandırılmış impuls kombinasyonları ve lineer ağırlıklandırılmış impuls dizisi kombinasyonları” gibi ifadelerin hepsinde gerek girişin gerekse çıkışın hep bir $n\Delta\tau$ durumuna dikkat çekti. Burası çok önemlidir. Bu anlamda $n\Delta\tau$ ifadesi için “ $n\Delta\tau$ anı veya $n\Delta\tau$ zamanı” dememeye özen göstermeliyiz. **Çünkü $n\Delta\tau$ ile kastedilen, pozisyon veya bulunan yer veya noktadır, zaman değildir.** Çünkü zaman olarak alınırsa, sistem çıkışının, girişteki gecikmeden değiştiği anlaşılabilir. Oysa burada girişteki $n\Delta\tau$ kadar gecikmenin, çıkışta da aynı miktardaki gecikmeye karşılık geldiği vurgulanmak istenmektedir. Buda, girişteki $n\Delta\tau$ noktasının, pozisyonu veya gecikmesinin, çıkışta da aynı gecikmeye karşılık değerini vurgulamaktadır. Dolayısıyla şu ana kadar değerlendirmelerimiz hep girişin $n\Delta\tau$ noktalarındaki, değerleri ve bu değerlere karşılık sistem impuls cevapları olarak göz önüne alındığından, aslında her defasında zamandan bağımsızlığa vurgu yapılmıştır. Dolayısıyla karşımıza gerek $\delta(t - n\Delta\tau)$ gerekse $h(t - n\Delta\tau)$ olarak çıkan ve bunlara göre giriş ve çıkışlarını hesapladığımız sistemler, lineerlik özelliklerinin yanında aynı zamanda zamandan bağımsızdırlar da (time-invariant). Bu yüzden $n\Delta\tau$ terimi ile an veya zamanı değil, noktayı, pozisyonu ve gecikmeyi vurguladığımız için, dolaylı olarak zamandan bağımsız sistemlerden söz etmiş olmaktadır.

Eğer sistem zamandan bağımsız olmasaydı, zamandan bağımsız $y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau$ ifadesi yerine

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t, \tau) d\tau$$

söz konusu olacaktı. Burada zamana bağımlılığı gösteren $h(t, \tau)$ terimi, sistemin τ noktasındaki giriş impulsine karşılık gelen t anındaki sistemin impuls cevabı olarak yorumlanır.

Sistem cevabının birim impuls girişi ve birim impuls cevabına göre yorumlanması

Sistem girişi

$$x(t) = x(t) * \delta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \delta(t - \tau) d\tau$$

ve sistem çıkışı

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau$$

İse, eğer bir an için τ anındaki sistemin girişine karşılık gelen çıkışı hesaplamak istiyorsak, öncelikle τ noktasındaki $x(t)$ girişinin değerine karşılık gelen impuls cevabını bulmamız gerekiyor. Bu, $h(t - \tau)$ değerini hesaplamamızı gerektirir. Bunun için τ noktasındaki giriş olarak $x(\tau) \delta(t - \tau)$ ifadesini düşünersek, bunun $y(t)$ deki giriş ifadesine yerleştirirsek,

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} [x(\tau) \delta(t - \tau)] h(t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \delta(t - \tau) h(t - \tau) d\tau$$

veya

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \delta(t - \tau) h(t - \tau) d\tau$$

olarak elde edilen denklemde açıktır. Buna göre τ noktasındaki $[x(\tau) \delta(t - \tau)]$ girişindeki sistem girişine karşılık gelen sistem impuls cevabı dikkate alınmaktadır. Yani rastgele herhangi bir nokta değil, girişin τ noktasındaki genliğiyle belli değerine karşılık gelen sistemin aynı noktadaki değeri, sistem impuls cevabı olarak dikkate alınmaktadır. Bu şekilde sistem çıkışının aynı zamanda impuls dizisine olan bağlantısı daha net olarak ortaya çıkmaktadır.

Impuls Cevabının LTI Sistemlerin Nedensellik ve Kararlılığındaki Rolü

Yukarıda detaylarıyla ele alınan impuls cevabının LTI sistemlerindeki önemi nedensellik (causality) ve kararlılık başlıkları adı altında ortaya çıkmaktadır. İmpuls cevabı yoluyla nedenselliğin ve kararlılığın nasıl yorumlanabileceğini kısaca ele alacağız.

1. LTI sistemlerde Nedensellik

Lineer zamandan bağımsız LTI sistemin $h(t)$ impuls cevabı, negatif girişler için sıfır olmalıdır. Yani sisteme giriş olmadığı durumlarda sistemin cevap üretmemesi gerekiyor.

$$h(t) = 0, \quad t < 0$$

Bunu teyit etmek üzere LTI sistem cevabını gösteren

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau$$

genel ifadesi göz önüne alınabilir. Buna göre $t < 0$ durumunda sistem girişini oluşturan $\delta(t)$ girişi, $\delta(t < 0) = 0$ olacaktır. Bunun anlamı, $t < 0$ için sisteme giriş yapılmayacağıdır. Eğer sisteme giriş yapılmayacaksa, bu durumda da $\delta(t) \rightarrow h(t)$ gereği sistemin çıkış oluşturmaması mümkün olmayacaktır. Diğer bir deyişle $t < 0$ için sistem girişi olan impuls sıfır olduğundan ($t < 0$ için $\delta(t) = 0$), impulslerle ilgili olan $h(t)$ sistem impuls cevabının da $t < 0$ için sıfır olacağı çok açıktır ($t < 0$ için $h(t) = 0$). Bundan dolayı, sisteme giriş yapılmadan sistemin cevap üretmeyeceği kabul edilmektedir. Bu durumu tanımlayan $t < 0$ için $h(t) = 0$ ifadesi, bir gerçeklik ve nedensellik tanımı olarak kabul edilmiştir.

2. Impuls cevabı ve kararlılık

Lineer zamandan bağımsız LTI sistemlerin kararlılığının sınırlı bir $x(t)$ girişine karşılık ($|x(t)| < k_1$), sınırlı bir çıkış elde edilmesine bağlı olduğunu görmüştük ($|y(t)| < k_2$). Sistem toplam çıkışının sistem impuls cevabıyla direkt bağlantılı olduğunu yukarıdaki bilgilerimizden bilmekteyiz. Buna göre sınırlı bir çıkışın elde edilmesinin sınırlı bir impuls cevabından geçtiğini görmekteyiz. Bu yüzden lineer zamandan bağımsız LTI sistemin kararlı olabilmesi için, $h(t)$ sistem impuls cevabının sınırlı, diğer bir deyişle sonlu veya integre edilebilir olması gerekiyor.

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)| d\tau < \infty$$

Diğer bir deyişle bu koşulun sağlanması aynı zamanda sistem giriş ve çıkışında sınırlı olması anlamına gelecektir. Dolayısıyla bu koşul sağlandığı sürece girişi sınırlı kabul edilen LTI sistemin çıkışında sınırlı olacağından, bunların sonucunda da sistem kararlı olacaktır.

LTIC Sistemler ve Konvülyasyon

Sürekli sistemin girişi $x(t)$, sistem impuls cevabı $h(t)$ arasında, $y(t)$ sistem cevabını oluşturmak üzere kullanılan genel

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t - \tau)d\tau$$

konvülyasyon denkleminin, görüldüğü gibi ağırlıklandırılmış ve kaydırılmış içeriğiyle sürekli lineer zamandan bağımsız (LTIC) sistemleri gösterdiğini biliyoruz. Bu denklem yardımıyla, tüm LTI sistemlerin toplam (integrasyon) özelliğindeki konvülyasyon denklemiyle gösterilebileceğini söyleyebiliriz. Bu genel gösterimden, sürekli LTI sistemlerin özel durumları (nedensellik : $h(t) = 0, t < 0$) elde edilebilir.

SİSTEMLERİN CEVAPLARI

Bir sistemin cevabı girişindeki işaretinin özelliğine göre farklı kategorilerde ortaya çıkar. Sistem çıkışındaki cevaplar bazen girişin olduğu, bazen olmadığı durumlardaki cevaplar olabileceği gibi, bazen de her iki durumdaki cevapların toplamından elde edilen toplam cevap olarak ortaya çıkmaktadır. Genel anlamda bir sistemin cevapları aşağıdaki gibi sınıflandırılabilir.

1. Sıfır giriş cevabı (zero-input response)
2. Sıfır durum cevabı (zero-state response)
3. Toplam cevap
4. Natural cevap
5. Zorlanmış cevap (forced response)
6. Geçici cevap (transient response)
7. Kararlı hal cevabı (steady-state response)
8. Periyodik cevap

Sıfır giriş cevabı, sistemin başlangıç koşullarına göre, sıfır-durum cevabı, başlangıç koşullarının olmadığı, giriş anındaki sistem cevabı, toplam cevap ise her ikisinin toplamından oluşmaktadır. **Natural cevap**, sıfır-giriş ve sıfır-durum cevaplarının kısmi toplamından (aynı karakteristik modların toplamından) oluşan cevaplar iken, **zorlanmış cevap** yalnızca sistem girişi ile oluşan (başlangıç koşullarının göz önüne alınmadığı) bir sistem cevabıdır. Her bir sistem cevabının çözümü farklıdır.

Sistem geçici cevabı, sistemin başlangıç kalkış anından itibaren belli bir süre sistemin oturmaya başladığı ana kadar geçen süredeki sistemin cevabıdır. **Kararlı hal cevabı** ise, geçici cevaptan itibaren sistemin kararlı halde sürdürdüğü cevaptır. **Periodik cevap** ise, sistemin sinusoidler gibi periodik girişlere verdiği cevaptır. Tüm sistem cevaplarının diferansiyel denklem çözümlerine dayandığı, ve hepsi için sonuçta sistemin toplam cevabının bulunması esastır. Bu yüzden sistemin toplam cevabını verilen seçeneklerden aşağıdaki gibi oluşturabiliriz.

Toplam cevap = Sıfır-giriş cevabı + Sıfır-durum cevabı

Toplam cevap = Natural cevap + Zorlanmış cevap

Toplam cevap = Geçici cevap + Kararlı hal cevabı

Aşağıda bu doğrultuda sistemlerin cevaplarından bazıları ele alınmıştır.

LTI Sistemlerin Özelliklerinin Sistem Impuls Cevaplarıyla Yorumlanması

Şu ana kadar LTI sistemlerin bellek, causalite, zamanla değişmezlik ve stabilite gibi özellikleri sistem davranışlarının incelenmesinde önemli parametre olan sistem impuls cevabı, $h(t)$ dikkate alınarak yapılacaktır. Bir sistemin toplam cevabı iki cevabın toplamından oluşur.

Sistem cevabı = sıfır - giriş cevabı + sıfır - durum cevabı

Sıfır-giriş cevabı, $t < 0$ olmak üzere, sıfır anından önce sistemin sahip olduğu bir değerdir. Dolayısıyla başlangıç koşullarıyla ilgilidir. Bu durumda çözüm olarak diferansiyel denklemlere dayalı yöntemler kullanılmaktadır. Sıfır-durum cevabı ise, başlangıç koşullarının dikkate alınmadığı, o anki mevcut girişe göre sistemin verdiği reaksiyon olup, konvülsiyon işlemiyle belirlenmektedir. Aşağıda dikkate alacağımız sistem özellikleri ikinci durumu göz önüne alan ve bunun en önemli parametresi olan $h(t)$ sistem impuls cevabına göre analiz edilecektir.

KONVÜLASYON

Konvülyasyon (convolution) yukarıdaki sistem özelliklerinden de görülebileceği gibi LTI sistemlerinin cevaplarının aranması durumunda baş vurulan önemli bir tekniktir. Girişi $x(t)$ ve sistem impuls cevabı $h(t)$ olan bir sistemin çıkışını gösteren $y(t)$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t - \tau) d\tau = x(t) * h(t)$$

bağıntısıyla hesaplanmaktadır. Bağintıdan da istifade ederek bu bölüm itibariyle bir LTI sistemin cevabının nasıl hesaplanacağı üzerinde durulacaktır. Sistem cevabının normalde

$$\text{Sistem cevabı} = \underbrace{\text{sıfır - giriş cevabı}}_{\text{diferansiyel denklemler}} + \underbrace{\text{sıfır - durum cevabı}}_{\text{konvülyasyon}}$$

şeklindeki iki cevabın toplamından oluştuğu göz önüne alınırsa, sıfır-giriş cevabı, $t < 0$ olmak üzere, sıfır anından önce sistemin sahip başlangıç koşullarıyla ilgili cevabı olup, daha çok diferansiyel denklemlerle hesaplanmaktadır.

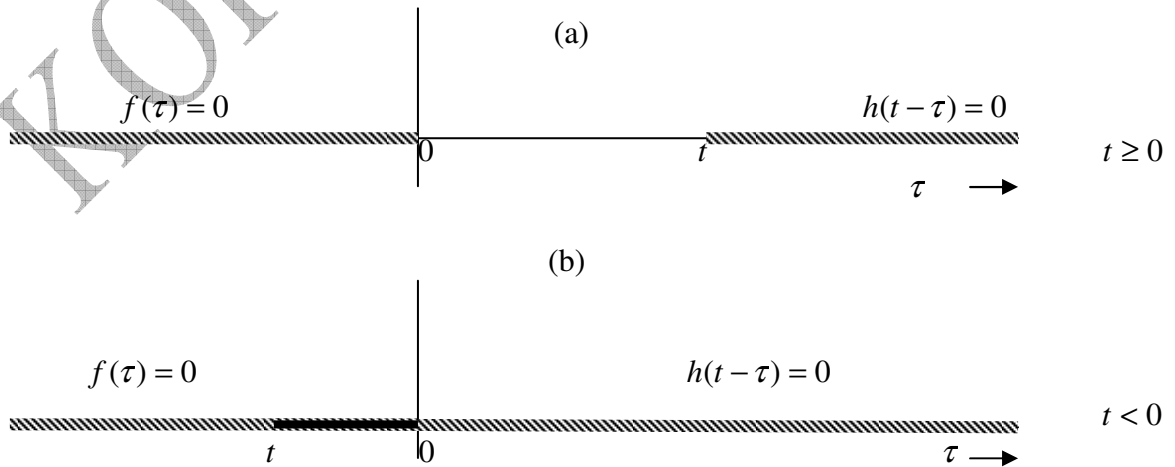
Sıfır-durum cevabı ise, başlangıç koşullarının dikkate alınmadığı, o anki mevcut girişe göre sistemin verdiği reaksiyon olup, konvülyasyon işlemiyle belirlenmektedir. Burada biz bu ikinci ifadeyle belirtilen cevabın üzerinde durarak, konvülyasyon olarak bilinen bir çözüm tekniği sunacağız.

Sıfır Durum Cevabı – Konvülyasyon ve Nedensellik

Bilindiği gibi, sistemin toplam cevabı sıfır-giriş ve sıfır-durum cevaplarının toplamından oluşmaktaydı. Sıfır giriş cevabı, başlangıç koşullarını göz önüne alan ve sistem girişinin olmadığı ($f(t)=0$) duruma göre, genel olarak karakteristik modları içeren diferansiyel denklemlerle çözülmekteydi. Sistem sıfır-durum cevabı ise, başlangıç koşullarının sıfır (olmadığı), sisteme dışarıdan yapılan $f(t)$ girişine göre hesaplanan sistem cevabıydı. Bunun hesaplanmasında lineer zamanla değişmeyen (LTI) sistem cevabı üzerine kurulu

$$y(t) = f(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) h(t - \tau) d\tau$$

biçimindeki konvülyasyon işleminden yararlanıldığını biliyoruz. Bu denklemin anlaşılabilirliği için yukarıda tanımlanan “öteleme” özelliklerine ek olarak sistemin causal (nedensel) özelliği ($h(t)=0, t < 0$) göz önüne alınarak, konvülyasyon integralin sınırları araştırılacaktır. LTI sistemlerde nedensel (causal) özelliğin genel anlamı, sisteme girişi olmadığı sürece sistemin cevap üretmemesidir. Bununla sisteme giriş yapıldığında sistemin cevap üretmesi beklenmektedir. Bunun sağlanması adına konvülyasyon integralini oluşturan $f(t)$ giriş ve $h(t)$ sistem impuls cevabının da nedensel özellikte olması gerekir. Diğer bir deyişle her iki fonksiyonun işaret açısından nedensel işaretler (başlangıç noktaları $t = 0$ dan başlayan) olması gerekecektir. Bu açıdan konvülyasyon integrali göz önüne alındığında $f(\tau)=0, \tau < 0$ nedensel özelliğin olması gerektiği görülecektir. Bunu aşağıdaki şekil (a) dan da teyit edebiliriz. Ayrıca yine nedensel özellik ile ilgili olarak sistem impuls cevabında $h(t-\tau)=0, t-\tau < 0$ olması gerekecektir. Bunun için gerek şartın $t < \tau$ olması gerektiğini yine şekil (a) dan görebilmekteyiz. Şekil üzerindeki bir “ t ” anından itibaren eğer τ daha büyük değerler alıyorsa ($t < \tau$), bunun sonucu olarak da nedensel özellikten dolayı $h(t-\tau)=0$ olacaktır. Şekil (a) da $(-\infty, 0)$ ve (t, ∞) aralıklarında konvülyasyon integralinin sıfır olduğu, diğer bir deyişle bu aralıklarda LTI sistemin bir cevap üretemeyeceğini görmekteyiz. Sıfır aralıkları şekilde taralı çizgilerle gösterilmiştir. Buna göre yalnızca $(0, t)$ aralığında giriş ve sistem impuls cevabı nedensel değerler alabildiklerinden, sistemin konvülyasyon integrali yoluyla bir cevap üretebileceğini gözlemlemekteyiz. Bunları $t \geq 0$ koşuluna göre iddia edebilmekteyiz.



Şekil 10 Konvülyasyon integralinin limitleri

Diğer yandan bir de konvülyasyon integralinin $t < 0$ kriterine göre yorumunun alternatif olarak şekil (b) ile olan durumu vardır. Bu şekle göre $t < 0$ olduğu sürece hem giriş $f(\tau)$ hemde impuls cevabı $h(\tau)$ causal (nedensel) özellikte olmayacağından τ ile gösterilen zamanın tamamında gerek $f(\tau) = 0$ gerekse $h(t - \tau) = 0$ olacağından sistemden bir çıkış alınmayacaktır. Diğer bir deyişle bu şartlar altında sistemin cevap üretebileceği istisnai bir aralık mevcut olmayacaktır. Önemli belirteç olan “ t ” zamanının şekil (b) den de görüldüğü gibi (koyu çizgili bölge) negatif eksen de oluşu ($t < 0$) dolayısıyla, nedensel özellik hiçbir zaman sağlanamayacağı için, sistemde de bir cevap elde edilmeyecektir. Bunların neticesinde toplamak gerekirse LTI sistemin cevabı yalnızca $(0, t)$ aralığında mevcuttur.

$$y(t) = f(t) * h(t) = \int_0^t f(\tau) h(t - \tau) d\tau \quad t \geq 0$$

Bunun anlamı bu küçük aralığın dışındaki tüm anlarda LTI sistemin cevabı sıfır olacaktır.

$$y(t) = f(t) * h(t) = \int_{-\infty}^0 f(\tau) h(t - \tau) d\tau = 0, \quad t < 0$$

Sistemlerin Nedenselliği : $t < 0$ için $h(t) = 0$: Giriş Yapılmadan Sistem Cevap Üretmez

Yukarıda ele alınan nedensellik yaklaşımını, biraz daha derinleştirmemiz mümkündür. Hatırlanacağı gibi sistemlerin nedenselliği olarak $h(t)$ sistem impuls cevabının $t < 0$ için sıfır olacağını belirtmiştik ($t < 0$ için $h(t) = 0$). Bundan sisteme giriş yapılmadan sistemin cevap üretmeyeceğinin anlaşılması gerekeceği de ayrıca vurgulanmıştı. Şimdi “sisteme giriş yapılmadan sistemin cevap üretmeyeceği” gerçeğini biraz açmamız gerekiyor. Hatırlanacağı gibi bir sistem girişi

$$x(t) = x(t) * \delta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \delta(t - \tau) d\tau$$

biçiminde impulslerden oluşmaktaydı. Sisteme girişler impulsler olarak uygulanmaktaydı. Buna göre sistemin girişi $\delta(t)$, çıkışı ise bu impulse karşılık gelen $h(t)$ impuls cevabı olacaktı.

$$\delta(t) \rightarrow h(t) \text{ ve } \delta(t - \tau) \rightarrow h(t - \tau)$$

Buna göre giriş impulslerin toplamı, çıkış ise impuls cevaplarının toplamı olarak düşünülecekti.

$$x(t) = \sum x(\tau) \delta(t - \tau) \rightarrow (\sum x(\tau) \delta(t - \tau)) h(t - \tau) = \sum x(\tau) h(t - \tau) = y(t)$$

Görüldüğü gibi sistem girişlerini oluşturan $\delta(t)$ impuls ve $h(t)$ impuls cevabı, $x(t)$ girişinin genliğine göre değişim göstermektedirler (bir tür genlik modülasyonu). Buna göre sistemin girişleri $\delta(t)$ impuls dizisi olacağından

$$\delta(t) = \begin{cases} 1 & t = 0 \\ 0 & t \neq 0 \end{cases}$$

Buna göre $t < 0$ durumunda sistem girişini oluşturan $\delta(t)$ girişi, $\delta(t < 0) = 0$ olacaktır. Bunun anlamı, $t < 0$ için sisteme giriş yapılmayacağıdır. Eğer sisteme giriş yapılmayacaksa, bu durumda da $\delta(t) \rightarrow h(t)$ gereği sistemin çıkış oluşturmaları mümkün olmayacaktır. Diğer bir deyişle $t < 0$ için sistem girişi olan impuls sıfır olacağından ($t < 0$ için $\delta(t) = 0$), impulslerle ilgili olan $h(t)$ sistem impuls cevabının da $t < 0$ için sıfır olacağı çok açıktır ($t < 0$ için $h(t) = 0$). Bundan dolayı, sisteme giriş yapılmadan sistemin cevap üretmeyeceği kabul edilmektedir. Bu durumu tanımlayan $t < 0$ için $h(t) = 0$ ifadesi, bir gerçeklik ve nedensellik tanımı olarak kabul edilmiştir.

Örnek

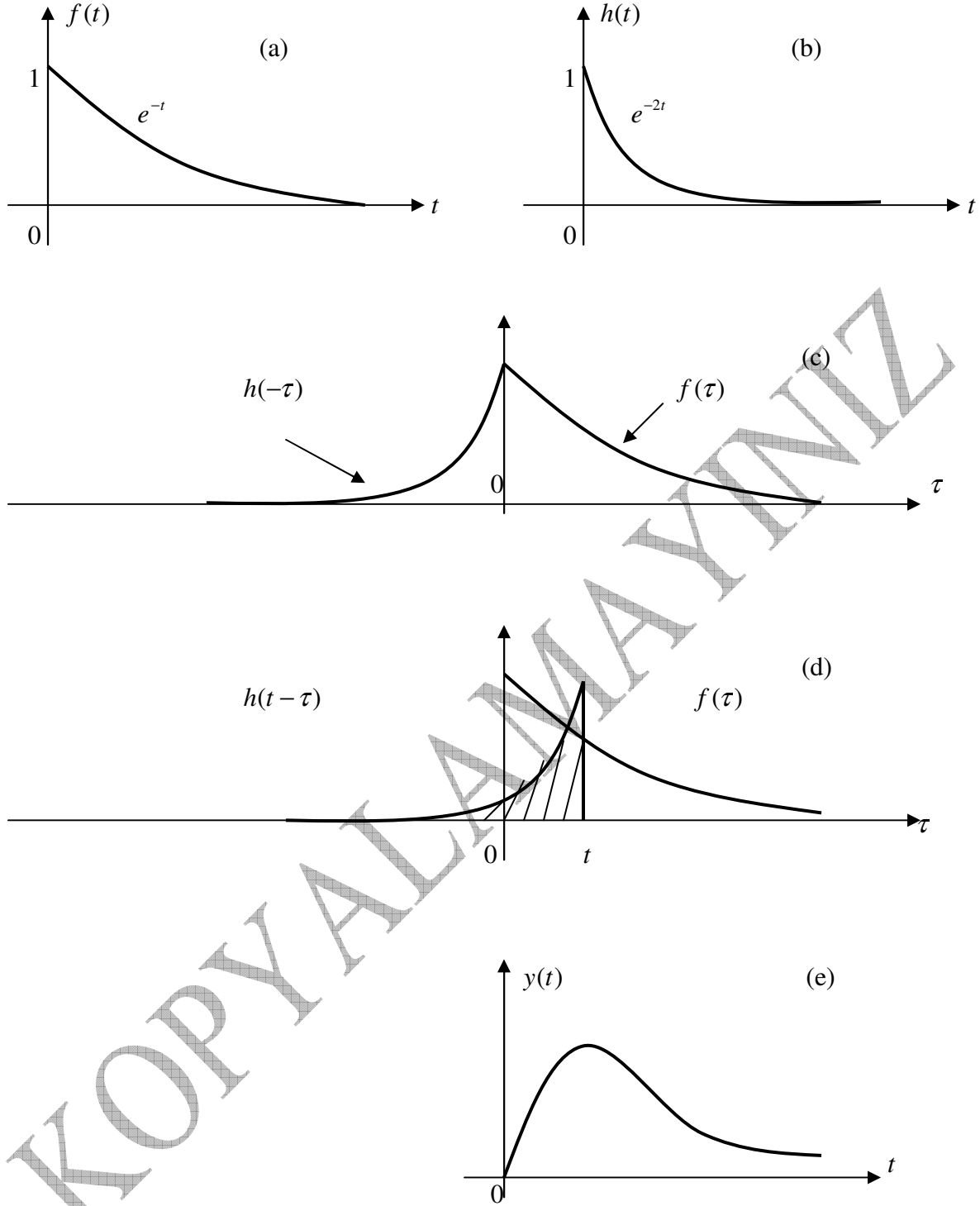
LTI sistem girişi $f(t) = e^{-t}u(t)$ ve sistem impuls cevabı $h(t) = e^{-2t}u(t)$ ise $y(t)$ sistem cevabını bulun.

Çözüm

Sistem cevabı

$$y(t) = f(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) h(t - \tau) d\tau$$

konvülyasyon integrali ile hesaplanabilir. Buna göre $f(t)$ ve $h(t)$ aşağıda şekil (a) ve (b) deki gibi göz önüne alınır.



Şekil 11 $e^{-t} * e^{-2t}$ Konvülasyonu

Bunların ışığında nedensel (causal) sistem gereği $f(t)$ ve $h(t)$ nedensel işaretler olduklarından $t < 0$ için sistem impuls cevabı $h(t) = 0$ ve sistem cevabı $y(t) = 0$ alınır. Ancak $t \geq 0$ için

$$y(t) = f(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) h(t-\tau) d\tau \quad t \geq 0$$

$f(t) = e^{-t}u(t)$ ve sistem impuls cevabı $h(t) = e^{-2t}u(t)$ değerleri konvülsiyon integralinde yerine yazılırsa, şekil (d) den integral limitleri $u(t)$ birim basamak fonksiyonundan dolayı önce $(0, \infty)$ sonra da integrasyonun geçerli olduğu asıl $(0, t)$ göz önüne alınarak gösterilen taralı alan için hesaplamalar yapılır.

$$\begin{aligned} y(t) = f(t) * h(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) h(t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\tau} u(\tau) e^{-2(t-\tau)} u(\tau) d\tau = \int_0^{\infty} e^{-\tau} e^{-2\tau} d\tau = \int_0^t e^{-\tau} e^{-2(t-\tau)} d\tau \\ &= \int_0^t e^{-2t+2\tau-\tau} d\tau = e^{-2t} \left[\int_0^t e^{\tau} d\tau \right] = e^{-2t} [e^t - 1] \\ &= e^{-t} - e^{-2t} \quad t \geq 0 \end{aligned}$$

$$y(t) = (e^{-t} - e^{-2t})u(t)$$

biçiminde bulunur. Görüldüğü gibi buradan nedensel sistemden dolayı $t < 0$ için $h(t) = 0$, dolayısıyla sistem cevabı $y(t) = 0$ olduğu sonuç ifadesinden de teyit edilebilmektedir. Bunu şekil (e) den de görebilmekteyiz.

Konvülsiyon özellikleri

1. Impuls fonksiyonun birim eleman özelliği

$$x(t) * \delta(t) = x(t)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \delta(t - \tau) d\tau = x(t)$$

Bir fonksiyonun birim impuls fonksiyonuyla konvülsiyonu kendisini oluşturur.

2. Değişme özelliği

$$x(t) * h(t) = h(t) * x(t)$$

3. Birleşme özelliği

$$\{x(t) * h_1(t)\} * h_2(t) = x(t) * \{h_1(t) * h_2(t)\}$$

4. Dağılma özelliği

$$x(t) * \{h_1(t) + h_2(t)\} = x(t) * h_1(t) + x(t) * h_2(t)$$

5. Öteleme özelliği

$$x(t) * h(t) = c(t)$$

$$x(t) * h(t - T) = c(t - T)$$

$$x(t - T) * h(t) = c(t - T)$$

$$x(t - T_1) * h(t - T_2) = c(t - T_1 - T_2)$$

6. Çapraz korelasyon (cross correlation)

$$x(t) * h(-t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(-(t - \tau)) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(\tau - t) d\tau$$

7. Oto korelasyon (auto correlation)

$$x(t) * x(-t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) x(-(t - \tau)) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) x(\tau - t) d\tau$$

8. Zaman domeninde konvülyasyon

$$x(t) * h(t) = X(\omega)H(\omega)$$

9. Frekans domeninde konvülyasyon

$$\frac{1}{2\pi} X(\omega) * H(\omega) = x(t)h(t)$$

Örnek

Sistem impuls cevabı $h_1(t) = e^{-7t}u(t)$ olan sistemin cevabını

a) $x_1(t) = e^{-2t}u(t)$ girişi için

b) $x_2(t) = e^{-4t+6}u(t-3)$ girişi için hesaplayın.

c) $x_2(t) = e^{-4t+6}u(t-3)$ girişi ve $h_2(t) = e^{-7t+14}u(t-2)$ impuls cevabı için sistem cevabını bulun.

Çözüm

a) LTI sistem cevabı konvülyasyon integrali ile hesaplanacaktır.

$$\begin{aligned} y_1(t) &= x_1(t) * h_1(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau) h(t-\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} [e^{-2\tau}u(\tau)][e^{-7(t-\tau)}u(t-\tau)] d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} [e^{-2\tau}u(\tau)][e^{-5(t-\tau)}u(t-\tau)] d\tau \\ &= \int_0^t [e^{-2\tau}][e^{-7(t-\tau)}] d\tau = \int_0^t e^{-2\tau} e^{-7t} e^{7\tau} d\tau = \int_0^t e^{5\tau} d\tau = \frac{e^{5\tau}}{5} \Big|_0^t \\ &= \frac{e^{5t}}{5} (e^{5t} - e^0) = \frac{e^{5t}}{5} (e^{5t} - 1^0) = \frac{1}{5} (e^{5t} - e^{-7t}) \end{aligned}$$

$$y_1(t) = \frac{1}{5} (e^{-2t} - e^{-7t})u(t)$$

b) $x_2(t) = e^{-4t+6}u(t-3)$ girişi düzenlenirse,

$$x_2(t) = e^{-4t+6}u(t-3) = e^{-2(t-3)}u(t-3) = x_1(t-3)$$

olduğu görülecektir. Buna göre konvülyasyonun $x(t-T) * h(t) = c(t-T)$ öteleme özelliğinden eğer $x_1(t) = e^{-2t}u(t)$ girişi için $y_1(t)$ hesaplandıysa, buna göre

$$y_2(t) = y_1(t-3)$$

olacaktır. Buna göre ikinci sistem cevabını hesaplamayı sonuçlandırabiliriz.

$$y_2(t) = y_1(t-3) = \frac{1}{5} (e^{-2(t-3)} - e^{-7(t-3)})u(t-3)$$

c) Dikkat edilirse $x_2(t) = x_1(t-3)$ iken, bu kez de $h_2(t) = h_1(t-2) = e^{-7(t-2)}u(t-2)$. Buradan ilgili $x(t-T_1) * h(t-T_2) = c(t-T_1-T_2)$ konvülyasyon özelliği hatırlanırsa sistem cevabı bu kez,

$$y_2(t) = y_1(t-3-2) = y_1(t-5) = \frac{1}{5}(e^{-2(t-5)} - e^{-7(t-5)})u(t-5)$$

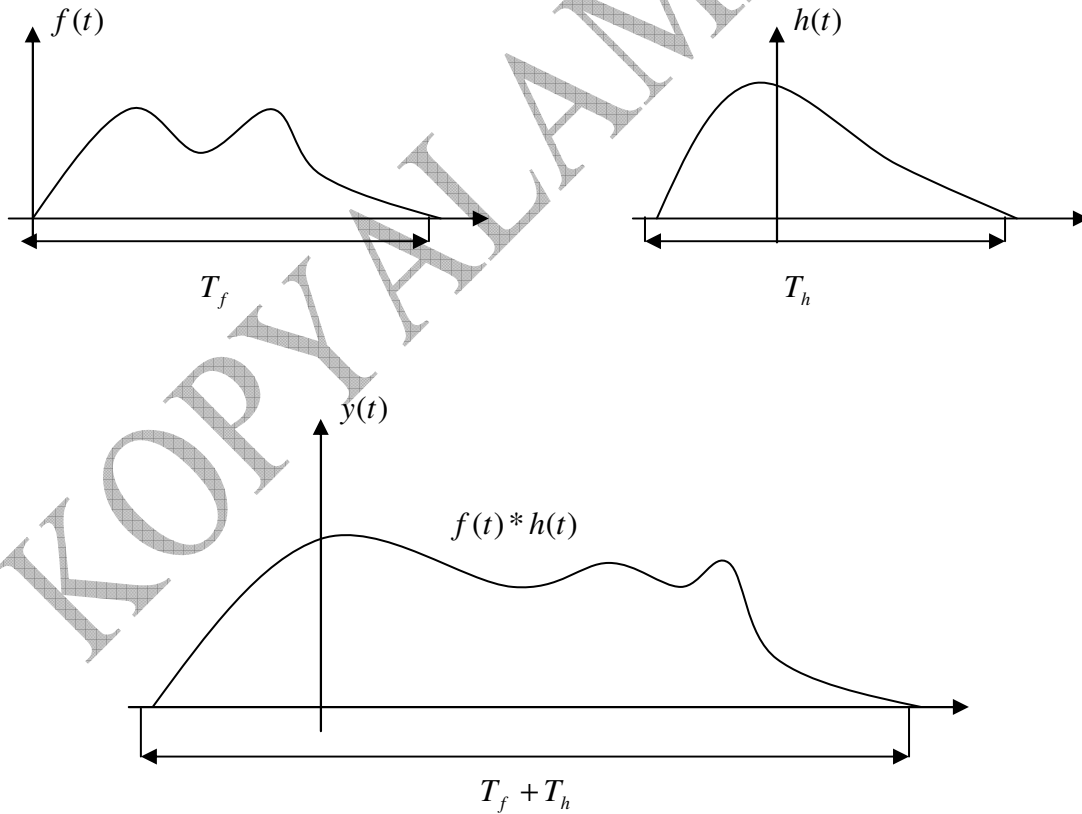
Konvülyasyon genişliği

$$y(t) = f(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)f(\tau) d\tau$$

İfadesine göre sistem giriş işaretinin $f(t)$ genişliği T_f sn ve sistem impuls cevabının $h(t)$ süresi (zaman sabiti) T_h ise, sistem toplam cevap $y(t)$ süresi T_y ,

$$T_y = T_f + T_h$$

olarak, giriş ve impuls cevap sürelerinin toplamından oluşacaktır. Bu durum aşağıda şekil üzerinde de gösterilmiştir.



Şekil 12 Konvülyasyon genişliği

Örnek

Verilen LTI sistemin cevabını hesaplayın konvülyasyon integrali ile hesaplayın.

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} [e^{-5\beta} u(\beta - 4)] [e^{-(t-\beta)} u(t - \beta)] d\beta$$

Çözüm

İntegral yine β değişkenine göre alınacağından ($d\beta$), birim basamak fonksiyonu olarak $u(\beta - 4)$ ve $u(t - \beta)$ fonksiyonlarının $t \geq \beta \geq 4$ olduğu sürece $u(\beta - 4) = u(t - \tau) = 1$ olacaktır. Bundan dolayı integralin sınırlarının $\beta = (4, t)$ olarak alınması gereği ortaya çıkar. Bunları yerinde yazarak devam edersek,

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} [e^{-5\beta} u(\beta - 4)] [e^{-(t-\beta)} u(t - \beta)] d\beta = \int_4^t [e^{-5\beta}] [e^{-(t-\beta)}] d\beta = \int_4^t e^{-5\beta} e^{-t} e^{\beta} d\beta = e^{-t} \int_4^t e^{-4\beta} d\beta \\ &= -\frac{1}{4} e^{-t} (e^{-4\beta})_4^t = -\frac{1}{4} e^{-t} (e^{-4t} - e^{-4 \times 4}) = -\frac{1}{4} e^{-5t} + \frac{1}{4} e^{-(t+16)} = -\frac{1}{4} (e^{-5t} - e^{-(t+16)}) u(t) \end{aligned}$$

Örnek

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} [e^{-5(t-\beta)} u(t - \beta)] d\beta$$

İntegral β değişkenine göre alınacağından ($d\beta$), birim basamak fonksiyonu olarak $u(t - \beta)$ β nin yalnızca $t \geq \beta$ değerleri için tanımlı olacağından integralin sınırları $\beta = (0, t)$ olarak olmalıdır. Buna göre $t \geq \beta \geq 0$ olacağından $t \geq 0$ da doğru olacaktır. Bunları yerinde yazarak devam edersek,

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-5(t-\beta)} u(t - \beta) d\beta = \int_0^t e^{-5(t-\beta)} d\beta = \int_0^t e^{-5t} e^{5\beta} d\beta = e^{-5t} \int_0^t e^{5\beta} d\beta = \frac{e^{-5t}}{5} (e^{5\beta})_0^t \\ &= \frac{e^{-5t}}{5} (e^{5t} - e^0) = \frac{e^{-5t}}{5} (e^{5t} - 1) = \frac{1 - e^{-5t}}{5} \\ &= \frac{1}{5} (1 - e^{-5t}) u(t) \end{aligned}$$

Örnek

Sistem girişi $x(t) = e^{-2t} u(t)$ ve sistem impuls cevabı $h(t) = e^{-5t} u(t)$ olan lineer zamandan bağımsız sistemin cevabını bulun.

Çözüm

LTI sistem cevabı konvülyasyon integrali ile hesaplanacaktır.

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} [e^{-2\tau} u(\tau)] [e^{-5(t-\tau)} u(t - \tau)] d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} [e^{-2\tau} u(\tau)] [e^{-5(t-\tau)} u(t - \tau)] d\tau$$

İntegral τ değişkenine göre alınacağından ($d\tau$), birim basamak fonksiyonu olarak $u(t-\tau)$ τ nin yalnızca $t \geq \tau$ değerleri için tanımlı olacağından integralin sınırları $\tau = (0, t)$ olarak olmalıdır. Buna göre $t \geq \tau \geq 0$ olacağından $t \geq 0$ da doğru olacaktır. Bunları yerinde yazarak devam edersek,

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} [e^{-2\tau} u(\tau)] [e^{-5(t-\tau)} u(t-\tau)] d\tau = \int_0^t e^{-2\tau} e^{-5(t-\tau)} d\tau \\ &= \int_0^t e^{-2\tau} e^{-5t+5\tau} d\tau = e^{-5t} \int_0^t e^{3\tau} d\tau = e^{-5t} \frac{1}{3} [e^{3\tau}]_0^t = e^{-5t} [e^{3t} - e^0] = \frac{1}{3} (e^{-2t} - e^{-5t}) \\ &= \frac{1}{3} (e^{-2t} - e^{-5t}) \\ y(t) &= \frac{1}{3} (e^{-2t} - e^{-5t}) \quad , \quad t > 0 \\ y(t) &= \frac{1}{3} (e^{-2t} - e^{-5t}) u(t) \end{aligned}$$

Örnek

Sistem girişi $x(t) = u(t)$ ve sistem impuls cevabı $h(t) = u(t)$ olan lineer zamandan bağımsız sistemin cevabını bulun.

Çözüm

LTI sistem cevabı konvülyasyon integrali ile hesaplanacaktır.

$$y(t) = x(t) * h(t) = u(t) * u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t-\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} [u(\tau)] [u(t-\tau)] d\tau$$

İntegral τ değişkenine göre alınacağından ($d\tau$), birim basamak fonksiyonu olarak $u(t-\tau)$ τ nin yalnızca $t \geq \tau$ değerleri için tanımlı olacağından integralin sınırları $\tau = (0, t)$ olarak olmalıdır. Yerinde yazarak devam edersek,

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau) u(t-\tau) d\tau = \int_0^t d\tau = [\tau]_0^t = t$$

$$y(t) = t$$

Eğer $t > 0$ ise, $y(t) = t$

Eğer $t < 0$ ise, $y(t) = 0$

olacaktır. Çünkü $t < 0$ için nedensel bir sistemin cevabı sıfır olur. Bu yüzden $y(t) = t$ olarak elde edilen $u(t) * u(t)$ konvülyasyonu $y(t) = t u(t)$ olur.

$$y(t) = u(t) * u(t) = t u(t)$$

Örnek

Sistem girişi $x(t) = e^{-2t}u(t-3)$ ve sistem impuls cevabı $h(t) = e^{-t}u(t)$ olan lineer zamandan bağımsız sistemin cevabını bulun.

Çözüm

LTI sistem cevabı konvülasyon integrali ile hesaplanacaktır.

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t-\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} [e^{-2\tau}u(\tau-3)][e^{-(t-\tau)}u(t-\tau)] d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} [e^{-2\tau}u(\tau-3)][e^{-(t-\tau)}u(t-\tau)] d\tau$$

İntegral yine τ değişkenine göre alınacağından ($d\tau$), birim basamak fonksiyonu olarak $u(\tau-3)$ ve $u(t-\tau)$ fonksiyonlarının $t \geq \tau \geq 3$ olduğu sürece $u(\tau-3) = u(t-\tau) = 1$ olacaktır. Bundan dolayı integralin sınırlarının $\tau = (3, t)$ olarak alınması gereği ortaya çıkar. Bunları yerinde yazarak devam edersek,

$$e^{-2t}u(t-3) = e^{-6}e^{-2(t-3)}u(t-3)$$

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} [e^{-2\tau}u(\tau-3)][e^{-(t-\tau)}u(t-\tau)] d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} [e^{-6}e^{-2(\tau-3)}u(\tau-3)][e^{-(t-\tau)}u(t-\tau)] d\tau = e^{-6} \int_3^t e^{-2(\tau-3)} e^{-(t-\tau)} d\tau \\ &= e^{-6} \left[\int_3^t e^{-2\tau} e^6 e^{-t} e^{\tau} d\tau \right] = e^{-6} \left[e^{-t+6} \int_3^t e^{-\tau} e^{\tau} d\tau \right] = e^{-6} \left[e^{-t+6} \int_3^t e^{-\tau} d\tau \right] = e^{-6} \left[-e^{-t+6} [e^{-\tau}]_3^t \right] \\ &= e^{-6} \left[-e^{-t+6} [e^{-t} - e^{-3}] \right] = e^{-6} \left[-e^{-2t+6} + e^{-t+3} \right] = e^{-6} [e^{-t+3} - e^{-2t+6}] \\ &= e^{-6} [e^{-(t-3)} - e^{-2(t-3)}] \end{aligned}$$

Nedensel bir sistem çıkışı için $t \geq 3$ olması gerekeceğinden

$$y(t) = e^{-6} [e^{-(t-3)} - e^{-2(t-3)}] u(t-3)$$

Örnek

Sistem girişi $x(t) = e^{-3t}u(t-5)$ ve sistem impuls cevabı $h(t) = e^{-4t}u(t-2)$ olan lineer zamandan bağımsız sistemin cevabını bulun.

Çözüm

LTI sistem cevabı konvülasyon integrali ile hesaplanacaktır.

$$e^{-3t}u(t-5) = e^{-15}e^{-3(t-5)}u(t-5)$$

$$e^{-4t}u(t-2) = e^{-8}e^{-4(t-2)}u(t-2)$$

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t-\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} [e^{-15} e^{-3(\tau-5)} u(\tau-5)] [e^{-8} e^{-4((t-\tau)-2)} u((t-\tau)-2)] d\tau$$

$$= e^{-15} e^{-8} \int_{-\infty}^{\infty} [e^{-3(\tau-5)} u(\tau-5)] [e^{-4((t-\tau)-2)} u((t-\tau)-2)] d\tau$$

İntegral yine τ değişkenine göre alınacağından ($d\tau$), birim basamak fonksiyonu olarak $u(\tau-5)$ ve $u(t-\tau-2)$ fonksiyonlarının $t \geq (\tau-2) \geq 5 = t \geq \tau \geq 7$, ($t \geq \tau \geq 7$) olduğu sürece $u(\tau-5) = u(t-(\tau-2)) = 1$ olacaktır. Bundan dolayı integralin sınırlarının $\tau = (7, t)$ olarak alınması gereği ortaya çıkar. Bunları yerinde yazarak devam edersek,

$$y(t) = e^{-23} \int_{-\infty}^{\infty} [e^{-3(\tau-5)} u(\tau-5)] [e^{-4((t-\tau)-2)} u((t-\tau)-2)] d\tau = e^{-23} \int_7^t [e^{-3(\tau-5)} u(\tau-5)] [e^{-4((t-\tau)-2)} u((t-\tau)-2)] d\tau$$

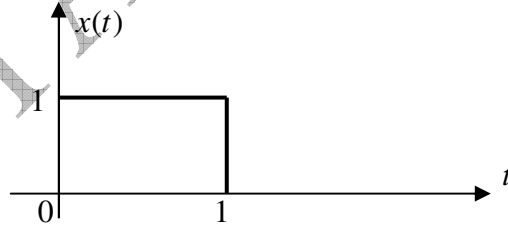
$$= e^{-23} \left[\int_7^t [e^{-3\tau} e^{15}] [e^{-4t} e^{4\tau} e^8] d\tau \right] = e^{-23} \left[e^{-4t+15} \int_7^t e^{\tau} d\tau \right] = e^{-23} \left[e^{-4t+15} (e^{\tau})_7^t \right] = e^{-23} \left[e^{-4t+15} (e^t - e^7) \right]$$

$$= e^{-23} \left[e^{-3t+15} - e^{-4t+22} \right] = e^{-23} \left[e^{-3(t-5)} - e^{-2(2t-11)} \right] = e^{-23} \left[e^{-3(t-5)} u(t-5) - e^{-2(2t-11)} u(t-\frac{11}{2}) \right]$$

$$y(t) = e^{-23} \left[e^{-3(t-5)} u(t-5) - e^{-2(2t-11)} u(t-\frac{11}{2}) \right]$$

Örnek

Sistem girişi aşağıdaki şekildeki gibi ve sistem impuls cevabı $h(t) = e^{-t} u(t)$ olan lineer zamandan bağımsız sistemin cevabını bulun.



Şekil 13

Çözüm

LTI sistem cevabı konvülasyon integrali ile hesaplanacaktır. Bunun için şekilde görülen sistem girişinin

$$x(t) = u(t) - u(t-1)$$

olduğu açıktır. Buradan sistemin girişi $u(t)$ ve $u(t-1)$ den oluştuğundan sistemin cevabı da bu girişlerin toplamından oluşacaktır. Bu yüzden her bir giriş için çıkışları ayrı ayrı hesaplayalım. Önce $u(t)$ girişi için sistem cevabını hesaplayalım.

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} [u(\tau)] [e^{-(t-\tau)} u(t - \tau)] d\tau$$

İntegral τ değişkenine göre alınacağından ($d\tau$), $u(\tau)$ ve $u(t - \tau)$ fonksiyonları arasında nedensel bir sistemden dolayı $t \geq \tau \geq 0$ olması gerektiğinden sınırlar $\tau = (0, t)$ olarak alınır.

$$\begin{aligned} y_1(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} [u(\tau)] [e^{-(t-\tau)} u(t - \tau)] d\tau = \int_0^t e^{-t+\tau} d\tau = e^{-t} \int_0^t e^{\tau} d\tau = e^{-t} (e^{\tau})_0^t = e^{-t} (e^t - e^0) = e^{-t} (e^t - 1) \\ &= 1 - e^{-t} \end{aligned}$$

$$y_1(t) = (1 - e^{-t})u(t)$$

Şimdi $u(t-1)$ girişi için sistemin ikinci cevabını hesaplayalım. İntegral τ değişkenine göre alınacağından ($d\tau$), $u(\tau - 1)$ ve $u(t - \tau)$ fonksiyonları arasında nedensel bir sistemden dolayı $t \geq \tau \geq 1$ olması gerektiğinden sınırlar $\tau = (1, t)$ olarak alınır.

$$\begin{aligned} y_2(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} [u(\tau - 1)] [e^{-(t-\tau)} u(t - \tau)] d\tau = \int_1^t e^{-t+\tau} d\tau = e^{-t} \int_1^t e^{\tau} d\tau = e^{-t} (e^{\tau})_1^t = e^{-t} (e^t - e) \\ &= 1 - e^{-(t-1)} \end{aligned}$$

$$y_2(t) = (1 - e^{-(t-1)})u(t - 1)$$

$$\begin{aligned} y(t) &= y_1(t) + y_2(t) \\ &= (1 - e^{-t})u(t) + (1 - e^{-(t-1)})u(t - 1) \end{aligned}$$

$$y(t) = (1 - e^{-t})u(t) + (1 - e^{-(t-1)})u(t - 1)$$

2.yol

Eğer $u(t)$ için $y_1(t) = (1 - e^{-t})u(t)$ ise, zamandan bağımsız sistem için $u(t-1)$ girişi için sistem çıkışı

$$y_2(t) = y_1(t-1) = (1 - e^{-(t-1)})u(t-1)$$

$$\begin{aligned} y(t) &= y_1(t) + y_1(t-1) \\ &= (1 - e^{-t})u(t) + (1 - e^{-(t-1)})u(t-1) \end{aligned}$$

Örnek

Sistem girişi $x(t) = t[u(t) - u(t-2)]$ ve sistem impuls cevabı $h(t) = e^{-8t}u(t)$ olan lineer zamandan bağımsız sistemin cevabını bulun.

Çözüm

Sistem girişi $x(t) = t[u(t) - u(t-2)] = tu(t) - tu(t-2) = x_1(t) + x_2(t)$ biçiminde olduğundan sistem cevabı da $y_1(t) + y_2(t)$ olarak hesaplanacaktır. Önce $x_1(t) = tu(t)$ girişi için hesaplayalım.

$$\begin{aligned} y_1(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} [tu(\tau)][e^{-8(t-\tau)}u(t-\tau)] d\tau = t \int_0^t e^{-8t+8\tau} d\tau = te^{-8t} \int_0^t e^{8\tau} d\tau = \frac{te^{-8t}}{8} (e^{8\tau})_0^t = \frac{te^{-8t}}{8} (e^{8t} - e^0) \\ &= \frac{t}{8} - \frac{te^{-8t}}{8} = \frac{1}{8} (t - te^{-8t}) \\ &= \frac{1}{8} (t - te^{-8t})u(t) \\ y_1(t) &= \frac{1}{8} (t - te^{-8t})u(t) \end{aligned}$$

$x_2(t) = tu(t-2)$ girişi için hesaplayalım.

$$\begin{aligned} y_2(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} [tu(\tau-2)][e^{-8(t-\tau)}u(t-\tau)] d\tau = t \int_2^t e^{-8t+8\tau} d\tau = te^{-8t} \int_2^t e^{8\tau} d\tau = \frac{te^{-8t}}{8} (e^{8\tau})_2^t = \frac{te^{-8t}}{8} (e^{8t} - e^{8 \times 2}) \\ &= \frac{t}{8} - \frac{te^{-8t+16}}{8} = \frac{1}{8} (t - te^{-8(t-2)}) \\ &= \frac{1}{8} (t - te^{-8(t-2)})u(t-2) \\ y_2(t) &= \frac{1}{8} (t - te^{-8(t-2)})u(t-2) \end{aligned}$$

Toplam çıkış

$$y_1(t) + y_2(t) = \frac{1}{8} (t - te^{-8t})u(t) + \frac{1}{8} (t - te^{-8(t-2)})u(t-2)$$

2.yol

Eğer $x_1(t) = tu(t)$ girişi için $y_1(t) = \frac{1}{8} (t - te^{-8t})u(t)$ ise, zamandan bağımsız sistem için

$x_2(t) = tu(t-2)$ girişi için sistem çıkışı

$$y_2(t) = y_1(t-1) = \frac{1}{8} (t - te^{-8(t-2)})u(t-2)$$

$$\begin{aligned} y(t) &= y_1(t) + y_1(t-1) \\ &= \frac{1}{8} (t - te^{-8t})u(t) + \frac{1}{8} (t - te^{-8(t-2)})u(t-2) \end{aligned}$$

Örnek

Sistem girişi $x(t) = \sin 3t u(t)$ ve sistem impuls cevabı $h(t) = e^{-t} u(t)$ olan lineer zamandan bağımsız sistemin cevabını bulun.

Çözüm

LTI sistem cevabı konvülyasyon integrali ile hesaplanacaktır.

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t - \beta) d\beta = \int_{-\infty}^{\infty} [\sin 3\beta u(\beta)] [e^{-(t-\beta)} u(t - \beta)] d\beta = \int_0^t \sin 3\tau e^{-t} e^{\beta} d\beta$$

$$= e^{-t} \int_0^t e^{\beta} \sin 3\beta d\beta$$

$$\int e^{a\beta} \sin b\beta d\beta = \frac{e^{a\beta}}{a^2 + b^2} (a \sin b\beta - b \cos b\beta)$$

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t - \beta) d\beta = \int_{-\infty}^{\infty} [\sin 3\beta u(\beta)] [e^{-(t-\beta)} u(t - \beta)] d\beta = \int_0^t \sin 3\tau e^{-t} e^{\beta} d\beta$$

$$= e^{-t} \int_0^t e^{\beta} \sin 3\beta d\beta = e^{-t} \left[\frac{e^{\beta}}{1^2 + 3^2} (\sin 3\beta - 3 \cos 3\beta) \right]_0^t = e^{-t} \left[\frac{e^t}{10} (\sin 3t - 3 \cos 3t) - \frac{e^0}{10} (\sin 0 - 3 \cos 0) \right]$$

$$= e^{-t} \left[\frac{e^t}{10} (\sin 3t - 3 \cos 3t) - \frac{1}{10} (-3) \right] = e^{-t} \left[\frac{e^t}{10} (\sin 3t - 3 \cos 3t) + \frac{3}{10} \right] = \left[\frac{1}{10} (\sin 3t - 3 \cos 3t) + \frac{3e^{-t}}{10} \right]$$

$$y(t) = \left[\frac{1}{10} (\sin 3t - 3 \cos 3t) + \frac{3e^{-t}}{10} \right] u(t)$$

Örnek

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\beta} u(-\beta) (-\delta(t - \beta)) d\beta \text{ Konvülyasyonunu hesaplayın}$$

Çözüm

Denkleme bakıldığında konvülyasyon $y(t) = x(t) * h(t) = e^t u(-t) * (-\delta(t))$ olarak görünüyor.

$$y(t) = - \int_{-\infty}^{\infty} e^{\beta} u(-\beta) \delta(t - \beta) d\beta$$

$\delta(t - \beta)$ fonksiyonu yalnızca $\beta = t$ de tanımlı olduğundan integraldeki $e^{\beta} \rightarrow e^t$
($e^{\beta} \delta(t - \beta) \rightarrow e^t$) ve $u(-\beta) \rightarrow u(-t)$ olacağından

$$y(t) = - \int_{-\infty}^{\infty} e^{\beta} u(-\beta) \delta(t - \beta) d\beta = -e^t u(-t)$$

$$y(t) = -e^t u(-t)$$

Örnek

$f(t) = e^{-2t}u(t)$ ve $h(t) = e^{5t}u(-t)$ ise $f(t) * h(-t)$ konvülyasyonunu hesaplayın.

Çözüm

$$h(t) = e^{5t}u(-t) \rightarrow h(-t) = e^{-5t}u(t)$$

$$\begin{aligned} y(t) &= f(t) * h(-t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)h(-(t-\tau))d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)h(\tau-t)d\tau \\ &= e^{-2t}u(t) * e^{5t}u(-t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\tau}u(\tau)e^{5(\tau-t)}u(\tau-t)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\tau}e^{5\tau}e^{-5t}u(\tau)u(\tau-t)d\tau \\ &= e^{-5t} \int_{-\infty}^{\infty} e^{3\tau}u(\tau)u(\tau-t)d\tau = e^{-5t} \int_0^t e^{3\tau}d\tau = \frac{e^{-5t}}{3}(e^{3\tau})_0^t = \frac{e^{-5t}}{3}(e^{3t} - e^0) = \frac{e^{-5t}}{3}(e^{3t} - 1) \\ &= \frac{e^{-2t}}{3} - \frac{e^{-5t}}{3} \end{aligned}$$

$$y(t) = \frac{1}{3}(e^{-2t} - e^{-5t})u(t)$$

Not : $y(t) = f(t) * h(-t)$ = **çapraz otokorelasyon**

Örnek

$y(t) = u(t) * u(-t)$ konvülyasyonunu hesaplayın

Çözüm

$$\begin{aligned} y(t) &= x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau \\ &= u(t) * u(-t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)u(-(t-\tau))d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)u(\tau-t)d\tau \\ &= \frac{1}{2}(u(-t) + u(t)) \end{aligned}$$

Not : $y(t) = u(t) * u(-t)$ = **otokorelasyon** : ($u(t)$ fonksiyonunun kendisiyle çapraz korelasyonu (cross correlation))

Örnek

$$y(t) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} [e^{\beta} u(-\beta)] [e^{-(t-\beta)} u(t-\beta)] d\beta \text{ Konvölüsyonunu hesaplayın}$$

Çözüm

Denkleme bakıldığında konvölüsyon $y(t) = x(t) * h(t) = e^t u(-t) * (2e^{-t} u(t))$ olarak görünüyor. Yukarıdaki denklemden

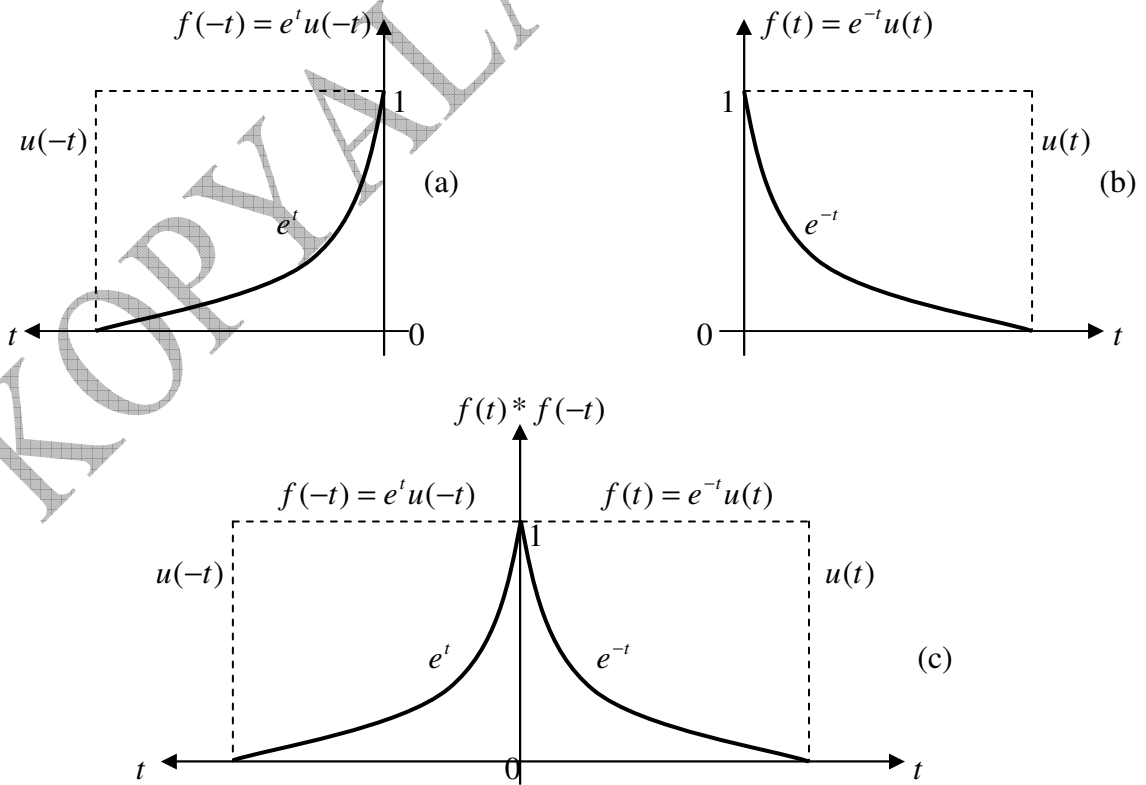
$$y(t) = u(t) * u(-t) = \frac{1}{2} (u(-t) + u(t))$$

olduğuna göre,

$$\begin{aligned} y(t) &= e^t u(-t) * (2e^{-t} u(t)) = x(t) * h(-t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(\tau - t) d\tau = 2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{\beta} u(-\beta) e^{-(t-\beta)} u(t-\beta) d\beta \\ &= \frac{1}{2} [2(e^t u(-t) + e^{-t} u(t))] = e^t u(-t) + e^{-t} u(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y(t) &= e^t u(-t) * (2e^{-t} u(t)) \\ &= e^t u(-t) + e^{-t} u(t) \end{aligned}$$

Not : $f(t) = e^{-t} u(t)$ ve $f(-t) = e^t u(-t)$ olduğundan $e^t u(-t) * (e^{-t} u(t)) = f(t) * f(-t)$
otokorelasyon ($f(t)$ fonksiyonunun kendisiyle çapraz korelasyonu (cross correlation))



Şekil 14 Otokorelasyon : $f(t) * f(-t) = e^t u(-t) * (e^{-t} u(t))$

Örnek

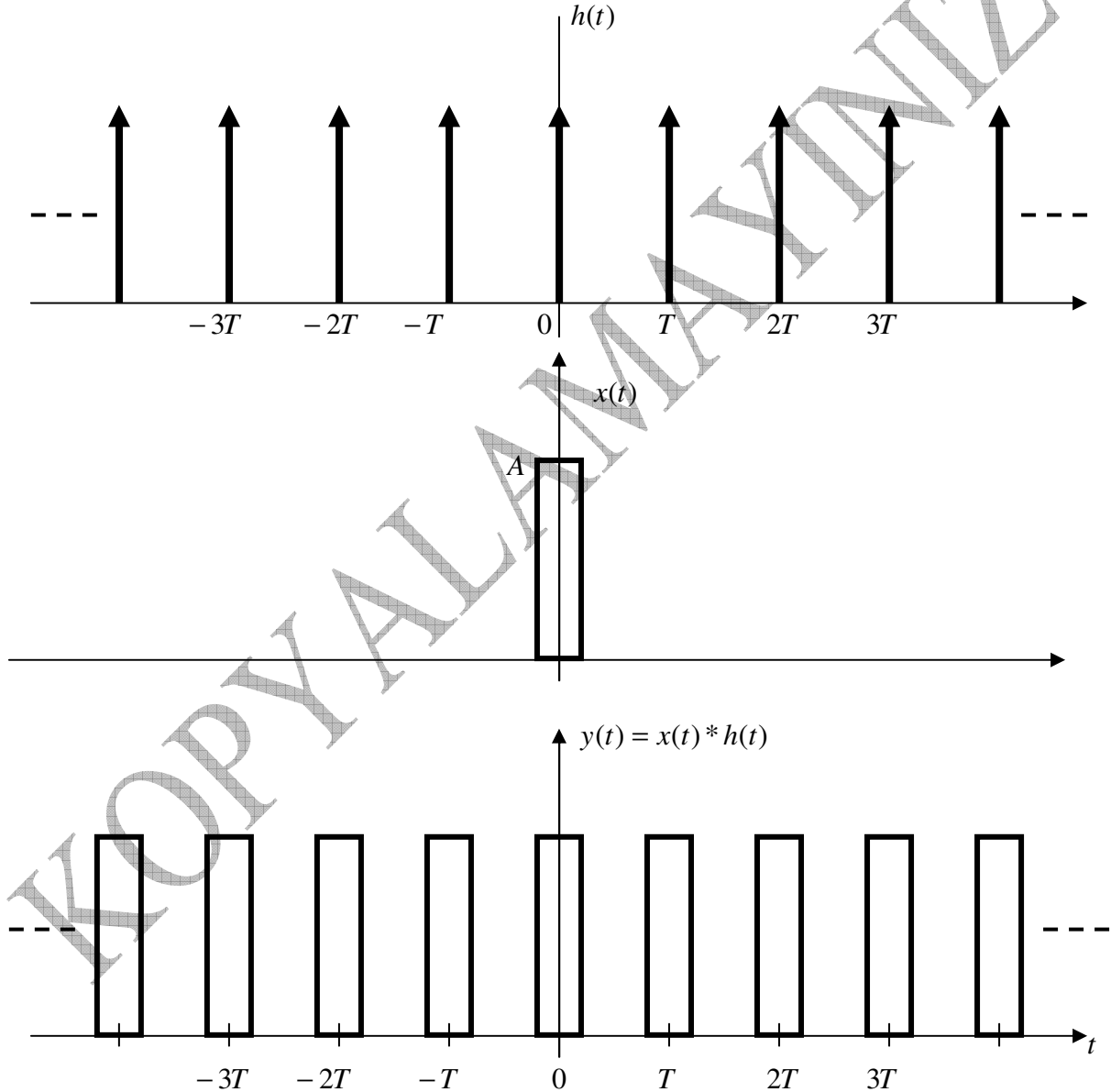
$x(t) = A \text{rect}(t)$ ve $h(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT)$ ise $y(t) = x(t) * h(t)$ sistem cevabını hesaplayın.

Çözüm

Verilenlere göre sistem cevabı için

$$\begin{aligned} y(t) &= x(t) * h(t) = x(t) * \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(t - kT) \\ &= A \sum_{k=-\infty}^{\infty} \text{rect}(t - kT) \end{aligned}$$

elde edilecektir. Grafik gösterim aşağıdaki gibi olacaktır.



Şekil 15 $y(t) = x(t) * h(t)$: Dörtgen dalganın impuls dizisiyle konvülasyonu

Görüldüğü gibi dörtgen tipinde bir $x(t)$ fonksiyonunun bir $h(t)$ impuls dizisiyle konvülasyonu, dörtgen işaretlerin sonsuz kopyasını oluşturmaktadır.

Konvülyasyon işleminin uygulanması

Sistem çıkışı $y(t)$ yi elde etmek üzere $x(t)$ giriş ve $h(t)$ sistem fonksiyonundan (impuls cevabı) oluşan sistem cevabı $y(t) = x(t) * h(t)$ ile tanımlanan konvülyasyon işlemine göre hesaplanacaktır. Cevap denklemi aşağıdaki gibi olan

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau$$

sisteme konvülyasyon işlemi sırasıyla beş aşamada tatbik edilmektedir.

$$1. h(t) \rightarrow h(\tau), \quad 2. h(\tau) \rightarrow h(-\tau), \quad 3. h(-\tau) \rightarrow h(-\tau + t), \quad 4. h(-\tau + t) = h(t - \tau)$$

Bu adımların sonucunda $y(t)$ sistem çıkışı elde edilir. İlk anda sistem impuls fonksiyonu integrasyonda düşecek (dummy) bir değişken olan “ τ ” ya $h(t) \rightarrow h(\tau)$ olarak atanır. Bunun anlamı fonksiyonun asıl değişkeni olan “ t ” nin değerleri sisteme yine $(-\infty, +\infty)$ aralığında “ τ ” olarak girilecektir. İkinci aşamada elde edilen $h(\tau)$ fonksiyonu sıfır veya düşey eksene göre ters simetrik olacak şekilde $h(-\tau)$ olarak değişir. Bunun anlamı, orijinal $h(t)$ veya $h(\tau)$ fonksiyonu sola doğru katlanır (folding process). Bu sola doğru katlanmayla amaç, $x(t)$ giriş fonksiyonunun tam soluna gelmesidir. Bunu garanti etmek yani sağlamak adına sola doğru katlanmış $h(-\tau)$ fonksiyonunua bir “ t ” artımı $h(-\tau + t)$ verilir olarak verilir böylece sonuçta başlangıçta $h(\tau)$ olan fonksiyon $h(t - \tau)$ durumuna getirilir.

Bu halde $h(t)$ artık $x(t)$ giriş fonksiyonunun tam solundadır. Bu pozisyondan itibaren $h(t - \tau)$ fonksiyonu, soldan sağa olmak üzere $x(t)$ fonksiyonunun içine kaydırılır. Kaydırılma miktarı “ t ” değerine bağlı olarak tespit edilir. Böylece normalde $h(t - \tau)$ veya orijinal $h(t)$ fonksiyonu birkaç aşamada $x(t)$ nin içinden geçirilerek işlem tamamlanır. $h(t)$ Fonksiyonunun $x(t)$ ile her kesişme noktası integrasyon formülüyle sistem cevabı olarak hesaplanır. Bu şekilde kesişmelerle elde edilen cevaplar sistem çıkış fonksiyonu olan $y(t)$ yi göstermek üzere grafik üzerinde birleştirilirse, sistem toplam çıkışı veya cevabı elde edilir.

Şu ana kadar $h(t)$ sistem impuls fonksiyonu $x(t)$ giriş fonksiyonundan geçirilerek sistem cevabı bulundu. Bunun terside olabilirdi, yani bu kez $h(t)$ sabit, $x(t)$ soldan sağa doğru $h(t)$ içinden geçecek şekilde tasarlanabilirdi. Bu durumda da sistem toplam çıkışı veya cevabı değişmezdi, yalnızca bu durum için konvülyasyon integrali aşağıdaki gibi düşünülmelidir.

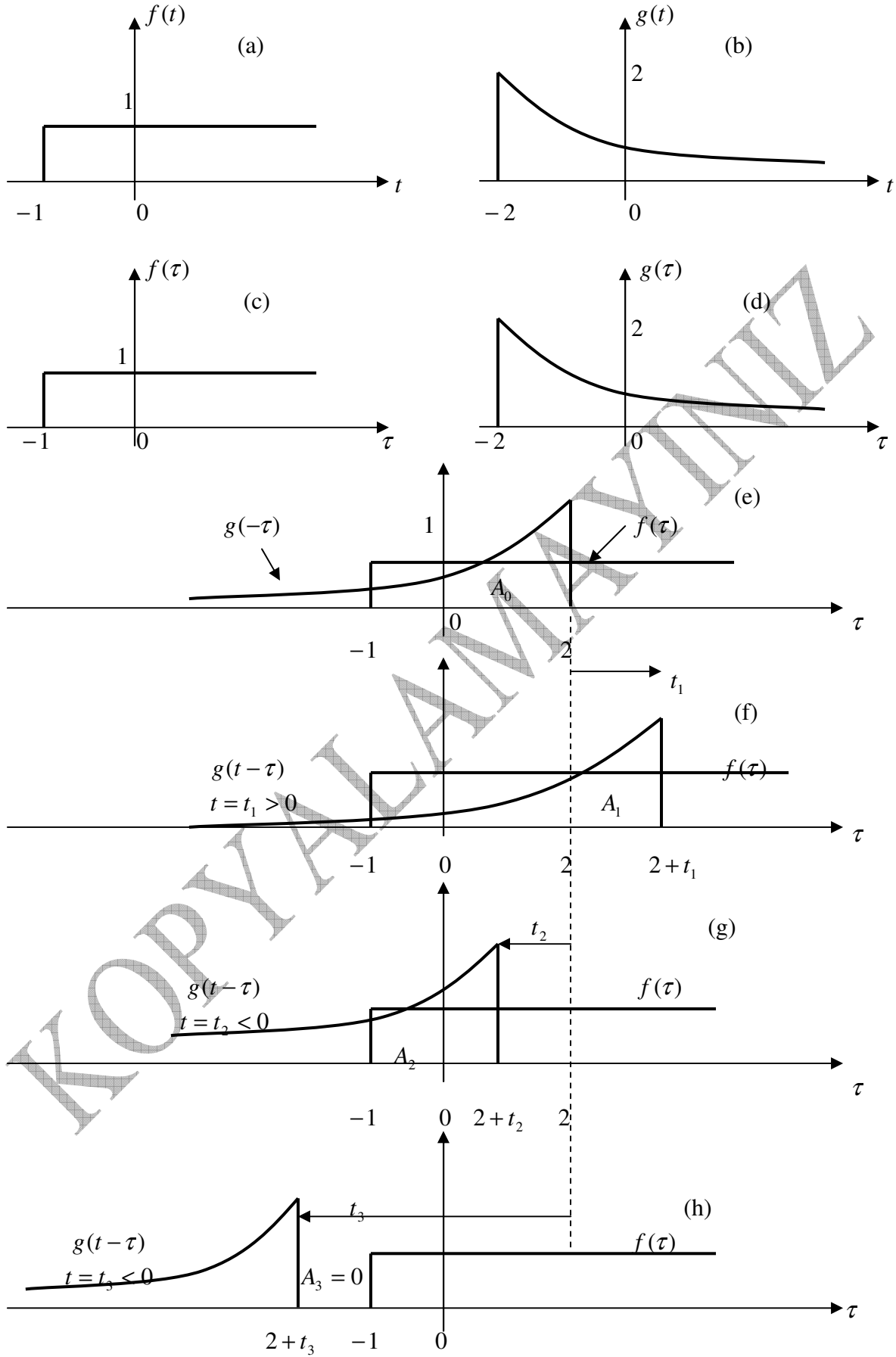
$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) x(t - \tau) d\tau$$

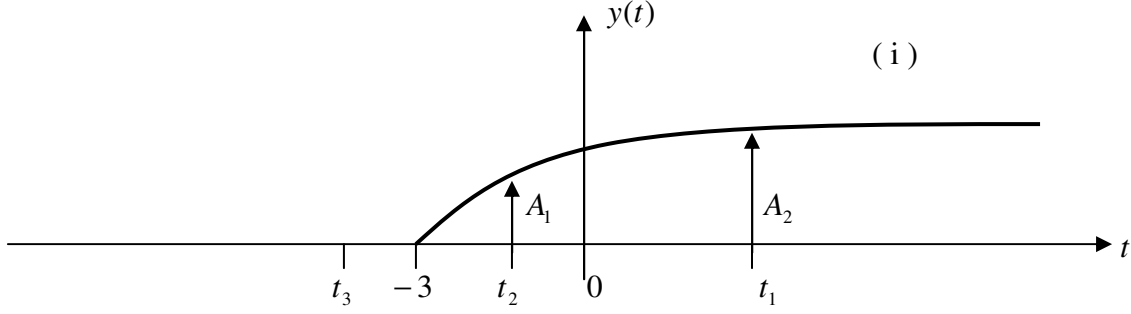
Bu durumda konvülyasyonla ilgili benzer adımların bu denkleme uygulanması yeterli olacaktır. Bunlara dair basit örnekler aşağıda verilmiştir.

Konvülyasyonun grafik yorumu

$$y(t) = f(t) * g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) g(t - \tau) d\tau$$

Biçimindeki sistem cevabının hesaplanması üzerine kurulu konvülyasyon işlemi, yukarıda detaylandırılan kriterler ışığında aşağıdaki gibi verilen grafik gösterimle daha anlaşılır hale gelmektedir.





Şekil 16 Konvülyasyon işleminin grafik gösterimi

Konvülyasyon işlemi lineer zamanla değişmeyen (lineer time-invariant, LTI) sistem cevabının sistem nedensel girişiyle hesaplanmasını sağlayan önemli bir operatördür. Yukarıdaki grafik gösterim, anlaşılabilirliği daha da netleştirecektir. Genel anlamda

$$y(t) = f(t) * g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) g(t - \tau) d\tau$$

denkleminde görülen $f(t)$ ve $g(t)$ fonksiyonlarından (her ikisi sistem açısından nedensel düşünülecektir) her hangi biri sabit tutularak, işlemler diğeri üzerinde geliştirilmektedir. Yukarıdaki grafik gösterimde ilk olarak

1. Zaman domenini olarak (a) ve (b) de verilen her iki fonksiyon τ ye göre düşünülerek $f(\tau)$ ve $g(\tau)$ göz önüne alınmıştır (c) ve (d).

2. Bunun ardından gösterimde $f(\tau)$ sabit tutularak, bu noktadan sonra $g(\tau)$ fonksiyonu düşey eksene simetrik olacak şekilde $g(-\tau)$ biçiminde sola katlanmıştır. “**Katlama**” kelimesi literatür anlamda “konvülyasyon” işlemini en iyi tanımlayan kavram olarak dikkat çekmektedir. Bu yolla her iki şeklin örtüşümünden oluşan görünüm aynı eksen üzerine taşınmıştır (e). Bu görüntüde yer alan $f(\tau)$ ve $g(-\tau)$ fonksiyonlarının kesiştikleri ortak alanın hesaplanması gerekmektedir. Bu ortak alanlar küçük bölgeler halinde birkaç adımda hesaplanacaktır. Ortak alanların hesaplanmasını sağlayacak küçük alanlar uygun seçilecek “ t ” artımlarıyla sağlanacaktır. Bunları şekil (f) den itibaren göreceğiz.

3. Bu aşamada elde edilen $g(-\tau)$ fonksiyonundaki “ $-\tau$ ” argümanına $-\tau + t$ veya $t - \tau$ bir “ t ” artımı verilmiştir [$h(-\tau + t)$]. Şekil (f) den bu durum gözlemlenebilir. Verilen “ t ” artımının pozitif ($t > 0$) değerlerini göstermek üzere t_1 kullanılmıştır ($t = t_1$). Şekil (f) den $t = t_1 > 0$ artımıyla veya $g(-\tau)$ fonksiyonunun sağa doğru ötelendiğini görmekteyiz. Çünkü $g(-\tau)$ fonksiyonunun sağ taraftaki bitiş noktası 2 ($\tau = 2$) anına denk geldiğinden, $t = t_1 > 0$ artımındaki her t_1 değeri için $(\dots) 2 + t_1$ noktası daha da sağa ötelenecektir. Bu yolla şekil (f) den görülebileceği gibi $f(\tau)$ ve $g(-\tau + t_1)$ fonksiyonlarının kesişmesiyle oluşan bir alan görülmektedir (A_1). Hesaplanacak bu alan sistemin t_1 anındaki cevabına karşılık gelecektir.

4. Şekil (e) referans alındığında $g(-\tau)$ fonksiyonunun sınır değerini gösteren 2 noktasına bu kez $2+t_2$ olacak biçimde $t=t_2 < 0$ artımı yapılmaktadır $[g(-\tau+t_2)]$. Bu haldeyken $g(-\tau+t_2)$ fonksiyonu $t=t_2 < 0$ yüzünden sola kaymaktadır veya ötelenmektedir. Çünkü $g(-\tau)$ veya $g(-\tau+t_2)$ fonksiyonunun sağ taraftaki bitiş noktası 2 ($\tau=2$) anına denk geldiğinden, $t=t_2 < 0$ artımındaki her t_2 değeri için ($t_2 < 0$) $2+t_2$ noktası daha da küçülerek sola ötelenecektir. Bunları şekil (g) den görmekteyiz. Sonuçta bu adımda da $f(\tau)$ ve $g(-\tau+t_2)$ fonksiyonlarının kesişmesiyle oluşan bir alan görülmektedir (A_2). Hesaplanacak bu alan sistemin t_2 anındaki cevabına karşılık gelecektir.

NOT : Şekil (e) üzerinde bir hatırlatmaya veya vurguya ihtiyaç vardır. Çünkü sistem cevabını hesaplamak üzere buraya kadar gelen durumda $g(-\tau)$ ve $f(\tau)$ pozisyonları dolayısıyla örtüşmektedirler (kesişmektedirler). Burada $f(\tau)$ nin sistem girişi, $g(\tau)$ nin ise sistem impuls cevabına karşılık geldiğini düşünüyoruz. Buna göre $f(\tau)g(-\tau)$ ifadesinin sistemin yalnızca τ anındaki cevabını üreteceği görülmektedir. Bu cevap ta, şekil (e) de görülen kesişim alanıdır. Bu durumda konvülsyon integralimiz

$$y = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) g(-\tau) d\tau$$

olarak düşünülmelidir. Bu da sabit bir değer demektir. Çünkü integral $y(t)$ değil yalnızca y gibi bir sabite dönüşmüştür. Bu yazıma göre (e) de görülen kesişim alanından başka bir değer elde edilemeyecektir. Oysa ki, daha farklı anlarda oluşabilecek kesişim alanlarını da bilmek istiyoruz. Bu yüzden $f(\tau)g(-\tau)$ ifadesi pek anlamlı değil, olmadığı gibi de yetersizdir. Bu şekilde sistem cevabını sabit bir y , yerine $y(t)$ gibi zamanla değişen bir fonksiyona bağlı elde etmek daha yararlıdır. Çünkü bu yaklaşımla sistem cevabını $t = (-\infty, +\infty)$ aralığındaki her bir “ t ” anı için hesaplamak mümkün olacaktır.

Bunun önüne geçmek için $f(\tau)g(t-\tau)$ yazımı daha tutarlı olacaktır. Çünkü bu halde $g(-\tau)$ işaretini $t = \pm$ değerlerine bağlı olarak $-\tau$ nun sağına veya soluna ötelemek (kaydırmak) mümkün olacaktır. Bu da, $f(\tau)g(t-\tau)$ gösterimine uygun yeni kesişim alanlarına imkan verecektir. Yeni kesişim alanlarını sistem açısından değerlendirdiğimizde, sistemin “ t ” nin $t = \pm$ gibi çeşitli değerlerine bağlı anlarındaki sistem cevabı anlamı ortaya çıkacaktır. İdeal veya teorik anlamda yaklaştığımızda $t = (-\infty, +\infty)$ sonsuz aralığındaki sistemin $y(t)$ cevabını elde etmek mümkün olacaktır. Buna uygun sistem cevabını veren konvülsyon daha doğru yazımla bu kez daha tutarlı olarak

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) g(t-\tau) d\tau$$

formunda olacaktır. Şekil (e) de $t=0$ alınırsa $t=0$ anındaki sistem cevabı A_0 olarak $y(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) g(-\tau) d\tau = A_0$ elde edilecektir. Eğer $g(-\tau)$ nin (e) de oluşan $t+2$ veya $2+t$ sınır değerinde $t < 0$ alındığı sürece, $g(-\tau)$ sola doğru kayarak sırasıyla $A_2 \neq 0$ ve $A_3 = 0$ alanlarını oluşturacaktır. $t > 0$ durumunda ise, $2+t$ den dolayı $g(-\tau)$ bu kez de sağa kayarak $A_1 \neq 0$ alanını oluşturmaktadır. Eğer $f(\tau)g(t-\tau)$ ile oluşabilecek olası tüm kesişim alanlarını elde etmek istiyorsak, $t = (-\infty, +\infty)$ zaman aralığının tamamını dikkate almamız gerekiyor. Bundan dolayı $g(-\tau)$ nin $g(t-\tau)$ olarak $t = t_3 < 0$ ile belirtilen pozisyonda olması gerekir (şekil h). Bu noktadan itibaren $g(t-\tau)$ dolayısıyla $f(\tau)g(t-\tau)$ ifadesi $2+t_3$ ile belirtilen andan itibaren $t = t_3 > 0$ gibi değerler alarak sağa doğru ötelenmelidir. Bu durumdaki sağa ötelenme $g(t-\tau)$ ile $f(\tau)$ arasında yeni kesişim alanları oluşturacağından bunların hesaplanması mümkün olacaktır. Bu yolla $t = t_3 > 0$ olarak $t = (-\infty, +\infty)$ aralığındaki değer için $g(t-\tau)$ ile $f(\tau)$ nin $f(\tau)g(t-\tau)$ formunda oluşturacağı tüm alanların hesaplanması söz konusu olacaktır. Bu alanların hesaplanması sistemin $t = (-\infty, +\infty)$ aralığındaki tüm değerleri (anları) için, sistem cevaplarının elde edilmesi anlamına gelmektedir ki, bu da sistemin toplam cevabının bulunmasıdır. Bundan dolayı, sistemin toplam cevabının belirlenmesi adına $f(\tau)g(t-\tau)$ ifadesi $t = (-\infty, +\infty)$ aralığında

$$y(t) = f(t) * g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) g(t-\tau) d\tau$$

integralinin hesaplanmasına ihtiyaç vardır. Sürekli zamanda $t = (-\infty, +\infty)$ olacağından sonsuz tane “ t ” anında integral yani alan söz konusu olacağından bunların toplamı sistem cevabını oluşturacaktır. Bu yolla $f(t)$ girişinin (girişi oluşturan her bir impulsin) her bir anındaki değerine karşılık gelen $g(t)$ impuls cevabı, kesişim alanı olarak $f(t) * g(t)$ konvülsyonu olarak elde edilmektedir. Buradan konvülsyonun, $t = (-\infty, +\infty)$ sonsuz aralığındaki herhangi bir andaki değer için sistemin cevabını, elde edilen $y(t)$ fonksiyonuyla gözlemlemeyi mümkün kılan önemli bir operatör olduğunu görmekteyiz. Eğer $f(\tau)g(t-\tau)$ yerine $f(\tau)g(-\tau)$ kullanılsaydı, bu yolla integrasyonu $y(t)$ gibi “ t ” ye bağlı bir fonksiyon olarak ifade edemeyeceğimiz, şimdi daha net olarak görülmektedir. Bu uzun ama önemli tespitin ardından yarım bıraktığımız örneğin açıklamalarına devam edebiliriz.

5. Şekil (e) ve (f) değerlendirmelerinin ardından (g) ye geçebiliriz. Şekil (g) deki işleme ek olarak sola kaydırma devam ettirilmektedir. Bunun için $t = t_3 < -3$ noktası göz önüne alınmaktadır. Bu haldeyken $g(-\tau)$ fonksiyonu $t = t_3 < -3$ olmak üzere $g(-\tau + t_3)$ olarak değerlendirilir. Bu haldeyken $t = t_3 < -3$ olacak şekilde seçilen $t_3 = -4, -5, \dots$ değerlerinden herhangi biri için $g(-\tau)$ fonksiyonu daha da sola ötelenerek sonuçta $f(t)$ fonksiyonunun dışına kadar çıkarak, ortak veya kesiştikleri herhangi bir bölge veya nokta kalmayacaktır. Bunları şekil (h) den görebilmekteyiz. Bu aşamada artık $f(\tau)$ ve $g(-\tau + t_3)$ fonksiyonlarının kesişmesiyle oluşan bir ortak alan mevcut olmadığından konvülsyon işlemine son verilmektedir.

6. Grafik olarak incelendiğinde sistemin çıkışını gösteren $y(t)$, $t = t_0, t_1, t_2, t_3, \dots$ anlarında elde edilen $A = A_0, A_1, A_2, A_3, \dots$ alanlarıyla belirlenmektedir. Bu alanlar $t = t_0, t_1, t_2, t_3, \dots$ anlarındaki sistem cevapları olarak düşey eksende işaretlenirse grafik olarak $y(t)$ nin elde edileceği şekil (i) de görülmektedir. Konvülyasyon yöntemiyle giriş işareti ve sistem işaretinin ilgili anlardaki kesişmeleriyle oluşan $A = A_0, A_1, A_2, A_3, \dots$ alanlarının toplamı, sonuçta sistemin “sıfır-durum cevabı”nıda oluşturmaktadır. Şekilden dikkat edilirse $t = -3$ anı, $y(t)$ sisteminin sıfır olduğu başlangıç anıdır. Çünkü $t = -3$ anı için $g(-\tau + (-3))$ fonksiyonu $2 + (-3) = -1$ ile $\tau = -1$ de bulunan $f(\tau)$ fonksiyonunun tam sınırına geldiğinden, $f(\tau)$ ile $g(-\tau + (-3))$ arasında yine ortak veya kesişen veya hesaplanması gereken bir alan olmayacağından, $t = -3$ anı için konvülyasyon integrali sıfır alınacaktır.

Konvülyasyonun Sistem Yorumu

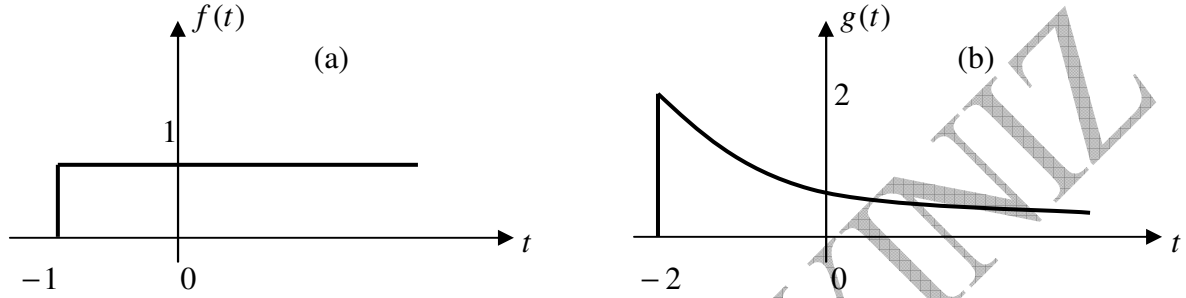
Yukarıdaki örnek üzerinden sistem açısından konvülyasyonun işleminin uygulaması açısından önemli özelliklerini vurgulamaya çalışalım. Sistem girişi $f(t)$ ve sistem impuls cevabı $h(t)$ olan bir sistemin cevabını konvülyasyonla aşağıdaki gibi bulmaktaydık.

$$y(t) = f(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) h(t - \tau) d\tau$$

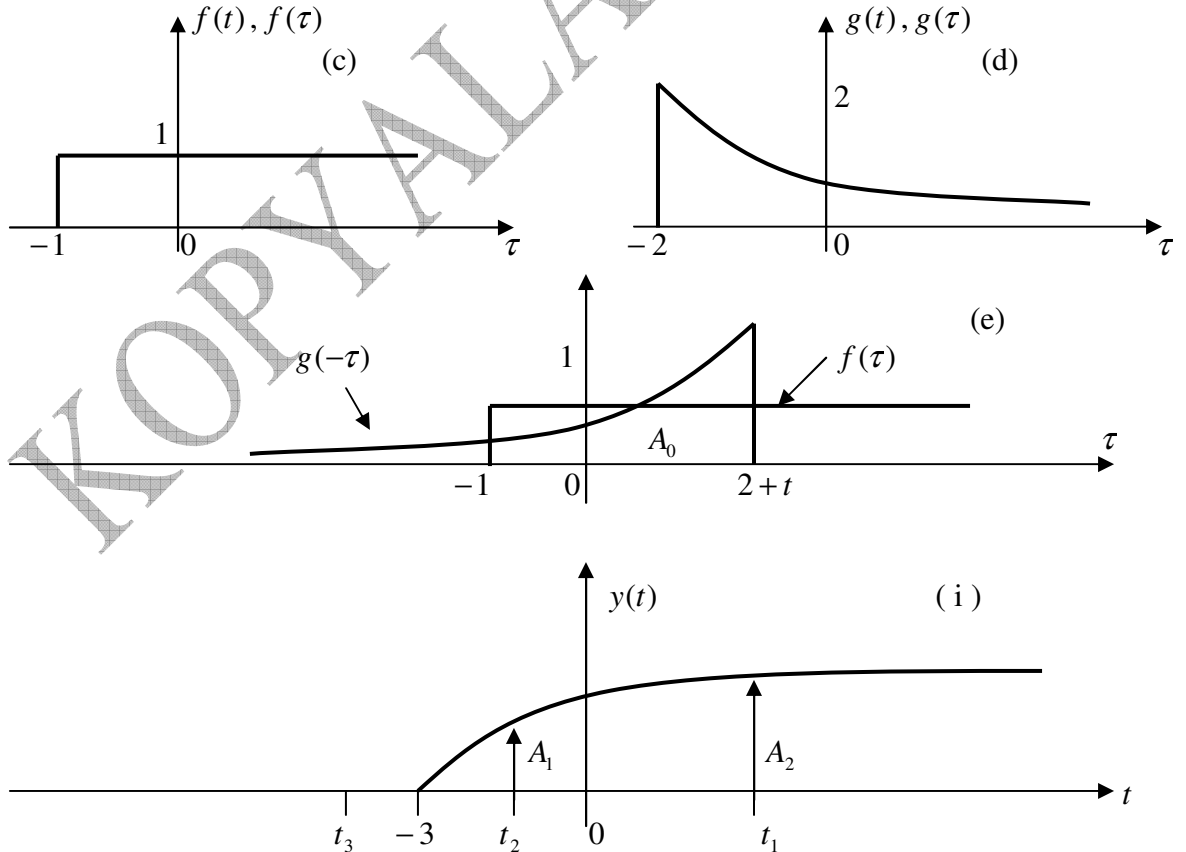
Denklem göz önüne alındığında yapılan, her hangi bir “ t ” anındaki $f(t)$ girişi için, $h(t)$ sistem impulsinin değerini bulmaktır. Bunun için bu “ t ” anında her iki işaretin kesiştiği ortak bir alan varsa bu “ t ” anındaki, sistem cevabı olarak integrasyonla hesaplanmaktadır. Eğer söz konusu “ t ” anında sistem girişi veya impuls cevabı mevcut değilse, herhangi bir alan değeri hesaplanamamaktadır. Aslında $h(t - \tau)$ fonksiyonuyla her hangi bir “ t ” anında, $h(t)$ fonksiyonunun sahip olduğu değerler, $h(t)$ fonksiyonunun τ kadar ötelenmesiyle $h(t - \tau)$ biçiminde belirlenmektedir. Bu τ ile belirlenen $h(t)$ nin değeri, sistemin girişi olan $f(t)$ fonksiyonunda $f(\tau)$ ile belirlenmektedir. Bu yolla $f(t)$ nin $\delta(t - \tau)$ impulsiyle belirlenen her bir girişine karşılık gelen $h(t)$ değeri $h(t - \tau)$ olarak saptanmaktadır. Bu anlamda $f(\tau) h(t - \tau)$ konvülyasyon denkleminin tek taraflı, sağ taraf yönünde hareket ettiği görülmektedir. Aslında grafik olarak da aynı yönü görebilmekteyiz. Çünkü $h(t)$, önce $h(\tau)$, ardından da $h(-\tau)$ ve $h(t - \tau)$ dönüşümlerinden sonra $t \geq 0$ için soldan sağa doğru hareket etmektedir.

Ancak grafik anlamda bir farklılığı vurgulayabiliriz. $h(t)$ sistem impuls cevabı, $h(\tau)$ nin ardından $h(-\tau)$ ile zaman olarak terslendikten sonra, grafik anlamda ters tarafıyla $f(\tau)$ ile kesişim alanlarını oluşturduğu izlenimini vermektedir. Böyle olmasına rağmen, aslında denklemden $f(t)$ girişinin $\delta(t - \tau)$ impulsiyle belirlenen her bir impuls girişine karşılık gelen $h(t)$ değeri $h(t - \tau)$ olarak belirlenmektedir. Bu anlamda aslında $h(\tau)$ değil, orijinal “ t ” zamanında verilen $h(t)$ fonksiyonu, $h(t - \tau)$ olarak $\delta(t - \tau)$ girişlerine karşılık gelen impuls cevaplarını üretmektedir. Bu nedenle grafik gösterimde farklı izlenim verse de, aslında konvülyasyonla sistem girişine karşılık gelen sistem impuls cevabı üretilmektedir. Burada önemli olan matematiksel olarak vurgulandığı gibi, sistem giriş ve impuls cevaplarının dağılımlarında gösterilen her ikisinin de mevcut olduğu ortak (kesişim) zamanları için sistem cevabının (konvülyasyonun) arandığıdır. İkisinin veya herhangi birinin kaydırılarak ikisinin zaman olarak örtüşme koşulunun arınmadığı bilinmelidir.

Her ikisi de mevcut orijinal pozisyonlarında değerlendirilmektedir. Yani sistem girişini başlangıcı $t=3$.sn ve impuls cevabının başlangıcı $t=5$. sn den itibaren başlıyorsa bu durumda sistemin $t=(3-5)$ sn arasında bir girişi olmayacağından, doğal olarak sistemin bu aralıkta bir cevabı da olmayacaktır ve sistem buna göre değerlendirilecektir. Bu nedenle girişin 2 sn daha sağa kaydırılarak impuls cevabıyla aynı $t=5$. sn ile karşılaştırılması yoluyla hesaplanacak konvülyasyon veya sistem cevabı yanlış olacaktır. Çünkü bu yapıldığında girişin $t=3$.sn değil $t=5$. sn için çıkış araştırılıyor demektir. Bu anlamda sistem girişinin $t=3$.sn anı için yanlış bir giriş, dolayısıyla çıkış söz konusu olabilecektir. Bu açıdan yukarıdaki örneği göz önüne aldığımızda,



görüldüğü gibi eğer giriş $f(t)$, impuls cevabı da $g(t)$ ise, impuls cevabı durumundaki fonksiyon olup $t=-2$ de aktif olmasına rağmen bu anda giriş olmadığından, aslında sistem açısından $t=-2$ anında çıkışın yani cevabın sıfır olması gerekirdi. Ancak çıkışını aşağıda göreceğimiz (şekil i) sistemin $t=-3$ anından itibaren ($t=-2$ den önce) cevap ürettiğini görmekteyiz. Bir çelişki gibi görünen bu durumu aşağıdaki şekiller (c,d,e) üzerinden daha yakından inceleyelim.



Şekil 17 Konvülyasyon işleminin grafik gösterimi

Şekil (b) de görülen $g(t)$, önce $g(\tau)$, ardından $g(-\tau)$ olduktan sonra, $g(-\tau)$ nin sınırları $(-\infty, 2)$ arasında değişecektir. Bir de $g(-\tau+t)$ olarak “ t ” artımı verildikten sonra $-\tau = 2$ olarak göz önüne alınırsa, $g(2+t)$ söz konusu olacaktır (şekil e). $f(\tau)$ nin sınırı $\tau = -1$ den başladığı için, $g(2+t)$ nin $f(\tau)$ deki $\tau = -1$ noktasını kapsaması için “ t ” nin en az $2+t = -1 \rightarrow t = -3$ veya $t < -3$ olması gerektiğinden, sistem cevabı olarak $y(t)$ grafiğinde $t = -2$ den önce gelen $t \geq -3$ noktası için bir cevap üretildiğini görmekteyiz. Bundan dolayı $f(t)$ nin başlama sınırının $t = -1$ ve $g(t)$ nin ise $t = -2$ olmasına rağmen her ikisinden daha önceki $t < -3$ anında sistemin cevabı görünmektedir. Burada $f(t)$, $t = -1$ de, $g(t)$, $t = -2$ de başlamalarından dolayı, lineer, zamandan bağımsız, en önemlisi de nedensel bir sistemin söz konusu olamayacağını söyleyebiliriz. Yukarıda ele aldığımız örnek nedensel bir sistem kaygısı taşımadan, konvülyasyonun grafik anlatımını içerdiğinden, söz konusu işaretlerin ve cevaplarının $t < 0$ için var oldukları düşünülmüştür.

Oysa ki, sistem girişinin sıfır olduğu yerlerde doğal olarak $h(t)$ sistem impuls cevabı da sıfır olacaktır. Veya sistem girişinin mevcut olduğu anlarda impuls cevabı mevcut değilse çıkış yine sıfır olacaktır. Bu açıdan lineer, nedensel ve zamandan bağımsız sistemin tüm gerekleri yerine getirilmektedir.

Konvülyasyonun Matematiksel Yorumu

Girişi $f(t)$, sistem impuls cevabı $h(t)$ olan bir lineer zamanla değişmeyen sistemin cevabı aşağıda veriel konvülyasyon biçimindeydi.

$$y(t) = f(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) h(t - \tau) d\tau$$

Konvülyasyonun grafik yorumu göz önüne alındığında başlangıçta verilen $f(t)$ ve $h(t)$, daha sonra $f(\tau)$ ve $h(-\tau)$ biçiminde ifade edilmekteydiler. Bu gösterimde $h(-\tau)$ ve $f(\tau)$ pozisyonları dolayısıyla $f(\tau)h(-\tau)$ biçiminde örtüşmekte (kesişmekte), dolayısıyla integrasyona uygun bir alan oluşturmaktaydılar. Buna göre $f(\tau)h(-\tau)$ ifadesinin sistemin yalnızca τ anındaki cevabını üreteceği görülmektedir. Bu durumda konvülyasyon integralimiz

$$y = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) h(-\tau) d\tau$$

olarak düşünülmelidir. Bu da sabit bir değer demektir. Çünkü integral $y(t)$ değil yalnızca y gibi bir şabite dönüşmüştür. Bu yazıma göre oluşan kesişim alanından başka bir değer elde edilemeyecektir. Daha manual, sınırlı ve kullanışsız bir hesaplama yaklaşımıdır. Bu integrasyonun belki zorlama olarak yalnızca $t = 0$ anındaki bir cevap olduğu düşünülebilir. Oysa ki sistemin $t = 0$ dışında $t = (-\infty, +\infty)$ aralığındaki anlarındaki cevaplarında bilinmesi gerekir. Sistemin bundan başka bir cevabı olmadığı gibi yanlış bir durum söz konusudur. Oysa ki, daha farklı anlarda oluşabilecek kesişim alanlarını da bilmek istiyoruz. Dolayısıyla

sistem cevabı için $y = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) h(-\tau) d\tau$ değil, $y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) h(t - \tau) d\tau$ gibi bir gösterime ihtiyaç vardır.

Bu yüzden $f(\tau)h(-\tau)$ ifadesi pek anlamlı değil, olmadığı gibi de yetersizdir. Bu şekilde sistem cevabını sabit bir y , yerine $y(t)$ gibi zamanla değişen bir fonksiyona bağlı elde etmek daha yararlıdır. Çünkü bu yaklaşımla sistem cevabını $t = (-\infty, +\infty)$ aralığındaki her bir “ t ” anı için hesaplamak mümkün olacaktır.

Bunun önüne geçmek için $f(\tau)h(t-\tau)$ yazımı daha tutarlı olacaktır. Çünkü bu halde $h(-\tau)$ işaretini $t = \pm$ değerlerine bağlı olarak $-\tau$ nun sağına veya soluna ötelemek (kaydırmak) mümkün olacaktır. Bu da, $f(\tau)h(t-\tau)$ gösterimine uygun yeni kesişim alanlarına imkan verecektir. Yeni kesişim alanlarını sistem açısından değerlendirdiğimizde, sistemin “ t ” nin $t = \pm$ gibi çeşitli değerlerine bağlı anlamlarındaki sistem cevabı anlamı ortaya çıkacaktır. İdeal veya teorik anlamda yaklaştığımızda $t = (-\infty, +\infty)$ sonsuz aralığındaki sistemin $y(t)$ cevabını elde etmek mümkün olacaktır. Buna uygun sistem cevabını veren konvülyasyon daha doğru yazımla bu kez daha tutarlı olarak

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) h(t-\tau) d\tau$$

formunda olacaktır. Sürekli zamanda $t = (-\infty, +\infty)$ olacağından sonsuz tane “ t ” anında integral yani alan söz konusu olacağından bunların toplamı sistem cevabını oluşturacaktır. Bu yolla $f(t)$ girişinin (girişi oluşturan her bir impulsin) her bir anındaki değerine karşılık gelen $g(t)$ impuls cevabı, kesişim alanı olarak $f(t) * g(t)$ konvülyasyonu olarak elde edilmektedir. Buradan konvülyasyonun, $t = (-\infty, +\infty)$ sonsuz aralığındaki herhangi bir andaki değer için sistemin cevabını, elde edilen $y(t)$ fonksiyonuyla gözlemlemeyi mümkün kılan önemli bir operatör olduğunu görmekteyiz. Eğer $f(\tau)g(t-\tau)$ yerine $f(\tau)g(-\tau)$ kullanılsaydı, bu yolla integrasyonu $y(t)$ gibi “ t ” ye bağlı bir fonksiyon olarak ifade edemeyeceğimiz, şimdi daha net olarak görülmektedir.

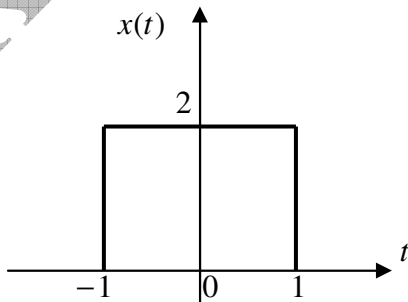
Örnek

Giriş $x(t)$ ve sistem impuls fonksiyonu $h(t)$ aşağıdaki gibi tanımlanıyorsa sistem çıkışı $y(t)$ yi hesaplayın.

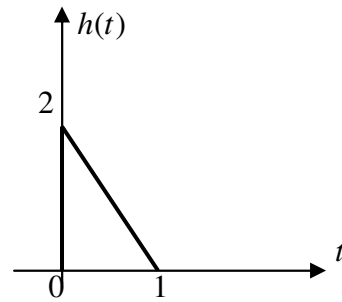
$$x(t) = \begin{cases} 2, & -1 < t < 1 \\ 0, & -1 > t > 1 \end{cases} ; \quad h(t) = \begin{cases} -2t + 2, & 0 < t < 2 \\ 0, & 0 > t > 2 \end{cases}$$

Çözüm

Verilen tanımlara göre $x(t)$ ve $h(t)$ nin değişimleri aşağıdaki gibi olacaktır.



- a -



- b -

Şekil 18 Sistem giriş ve impuls fonksiyonları

Sistem çıkışı $y(t)$, giriş ve çıkışın konvolüsyonu olarak $y(t) = x(t) * h(t)$ ile hesaplanacaktır.

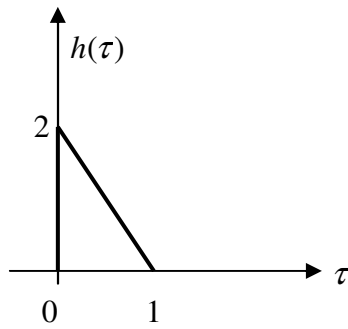
$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau$$

Kuralı gereğince impuls fonksiyonu üzerinde teknik olarak convolution prosesi ile ilgili olarak sırasıyla

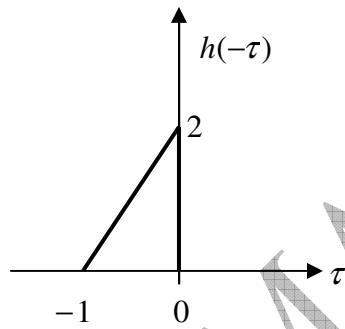
$$1. h(t) \rightarrow h(\tau), 2. h(\tau) \rightarrow h(-\tau), 3. h(-\tau) \rightarrow h(-\tau + t), 4. h(-\tau + t) = h(t - \tau)$$

gibi adımların yerine getirilmesi gerekecektir.

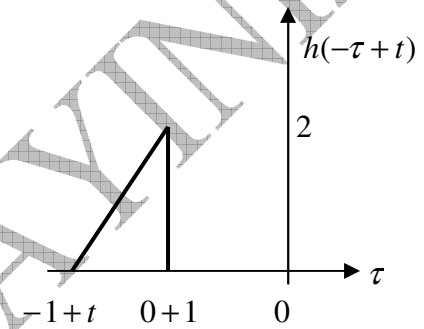
1. $h(t) \rightarrow h(\tau)$



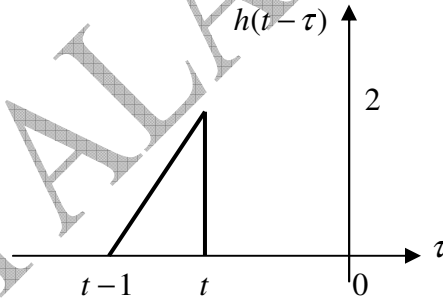
2. $h(\tau) \rightarrow h(-\tau)$



3. $h(-\tau) \rightarrow h(-\tau + t)$



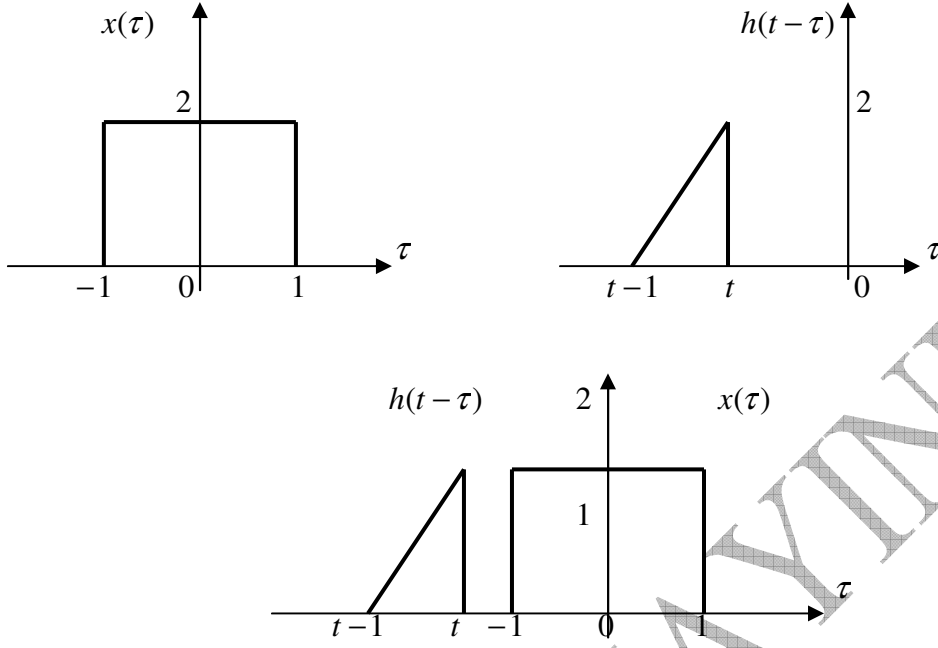
4. $h(-\tau + t) = h(t - \tau)$



- c -

Şekil 19 $h(t)$ Sistem impuls fonksiyonunun $h(t - \tau)$ durumuna getirilme aşamaları

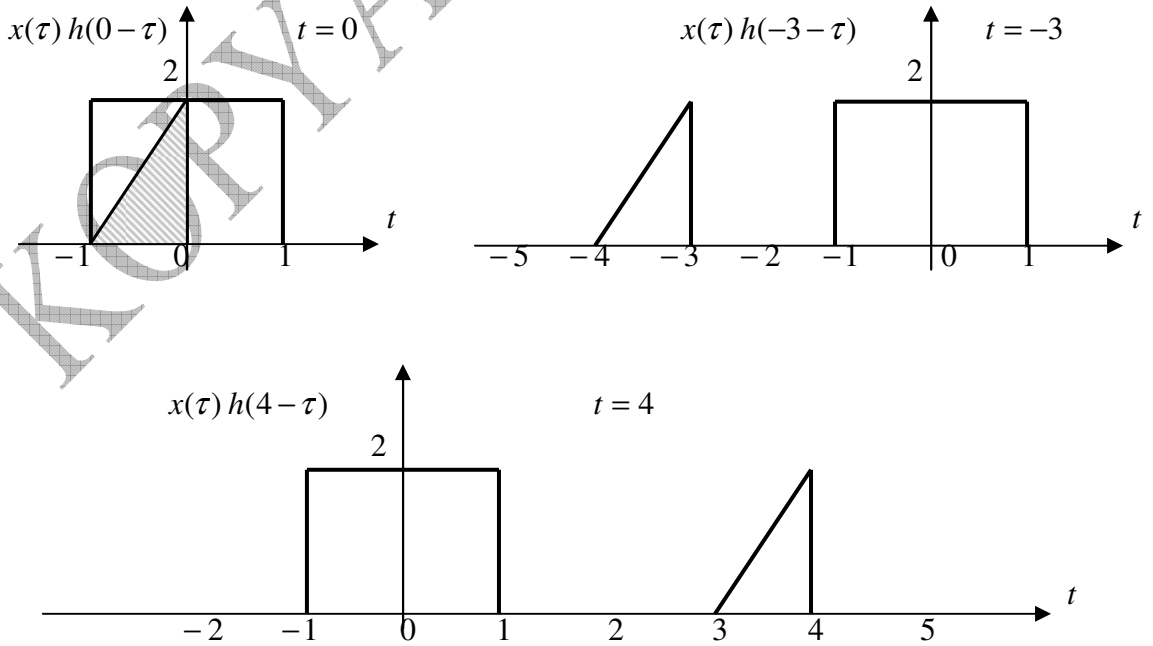
Giriş işreti $x(t)$ de “ τ ” gösterimine uygun biçimde $x(\tau)$ olacak şekilde düşünüldükten sonra Şekil (c) den sonra $x(t)$ ve $h(t)$ nin görünüşleri aşağıdaki gibi olacaktır ;



- d -

Şekil 20 Sistem giriş $x(\tau)$ ve impuls fonksiyonunun $h(t-\tau)$ birlikte gösterimi

Şekil (d) ve $y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t-\tau) d\tau$ denklemi göz önüne alındığında örnek olarak $t = -3$, $t = 0$ ve $t = 4$ için sistem davranışının ve convolution işleminin nasıl olacağına göz atalım.



- e -

Şekil (e) den görüldüğü gibi $t = 0$ için $x(t)$ ve $h(t)$ örtüşerek uç noktaları “ $t-1$ ve t ” olan $h(t-\tau)$ fonksiyonunun $t = 0$ için uç noktaları “ -1 ve 0 ” noktalarına konumlanmaktadır. Bu halde iken $x(\tau)h(0-\tau)$ şeklinde toplam alanı “1” birim olan ve taralı üçgenle gösterilen alan hesaplanmaktadır. Benzer şekilde uç noktaları “ $t-1$ ve t ” olan $h(t-\tau)$ fonksiyonu $t = -3$ için uç noktaları “ -4 ve -3 ” noktalarına konumlandığında, $x(t)$ ve $h(t)$ arasında bir örtüşme olmayacağı için çıkış veya ortak alan sıfır olacaktır. Son seçenek olan $t = 4$ için uç noktaları “ $t-1$ ve t ” olan $h(t-\tau)$ fonksiyonunun uç noktaları bu kez $t = 4$ için “3 ve 4” noktalarına konumlandığında, $x(t)$ ve $h(t)$ arasında yine bir örtüşme olmayacağı için çıkış veya ortak alan aynı şekilde sıfır olarak hesaplanacaktır. Buradan devamla $t = -3, 0, 4$ noktalarının dışındaki özellikle örtüşen değerlere göre hesaplama yapmak için başlangıçta verilen sisteme ait işaretlerin

$$x(t) = \begin{cases} 2, & -1 < t < 1 \\ 0, & -1 > t > 1 \end{cases} ; \quad h(t) = \begin{cases} -2t + 2, & 0 < t < 2 \\ 0, & 0 > t > 2 \end{cases}$$

tanım aralıkları göz önüne alınarak $y(t) = x(t) * h(t)$ convolution hesaplanmasına geçilebilir. Bunun için convolution Şekil (d) ye göre “ t ” zaman domenini göz önüne alınarak belirli aralıklar için hesaplanacaktır. Öncelikle

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t-\tau) d\tau$$

ifadesinde yer alan girişin dörtgen oluşundan dolayı $x(\tau) = 2$ ve $h(t) = -2t + 2$ nin $h(t-\tau) = -2(t-\tau) + 2 = 2(-t+1+\tau)$ olduğunu belirleyerek hesaplamalara başlayalım.

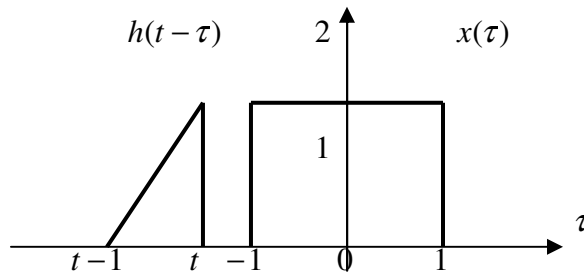
Not : Yukarıda Şekil (b) de verilen üçgene ait $h(t) = -2t + 2$ denklemi aslında bir tür “doğru denklemi” dir. Koordinatları belli olan bir doğrunun belirlenmesini iyi bilmekteyiz :

$$\frac{x-x_1}{x_1-x_2} = \frac{y-y_1}{y_1-y_2} ; \quad \frac{x-1}{1-0} = \frac{y-0}{0-2}$$

$$y(x) = -2x + 2 ; \quad x \rightarrow t \quad \text{ve} \quad y \rightarrow h \quad \text{için} \quad h(t) = -2t + 2$$
$$t = t - \tau \quad \text{için} \quad , \quad h(t-\tau) = -2(t-\tau) + 2 = 2(-t+1+\tau)$$

1. $t < -1$ için

Bu durum Şekil (d) ye özdeş olacaktır.



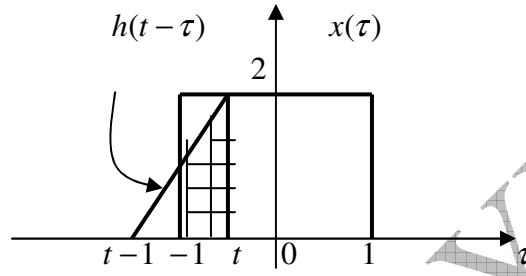
- f -

$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t-\tau) d\tau$ bağıntısına göre $x(\tau)$ ve $h(t-\tau)$ arasında bir örtüşme olmadığı için convolution, dolayısıyla çıkış sıfır olacaktır.

$$y(t) = 0, \quad t < -1$$

2. $-1 < t < 0$ için

Bu koşul için iki fonksiyon aşağıdaki gibi bir kesişim oluşturacaklardır.



- g -

burada taralı alanın hesaplanması gerekecektir. Bunun için kullanılacak

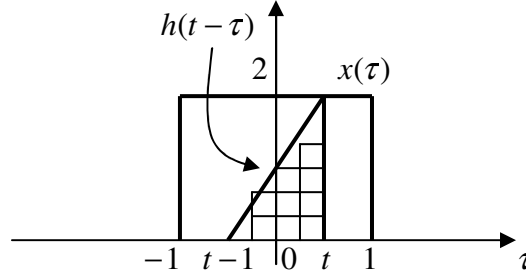
$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t-\tau) d\tau$$

integrasyonda gerekli parametrelerin yerine yazılması gerekecektir. Integrasyondaki alt ve üst sınırın $(-1, t)$ olduğu, $x(\tau) = 2$ (dörtgenin değeri), $h(t) = -2t + 2$ ise $h(t-\tau) = -2(t-\tau) + 2 = 2(-t+1+\tau)$ alınırsa integrasyon,

$$\begin{aligned} y(t) &= x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t-\tau) d\tau = \int_{-1}^t (2) [2(-t+1+\tau)] d\tau = 4 \int_{-1}^t [(1-t)+\tau] d\tau \\ &= 4 \left[(1-t)\tau + \frac{\tau^2}{2} \right]_{-1}^t = 4 \left[(1-t)t + \frac{t^2}{2} - \left[(1-t)(-1) + \frac{(-1)^2}{2} \right] \right] = 4 \left[t - t^2 + \frac{t^2}{2} - \left[-1 + t + \frac{1}{2} \right] \right] \\ &= 4 \left[t - \frac{t^2}{2} + 1 - t - \frac{1}{2} \right] = 4 \left[-\frac{t^2}{2} + \frac{1}{2} \right] = (-2t^2 + 2) \\ &= 2(1-t^2) \end{aligned}$$

3. $0 < t < 1$ için

Bu koşul için iki fonksiyon aşağıdaki gibi oluşacaktır.



- h -

Taralı alanın benzer şekilde hesaplanması gerekecektir. Bunun için kullanılacak

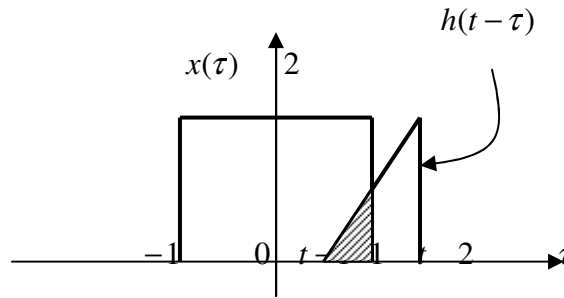
$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t-\tau) d\tau$$

integrasyonda gerekli parametrelerin yerine yazılması gerekecektir. Integrasyondaki alt ve üst sınırın $(t-1, t)$ olduğu, $x(\tau) = 2$ (dörtgenin değeri), $h(t) = -2t + 2$ ise $h(t-\tau) = -2(t-\tau) + 2 = 2(-t+1+\tau)$ alınırsa integrasyon,

$$\begin{aligned} y(t) &= x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t-\tau) d\tau = \int_{t-1}^t (2)[2(-t+1+\tau)] d\tau = 4 \int_{-1}^t [(1-t)+\tau] d\tau \\ &= 4 \left[(1-t)\tau + \frac{\tau^2}{2} \right]_{t-1}^t = 4 \left[(1-t)t + \frac{t^2}{2} - \left[(1-t)(t-1) + \frac{(t-1)^2}{2} \right] \right] \\ &= 4 \left[\left[t - t^2 + \frac{t^2}{2} \right] - \left[-(1-2t+t^2) + \frac{t^2-2t+1}{2} \right] \right] = 4 \left[\left[t - \frac{t^2}{2} \right] - \left[-1 + 2t - t^2 + \frac{t^2}{2} - t + \frac{1}{2} \right] \right] \\ &= 4 \left[\left[t - \frac{t^2}{2} \right] - \left[-\frac{t^2}{2} + t - \frac{1}{2} \right] \right] = 4 \left[t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^2}{2} - t + \frac{1}{2} \right] = 4 \left[\frac{1}{2} \right] \\ &= 2 \end{aligned}$$

4. $1 < t < 2$ için

Bu koşul için iki fonksiyon aşağıdaki gibi oluşacaktır.



- i -

Taralı alanın benzer şekilde hesaplanması gerekecektir. Bunun için kullanılacak

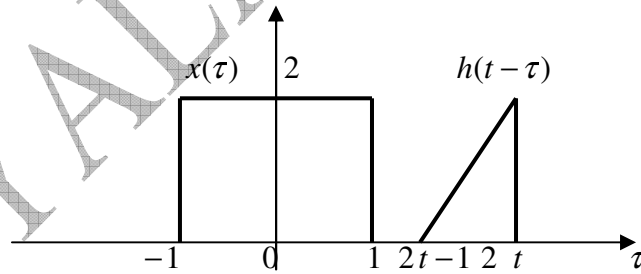
$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau$$

integrasyonda gerekli parametreler olarak alt ve üst sınırın $(t-1, 1)$ olduğu, $x(\tau) = 2$ (dörtgenin değeri), $h(t) = -2t + 2$ ise $h(t - \tau) = -2(t - \tau) + 2 = 2(-t + 1 + \tau)$ alınırsa integrasyon,

$$\begin{aligned} y(t) &= x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau = \int_{t-1}^1 (2)[2(-t + 1 + \tau)] d\tau = 4 \int_{t-1}^1 [(1 - t) + \tau] d\tau \\ &= 4 \left[(1 - t) \tau + \frac{\tau^2}{2} \right]_{t-1}^1 = 4 \left[\left[(1 - t) + \frac{1}{2} \right] - \left[(1 - t)(t - 1) + \frac{(t - 1)^2}{2} \right] \right] \\ &= 4 \left[\left[1 - t + \frac{1}{2} \right] - \left[-(1 - 2t + t^2) + \frac{t^2 - 2t + 1}{2} \right] \right] = 4 \left[\left[\frac{3}{2} - t \right] - \left[-1 + 2t - t^2 + \frac{t^2}{2} - t + \frac{1}{2} \right] \right] \\ &= 4 \left[\left[\frac{3}{2} - t \right] - \left[-\frac{t^2}{2} + t - \frac{1}{2} \right] \right] = 4 \left[\frac{3}{2} - t + \frac{t^2}{2} - t + \frac{1}{2} \right] = 4 \left[\frac{t^2}{2} - 2t + 2 \right] = (2t^2 - 8t + 8) = 2(t^2 - 4t + 4) \\ &= 2(t - 2)^2 \end{aligned}$$

5. $2 < t$ için

Bu koşul için iki fonksiyon aşağıdaki gibi oluşacaktır.



- j -

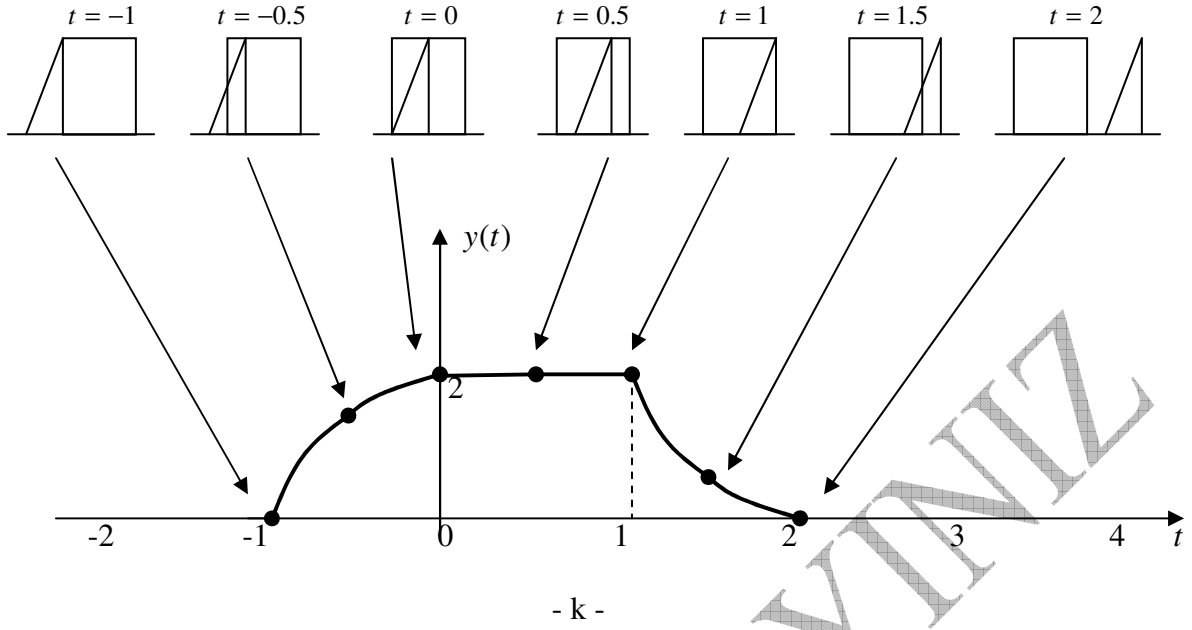
Son durumda $x(\tau)$ ve $h(t - \tau)$ arasında örtüşme olmadığından bir alan söz konusu olamayacağından convolution veya sistem çıkış fonksiyonu sıfır olacaktır.

$$y(t) = 0, \quad t > 2$$

bulunan çıkışlar aşağıdaki tabloda ayrıca derlenmiştir.

Çıkış	$t < -1$	$-1 < t < 0$	$0 < t < 1$	$1 < t < 2$	$2 < t$
$y(t)$	0	$2(1 - t^2)$	2	$2(t - 2)^2$	0

Tablo nihai olarak aşağıdaki değişime gösterir.

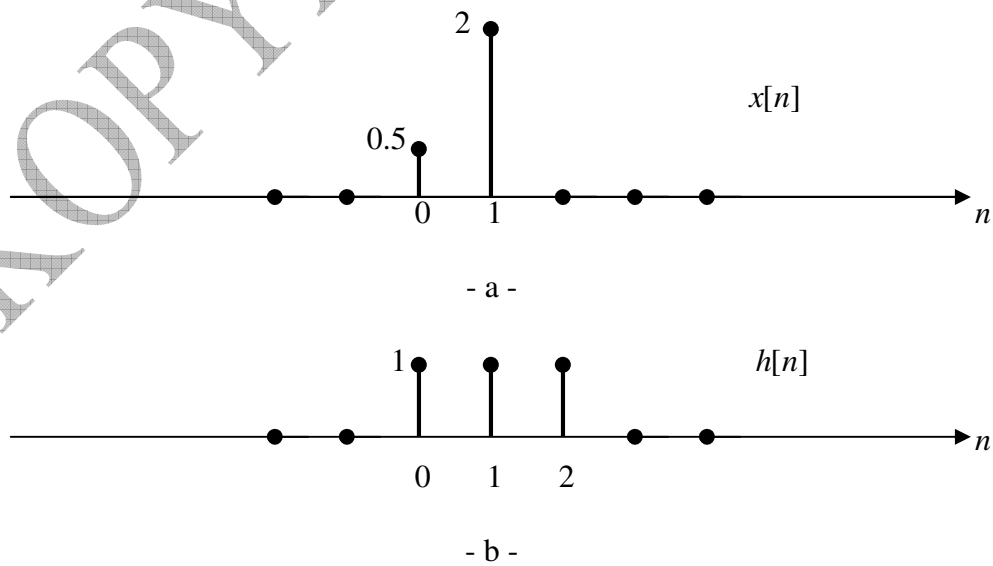


Şekil 21 Örneğe ait çıkışın $y(t) = x(t) * h(t)$ convolution ile hesaplanması

Nihai $y(t)$ çıkışı üzerinde hesaplamalarda göz önüne alınan $t = -1, -0.5, 0, 0.5, 1, 1.5, 2$ noktaları verilmişken, benzeri değerlerde ayrıca hesaplanabilir.

Örnek

Şekil (a) ve (b) de verilen giriş $x[n]$ ve impuls response $h[n]$ fonksiyonlarına göre çıkış $y[n] = x[n] * h[n]$ fonksiyonundaki convolution işlemini yorumlayın.



Şekil 22 Ayırık LTI sistem giriş ve impuls response fonksiyonları

Çözüm

Ayrık sistemin $y[k]$ cevabını hesaplamak üzere ayrık konvülyasyon bağıntısı aşağıdaki gibi göz önüne alınacaktır.

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] h[n-k] = \sum_{k=0}^1 x[k] h[n-k]$$

Giriş $x[n]$ iki değerden ($n = 0,1$) oluştuğu için toplam sınırları iki değeri kapsamak üzere (0,1) olarak seçilmiştir.

$$y[-1] = \sum_{k=0}^1 x[k] h[-1-k] = x[0] h[-1-0] + x[1] h[-1-1] = (0.5 \times 0) + (2 \times 0) = 0$$

$$y[0] = \sum_{k=0}^1 x[k] h[0-k] = x[0] h[0-0] + x[1] h[0-1] = (0.5 \times 1) + (2 \times 0) = 0.5$$

$$y[1] = \sum_{k=0}^1 x[k] h[1-k] = x[0] h[1-0] + x[1] h[1-1] = (0.5 \times 1) + (2 \times 1) = 2.5$$

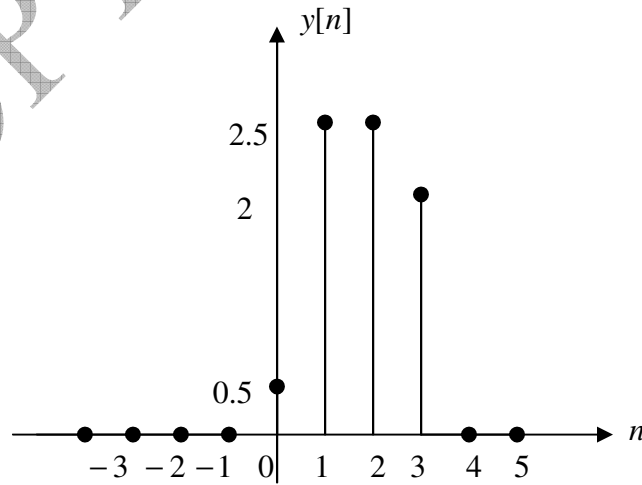
$$y[2] = \sum_{k=0}^1 x[k] h[2-k] = x[0] h[2-0] + x[1] h[2-1] = (0.5 \times 1) + (2 \times 1) = 2.5$$

$$y[3] = \sum_{k=0}^1 x[k] h[3-k] = x[0] h[3-0] + x[1] h[3-1] = (0.5 \times 0) + (2 \times 1) = 2$$

$$y[4] = \sum_{k=0}^1 x[k] h[4-k] = x[0] h[4-0] + x[1] h[4-1] = (0.5 \times 0) + (2 \times 0) = 0$$

Bulunan çıkışlardan görülebileceği gibi $y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] h[n-k]$ ifadesinde $n > 0$

($n = 0,1,2,3,\dots$) seçildiği zaman, $h[n-k]$ ifadesi soldan sağa doğru ötelenerek kaymaya devam eder ($k > 0$, kabul edilmiştir :casualite). Elde edilen sistem çıkışlarını toparlarsak, ayrık sistemin cevabı aşağıdaki görünümde gerçekleşecektir.



Şekil 23 Ayrık sistem cevabı

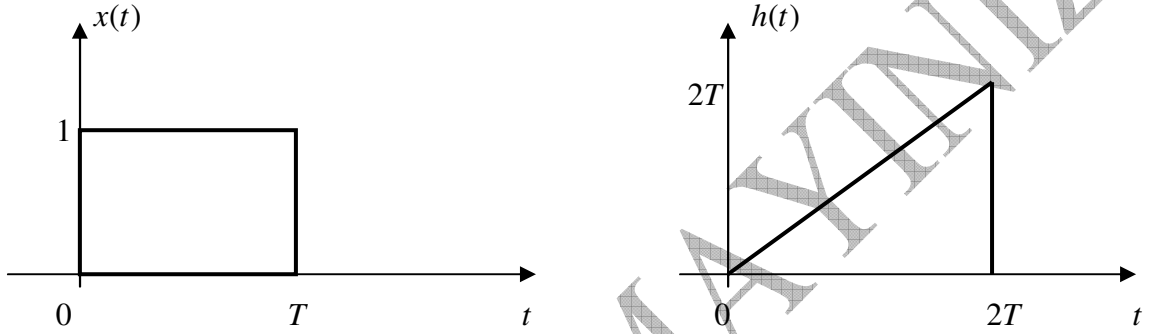
Örnek

Giriş $x(t)$ ve sistem impuls fonksiyonu $h(t)$ aşağıdaki gibi tanımlanıyorsa sistem çıkışı $y(t)$ yi hesaplayın.

$$x(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < T \\ 0, & t < 0 \end{cases} ; \quad h(t) = \begin{cases} t, & 0 < t < 2T \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

Çözüm

Tanımlara göre ilgili fonksiyonlar aşağıdaki gibi düşünülür.



Şekil 24 Sistem giriş ve çıkış fonksiyonları

Buradan başlayarak

1. $h(t) \rightarrow h(\tau)$, 2. $h(\tau) \rightarrow h(-\tau)$, 3. $h(-\tau) \rightarrow h(-\tau + t)$, 4. $h(-\tau + t) = h(t - \tau)$

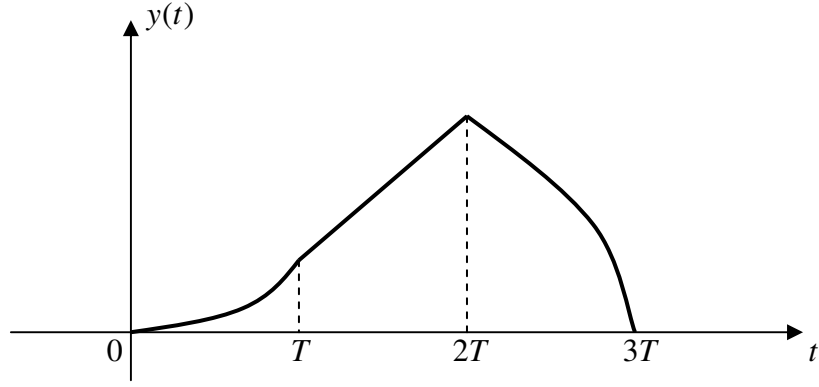
adımlarından sonra gerekli hesaplamalar sonucu çıkış fonksiyonu $y(t)$

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau$$

bağıntısı göz önüne alınarak aşağıdaki gibi hesaplanır.

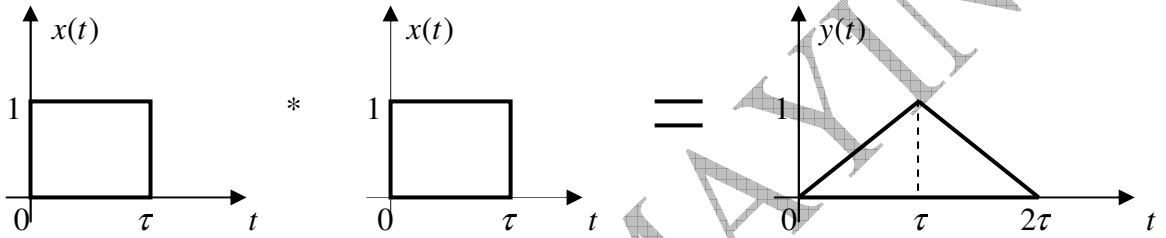
$$y(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \frac{1}{2}t^2 & 0 < t < T \\ Tt - \frac{1}{2}T^2 & 2T < t < 3T \\ -\frac{1}{2}t^2 + Tt + \frac{3}{2}T^2 & 3T < t \end{cases}$$

Tabloya göre nihai olarak $y(t)$ çıkışına ait değişim aşağıdaki şekilde olacaktır.



Şekil 25 Örneğe ait çıkışın $y(t) = x(t) * h(t)$ convolution ile hesaplanması

Örnek



Şekil 26 Konvülyasyon işlemi

Görüldüğü gibi iki dörtgen dalganın konvülyasyonunun

$$y(t) = x(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t - \tau)x(\tau) d\tau$$

biçimindeki konvülyasyonunun neticesi, söz konusu darbelerin τ sürelerinin toplamı olan 2τ olarak gerçekleşmiştir.

KONVÜLYASYON, SİSTEM ve FİLTRELER

Konvülyasyon operatörü gerek sürekli gerekse de ayrık filtre tasarımlarında önemli işleve sahiptir. Konvülyasyon

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t - \tau) d\tau = x(t) * h(t)$$

bağıntısıyla sürekli sistemlerin frekans cevaplarını analiz ederek analog filtrelerin tasarımında etkili olur. Bu yolla sürekli yani analog özellikteki alçak geçiren, yüksek geçiren, band geçiren ve band durduran özellikli filtrelerin tasarlanmaları, sistemin frekans cevap analizleriyle mümkün olacağından, sistem olarak filter transfer fonksiyonunun elde edilmesiyle filtrelerin davranışları incelenebilmektedir. Bu yüzden konvülyasyon işlemi analog filter analiz ve tasarımlarında oldukça önemli işleve sahiptir. Buna ek olarak konvülyasyon işlemi,

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]$$

yapısıyla ayırık sistemlerin en bilinen uygulaması olan ayırık filtrelerin tasarlanmasında da önemli role sahiptir. Bu bölümde bu yaklaşıma biraz açıklık getirmek adına, ayırık filtreler kısaca ele alınacaktır. Sistem olarak ayırık filtreler yinelenen (recursive) veya yinelenmeyen (nonrecursive) filtreler olarak

$$y[n] = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x[n-k] \quad \text{yinenlenmeyen (nonrecursive) filtre}$$

çıkış, girişin o anki ve önceki değerlerinden oluşan (nedensel) ve

$$y[n] = \sum_{r=0}^{\infty} a_r y[n-r] + \sum_{k=0}^{\infty} b_k x[n-k] \quad \text{yinenlenen (recursive) filtre}$$

Formatında, çıkış girişine ek olarak çıkışında hem o anki hemde önceki ki değerlerine bağlı değişen nedensel filtrelerdir. Genel anlamda her iki filtrenin lineer, zamandan bağımsız ve nedensel filtreler olduğunu görmekteyiz. Nedensellik özellikle önemlidir, çünkü filtreler veya sistemler nedensel olmadıkları sürece tasarlanamaz ve gerçekleştirilemezler. Eğer ayırık sistem çıkışını veren konvülyasyonu aşağıdaki gibi hatırlarsak

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=0}^{\infty} x[k]h[n-k]$$

ayırık konvülyasyon işleminin ilgili filtrelerin tasarımında rahatlıkla kullanılabileceği görülmektedir. Eğer her iki filtreyi de sistem olarak ele alırsak, ifadelerinden causal ve causal olmayan özelliklerde olabilecekleri görülmektedir. Eğer filtrelerin çıkışları girişin mevcut (o anki) ve geçmiş değerlerine göre çalışıyorsa filtre aynı zamanda nedensel (casual), eğer gelecek değerlerine göre çalışıyorsa bu kez de nedensel olmayan (noncasual) filtreler olarak anılırlar. Şimdi ayırık konvülyasyonun uygulama alanlarını oluşturan söz konusu filtrelere sistem açısından biraz yakından bakalım.

Korelasyon - Konvülyasyon

Korelasyon

Korelasyon, iki vektörün veya işaretin benzerlik karşılaştırılması için kullanılan bir yöntemdir. Eğer \mathbf{f} ve \mathbf{x} vektörleri arasında bir benzerlik varsa, c miktarı ile tanımlanan benzerliğin büyüklüğü yani korelasyon katsayısı, aslında vektörler arasındaki açının θ derecelendirmesinden başka bir şey değildir.

$$c_n = \cos \theta = \frac{\mathbf{f} \cdot \mathbf{x}}{|\mathbf{f}| |\mathbf{x}|}$$

Görüldüğü gibi, c_n benzerlik ölçüsü, vektörler arasındaki ilişkiyi tanımlamaya yarayan korelasyon katsayısı olup değeri,

$$-1 \leq c_n \leq 1$$

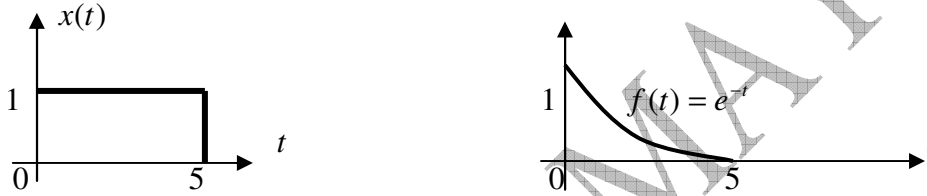
Eğer iki vektör tam anlamıyla aynı yönde birbirlerine göre uyumlaştırılırlarsa benzerlik katsayısı $c_n = 1$ olur ki, bu mükemmel bir benzerliğe işaret eder. Eğer ters yönde oluşturulurlarsa bu kez de benzerlik katsayısı $c_n = -1$ olur, bu da ters yönde tam bir benzerlik olduğu anlamına gelecektir. Eğer duruma vektörler değil de işaretler açısından bakarsak, $f(t)$ ve $x(t)$ işaretlerinin $(-\infty, \infty)$ aralığındaki benzerliğini tanımlamaya yarayacak benzerlik katsayısı c_n

$$c_n = \frac{1}{\sqrt{E_f E_x}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)x(t)dt \quad \text{korelasyon}$$

olduğu görülür. Denklemdaki E_f ve E_x , f ve x işaretlerinin enerjilerini göstermektedir.

Örnek

Aşağıda verilen $x(t)$ ve $f(t)$ işaretlerinin korelasyonunu araştırın.



Şekil 27

Çözüm

$$c_n = \frac{1}{\sqrt{E_f E_x}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)x(t)dt$$

$$E_x = \int_0^5 x^2(t)dt = \int_0^5 (1)^2 dt = 5$$

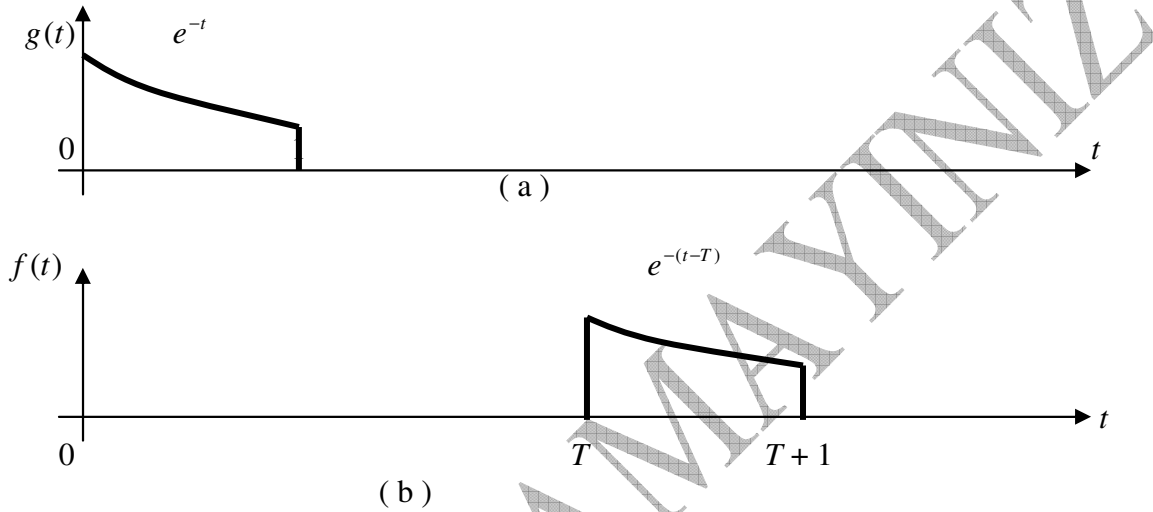
$$E_f = \int_0^5 f^2(t)dt = \int_0^T (e^{-t})^2 dt = \frac{1}{2}(1 - e^{-2T}) \quad , \quad T \rightarrow \infty$$
$$= 0.5$$

$$c = \frac{1}{\sqrt{E_f E_x}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)x(t)dt = \frac{1}{\sqrt{0.5 \times 5}} \int_0^5 e^{-t} \times 1 dt$$
$$= 0.628$$

bulunur. $-1 \leq c \leq 1$ bağıntısına göre bulunan $c = 0.628$ değerinin tam olmasada iki işaret arasında orta derecede bir benzerliğin olduğunu gösterir. Farklılıklara rağmen, iki işaretin başlangıç noktaları, yönleri ve aktivite sürelerindeki benzerlikler söz konusudur.

Korelasyon Fonksiyonları ve Konvülasyon

Bir radar örneğini gözümüzün önüne getirelim. Bir işaret darbesi, bilinmeyen bir hedefe gönderilsin. Eğer hedef mevcut ise, gönderilen işaret yansiyarak dönecektir. Hedefin olmaması durumunda yansıyan bir işaret beklenmez. Yansıyan işaretin analizine göre, bir hedefin varlığı veya yokluğundan söz edilebilir. En basit halde gönderilen ve alınan işaretler arasındaki zaman açısından gecikmeyi ölçerek hedefin uzaklığını tayin edebiliriz. Bu prosese biraz yakından bakmak için, aşağıdaki şekildeki gibi gönderilen radar darbe işaretinin $g(t)$ ve yansıyan işaretin ise $f(t)$ olduğunu kabul edelim.



Şekil 28 İşaret algılamada korelasyon şeması

Bu durumda daha önce verilen korelasyon denkleminden yararlanarak, benzerlik derecesini tanımlayan korelasyon katsayısını aşağıdaki gibi yazmak mümkün olur.

$$c_n = \frac{1}{\sqrt{E_f E_g}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) g(t) dt = 0$$

Görüldüğü gibi sonuç sıfırdır, çünkü şekle göre bulundukları pozisyonları itibariyle, işaretler zaman domeninde hiçbir şekilde örtüşmediklerinden $g(t)$ ve $f(t)$ işaretleri arasında bir ilişki, dolayısıyla benzerlik yoktur. Hedefin varlığına ve darbelerin özdeş olmalarına rağmen, düşük (sıfır) korelasyon katsayısı sebebiyle hiçbir zaman hedef ve aralarındaki ilişki algılanamayacaktır, ki bu klasik korelasyon yönteminin en önemli handikapıdır.

Bu handikapın integralde kullanılan $f(t)$ ve $g(t)$ dalga biçimlerinden kaynaklandığını görmekteyiz. Oysa ki, şekil (b) de görülen $f(t)$ işareti aslında, (a) daki aynı $g(t)$ işaretinin T kadar ötelenmiş biçimidir. Bu nedenle

$$f(t) = g(t - T)$$

söz konusudur. Eğer $T = 0$ alınırsa, işaretin tekrar $g(t)$ olduğu görülmektedir. Buradan hareketle verilen işaretler denklemdeki gibi değil de, $f(\tau)$ ve $g(\tau - t)$ biçiminde kullanılsalardı, korelasyon denklemi,

$$c_n = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(\tau-t) d\tau$$

biçimine döndürdü ki, bu bağıntı $f(t)$ ve $g(t)$ nin orijinal pozisyonlarına aldırmadan ikisi arasındaki benzerliği ölçebilmektedir. Bu yazım veya yaklaşım sonucu $f(t)$ ve $g(t)$ işaretleri örtüşmez pozisyonlarda olsalar bile, aralarındaki benzerlik dolayısıyla hedefle olan mesafe ölçülebilmektedir. Eğer $t=T$ olması durumunda aralarındaki korelasyonun maksimum olduğu görülecektir. Çünkü $c_n = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(\tau-t) d\tau$ korelasyon denklemi göz önüne alındığında $t=T$ anında

$$c_n = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(\tau-T) d\tau$$

söz konusu olur ki, bu durumdaki $g(\tau-T) = g(t-T)$ anlamına geleceğinden, integraldeki $f(\tau) = g(\tau-T)$ eşitliği tam örtüşmeyi göstereceğinden dolayı, maksimum korelasyon söz konusu olur. İşaretler farklı pozisyonlarda olmasına rağmen, aralarındaki benzerliği sağlayan

$$c_n = y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(\tau-T) d\tau$$

denklemine, klasik korelasyondan farklı olarak çapraz korelasyon (cross correlation) denilmektedir. Çapraz korelasyonu biraz farklı yazmaya çalıştığımızda,

$$y(t) = f(t) * g(-t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(\tau-T) d\tau \quad \text{çapraz korelasyon}$$

denklemden de görüldüğü gibi $y(t) = f(t) * g(-t)$ tipli bir konvülsiyonun ortaya çıktığını görmekteyiz. Klasik konvülsiyonun özel bir hali olan çapraz korelasyon, işaretlerin farklı pozisyonlarda olmasına rağmen aralarındaki ilişkiyi (benzerliği) ortaya koymaktadır. İki yaklaşım arasındaki fark buradan gelmektedir. Bununla beraber çapraz korelasyondan elde edilen dolayısıyla yine konvülsiyonla bağlantılı olan bir başka tür çapraz korelasyon yöntemi de aşağıdaki gibidir.

$$y(t) = f(t) * f(-t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)f(\tau-T) d\tau \quad \text{otokorelasyon}$$

Otokorelasyon olarak anılan bu tür konvülsiyon yaklaşımında, fark edildiği gibi bir işaretin kendisiyle olan çapraz korelasyonu söz konusudur. Otokorelasyon, işaretlerin periyodikliğinin tespitinde etkin kullanılabilir. Sonuçta gerek çapraz korelasyon gerekse otokorelasyon yöntemlerinde görüldüğü gibi, bunlar konvülsiyon tabanlı olmalarına rağmen, standart yaklaşımdan farklı olarak kullanılmışlardır. Genel anlamda bu tür korelasyon yaklaşımların, özellikle radar-sonar haberleşme ve algılama problemlerinde, önemli olduğu görülmektedir. Bu problemlerde söz konusu korelasyonlar, bir tür özel algılama filtresi olan eşleştirme filtresi (*matching filter*) olarak anılmaktadır.

Sistem Girişi ve Impuls Cevabı arasındaki Korelasyon

Acaba korelasyon olarak giriş ve sistem impuls cevabı gibi sistem fonksiyonları arasındaki ilişki ve benzerliğin tespiti yapılabilir mi ve bu anlamlı olur mu. Örneğin sistem girişi

$x(t) = e^{-\alpha t} u(t)$ ve sistem impuls cevabı $h(t) = e^{-\alpha t} u(t)$ olan lineer zamandan bağımsız sistemin cevabını bulmaya çalışalım. $e^{-\alpha t}$

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau$$

konvülsyonu gereği

$$\begin{aligned} y(t) &= x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} [e^{-\alpha \tau} u(\tau)] [e^{-\alpha(t-\tau)} u(t - \tau)] d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} [e^{-\alpha \tau} u(\tau)] [e^{-\alpha(t-\tau)} u(t - \tau)] d\tau \\ &= \int_0^t e^{-\alpha \tau} e^{-\alpha(t-\tau)} d\tau = \int_0^t e^{-\alpha \tau} e^{-\alpha t + \alpha \tau} d\tau = e^{-\alpha t} \int_0^t e^{-\alpha \tau + \alpha \tau} d\tau = e^{-\alpha t} \int_0^t e^0 d\tau = e^{-\alpha t} \int_0^t d\tau \\ &= e^{-\alpha t} (\tau)_0^t \\ &= t e^{-\alpha t} \end{aligned}$$

$$y(t) = t e^{-\alpha t}$$

Görüldüğü gibi $x(t) = e^{-\alpha t} u(t)$ sistem girişinin içerdiği $e^{-\alpha t}$ karakteristik mod, $h(t) = e^{-\alpha t} u(t)$ sistem fonksiyonunun (impuls cevabı) içerdiği $e^{-\alpha t}$ karakteristik moduyla aynı olduğundan, sistem cevabının maksimum hatta sonsuz olma riskinin olduğu görülmektedir. Bu durum **rezonans** olarak bilinir. Sistem cevabının maksimum olduğu frekanstır. Örnekte $\omega_x = \omega_h = -\alpha$. Bundan dolayı cevaptaki $e^{-\alpha t}$ terimi ($\alpha > 0$) için $t \rightarrow \infty$ durumunda, bu terimle çarpım durumunda olan “t” teriminin sonsuza (∞) gitmesinden daha önce (hızlı) sıfıra gittiği için bulunan cevap,

$$y(t) = t e^{-\alpha t} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$$

İfadesinden dolayı sonlu ve kararlı davranır. Ancak buna rağmen ortak $e^{-\alpha t}$ karakteristik modundan dolayı sistemin daima rezonansa girme riskinin bulunduğu unutulmamalıdır. Bu anlamda korelasyon yaklaşımına uygun olarak giriş işaretinin karakteristik modunun, sistem impuls cevabının içerdiği çok sayıda karakteristik modlardan biri arasında benzerlik araştırılabilir. Tam benzerlik, aynı karakteristik modlar demek olacağından, bu anda sistem cevabı maksimum miktarda sonsuzdur. **Rezonans** olarak ifade edilen bu ana dikkat edilmesi gerekiyor. Zira bu anda, sistem sonsuz değerinde ve kararsız olabilmektedir. Sistemin maksimum cevabını sağlayan rezonans anında (her türlü) sistemin zarar göreceği ve çökebileceği unutulmamalıdır. Elde edilen $y(t) = t e^{-\alpha t}$ cevabındaki t rampa fonksiyonu sistemi belirsizliğe sürükleyebilecek rezonans riskinin potansiyel olduğuna işaret etmektedir. Yine cevapta bulunan $e^{-\alpha t}$ karakteristik modun $t \rightarrow \infty$ anında sıfıra inme hızı rampa fonksiyondan daha hızlı olduğundan, sistem rezonanstan son anda kurtulmuş kabul edilir.

Sonuçta bir tür korelasyon olan konvülasyon yaklaşımıyla sistem cevabının bulunmasına ek olarak aynı zamanda sistemi rezonansa götürecek frekansların benzerliği de test edilebilir. Bu yolla işin başında sistem tasarlanırken, sistem fonksiyonunun sahip olduğu karakteristik modlar vasıtasıyla girişin içereceği karakteristik modların frekansları buna göre düzenlenebilir. Bu avantajla örneğin alçak geçiren, yüksek geçiren gibi frekans filtreleri tasarlanabilir.

Rezonans

Rezonans durumu, rezonans frekansı ile ilgilidir. Lineer bir sistem, rezonans frekansında maksimum genliğinde salınım yapar. Daha doğrusu sistem çıkışı, maksimum değerde gözlemlenir. Dolayısıyla rezonans durumunda doğal olarak sistem transfer fonksiyonu da en yüksek değerinde olacaktır. Sistem impuls cevabının $h(t) = e^{-5j t} u(t)$ olduğu bir sistemde sistemin doğal yani natural frekansı, alınan örnekte $\omega = 5$ rad/sn dir. Eğer sistem girişinin karakteristik modunun frekansı, sistem natural frekansına eşit olursa ($e^{-5j t} u(t)$ gibi), sistem cevabının maksimumda olduğu titreşim (salınım) durumu söz konusu olur. Bu andaki frekans da rezonans frekansı olur. $h(t) = e^{-5j t} u(t)$ moduna sahip bir sistemin kendisiyle aynı moda sahip olan bir $x(t) = e^{-5j t} u(t)$ gibi giriş cevabı maksimum olacaktır. Bu anlamda rezonans, devreden veya sistemden maksimum çıkış veya cevabın alındığı frekansı gösteren durumdur. Sistemin sahip olduğu diğer frekanslar içinde çeşitli cevapları/çıkışları mevcut iken, en yüksek çıkışın/cevabın/salınımın alındığı durum rezonans, bu durumadaki frekansa da rezonans frekansı denilmektedir. Bu anlamda bir sistemin impuls cevabı

$$h(t) = e^{\lambda_1 t} + e^{\lambda_2 t} + e^{\lambda_1 t} + e^{\lambda_3 t} + \dots + e^{\lambda_n t}$$

Görüldüğü gibi “n” tane $e^{\lambda t}$ tipli karakteristik modun lineer toplamından oluşabilir. Eğer böyle bir sisteme $x(t)$ girişi olarak $x(t) = Ae^{\lambda_3 t}$ girişi yapılıyorsa, sistem cevabı olarak

$$y(t) = x(t) * h(t) = Ae^{\lambda_3 t} * (e^{\lambda_1 t} + e^{\lambda_2 t} + e^{\lambda_1 t} + e^{\lambda_3 t} + \dots + e^{\lambda_n t})$$

sistem cevabının maksimum değerinin, λ_3 özdeğeriyle belirtilen frekansta gerçekleşeceği görülmektedir. Çünkü $\lambda_3 = j\omega_3$ ile gösterilen ω_3 frekansı giriş ve sistemin ortak yani rezonans frekansıdır. Bu frekansta dolayısıyla $e^{\lambda_3 t}$ karakteristik modunda sistem maksimum cevabını oluşturacaktır. Başlangıçta $\lambda_3 = j\omega_3$, sistemin natural frekansı iken, giriş frekansının bu natural frekansa yaklaşmasıyla rezonans durumu söz konusu olacaktır. Tam değerinde ise rezonans gerçekleşecektir.

Bir RLC devresi göz önüne alındığında, Rezonans durumunda elektrik enerjisini elektrik alanlarda depolayan kapasitörün kapasitif reaktansı ($X_C = 1/2\pi f_R C$), enerjisini magnetik alanlarda depolayan endüktansın endüktif reaktansına ($X_L = 2\pi f_R L$) eşit olacaktır ($X_C = X_L$). Bu durumda rezonans frekansı ise,

$$\frac{1}{2\pi f_R C} = 2\pi f_R L$$

$$f_R = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \text{ Hz} \quad \text{veya} \quad \omega_R = \frac{1}{\sqrt{LC}} \text{ rad/sn}$$

Rezonans durumunda devrenin toplam empedansının

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_C - X_L)^2} = R$$

görüldüğü gibi, R direncinden oluştuğu görülmektedir. Bu devrenin direnci üzerinde maksimum gücün harcandığı andır. Çünkü rezonans durumunda ($X_C = X_L$) den dolayı $X_C - X_L = 0$ olacağından, devrenin direnci azalacak, dolayısıyla direnç üzerindeki gerilim veya harcanan güç maksimum olacaktır.

Örnek

Sistem girişi $x(t) = e^{-2t}u(t)$ ve sistem impuls cevabı $h(t) = e^{-2t}u(t)$ olan lineer zamandan bağımsız sistemin cevabını bulun.

Çözüm

LTI sistem cevabı konvülasyon integrali ile hesaplanacaktır.

$$\begin{aligned} y(t) &= x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} [e^{-2\tau}u(\tau)][e^{-2(t-\tau)}u(t - \tau)] d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} [e^{-2\tau}u(\tau)][e^{-2(t-\tau)}u(t - \tau)] d\tau \\ &= \int_0^t e^{-2\tau} e^{-2(t-\tau)} d\tau = \int_0^t e^{-2\tau} e^{-2t+2\tau} d\tau = e^{-2t} \int_0^t e^{-2\tau+2\tau} d\tau = e^{-2t} \int_0^t e^0 d\tau = e^{-2t} \int_0^t 1 d\tau = e^{-2t} (\tau)_0^t \\ &= t e^{-2t} \end{aligned}$$

$$y(t) = t e^{-2t}$$

Elde edilen denklemde özdeğer $\lambda = -2$ olarak sol yarı düzlemedir. Bundan dolayı e^{-2t} terimi $t \rightarrow \infty$ için, bu terimle çarpım durumunda olan “ t ” teriminin sonsuza (∞) gitmesinden daha önce (hızlı) sıfıra gider ;

$$y(t) = t e^{-2t} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$$

Bundan dolayı verilen $x(t) = e^{-2t}u(t)$ ve $h(t) = e^{-2t}u(t)$ sistemi kararlı davranır.

Not : Burada sorun yaratan sistem çıkışını belirsiz veya sonsuz büyük olma riskine sokan, sistem girişi $x(t) = e^{-2t}u(t)$ ve sistem impuls cevabı $h(t) = e^{-2t}u(t)$ ifadelerinde yer alan **ortak** (aynı) ve karakteristik mod olarak anılan e^{-2t} terimdir. Dikkat edildiği gibi gerek girişte gerekse impuls cevabında aynı terim mevcuttur. Sistem çıkışının maksimum olduğu frekans (**rezonans**) anlamına gelen bu durumlardan kaçınılmalıdır.

Örnek

Sistem girişi $x(t) = e^{(-0.054+2j)t} u(t)$ ve sistem impuls cevabı $h(t) = e^{-0.057+2j} u(t)$ olan lineer zamandan bağımsız sistemin cevabını bulun.

Çözüm

LTI sistem cevabı konvülyasyon integrali ile hesaplanacaktır.

$$\begin{aligned} y(t) &= x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t-\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} [e^{(-0.054+2j)\tau} u(\tau)] [e^{(-0.057+2j)(t-\tau)} u(t-\tau)] d\tau \\ &= \int_0^t e^{(-0.054+2j)\tau} e^{(-0.057+2j)t} e^{(0.057-2j)\tau} d\tau = e^{(-0.057+2j)t} \int_0^t e^{(-0.054+2j+0.057-2j)\tau} d\tau \\ &= e^{(-0.057+2j)t} \int_0^t e^{0.003\tau} d\tau = \frac{e^{(-0.057+2j)t}}{0.003} (e^{0.003\tau})_0^t = \frac{e^{(-0.057+2j)t}}{0.003} (e^{0.003t} - e^0) \\ &= \frac{e^{(-0.057+2j)t}}{0.003} (e^{0.003t} - 1) = \frac{e^{(-0.054+2j)t}}{0.003} - \frac{e^{(-0.057+2j)t}}{0.003} \end{aligned}$$

$$y(t) = 3.10^3 (e^{(-0.054+2j)t} - e^{(-0.057+2j)t})$$

Görüldüğü gibi girişin özdeğeri ($\lambda_x = -0.054 + 2j$), sistemin özdeğerine $\lambda_h = -0.057 + 2j$ olarak çok yakın olduğundan, rezonans riski potansiyeldir. Bu yüzden çıkış değeri $y(t) = 3.10^3$ gibi büyük bir değerindendir.

Örnek

Sistem girişi $x(t) = e^{-5j} u(t)$ ve sistem impuls cevabı $h(t) = e^{-5j} u(t)$ olan lineer zamandan bağımsız sistemin cevabını bulun.

Çözüm

LTI sistem cevabı konvülyasyon integrali ile hesaplanacaktır.

$$\begin{aligned} y(t) &= x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t-\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} [e^{-5j\tau} u(\tau)] [e^{-5j(t-\tau)} u(t-\tau)] d\tau \\ &= \int_0^t e^{-5j\tau} e^{-5j} e^{5j\tau} d\tau = e^{-5j} \int_0^t e^{(-5j+5j)\tau} d\tau = e^{-5j} \int_0^t e^0 d\tau = e^{-5j} \int_0^t d\tau \\ &= e^{-5j} (\tau)_0^t = e^{-5j} (t-0) = t e^{-5j} \end{aligned}$$

$$y(t) = t e^{-5j}$$

Elde edilen çıkış denkleminde özdeğer $\lambda = -5j$ olarak imajiner eksen üzerinde görünüyor. Özdeğer $\lambda = j\omega$ biçiminde frekansa göre düşünüldüğünde oluşan $e^{-5j} t$ ifadesi frekansı $\omega = -5$ olan bir sinusoid gibi davranacaktır. Bu durumda çıkış denklemi $t \rightarrow \infty$ için sıfıra değil, sonsuza gidecektir.;

$$y(t) = t e^{-5jt} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \infty$$

Bundan dolayı verilen $x(t) = e^{-5jt}u(t)$ ve $h(t) = e^{-5jt}u(t)$ sistemi kararlı olmayacaktır.

Not : Burada sorun yaratan, sistem çıkışı belirsiz veya sonsuz yapan yine, sistem girişi $x(t) = e^{-5jt}u(t)$ ve sistem impuls cevabı $h(t) = e^{-5jt}u(t)$ ifadelerinde yer alan ortak (aynı) ve karakteristik mod olarak anılan e^{-5jt} terimidir.

Eğer daha önceki örnek $x(t) = e^{-2t}u(t)$ ve $h(t) = e^{-2t}u(t)$ ve şimdiki örnek $x(t) = e^{-5jt}u(t)$ ve $h(t) = e^{-5jt}u(t)$ göz önüne alındığında, $y(t)$ sistem çıkışı sonsuz büyük (kararsız, sönümsüz) yapan $e^{\omega t}$ olarak bilinen karakteristik mod terimlerindeki ω frekanslarının aynı oluşudur. Bu frekanslara **rezonans frekansı** denilmektedir. Buradan, eğer bir sistemin giriş ve sistem impuls cevabının aynı tip (frekanslı) $e^{\omega t}$ karakteristik moda sahip olmaları durumunda, sistem cevabı maksimum veya sonsuz büyük çıkmakta veya çıkma riskiyle karşı karşıyadır. Bu duruma **rezonans** denilmektedir. Rezonans durumunda sistem (veya devre) maksimum değerine ulaşmaktadır.

Örnek

Sistem girişi $x(t) = e^{(-0.054+2j)t}u(t)$ ve sistem impuls cevabı $h(t) = e^{-0.057+2jt}u(t)$ olan lineer zamandan bağımsız sistemin cevabını bulun.

Çözüm

LTI sistem cevabı konvülyasyon integrali ile hesaplanacaktır.

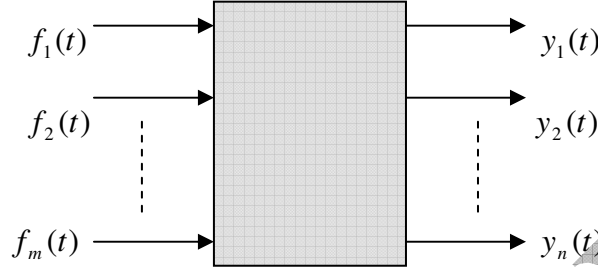
$$\begin{aligned} y(t) &= x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t-\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} [e^{(-0.054+2j)\tau}u(\tau)][e^{(-0.057+2j)(t-\tau)}u(t-\tau)] d\tau \\ &= \int_0^t e^{(-0.054+2j)\tau} e^{(-0.057+2j)t} e^{(0.057-2j)\tau} d\tau = e^{(-0.057+2j)t} \int_0^t e^{(-0.054+2j+0.057-2j)\tau} d\tau \\ &= e^{(-0.057+2j)t} \int_0^t e^{0.003\tau} d\tau = \frac{e^{(-0.057+2j)t}}{0.003} (e^{0.003\tau})_0^t = \frac{e^{(-0.057+2j)t}}{0.003} (e^{0.003t} - e^0) \\ &= \frac{e^{(-0.057+2j)t}}{0.003} (e^{0.003t} - 1) = \frac{e^{(-0.054+2j)t}}{0.003} - \frac{e^{(-0.057+2j)t}}{0.003} \end{aligned}$$

$$y(t) = 3.10^{-3} (e^{(-0.054+2j)t} - e^{(-0.057+2j)t})$$

Bu örnekte her ne kadar $t \rightarrow \infty$ için $y(t) = 0$ gibi görünse de aslında $\lambda_1 = -0.054 + 2j$ ve $\lambda_2 = -0.057 + 2j$ ifadelerinde görülen $\text{Re}(\lambda_1) = -0.054$ ve $\text{Re}(\lambda_2) = -0.057$ özdeğerlerinin sıfıra yakın olması durumunda her ikisinin frekansı $\omega = 2$ (rezonans frekansı) olarak aynı olacağından yine **rezonans** durumunun söz konusu olabileceği görülmektedir. Bu nedenle sistem rezonansa yakın durumda kabul edilir. Özdeğerlerin yalnızca aynı imajiner değerlerden (rezonans frekanslarından) oluşması halinde rezonans kaçınılmazdır.

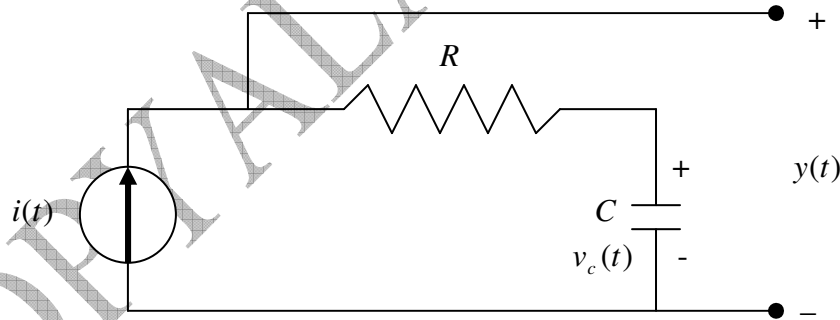
Sistem Cevabının Hesaplanması

Bir sistemin girişindeki işarete karşılık ürettiği çıkışa, sistemin cevabı demektir. Sistem cevabının hesaplanmasında sistem bileşenleri veya kullanılan bir algoritma, girişi kullanarak sistem cevabını üretir. Genel olarak bir sistem girişi, çıkışı ve bu iki büyüklük arasında işleyişi sağlayan kurallar veya kanunlarla tanımlanmaktadır. Kanun veya kurallarla giriş ve çıkışa bağlı oluşturulan denklemlere, sistemin matematik modeli denilmektedir. Eğer bir sistem aşağıdaki gibi $f_1(t), f_2(t), \dots, f_m(t)$ girişlerine karşılık gelen $y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)$ çıkışlarından oluşacak genel biçimiyle gösterilmiştir.



Şekil 29 Sistem

Bizim sistem analizi için sistem giriş ve çıkışı arasındaki ilişkiyi gösteren matematik modeli ortaya koymamız gerekiyor. Oluşturulacak matematik model üzerindeki analizin amacı, sistemin nelerden ve hangi cevaplardan oluştuğunu ortaya koymaktır. Bunun için örnek olacak basit bir elektriksel devre üzerinden modeli oluşturmaya çalışalım. Bunun için bir kondansatör ve dirençten oluşan basit bir RC seri devresini aşağıdaki gibi göz önüne alalım.



Şekil 30 RC Elektrik devresi

Verilen devrenin gerilim denklemi yazılırsa;

$$y(t) = Ri(t) + \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i(\tau) d\tau$$

Devrenin başlangıç koşullarının da olduğu varsayılırsa denklem daha açık olarak,

$$y(t) = Ri(t) + \frac{1}{C} \int_{-\infty}^0 i(\tau) d\tau + \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau$$

yazılır. Bu denklemdeki

$$\frac{1}{C} \int_{-\infty}^0 i(\tau) d\tau$$

ifadesi devredeki kondansatörün başlangıç koşullarındaki cevabını göstermektedir. Bununla $t = (-\infty, 0)$ arasında kondansatörün geçmişte sahip olduğu veya ürettiği bir cevabının olması vurgulanmaktadır. Bu cevap $t = 0$ anındaki kondansatörün sahip olduğu cevap olarak anılmaktadır. Bu cevap, devreye bir $i(t)$ girişi (akımı) uygulanmadan kondansatör üzerinde görünen gerilim değeridir (cevabıdır). Bu cevabı $t = 0$ anı için $v_C(0)$ olarak gösterebiliriz. $v_C(0)$, kondansatörün geçmişindeki bilgileri içeren bir cevap olarak düşünülebilir. Bu cevap $t = 0$ anında, devreye bir giriş uygulanmadan elde edilen bir cevap olduğu için, **başlangıç koşullarının** söz konusu olduğu bir cevap olarakda anılmaktadır. Dolayısıyla başlangıç koşullarının göz önüne alınmasıyla eğer

$$v_C(0) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^0 i(\tau) d\tau$$

olarak düşünülürse $y(t)$ denklemi, aşağıdaki gibi ifade edilmektedir.

$$y(t) = v_C(0) + R i(t) + \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau$$

Eğer integral ifadesi $t = 0$ başlangıç koşullarına göre yazılırsa,

$$y(t) = v_C(0) + R i(t) + \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i(\tau) d\tau$$

Buna göre $i(t)$ giriş ve $y(t)$ çıkış arasındaki bazı kurallara göre (Ω kanunu) oluşturulan sistemin matematik modeli elde edilmiştir. Bu model aracılığıyla sistemin çeşitli özelliklerini ortaya koyan analizleri yapılabilir. Buna göre sistem modeline bakıldığında sistemin toplam cevabı $v_C(0)$ başlangıç koşullarına dayalı cevap ile, $i(t)$ girişinin olduğu andan itibaren RC üzerindeki ifadelerine göre oluşturulan cevaplarının lineer kombinasyonlarının toplamından oluştuğunu söyleyebiliriz. Buna göre sistem $v_C(0)$ başlangıç koşulları belli olduğu sürece, herhangi bir anda sisteme yapılan $i(t)$ girişiyle sistemin oluşturduğu toplam cevabın hesaplanması mümkün olur. Geline nokta itibariyle bir sistemin $t > t_0$ anındaki cevabının (t_0, t) aralığındaki girişleriyle, $t = t_0$ anındaki başlangıç koşullarından kesinlikle elde edilebileceğini görmekteyiz. Yukarıda ele alınan örnekte bir tane kondansatör olduğundan yalnız bir tane başlangıç koşulu dikkate alınmıştır. Kondansatör gibi devrede benzeri diğer dinamik elemanların olduğu daha kompleks sistemler veya devrelerde, daha fazla sayıda başlangıç koşulunun göz önüne alınacağı kesindir.

Lineer Sistemin Cevabı

Burada yukarıda hesaplanan sistem cevabının lineer özelliği araştırılacaktır. Bunun için lineeritenin pratik tanımı olan sistemin toplamsallık ve çarpımsallık özellikleri göz önüne alınacaktır. Eğer yukarıdaki RC devresiyle ilgili bulunan sistem cevabı

$$y(t) = v_c(0) + R i(t) + \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i(\tau) d\tau$$

göz önüne alındığında, sistemin toplam cevabının, $v_c(0)$ başlangıç koşullarına dayalı cevap ile, $i(t)$ girişinin olduğu andan itibaren RC üzerindeki ifadelerine göre oluşturulan cevaplarının lineer kombinasyonlarının toplamından oluştuğunu belirtmiştik. Burada ortaya çıkan lineer yani doğrusal özellik önemlidir. Acaba matematiksel modele bakıldığında $y(t)$ sistem çıkışı ve $i(t)$ sistem girişi arasındaki ilişki lineermidir, bunu irdelememiz gerekiyor. Lineer sistemler, sistem cevabının bölümlere ayrılmasını mümkün kıldığından, bizim model başlangıç koşullarının olduğu $v_c(0)$ ve girişin olduğu $R i(t) + \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i(\tau) d\tau$ bölümlerinden oluşacak şekilde iki bölüme ayrılmış olarak göz önüne alınacaktır.

$$y(t) = \underbrace{v_c(0)}_{y_1(t)} + \underbrace{R i(t) + \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i(\tau) d\tau}_{y_2(t)} = y_1(t) + y_2(t)$$

Bu şekilde sistemin doğrusallığı da (lineerliği) iki bölüm üzerinde ayrı ayrı olarak incelenecektir. Buna göre başlangıç koşullarının göz önüne alındığı $v_c(0)$ cevabını düşünelim. Eğer sistem lineer ise, örneğin başlangıç koşullarını “ k ” kat artırıyorsa, bunun anlamı $v_c(0)$ ya da $y_1(t)$ “ k ” kat artacaktır. Veya girişin olduğu ikinci bölümü göz önüne alırsak, eğer sistem girişi olarak $i(t)$, yine “ k ” kat artırılıyorsa, bu durumda lineerlik gereği $y_2(t)$ cevabı da “ k ” kat artırılmış olacaktır. Nihayet eğer $v_c(0)$ ve $i(t)$ “ k ” kat artırılıyorsa, sistem toplam cevabı da $y_1(t) + y_2(t)$ olarak “ k ” kat artırılmış olacaktır. Sonuçta lineerite için, sistemin toplamsallık ve çarpımsallık gibi iki özelliği sağlaması gerektiğini görmekteyiz.

Lineer Sistemin Cevapları

Yukarıdaki RC devresini göz önüne alırsak, lineer bir sistemin cevabının

$$y(t) = v_c(0) + R i(t) + \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i(\tau) d\tau$$

veya

$$y(t) = \underbrace{v_c(0)}_{y_1(t)} + \underbrace{R i(t) + \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i(\tau) d\tau}_{y_2(t)} = y_1(t) + y_2(t)$$

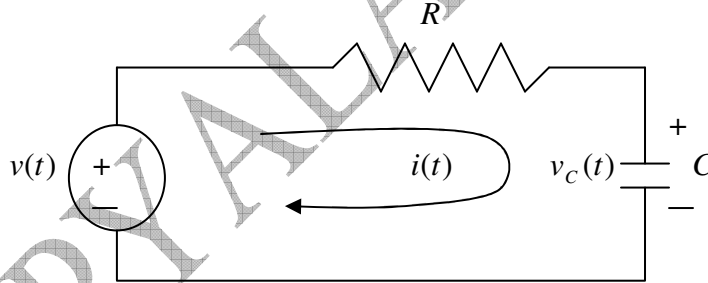
olarak yazılabildiğini gördük. Görüldüğü gibi böyle lineer bir sistemin cevabı $t = 0$ veya $t = t_0$ olarak başlangıç koşullarıyla belirlenen $v_c(0)$ (veya $y_1(t)$) ve sisteme $t > 0$ veya $t > t_0$ anındaki $i(t)$ girişinin yapıldığı cevabı gösteren $R i(t) + 1/C \int_{t_0}^t i(\tau) d\tau$ veya ($y_2(t)$) cevaplarının lineer toplamından oluşmaktaydı. Şimdi bu tanımlamaları literatürdeki kullanımlarına uygun olarak, “sıfır-giriş cevabı” ve “sıfır-durum cevabı” olarak aşağıdaki gösterimle sunacağız.

$$y(t) = \underbrace{v_c(0)}_{\text{sıfır-giriş cevabı}} + \underbrace{R i(t) + \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i(\tau) d\tau}_{\text{sıfır-durum cevabı}}$$

Sıfır-giriş cevabının, sisteme giriş olmadığında, başlangıç koşullarıyla elde edilen sistem cevabıyken, sistem sıfır-durum cevabı, başlangıç koşullarının sıfır alındığı (olmadığı), sistemin girişle cevap ürettiği yaklaşımından ortaya çıkmıştır. Sıfır-durum denilmesi, sistemin başlangıcından kaynaklanmaktadır, yani sistemin ilk hareket noktası vurgulanmaktadır. Bu önemlidir, çünkü sistemin stabilitesi incelenirken, sistemin sıfır-durumuna sahip olması, kararlılık kriteri olarak görülebilecektir. Bu yaklaşım sonucu sistemin bir şekilde sıfır-durumuyla, başlangıç yani sukunet haline vurgu yapılması söz konusudur.

Örnek

Aşağıda verilen devrede başlangıç koşulunun $v_c(0) = 0$ alınmasıyla oluşan sistemin lineer durumunu araştırın.



Şekil 31 RC Elektrik devresi

Verilen devrenin gerilim denklemi ;

$$v(t) = R i(t) + \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i(\tau) d\tau$$

Devre başlangıç koşullarına göre yazılırsa,

$$v(t) = R i(t) + \frac{1}{C} \int_{-\infty}^0 i(\tau) d\tau + \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau$$

yazılır. Başlangıç koşulu

$$v_c(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^0 i(\tau) d\tau = v_c(0)$$

İfadesine göre sistem toplam cevabı

$$v(t) = v_c(0) + R i(t) + \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau$$

Başlangıç koşulu sıfır olduğundan ($v_c(0) = 0$), toplam cevap,

$$v(t) = R i(t) + \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau$$

elde edilir. Matematik modele bakıldığında eğer sistem lineer ise, $i(t)$ sistem girişindeki artış miktarının aynen çıkışta da görülmesi gerekmektedir. Denklemdaki integratör ifadesi operatör olarak lineer operatör olduğundan sonuçta $i(t)$ devre akımındaki değişim aynı oranda $v(t)$ çıkışına da yansıtılacağından, devre olarak ele alınan sistem lineerdir. **Örneğin**, bu şekliyle ortaya çıkan

$$v(t) = R i(t) + \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau$$

sistemin çözümünü araştıralım.

Çözüm

Denklemin her iki yanının türevi alınır.

$$\frac{d}{dt} v(t) = \frac{d}{dt} \left(R i(t) + \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau \right) = R \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \frac{d}{dt} \left(\int_0^t i(\tau) d\tau \right) = R \frac{di}{dt} + \frac{i(t)}{C}$$

$$\frac{dv}{dt} = R \frac{di}{dt} + \frac{i(t)}{C}$$

Görüldüğü gibi, sistem diferansiyel denklemle çözülebilir duruma getirilmiştir. Buradan uygun çözüm araştırılabilir. Bunun için

$$D = \frac{d}{dt}$$

$$D v(t) = (RD + 1) i(t)$$

$v_c(0) = 0$, başlangıç koşuluna göre λ değişkenine bağlı oluşturulacak sistem karakteristik denklemi üzerinden çözüme gidilebilir.

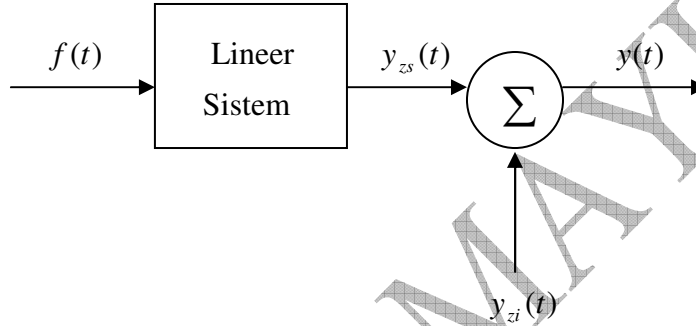
Sistem Cevabının Çözümü

Diferansiyel denklemlerle ifade edilen lineer zamandan bağımsız sistemin çözümünde toplam sistem cevabının bulunması gerekiyor. Toplam sistem cevabını $y(t)$ bulmak için, sistem çıkış cevabının iki parçadan oluştuğunu göz önüne alacağız.

Toplam cevap = sıfır – giriş cevabı + sıfır-durum cevabı

$$y(t) = y_{zi}(t) + y_{zs}(t)$$

Görüldüğü gibi sistem çözümü, “ sıfır – giriş cevabı , $y_{zi}(t)$ ” ve “sıfır-durum cevabı, $y_{zs}(t)$ ” gibi iki durumun toplamından oluşmaktadır. Bu iki çözümün yapılması halinde sistem toplam cevabı ve çözümüne ulaşmış oluruz.



Şekil 32 Sistem sıfır – durum ve sıfır – giriş cevabı

Sıfır – giriş cevabı

Sistem giriş cevabı, sisteme normal bir girişin olmadığı $f(t) = 0$ koşullarda, sistemin kendi iç ve dinamik koşullarından kaynaklanan bir giriştir. Örneğin, sistemin kendi içinde bir şekilde kapasitif elemanlardan dolayı var olan enerjisi düşünülebilir. Bu yüzden bu tür girişler **başlangıç koşulları** olarak tanımlanmaktadır. Başlangıç değerlerinin göz önüne alınarak yapılan çözümde, eğer başlangıçta yani $t = t_0$, $(-\infty, t_0)$ anında sistemin bir cevabı varsa diferansiyel denklem çözümünde göz önüne alınmalıdır. Buna göre başlangıç koşulları için $t_0 < t$ koşulu göz önüne alınacaktır.

Sıfır-durum cevabı

Bu durum, sıfır-giriş cevabından farklıdır. Bu durum sisteme olan normal ve aktif girişlerden kaynaklanmaktadır $f(t) \neq 0$. Aksine bu durumda sistem başlangıç koşulları sıfır kabul edilir ve dolayısıyla sistem sıfır-giriş cevabı sıfırdır. Bu durumda $t = t_0$, $(-\infty, t_0)$ anında sistemin bir cevabı olmadığı (başlangıç koşulları sıfır) ve çözümün varsa $t > t_0$ koşuluna göre yapılacağı kabul edilir. Sistem sıfır-durumu, sistem açısından önemli bir kavram ve cevaptır. Bununla sistemin sıfırdan itibaren ki davranışı incelenebilmektedir. Veya sistemin $t \rightarrow \infty$ için (eninde sonunda) tekrar geleceği durum, sıfır-durumdur (sıfır-durum cevabı). Bunun özellikle daha sonra incelenecek stabilite (kararlılık) kriteri açısından ne denli önemli bir kavram olduğunu göreceğiz.

Başlangıç Koşulları ve Sistem Cevabı

Başlangıç koşullarını dikkate alan sistem çözümü “*sıfır-giriş cevabı*” dır. Bu koşulların daha çok, sistem iç dinamikleri ve başlangıç koşullarından kaynaklandığını biliyoruz. Sistemde kapasitif bir elemanın olması, bir enerji tutulmasını sağlayabileceğinden, sistemin tamamıyla nötr olamayacağını, bu kapasitif büyüklükten kaynaklanan sistemin dinamik bir giriş sağlayabileceğini düşünebiliriz. Bu durumda başlangıçta verilen diferansiyel denklem sisteminin çözümü için, sisteme normal bir giriş olmadığını yani

$$f(t) = 0$$

koşulu çözüm için göz önüne alınacaktır. $f(t) = 0$ durumunda mevcut denklem sisteminin

$$\frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_0 y(t) = 0$$

$$\sum_{k=0}^n a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = 0$$

veya ;

$$Q(D)y(t) = 0$$

$$(D^n + a_{n-1}D^{n-1} + a_{n-2}D^{n-2} + \dots + a_1D + a_0)y(t) = 0$$

Durumları söz konusu olacaktır. Dolayısıyla yapılacak çözüm için sistem cevap denklemindeki çözüm için $y(t)$ yerine, sıfır-giriş cevap olarak $y_{zi}(t)$ alınacaktır. Bu durumda yukarıdaki denklem

$$(D^n + a_{n-1}D^{n-1} + a_{n-2}D^{n-2} + \dots + a_1D + a_0)y_{zi}(t) = 0$$

Alınacaktır. Bu değişiklik diğer denklemler için de geçerlidir. Bu durumda diferansiyel denklemin çözümü için, sıfır-giriş cevabı

$$y_{zi}(t) = ce^{\lambda t}$$

biçiminde olacaktır. Diferenasiyel denklemin diğer seviyeleride buna bağlı olarak aşağıdaki gibi üretilecektir.

$$D y_{zi}(t) = \frac{dy_{zi}}{dt} = c\lambda e^{\lambda t}$$

$$D^2 y_{zi}(t) = \frac{d^2 y_{zi}}{dt^2} = c\lambda^2 e^{\lambda t}$$

$$D^3 y_{zi}(t) = \frac{d^3 y_{zi}}{dt^3} = c \lambda^3 e^{\lambda t}$$

⋮

$$D^n y_{zi}(t) = \frac{d^n y_{zi}}{dt^n} = c \lambda^n e^{\lambda t}$$

Bunları yukarıdaki denklemde yerine koyarsak,

$$c (\lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + a_{n-2} \lambda^{n-2} + \dots + a_1 \lambda + a_0) e^{\lambda t} = 0$$

Bu denklemin çözümünün,

$$\lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + a_{n-2} \lambda^{n-2} + \dots + a_1 \lambda + a_0 = 0$$

olacağı açıktır. Bu son denklemin, yukarıda yazılan denklemlerden

$$Q(\lambda) = 0$$

durumuna özdeş olduğu görülmektedir. Burada $Q(\lambda)$ sistem karakteristik polinomu, $Q(\lambda) = 0$ denkleminde *karakteristik sistem denklemi* olarak anılırlar. Denklem kökleri olan $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n$ terimlerinde *karakteristik kökler* olarak bilinir. Bu durumda karakteristik denklem,

$$Q(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)(\lambda - \lambda_3) \dots (\lambda - \lambda_n) = 0$$

Buradan n tane $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n$ kök ve buna bağlı olarak n tane $c_1, c_2, c_3, \dots, c_n$ katsayısının bulunduğunu ve nihayet n tane de $c_1 e^{\lambda_1 t}, c_2 e^{\lambda_2 t}, c_3 e^{\lambda_3 t}, \dots, c_n e^{\lambda_n t}$ sistem cevabı olacağından genel çözüm bulunan cevapların lineer kombinasyonları olarak

$$y_{zi}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} + c_3 e^{\lambda_3 t} + \dots + c_n e^{\lambda_n t}$$

şeklinde neticelenecektir. Sıfır-giriş cevabı için çözümde görünen $e^{\lambda_i t}$ ($i = 1, 2, 3, \dots, n$) ifadesi *karakteristik mod* olarak anılır. Karakteristik mod, sıfır-giriş cevabının yanı sıra sıfır-durum cevabının çözümünde de önemli rol oynayacaktır.

Tekrarlayan kökler

Sıfır-giriş cevabı için yapılan çözümde

$$Q(D)y_{zi}(t) = 0$$

denkleminin çözümünde karakteristik köklerin $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n$ tekrarlı olduklarını göz önüne alarak diferansiyel denklemin çözümünü araştıralım. Bu durumda

$$(D - \lambda)^2 y_{zi}(t) = 0$$

olursa bunun çözümü için sıfır-giriş cevabı $y_{zi}(t)$,

$$y_{zi}(t) = (c_1 + c_2 t) e^{\lambda t}$$

denkleminin çözümü benimsenecektir. Çözüm için karakteristik mod $e^{\lambda t}$ ve $t e^{\lambda t}$ biçiminde olacaktır. Buna göre karakteristik denklem

$$(D - \lambda)^r y_{zi}(t) = 0$$

olacaktır. Bu durumda çözüm için karakterisitk modlar $e^{\lambda t}, t e^{\lambda t}, t^2 e^{\lambda t}, t^3 e^{\lambda t}, \dots, t^{r-1} e^{\lambda t}$ olacaktır. Buna göre çözüm,

$$y_{zi}(t) = (c_1 + c_2 t + c_3 t^2 + \dots + c_r t^{r-1}) e^{\lambda t}$$

olacaktır. Sonraki adımda karakteristik polinom,

$$Q(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^r (\lambda - \lambda_{r+1}) \dots (\lambda - \lambda_n)$$

Karakterisitk modlar ise $e^{\lambda_1 t}, t e^{\lambda_1 t}, t^2 e^{\lambda_1 t}, t^3 e^{\lambda_1 t}, \dots, t^{r-1} e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_{r+1} t}, \dots, e^{\lambda_n t}$ olacağından, aranan çözüm aşağıdaki gibi oluşacaktır.

$$y_{zi}(t) = (c_1 + c_2 t + c_3 t^2 + \dots + c_r t^{r-1}) e^{\lambda_1 t} + c_{r+1} e^{\lambda_{r+1} t} + \dots + c_n e^{\lambda_n t}$$

NOT : Tekrarlayan köklerin sistemlerin kararlılığının belirlenmesindeki önemini belirtmek isteriz. Hatırlanacağı gibi sistem köklerinin tekrarlayan veya katlı kökler olarak “s” kompleks frekans düzlemindeki imajiner eksen üzerinde yer alması durumunda sistemi kararsız yapmaktaydı. Katsız köklerin imajiner ekseninde yer almaları durumunda ise sistemi zorlanmış yani marjinal olarak kararlı yaptığını biliyoruz.

Kompleks kökler

Sıfır-giriş cevabı için yapılan çözümlerde

$$Q(D)y_{zi}(t) = 0$$

denkleminin çözümünde karakterisitk köklerin $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n$ kompleks olduklarını göz önüne alarak diferansiyel denklemin çözümünü araştıralım. Bu durumda sıfır-giriş cevabı $y_{zi}(t)$ için çözüm,

$$y_{zi}(t) = c_1 e^{(\alpha + j\beta)t} + c_2 e^{(\alpha - j\beta)t}$$

olacaktır. Gerçek bir sistem için $y_{zi}(t)$ de gerçek olmalıdır. Bunun için c_1 ve c_2 nin eşlenik olmaları gerekeceğinden,

$$c_1 = \frac{C}{2} e^{j\theta} \quad \text{ve} \quad c_2 = \frac{C}{2} e^{-j\theta}$$

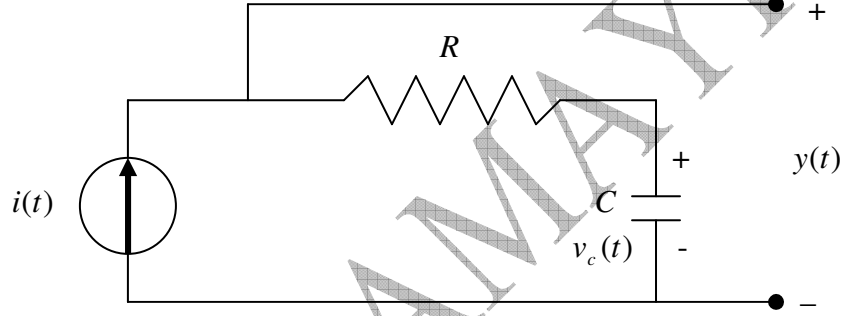
olacağından çözüm

$$\begin{aligned} y_{zi}(t) &= \frac{C}{2} e^{j\theta} e^{(\alpha+j\beta)t} + \frac{C}{2} e^{-j\theta} e^{(\alpha+j\beta)t} \\ &= \frac{C}{2} e^{\alpha t} \left[e^{j(j\beta t + \theta)} + e^{-j(j\beta t + \theta)} \right] \\ &= C e^{\alpha t} \cos(\beta t + \theta) \end{aligned}$$

olarak neticelenecektir.

Örnek

Gerilim kaynağı olarak düşünülebilecek bir sistem olarak çok iyi bilinen seri bir RC elektrik devresini göz önüne alalım.



Şekil 33 RC Elektrik devresi

Verilen devrenin gerilim denklemi ;

$$y(t) = R i(t) + \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i(\tau) d\tau$$

Devrenin başlangıç koşullarının da olduğu varsayılırsa denklem,

$$y(t) = R i(t) + \frac{1}{C} \int_{-\infty}^0 i(\tau) d\tau + \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau$$

yazılır.

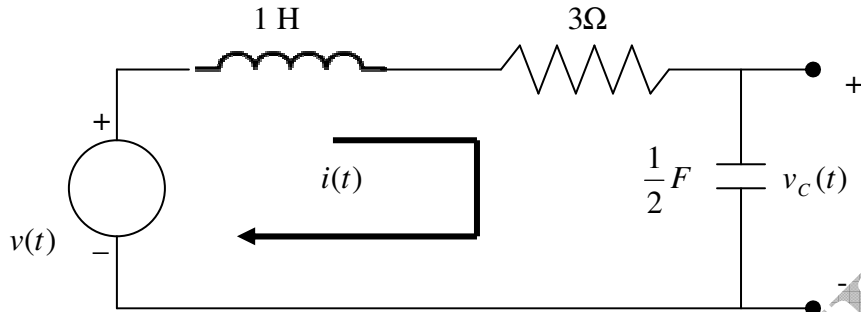
$$v_c(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^0 i(\tau) d\tau = v_c(0)$$

Başlangıç koşulu veya özel çözümüdür ($y_p(t)$). Buna göre toplam çözüm,

$$y(t) = v_c(0) + R i(t) + \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau$$

Örnek

Aşağıda verilen elektrik devresinin diferansiyel çözümünü yapınız.



Şekil 34 RLC Elektrik devresi

Çözüm

Kirchoff kuralı uygulandığında,

$$v_L(t) + v_R(t) + v_C(t) = v(t)$$

Basitlik açısından,

$$y(t) = i(t)$$

$$x(t) = v(t)$$

olsun.

$$\frac{dy}{dt} + 3y(t) + 2\int_{-\infty}^t y(\tau)d\tau = x(t)$$

Her iki tarafın türevi alınırsa,

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + 3\frac{dy}{dt} + 2y(t) = \frac{dx}{dt}$$

Diferansiyel çözüm için,

$$D = \frac{d}{dt}$$

alınırsa,

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = D^2 y(t)$$

$$\frac{dy}{dt} = Dy(t)$$

olarak alınırsa genel denklem,

$$(D^2 + 3D + 2)y(t) = Dx(t)$$

oluşur. Her iki taraf $\frac{1}{D}$ ile çarpılırsa

$$(D + 3 + 2\frac{1}{D})y(t) = x(t)$$

oluşur. Burada,

$$\int_{-\infty}^t y(\tau) d\tau = \frac{1}{D} y(t)$$

Diferansiyel denklemin çözümü

$$(D^2 + 3D + 2)y(t) = Dx(t)$$

Buradan “sıfır giriş cevap, $y_{zi}(t)$ ” olarak başlangıç koşulunu göz önüne alarak $y_0(t)$ çözümü araştırılacaktır. Bunun için aşağıdaki adımlar icra edilecektir. Öncelikle başlangıç koşullarıyla ilgili $y_0(0)$ ve $\dot{y}_0(0)$ kabulleri yapılacaktır. Buna göre ,

$$y_0(0) = 0$$

ve

$$\dot{y}_0(0) = -5$$

Buna göre $x(t)$ sıfır giriş cevap, $x(t) = y_{zi}(0) = 0$ olduğu için,

$$(D^2 + 3D + 2)y_0(t) = 0$$

Bu durumda karakteristik polinomun kökleri,

$$Q(\lambda) = 0$$

durumuna göre,

$$\lambda^2 + 3\lambda + 2 = (\lambda + 2)(\lambda + 1) = 0$$

denklemini çözülecektir. Karakteristik denklemin kökleri yani özdeğerleri (eigenvalues)

$$\lambda_1 = -2 \text{ ve } \lambda_2 = -1$$

başlangıç koşullarına göre toplam çözüm,

$$y_0(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-t}$$

elde edilir. Buradan c_1 ve c_2 nin bulunması gerekecektir. Bunun için,

$$y_0(0) = 0$$

bilindiğine göre, yukarıdaki denklemden,

$$0 = c_1 + c_2$$

bulunur. İkinci bir denklemi daha bulmak için

$$\dot{y}_0(0) = -5$$

ise, yukarıdaki denkleminde türevi alınırsa,

$$\dot{y}_0(t) = -2c_1 e^{-2t} - c_2 e^{-t}$$

ve

$$\dot{y}_0(0) = -2c_1 e^{-0} - c_2 e^{-0}$$

$$-5 = -2c_1 - c_2$$

sonuçta bulunan denklemler ;

$$0 = c_1 + c_2$$

$$5 = 2c_1 + c_2$$

denklem çifti çözülürse,

$$c_1 = -5 \text{ ve } c_2 = 5$$

Nihai sistem “ sıfır giriş cevabı, $y_{zi}(t)$ ” ;

$$y_0(t) = -5e^{-2t} + 5e^{-t} , \quad t \geq 0$$

olarak bulunur.

Örnek

Sürekli bir sisteme ait verilen

$$(D^2 + 6D + 9)y(t) = (3D + 5)x(t)$$

diferansiyel denklemini çözünüz.

Buradan “sıfır giriş cevap, $y_{zi}(t)$ “ olarak başlangıç koşulu göz önüne alarak $y_0(t)$ çözümü ile ilgili başlangıç koşullarıyla ilgili $y_0(0)$ ve $\dot{y}_0(0)$ kabulleri yapılacaktır.

$$y_0(0) = 3$$

ve

$$\dot{y}_0(0) = -7$$

buna göre $x(t)$ sıfır giriş cevap, $x(t) = y_{zi}(0) = 0$ olduğu için,

$$(D^2 + 6D + 9)y_0(t) = 0$$

bu durumda karakteristik polinomun kökleri,

$$Q(\lambda) = 0$$

durumuna göre,

$$\lambda^2 + 6\lambda + 9 = (\lambda + 3)^2 = 0$$

Denklemini çözüldüğünde,

$$\lambda_1 = -3 \text{ ve } \lambda_2 = -3$$

başlangıç koşullarına göre toplam çözüm,

$$y_0(t) = (c_1 + c_2 t)e^{-3t}$$

elde edilir. Buradan c_1 ve c_2 nin bulunması gerekecektir. Bunun için,

$$y_0(0) = 3$$

bilindiğine göre, yukarıdaki denklemden,

$$y_0(0) = (c_1 + c_2 \cdot 0)e^0$$

$$3 = c_1$$

bulunur. İkinci bir denklemini daha bulmak için

$$\dot{y}_0(0) = -7$$

ise, yukarıdaki denklemde türevi alınırsa,

$$\dot{y}_0(t) = c_2 e^{-3t} - 3(c_1 + c_2 t) e^{-3t}$$

ve

$$\dot{y}_0(0) = c_2 e^0 - 3(c_1 + c_2 \cdot 0) e^0$$

$$-7 = c_2 - 3c_1$$

sonuçta bulunan denklemler ;

$$3 = c_1$$

$$7 = 3c_1 - c_2$$

$$c_2 = 2$$

bulunur.

Nihai sistem “ sıfır giriş cevabı, $y_{zi}(t)$ ” ;

$$y_0(t) = (3 + 2t)e^{-3t} \quad , \quad t \geq 0$$

olarak bulunur.

Örnek

Sürekli bir sisteme ait verilen

$$(D^2 + 4D + 40)y(t) = (D + 2)x(t)$$

diferansiyel denklemini çözünüz.

Buradan “sıfır giriş cevap, $y_{zi}(t)$ “ olarak başlangıç koşulu göz önüne alarak $y_0(t)$ çözümü ile ilgili başlangıç koşullarıyla ilgili $y_0(0)$ ve $\dot{y}_0(0)$ kabulleri yapılacaktır.

$$y_0(0) = 2$$

ve

$$\dot{y}_0(0) = 16.78$$

Buna göre $x(t)$ sıfır giriş cevap, $x(t) = y_{zi}(0) = 0$ olduğu için,

$$(D^2 + 4D + 40)y_0(t) = 0$$

Bu durumda karakteristik polinomun kökleri,

$$Q(\lambda) = 0$$

durumuna göre,

$$\lambda^2 + 4\lambda + 40 = (\lambda + 2 - j6)(\lambda + 2 + j6) = 0$$

denklemini çözüldüğünde,

$$\lambda_1 = -2 + j6 \text{ ve } \lambda_2 = -2 - j6$$

başlangıç koşullarına göre toplam çözüm,

$$y_0(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$$

bulunan kökler yerine yazıldığında aranan çözümün

$$y_0(t) = c e^{-2t} \cos(6t + \theta)$$

denkleminle mümkün olacağı görülmektedir. Buradan c nin bulunması gerekecektir. Bunun için,

$$y_0(0) = 2$$

bilindiğine göre, yukarıdaki denklemden,

$$y_0(0) = c \cos \theta$$

$$2 = c \cos \theta$$

bulunur. İkinci bir denklemini daha bulmak için

$$\dot{y}_0(0) = 16.78$$

ise, yukarıdaki denkleminde türevi alınırsa,

$$\dot{y}_0(t) = -2c e^{-2t} \cos(6t + \theta) - 6c e^{-2t} \sin(6t + \theta)$$

ve

$$\dot{y}_0(0) = -2c e^0 \cos \theta - 6c e^0 \sin \theta$$

$$16.87 = -2c \cos \theta - 6c \sin \theta$$

$$2 = c \cos \theta \text{ idi.}$$

$$16.87 = -2 \times 2 - 6c \sin \theta$$

$$\begin{aligned} -3.463 &= c \sin \theta \\ 2 &= c \cos \theta \end{aligned}$$

Her iki ifadenin karelerini alıp toplarsak,

$$c^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = 2^2 + (-3.463)^2$$

$$c = 4$$

$$\cos \theta = \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$$

$$\sin \theta = -\frac{3.463}{4} = -\frac{\pi}{3}$$

$$\theta = IV \text{ bölge} = \frac{5\pi}{3}$$

elde edilir.

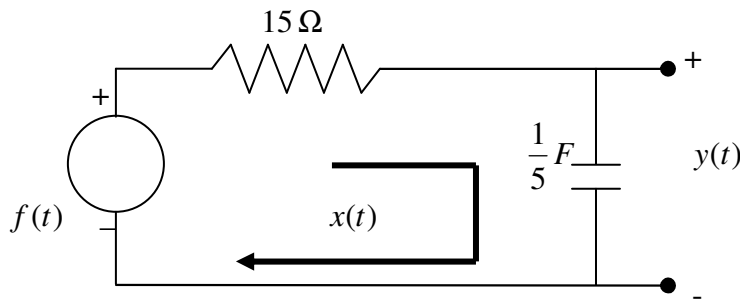
Nihai sistem “sıfır giriş cevabı, $y_{zi}(t)$ ” ;

$$y_0(t) = 4e^{-2t} \cos\left(6t + \frac{5\pi}{3}\right), \quad t \geq 0$$

olarak bulunur.

Örnek

Aşağıda verilen elektrik devresinin diferansiyel çözümünü yapınız.



Şekil 35 RLC Elektrik devresi

Çözüm

Çevre gerilim denklemleri yazılırsa,

$$v_R(t) + v_C(t) = f(t)$$

$$Rx(t) + \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau = f(t)$$

$$15x(t) + 5 \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau = f(t)$$

D operatör değişimi yapılrısa ($D = \frac{d}{dt}$),

$$15x(t) + \frac{5}{D} x(t) = f(t)$$

$$(15D + 5)x(t) = Df(t)$$

$$15 \frac{dx}{dt} + 5x(t) = \frac{df}{dt}$$

$$\begin{aligned} x(t) &= C \frac{dy}{dt} \\ &= \frac{1}{5} Dy(t) \end{aligned}$$

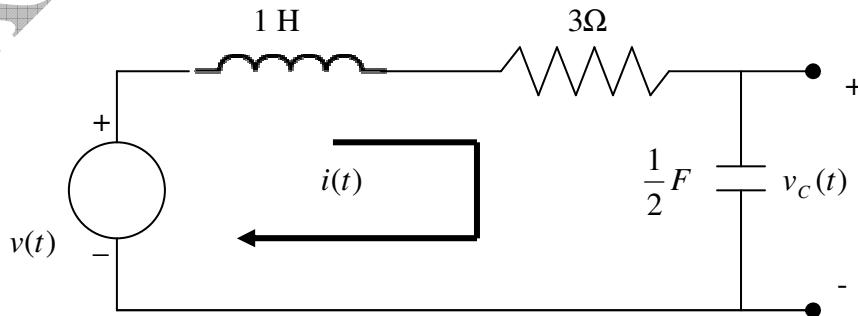
Bu $(15D + 5)x(t) = Df(t)$ da yerine konulursa

$$(3D + 1)y(t) = f(t)$$

$$3 \frac{dy}{dt} + y(t) = f(t)$$

Örnek

Aşağıda verilen elektrik devresinin diferansiyel çözümünü yapınız.



Şekil 36 RLC Elektrik devresi

Çözüm

Veriellen devrede oluşturulan diferansiyel denkleme

$$(D^2 + 3D + 2)y(t) = D f(t)$$

göre daha önce sıfır-giriş cevabı,

$$y_{zi}(t) = -5e^{-2t} + 5e^{-t}$$

olarak bulunmuştu. Şimdi ikinci kısım olan sıfır-durum cevabını araştıralım. Bunun için sistem giriş işaretinin

$$f(t) = 10e^{-3t}u(t)$$

olarak verildiğini biliyoruz. Öyleyse sistem-durum cevabının hesaplanması için, sistem impuls cevabını $h(t)$ bulmamız gerekecektir. Daha öncede belirtmiştik ki, karakteristik denklem aynı zamanda, sıfır-durum cevabının bulunmasında da önemli rol oynamaktadır.

$$(D^2 + 3D + 2)y(t) = D f(t)$$

Bu sistem ikinci dereceden ($n = 2$) bir karakteristik polinoma sahip olacaktır.

$$(\lambda^2 + 3\lambda + 2) = (\lambda + 1)(\lambda + 2)$$

Karakteristik denklemin kökleri

$$\lambda_1 = -1 \quad \text{ve} \quad \lambda_2 = -2$$

sistem çözümü

$$y_n(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-2t}$$

$y_{zs}(t)$ nin türevi alınırsa,

$$\dot{y}_{zs}(t) = \frac{dy_{zs}(t)}{dt} = -c_1 e^{-t} - 2c_2 e^{-2t}$$

Başlangıç koşullarının,

$$\dot{y}_n(0) = 1 \quad \text{ve} \quad y_n(0) = 0$$

olduğunu biliyoruz. Bunları ilgili denklemde yerlerine yazarsak

$$y_n(0) = 0 = c_1 + c_2$$

$$\dot{y}_n(0) = 1 = -c_1 - 2c_2$$

denklemleri toparlarsak,

$$0 = c_1 + c_2$$

$$1 = -c_1 - 2c_2$$

buradan,

$$c_1 = 1 \quad \text{ve} \quad c_2 = -1$$

bulunur. Bunları çözüm denkleminde yerine yazarsak,

$$y_n(t) = e^{-t} - e^{-2t}$$

elde edilir. Buradan aranan sistem impuls cevabı,

$$h(t) = b_n \delta(t) + [P(D)y_n(t)]u(t)$$

$$P(D)y_n(t) = \dot{y}_n(t) = -e^{-t} + 2e^{-2t}$$

Şu an başlangıç koşulları için çözüm yapıldığından, $f(t) = 0$ olduğundan dolayı, $b_n = 0$ olacağından,

$$h(t) = [P(D)y_n(t)]u(t) = (-e^{-t} + 2e^{-2t})u(t)$$

Şimdi $h(t)$ asıl sıfır-durum cevabının bulunacağı konvülyasyon denkleminde yerine yazılabilir.

$$\begin{aligned} y_{zs}(t) &= 10e^{-3t}u(t) * (-e^{-t} + 2e^{-2t})u(t) \\ &= 10e^{-3t}u(t) * [2e^{-2t} - e^{-t}]u(t) \end{aligned}$$

Konvülyasyon işleminin dağıtma özelliği uygulanırsa,

$$\begin{aligned} y_{zs}(t) &= 10e^{-3t}u(t) * 2e^{-2t}u(t) - 10e^{-3t}u(t) * e^{-t}u(t) \\ &= 20[e^{-3t}u(t) * e^{-2t}u(t)] - 10[e^{-3t}u(t) * e^{-t}u(t)] \end{aligned}$$

buradan,

$$\begin{aligned} y_{zs}(t) &= \frac{20}{-3 - (-2)} [e^{-3t} - e^{-2t}]u(t) - \frac{10}{-3 - (-1)} [e^{-3t} - e^{-t}]u(t) \\ &= -20(e^{-3t} - e^{-2t})u(t) + 5(e^{-3t} - e^{-t})u(t) \\ &= (-5e^{-t} + 20e^{-2t} - 15e^{-3t})u(t) \end{aligned}$$

Şimdi toplam sistem cevabı yazılabilir.

$$y(t) = y_{zi}(t) + y_{zs}(t)$$

$$y(t) = \underbrace{(-5e^{-t} + 5e^{-2t})}_{y_{zi}(t)} + \underbrace{(-5e^{-t} + 20e^{-2t} - 15e^{-3t})}_{y_{zs}(t)}, \quad t \geq 0$$

görüldüğü gibi sıfır-durum cevabı konvülyasyon işlemi yapısındadır.

SİSTEM TOPLAM CEVABI

Başlangıç koşullarını dikkate alarak yapılan yapılan “*sıfır-giriş cevabı*” ve sistem başlangıç koşullarını dikkate almadan (sıfır) girişin sıfırdan farklı bir $f(t) \neq 0$ değeri için bulunan çözümün “*sıfır-durum cevabı*” olarak tanımlandığını biliyoruz. Bunların ışığında bir sistemin toplam cevabının

Toplam cevap = sıfır – giriş cevabı + sıfır-durum cevabı

$$y(t) = y_{zi}(t) + y_{zs}(t)$$

yazılabileceğini biliyoruz. Önceki bölümden “*sıfır-giriş cevabının* $y_{zi}(t)$ ” diferansiyel denklemlerle ve başlangıç koşullarından yararlanılarak hesaplandığını biliyoruz. Şimdi ise, “*sıfır-durum cevabının* $y_{zs}(t)$ ” bulunmasını araştıracağız.

Sistem durum cevabı olarak sistem girişi $f(t)$ ile sistem impuls cevabının $h(t)$ konvülyasyonu söz konusu olacaktır.

$$y(t) = f(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t - \tau)d\tau$$

Sistem çıkışı $y(t)$ buradaki amacımıza uygun olarak sistem-durum cevabı olduğundan $y(t)$ yerine $y_{zs}(t)$ düşünebiliriz. Bu durumda denklem

$$y_{zs}(t) = f(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t - \tau)d\tau$$

gibi düşünülecektir. Ancak özellikle bu bölüme dönük ifadelerimizde aksi belirtilmedikçe $y_{zs}(t)$ yerine, yalnızca $y(t)$ alacağız ($y_{zs}(t) = y(t)$). Bu durumda toplam cevap

$$y(t) = \underbrace{\sum_{j=1}^n c_j e^{\lambda_j t}}_{\text{sıfır - giriş}} + \underbrace{f(t) * h(t)}_{\text{sıfır - durum}}$$

olacaktır. Bunu aşağıdaki örnek üzerinden somutlaştırmaya çalışalım.

Örnek

Yukarıdaki örnekte sistemin toplam cevabının

$$y(t) = y_{zi}(t) + y_{zs}(t)$$

$$y(t) = (-5e^{-t} + 5e^{-2t}) + (-5e^{-t} + 20e^{-2t} - 15e^{-3t}) \quad , \quad t \geq 0$$

olarak elde edildiğini biliyoruz. Bunların sıfır-giriş ve sıfır-durum cevabı olarak ise,

$$y(t) = \underbrace{(-5e^{-t} + 5e^{-2t})}_{y_{zi}(t)} + \underbrace{(-5e^{-t} + 20e^{-2t} - 15e^{-3t})}_{y_{zs}(t)} \quad , \quad t \geq 0$$

yazıldığını görmekteyiz.

Natural ve Zorlanmış Cevaplar

Sistemlerde birbirine yakın anlamda sistem cevap ifadeleri mevcuttur. Yukarıda ele aldığımız sıfır-giriş cevabı ve sıfır-durum cevabına ek olarak naturel (doğal) ve zorlanmış cevap olarak ifade edilen sistem cevapları söz konusudur. Daha önceki çözümlerin $e^{-\lambda t}$ biçimindeki karakteristik modlardan (λ , özdeğer) oluştuğunu görmüştük. Şimdi yukarıda verilen $y(t)$ toplam cevabındaki aynı karakteristik modları toplayarak daha derli-toplu bir gösterim sağlayabiliriz.

$$y(t) = \underbrace{(-5e^{-t} + 5e^{-2t})}_{y_{zi}(t)} + \underbrace{(-5e^{-t} + 20e^{-2t} - 15e^{-3t})}_{y_{zs}(t)} \quad , \quad t \geq 0$$

Eğer denklem göz önüne alınırsa, söz konusu karakteristik modların e^{-t} , e^{-2t} ve e^{-3t} olduklarını görmekteyiz. Bunları toplarsak,

$$\begin{aligned} y_n(t) &= -5e^{-t} - 5e^{-t} + 5e^{-2t} + 20e^{-2t} \quad , \quad t \geq 0 \\ &= -10e^{-t} + 25e^{-2t} \end{aligned}$$

$$y_n(t) = -10e^{-t} + 25e^{-2t} - 15e^{-3t} \quad , \quad t \geq 0$$

$$y_f(t) = -15e^{-3t} \quad , \quad t \geq 0$$

$$y(t) = \underbrace{(-10e^{-t} + 25e^{-2t})}_{\text{natural cevap}} + \underbrace{(-15e^{-3t})}_{\text{zorlanmış cevap}} \quad , \quad t \geq 0$$

Buradan natural cevabın sıfır-giriş ve sıfır-durum cevaplarını tam olmasada içerdiği görülürken, zorlanmış cevabın başlangıç koşullarının olmadığı, sistem girişiyle elde edilen kazançtır. Bu şekilde elde edilen iki yeni sistem cevabının çözümleride farklıdır. **Naturel cevabı** bulmak amacıyla yapılan çözüme **homojen çözüm**, diğer yandan **zorlanmış cevabı** bulmak üzere yapılan çözüme de **özel çözüm** denilmektedir.

Diferansiyel Denklemlerin Natural ve Zorlanmış Çözümleri

Sıfır-giriş ve sıfır-durum cevaplarının yanı sıra, diferansiyel denklemlerin bir diğer çözümü de klasik yöntemlere dayanır. Bu yöntemde girişin belli bir değerden oluştuğu kabul edilerek çözüm homojen ve özel çözüm olarak iki kategoriye ayrılır. Homojen çözüm aynı zamanda “natural çözüm “ yani doğal çözüm olarak da bilinirken, özel çözümde aynı şekilde “zorlanmış (forced) çözüm “ olarak bilinir. Bu anlamda daha sıkça kullanacağımız natural çözüm $y_n(t)$ ve zorlanmış çözümde $y_\phi(t)$ ile gösterilirse klasik haldeki toplam çözüm $y(t)$

$$y(t) = y_n(t) + y_\phi(t)$$

sistem denklemi,

$$Q(D)[y_n(t) + y_\phi(t)] = P(D)f(t)$$

veya

$$Q(D)y_n(t) + Q(D)y_\phi(t) = P(D)f(t)$$

Burada natural çözüm, karakteristik moddan oluşmaktadır. Sıfır-giriş cevabındaki çözüme benzer olarak başlangıç koşulları ($f(t) = 0$) göz önüne alınır. Bu yüzden

$$Q(D)y_n(t) = 0$$

Zorlanmış çözüm ise,

$$Q(D)y_\phi(t) = P(D)f(t)$$

Natural çözüm sıfır-giriş cevabındakine benzer olarak sistem karakteristik modlarının linear kombinasyonlarından oluşmaktadır. Yalnızca kullanılan sabitler farklıdır. Bu sabitler “yardımcı koşullar (auxiliary conditions) “ dan yararlanılarak yapılır.

Zorlanmış Çözüm

Linear zamandan bağımsız sürekli (LTIC) sistemlerde zorlanmış çözüm de giriş birkaç diferansiyel toplamından oluşmaktadır. Girişlerin formu genellikle “ e^s veya t^r ” gibi exponensiyel veya üstel biçimdedir. Bu tür girişlere karşı zorlanmış cevap (çözüm) bu girişlerin ve türevlerinin linear kombinasyonları olarak ifade edilirler. Bu yüzden zorlanmış çözümün genelçözüm

$$y_\phi(t) = \beta_2 t^2 + \beta_1 t + \beta_0$$

biçiminde bir ifade olacaktır. Bu ifade sistem denkleminde

$$Q(D)y_\phi(t) = P(D)f(t)$$

yerine yazılarak zorlanmış çözüm yapılır. Burada girişe ait her bir form için zorlanmış cevabın farklı bir çözüm (cevap) karşılığı olduğu kabul edilir. Bu çözümün girişin ardışık türevlenebilir olma formuna göre yapıldığını unutmamalıyız. Aşağıda değişik girişler için karakteristik modlardan oluşan zorlanmış cevapların çözümleri verilmiştir.

Giriş $f(t)$	Zorlanmış cevap
$e^{\zeta t} \quad \zeta \neq \lambda_i (i = 1, 2, 3, \dots, n)$	$\beta e^{\zeta t}$
$e^{\zeta t} \quad \zeta = \lambda_i (i = 1, 2, 3, \dots, n)$	$\beta t e^{\zeta t}$
k	β
$\cos(\omega t + \theta)$	$\beta \cos(\omega t + \phi)$
$(t^r + \alpha_{r-1}t^{r-1} + \dots + \alpha_1t + \alpha_0)$	$(\beta_r t^r + \beta_{r-1}t^{r-1} + \dots + \beta_1t + \beta_0) e^{\zeta t}$

Örnek

Sistem denklemi

$$(D^2 + 3D + 2)y(t) = Df(t)$$

ve girişi

$$f(t) = t^2 + 5t + 3$$

ve de, başlangıç koşulları $y(0^+) = 2$ ve $\dot{y}(0^+) = 3$ olan sistemi çözünüz.

Çözüm

Çözüm için sistem toplam cevabı olarak natural ve zorlanmış çözümlerin toplamı bulunmalıdır.

$$y(t) = y_n(t) + y_o(t)$$

Görüldüğü gibi sistem girişi ardışık türevlenebilir diferansiyel bir denklemden oluşmaktadır. Böyle bir denklemin karakteristik polinomu

$$\lambda^2 + 3\lambda + 2 = (\lambda + 1)(\lambda + 2)$$

Karakteristik modları e^{-t} ve e^{-2t} olacaktır. Natural çözüm bu karakteristik modların linear kombinasyonları olacaktır.

$$y_n(t) = K_1 e^{-t} + K_2 e^{-2t}, \quad t \geq 0$$

K_1 ve K_2 katsayıları başlangıç koşullarından bulunacaktır. Verilen $t^2 + 5t + 3$ girişi için zorlanmış cevap tablodan görülebilir.

$$y_{\phi}(t) = \beta_2 t^2 + \beta_1 t + \beta_0$$

Zorlanmış çözüm sistem denklemini sağlayacağından

$$(D^2 + 3D + 2)y_{\phi}(t) = Df(t)$$

$$Dy_{\phi}(t) = \frac{d}{dt}(\beta_2 t^2 + \beta_1 t + \beta_0) = 2\beta_2 t + \beta_1$$

$$D^2 y_{\phi}(t) = \frac{d^2}{dt^2}(\beta_2 t^2 + \beta_1 t + \beta_0) = 2\beta_2$$

$$Df(t) = \frac{d}{dt}(t^2 + 5t + 3) = 2t + 5$$

Bütün bulunanlar sistem denkleminde yerine yazılırsa

$$2\beta_2 + 3(2\beta_2 t + \beta_1) + 2(\beta_2 t^2 + \beta_1 t + \beta_0) = 2t + 5$$

biraz daha düzenlenirse,

$$2\beta_2 t^2 + (2\beta_1 + 6\beta_2)t + (2\beta_0 + 3\beta_1 t + 2\beta_2) = 2t + 5$$

Burada iki taraftan aynı kuvvetlerin eşitliğini yazarsak,

$$2\beta_2 = 0$$

$$2\beta_1 + 6\beta_2 = 2$$

$$2\beta_0 + 3\beta_1 t + 2\beta_2 = 5$$

Buradan,

$$\beta_0 = 1, \quad \beta_1 = 1, \quad \beta_2 = 0$$

bulunur. Buradan zorlanmış çözüm de

$$y_{\phi}(t) = t + 1, \quad t > 0$$

bulunur. Toplam system cevabı ise,

$$y(t) = y_n(t) + y_{\phi}(t)$$

$$= K_1 e^{-t} + K_2 e^{-2t} + t + 1, \quad t > 0$$

Buradan başlangıç koşullarına göre türev alınırsa

$$\dot{y}(t) = -K_1 e^{-t} - 2K_2 e^{-2t} + 1$$

$t = 0$ için

$$y(0) = 2 = K_1 + K_2 + 1$$

$$\dot{y}(0) = 3 = -K_1 - 2K_2$$

$$1 = K_1 + K_2$$

$$3 = -K_1 - 2K_2$$

$$K_1 = 4 \text{ ve } K_2 = -3$$

Nihai toplam çözüm

$$y(t) = 4e^{-t} - 3e^{-2t} + t + 1, \quad t \geq 0$$

olarak bulunur.

Örnek

Sistem denklemi

$$(D^2 + 5D + 6)y(t) = (D + 1)f(t)$$

ve girişi

$$f(t) = 6t^2$$

ve başlangıç koşulları $y(0^+) = \frac{25}{18}$ ve $\dot{y}(0^+) = -\frac{3}{2}$ olan sistemi çözünüz.

Çözüm

Çözüm için sistem toplam cevabı olarak natural ve zorlanmış çözümlerin toplamı bulunmalıdır.

$$y(t) = y_n(t) + y_\phi(t)$$

Görüldüğü gibi sistem girişi ardışık türevlenebilir diferansiyel bir denklemden oluşmaktadır. Böyle bir denklemin karakteristik polinomu

$$\lambda^2 + 5\lambda + 6 = (\lambda + 2)(\lambda + 3)$$

Karakteristik modları e^{-2t} ve e^{-3t} olacaktır. Natural çözüm bu karakteristik modların linear kombinasyonları olacaktır.

$$y_n(t) = K_1 e^{-2t} + K_2 e^{-3t}, \quad t \geq 0$$

K_1 ve K_2 katsayıları başlangıç koşullarından bulunacaktır. Verilen $6t^2$ girişi için zorlanmış cevap tablodan görülebilir.

$$y_\phi(t) = \beta_2 t^2 + \beta_1 t + \beta_0$$

Zorlanmış çözüm sistem denklemini sağlayacağından

$$(D^2 + 5D + 6)y_\phi(t) = Df(t)$$

$$Dy_\phi(t) = \frac{d}{dt}(\beta_2 t^2 + \beta_1 t + \beta_0) = 2\beta_2 t + \beta_1$$

$$D^2 y_\phi(t) = \frac{d^2}{dt^2}(\beta_2 t^2 + \beta_1 t + \beta_0) = 2\beta_2$$

$$Df(t) = \frac{d}{dt}(6t^2) = 12t$$

Bütün bulunanlar sistem denkleminde yerine yazılırsa

$$2\beta_2 + 5(2\beta_2 t + \beta_1) + 6(\beta_2 t^2 + \beta_1 t + \beta_0) = 6t^2 + 12t$$

biraz daha düzenlenirse,

$$6\beta_2 t^2 + (6\beta_1 + 10\beta_2)t + (6\beta_0 + 5\beta_1 t + 2\beta_2) = 6t^2 + 12t$$

Burada iki taraftan aynı kuvvetlerin eşitliğini yazarsak,

$$6\beta_2 = 6$$

$$6\beta_1 + 10\beta_2 = 12$$

$$6\beta_0 + 5\beta_1 t + 2\beta_2 = 0$$

buradan,

$$\beta_0 = -\frac{11}{18}, \quad \beta_1 = \frac{1}{3}, \quad \beta_2 = 1$$

bulunur. Buradan zorlanmış çözüm de

$$y_\phi(t) = t^2 + \frac{1}{3}t - \frac{11}{18}, \quad t > 0$$

bulunur. Toplam system cevabı ise,

$$y(t) = y_n(t) + y_\phi(t)$$

$$= K_1 e^{-2t} + K_2 e^{-3t} + t^2 + \frac{1}{3}t - \frac{11}{18}$$

Buradan başlangıç koşullarına göre türev alınırsa

$$\dot{y}(t) = -2K_1 e^{-t} - 3K_2 e^{-2t} + 2t + \frac{1}{3}$$

$t = 0$ için

$$y(0) = \frac{25}{18} = K_1 + K_2 - \frac{11}{18}$$

$$\dot{y}(0) = -\frac{2}{3} = -2K_1 - 3K_2 + \frac{1}{3}$$

$$\frac{36}{18} = 2 = K_1 + K_2$$

$$-\frac{3}{3} = -1 = -2K_1 - 3K_2$$

$$2 = K_1 + K_2$$

$$1 = 2K_1 + 3K_2$$

$$K_1 = 5 \text{ ve } K_2 = -3$$

Nihai toplam çözüm

$$y(t) = 5e^{-2t} - 3e^{-3t} + t^2 + \frac{1}{3}t - \frac{11}{18}$$

olarak bulunur.

Exponensiyel giriş

Exponensiyel giriş LTI sistemler için oldukça önemlidir. Daha önce verilen tablodan $e^{\zeta t}$ biçimindeki exponensiyel giriş için sistemin zorlanmış cevabı $\beta e^{\zeta t}$ biçimindeydi. Burada ζ eğer sistemin karakteristik kökü değilse ($\zeta \neq \lambda_i$)

$$\beta = \frac{Q(\zeta)}{P(\zeta)}$$

olduğunu göstereceğiz. β yı bulabilmek için zorlanmış cevap

$$y_{\phi}(t) = \beta e^{\zeta t}$$

sistem denkleminde yerine yazılacak,

$$Q(D)[\beta e^{\varsigma t}] = P(D) e^{\varsigma t}$$

$$D e^{\varsigma t} = \frac{d}{dt}(e^{\varsigma t}) = \varsigma e^{\varsigma t}$$

$$D^2 e^{\varsigma t} = \frac{d^2}{dt^2}(e^{\varsigma t}) = \varsigma^2 e^{\varsigma t}$$

⋮

$$D^r e^{\varsigma t} = \frac{d^r}{dt^r}(e^{\varsigma t}) = \varsigma^r e^{\varsigma t}$$

Sonuç olarak

$$Q(D) e^{\varsigma t} = Q(\varsigma) e^{\varsigma t} \quad \text{ve} \quad P(D) e^{\varsigma t} = P(\varsigma) e^{\varsigma t}$$

buradan

$$\beta Q(\varsigma) e^{\varsigma t} = P(\varsigma) e^{\varsigma t}$$

$$\beta = \frac{P(\varsigma)}{Q(\varsigma)}$$

Bu yaklaşım çıkıştaki değerin girişe göre karşılaştırılması yönündeki oran olarak bir tür “kazanç (gain)” ifadesidir. Eğer giriş

$$f(t) = e^{\varsigma t} u(t)$$

ise zorlanmış çözüm

$$y_{\phi}(t) = H(\varsigma) e^{\varsigma t}, \quad t > 0$$

Buradan

$$H(\varsigma) = \frac{P(\varsigma)}{Q(\varsigma)}$$

Bulunan H in β ya benzer olarak bir tür sistem kazancı olup burada daha çok bilinen adıyla “transfer fonksiyonu” olarak anılır. Sistemin çıkış büyüklüğünün, girişine oranına işaret etmektedir. Diğer bir nokta ise $H(\varsigma)$

$$y_{\phi}(t) = H(\varsigma) e^{\varsigma t}, \quad t > 0$$

ifadesinden de görüldüğü gibi bir sabit gibi davranmaktadır. Bunun sebebi de ζ değeri bilinen bir denklem kökleri gibi sabit bir yapıya sahiptir. Bu değer aşağıdaki ifadede verildiği gibi

$$\zeta = \sigma \pm j\omega =$$

gerçek veya kompleks olabilir. Buradan ulaşılan sonuç şudur : $e^{\zeta t}$ girişi için zorlanmış cevap olan $y_{\phi}(t) = \beta e^{\zeta t}$, buradaki β nın

$$H(\zeta) = \frac{P(\zeta)}{Q(\zeta)} = \beta$$

olarak düşünülmesiyle bulunulan cevabın

$$y_{\phi}(t) = H(\zeta) e^{\zeta t} \quad , \quad t > 0$$

aynısıdır. Bu önemli bir avantaj sağlar. Buna göre toplam sistemin cevabı,

$$y(t) = \sum_{j=1}^n K_j e^{\lambda_j t} + H(\zeta) e^{\zeta t}$$

Buradaki sabitler $K_1, K_2, K_3, \dots, K_n$ yardımcı koşullarla bulunacak sabit katsayılardır.

Bilmemiz gereken exponensiyel sayıların aslında çok çeşitli olmasıdır. $e^{\zeta t}$ tipindeki fonksiyonlar için

$$\zeta = 0 = \text{sabit}$$

$$\zeta = \pm j\omega = \text{sinusiod (Fourier transformasyon)}$$

$$\zeta = \sigma \pm j\omega = \text{sinusiod (Laplace transformasyon)}$$

Bunların her birine göre farklı zorlanmış çözümler ve toplam sistem cevapları söz konusudur. Ancak bunların en önemli avantajı hepsi için yukarıda verilen

$$H(\zeta) = \frac{P(\zeta)}{Q(\zeta)} = \beta$$

yaklaşımının ortak olmasıdır. Aşağıda farklı girişler için zorlanmış cevaplar verilmektedir.

1. $f(t) = C$ Durumu

Bu durumda giriş fonksiyonu $\zeta = 0$ için sabit bir fonksiyon gibi davranacaktır.

$$f(t) = C$$

Bu girişe karşı zorlanmış (forced) çözüm

$$\begin{aligned} y_{\phi}(t) &= CH(\zeta) e^{\zeta t} \quad , \quad \zeta = 0 \\ &= CH(0) \end{aligned}$$

2. $f(t) = e^{j\omega t}$ Durumu

Bu durumda giriş fonksiyonu $\zeta = j\omega$ için sinusoidal bir fonksiyon gibi davranacaktır. Bu girişe karşı zorlanmış (forced) çözüm

$$y_{\phi}(t) = H(j\omega)e^{j\omega t}$$

3. $f(t) = \cos \omega_0 t$ Durumu

$\zeta = \pm j\omega$ için girişin $e^{\pm j\omega t}$ olduğunu ve bu giriş için zorlanmış çözümün

$$y_{\phi}(t) = H(\pm j\omega)e^{\pm j\omega t}$$

olduğunu biliyoruz.

$$\cos \omega t = \frac{1}{2}(e^{j\omega t} + e^{-j\omega t})$$

ise, böyle bir giriş için zorlanmış çözümün

$$y_{\phi}(t) = \frac{1}{2}[H(j\omega)e^{j\omega t} + H(-j\omega)e^{-j\omega t}]$$

$$y_{\phi}(t) = \text{Re}[H(j\omega)e^{j\omega t}]$$

$$H(j\omega) = |H(j\omega)| e^{j\angle H(j\omega)}$$

$$\begin{aligned} y_{\phi}(t) &= \text{Re}\{ |H(j\omega)| e^{j\angle H(j\omega)} e^{j\omega t} \} = \text{Re}\{ |H(j\omega)| e^{j[\omega t + \angle H(j\omega)]} \} \\ &= |H(j\omega)| \cos[\omega t + \angle H(j\omega)] \end{aligned}$$

Bu yaklaşım daha genel giriş olan $f(t) = \cos(\omega_0 t + \theta)$ yazılırsa,

$$y_{\phi}(t) = |H(j\omega)| \cos[\omega t + \theta + \angle H(j\omega)]$$

olacaktır.

Örnek

$$(D^2 + 3D + 2)y(t) = Df(t)$$

Ve de, başlangıç koşulları $y(0^+) = 2$ ve $\dot{y}(0^+) = 3$ olan sistemi aşağıdaki giriş fonksiyonlarına göre çözünüz.

- a) $10e^{-3t}$ b) 5 c) e^{-2t} d) $10\cos(3t + 30^\circ)$

a) $f(t) = 10e^{-3t}$

Çözüm için sistem toplam cevabı olarak natural ve zorlanmış çözümlerin toplamı bulunmalıdır.

$$y(t) = y_n(t) + y_\phi(t)$$

Görüldüğü gibi sistem girişi ardışık türevlenebilir diferansiyel bir denklemden oluşmaktadır. Böyle bir denklemin karakteristik polinomu

$$\lambda^2 + 3\lambda + 2 = (\lambda + 1)(\lambda + 2)$$

Karakteristik modları e^{-t} ve e^{-2t} olacaktır. Natural çözüm bu karakteristik modların linear kombinasyonları olacaktır.

$$y_n(t) = K_1 e^{-t} + K_2 e^{-2t}$$

K_1 ve K_2 katsayıları başlangıç koşullarından bulunacaktır.

$$H(\zeta) = \frac{P(\zeta)}{Q(\zeta)} = \frac{\zeta}{\zeta^2 + 3\zeta + 2}$$

Giriş fonksiyonu $f(t) = 10e^{-3t}$ olduğundan

$$\zeta = -3$$

Buna göre

$$y_\phi(t) = 10H(-3)e^{-3t} = 10 \left[\frac{-3}{(-3)^2 + 3(-3) + 2} \right] e^{-3t} = -15 e^{-3t}, \quad t > 0$$

Toplam çözüm

$$y(t) = K_1 e^{-t} + K_2 e^{-2t} - 15 e^{-3t} \quad , \quad t > 0$$

$$\dot{y}(t) = -K_1 e^{-t} - 2K_2 e^{-2t} + 45 e^{-3t} \quad , \quad t > 0$$

$t = 0$ için

$$y(0) = 2 = K_1 + K_2 - 15$$

$$\dot{y}(0) = 3 = -K_1 - 2K_2 + 45$$

$$17 = K_1 + K_2$$

$$42 = K_1 + 2K_2$$

$$K_1 = -8 \quad \text{ve} \quad K_2 = 25$$

Nihai toplam çözüm

$$y(t) = -8e^{-t} + 25e^{-2t} - 15e^{-3t} \quad , \quad t > 0$$

b) $f(t) = 5$

Çözüm için sistem toplam cevabı olarak natural ve zorlanmış çözümlerin toplamı bulunmalıdır.

$$y(t) = y_n(t) + y_\phi(t)$$

Görüldüğü gibi sistem girişi ardışık türevlenebilir diferansiyel bir denklemden oluşmaktadır. Böyle bir denklemin karakteristik polinomu

$$\lambda^2 + 3\lambda + 2 = (\lambda + 1)(\lambda + 2)$$

Karakteristik modları e^{-t} ve e^{-2t} olacaktır. Natural çözüm bu karakteristik modların linear kombinasyonları olacaktır.

$$y_n(t) = K_1 e^{-t} + K_2 e^{-2t}$$

K_1 ve K_2 katsayıları başlangıç koşullarından bulunacaktır.

$$H(\zeta) = \frac{P(\zeta)}{Q(\zeta)} = \frac{\zeta}{\zeta^2 + 3\zeta + 2}$$

Giriş fonksiyonu $f(t) = 5e^{0t}$ olduğundan

$$\zeta = 0$$

Buna göre

$$y_{\phi}(t) = H(0)e^{0t} = 10 \left[\frac{0}{(0)^2 + 3(0) + 2} \right] e^{0t} = 0, \quad t > 0$$

Bu durumda toplam çözüm yalnızca natural cevaptan oluşacaktır.

Toplam çözüm

$$y(t) = K_1 e^{-t} + K_2 e^{-2t} \quad t > 0$$

Bir önceki çözümden ilgili sabitler bulunmuştur

$$K_1 = -8 \text{ ve } K_2 = 25$$

bunları aynen yerine yazarsak, toplam çözüm

$$y(t) = -8e^{-t} + 25e^{-2t}, \quad t > 0$$

olacaktır.

$$\text{c) } f(t) = e^{-2t}$$

Çözüm için sistem toplam cevabı olarak natural ve zorlanmış çözümlerin toplamı bulunmalıdır.

$$y(t) = y_n(t) + y_{\phi}(t)$$

Görüldüğü gibi sistem girişi ardışık türevlenebilir diferansiyel bir denklemden oluşmaktadır. Böyle bir denklemin karakteristik polinomu

$$\lambda^2 + 3\lambda + 2 = (\lambda + 1)(\lambda + 2)$$

özdeğerler,

$$\lambda_1 = -1 \text{ ve } \lambda_2 = -2$$

karakteristik modları e^{-t} ve e^{-2t} olacaktır. Bu örnekte özel bir durumun söz konusu olduğunu görmekteyiz. Sistem $f(t) = e^{-2t}$ girişinde bulunan e^{-2t} karakteristik modu, sistem denkleminde elde edilen e^{-t} ve e^{-2t} karakteristik modlardan biriyle aynıdır. Bu durumda, sistem cevabının çok büyük, belkide sonsuz (∞) olabileceği, sistemi kararsızlığa ve çökmesine sebebiyet verebilecek **rezonans** denilen bir riskle karşı karşıyayız. Sonucu çözümle gözlemlemeye çalışalım.

Natural çözüm bu karakteristik modların linear kombinasyonları olacaktır.

$$y_n(t) = K_1 e^{-t} + K_2 e^{-2t}$$

K_1 ve K_2 katsayıları başlangıç koşullarından bulunacaktır.

$$H(\zeta) = \frac{P(\zeta)}{Q(\zeta)} = \frac{\zeta}{\zeta^2 + 3\zeta + 2}$$

Giriş fonksiyonu $f(t) = e^{-2t}$ olduğundan

$$\zeta = -2$$

Burada $\zeta = -2$ aynı zamanda karakteristik denklemin köklerinden olduğu için zorlanmış çözümü tablodan alacağız.

$$y_\phi(t) = \beta t e^{-2t}$$

$$(D^2 + 3D + 2)y(t) = Df(t)$$

$$(D^2 + 3D + 2)[\beta t e^{-2t}] = D e^{-2t}$$

$$Dy_\phi(t) = \frac{d}{dt}(\beta t e^{-2t}) = (1 - 2t)\beta e^{-2t}$$

$$D^2 y_\phi(t) = \frac{d^2}{dt^2}(\beta t e^{-2t}) = -2\beta e^{-2t} - 2(1 - 2t)\beta e^{-2t} = -4(1 + t)\beta e^{-2t}$$

$$Df(t) = \frac{d}{dt}(e^{-2t}) = -2e^{-2t}$$

Bütün bulunanlar sistem denkleminde yerine yazılırsa

$$-4(1 + t)\beta e^{-2t} + (1 - 2t)\beta e^{-2t} + \beta t e^{-2t} = -2e^{-2t}$$

$$\beta [4t - 4 + 3 - 6t + 2t] e^{-2t} = -2e^{-2t}$$

$$-\beta e^{-2t} = -2e^{-2t}$$

$$\beta = 2$$

bulunur. Buradan zorlanmış çözüm de

$$y_\phi(t) = 2t e^{-2t}$$

bulunur. Toplam sistem cevabı ise,

$$\begin{aligned}y(t) &= y_n(t) + y_\phi(t) \\ &= K_1 e^{-t} + K_2 e^{-2t} + 2t e^{-2t}\end{aligned}$$

Buradan başlangıç koşullarına göre türev alınırsa

$$\dot{y}(t) = -K_1 e^{-t} - 2K_2 e^{-2t} + 2(1 - 2t) e^{-2t}$$

$t = 0$ için

$$y(0) = 2 = K_1 + K_2$$

$$\dot{y}(0) = 3 = -K_1 - 2K_2 + 2$$

$$2 = K_1 + K_2$$

$$1 = -K_1 - 2K_2$$

$$K_1 = 5 \text{ ve } K_2 = -3$$

nihai toplam çözüm

$$y(t) = 5e^{-t} - 3e^{-2t} + 2t e^{-2t}$$

olarak bulunur. Elde edilen cevaba bakıldığında hala $t \rightarrow \infty$ için sistem cevabının $2t e^{-2t} \rightarrow \infty$ dan solayı **rezonans** durumunun potansiyel olduğunu, ancak ifadede yer alan e^{-2t} , terimi $t \rightarrow \infty$ için, aynı ifade de çarpım durumunda olduğu (t) değişkeninden daha hızlı sıfır olacağından ($e^{-2t} \rightarrow 0$), çıkış tam rezonansdan kurtulur. Ancak girişin karakteristik modunun, sistem fonksiyonuyla aynı olması durumunda rezonans riski daima vardır, dikkat edilmelidir.

$$\text{d) } f(t) = 10 \cos(3t + 30^\circ)$$

Çözüm için sistem toplam cevabı olarak natural ve zorlanmış çözümlerin toplamı bulunmalıdır.

$$y(t) = y_n(t) + y_\phi(t)$$

Görüldüğü gibi sistem girişi ardışık türevlenebilir diferansiyel bir denklemden oluşmaktadır. Böyle bir denklemin karakteristik polinomu

$$\lambda^2 + 3\lambda + 2 = (\lambda + 1)(\lambda + 2)$$

özdeğerler,

$$\lambda_1 = -1 \text{ ve } \lambda_2 = -2$$

Karakteristik modları e^{-t} ve e^{-2t} olacaktır. Natural çözüm bu karakteristik modların linear kombinasyonları olacaktır.

$$y_n(t) = K_1 e^{-t} + K_2 e^{-2t}$$

K_1 ve K_2 katsayıları başlangıç koşullarından bulunacaktır.

$$H(\zeta) = \frac{P(\zeta)}{Q(\zeta)} = \frac{\zeta}{\zeta^2 + 3\zeta + 2}$$

Giriş fonksiyonu $f(t) = 10 \cos(3t + 30^\circ)$ olduğundan ve

$$f(t) = 10 \cos(3t + 30^\circ) = 5[e^{j(3t+30^\circ)} + e^{-j(3t+30^\circ)}]$$

$$y_\phi(t) = \frac{1}{2}[H(j3)e^{j3t} + H(-j3)e^{-j3t}]$$

$$y_\phi(t) = \text{Re}[H(j3)e^{j3t}]$$

$$H(j\omega) = |H(j3)| e^{j\angle H(j3)}$$

$$|H(j3)| = 10$$

$$\begin{aligned} y_\phi(t) &= \text{Re}\{ |H(j3)| e^{j\angle H(j3)} e^{j3t} \} \\ &= 10 |H(j3)| \cos[3t + 30^\circ + \angle H(j3\omega)] \end{aligned}$$

$$H(j3) = \frac{P(j3)}{Q(j3)}$$

Buna göre

$$y_\phi(t) = H(j3) = \frac{P(j3)}{Q(j3)} = \left[\frac{j3}{(j3)^2 + 3(j3) + 2} \right] = \frac{j3}{-7 + j9} = \frac{27 - j21}{130} = 0.263 e^{-j37.9^\circ}$$

$$|H(j3)| = 0.263$$

$$\angle H(j3\omega) = -37.9^\circ$$

Zorlanmış çözüm

$$\begin{aligned} y_{\phi}(t) &= 10(0.263)\cos[3t + 30^{\circ} - 37.9^{\circ}] \\ &= 2.63 \cos(3t - 7.9^{\circ}) \end{aligned}$$

Toplam çözüm

$$y(t) = K_1 e^{-t} + K_2 e^{-2t} + 2.63 \cos(3t - 7.9^{\circ})$$

$$\dot{y}(t) = -K_1 e^{-t} - 2K_2 e^{-2t} - 7.89 \sin(3t - 7.9^{\circ})$$

$t = 0$ için

$$y(0) = 2 = K_1 + K_2 + 2.63 \cos 7.9^{\circ}$$

$$\dot{y}(0) = 3 = -K_1 - 2K_2 + 7.89 \sin 7.9^{\circ}$$

$$-0.60 = K_1 + K_2$$

$$-2 = K_1 + 2K_2$$

$$K_1 = 0.8 \text{ ve } K_2 = -1.40$$

Nihai toplam çözüm

$$y(t) = 0.8e^{-t} - 1.40e^{-2t} + 2.63\cos(3t - 7.9^{\circ}) , \quad t \geq 0$$

Örnek

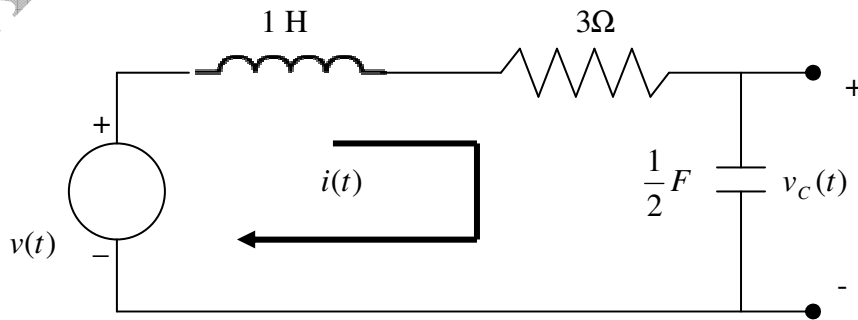
Aşağıda verilen elektrik devresinin diferansiyel çözümünü sistem denklemi

$$(D^2 + 3D + 2)y(t) = Df(t)$$

ve girişi

$$f(t) = 10e^{-3t}$$

ve de, başlangıç koşulları $y(0^-) = 0$ ve $v_C(0^-) = 5$ olan sistemi klasik yöntemle çözünüz.



Şekil 37 RLC Elektrik devresi

Kirchoff kuralı uygulandığında,

$$v_L(t) + v_R(t) + v_C(t) = v(t) = f(t)$$

Basitlik açısından,

$$y(t) = i(t)$$

$$f(t) = v(t)$$

olsun.

$$\frac{dy}{dt} + 3y(t) + 2\int_{-\infty}^t y(\tau)d\tau = f(t)$$

Her iki tarafın türevi alınırsa,

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + 3\frac{dy}{dt} + 2y(t) = \frac{df}{dt}$$

Diferansiyel çözüm için,

$$D = \frac{d}{dt}$$

alınırsa,

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = D^2 y(t)$$

$$\frac{dy}{dt} = Dy(t)$$

olarak alınırsa genel denklem,

$$(D^2 + 3D + 2)y(t) = Df(t)$$

oluşur. Her iki taraf $\frac{1}{D}$ ile çarpılırsa

$$(D + 3 + 2\frac{1}{D})y(t) = f(t)$$

oluşur. Burada,

$$\int_{-\infty}^t y(\tau)d\tau = \frac{1}{D} y(t)$$

Denklem biraz daha düzenlenirse

$$(D^2 + 3D + 2)y(t) = Df(t)$$

sistem denklemi elde edilir. Burada verilenlerden girişin $f(t) = 10e^{-3t}$ ve başlangıç koşullarının $y(0^-) = 0$ ve $\dot{y}(0^-) = 5$ olduğunu biliyoruz. Çözüme devam edersek, çözüm $f(t) = 10e^{-3t}$ giriş için sistem toplam cevabı olarak natural ve zorlanmış çözümlerin toplamı bulunmalıdır.

$$y(t) = y_n(t) + y_\phi(t)$$

Çözüm

$$f(t) = 10e^{-3t}$$

Çözüm için sistem toplam cevabı olarak natural ve zorlanmış çözümlerin toplamı bulunmalıdır.

$$y(t) = y_n(t) + y_\phi(t)$$

$$(D^2 + 3D + 2)y(t) = Df(t)$$

Görüldüğü gibi böyle bir denklemin karakteristik polinomu

$$\lambda^2 + 3\lambda + 2 = (\lambda + 1)(\lambda + 2)$$

özdeğerler,

$$\lambda_1 = -1 \text{ ve } \lambda_2 = -2$$

Karakteristik modları e^{-t} ve e^{-2t} olacaktır. Natural çözüm bu karakteristik modların linear kombinasyonları olacaktır.

$$y_n(t) = K_1 e^{-t} + K_2 e^{-2t}$$

K_1 ve K_2 katsayıları başlangıç koşullarından bulunacaktır.

$$H(\zeta) = \frac{P(\zeta)}{Q(\zeta)} = \frac{\zeta}{\zeta^2 + 3\zeta + 2}$$

Giriş fonksiyonu $f(t) = 10e^{-3t}$ olduğundan

$$\zeta = -3$$

Buna göre

$$y_{\phi}(t) = 10H(-3)e^{-3t} = 10 \left[\frac{-3}{(-3)^2 + 3(-3) + 2} \right] e^{-3t} = -15 e^{-3t} \quad , \quad t > 0$$

Toplam çözüm,

$$y(t) = K_1 e^{-t} + K_2 e^{-2t} - 15 e^{-3t}$$

$$t = 0^+ \text{ için } y(0^+) = 0 \text{ ve } \dot{y}(0^+) = 5$$

$$y(0^+) = 0 = K_1 + K_2 - 15$$

$$\dot{y}(0^+) = 5 = -K_1 - 2K_2 + 45$$

$$15 = K_1 + K_2$$

$$40 = K_1 + 2K_2$$

$$K_1 = -10 \text{ ve } K_2 = 25$$

Nihai toplam çözüm

$$y(t) = -10e^{-t} + 25e^{-2t} - 15e^{-3t} \quad , \quad t > 0$$

0⁻ Ve 0⁺ Durumları

0⁻ ve 0⁺ başlangıç koşullarını göstermektedirler. Eğer sistem başlangıcı sıfırda $t = 0$ başlıyorsa bunu 0⁻ durumuyla tanımlamaktayız. Anlamı sisteme normal bir giriş yoktur, ve durum tamamıyla “sıfır-giriş cevabı” ndaki yaklaşıma benzer ($f(t) = 0$). Eğer sistem sıfırdan sonra başlıyorsa bu durumda 0⁺ ile gösterilir. Bu anda başlangıç koşulları söz konusu değildir (başlangıç koşulları sıfır) ve sisteme normal bir giriş yapılmış demektir ($f(t) \neq 0$). Sistem toplam cevabı sıfır-giriş ve sıfır-durum cevaplarının toplamı olacağından, toplam sistemin başlangıç koşulları yine sıfır-giriş cevabının başlangıç koşulları olacaktır. Aynı şekilde toplam sistem cevabının türevinin başlangıç koşulları da yine sıfır-giriş cevabının türevinin başlangıç koşulları olacaktır. Dikkat etmemiz gereken şudur,

$$y(0^+) = y_{zi}(0^+) \quad \text{ve} \quad y(0^-) = y_{zi}(0^-)$$

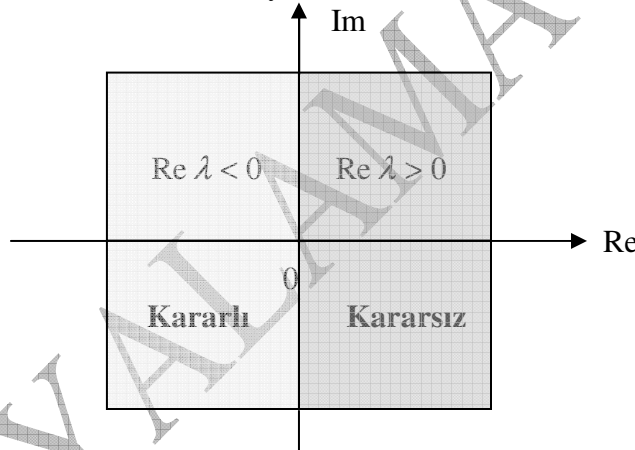
ancak

$$y(0^+) \neq y_{zi}(0^-) \quad \text{ve} \quad y(0^-) \neq y_{zi}(0^+)$$

Lineer Zamandan Bağımsız Sistemlerinin Kararlılığı

Daha önce sınırlı-giriş sınırlı-çıkış sistemlerinin kararlılıkları incelenirken, bu tip kararlılığın sistemin transfer fonksiyonuyla karakteristik denkleme ait kutupların “s” düzlemindeki ($s = \sigma + j\omega$) yerleşimleriyle belirlenen kararlılıklarının aynı oldukları vurgulanmıştı. Buna göre üç kriter halinde verilen ama burada dört kriter olarak ele alınan kararlılığı genel hatlarıyla hatırlarsak,

1. Eğer sistem fonksiyonunun kutupları olarak karakteristik denklemin kökleri) sol yarı düzlemdeyse sistem asimtotik olarak kararlıdır.
2. Eğer sistem fonksiyonunun kutupları (karakteristik denklemin kökleri) sağ yarı düzlemde değil ve imajiner eksen üzerinde tekrarlayan kökler halinde değilse sistem marjinal olarak kararlıdır.
3. Eğer sistem fonksiyonunun kutuplarından (karakteristik denklemin köklerinden) herhangi biri sağ yarı düzlemdeyse kararsızdır.
4. Eğer sistem fonksiyonunun kutupları (karakteristik denklemin kökleri) sağ yarı düzlemde değil ama imajiner eksen üzerinde tekrarlayan kökler halinde ise sistem kararsızdır.



Şekil 38 Karakteristik kökler ve kararlılık

Bu dört madde olarak verilen kararlılık kriterinin, aslında sınırlı-giriş sınırlı-çıkış kararlılığını sağladığını görmekteyiz, ve bu daha önce vurgulanmıştı. Şimdi lineer sistemlerin diferansiyel denklem çözümlerindeki $e^{\pm \lambda t}$ tipli karakteristik mod gösterimlerinden yararlanarak kararlılığı yorumlamaya çalışacağız. Buna göre bir sistem fonksiyonuna ait kutupları göstermek üzere kullanılan karakteristik denklemin köklerinin (öz değerlerinin) $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ olduklarını düşünersek, sıfır-giriş cevabının

$$y_0(t) = \sum_{j=1}^n c_j e^{\lambda_j t}$$

buna göre

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{\lambda t} = \begin{cases} 0 & \text{Re } \lambda < 0 \\ \infty & \text{Re } \lambda > 0 \end{cases}$$

LTI sistemlerde eğer sistem kararlı ise, sistem (cevabı, çıkışı) eninde sonunda ($t \rightarrow \infty$) başlangıç koşullarının sıfır olduğu, **sıfır-durumuna** dönecektir. Bu mantığa göre sistemi **sıfır-durumundan** bir başka duruma değiştirdiğimizde, sistem sonuçta tekrar **sıfır-durumuna** dönecektir. Sıfır-durumuna gelmesi demek başlangıç koşullarının sıfır olması demek olacağından, yukarıda bir sistemin toplam cevabı olarak verilen

$$\text{Toplam cevap} = \text{sıfır-giriş cevabı} + \text{sıfır-durum cevabı}$$

olduğunu göz önüne alırsak, stabilite için toplam cevabın yalnızca sıfır-durum cevabından oluşması söz konusu olacağından, bunun anlamı sıfır-giriş cevabının sıfır olması demektir,

$$\text{Toplam cevap} = \underbrace{\text{sıfır-giriş cevabı}}_0 + \text{sıfır-durum cevabı}$$

$$\text{Toplam cevap} = \text{sıfır-durum cevabı}$$

Bunun için $y_0(t)$ sıfır-giriş cevabının ifadesini hatırlarsak

$$y_0(t) = \sum_{j=1}^n c_j e^{\lambda_j t}$$

denklemini olarak verilen sistem giriş cevabının sıfır olması gerekecektir ($y_0(t) \rightarrow 0$).

$$y_0(t) = \sum_{j=1}^n c_j e^{\lambda_j t} = 0$$

Denklemden görülebileceği gibi $y_0(t) \rightarrow 0$ için $e^{\lambda t}$ karakteristik modun köklerini gösteren $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ değerlerinin negatif ($\text{Re } \lambda < 0$) olması gerekecektir. Negatif köklerle beraber $t \rightarrow \infty$ için sistemin sıfır-durumuna geleceği görülecektir. Burada bir ayrıntı vardır, o da, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ köklerinin çok büyük ve küçük alınmasını nasıl yorumlayacağız. İfadeye göre, büyük kökler, sönümlenmenin yani sıfıra yaklaşmanın daha hızlı, süratli (daha kısa zamanda) olacağını işaret etmektedir. Küçük kökler, aksine kararlılığı geciktirecektir. Bununla birlikte $\text{Re } \lambda > 0$ durumunda da, $y_0(t) \rightarrow \infty$ olacağından sistemin hiç sıfır-durumuna dönemediği kararsız bir durumun oluştuğu görülecektir.

Bunlar göz önüne alındığında $e^{\pm \lambda t}$ karakteristik moda ait λ kökünün (özdeğerinin) reel bir değer olarak negatif olması ($\text{Re } \lambda < 0$) demek, $e^{\lambda t}$ ifadesinin sönümlü olması demek olacağından, sistemin $t \rightarrow \infty$ zaman sonunda sönümleneceği sıfıra gideceği ve sonuçta da kararlı davrandığı sonucu çıkar. Eğer ($\text{Re } \lambda > 0$) alınırsa, bu sistem kökünün sağ yarı düzlemde olacağı ve $t \rightarrow \infty$ için sönümlenemeyeceği, monoton artarak kararsızlığa giden sistem gibi davrandığı görülür. Eğer $\lambda = 0$ alınırsa, köklerin imajiner ekseninde olacağı, bu durumda da katlı kök olmaması durumunda $t \rightarrow \infty$ için marjinal kararlı, katlı kök içinse kararsız olacağı söylenebilir.

Örnek

Yukarıdaki genel durumu sağlayan kararlı / kararsız durumlarına ilişkin örnek karakteristik kökler ve modlar aşağıda verilmiştir.

a. $(D+1)(D^2+4D+8)y(t) = (D-3)x(t)$

$$(\lambda+1)(\lambda^2+4\lambda+8) = (\lambda+1)(\lambda+2-2j)(\lambda+2+2j)$$

b. $(D-1)(D^2+4D+8)y(t) = (D+2)x(t)$

$$(\lambda-1)(\lambda^2+4\lambda+8) = (\lambda-1)(\lambda+2-2j)(\lambda+2+2j)$$

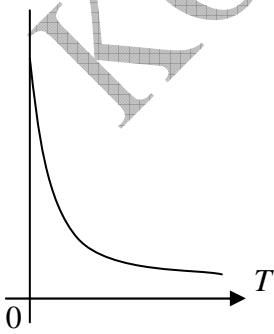
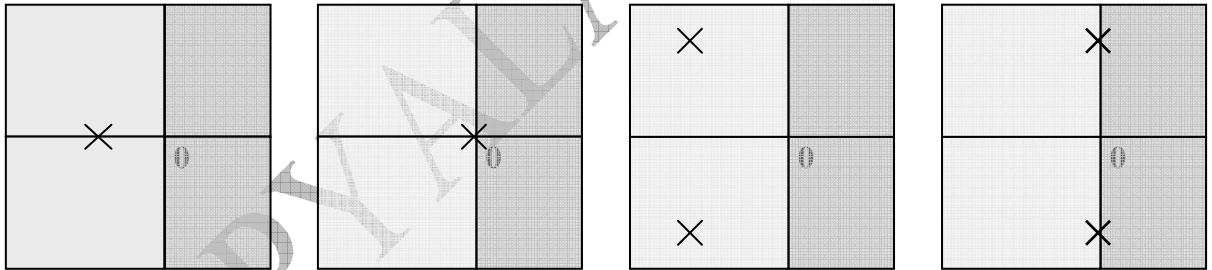
c. $(D+2)(D^2+4)y(t) = (D^2+D+1)x(t)$

$$(\lambda+2)(\lambda^2+4)^2 = (\lambda+2)(\lambda-2j)(\lambda+2j)$$

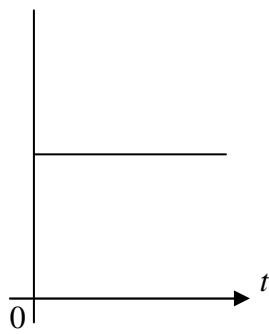
d. $(D+1)(D^2+4)^2 y(t) = (D^2+2D+8)x(t)$

$$(\lambda+1)(\lambda^2+4)^2 = (\lambda+2)(\lambda-2j)^2(\lambda+2j)^2$$

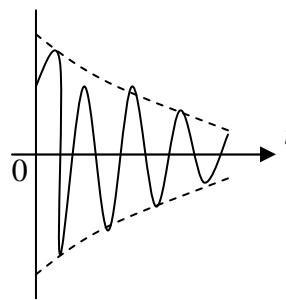
Bu diferansiyel denklemler göz önüne alındıklarında LTI sistemlerin kararlılığı için sırasıyla aşağıdaki yöntemler takip edilir.



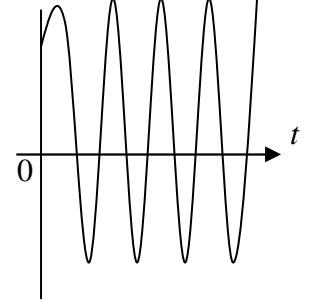
- a -



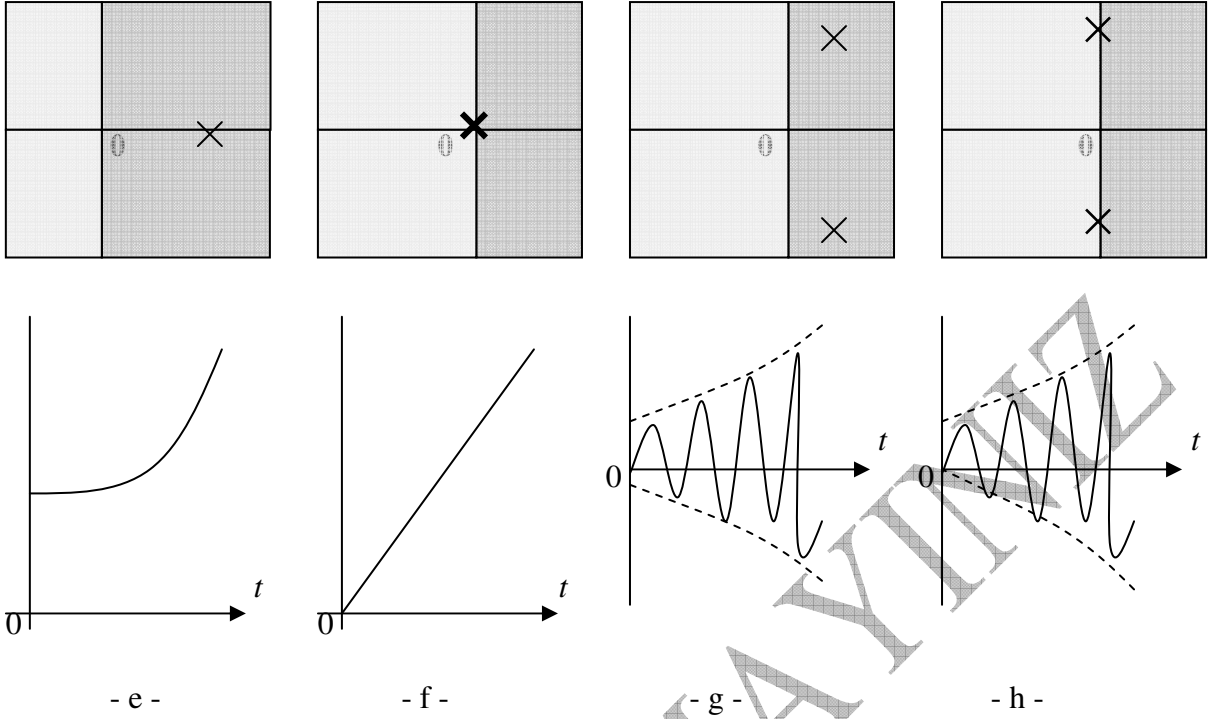
- b -



- c -



- d -



Şekil 39 Karekteristik denklemin köklerinin yerleşimi ve ilgili işaretlerin gösterimi

Örnek

Bu koşulların ışığında yukarıda diferansiyel mod da verilen denklemlerin karakteristik köklerini ve kararlılıklarını grafikleri üzerinde gösterelim.

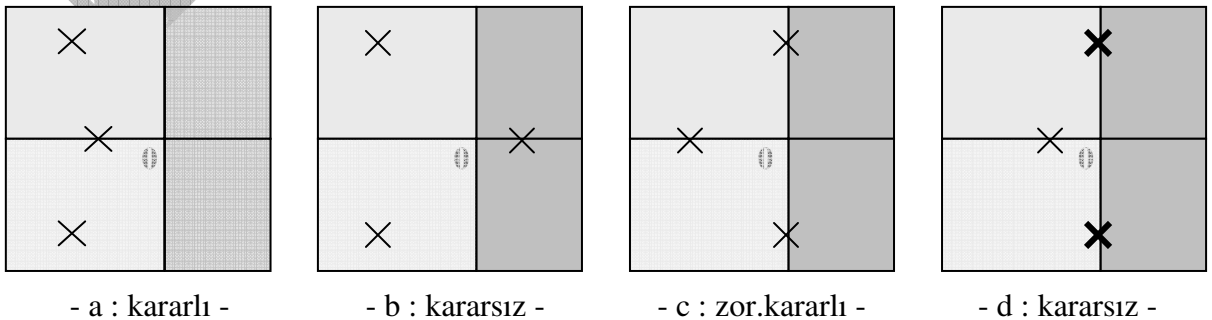
a.

$$(\lambda + 1)(\lambda^2 + 4\lambda + 8) = (\lambda + 1)(\lambda + 2 - 2j)(\lambda + 2 + 2j) ; \lambda_1 = -1, \lambda_2 = -2 + 2j, \lambda_3 = -2 - 2j$$

b. $(\lambda - 1)(\lambda^2 + 4\lambda + 8) = (\lambda - 1)(\lambda + 2 - 2j)(\lambda + 2 + 2j) ; \lambda_1 = 1, \lambda_2 = -2 + 2j, \lambda_3 = -2 - 2j$

c. $(\lambda + 2)(\lambda^2 + 4)^2 = (\lambda + 2)(\lambda - 2j)(\lambda + 2j) ; \lambda_1 = -2, \lambda_2 = 2j, \lambda_3 = -2j$

d. $(\lambda + 1)(\lambda^2 + 4)^2 = (\lambda + 2)(\lambda - 2j)^2(\lambda + 2j)^2 ; \lambda_1 = -1, \lambda_{2,3} = \pm 2j, \lambda_{4,5} = \mp 2j$



Şekil 40 Sürekli linear sistemlerin karakteristik denklemlere göre kararlılıkları

Görüldüğü gibi (a) kararlı : denklem kökleri sol yarı düzlemde, (b) kararsız : kökler sağ yarı düzlemde (c) : zorlanmış kararlılık, sağ yarı düzlemde kök yok ama imajiner eksen üzerinde tekrarlanmayan kökler var (d) : kararsız : imajiner eksen üzerinde tekrarlı kökler var. Koyu \times işareti katlı kökü gösteriyor.

Hatırlatma :

1. Sistemin **tam kararlı** durumundaki sistem impuls cevabı : $h(t) = e^{-\alpha t}$
2. Sistemin **kararsız** durumundaki sistem impuls cevabı : $h(t) = e^{\alpha t}$
3. Sistemin **marjinal kararlı**, imajiner eksen üzerinde katlı olmayan köklerinin bulunması durumundaki sistem impuls cevabı : $h(t) = \cos \beta t$
4. Sistemin **kararsız**, imajiner eksen üzerinde katlı köklerinin bulunması durumundaki sistem impuls cevabı : $h(t) = t \cos \beta t$

Sınırlı Giriş-Sınırlı Çıkış LTI Sistemin Kararlılığı

LTI Sistem kararlı olduğu zaman, sınırlı sistem girişlerine yine sınırlı olmak üzere cevaplar alınabilmektedir. Sistemin kararsız olması durumunda ise sınırlı olmayan cevaplar almak güçtür. Bu yüzden LTI sistemlerin genel prensibi gereği sınırlı girişlerin sınırlı çıkışlar/cevaplar üreteceği kabul edilir. Buna göre sınırlı giriş-sınırlı çıkış sisteminin cevabı üzerinden, böyle bir sistemin kararlılığının aynı zamanda $h(t)$ impuls cevabına göre ifadesi aşağıda elde edilmiştir.

$$\begin{aligned} y(t) &= h(t) * f(t) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) f(t - \tau) d\tau \\ |y(t)| &\leq \int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)| |f(t - \tau)| d\tau \end{aligned}$$

Eğer $f(t)$ sınırlıysa, $|f(t - \tau)| < K_1 < \infty$. Bu durumda

$$|y(t)| \leq K_1 \int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)| d\tau$$

olur. Çünkü $h(t)$ sistem impuls cevabı $e^{\lambda_j t}$ veya $t^k e^{\lambda_j t}$ gibi terimleri (karakteristik modları) içerdiğinden eğer $\text{Re } \lambda_j < 0$ ise, $h(t)$ zamanla exponensiyel olarak artacaktır. Dolayısıyla asimtotik bir kararlılık için

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)| d\tau < K_2 < \infty$$

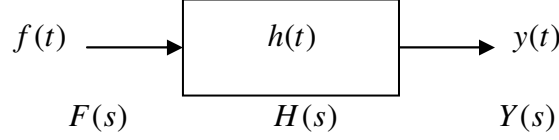
sonuçta çıkış,

$$|y(t)| \leq K_1 K_2 < \infty$$

olur.

DURUM-UZAY SİSTEMLERİ

Bir sistem genel anlamda $f(t)$ giriş, $h(t)$ sistem fonksiyonu ve $y(t)$ çıkışı olan fonksiyonel mekanizma olarak düşünüldüğünde kapalı bir kutu izlenimini vermektedir.



Şekil 41 Genel bir sistem

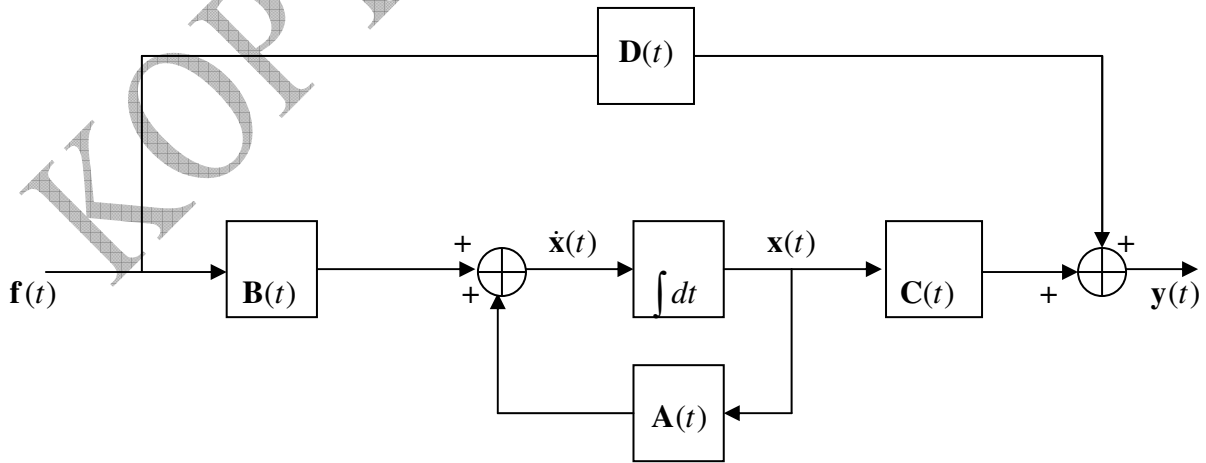
$$y(t) = f(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) h(t - \tau) d\tau$$

$$Y(s) = H(s)F(s)$$

Gerek “ t ” gerekse “ s ” modunda sistem çıkışını izlemek bu anlamda son derece sınırlı bir bilgiyle mümkün olmaktadır. Sistemin dışıyla ilgili bir gösterim olup, sistem yani kutunun içi hakkında fazla bir bilgiye sahip değiliz. Sistemin yalnızca giriş ve çıkışıyla ilgili harici bilgi edinmekteyiz. Sistem dinamikleriyle ilgili sistemin dahili bileşenleri hakkında bilgi edinememekteyiz. Dahası, klasik gösterimdeki böyle bir sistemin verilen denklemleri aşağıdaki gibi son derece karmaşık yapıda olan bir diferansiyel denklemle verilmişse analizi daha da zorlaşır.

$$\frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = b_m \frac{d^m f}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} f}{dt^{m-1}} + \dots + b_1 \frac{df}{dt} + b_0 f$$

Kaldı ki böylesine bir “ n ” ci dereceden diferansiyel denklemin çözümündeki zorluk ortadadır. Gerek $y(t)$ gerekse $Y(s)$ yaklaşımında sistemin giriş ile kontrolü ve de çıkıştan gözlemlenmesi de ayrıca handicap yaratmaktadır. Oysa ki verilen kompakt gösterim yerine sistem eğer aşağıdaki gibi düşünülse analizi daha farklı olabilirdi.



Şekil 42 Lineer sürekli zaman sistemin durum-uzay gösterimi

Böyle bir yaklaşımın denklemleri de aşağıdaki gibi olacaktır.

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t) \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t) \mathbf{f}(t)$$
$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}(t) \mathbf{x}(t) + \mathbf{D}(t) \mathbf{f}(t)$$

Bu gösterimde göze ilk çarpan $\mathbf{x}(t)$ durum değişkenleri (state variables) olup, klasik modeldeki kutu olarak verilen sistemin görünmeyen dinamik değişkenleridir. Modeldeki her bir değişken vektörel özellikte olup, bu çok girişli-çok çıkışlı bir sisteme karşılık gelmektedir. Modeldeki ilk denklem, durum değişkenleri ile $\mathbf{f}(t)$ sistem girişi arasındaki ilişki üzerine kurulu olup, **sistem denklemi** (state equation) olarak anılır. İkinci denklem, sistem çıkışının sistem durum değişkenleri türünden ifade edilmesini sağlayan **sistem çıkış denklemi** (output equation) olarak bilinir. Her iki denklemi içeren sisteme de **durum-uzay analizi** (state-space analysis) denilmektedir.

Durum-uzay yaklaşımını farklı kılan, vurgulandığı gibi $\mathbf{x}(t)$ durum değişkenleridir. Durum değişkenlerinin sağladığı avantaj şudur ; zaman domenindeki sistem içindeki mümkün tüm işaretler veya değişkenler, bu durum değişkenleri cinsinden ifade edilebilmektedirler. Bu neyi mümkün kılar sorusuna gelince, istenilen herhangi bir işaret veya değişkenin sistem içindeki hangi değişkenlerle ilişki içinde olduğu bilinmektedir. Diğer bir deyişle sistemdeki söz konusu işaretleri hangi durum değişkenlerinin etkilediği ortaya konulmaktadır. Sistemdeki işaret veya değişkenler hangi durum değişkenlerini etkiliyor veya onlardan etkileniyorsa bu durum bu modelde rahatlıkla ortaya konulabilmektedir. Bundan dolayı, sistemdeki işaretleri elde etme veya onların herhangi farklı anlardaki davranışlarını inceleyebilmek için, onları etkileyen durum değişkenlerine erişmek yeterli olacaktır. Eğer aranan işaret, fonksiyon veya değişkenler durum değişkenlerine bağlı olarak elde edilmişse, durum değişkenlerinin çeşitli t anlarındaki davranışları, aynı zamanda sistemdeki direkt ilgili olduğu işaretler hakkında da bilgi sağlayabilecektir. Özetlersek, bu modelde eğer durum değişkenlerinin tamamını t zaman domeninde bilirsek, sistemdeki olası tüm işaret veya değişkenlerin herhangi bir andaki davranışını belirleyebilmemiz mümkün olmaktadır.

Yeni modele sistem çıkışıyla ilgili yaklaştığımızda ise, sistem çıkışı denkleminde (ikinci denklem) ve blok şemadan da görüldüğü gibi çıkış, giriş ile durum değişkenlerinden oluştuğu için, artık klasik harici sistem yerine, sistemin iç (dahili) unsurlarını içeren bir tanımlama söz konusudur.

Öte yandan $\mathbf{x}(t)$ durum değişkeninin türev versiyonunu gösteren $\dot{\mathbf{x}}(t)$ fonksiyonuna gelince, blok diagramdan da görülebileceği gibi, durum değişkenlerinin dinamik oluşunu göstermektedir. Modelden $\mathbf{x}(t)$ gibi dinamik bir elemanın veya fonksiyonun değişimini izlemek sistem analizi açısından oldukça önemlidir. Buna göre çıkış gözlemlenerek (*gözlemlenebilirlik*), gerektiğinde geri besleme yoluyla sisteme müdahale edilerek, girişten bu değişkenlerin istenildiği gibi kontrolü (*kontrol edilebilirlik*) sağlanabilmektedir. Bu anlamda $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t) \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t) \mathbf{f}(t)$ olarak verilen durum denklemindeki $\mathbf{x}(t)$ dinamik durum değişkenindeki $\dot{\mathbf{x}}(t)$ değişimlerin gözlemlenmesi ve kontrol edilmesi sağlanmaktadır. Sonuçta, sistem $\mathbf{x}(t)$ gibi (kondansatör ve endüktans gibi) dinamik elemanlar içerdiği sürece değişim içerisinde olacaklarından, bu değişimler $\dot{\mathbf{x}}(t)$ olarak ifade edilmelidirler. Çünkü sistem çıkışını veya sistemdeki diğer işaretleri veya değişkenleri bu durum değişkenlerine bağlı olarak ifade edeceğimizden, bu işaretlerin doğru tespit edilebilmeleri için hem $\mathbf{x}(t)$ hem de değişimlerini gösteren $\dot{\mathbf{x}}(t)$ fonksiyonlarına ihtiyaç vardır, ve öncelikle bunların hesaplanması gerekmektedir.

Durum ve Çıkış Denklem Parametrelerinin Tanımı

Durum-uzay modelindeki durum değişkenlerini girişlerle ilişkilendiren ilk denklem ve çıkışın durum değişkenleri ve sistem girişine bağlı ifadesini niteleyen ikinci denklem

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t) \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t) \mathbf{f}(t)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}(t) \mathbf{x}(t) + \mathbf{D}(t) \mathbf{f}(t)$$

göz önüne alındığında, modeli daha anlaşılır kılabilmek için **A**, **B**, **C** ve **D** parametrelerine bir göz atmamız gerekiyor.

A = sistem matrisi olup, mevcut durumların (\mathbf{x}), nasıl ($\dot{\mathbf{x}}$) olarak durumlar üzerinde değişiklikleri etkilediğini gösterir. Eğer durum değişikliği, mevcut durumlara bağlı değilse (mevcut durumlardan kaynaklanmıyorsa), bu matris sıfır olacaktır.

B = kontrol matrisi olup, sistem girişinin nasıl ($\dot{\mathbf{x}}$) olarak durumlar üzerinde değişiklikleri etkilediğini gösterir. Eğer durum değişikliği sistem girişine bağlı değilse bu matris sıfır gösterecektir. Eğer sistem girişi, sistem durumlarını (states) kontrol edebiliyorsa, matris sıfır olmayacaktır. Bu anlamda giriş, durumların hepsiyle veya bir kısmıyla ilişkili olabilir. Bu durumlarda, sistem girişinin durumları kısmi veya tam kontrol edebilmesinden söz edilebilir. Kısaca bu matris, sistemin **kontrol edilebilirliği** ile ilgilidir. Öte yandan sistem girişinin olmadığı, yani başlangıç koşullarının söz konusu olduğu durumda da bu matris sıfır olacaktır.

C = çıkış matrisi olup, (\mathbf{x}) durumlarıyla sistem çıkışı arasındaki ilişkiyi gösterir. Bu matris yoluyla sistem durumları (states), çıkıştan tam veya kısmi olarak gözlemlenebilir. Bu matrisin sıfır olması, çıkışın gözlemlenemez olduğunu gösterir. Kısaca bu matris, sistemin **gözlemlenebilirliği** ile ilgilidir.

D = ileri besleme (feed-forward) matrisi olup, sistem girişinin direkt olarak sistem çıkışını etkilemesini gösterir. Geri beslemeli sistemler için, bu matris sıfır olacaktır.

Yukarıda denklemi verilen durum-uzay sistemleri dahilinde göz önüne alınabilecek bir LTI kontrol sisteminde ilgili matrislerin boyutları aşağıdaki gibi olacaktır.

$$\mathbf{A}_{p \times p}, \mathbf{B}_{p \times q}, \mathbf{C}_{r \times p}, \mathbf{D}_{r \times q}, \mathbf{x}_{p \times 1}, \dot{\mathbf{x}}_{p \times 1}, \mathbf{u}_{q \times 1}, \mathbf{y}_{r \times 1}$$

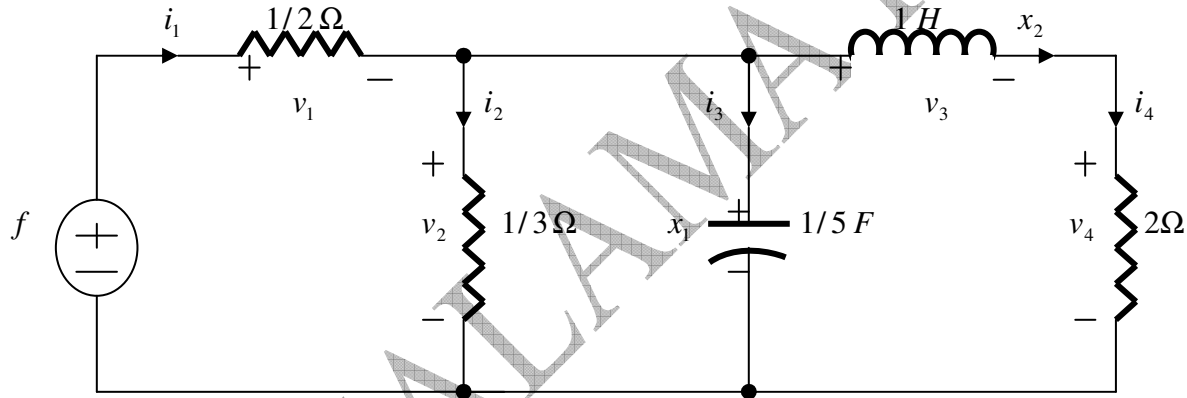
Durum-Uzay sistemi yaklaşımında sistem, fark edildiği gibi klasik yaklaşımdan farklı olarak $\mathbf{x}(t)$ sistem değişkenlerini göz önüne almaktadır. Sistemdeki değişimler $\dot{\mathbf{x}}(t)$ ile kontrol ve gözlem altında tutulmaya çalışılmaktadır. Ayrıca yine fark edildiği gibi sistem karmaşık yapıdaki “ n ” ci dereceden diferansiyel denklem yerine, birinci dereceden denklemlerle ifade edildiğinden, çözüm çok daha kolay olacaktır.

Vektörel gösterime dayandığından, bu şekilde çok giriş-çıkışlı bir gösterimi mümkün kıldığı gibi, en önemlisi de zaman domeninde gösterilebilmesidir. Bilindiği gibi zaman domeninde sistem analizi artık modern sistem ve kontrol teorisinin özelliklerindendir. Çünkü yüksek dereceli diferansiyel denklemlerle gösterilen sistemlerin çözüm ve analizlerinin zor ve de çok kompleks olduğu bir gerçektir. Oysaki n .ci dereceden kompleks bir diferansiyel denklemi çözmek yerine çok girişli çok çıkışlı bir modelde n tane birinci dereceden diferansiyel denklemin çözümü daha basit olacaktır.

Böyle bir gösterime sahip durum-uzay sisteminde durum değişkenlerinin etkisine bakalım. Blok diagramdan ve denklemlerden $\mathbf{x}(t)$ sistem durum değişkenlerinin bir sonraki davranışını / içeriğini gösteren $\dot{\mathbf{x}}(t)$ türev operatörünün integrasyonu, $\mathbf{y}(t)$ sistem çıkışını etkilemektedir. Sistem cevabında etkili olan $\mathbf{x}(t)$ sistem durum değişkeni, her yeni andaki değeriyle çıkışı etkilemektedir. Diğer bir deyişle sistem durum değişkenlerindeki $\mathbf{x}(t)$ yapısındaki her bir değişim, çıkış üzerinde etkili olmaktadır. Bu, durum değişkenlerindeki değişimin etkisini her an için, çıkıştan gözlemlenmesi açısından önemlidir (gözlemlenebilirlik kriteri). Diğer yandan, sistem çıkışının (zorlanmış cevap veya sıfır-durum cevabı (zero-state response)) elde edilmesinde önemli olan durum değişkenlerinin belirlenmesinde, $\mathbf{f}(t)$ sistem harici girişinin etkili olduğunu ayrıca görmekteyiz. Hatta sistem girişi, durum değişkenlerinin belirlenmesinde, dinamikler hariç en önemli etkindir. Bu açıdan sistem çıkışını etkileyen sistem durum değişkenlerinin belirlenmesinde / kontrolünde, sistem harici girişinin son derece önemli olduğunu görmekteyiz (kontrol edilebilirlik kriteri).

Örnek

Aşağıda verilen RLC devresini göz önüne alarak devredeki voltaj olarak f girişine karşın devre elemanlarının üzerindeki çıkışları hesaplamaya çalışalım.



Şekil 43 RLC Devresi

Çözüm

Buna göre durum değişkeni olarak atayacağımız değişkenleri belirleyelim. Bunlar bir kondansatördeki gerilim değişimi ile bir endükstandan geçen akımın değişimleri gösterecektir.

$$i = C \frac{dv}{dt} = x_1$$
$$v = L \frac{di}{dt} = x_2$$

Devredeki kondansatörün üzerindeki gerilim (x_1) ile endüktansın üzerindeki akımın (x_2) değişimini yakından izlemeye çalışalım. Devredeki elemanlar üzerindeki i_1, i_2, i_3 ve i_4 ve akımlarıyla yine elemanlar üzerindeki v_1, v_2, v_3 ve v_4 gerilimleri bulmaya çalışalım. Eğer (x_1) endüktans üzerindeki akım değişimlerini ve (x_2) de kapasite üzerindeki gerilim değişimlerini gösteriyorsa bunlara göre i_1, i_2, i_3 ve i_4 akımları ile x_1 değişkeni, v_1, v_2, v_3 ve v_4 gerilimleriyle de x_2 değişkeni arasında ilişkiler var olabilecektir. Bu anlamda kapasite üzerindeki i_3 akımı ile x_1 gerilimi arasında doğal olarak

$$i_3 = C \frac{dx_1}{dt}$$

bağıntısından dolayı

$$i_3 = C \frac{dx_1}{dt} = C\dot{x}_1 = \frac{1}{5}\dot{x}_1 = 0.2\dot{x}_1$$

gibi bir ilişkide söz konusu olacağını görmekteyiz. Bunun gibi devredeki dirençlerden dolayı, i_1, i_2, i_3 ve i_4 akımları x_2 kondansatör gerilimi cinsinden, benzer biçimde v_1, v_2, v_3 ve v_4 gerilimleri de x_2 endüktans akımı cinsinden yazılabilecektir.

Bunların ışığında devrenin analizi yapıldığında devredeki akımları oluşturan i_1, i_2, i_3 ve x_2 arasındaki düğüm yaklaşımına göre

$$i_3 = i_1 - i_2 - x_2$$

denklemini yazılabilir. Ayrıca kapasite üzerindeki i_3 akımı ise

$$i_3 = C \frac{dx_1}{dt} = C\dot{x}_1 = \frac{1}{5}\dot{x}_1 = 0.2\dot{x}_1$$

ayrıca birinci gözdeki gerilim kaynakları arasındaki

$$\frac{1}{2}i_1 + v_2 = f$$

burada $v_2 = x_1$ olduğundan denklem

$$i_1 = 2(f - x_1)$$

olur. Diğer yandan ikinci gözdeki çevre denkleminde

$$\frac{1}{3}i_2 = x_1$$

$$i_2 = 3x_1$$

Nihayet üçüncü gözdeki çevre denkleminde

$$-x_1 + \dot{x}_2 + 2x_2 = 0$$

$$\dot{x}_2 = -x_1 - 2x_2$$

Elde edilir. Böylece $i_3 = i_1 - i_2 - x_2$ denkleminde i_1, i_2 ve i_3 değerleri yerine yazılırsa

$$0.2\dot{x}_1 = 2(f - x_1) - 3x_1 - x_2$$
$$\dot{x}_1 = -25x_1 - 5x_2 + 10f$$

elde edilir. Sonuçta durum denklemi olarak \dot{x}_1 ve \dot{x}_2

$$\dot{x}_1 = -25x_1 - 5x_2 + 10f$$
$$\dot{x}_2 = -x_1 - 2x_2$$

seti elde edilir. Bu durum denklemlerinin ardından her olası çıkış durum değişkenleri x_1, x_2 ve giriş f işaretinin lineer kombinasyonlarından elde edilebilir. Bu anlamda devrenin mümkün kıldığı olası çıkışlar aşağıdaki denklemlerle gösterilmiştir.

$$v_1 = f - x_1$$
$$i_1 = 2(f - x_1)$$
$$v_2 = x_1$$
$$i_2 = 3x_1$$
$$i_3 = i_1 - i_2 - x_2 = 2(f - x_1) - 3x_1 - x_2 = -5x_1 - x_2 + 2f$$
$$i_4 = x_2$$
$$v_4 = 2i_4 = 2x_2$$
$$v_3 = x_1 - v_4 = x_1 - 2x_2$$

durum denklemlerinin çözümünden $x_1(t)$ ve $x_2(t)$ elde edildikten sonra, verilen herhangi bir $f(t)$ girişi için istenen i_1, i_2, i_3 ve i_4 akımları veya v_1, v_2, v_3 ve v_4 gerilim çıkış fonksiyonlarının hesaplanabileceğini görmekteyiz. Dolayısıyla dikkati başlangıçta tanımlanan x_1 ve x_2 değişkenlerinin çektiği görülmektedir. Bu iki değişken $x_1(t)$ ve $x_2(t)$ olarak bilindiği sürece sistemdeki hem i_1, i_2, i_3 ve i_4 akımları hem de v_1, v_2, v_3 ve v_4 gerilimlerinin hesaplanabileceğini görmekteyiz. Bu yolla herhangi bir t anındaki $x_1(t)$ ve $x_2(t)$ değişkenlerinin üreteceği değerler ile sistem çıkış fonksiyonları belirlenebilecektir.

Sistem çıkış denklemi olarak bilinen bu denklemlerin her birinin “ t ” anındaki çıkış değeri $x_1(t), x_2(t)$ sistem durumları ve $f(t)$ girişinden elde edilebilir. Elde edilen

$$\dot{x}_1 = -25x_1 - 5x_2 + 10f$$
$$\dot{x}_2 = -x_1 - 2x_2$$

durum denklemlerinin çözümünden $x_1(t)$ ve $x_2(t)$ elde edildikten sonra, verilen herhangi bir $f(t)$ girişi için istenen v_1, v_2, v_3 ve v_4 çıkış fonksiyonlarının hesaplanabileceğini görmekteyiz. Eğer elde edilen denklemleri t zamana bağlı olarak düşünersek, durum değişkenlerindeki değişimlerin ($\dot{x}_1(t)$ ve $\dot{x}_2(t)$) durum değişkenleri ($x_1(t)$ ve $x_2(t)$) ve sistem girişiyle ($f(t)$) ilgili bağıntısı aşağıdaki gibi yazılacaktır.

$$\dot{x}_1(t) = -25x_1(t) - 5x_2(t) + 10f(t)$$
$$\dot{x}_2(t) = -x_1(t) - 2x_2(t)$$

sistem çıkışlarıyla ilgili olarak da aşağıdaki denklemler yazılabilecektir.

$$v_1 = f(t) - x_1(t)$$

$$i_1 = 2(f(t) - x_1(t))$$

$$v_2 = x_1(t)$$

$$i_2 = 3x_1(t)$$

$$i_3 = i_1 - i_2 - x_2(t) = 2(f(t) - x_1(t)) - 3x_1(t) - x_2(t) = -5x_1(t) - x_2(t) + 2f(t)$$

$$i_4 = x_2(t)$$

$$v_4 = 2i_4 = 2x_2(t)$$

$$v_3 = x_1(t) - v_4 = x_1(t) - 2x_2(t)$$

biraz daha düzenlersek,

$$i_1 = -2x_1(t) + 2f(t)$$

$$i_2 = 3x_1(t)$$

$$i_3 = -5x_1(t) - x_2(t) + 2f(t)$$

$$i_4 = x_2(t)$$

$$v_1 = -x_1(t) + f(t)$$

$$v_2 = x_1(t)$$

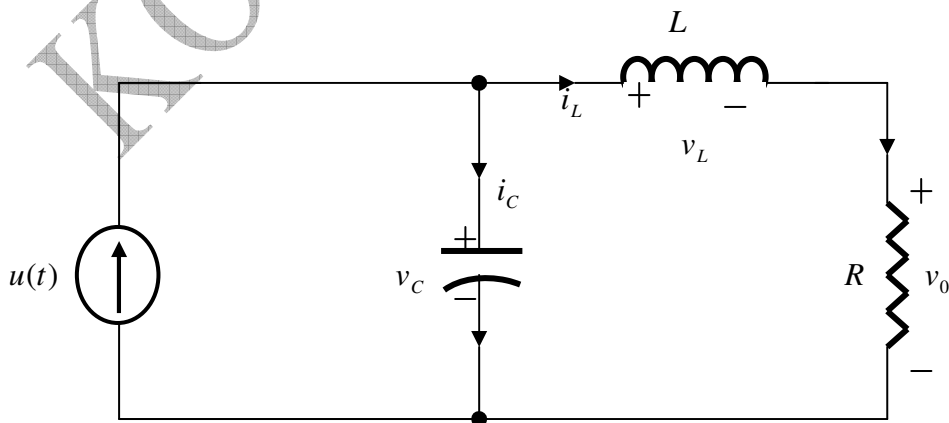
$$v_3 = x_1(t) - v_4 = x_1(t) - 2x_2(t)$$

$$v_4 = 2i_4 = 2x_2(t)$$

Görüldüğü gibi sistem durum değişkenleri olan $x_1(t)$ ve $x_2(t)$ yani $v_c(t)$ ve $i_L(t)$ bilindiği sürece, sistemdeki i_1, i_2, i_3 ve i_4 akım ve v_1, v_2, v_3 ve v_4 gerilimlerin her hangi bir mevcut veya gelecekteki bir t anındaki değerleri hesaplanabilecektir.

Örnek

Başlangıç koşulları sıfır aşağıda verilen devrenin durum-uzay denklem sistemini $u(t)$ girişi ve v_0 çıkışına göre bulun.



Şekil 44 RLC Devresi

kondansatördeki gerilim değişim miktarı

$$i_C = C \frac{dv_C}{dt} = u(t) - i_L$$

endüktanstaki akım değişim miktarı

$$v_L = v_C - R i_L$$
$$L \frac{di_L}{dt} = v_C - R i_L$$

sistem çıkışı

$$v_0 = R i_L(t)$$

$$\frac{dv_C}{dt} = -\frac{1}{C} i_L + \frac{1}{C} u(t)$$

$$\frac{di_L}{dt} = \frac{1}{L} v_C - \frac{R}{L} i_L$$

$$v_0 = R i_L(t)$$

$$\dot{v}_C = -\frac{1}{C} i_L + \frac{1}{C} u(t)$$

durum değişkenleri denklemi

$$\dot{i}_L = \frac{1}{L} v_C - \frac{R}{L} i_L$$

$$v_0 = R i_L(t) \quad \text{çıkış denklemi}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{v}_C \\ \dot{i}_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{C} \\ \frac{1}{L} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_C \\ i_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{C} \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

$$v_0 = \begin{bmatrix} 0 & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_C \\ i_L \end{bmatrix}(t)$$

Eğer $x_1 = v_C$ ve $x_2 = i_L$ veya $\dot{x}_1 = \dot{v}_C$ ve $\dot{x}_2 = \dot{i}_L$ ise,

$$\dot{x}_1 = -\frac{1}{C} x_2 + \frac{1}{C} u(t)$$

durum değişkenleri denklemi

$$\dot{x}_2 = \frac{1}{L} x_1 - \frac{R}{L} x_2 \quad \text{durum denklemi}$$

$$v_0 = R x_2 \quad \text{çıkış denklemi}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{C} \\ \frac{1}{L} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{C} \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

$$v_0 = \begin{bmatrix} 0 & R \end{bmatrix} x_2$$

Kontrol Sistemleri : kontrol edilebilir – Gözlenebilir Sistemler

İleri sistem analizlerinde sistem durum değişkenlerinden yararlanılarak, sistemlerin frekans domeninden ziyade zaman domenindeki analizleri yapılır. Bu analizler Durum-Uzay tekniği olarak bilinmektedir. Bu yaklaşımda $\mathbf{f}(t)$ = sistem giriş vektörü, $\mathbf{y}(t)$ = sistem çıkış vektörü, $\mathbf{A}(t)$ = durum (state) matrisi, $\mathbf{B}(t)$ = giriş matrisi, $\mathbf{C}(t)$ = çıkış matrisi, $\mathbf{D}(t)$ = iletim (transmission) matrisi, $\mathbf{x}(t)$ = durum değişkenleri (*state variables* : sistem davranışını tanımlar), $\dot{\mathbf{x}} = \frac{d\mathbf{x}}{dt}$ = sistemin bir sonraki adımdaki durumu (değişimi) olmak üzere model aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t) \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t) \mathbf{f}(t)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}(t) \mathbf{x}(t) + \mathbf{D}(t) \mathbf{f}(t)$$

Bu model yardımıyla sistemin $\mathbf{f}(t)$ giriş vektörlerinin kontrol edilebilirliğiyle, $\mathbf{y}(t)$ sistem çıkışının gözlenebilirliği önemlidir. Eğer $\dot{\mathbf{x}}(t)$ ve $\mathbf{y}(t)$, $\mathbf{x}(t)$ ve $\mathbf{f}(t)$ nin lineer kombinasyonlarından oluşmuyorsa, sistem lineer değildir (nonlinear system).

Kontrol edilebilirlik

Durum-uzay modelinde denklem çifti göz önüne alındığında, kontrol edilebilirlik açısından \mathbf{A} ve \mathbf{B} matrislerinin önemli olduklarını görmekteyiz. \mathbf{A} matrisi, durum değişkenlerinin etkileri açısından gerekli iken, \mathbf{B} matrisi direkt olarak girişin, durum değişkenlerini kontrolü ile ilgili olduklarından söz konusudurlar.

\mathbf{A} = sistem matrisi olup, mevcut durumların (\mathbf{x}), nasıl ($\dot{\mathbf{x}}$) olarak durumlar üzerinde değişiklikleri etkilediğini gösterir. Eğer durum değişikliği, mevcut durumlara bağlı değilse (mevcut durumlardan kaynaklanmıyorsa), bu matris sıfır olacaktır.

\mathbf{B} = kontrol matrisi olup, sistem girişinin nasıl ($\dot{\mathbf{x}}$) olarak durumlar üzerinde değişiklikleri etkilediğini gösterir. Eğer durum değişikliği sistem girişine bağlı değilse bu matris sıfırı gösterecektir. Eğer sistem girişi, sistem durumlarını (states) kontrol edebiliyorsa, matris sıfır olmayacaktır. Bu anlamda giriş, durumların hepsiyle veya bir kısmıyla ilişkili olabilir. Bu durumlarda, sistem girişinin durumları kısmi veya tam kontrol edebilmesinden söz edilebilir. Kısaca bu matris, sistemin **kontrol edilebilirliği** ile ilgilidir. Öte yandan sistem girişinin olmadığı, yani başlangıç koşullarının söz konusu olduğu durumda da bu matris sıfır olacaktır.

Eğer bir LTI sistemi kontrol edilebilir ise $(p \times q)$ boyutlu ξ kontrol edilebilir matrisinin

$$\xi = [B \ AB \ A^2B \ \dots \ A^{p-1}B]$$

rankı ve A sistem matrisinin rankı aynı, “ p ” olmalıdır.

$$\text{Kontrol edilebilirlik} = \text{rank}(\xi) = \text{rank}(A) = p$$

Bununla birlikte A sistem matrisinin invers özelliğinde olması gerektiğinde göz önüne alınırsa denklem,

$$\text{Kontrol edilebilirlik} = \text{rank}(\xi) = \text{rank}(A^{-1}\xi) = \text{rank}(A) = p$$

Diğer yandan bu yaklaşıma paralel olarak verilen modeldeki

$$\dot{x}(t) = A x(t)$$

$$y(t) = C x(t)$$

denklemleri göz önüne alındığında kontrol edilebilirliğin A matrisiyle ilgili olduğu görülmektedir. Çünkü giriş fonksiyonu f fonksiyonu x durum değişkenlerini kontrol etmek isteyeceğinden, giriş fonksiyonunun x durum değişkenlerini kontrol edebilmesi için öncelikle x vektörünün (matrisinin) var olması gerekir. Bu yüzden

$A \neq 0$, tam kontrol edilebilirlik

olmalıdır. Ancak bu koşulla durum değişkenleri mevcut olabileceğinden, giriş fonksiyonunun durum değişkenleri üzerindeki kontrol etkisi araştırılabilir. Eğer giriş durum değişkenlerinin hiçbirini kontrol edemiyorsa bunun anlamı

$A = 0$, tam kontrol edilemezlik

Eğer giriş fonksiyonu durum değişkenlerinin bazılarını kontrol edebiliyorsa

$A \neq 0$ ve $A = 0$ kısmi kontrol edilebilirlik

Gözlenebilirlik

Durum-uzay modelinde denklem çifti göz önüne alındığında, kontrol edilebilirlik açısından bu kez de A ve C matrislerinin önemli olduklarını görmekteyiz. A matrisi, durum değişkenlerinin etkileri açısından gerekli iken, C matrisi de durum değişkenlerinin değişimlerinin etkilerinin gözlemlenmesi açısından söz konusudur.

A = sistem matrisi olup, mevcut durumların (x) , nasıl (\dot{x}) olarak durumlar üzerinde değişiklikleri etkilediğini gösterir. Eğer durum değişikliği, mevcut durumlara bağlı değilse (mevcut durumlardan kaynaklanmıyorsa), bu matris sıfır olacaktır.

C = çıkış matrisi olup, (x) durumlarıyla sistem çıkışı arasındaki ilişkiyi gösterir. Bu matris yoluyla sistem durumları (states), çıkıştan tam veya kısmi olarak gözlemlenebilir. Bu matrisin sıfır olması, çıkışın gözlemlenemez olduğunu gösterir. Kısaca bu matris, sistemin **gözlemlenebilirliği** ile ilgilidir.

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A} \mathbf{x}(t)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C} \mathbf{x}(t)$$

olur. Böylece gözlemlenebilirliğin yalnızca \mathbf{A} ve \mathbf{C} katsayı matrislerine bağlı olduğu ortaya çıkar. Diğer bir deyişle bu iki matris kullanılarak gözlemlenebilirlik tespit edilebilir. Burada ilgili matrislerin boyutlarının ise $A_{p \times p}, B_{p \times q}, C_{r \times p}, D_{r \times q}$ olduğunu biliyoruz. Eğer elimizde $(p \times q)$ boyutlu \mathbf{Q} gözlemlenebilir matrisi mevcut ise,

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{C}\mathbf{A} \\ \mathbf{C}\mathbf{A}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{C}\mathbf{A}^{p-1} \end{bmatrix}$$

gözlemlenebilirliğin yalnızca bu “ p ” ranklı \mathbf{Q} matrisiyle mümkün olabileceğini söyleyebiliriz.

$$\text{Gözlemlenebilirlik} = \text{rank}(\mathbf{Q}) = p$$

Görüldüğü gibi eğer durum-uzay modeli göz önüne alındığında, gözlemlenebilirliğin bu modelin daha ziyade

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C} \mathbf{x}(t)$$

çıkış denklemiyle ilgili olduğu ortaya çıkar. Girişteki kontrol edilmeye çalışılan durum değişkenlerinin tamamının veya bir kısmının çıkışta gözlemlenmesi amaçlanmaktadır. Bunun içinde verilen denklemde \mathbf{C} katsayısı öne çıkmaktadır. Eğer durum değişkenlerinin tamamını çıkışta gözlemlemek istiyorsak,

$$\mathbf{C} \neq \mathbf{0}, \quad \text{tam gözlemlenebilirlik}$$

koşulunun sağlanması gerekecektir. Eğer çıkışta hiç gözlem mümkün olmayacaksa bu durumda da

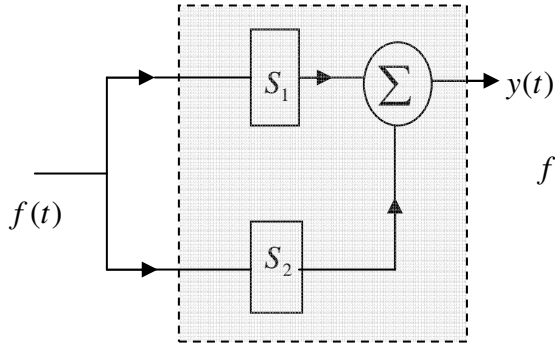
$$\mathbf{C} = \mathbf{0}, \quad \text{tam gözlemlenemezlik}$$

koşulunun söz konusu olacağını görmekteyiz. Durum değişkenlerinden bazılarını gözlemleyebiliyorsak, bu durum

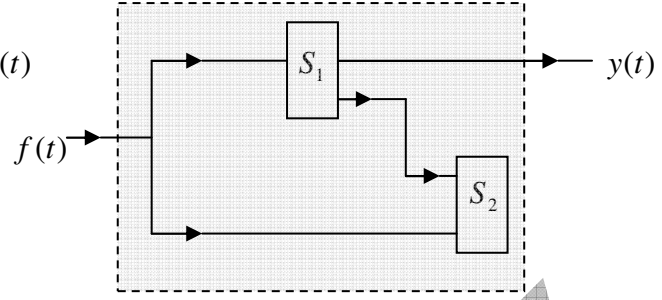
$$\mathbf{C} \neq \mathbf{0} \quad \text{ve} \quad \mathbf{C} = \mathbf{0}, \quad \text{kısmi gözlemlenebilirlik}$$

koşuluyla söz konusu olabilecektir. Aşağıda kontrol edilebilirlik ve gözlenebilirlik üzerine sistemlerin davranışları grafik olarak gösterilmiştir.

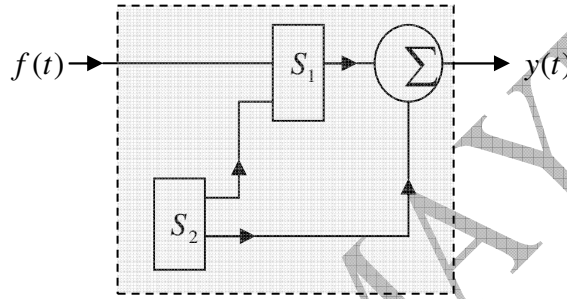
Örnek



(a) : tam kontrol edilen-tam gözlemlenebilen



(b) : tam kontrol edilebilen-tam gözlemlenemeyen



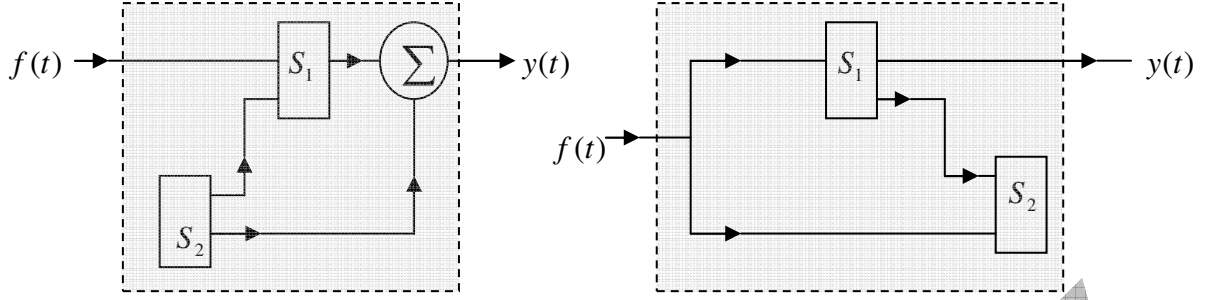
(c) : tam kontrol edilemeyen-tam gözlemlenebilen

Şekil 45 Sistem kontroledilebilirliği – Gözlemlenebilirliği

Şekil (a) incelendiğinde, sistemdeki durum değişkenleri olan S_1 ve S_2 , sistem girişi olan $f(t)$ tarafından kontrol edilebileceği (değiştirilebilme özelliği) için sistem tam kontrol edilebilirdir. Sistem gözlenebilirlik açısından incelendiğinde ise, aynı durum değişkenleri $y(t)$ sistem çıkışında gözlenebildiğinden sistem aynı zamanda tam gözlenebilirdir.

Şekil (b) ele alındığında ise, sistemdeki her iki durum değişkeni sistem girişi tarafından kontrol edilebildiğinden tam kontrol edilebilir olmasına karşın, çıkışta yalnızca S_1 girişi görülebildiğinden sistem tam gözlenemeyen yani kısmi gözlenebilirdir. Şekil (c) de tam kontroledilemeyen – tam gözlemlenemeyen sistem örneği verilmiştir.

Örnek



(a) : tam kontrol edilemeyen-tam gözlemlenebilen (b) : tam kontrol edilebilen-tam gözlemlenemeyen

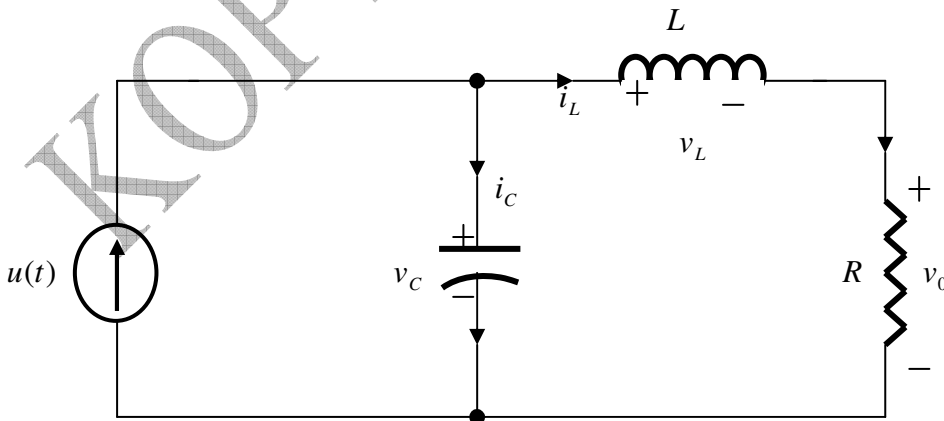
Şekil 46 Sistem kontroledilebilirliği – Gözlemlenebilirliği

Öncekilere benzer olarak (a) da durum değişkenlerinden yalnızca biri giriş tarafından kontrol edildiği için sistem tam kontrol edilemeyen (kısmi kontrol edilebilen), buna mukabil sistem çıkışında, her iki değişkende mevcut olacağından, sistem tam kontrol edilemeyen-tam gözlemlenebilir.

Şekil (b) de ise, sistemdeki her iki durum değişkeni sistem girişi tarafından kontrol edilebildiğinden tam kontrol edilebilir olmasına karşın, çıkışta yalnızca S_1 girişi görülebildiğinden sistem tam gözlemlenemeyen yani kısmi gözlemlenebilir. Bu nedenle sistem tam kontroledilemeyen – tam gözlemlenemeyendir.

Örnek

Başlangıç koşulları sıfır aşağıda verilen devrenin durum-uzay denklem sistemini $u(t)$ girişi ve v_0 çıkışına göre bulun.



Şekil 47 RLC Devresi

kondansatördeki gerilim değişim miktarı

$$i_C = C \frac{dv_C}{dt} = u(t) - i_L$$

endüktanstaki akım değişim miktarı

$$v_L = v_C - R i_L$$
$$L \frac{di_L}{dt} = v_C - R i_L$$

sistem çıkışı

$$v_0 = R i_L(t)$$

$$\frac{dv_C}{dt} = -\frac{1}{C} i_L + \frac{1}{C} u(t)$$

$$\frac{di_L}{dt} = \frac{1}{L} v_C - \frac{R}{L} i_L$$

$$v_0 = R i_L(t)$$

$$\dot{v}_C = -\frac{1}{C} i_L + \frac{1}{C} u(t)$$

$$\dot{i}_L = \frac{1}{L} v_C - \frac{R}{L} i_L \quad \text{durum değişkenleri denklemi}$$

$$v_0 = R i_L(t) \quad \text{çıkış denklemi}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{v}_C \\ \dot{i}_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{C} \\ \frac{1}{L} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_C \\ i_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{C} \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

$$v_0 = [0 \quad R] \begin{bmatrix} v_C \\ i_L \end{bmatrix}$$

Eğer $x_1 = v_C$ ve $x_2 = i_L$ veya $\dot{x}_1 = \dot{v}_C$ ve $\dot{x}_2 = \dot{i}_L$ ise,

$$\dot{x}_1 = -\frac{1}{C} x_2 + \frac{1}{C} u(t) \quad \text{durum değişkenleri denklemi}$$

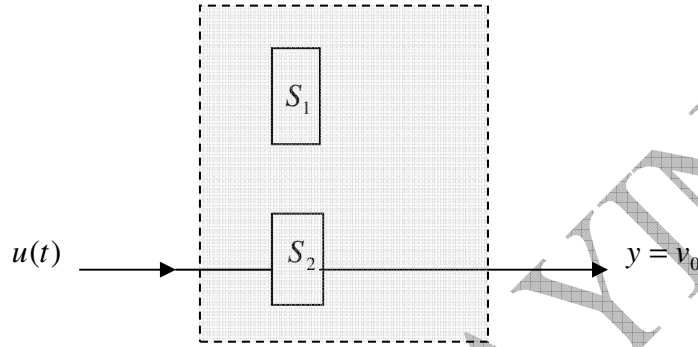
$$\dot{x}_2 = \frac{1}{L} x_1 - \frac{R}{L} x_2$$

$$v_0 = R x_2 \quad \text{çıkış denklemi}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{C} \\ \frac{1}{L} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{C} \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

$$v_0 = \begin{bmatrix} 0 & R \end{bmatrix} x_2$$

Elde edilenlerin ışığında $u(t)$ ve v_0 çıkışı ve $S_1(x_1)$ ve $S_2(x_2)$ durumları arasındaki görünüm aşağıdaki gibi olacaktır.



Şekil 48 Tam kontrol edilemeyen-tam gözlemlenemeyen sistem

Yukarıdaki blok diagramdan sistemin girişi yalnızca ($S_2(x_2)$) kontrol edebildiği için, sistem tam kontrol edilemeyen, çıkıştan ise iki durum değişkeninden biri gözlemlenebildiğinden sistem aynı zamanda tam gözlemlenemeyendir.

Açıklama : Normalde matrisyel olarak denklemleri elde edilen sistem, durum-uzay sistemine göre değil de, diferansiyel denklem sistemine göre düzenlenseydi, girişi x , çıkışı y olan

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + a_{n-2} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) =$$

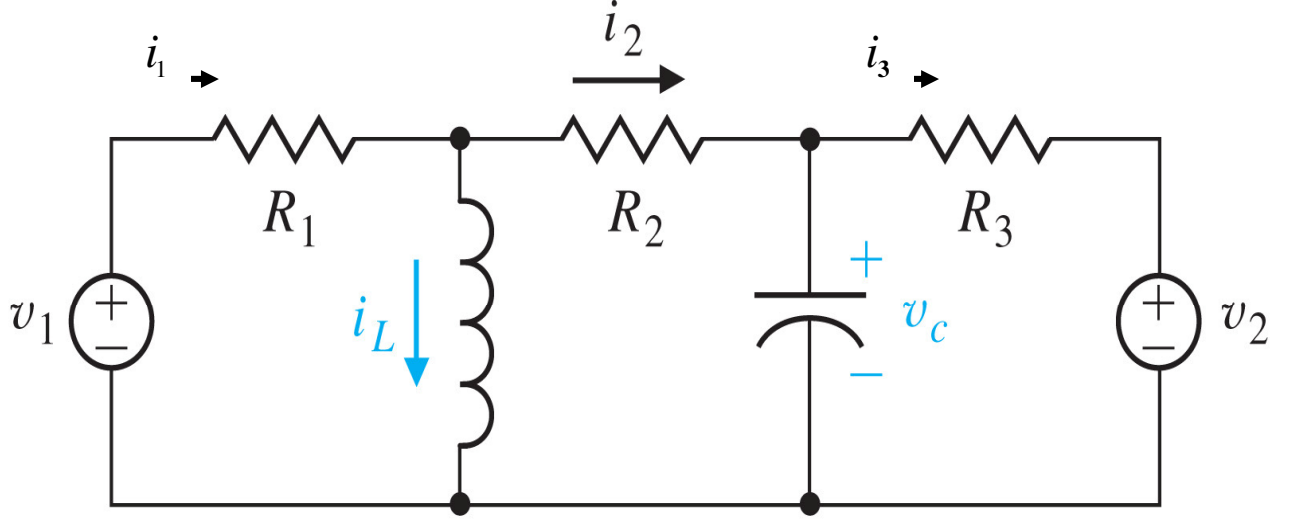
$$b_m \frac{d^m x(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} x(t)}{dt^{m-1}} + b_{m-2} \frac{d^{m-1} x(t)}{dt^{m-1}} + \dots + b_1 \frac{dx(t)}{dt} + b_0 x(t)$$

tipinde bir diferansiyel denklem sistemi elde edilerek, buradan başlangıç koşullarının verildiği veya verilmediği duruma göre sistemin çözümü yapılarak bir $y(t)$ çıkış fonksiyonu elde edilmeye çalışılacaktır. Bu çözümde, çıkışın söz konusu $S_1(x_1)$ ve $S_2(x_2)$ gibi durum değişkenleriyle bir ilgisi aranmamaktadır. Oysa ki durum değişkenlerinin $t = 0$ ve $t \geq 0$ anlarındaki değişimlerine göre çıkışın hesaplanması, en önemlisi de çıkıştan durum değişkenlerinin gözlemlenebilmesi mümkün olmaktadır. x_1 ve x_2 durum değişkenleri elde edildikten sonra, devredeki herhangi bir elemanın veya çıkış elemanının değeri, çözülen durum değişkenine göre yapılabilmektedir. Örneğin ele alınan örnekteki $y = v_0$ çıkışının çeşitli t zamanlarındaki değeri, durum değişkenlerinden olan $S_2(x_2)$ ye göre belirlenebilmektedir. Çıkış bu durum değişkenlerinin herhangi bir t anındaki değerine göre tespit edilebilmektedir. Bu yolla sistemi tam anlamıyla kontrol edebilmek ve gözlemleyebilmek mümkün olmaktadır. Ele aldığımız örnekteki $v_0 = \begin{bmatrix} 0 & R \end{bmatrix} x_2$ çıkış

ifadesi, $v_0 = R x_2$ ifadesine göre, x_2 durum değişkenine bağlı olarak $v_0(t) = R x_2(t)$ gibi hesaplanabilmektedir.

Örnek

Başlangıç koşulları sıfır aşağıda verilen devrenin durum-uzay denklem sistemini v_1 ve v_2 girişleri ile i_2 çıkışına göre bulun.



Şekil 49

Çözüm

Kirchoff akım yasasını kullanırsak,

$$C \frac{dv_C}{dt} = i_2 + i_3$$

Kirchoff gerilim yasasını kullanırsak,

$$L \frac{di_L}{dt} = v_1 - R_1 i_1$$

ve

$$R_1 i_1 + R_2 i_2 + v_C = v_1$$

akım denklemi,

$$i_2 = i_1 - i_L$$

çevre gerilim denklemi buna göre düzenlenirse

$$\begin{aligned} R_1 i_1 + R_2 (i_1 - i_L) + v_C &= v_1 \\ (R_1 + R_2) i_1 - R_2 i_L + v_C &= v_1 \\ (R_1 + R_2) i_1 &= v_1 - v_C + R_2 i_L \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan i_1 ,

$$i_1 = \frac{v_1 - v_C + R_2 i_L}{R_1 + R_2} = -\frac{v_C}{R_1 + R_2} + \frac{R_2 i_L}{R_1 + R_2} + \frac{v_1}{R_1 + R_2}$$

son çevreden (göz den) i_3 aşağıdaki gibi elde edilir.

$$R_3 i_3 + v_C = v_2$$

$$i_3 = \frac{v_2 - v_C}{R_3} = -\frac{v_C}{R_3} + \frac{v_2}{R_3}$$

bunlara göre $\frac{di_L}{dt}$ ve $\frac{dv_C}{dt}$ aşağıdaki gibi düzenlenirler.

$$L \frac{di_L}{dt} = v_1 - R_1 i_1 = v_1 - R_1 \frac{v_1 - v_C + R_2 i_L}{R_1 + R_2} = \frac{v_1 (R_1 + R_2 - R_1)}{R_1 + R_2} + \frac{R_1 v_C}{R_1 + R_2} - \frac{R_1 R_2 i_L}{R_1 + R_2}$$

$$\frac{di_L}{dt} = \frac{R_2}{L(R_1 + R_2)} v_1 + \frac{R_1}{L(R_1 + R_2)} v_C - \frac{R_1 R_2}{L(R_1 + R_2)} i_L$$

$$C \frac{dv_C}{dt} = i_2 + i_3 = i_1 - i_L + \frac{v_2 - v_C}{R_3} = \frac{v_1 - v_C + R_2 i_L}{R_1 + R_2} - i_L + \frac{v_2 - v_C}{R_3} = \frac{v_1}{R_1 + R_2} - \frac{v_C}{R_1 + R_2} + \frac{R_2 i_L}{R_1 + R_2} - i_L + \frac{v_2 - v_C}{R_3}$$

$$\frac{dv_C}{dt} = \frac{v_1}{C(R_1 + R_2)} + \frac{v_2}{CR_3} - \frac{v_C}{C(R_1 + R_2)} - \frac{v_C}{CR_3} + \frac{(R_2 - R_1 - R_2) i_L}{C(R_1 + R_2)}$$

$$\frac{dv_C}{dt} = \frac{v_1}{C(R_1 + R_2)} + \frac{v_2}{CR_3} - \frac{(R_1 + R_2 + R_3) v_C}{CR_3 (R_1 + R_2)} + \frac{(R_2 - R_1 - R_2) i_L}{C(R_1 + R_2)}$$

$$\frac{dv_C}{dt} = \frac{1}{C(R_1 + R_2)} v_1 + \frac{1}{CR_3} v_2 - \frac{R_1 + R_2 + R_3}{CR_3 (R_1 + R_2)} v_C - \frac{R_1}{C(R_1 + R_2)} i_L$$

Bunların neticesinde elde edilen $\frac{di_L}{dt}$ ve $\frac{dv_C}{dt}$ birlikte yazılırsa durum değişkenleri olarak aşağıdaki görünümde olacaktırlar.

$$\frac{dv_C}{dt} = -\frac{R_1 + R_2 + R_3}{CR_3(R_1 + R_2)} v_C - \frac{R_1}{C(R_1 + R_2)} i_L + \frac{1}{C(R_1 + R_2)} v_1 + \frac{1}{CR_3} v_2$$

$$\frac{di_L}{dt} = \frac{R_1}{L(R_1 + R_2)} v_C - \frac{R_1 R_2}{L(R_1 + R_2)} i_L + \frac{R_2}{L(R_1 + R_2)} v_1$$

$$\dot{v}_C = \frac{dv_C}{dt} \quad \text{ve} \quad \dot{i}_L = \frac{di_L}{dt}$$

$$\dot{v}_C = -\frac{R_1 + R_2 + R_3}{CR_3(R_1 + R_2)} v_C - \frac{R_1}{C(R_1 + R_2)} i_L + \frac{1}{C(R_1 + R_2)} v_1 + \frac{1}{CR_3} v_2$$

$$\dot{i}_L = \frac{R_1}{L(R_1 + R_2)} v_C - \frac{R_1 R_2}{L(R_1 + R_2)} i_L + \frac{R_2}{L(R_1 + R_2)} v_1$$

matris olarak yazılırsa

$$\begin{bmatrix} \dot{v}_C \\ \dot{i}_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R_1 + R_2 + R_3}{CR_3(R_1 + R_2)} & -\frac{R_1}{C(R_1 + R_2)} \\ \frac{R_1}{L(R_1 + R_2)} & -\frac{R_1 R_2}{L(R_1 + R_2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_C \\ i_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{C(R_1 + R_2)} & \frac{1}{CR_3} \\ \frac{R_2}{L(R_1 + R_2)} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

eğer $x_1 = v_C$ ve $x_2 = i_L$ veya $\dot{x}_1 = \dot{v}_C$ ve $\dot{x}_2 = \dot{i}_L$ ise,

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R_1 + R_2 + R_3}{CR_3(R_1 + R_2)} & -\frac{R_1}{C(R_1 + R_2)} \\ \frac{R_1}{L(R_1 + R_2)} & -\frac{R_1 R_2}{L(R_1 + R_2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{C(R_1 + R_2)} & \frac{1}{CR_3} \\ \frac{R_2}{L(R_1 + R_2)} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

Sistem çıkışı olarak ise, i_2 elde edilmek istenirse ($y = i_2$), çıkışı düzenleyelim.

$$i_2 = i_1 - i_L$$

$$i_1 = \frac{v_1 - v_C + R_2 i_L}{R_1 + R_2}$$

$$i_2 = \frac{v_1 - v_C + R_2 i_L}{R_1 + R_2} - i_L = \frac{-v_C}{R_1 + R_2} + \frac{R_2 i_L}{R_1 + R_2} + \frac{v_1}{R_1 + R_2} - i_L = \frac{-v_C}{R_1 + R_2} + \frac{(R_2 - R_1 - R_2) i_L}{R_1 + R_2} + \frac{v_1}{R_1 + R_2}$$

$$i_2 = -\frac{1}{R_1 + R_2} v_C - \frac{R_1}{R_1 + R_2} i_L + \frac{1}{R_1 + R_2} v_1$$

i_2 çıkışını y olarak, ve eğer $x_1 = v_C$ ve $x_2 = i_L$ olarak düzenlenirse

$$y = -\frac{1}{R_1 + R_2} x_1 - \frac{R_1}{R_1 + R_2} x_2 + \frac{1}{R_1 + R_2} v_1$$

matris olarak düzenlenirse,

$$y = \begin{bmatrix} -\frac{1}{R_1 + R_2} & -\frac{R_1}{R_1 + R_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1 + R_2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

Sonuçta durum değişkenleri ve çıkış matrislerini birlikte gösterelim.

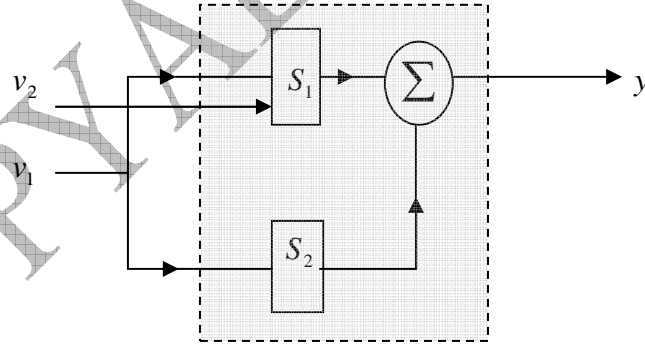
$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R_1 + R_2 + R_3}{CR_3(R_1 + R_2)} & -\frac{R_1}{C(R_1 + R_2)} \\ \frac{R_1}{L(R_1 + R_2)} & -\frac{R_1 R_2}{L(R_1 + R_2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{C(R_1 + R_2)} & \frac{1}{CR_3} \\ \frac{R_2}{L(R_1 + R_2)} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

Durum değişkenleri

$$y = \begin{bmatrix} -\frac{1}{R_1 + R_2} & -\frac{R_1}{R_1 + R_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1 + R_2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

Çıkış

Elde edilenlerin ışığında v_1 ve v_2 girişleri ile y çıkışı ve $S_1(x_1)$ ve $S_2(x_2)$ durumları arasındaki görünüm aşağıdaki gibi olacaktır.



Şekil 50 Tam kontrol edilemeyen-tam gözlemlenebilen sistem

Buna göre ele alınan RLC devresinin (sisteminin) çözümünde, durum değişkenlerinin girişe göre belirlenmesi mümkündür. Bunun yanı sıra, çıkış olarak da seçilen ($y = i_2$) sistem çıkışı da,

$$y = -\frac{1}{R_1 + R_2} x_1 - \frac{R_1}{R_1 + R_2} x_2 + \frac{1}{R_1 + R_2} v_1$$

ifadesi gereği, sistem durum değişkenleri olan $S_1(x_1)$ ve $S_2(x_2)$ ye göre elde edilmiştir. Bunun anlamı, sistemin herhangi bir t anındaki çıkışını x_1 ve x_2 durum değişkenlerinden elde edebileceyiz.

$$y(t) = -\frac{1}{R_1 + R_2} x_1(t) - \frac{R_1}{R_1 + R_2} x_2(t) + \frac{1}{R_1 + R_2} v_1$$

Bunun için ilgili durum değişkenlerinin $x_1(t)$ ve $x_2(t)$ çözülerek elde edilmesi gerekiyor. Bunlar elde edildikten sonra, sistemin çıkışının herhangi bir t anına göre değeri ve de durum değişkenlerinin çıkıştan gözlemlenmesi mümkün olmaktadır. Yukarıdaki blok diagramdan sistemin ilk girişi her iki durum değişkenini kontrol edebilirken sistem ikinci girişi, durum değişkenlerinden yalnızca birini ($S_1(x_1)$) kontrol edebildiği için, sistem tam kontrol edilemeyen, ama çıkışta her iki durum değişkeni gözlemlenebildiğinden sistem tam gözlemlenebilirdir.

Bu yaklaşımda $x_1(t)$ ve $x_2(t)$ durum değişkenleri çözüldükten sonra, sistemin analizi kolaylaşmaktadır. Çünkü çözülen yani elde edilen $x_1(t)$ ve $x_2(t)$, durum değişkeni fonksiyonlarını göstermektedir. Bununla durum değişkenlerinin herhangi bir andaki davranışını izlemek mümkün olacaktır. Bunun yanı sıra, bu tür durum değişkeni fonksiyonuna bağlı devre veya sistemin diğer giriş, çıkış ve ara elemanlarının çözümü de mümkün olacaktır. Örneğin çıkış fonksiyonu olan $y(t)$, bu örnekte $y(t) = C_1 x_1(t) + C_2 x_2(t) + D v_1(t)$ gibi $x_1(t)$ ve $x_2(t)$ durum değişkeni fonksiyonlarına göre elde edilmiştir. Normal diferansiyel denklemi yöntemlerinde çıkış, sistem girişinin olmadığı başlangıç koşullarına göre belirlenen sıfır-giriş cevabı ile, başlangıç koşullarının olmadığı sisteme giriş yapıldıktan sonraki sıfır-durum cevabı toplamalarından elde edilmekteydi. Burada bunların yerine çıkış, daha farklı bir tarzda durum-değişkenlerine ve de sistemdeki girişlere göre elde edilmektedir.

Bununla beraber ilgili durum değişkenleri çözüldükten sonra yalnızca ($y = i_2$) sistem çıkışını değil, bu yolla aynı zamanda $x_1(t)$ ve $x_2(t)$ durum değişkenlerine bağlı olarak ifade edilen i_1 , i_2 ve i_3 gibi diğer devre büyüklüklerinin (çıkışlarının, sinyallerinin) de elde edilmesi mümkün olur.

$$\begin{aligned} i_1 &= -\frac{1}{R_1 + R_2} x_1 + \frac{R_2}{R_1 + R_2} x_2 + \frac{1}{R_1 + R_2} v_1 \\ i_2 &= -\frac{1}{R_1 + R_2} x_1 - \frac{R_1}{R_1 + R_2} x_2 + \frac{1}{R_1 + R_2} v_1 \\ i_3 &= -\frac{1}{R_3} x_1 + \frac{1}{R_3} v_2 \end{aligned}$$

Durum-Uzay Sistemlerinde Durum Değişkenleri ve Transfer Fonksiyonu

Bir sistemin transfer fonksiyonu klasik anlamda, sistem başlangıç koşullarını göz önüne almayan sistem çıkışının girişine oranından elde edilmektedir.

$$H(s) = \frac{Y(s)}{F(s)}$$

Transfer fonksiyonu sistemin özü kabul edildiğine göre, sistemin özü kabul edilen durum değişkenleriyle ilişkisi olması kaçınılmazdır. Çünkü bir sistem belli sayıda seçilmiş durumların veya durum değişkenlerinin toplamından oluşmaktadır. Bu anlamda sistem transfer fonksiyonunun içeriğinde sistemi temsil eden durum değişkenlerinin olması kaçınılmazdır. Kompakt

$$H(s) = \frac{Y(s)}{F(s)}$$

gösteriminde durum değişkenleri görülmemektedir. Bu durumda durum değişkenlerini içeren genel blok şema dikkate alınmalıdır. Söz konusu blok şema ve denklemleri göz önüne alındığında, buradan $H(s)$ transfer fonksiyonunun elde edilebileceği kabul edilir. Mason Kazanç yaklaşımı böyle durumlar için sistem transfer fonksiyonunun elde edilmesini sağlayan yöntemlerden birisidir.

Ancak klasik gösterimdeki $H(s)$ üzerinde $x(t)$ durum değişkenlerinin etkisi gerçekte var olacağından, bu dolaylı olarak düşünülmelidir. Eğer transfer fonksiyonunun durum değişkenlerini içerdiğini görmek istiyorsak, bu açıdan durum-uzay sistemi belki de en önemli yöntemdir. Durum-uzay yöntemiyle ancak bir transfer fonksiyonunun durum değişkenlerine bağlı karşılığını görebiliriz. Bu açıdan bile durum-uzay gösterimleri oldukça önemlidir.

Örneğin

$$H(s) = \frac{1}{s+3}$$

transfer fonksiyonunu göz önüne alalım. Görüldüğü gibi, bu yazımdan ilgili sistemin durum değişkenlerini içerdiğini görmemiz mümkün değildir. Ancak eğer bu denklemin durum-uzay karşılığının,

$$\dot{x} = -3x + f$$

$$y = x$$

olduğu yazımı dikkate alırsak sistemin durum değişkenlerindeki içeren durum denkleminin $\dot{x} = -3x + f$, çıkış denkleminin ise $y = x$ olduğunu görürüz. Bu anlamda sistem transfer fonksiyonunun belirlenmesindeki en önemli parametrenin durum değişkenleri olduğunu görmekteyiz.

Örnek

$$\frac{d^3 y}{dt^3} + 8 \frac{d^2 y}{dt^2} + 19 \frac{dy}{dt} + 12y(t) = 2 \frac{dy}{dt} + 10f(t)$$

Başlangıç koşulları sıfır olan diferansiyel denklem ile verilen lineer sistemin, durum-uzay sistemindeki denklemlerini oluşturun.

Çözüm

Çözüm için, verilen sistemin “s” uzayındaki transfer fonksiyonuna sahip olmamız gerekmektedir. Bunun için başlangıç koşullarının sıfır alındığı Laplace dönüşümü hatırlayalım.

$$\frac{d^n x}{dx^n} = s^n X(s)$$

Bu genel yaklaşıma göre verilen diferansiyel denklem sistemi

$$s^3 Y(s) + 8s^2 Y(s) + 19s Y(s) + 12Y(s) = 2sF(s) + 10F(s)$$

$$(s^3 + 8s^2 + 19s + 12)Y(s) = (2s + 10)F(s)$$

$$H(s) = \frac{Y(s)}{F(s)} = \frac{2s + 10}{s^3 + 8s^2 + 19s + 12}$$

elde edilen transfer fonksiyonunda var oldukları düşünülen durum değişkenlerini ortaya çıkarmak için durum-uzay yöntemine başvurmamız gerekiyor. Buna göre durum-uzay sisteminin durum ve çıkış denklemleri aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = x_3$$

$$\dot{x}_3 = -12x_1 - 19x_2 - 8x_3 + f$$

$$y = 2x_2 + 10x_1$$

Görüldüğü gibi $H(s)$ formunda görünmeyen x_1, x_2, x_3 durum değişkenleri açığa çıkmıştır. Bu durumda sistemin analizi daha kolaylaşmıştır. Eğer sistemi bu kez matris formunda düzenlersek,

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -12 & -19 & -8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} f$$

$$y = [10 \quad 2 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Önemli Açıklama :

Görüldüğü gibi sistem

$$\frac{d^3 y}{dt^3} + 8 \frac{d^2 y}{dt^2} + 19 \frac{dy}{dt} + 12 y(t) = 2 \frac{dy}{dt} + 10 f(t)$$

üçüncü dereceden bir diferansiyel denklem ile verilmişti. Bu durumda direkt çözüm aransaydı, 3. dereceden bir diferansiyel denklemin çözümündeki zorluk ve karmaşa söz konusu olacaktı. Oysa üçüncü dereceden kompleks bir diferansiyel denklem çözme yerine aşağıda görüldüğü gibi

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ \dot{x}_3 &= -12x_1 - 19x_2 - 8x_3 + f\end{aligned}$$

üç tane birinci dereceden diferansiyel denklem ortaya çıkmıştır ki, bunun çözümü daha basittir. Bu, durum-uzay sistemlerinin sağladığı önemli bir avantajdır.

Durum Denkleminin (durum değişkenlerinin) Zaman Domeninde Çözümü

Durum denklemi olarak kastedilen durum değişkeninin girişle ilişkisini ortaya koyan

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t) \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t) \mathbf{f}(t)$$

denklemdir. Daha önce belirtildiği gibi, durum-uzay modelinin avantajlarından olarak eğer zaman domeninde $\mathbf{x}(t)$ durum değişkeni (vektör yani çok giriş olarak) çözülebilirse, sistem içerisindeki bu durum değişkeniyle bağlantılı bir çok işaret veya değişkenin çözülebileceği vurgulanmıştı. Bu nedenle birinci dereceden diferansiyel denklem olan durum denkleminin çözümü olarak kastedilen $\mathbf{x}(t)$ nin çözülmesidir. Bu durum durum değişkeninin çözümüyle ilgili çözüm denklemi aşağıdaki gibidir.

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t} \mathbf{x}(0) + \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)} \mathbf{B} \mathbf{f}(\tau) d\tau$$

Denklemdaki $e^{\mathbf{A}t}$ exponeşiyeli aşağıdaki sonsuz seri açılımdan hesaplanabilmektedir.

$$e^{A t} = \mathbf{I} + \mathbf{A} t + \frac{\mathbf{A}^2 t^2}{2!} + \frac{\mathbf{A}^3 t^3}{3!} + \cdots + \frac{\mathbf{A}^n t^n}{n!} + \cdots + \\ = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^k t^k}{k!} d\tau$$

Bu denklemler sistemin özü olan $\mathbf{x}(t)$ durum değişkeninin çözümünü mümkün kılmaktadır. Bundan sonra bu durum değişkeniyle ilişki halindeki herhangi bir işaret veya fonksiyon rahatlıkla elde edilebilir. Çözümü verilen $\mathbf{x}(t)$ nin denkleminin aslında

$$\mathbf{x}(t) = \underbrace{e^{A t} \mathbf{x}(0)}_{\text{zero-input}} + \underbrace{\int_0^t e^{A(t-\tau)} \mathbf{B} \mathbf{f}(\tau) d\tau}_{\text{zero-state}}$$

başlangıç koşullarının göz önüne alındığı (zorlanmış girişin olmadığı, $\mathbf{f}(t) = 0$) sıfır-giriş (zero-input) ile zorlanmış girişin olduğu (başlangıç koşullarının olmadığı, $\mathbf{x}(0) = 0$) sıfır-durum (zero-state) bileşenleri olduğunu görmekteyiz. Buna göre durum değişkenlerinin çözümü, başlangıç koşullarının olduğu $\mathbf{f}(t) = 0$ ve zorlanmış girişin söz konusu olduğu $\mathbf{x}(0) = 0$ koşulların toplamından oluşmaktadır.

Çıkış Denkleminin (durum değişkenlerinin) Zaman Domeninde Çözümü

Durum uzay modelinde çıkış denklemi olarak kastedilen çıkışın durum değişkeni karşılığını ortaya koyan

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C} \mathbf{x}(t) + \mathbf{D} \mathbf{f}(t)$$

Bu denklem yoluyla $\mathbf{y}(t)$ sistem çıkış(ları), zaman domeninde $\mathbf{x}(t)$ durum değişkeninden (vektöründen) yararlanılarak çözülebilmektedir. Bunun için esas olan $\mathbf{x}(t)$, çözümü az önce yukarıda yapılmıştı.

$$\mathbf{x}(t) = e^{A t} \mathbf{x}(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)} \mathbf{B} \mathbf{f}(\tau) d\tau$$

bu denklem

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(t) &= e^{\mathbf{A}t} \mathbf{x}(0) + \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)} \mathbf{B} \mathbf{f}(\tau) d\tau \\ &= e^{\mathbf{A}t} \mathbf{x}(0) + e^{\mathbf{A}t} * \mathbf{B} \mathbf{f}(t)\end{aligned}$$

olarak $\mathbf{y}(t)$ de yerine yazılırsa,

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C} \mathbf{x}(t) + \mathbf{D} \mathbf{f}(t) = \mathbf{C} [e^{\mathbf{A}t} \mathbf{x}(0) + e^{\mathbf{A}t} * \mathbf{B} \mathbf{f}(t)] + \mathbf{D} \mathbf{f}(t)$$

$$e^{\mathbf{A}t} * \mathbf{B} \mathbf{f}(t) = e^{\mathbf{A}t} \mathbf{B} * \mathbf{f}(t)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C} [e^{\mathbf{A}t} \mathbf{x}(0) + e^{\mathbf{A}t} \mathbf{B} * \mathbf{f}(t)] + \mathbf{D} \mathbf{f}(t)$$

$\mathbf{f}(t)$ sistem giriş fonksiyonunun impulsler ($\delta(t)$) olarak sisteme giriş yaptığı göz önüne alınırsa

$$\mathbf{f}(t) = \delta(t) * \mathbf{f}(t)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C} [e^{\mathbf{A}t} \mathbf{x}(0) + e^{\mathbf{A}t} \mathbf{B} * \mathbf{f}(t)] + \mathbf{D} [\delta(t) * \mathbf{f}(t)] = \mathbf{C} [e^{\mathbf{A}t} \mathbf{x}(0) + e^{\mathbf{A}t} \mathbf{B} * \mathbf{f}(t)] + \mathbf{D} \delta(t) * \mathbf{f}(t)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C} e^{\mathbf{A}t} \mathbf{x}(0) + [\mathbf{C} e^{\mathbf{A}t} \mathbf{B} + \mathbf{D} \delta(t)] * \mathbf{f}(t)$$

Buna göre $\mathbf{x}(t)$ çözüldükten sonra, buna bağlı çıkışta elde edilebilecektir. Oluşan çıkışı veya toplam sistem cevabını iki alt cevap altında düşünebiliriz.

$$\mathbf{y}(t) = \underbrace{\mathbf{C} e^{\mathbf{A}t} \mathbf{x}(0)}_{\text{zero-input response}} + \underbrace{[\mathbf{C} e^{\mathbf{A}t} \mathbf{B} + \mathbf{D} \delta(t)] * \mathbf{f}(t)}_{\text{zero-state response}}$$

Görüldüğü gibi, toplam sistem cevabı, başlangıç koşullarının göz önüne alındığı (zorlanmış girişin sıfır olduğu, $\mathbf{f}(t) = 0$) sıfır-giriş cevabı (zero-input response) ile, zorlanmış girişin göz önüne alındığı (başlangıç koşullarının sıfır olduğu, $\mathbf{x}(0) = 0$) sıfır-durum cevabı (zero-state response) toplamından oluşmaktadır. Eğer başlangıç koşullarının sıfır olduğu $\mathbf{x}(0) = 0$ duruma göre sıfır-durum cevabı

$$\begin{aligned}\mathbf{y}(t) &= [\mathbf{C} e^{\mathbf{A}t} \mathbf{B} + \mathbf{D} \delta(t)] * \mathbf{f}(t) \\ &= \mathbf{h}(t) * \mathbf{f}(t)\end{aligned}$$

olarak elde edilir. Denklemdaki $\mathbf{h}(t)$ sistem impulse cevabı olup, denklemden aşağıdaki gibi olduğu görülür.

$$\mathbf{h}(t) = \mathbf{C} e^{\mathbf{A}t} \mathbf{B} + \mathbf{D} \delta(t)$$

Sonuçta durum-uzay modelindein çözümü $\mathbf{x}(t)$ durum değişkenleri ile $\mathbf{y}(t)$ sistem çıkışının çözümlerini içeren aşağıdaki denklem çifti olarak bilinir.

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t} \mathbf{x}(0) + \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)} \mathbf{B} \mathbf{f}(\tau) d\tau$$
$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C} e^{\mathbf{A}t} \mathbf{x}(0) + [\mathbf{C} e^{\mathbf{A}t} \mathbf{B} + \mathbf{D} \delta(t)] * \mathbf{f}(t)$$

Sürekli Zaman Lineer Zamanla Değişmeyen Sistemlerin Durum-Uzay Modeli

Sürekli zaman lineer zamanla değişmeyen (zamandan bağımsız) sistemlerin durum uzay modeli aşağıdaki denklem çifti ile gösterilir.

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A} \mathbf{x}(t) + \mathbf{B} \mathbf{f}(t)$$
$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C} \mathbf{x}(t) + \mathbf{D} \mathbf{f}(t)$$

Görüldüğü gibi sistem parametreleri olan $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ ve \mathbf{D} vektörleri zamandan bağımsız fonksiyonlar halindedir.

Sürekli Zaman Lineer Zamanla Değişmeyen Sistemlerin Durum-Uzay Modeli

Sürekli zaman lineer zamanla değişen (zamana bağımlı) sistemlerin durum uzay modeli aşağıdaki denklem çifti ile gösterilir.

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t) \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t) \mathbf{f}(t)$$
$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}(t) \mathbf{x}(t) + \mathbf{D}(t) \mathbf{f}(t)$$

Görüldüğü gibi sistem parametreleri olan $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ ve \mathbf{D} vektörleri zamandan bağımsız olmayıp, zamanla değişen $\mathbf{A}(t)$, $\mathbf{B}(t)$, $\mathbf{C}(t)$ ve $\mathbf{D}(t)$ fonksiyonları halindedir.

Ayrık Zaman Lineer Zamanla Değişmeyen Sistemlerin Durum-Uzay Modeli

Ayrık zaman lineer zamanla değişen (zamana bağımlı) sistemlerin durum uzay modeli aşağıdaki denklem çifti ile gösterilir.

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}(k) \mathbf{x}(k) + \mathbf{B}(k) \mathbf{f}(k)$$
$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{C}(k) \mathbf{x}(k) + \mathbf{D}(k) \mathbf{f}(k)$$

Görüldüğü gibi sistem parametreleri olan $\mathbf{A}(k)$, $\mathbf{B}(k)$, $\mathbf{C}(k)$ ve $\mathbf{D}(k)$ vektörleri olan ayrık zaman lineer bir sistemin bu parametreleri “ t ” zamanına bağımlı olmayıp, ayrık uzaydaki “ k ” değişkeniyle değişim göstermektedirler. Bu anlamda, ayrık durum değişkenine dair $\mathbf{x}(k+1)$, $\mathbf{x}(k)$ durum değişkeninin türevi anlamına gelmektedir. Bu açıdan bakıldığında $\mathbf{x}(k+1)$ gösterimi, $\mathbf{x}(k)$ nın bir sonraki adımını (gelecek zamanını) gösterir ki, bu sürekli haldeki türev gösterimine uygundur. Bu yolla, sistemin gelecek davranışı gözlemlenebilmektedir. Böyle bakıldığında sürekli ve ayrık haldeki durum değişkenleri arasında $\mathbf{x}(t) \equiv \mathbf{x}(k)$ ve $\dot{\mathbf{x}}(t) \equiv \mathbf{x}(k+1)$ ilişkilerinin var olduğu düşünülebilir.