Doğrusal Zamanla Değişmeyen Sistemler

2.1. GİRİŞ

Sistemlerin iki önemli özelliği doğrusallık ve zamanla değişmezliktir. Bu bölümde bu özelliklere sahip olan sistemlerin temel giriş-çıkış ilişkisi geliştirilecektir. DZD sistemler için bu giriş-çıkış ilişkisinin bir konvolüsyon işlemi cinsinden tanımlandığı gösterilecektir. DZD sistemlerde konvolüsyon işleminin önemi; DZD bir sistemin birim dürtü girişine olan tepkisinin bilinmesinin herhangi bir giriş sinyaline olan tepkisini bulma olanağını bize vermesinden kaynaklanmaktadır. DZD sistemler için giriş-çıkış ilişkilerinin türevsel ve fark denklemleri ile tanımlanması da incelenecektir.

2.2. SÜREKLİ ZAMANLI, DZD BİR SİSTEMİN TEPKİSİ VE KONVOLÜSYON ENTEGRALİ

A. Dürtü Tepkisi:

T ile gösterilen sürekli zamanlı, DZD bir sistemin $h(t)$ dürtü tepkisi, giriş $\delta(t)$ olduğundaki sistem tepkisi olarak tanımlanır. Diğer bir deyişle:

$$h(t) = \mathbf{T}\{\delta(t)\} \tag{2.1}$$

B. Herhangi Bir Girişe olan Tepki:

Eşitlik (1.27)'den $x(t)$ girişi

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\,\delta(t-\tau)\,d\tau \tag{2.2}$$

olarak ifade edilebilir. Sistem doğrusal olduğundan sistemin herhangi bir girişe olan tepkisi de

$$\begin{aligned} y(t) = \mathbf{T}\{x(t)\} &= \mathbf{T}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\,\delta(t-\tau)\,d\tau\right\} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\mathbf{T}\{\delta(t-\tau)\}\,d\tau \end{aligned} \tag{2.3}$$

olarak ifade edilebilir. Ayrıca, sistem zamanla değişmez olduğundan

$$h(t-\tau) = \mathbf{T}\{\delta(t-\tau)\} \tag{2.4}$$

yazılabilir. Eşitlik (2.4), Eşitlik (2.3)'de yerine konursa

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)\,d\tau \tag{2.5}$$

elde edilir. (2.5) eşitliği sürekli zamanlı, DZD bir sistemin $h(t)$ dürtü tepkisi ile tümüyle tanımlandığını göstermektedir.

C. Konvolüsyon Entegrali:

Eşitlik (2.5); sürekli zamanlı iki adet $x(t)$ ve $h(t)$ sinyalinin

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)\,d\tau \qquad (2.6)$$

ifadesi ile verilen konvolüsyonunu tanımlar. (2.6) eşitliği yaygın olarak konvolüsyon entegrali olarak bilinir. O halde, ulaşılan temel sonuç; herhangi bir sürekli zamanlı, DZD sistemin çıkışı, $x(t)$ girişi ile sistemin dürtü tepkisi $h(t)$'nin konvolüsyonudur. Şekil 2-1 dürtü tepkisinin tanımını ve Eşitlik (2.6)'daki ilişkiyi sergilemektedir.

Şekil 2-1 Sürekli Zamanlı DZD Sistem

D. Konvolüsyon Entegralinin Özellikleri:

Konvolüsyon entegrali aşağıdaki özelliklere sahiptir.

1. Yer değiştirme:

$$x(t) * h(t) = h(t) * x(t) \qquad (2.7)$$

2. Birleşim:

$$\{x(t) * h_1(t)\} * h_2(t) = x(t) * \{h_1(t) * h_2(t)\} \qquad (2.8)$$

3. Dağılım:

$$x(t) * \{h_1(t)\} + h_2(t)\} = x(t) * h_1(t) + x(t) * h_2(t) \qquad (2.9)$$

E. Konvolüsyon Entegral İşlemi:

Konvolüsyonun yer değiştirme özelliği (2.7), Eşitlik (2.6)'ya uygulanırsa

$$y(t) = h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)\,d\tau \qquad (2.10)$$

elde edilir. Konvolüsyonu Eşitlik (2.6) yerine Eşitlik (2.10) ile bulma çoğu kez daha kolaydır. Konvolüsyon işleminin (Eşitlik 2.6) aşağıdaki dört adımdan oluştuğu görülmektedir.

1. $h(\tau)$ dürtü tepkisi zamana göre ters çevrilerek (orijine göre yansıtılarak) $h(-\tau)$ elde edilir. Daha sonra t parametreli, τ'nun bir fonksiyonu olan $h(t-\tau)=h[-(\tau-t)]$'yi oluşturmak için t birim kaydırılır.
2. t parametresi sabit tutularak $x(\tau)$ ve $h(t-\tau)$ sinyalleri, τ'nun tüm değerleri için çarpılır.
3. $y(t)$ çıkışının tek bir değerini üretmek için $x(\tau)h(t-\tau)$ çarpımı tüm τ için entegre edilir.
4. $y(t)$ çıkışının tüm değerlerini üretmek için t'nin $-\infty$'dan $+\infty$'a kadar olan değerleri ile 1–3 adımları tekrarlanır.

Yukarıdaki konvolüsyon işlemine ilişkin örnekler Prob. 2.4-2.6'da verilmiştir.

2.4. Sürekli Zamanlı, DZD bir sistemin $x(t)$ girişi ve $h(t)$ dürtü tepkisi

$$x(t) = u(t); \qquad h(t) = e^{-\alpha t}u(t), \ \alpha > 0 \ \text{olarak verilmiştir.}$$

(a) Eşitlik (2.6)'yı kullanarak $y(t)$'yi hesaplayınız.

(b) Eşitlik (2.10)'u kullanarak $y(t)$'yi hesaplayınız.

(a) Eşitlik (2.6)'yı kullanarak

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)\,d\tau$$

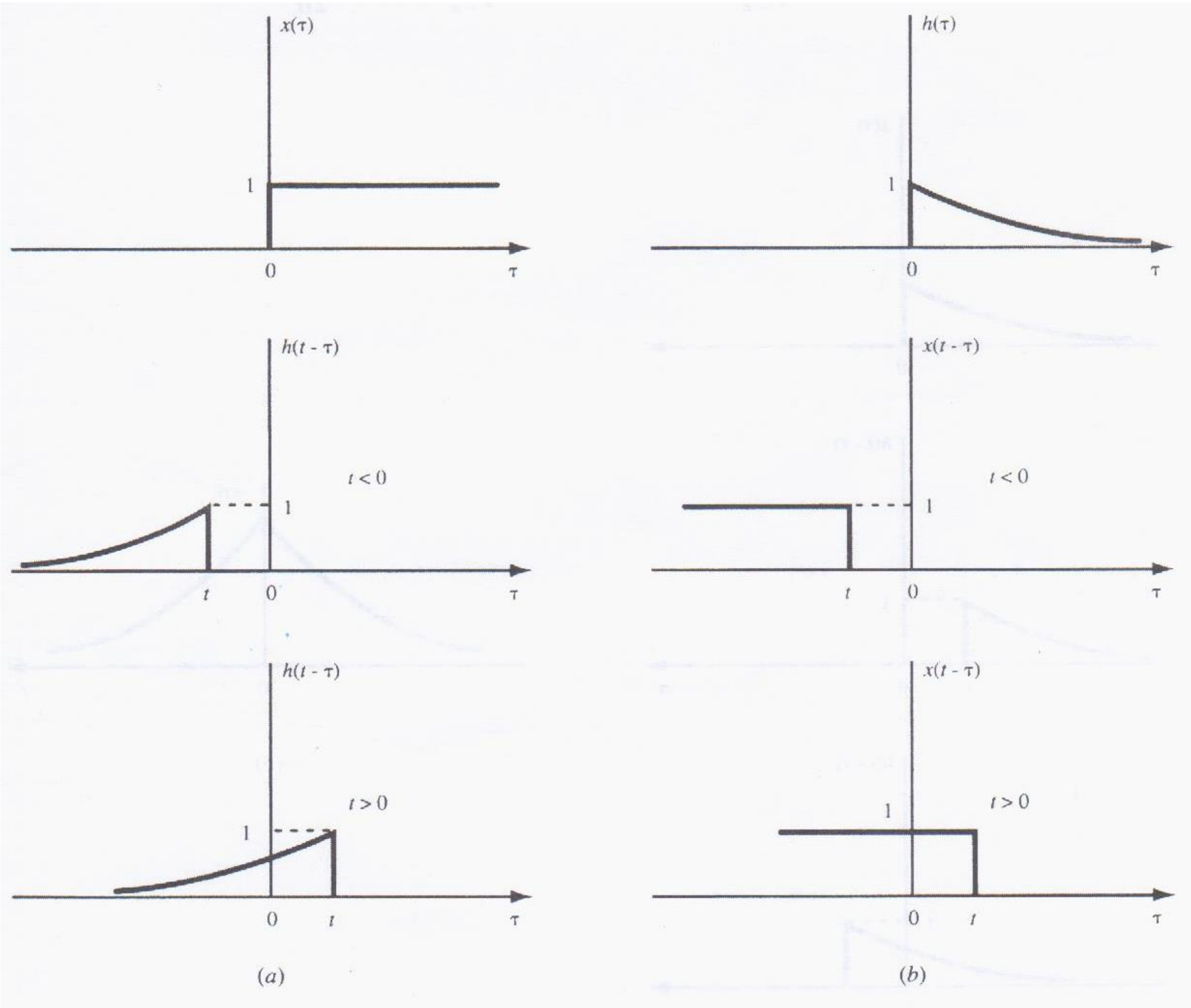
bulunur. $t<0$ ve $t>0$ için $x(\tau)$ ve $h(t-\tau)$ fonksiyonları Şekil 2-41(a)'da gösterilmiştir. Burada $t<0$ için $x(\tau)$ ve $h(t-\tau)$'nun örtüşmediği, $t>0$ için ise $\tau = 0$ ve $\tau = t$ aralığında örtüştüğü görülmektedir. Bu nedenle $t<0$ için $y(t)=0$ olup $t>0$ için $y(t)$

$$y(t) = \int_0^t e^{-\alpha(t-\tau)}\,d\tau = e^{-\alpha t}\int_0^t e^{\alpha\tau}\,d\tau$$

$$= e^{-\alpha t}\frac{1}{\alpha}(e^{\alpha t}-1) = \frac{1}{\alpha}(1-e^{-\alpha t})$$

olduğundan, $y(t)$ çıkışı şöyle ifade edilebilir.

$$y(t) = \frac{1}{\alpha}(1-e^{-\alpha t})u(t) \qquad (2.64)$$



Şekil. 2-4

(b) Eşitlik (2.10) kullanılarak

$$y(t) = h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)\,d\tau$$

bulunur. $t<0$ ve $t>0$ için $h(t)$ ve $x(t-\tau)$ fonksiyonları Şekil 2-4(b)'de gösterilmiştir. Burada da $t<0$ için $h(\tau)$ ve $x(t-\tau)$ 'nun örtüşmediği, $t>0$ için ise $\tau = 0$ ve $\tau = t$ aralığında örtüştüğü görülmektedir. Bu nedenle, $t<0$ için $y(t)=0$ olup $t>0$ için $y(t)$

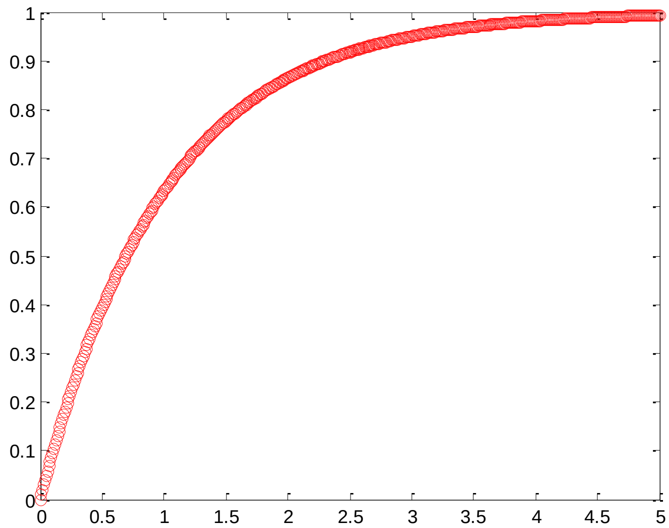
$$y(t) = \int_0^t e^{-\alpha\tau}\,d\tau = \frac{1}{\alpha}(1 - e^{-\alpha t})$$

olduğundan, $y(t)$ çıkışı şöyle ifade edilebilir ki, bu, Eşitlik (2.64) ile verilenin aynısıdır.

$$y(t) = \frac{1}{\alpha}(1 - e^{-\alpha t})u(t) \tag{2.65}$$

alfa=1 alarak Sonucu Matlab'da çizdirelim,

```
a=1;
t=0:0.01:5;
y=(1/a)*(1-exp(-a*t));
plot(t,y,'ro')
```



2.2. Aşağıdaki ifadelerin doğruluğunu gösteriniz.

(a) $x(t) * \delta(t) = x(t)$ (2.58)

(b) $x(t) * \delta(t - t_0) = x(t - t_0)$ (2.59)

(c) $x(t) * u(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)\,d\tau$ (2.60)

(d) $x(t) * u(t - t_0) = \int_{-\infty}^{t - t_0} x(\tau)\,d\tau$ (2.61)

2.5. $h(t)$ dürtü tepkisi ve $x(t)$ girişi aşağıda verilen sürekli zamanlı, DZD bir sistemin $y(t)$ çıkışını hesaplayınız.

$$h(t) = e^{-\alpha t}u(t) \qquad x(t) = e^{\alpha t}u(-t) \qquad \alpha > 0$$

Eşitlik (2.6) kullanılarak

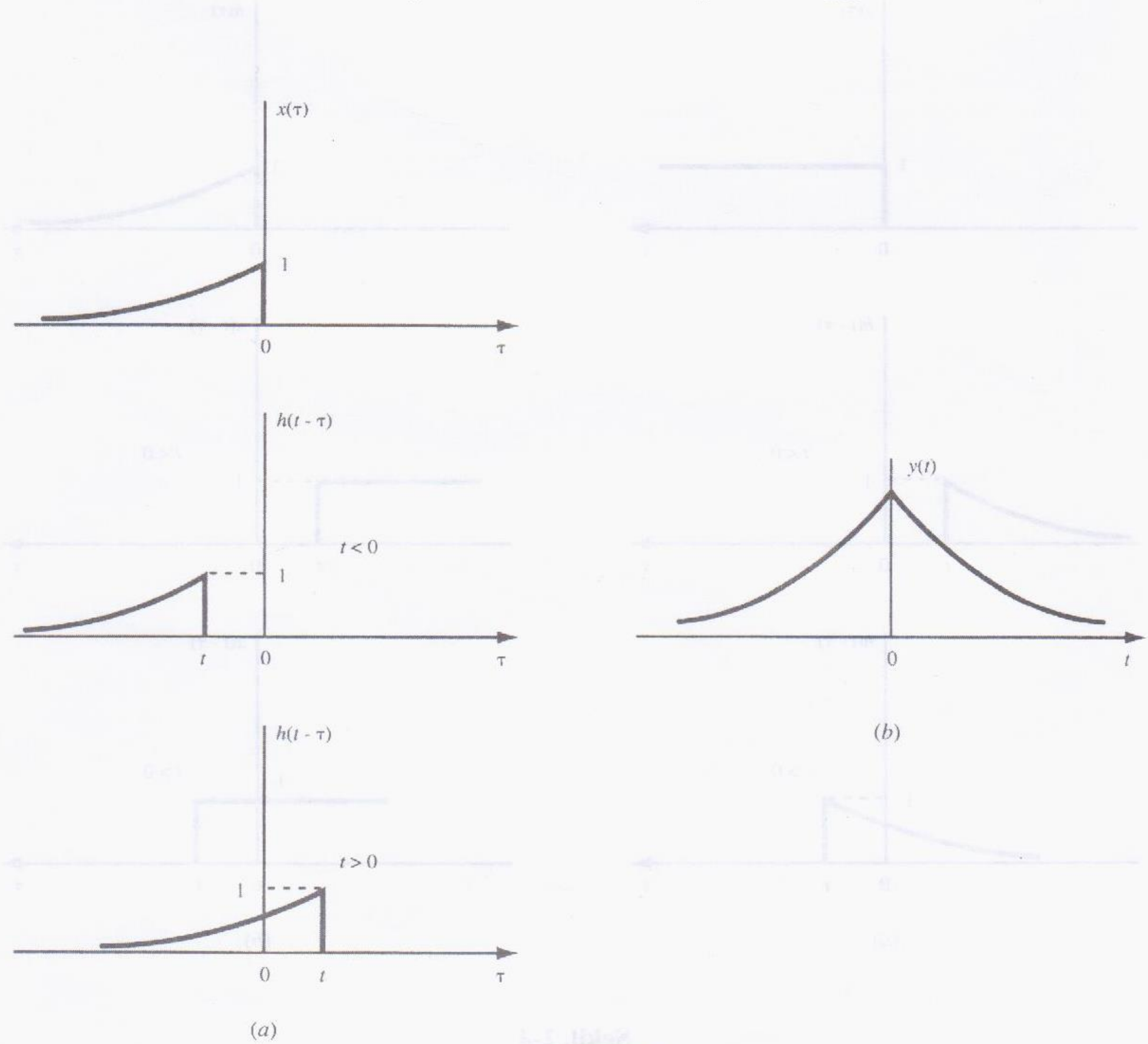
$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)\,d\tau$$

yazılır. $t<0$ ve $t>0$ için çizimleri Şekil 2.5(a)'da verilen $x(\tau)$ ve $h(t-\tau)$ fonksiyonlarının, $t<0$ için $\tau = -\infty$ ve $\tau = t$, $t>0$ için ise $\tau = -\infty$ ve $\tau = 0$ aralıklarında örtüştüğü görülmektedir. O halde $t<0$ için

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{\alpha\tau}e^{-\alpha(t-\tau)}\,d\tau = e^{-\alpha t}\int_{-\infty}^{t} e^{2\alpha\tau}\,d\tau = \frac{1}{2\alpha}e^{\alpha t} \qquad (2.66a)$$

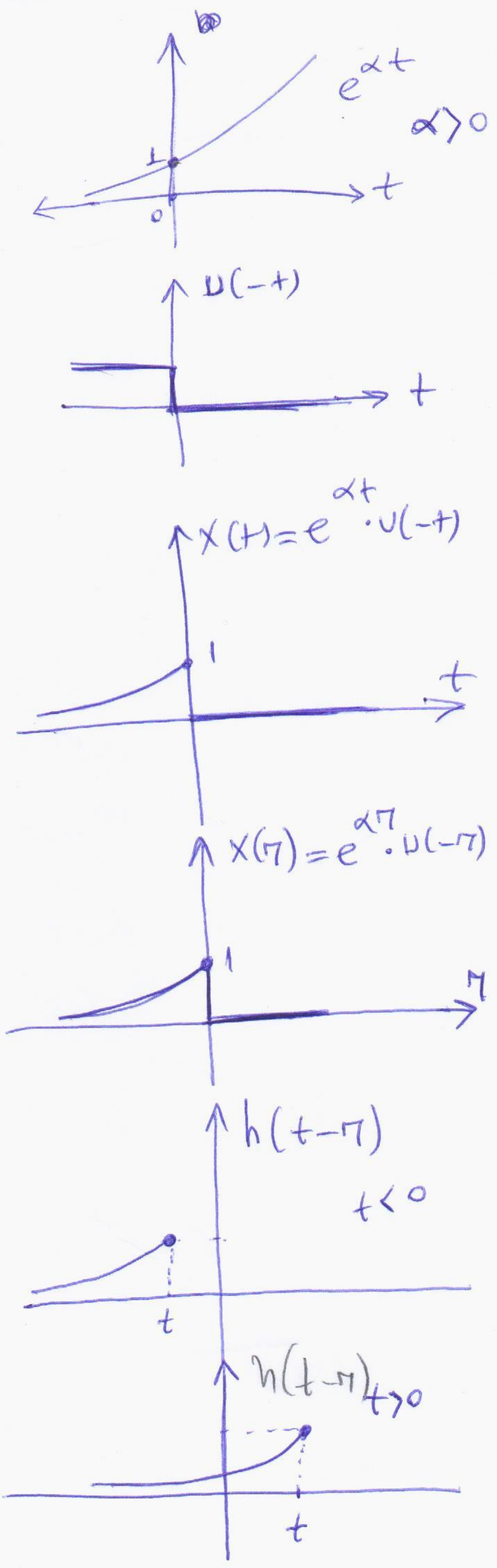
ve $t>0$ için

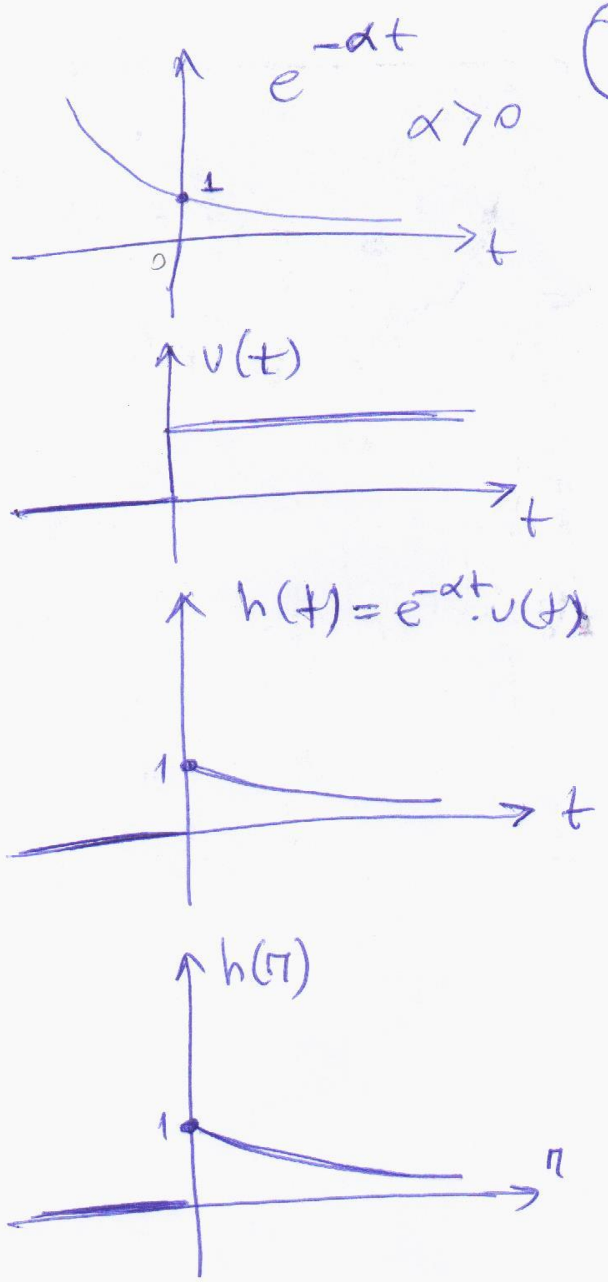
$$y(t) = \int_{-\infty}^{0} e^{\alpha\tau}e^{-\alpha(t-\tau)}\,d\tau = e^{-\alpha t}\int_{-\infty}^{0} e^{2\alpha\tau}\,d\tau = \frac{1}{2\alpha}e^{-\alpha t} \qquad (2.66b)$$



Şekil 2-5

1





$$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\cdot h(t-\tau)\cdot d\tau$$

$t<0$ iken $x(\tau)$ ve $h(t-\tau)$ $-\infty$ ve t aralığında örtüşüyor

$$y(t)=\int_{-\infty}^{t} e^{\alpha\tau}\cdot e^{-\alpha(t-\tau)}\cdot d\tau$$

$$= e^{-\alpha t}\int_{-\infty}^{t} e^{\alpha\tau}\cdot e^{\alpha\tau}\cdot d\tau$$

$$= e^{-\alpha t}\int_{-\infty}^{t} e^{2\alpha\tau}\cdot d\tau$$

$$y(t) = e^{-\alpha t}\cdot\frac{1}{2\alpha}\,e^{2\alpha\eta}\Big|_{-\infty}^{t} = \frac{e^{-\alpha t}}{2\alpha}\cdot\left(e^{2\alpha t} - e^{-2\alpha\cdot\infty}\right)$$

$\alpha > 0$ old sıfıra gider

$$y(t) = \frac{e^{\alpha t}}{2\alpha}$$

$t>0$ iken $-\infty$ ve 0 aralığında örtüşüyor (2)

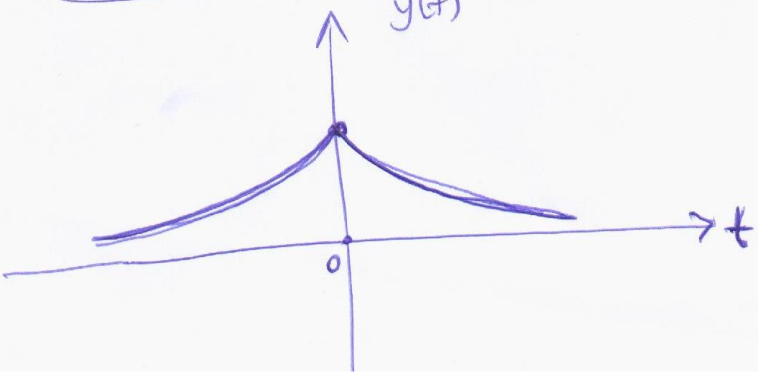
$$y(t) = \int_{-\infty}^{0} e^{\alpha\eta}\cdot e^{-\alpha(t-\eta)}\,d\eta$$

$$= e^{-\alpha t}\int_{-\infty}^{0} e^{\alpha\eta}\cdot e^{\alpha\eta}\,d\eta$$

$$= e^{-\alpha t}\cdot\frac{1}{2\alpha}\,e^{2\alpha\eta}\Big|_{-\infty}^{0} = \frac{e^{-\alpha t}}{2\alpha}\left(\overbrace{e^{2\alpha\cdot 0}}^{1\text{'dir}} - e^{-2\alpha\cdot\infty}\right)$$

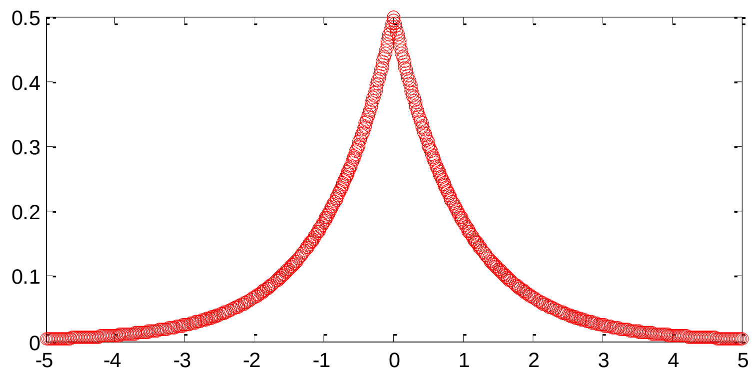
$\alpha > 0$ old ~~sıfıra~~ sıfırdır

$$\boxed{y(t) = \frac{e^{-\alpha\cdot t}}{2\alpha}, \quad t>0 \text{ iken}}$$



alfa=1 alarak Sonucu Matlab'da çizdirelim,

```
a=1;
t1=-5:0.01:0;
y1=(1/(2*a))*(exp(a*t1));
t2=0:0.01:5;
y2=(1/(2*a))*(exp(-a*t2));
plot(t1,y1,'ro',t2,y2,'ro')
```



2.6. Evaluate $y(t)=x(t)*h(t)$, where $x(t)$ and $h(t)$ are shown in Fig. 2-6, (*a*) by an analytical technique, and (*b*) by a graphical method.

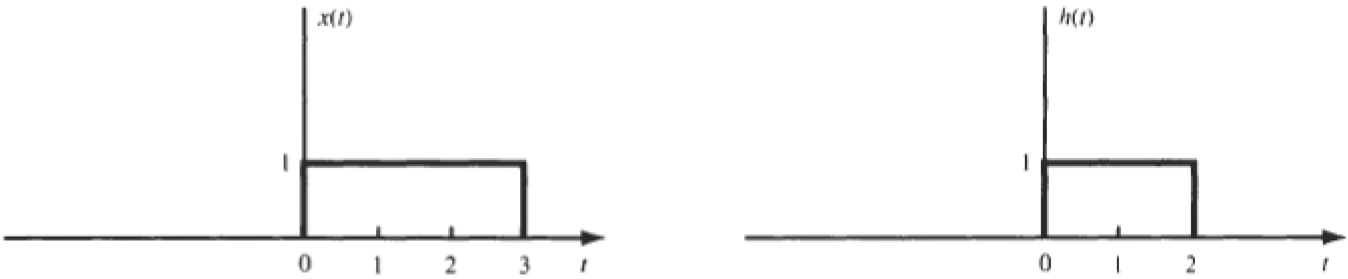


Fig. 2-6

(*a*) We first express $x(t)$ and $h(t)$ in functional form:

$$x(t)=u(t)-u(t-3) \qquad h(t)=u(t)-u(t-2)$$

Then, by Eq. (*2.6*) we have

$$y(t)=x(t)*h(t)=\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)\,d\tau$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}[u(\tau)-u(\tau-3)][u(t-\tau)-u(t-\tau-2)]\,d\tau$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)u(t-\tau)\,d\tau-\int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)u(t-2-\tau)\,d\tau$$

$$-\int_{-\infty}^{\infty} u(\tau-3)u(t-\tau)\,d\tau+\int_{-\infty}^{\infty} u(\tau-3)u(t-2-\tau)\,d\tau$$

Since

$$u(\tau)u(t-\tau)=\begin{cases}1 & 0<\tau<t,\ t>0\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}$$

$$u(\tau)u(t-2-\tau)=\begin{cases}1 & 0<\tau<t-2,\ t>2\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}$$

$$u(\tau-3)u(t-\tau)=\begin{cases}1 & 3<\tau<t,\ t>3\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}$$

$$u(\tau-3)u(t-2-\tau)=\begin{cases}1 & 3<\tau<t-2,\ t>5\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}$$

we can express $y(t)$ as

$$y(t) = \left(\int_0^t d\tau\right)u(t) - \left(\int_0^{t-2} d\tau\right)u(t-2)$$

$$- \left(\int_3^t d\tau\right)u(t-3) + \left(\int_3^{t-2} d\tau\right)u(t-5)$$

$$= tu(t) - (t-2)u(t-2) - (t-3)u(t-3) + (t-5)u(t-5)$$

which is plotted in Fig. 2-7.

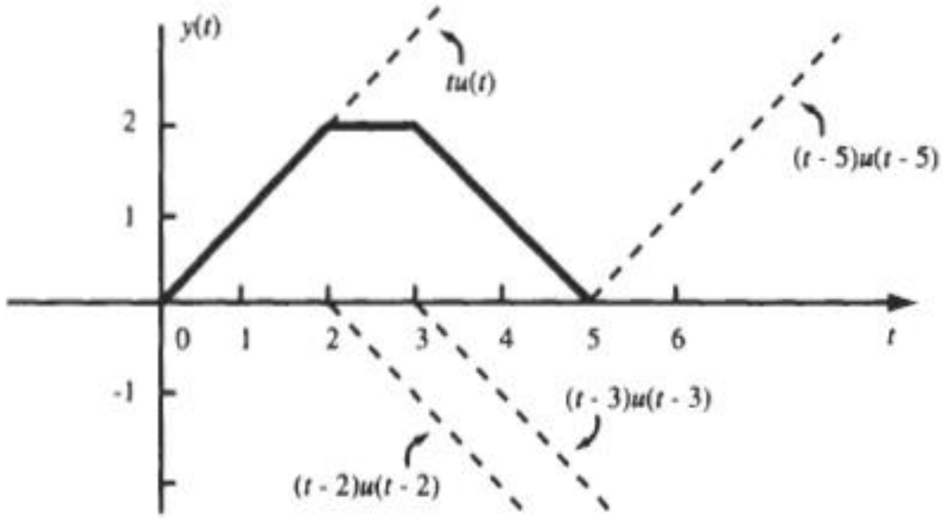


Fig. 2-7

(b) Functions $h(\tau)$, $x(\tau)$ and $h(t-\tau)$, $x(\tau)h(t-\tau)$ for different values of t are sketched in Fig. 2-8. From Fig. 2-8 we see that $x(\tau)$ and $h(t-\tau)$ do not overlap for $t<0$ and $t>5$, and hence $y(t)=0$ for $t<0$ and $t>5$. For the other intervals, $x(\tau)$ and $h(t-\tau)$ overlap. Thus, computing the area under the rectangular pulses for these intervals, we obtain

$$y(t) = \begin{cases} 0 & t<0 \\ t & 0<t\le 2 \\ 2 & 2<t\le 3 \\ 5-t & 3<t\le 5 \\ 0 & 5<t \end{cases}$$

which is plotted in Fig. 2-9.

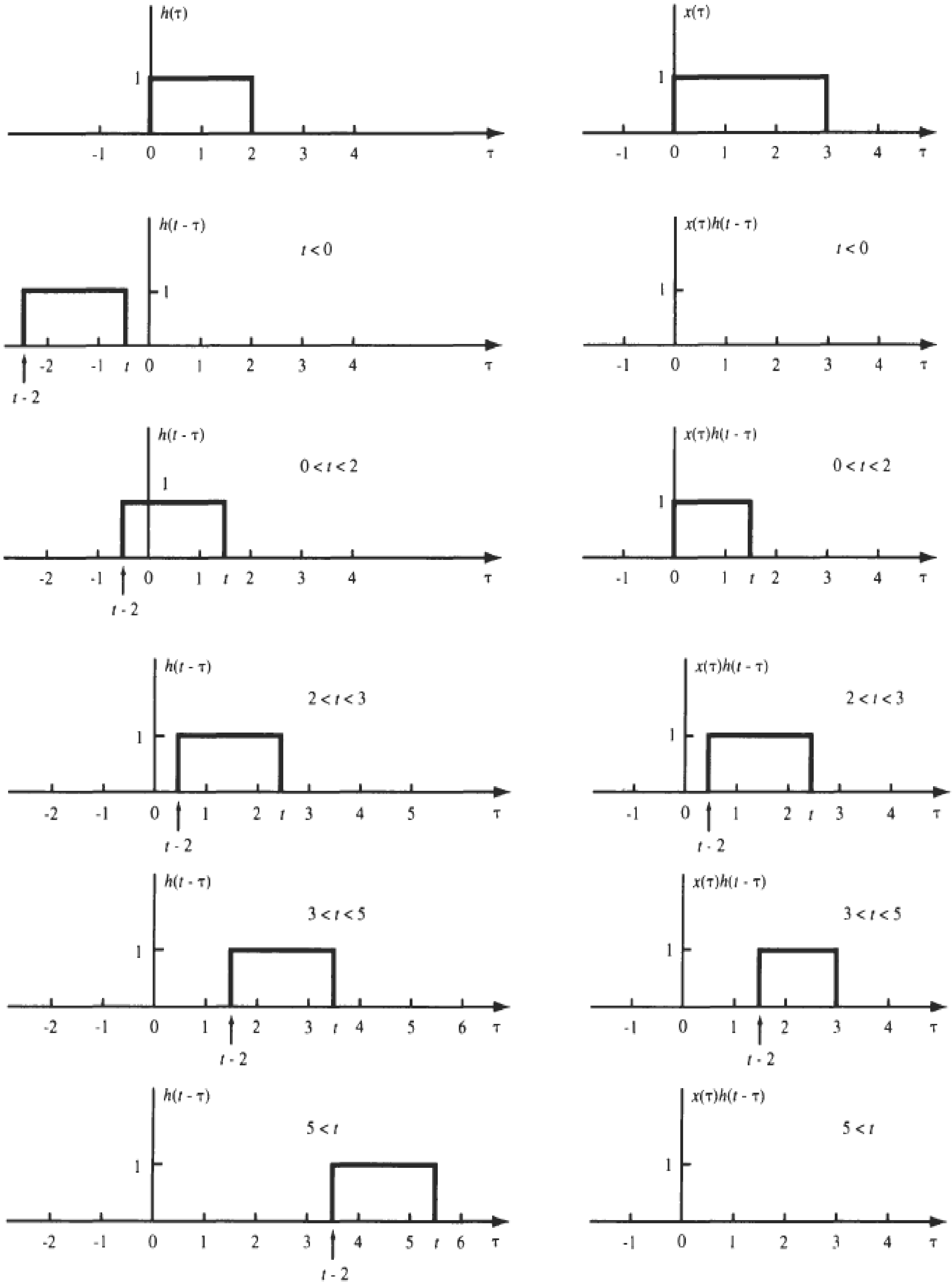


Fig. 2-8

ÇALIŞMA ÖDEVİ:

SCHAUM – SİNYALLER VE SİSTEMLER KİTABI,
ÇÖZÜMLÜ PROBLEM 2.7 ve 2.8’i İNCELEYİNİZ

F. Basamak Tepkisi:

T ile gösterilen sürekli zamanlı, DZD bir sistemin $s(t)$ basamak tepkisi; giriş $u(t)$ olduğundaki sistem tepkisi olarak tanımlanır. Diğer bir deyişle:

$$s(t) = \mathbf{T}\{u(t)\} \qquad (2.11)$$

Çoğu uygulamalarda $s(t)$ basamak tepkisi de yararlı bir sistem tanımıdır. Eşitlik (2.10) kullanılarak $s(t)$ basamak tepkisi kolayca saptanabilir.

$$s(t) = h(t) * u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)u(t-\tau)\,d\tau = \int_{-\infty}^{t} h(\tau)\,d\tau \qquad (2.12)$$

O halde, $h(t)$ dürtü tepkisi entegre edilirse $s(t)$ basamak tepkisi elde edilir. Eşitlik (2.12)'nin t'ye göre türevi alınırsa

$$h(t) = s'(t) = \frac{ds(t)}{dt} \qquad (2.13)$$

olduğu görülür. O halde, $s(t)$ basamak tepkisinin türevi alınarak $h(t)$ dürtü tepkisi elde edilebilir.

2.3. SÜREKLİ ZAMANLI, DZD SİSTEMLERİN ÖZELLİKLERİ

A. Bellekli ya da Belleksiz Sistemler:

Belleksiz bir sistemin $y(t)$ çıkışı yalnızca o andaki $x(t)$ girişine bağımlı olduğundan, doğrusal ve zamanla değişmeyen bir sistem için bu ilişki yalnızca aşağıdaki biçimde ifade edilebilir.

$$y(t) = Kx(t) \qquad (2.14)$$

Burada K sistem kazancı olup bir sabittir. Dolayısıyla, sisteme ilişkin $h(t)$ dürtü tepkisi aşağıdaki sade ilişki ile tanımlanır.

$$h(t) = K\delta(t) \qquad (2.15)$$

Sonuç olarak, eğer $t \neq 0$ için $h(t) \neq 0$ ise sürekli zamanlı, DZD sistem belleklidir.

B. Nedensellik:

Bölüm 1.5 D'de açıklandığı üzere bir olay gerçekten oluşana kadar nedensel bir sistem bu giriş olayına tepki vermez. Bu nedenle nedensel, DZD bir sistem için

$$h(t) = 0 \qquad t < 0 \qquad (2.16)$$

(2.16) nedensellik koşulunu Eşitlik (2.10)'a uygulayarak, nedensel, sürekli zamanlı, DZD bir sistemin çıkışı aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$y(t) = \int_0^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)\,d\tau \qquad (2.17)$$

Ya da (2.16) nedensellik koşulunu Eşitlik (2.6)'ya uygulayarak $y(t)$ için şu alternatif ifade bulunur.

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)h(t-\tau)\,d\tau \qquad (2.18)$$

Eşitlik (2.18) göstermektedir ki, $y(t)$ çıkışını hesaplamak için kullanılan $x(t)$ girişinin değerleri yalnızca $\tau \le t$ koşulunu sağlayan giriş değerleridir. (2.16) koşuluna dayanarak, eğer:

$$x(t) = 0 \qquad t < 0 \qquad (2.19a)$$

ise bir $x(t)$ sinyali nedenseldir, eğer

$$x(t) = 0 \qquad t > 0 \qquad (2.19b)$$

ise nedensel değildir. Bu durumda, Eşitlik (2.17), (2.18) ve (2.19a) kullanılarak nedensel bir $x(t)$ girişi için nedensel, sürekli zamanlı, DZD bir sistemin çıkışı aşağıdaki gibi olacaktır.

$$y(t) = \int_0^{t} h(\tau)x(t-\tau)\,d\tau = \int_0^{t} x(\tau)h(t-\tau)\,d\tau \qquad (2.20)$$

C. Kararlılık:

DZD bir sistemin SGSÇ (Sınırlı giriş/sınırlı çıkış) kararlılığı (Bölüm 1.5H), onun dürtü tepkisinden kolayca irdelenebilir. Eğer dürtü tepkisi mutlak entegre edilebilir ise, yani

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)|\,d\tau < \infty \qquad (2.21)$$

koşulu sağlanıyor ise, sürekli zamanlı, DZD bir sistemin SGSÇ anlamında kararlı olduğu gösterilebilir (Prob. 2.13).

2.4. SÜREKLİ ZAMANLI, DZD SİSTEMLERİN ÖZFONKSİYONLARI

Bölüm 1 (Prob. 1.44)'de, **T** ile tanımlanan sürekli zamanlı, DZD sistemlerin özfonksiyonlarının, s bir karmaşık değişken olmak üzere, e^{st} biçimindeki karmaşık fonksiyonlar olduğu belirlenmişti. Bu durumda,

$$\mathbf{T}\{e^{st}\} = \lambda e^{st} \qquad (2.22)$$

olup, burada λ, T'nin e^{st}'ye ilişkin özdeğeridir. Eşitlik (2.10)'da $x(t)= e^{st}$ koyarak

$$y(t) = \mathbf{T}\{e^{st}\} = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\,e^{s(t-\tau)}\,d\tau = \left[\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\,e^{-s\tau}\,d\tau\right] e^{st}$$

$$= H(s)\,e^{st} = \lambda e^{st} \qquad (2.23)$$

bulunur. Burada $\lambda = H(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\,e^{-s\tau}\,d\tau \qquad (2.24)$

O halde, sürekli zamanlı, DZD bir sistemin e^{st} özfonksiyonuna ilişkin özdeğeri karmaşık bir sabit olan $H(s)$ olup değeri, s'nin ilgili değeri kullanılarak Eşitlik (2.24) ile hesaplanır. Eşitlik (2.23)'den $y(0)= H(s)$ olduğuna dikkat ediniz. (bkz. Prob. 1.44).

Yukarıdaki sonuçlar Bölüm 3 ve 5'de incelenen Laplace ve Fourier dönüşüm tanımlarının temelini oluşturmaktadır.

2.5. TÜREVSEL DENKLEMLERLE TANIMLANAN SİSTEMLER

A. Doğrusal, Sabit Katsayılı Türevsel Denklemler:

N. mertebeden, doğrusal, sabit katsayılı, genel bir türevsel denklem

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^{M} b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k} \tag{2.25}$$

biçiminde verilmiş olsun. Burada a_k ve b_k katsayıları gerçel sabitlerdir. Eşitlik (2.25)'de N, $y(t)$'nin en yüksek türev derecesini gösterir. Bu tür türevsel denklemler; elektrik, mekanik, kimyasal ve biyolojik alanlardaki farklı sistemlere ilişkin giriş-çıkış ilişkilerini tanımlamada önemli bir rol üstlenir. Örneğin Prob. 1.32'deki RC devresinde $x(t)=v_s(t)$ girişi ve $y(t)=v_c(t)$ çıkışı, birinci mertebeden, sabit katsayılı bir denklem ile ilişkilendirilebilir [Eşitlik (1.105)].

$$\frac{dy(t)}{dt} + \frac{1}{RC} y(t) = \frac{1}{RC} x(t)$$

Belirli bir $x(t)$ girişi için Eşitlik (2.25)'in genel çözümü

$$y(t) = y_p(t) + y_h(t) \tag{2.26}$$

biçiminde olup, $y_p(t)$, Eşitlik (2.25)'i sağlayan bir özel çözüm, $y(t)$ ise aşağıdaki homojen türevsel denklemi sağlayan bir homojen (ya da komplimenter) çözümdür.

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y_h(t)}{dt^k} = 0 \tag{2.27}$$

$y_h(t)$'nin kesin biçimini N adet yardımcı koşul belirler. Yardımcı koşullar tanımlamadan Eşitlik (2.25)'in, $y(t)$ çıkışını $x(t)$ cinsinden tümüyle belirlemediğine dikkat ediniz. Genel olarak, bu yardımcı koşullar

$$y(t), \frac{dy(t)}{dt}, \ldots, \frac{d^{N-1} y(t)}{dt^{N-1}}$$

değişkenlerinin belirli bir t anındaki değerleridir.

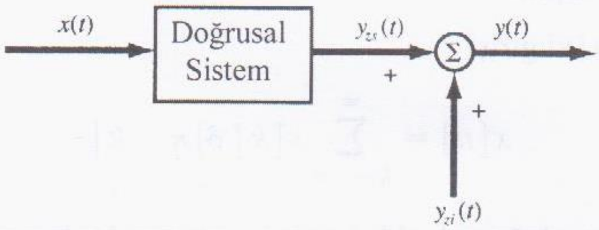
B. Doğrusallık:

Eğer yardımcı koşulların tümü sıfır ise Eşitlik (2.25) ile tanımlanan sistem doğrusaldır (bkz. Prob. 2.21). Eğer yardımcı koşullar sıfır değilse, sistemin $y(t)$ tepkisi

$$y(t) = y_{zi}(t) + y_{zs}(t) \tag{2.28}$$

biçiminde ifade edilebilir. Burada; $y_{zi}(t)$, sistemin verilen yardımcı koşulların ilişkin sıfır giriş tepkisi, $y_{zs}(t)$, ise sıfır yardımcı koşullara sahip, doğrusal bir sistemin sıfır durum tepkisidir [Şekil 2.2].

$y_{zi}(t) \neq y_h(t)$ ve $y_{zs}(t) \neq y_p(t)$ olduğuna dikkat ediniz. Genel olarak $y_{zi}(t)$, $y_h(t)$'yi, $y_{zs}(t)$ ise hem $y_h(t)$'yi hem de $y_p(t)$'yi içermektedir (bkz. Prob. 2.20).



Şekil 2.2 Sıfır durum ve sıfır giriş tepkileri

C. Nedensellik:

Eşitlik (2.25) ile tanımlanan bir doğrusal sistemin nedensel olması için başlangıçta durgun olmak koşulunu (ya da ilk enerjisiz olma koşulu) varsaymamız gerekir. Diğer bir deyişle, $t \le t_0$ için $x(t)=0$ ise yine $t \le t_0$ için $y(t)=0$ olduğunu varsayınız (Prob. 1.43). Bu durumda $t > t_0$ için tepki aşağıdaki başlangıç koşullarını kullanarak Eşitlik (2.25)den hesaplanabilir.

$$y(t_0) = \frac{dy(t_0)}{dt} = \cdots = \frac{d^{N-1}y(t_0)}{dt^{N-1}} = 0$$

Burada: $$\frac{d^k y(t_0)}{dt^k} = \left.\frac{d^k y(t)}{dt^k}\right|_{t=t_0}.$$

Açıkça görülmektedir ki başlangıçta durgun olan bir sistemde $y_{zi}(t) = 0$'dır.

D. Zamanla Değişmezlik:

Bir doğrusal nedensel sistemde başlangıçta durgunluk onun zamanla değişmezliğini de ima eder (Prob. 2.22).

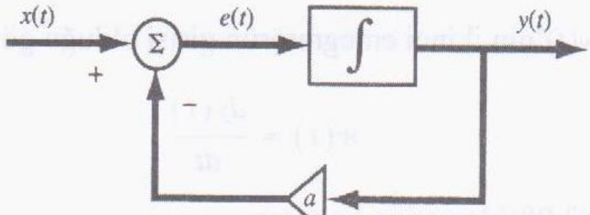
E. Dürtü Tepkisi:

Eşitlik (2.25) ile tanımlanan sürekli zamanlı, DZD bir sistemin $h(t)$ dürtü tepkisi, başlangıçta durgun olma koşuluyla birlikte aşağıdaki eşitliği sağlar.

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k h(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^{M} b_k \frac{d^k \delta(t)}{dt^k} \qquad (2.29)$$

Dürtü tepkisini hesaplama örnekleri Prob. (2. 29) ve (2.24)'de verilmiştir. Daha sonraki bölümlerde dürtü tepkisi dönüşüm teknikleri kullanılarak bulunacaktır.

2.18. Bir entegratör ve bir skalar çarpıcıdan oluşan sürekli zamanlı bir sistem için $y(t)$ çıkışı ile $x(t)$ girişi arasındaki ilişkiyi veren türevsel denklemi bulunuz (Şekil 2-18).



Şekil 2-18

Şekil 2-18'deki entegratör girişi $e(t)$ olarak seçilirse, entegratörün giriş ve çıkış ilişkisi

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} e(\tau)\, d\tau \qquad (2.94)$$

olduğundan bu eşitliğin iki tarafının t'ye göre türevi alınırsa

$$\frac{dy(t)}{dt} = e(t) \qquad (2.95)$$

olur. Daha sonra, yine Şekil 2-18'den entegratör girişi $e(t)$

$$e(t) = x(t) - ay(t) \qquad (2.96)$$

olarak yazılabilir. Eşitlik (2.96), Eşitlik (2.95)'de yerine konursa

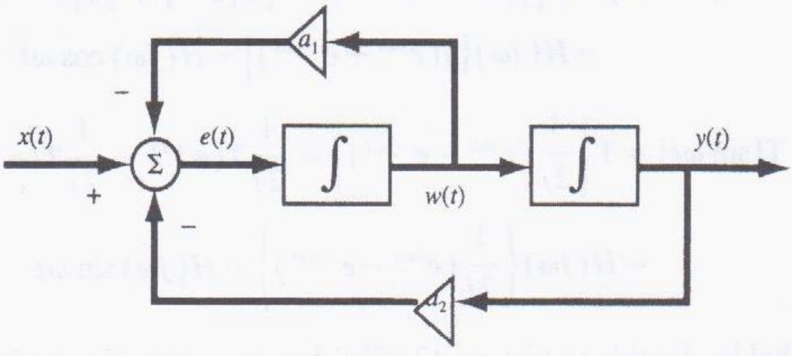
$$\frac{dy(t)}{dt} = x(t) - ay(t)$$

ya da

$$\frac{dy(t)}{dt} + ay(t) = x(t) \qquad (2.97)$$

elde edilir. Bu istenen birinci mertebeden türevsel denklemdir.

2.19. Şekil 2-19'da verilen sürekli zamanlı sistem iki entegratör ve iki skalar çarpıcıdan oluşmuştur. $y(t)$ çıkışı ve $x(t)$ girişi arasındaki ilişkiyi tanımlayan türevsel denklemi yazınız.



Şekil 2-19

Şekil 2-19'da $e(t)$ ve $w(t)$ sırasıyla entegratörün girişini ve çıkışını temsil etsin. Eşitlik (2.95) kullanılarak birinci entegratörün girişi şöyle ifade edilir.

$$e(t) = \frac{dw(t)}{dt} = -a_1 w(t) - a_2 y(t) + x(t) \tag{2.98}$$

Yine Şekil 2-19'dan $w(t)$'nin ikinci entegratörün girişi olduğu görülmektedir.

$$w(t) = \frac{dy(t)}{dt} \tag{2.99}$$

Eşitlik (2.99), Eşitlik (2.98)'de yerine konursa

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} = -a_1 \frac{dy(t)}{dt} - a_2 y(t) + x(t)$$

ya da

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_2 y(t) = x(t) \tag{2.100}$$

bulunur ki bu istenen ikinci mertebeden türevsel denklemdir.

Not: Genel olarak, entegratörlerin ve skalar çarpıcıların bağlanmasından oluşan sürekli zamanlı, DZD bir sistemin mertebesi, sistemdeki entegratör sayısına eşittir.

2.20. a bir sabit olmak üzere sürekli zamanlı bir sistemde $x(t)$ girişi ve $y(t)$ çıkışı arasındaki ilişki aşağıda verilmiştir.

$$\frac{dy(t)}{dt} + ay(t) = x(t) \tag{2.101}$$

(a) $y(t)$ çıkışını bulunuz. Yardımcı koşul: $y(0) = y_0$ ve $x(t)$ girişi:

$$x(t) = Ke^{-bt}u(t) \tag{2.102}$$

(b) $y(t)$'yi sıfır giriş ve sıfır durum tepkileri cinsinden ifade ediniz.

(a)

$$y(t) = y_p(t) + y_h(t)$$

olsun. Burada $y_p(t)$, Eşitlik (2.101)'i sağlayan özel çözüm ve $y_h(t)$ ise aşağıdaki eşitliği sağlayan homojen çözümdür.

$$\frac{dy_h(t)}{dt} + ay_h(t) = 0 \tag{2.103}$$

$y_p(t)$ özel çözümünün

$$y_p(t) = Ae^{-bt} \qquad t > 0 \tag{2.104}$$

biçiminde olduğu varsayılırsa, Eşitlik (2.104), Eşitlik (2.101)'de yerine konarak

$$-bAe^{-bt} + aAe^{-bt} = Ke^{-bt}$$

yazılabileceğinden, $A = K/(a-b)$ ve

$$y_p(t) = \frac{K}{a-b}e^{-bt} \qquad t > 0 \tag{2.105}$$

elde edilir. $y_h(t)$'yi elde etmek için bunun

$$y_h(t) = Be^{st}$$

biçiminde olduğu varsayılırsa, bunun Eşitlik (2.103)'de yerine konulmasıyla

$$sBe^{st} + aBe^{st} = (s+a)Be^{st} = 0$$

yazılabilir. Buradan $s = -a$ ve

$$y_h(t) = Be^{-at}$$

bulunur. $y_p(t)$ ve $y_h(t)$'nin birleştirilmesi sonucu

$$y(t) = Be^{-at} + \frac{K}{a-b}e^{-bt} \qquad t > 0 \tag{2.106}$$

olur. $y(0) = y_0$ yardımcı koşulu Eşitlik (2.106)'da kullanılırsa

$$B = y_0 - \frac{K}{a-b}$$

olarak bulunur. O halde, Eşitlik (2.106) aşağıdaki biçimi alır.

$$y(t) = \left(y_0 - \frac{K}{a-b}\right)e^{-at} + \frac{K}{a-b}e^{-bt} \qquad t > 0 \tag{2.107}$$

$t < 0$ için $x(t) = 0$ olduğundan Eşitlik (2.101), Eşitlik (2.103)'e dönüşür. Bunun sonucu

$$y(t) = Be^{-at} \qquad t < 0$$

geçerli olup $y(0) = y_0$ yardımcı koşulu ile $y(t)$ aşağıdaki gibidir.

$$y(t) = y_0 e^{-at} \qquad t < 0 \tag{2.108}$$

(a) Eşitlik (2.107) ve (2.108)'in birleştirilmesiyle $y(t)$, sıfır giriş tepkisi $y_{zi}(t)$ ve sıfır durum tepkisi $y_{zs}(t)$ cinsinden

$$\begin{aligned} y(t) &= y_0 e^{-at} + \frac{K}{a-b}(e^{-bt} - e^{-at})u(t) \\ &= y_{zi}(t) + y_{zs}(t) \end{aligned} \tag{2.109}$$

olarak yazılabilir. Burada:

$$y_{zi}(t) = y_0 e^{-at} \tag{2.110a}$$

$$y_{zs}(t) = \frac{K}{a-b}(e^{-bt} - e^{-at})u(t) \tag{2.110b}$$

2.23. Prob. 2.20'deki sistemin $h(t)$ dürtü tepkisini bulunuz.

$h(t)$ dürtü tepkisi

$$\frac{dh(t)}{dt} + ah(t) = \delta(t) \qquad (2.120)$$

türevsel denklemini sağlamalıdır. Eşitlik (2.120)'nin $h_h(t)$ homojen çözümü de

$$\frac{dh_h(t)}{dt} + ah_h(t) = 0 \qquad (2.121)$$

eşitliğini sağlar. $h_h(t)$ için varsayılan tip çözümü

$$h_h(t) = ce^{st}$$

Eşitlik (2.121)'de yerine konursa, bulunacak olan

$$sce^{st} + ace^{st} = (s+a)ce^{st} = 0$$

ilişkisinden $s = -a$ ve

$$h_h(t) = ce^{-at}u(t) \qquad (2.122)$$

elde edilir. $h_p(t)$ sinyali $\delta(t)$ içeremeyeceğinden $h_p(t)$ özel çözümünün sıfır olması gerekir. Aksi halde $h(t)$, Eşitlik (2.120)'nin sağ tarafında bulunmayan $\delta(t)$'nin bir türevini içerecektir. O halde

$$h(t) = ce^{-at}u(t) \qquad (2.123)$$

c sabitini bulmak için Eşitlik (2.123)'ü Eşitlik (2.120)'de yerine koyalım.

$$\frac{d}{dt}\left[ce^{-at}u(t)\right] + ace^{-at}u(t) = \delta(t)$$

ya da

$$-ace^{-at}u(t) + ce^{-at}\frac{du(t)}{dt} + ace^{-at}u(t) = \delta(t)$$

ilişkisi Eşitlik (1.25) ve (1.30)'un ışığı altında irdelenirse

$$ce^{-at}\frac{du(t)}{dt} = ce^{-at}\,\delta(t) = c\delta(t) = \delta(t)$$

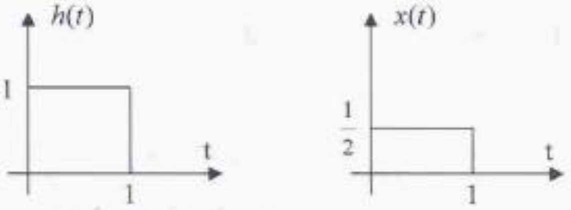
ve $c = 1$ bulunacaktır. O halde, dürtü tepkisi aşağıdaki gibidir.

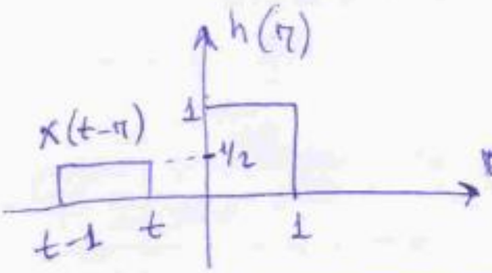
$$h(t) = e^{-at}u(t) \qquad (2.124)$$

ÇÖZÜMLÜ SORULAR

SORU 1)

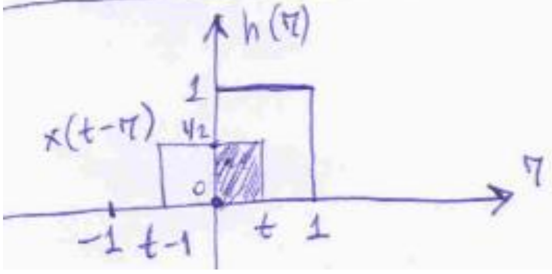
Doğrusal, Zamanla Değişmeyen bir sistemin dürtü cevabı $h(t)$ ve giriş $x(t)$ aşağıda verilmiştir. Sistemin $y(t)$ çıkışını Konvolüsyon integrali yardımı ile bulunuz?





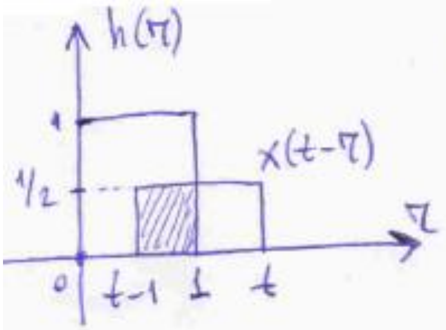
$t<0$ için örtüşme yok

$$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\cdot x(t-\tau)\cdot d\tau = 0$$



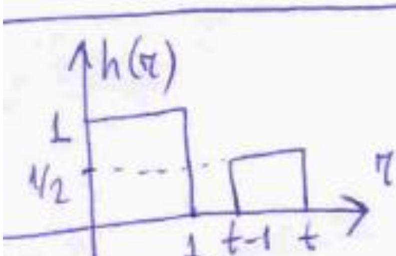
$0 \leq t \leq 1$

$$y(t)=\int_{0}^{t} 1\cdot\frac{1}{2}\, d\tau = \frac{t}{2}$$



$1 \leq t \leq 2$

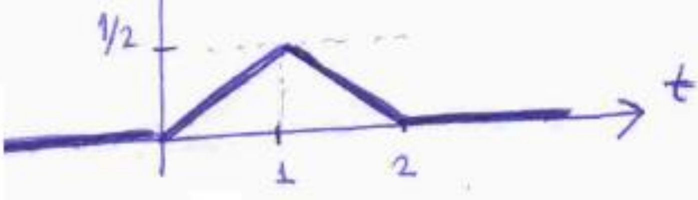
$$y(t)=\int_{t-1}^{1} 1\cdot\frac{1}{2}\cdot d\tau = 1-\frac{t}{2}$$



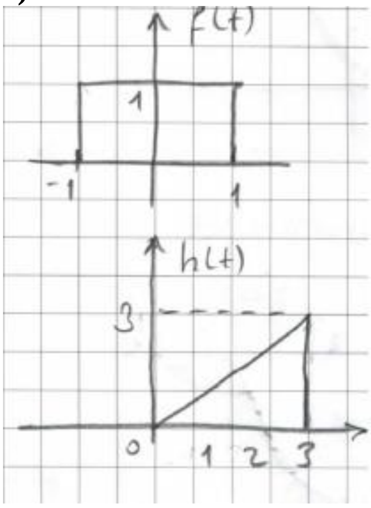
$t>2$ için örtüşme yok.

$$y(t)=0$$

$y(t)=h(t)*x(t)$

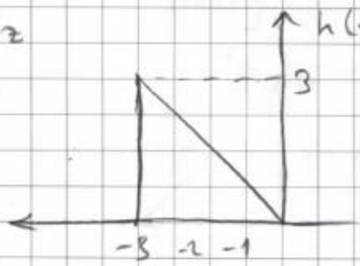


SORU 2)



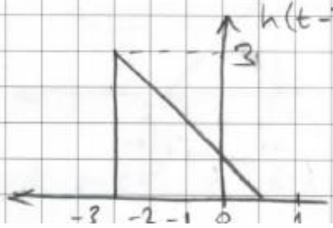
Doğrusal zamanla değişmeyen bir sistemin dürtü (darbe) cevabı h(t) ile belirtilmiştir. f(t) giriş işaretine karşı ortaya koyacağı cevabı katlama konvulsiyon integrali kullanarak hesaplayınız.

1 Adım h(t) yi düşey eksende katlayarak $h(-\tau)$ yu elde ederiz



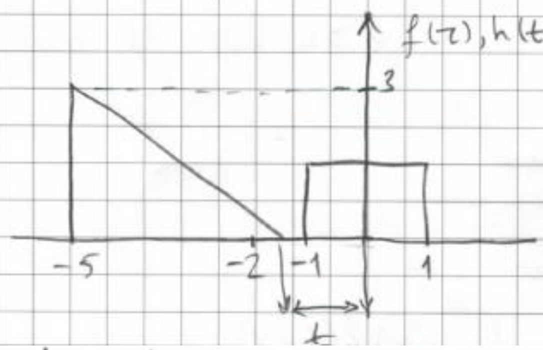
2 Adım - t -yi gerçek sayı gibi düşünerek

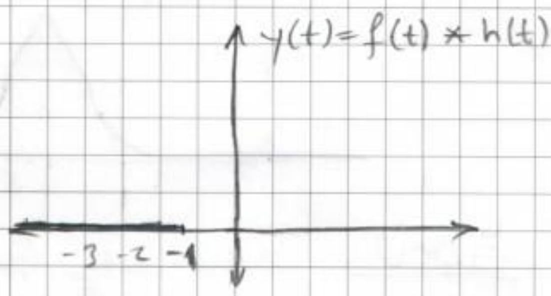
$h(t-\tau) = h(-(\tau-t))$ fonk. çizilir.



3 Adım- Basamak basamak $f(\tau)\,h(t-\tau)$ çarpımı yapılır.

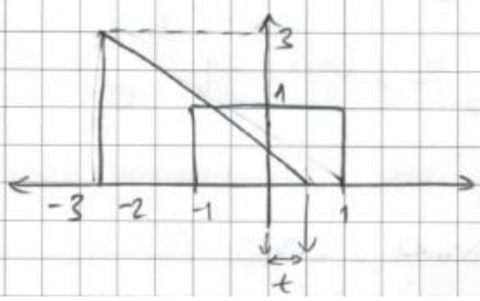
$t < -1$ için $f(\tau)$ ile $h(t-\tau)$'nun çarpımı bulunur.

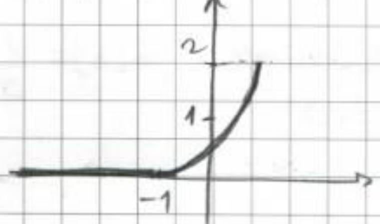




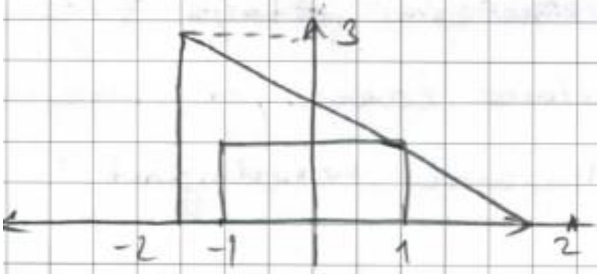
$$\int_{-\infty}^{1} f(\tau)\,h(t-\tau)\,d\tau = 0$$

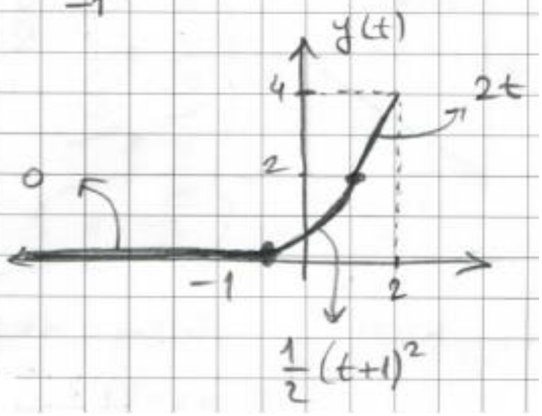
$-1 < t < 1$ $\quad y(t) = f(t) * h(t) = \int_{-1}^{t} 1.(t-\tau)\,d\tau = \frac{1}{2}(t+1)^2$





$1<t<2$ $\quad y(t) = f(t) * h(t) = \int_{-1}^{1} (t-\tau)\, d\tau = 2t$

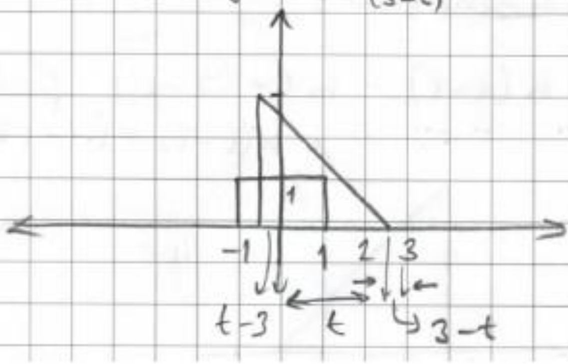


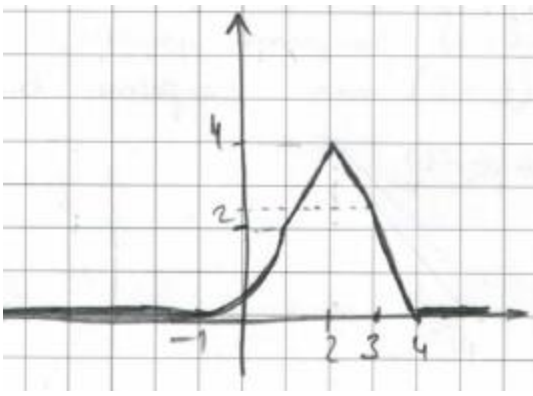


$2<t<4$ $\quad y(t) = \int_{-(3-t)}^{1} (t-\tau)\, d\tau = 4+t-\frac{1}{2}t^2$

$t=4 \Longrightarrow 4+t-\frac{1}{2}t^2$

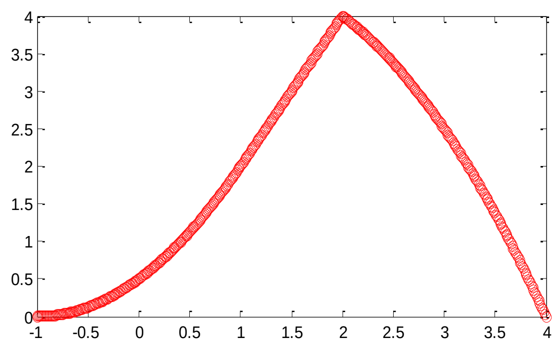
$8-\frac{1}{2}16 = 0$





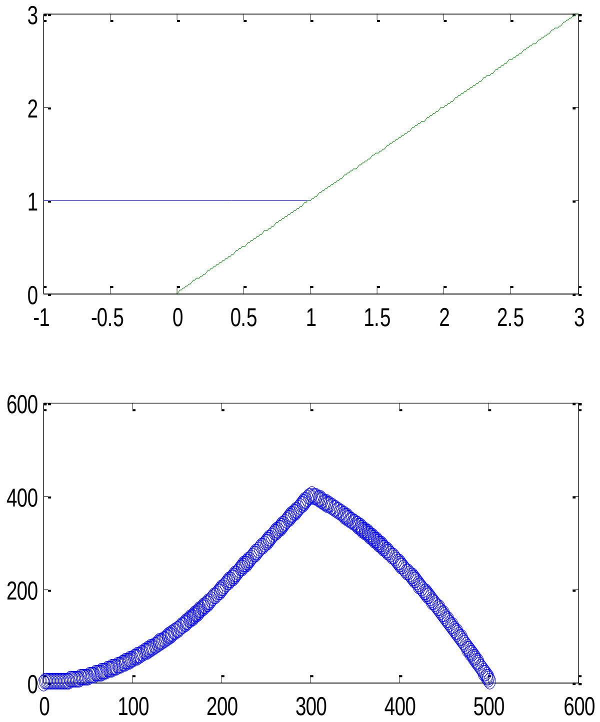
$t>4$ için 0 olur.

Matlab da çizdirelim.



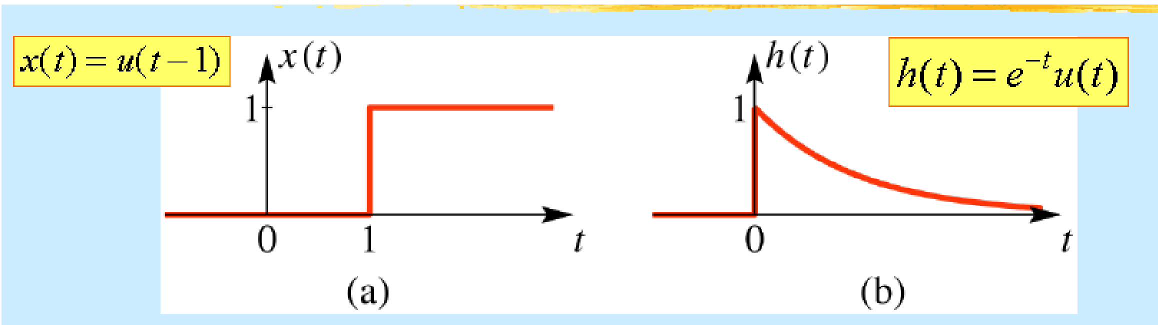

```
t1=-1:0.01:1;
y1=0.5.*(t1+1).^2;

t2=1:0.01:2;
y2=2.*t2;

t3=2:0.01:4;
y3=4+t3-0.5*t3.^2;

plot(t1,y1,'ro',t2,y2,'ro',t3,y3,'ro')
```

Yine Matlab da Ayrık zamanlı konvolusyon işlemi yapan **conv** komutunu aşağıdaki gib kullanarak konvolusyon sonucunu elde edebiliriz.



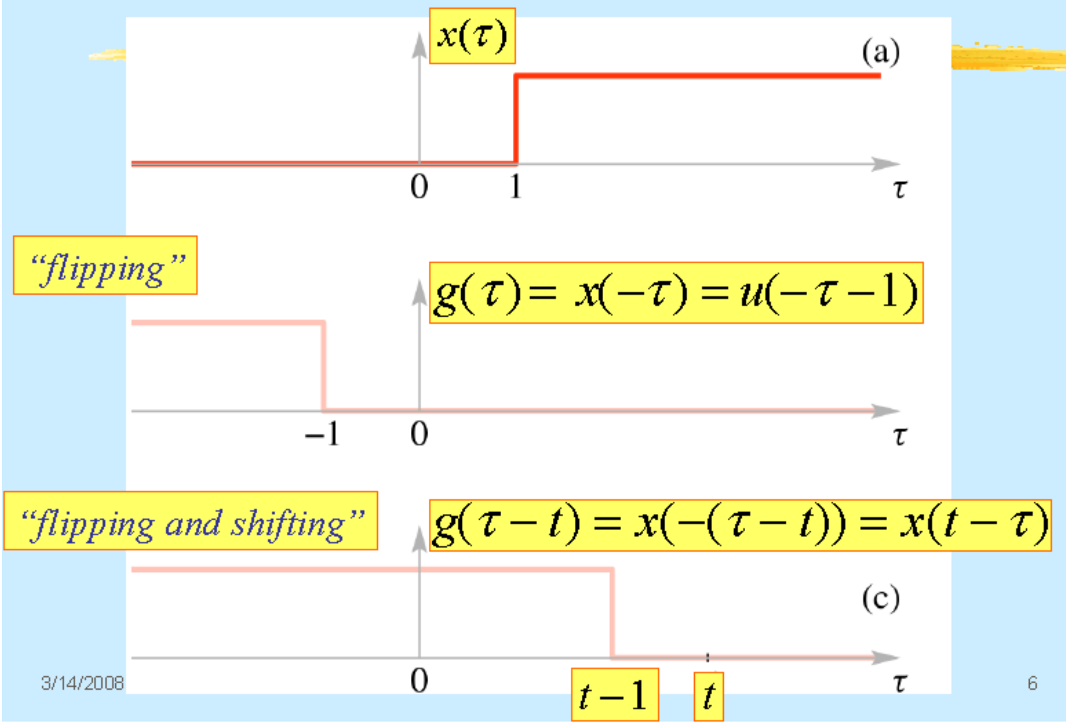

```
t1=-1:0.01:1;
f=ones(1,length(t1))

t2=0:0.01:3;
h=t2;

subplot(2,1,1)
plot(t1,f,t2,h)

y=conv(f,h)
subplot(2,1,2)
plot(y,'bo')
```

SORU 3)

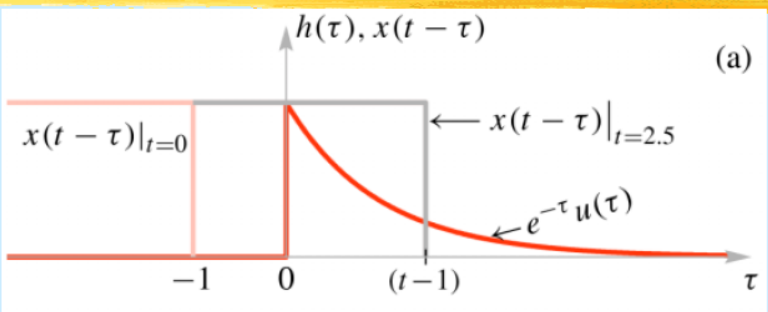


$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau = h(t) * x(t)$$

"Flipping and Shifting"



Evaluating the Integral

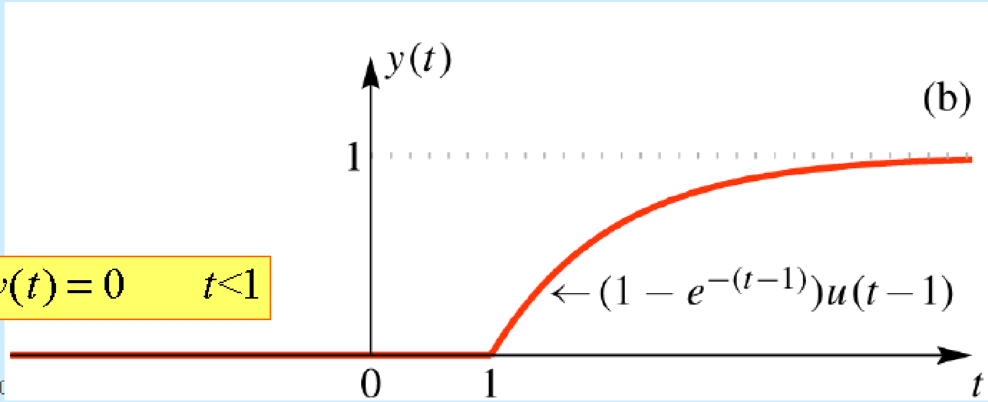


$$y(t) = \begin{cases} 0 & t-1<0 \\ \int_0^{t-1} e^{-\tau}d\tau & t-1>0 \end{cases}$$

3/14/2008

Solution

$$
\begin{aligned}
y(t) &= \int_0^{t-1} e^{-\tau} d\tau = -e^{-\tau}\Big|_0^{t-1} \\
&= 1 - e^{-(t-1)} \qquad t \geq 1
\end{aligned}
$$



$y(t) = 0 \qquad t < 1$