1.HAFTA

İşaretler, özellikleri ve sınıflandırılması

İşaret tanım ve özellikleri

İşaret: Fiziksel bir sistemin davranışına ya da durumuna ilişkin bilgi taşıyan, bir ya da daha fazla bağımsız değişkene bağlı olarak değişen her türlü büyüklüğe işaret diyoruz. Başka bir ifadeyle işaretler(sinyaller) zaman, uzay ve diğer bağımsız değişken veya değişkenler ile değişen herhangi bir fiziksel nitelik(fonksiyon) olarak tanımlanabilir.

İşaret: Bir ya daha fazla değişkene bağlı olarak değişen ve bilgi taşıyan bir işlev (fonksiyon).

Sistem: İşaretleri, üzerlerinde değişiklikler yaparak yeni işaretlere dönüştüren her türlü yapı.

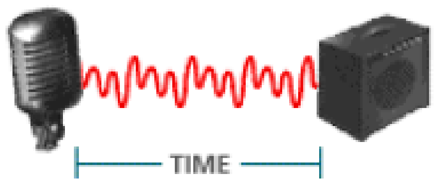
ÖRNEKLER:

- Elektrik işaretleri - Devrelerdeki akım, gerilim değişimi
- Akustik işaretler - Konuşma, ses veya müzik (analog/dijital)
- Biyoelektrik işaretler - EKG, Kan basıncı değişimi, genlerin dizilişi v.b.
- Video/İmge işaretleri – Bir imgede renk değişimi veya parlaklık değişimi
- Kontrol işaretleri – Kimyasal sistemlerde ısı veya sıcaklık değişimi
- Mekanik işaretler – Kuvvet, gerilme, yay titreşimi

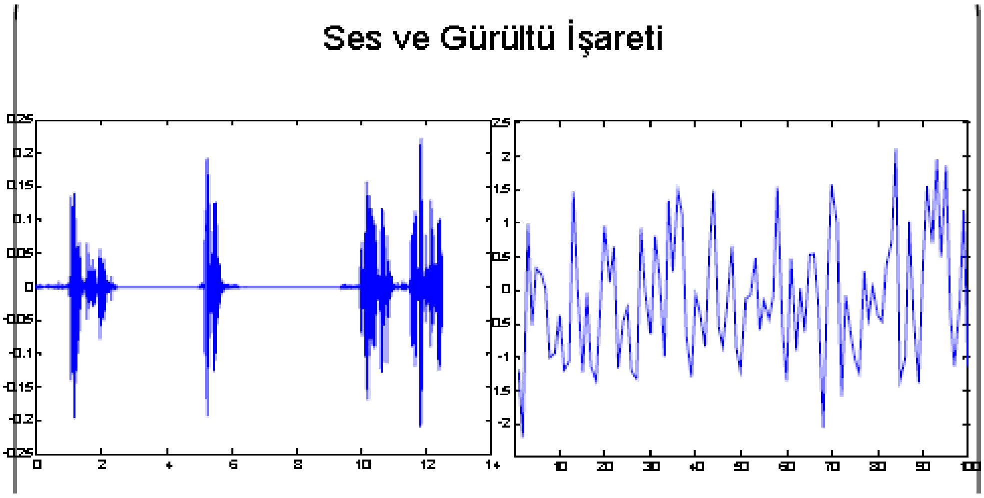
Radyo dalgaları ve elektrokardiyografi, işarete örnek olarak gösterilebildiği gibi, bir ülkedeki işsizlik oranı, bankaların faiz oranları ve uzay araçlarından yeryüzüne gönderilen görüntüler de işaret olarak kabul edilebilir.

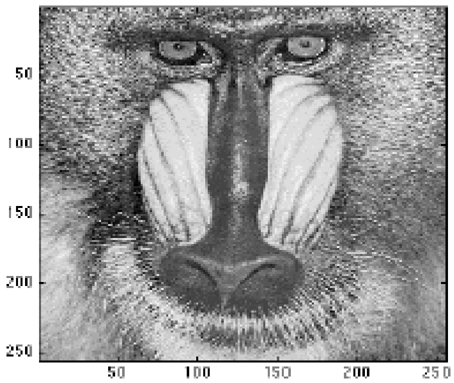
İşaretin boyutu:

İşaret bir, iki veya N bağımsız değişkenin fonksiyonu olabilir. Örneğin konuşma işareti ya da bankaların faiz oranları bir bağımsız değişkenin yani zamanın fonksiyonudur. Bu tür işaretler bir boyutlu işaretler olarak adlandırılacaktır. Dağıtılmış parametreli sistemlere ait işaretin değişkenlerinden biri zaman, diğerleri ise uzaysal boyutlardadır. Görüntü işaretinde ise her iki bağımsız değişken de uzaysal boyutludur. Biz bu derste, sadece zamana göre değişen bir boyutlu işaretleri inceleyeceğiz.



1-B (bir boyutlu) –
tek bir bağımsız değişkene bağlı olarak tanımlanan işaretler, bu bağımsız değişken genelde zaman olacaktır, ses yada konuşma işareti örnek verilebilir.





2-B (iki boyutlu) yada daha çok boyutlu işaretler
iki yada daha fazla bağımsız değişkene bağlı olarak tanımlanan işaretler, bir imge 2-B işarete, video işareti ise 3-B işarete örnek verilebilir.

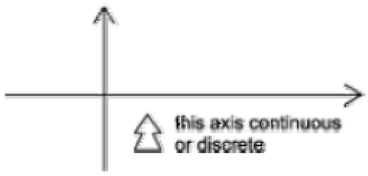
Bağımsız değişkenler;

- Sürekli değer alabilir
  - Devrelerdeki akımın zamana göre değişimi
  - Uzay mekiğinin izlediği yol
  - Konuşma
- Ayrık değer alabilir
  - DNA tabanlı diziler
  - Banka hesabındaki günlük değişen bakiye
- 1-D, 2-D, …,N-D olabilir
- Biz bu dersde 1-D işaretler üzerinde duracağız ve buna genelde "zaman" diyeceğiz
- Sürekli-zaman işaretler ; ***x(t), t*** – sürekli zaman değişkeni
- Ayrık-zaman işaretler ; ***x[n], n*** – ayrık zaman değişkeni, sadece tamsayı

ÖRNEKLER:

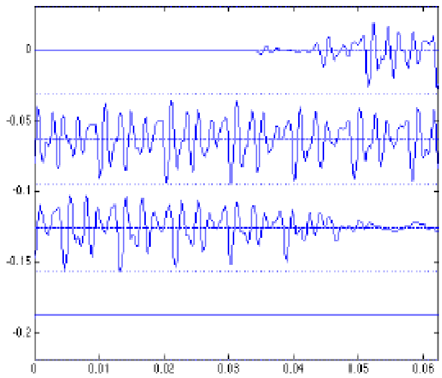
- ***x(t) = 5t^2*** ***; 1 bağımsız değişken***
- ***u(x,y) = 3x + 2xy -12y^2*** ***; 2 bağımsız değişken***
- ***x(n) = 0.9^n, n>0*** ***;1 bağımsız değişken***

İşaretler için bir sınıflandırma yolu bağımsız değişkenin değerlerini aldığı kümeye göre sınıflandırmadır.



Sürekli-zamanlı İşaretler

$x(t)$ t sürekli bir değişken

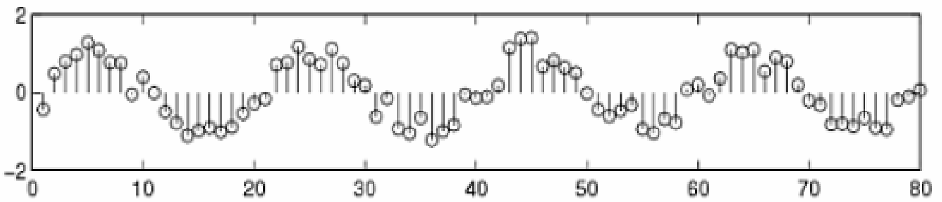


İşaretin (işlevin) bağlı olduğu bağımsız değişken sürekli değerler alır.

Ayrık-zamanlı İşaretler

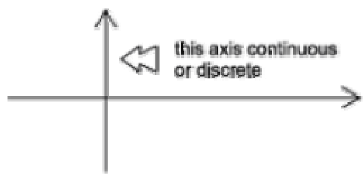
x[n]

n ayrık bir değişken, örnek olarak sadece tam sayı değerler alıyor



İşaretin (işlevin) bağlı olduğu bağımsız değişken ayrık değerler alır.

İşaretler için diğer bir sınıflandırma yolu işaret değerlerinin göre



- **Ayrık-değerli işaretler**
  İşaret (işlev) ayrık değerler alır

- **Sürekli-değerli işaretler**
  İşaret (işlev) sürekli değerler alır

Gerçek hayatta karşılaştığımız işaretler genelde **sürekli zamanlı** ve **sürekli genlikli**dir,
Bu çeşit işaretleri **analog işaretler** olarak adlandırıyoruz,

Örnek:
1) Elektriksel işaretler (akım, gerilim, elektriksel alan ve manyetik alan büyüklükleri)
2) Mekanik işaretler (Basınç, hız, ivme gibi büyüklükler)

Analog işaretler duyucu (sensör) ve dönüştürücü (transducer) yardımıyla elektriksel işaretlere dönüştürülebilir ve işlenebilirler.

Analog işaret işleme analog elektriksel işaretler üzerinde yükselticiler (amplifiers), dirençler, sığaçlar (capacitance), endüktanslar vb. devre elemanlarından oluşan devrelerle (sistemlerle) işlemler yapmaya dayanır.

Analog işaret işlemenin dezavantajları:
1) Doğruluk sınırlı, bileşen toleransları, yükseltici doğrusalsızlığı gibi sebeplerle
2) Sınırlı tekrarlanabilirlik, bileşen toleransları ve sıcaklık, basınç gibi çevresel koşullar nedeniyle
3) Elektriksel gürültüye yüksek duyarlılık
4) İşlemleri gerçekleştirmede sınırlı dinamik aralık
5) Yapılan işlemleri değiştirmede zorluk
6) Doğrusal olmayan ve zamanla değişen işlemleri gerçeklemede zorluk
7) Analog işaretin saklanması ve geri alınmasında sınırlı doğruluk ve yüksek maliyet

Sayısal İşaret İşleme:

Analog işaretler örnekleme ve kuvantalama işlemleri gerçeklenerek ayrık-zamanlı ve ayrık-değerli işaretlere dönüştürülebilirler.

Hem **ayrık-zamanlı** hem de **ayrık-değerli** olan işaretler **sayısal (digital) işaretler** olarak adlandırılır.

Sayısal işaret işleme, işaretlerin sayısal (digital) hale getirilip üzerlerinde sayısal donanımlar (genel amaçlı bir bilgisayar yada özel amaçlı bir yonga) kullanılarak işlemler yapılmasıdır.

Bir DSP sistemini gerçekleyebilmek için aşağıdaki adımları gerçeklememiz gerekmektedir.

1) Analog işaretin sayısal işarete dönüştürülmesi,
   Analog-sayısal (A/D) dönüştürücü

2) Sayısal işaret üzerinde gerekli işlemleri yapabilmek için bir sayısal işlemci

3) Sayısal işlenmiş işaret tekrar bir analog işarete geri döndürülmeli,
   Sayısal-analog (D/A) dönüştürücü

Sayısal işaret işlemenin avantajları:

1) Sayısal işlemciler istenen her seviyeye kadar (en azından teorik olarak) doğruluk sağlayabilirler, bu sayısal kelime uzunluğu gerektiği şekilde arttırılarak sağlanır

2) Sayısal işlemciler gerçekleştirdikleri işlemleri hiç hatasız mükemmel şekilde tekrarlayabilirler (bozukluk olmadığı sürece)

3) Sayısal işlemcilerin elektriksel gürültüye duyarlılıkları çok düşüktür

4) Dinamik aralık istendiği şekilde değiştirilebilir (kayan nokta gösterilimi, floating-point representation)

5) Sayısal işlemcilerin işlem hızları giderek artmaktadır,
   Moore kuralı, her 18 ayda birim alana döşenebilen transistör sayısı yaklaşık olarak ikiye katlanmaktadır

6) Sayısal işlemcilerin gerçekleştirdiği işlemler sadece yazılım değişiklikleri ile güncellenebilirler

7) Doğrusal olmayan ve zamanla değişen işlemleri gerçeklemek daha kolaydır.

8) Sayısal işaretlerin saklanması daha ucuz ve daha kolaydır.

9) Sayısal işaretler
- güvenlik için şifrelenebilir,
- hatalara karşı kodlanabilir
- bilgi kaybı olmaksızın ya da ayarlanabilen bir miktarda bilgi kaybına izin vererek sıkıştırılabilirler

Sayısal İşaret İşlemenin uygulama alanları:

Biyomedikal uygulamalar: biyomedikal işaretlerin analizi, diyagnostik görüntüleme (MRI, CT, ultrasound)

Çoğulortam (multimedia) uygulamaları: ses, görüntü, video işaretleri gibi işaretlerin oluşturulması, saklanması ve iletimi, Örnek: sayısal televizyon sistemleri, MP3

Görüntü ve video işleme: görüntü iyileştirme, kodlama, sıkıştırma, Örnek: JPEG, MPEG1, MPEG2, MPEG3, MPEG4

Haberleşme: sayısal haberleşme işaretlerinin kodlanması ve kod çözülmesi, kanal dengeleme uygulamaları, modemler,

Konuşma uygulamaları: ses kodlama, sıkıştırma, ses-yazı ve yazı-ses dönüştürme teknikleri

Radar, Sonar …

Sayısal işaret işleme, işaretlerin sayısal bilgisayar ya da özel amaçlı donanımda bir sayılar dizisi olarak gösterilmesi ve bu işaret dizisi üzerinde çeşitli işlemler yaparak, istenen bir bilgi ya da büyüklüğün bu diziden çıkarılmasına dayanmaktadır. 1960 lı yıllarda sayısal bilgisayarlar ve diğer sayısal donanım analog donanıma göre çok yer tutuyordu ve pahalı idi. Bu yüzden sayısal işaret işlemenin kullanımı gerçek-zaman olmayan bilimsel çalışmalar ve endüstri uygulamaları ile sınırlı idi(örneğin petrol ya da diğer yeraltı kaynaklarının araştırılması). Ancak sayısal devrelerin gittikçe hızlanması, küçültülmesi ve ucuzlaması, sayısal işaret işleyicileri, birçok ticari ürün ve uygulamanın ayrılmaz parçası haline getirdi.

Sayısal işaret işleme tüm işaret işleme problemleri için tek geçerli çözüm değildir. Çok yüksek bant genişlikli işaretlerin, örneğin radyo frekansı(RF), işlenmesinde, analog ve optik işaret işleme yöntemleri kullanılmaktadır. Bu işaretlerin örneklenmesi ve sayısallaştırılması sorun olmaktadır. Ancak genel olarak, sayısal yöntemler ile işaret işleme mümkün ise, tercih edilmektedir. Bunda sayısal işaret işlemenin bazı avantajları rol oynamaktadır. Sayısal işlemciler, sayısal kelime uzunluğu gerekli doğruluğa uygun seçilerek istenen seviyede kesinlik sağlayabilirler. Analog devrelerin ise kullanılan devre elemanlarının çalışma toleranslarına bağlı olan bir kesinliği vardır. Sayısal işlemciler yazılım ya da donanım hatası ile devre dışı kalmadıkları sürece doğru ve kesin olarak çalışırlar. Analog devrelerde ise farklı ortam şartlarına(sıcaklık, basınç, nem vb.) bağlı olarak çalışma karakteristikleri değişebilir. Sayısal işlemcilerin elektriksel gürültüye duyarlılıkları yok denecek seviyede düşüktür. Sayısal işlemcilerde yazılım değişikliği ile donanıma el değmeden yapılan işlemlerde değişiklik ve güncelleme yapmak mümkündür. Sayısal bilginin saklanmasının maliyeti çok daha düşük ve güvenilirliği daha yüksektir. Sayısal işaretler güvenlik için şifrelenebilir, hatalara karşı hata sezici ve düzeltici bir kod ile kodlanabilir ve bilgi kaybolmamak şartı ile boyutunu küçültecek şekilde sıkıştırılabilirler. Bütün bunların sonucunda, sayısal işaret işleme güncel elektronik sistemlerde önemli bir rol oynamaktadır. Bunların arasında ses, görüntü, veri ve görüntü iletim ve saklama sistemleri, tıbbi görüntüleme ve teşhis sistemleri, radar, sonar ve uydu uzaktan görüntüleme sistemleri, sayısal kontrol sistemleri yer almaktadır.

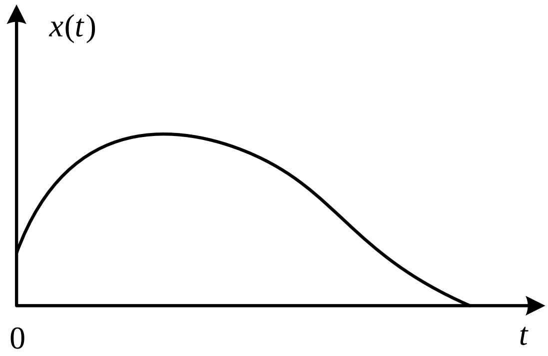
İşaretlerin sınıflandırılması

İşaretleri zamana göre değişimleri dikkate alınarak ikiye ayırabiliriz:

a. Sürekli zamanlı işaretler

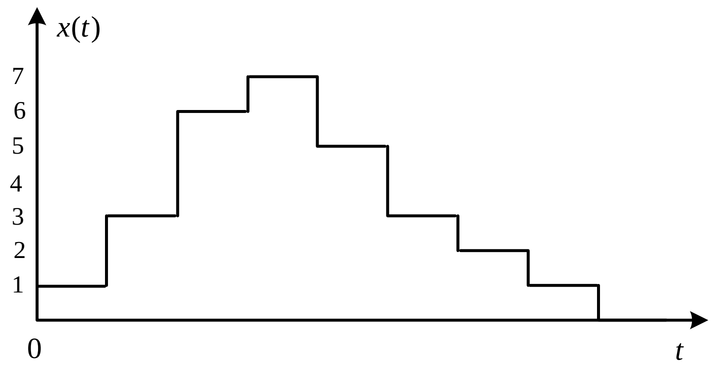
Şekil 1.1 ve şekil 1.2 de görülen işaretler sürekli zamanlı işaretlerdir. Örneğin konuşma ve ısı fonksiyonları sürekli zamanlı işaretlerdir.

a.1. Genliği kuantalanmamış sürekli zamanlı işaret



Şekil 1.1 Genliği kuantalanmamış sürekli zamanlı işaret. İşaretin genliği sürekli değerler alır. Buna analog işaret de denir.

a.2.Genliği kuantalanmış sürekli zamanlı işaret

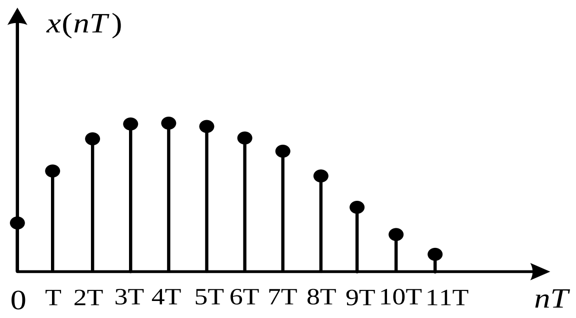


Şekil 1.2 Genliği kuantalanmış sürekli zamanlı işaret. İşaretin genliği ayrık değerler alabilir.

Şekil 1.3 ve şekil 1.4 de görülen işaretler, zamanın sadece belirli anlarında tanımlanmış oldukları için ayrık zamanlı işaretlerdir. Günlük olarak her öğle zamanı İstanbul'da kayıt edilen hava sıcaklığı ayrık zamanlı bir işareti oluşturur. Ayrık zaman aralıkları milisaniye, dakika veya gün olabilir.

b. Ayrık zamanlı işaretler

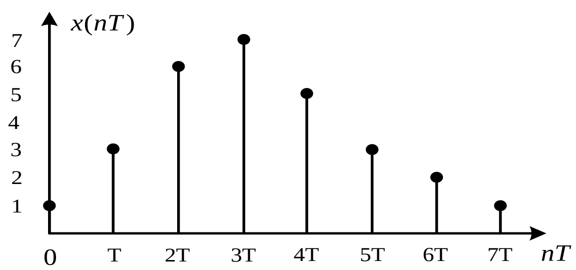
b.1. Genliği kuantalanmamış ayrık zamanlı işaret



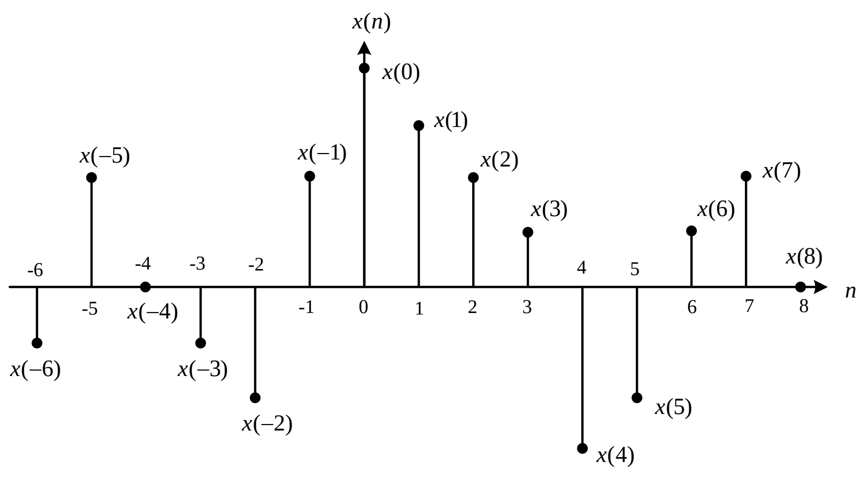
Şekil 1.3 Genliği **kuantalanmamış ayrık zamanlı işaret**. Şekil 1.1 deki işaretin T anlarında örneklenmesi ile elde edilir.

b.2. Genliği kuantalanmış ayrık zamanlı işaret

Sürekli bir aralık içinde herhangi bir değeri alabilen işaret sürekli genliklidir. Isı fonksiyonları ve bir taşıtın hızı sürekli genliklidir. Bu işaretleri şekil 1.1 ve şekil 1.3 deki işaretler ile temsil etmek mümkündür. Ancak şekil 1.2 ve şekil 1.4 de görüldüğü gibi bazı işaretler sadece ayrık değerler alabilmektedir. Örneğin bankaların faiz oranları ayrık genlikli işaretlerdir. Gerçekten faiz oranları %5, %13.5 ve %10.25 gibi ayrık değerlerle ifade edilir.



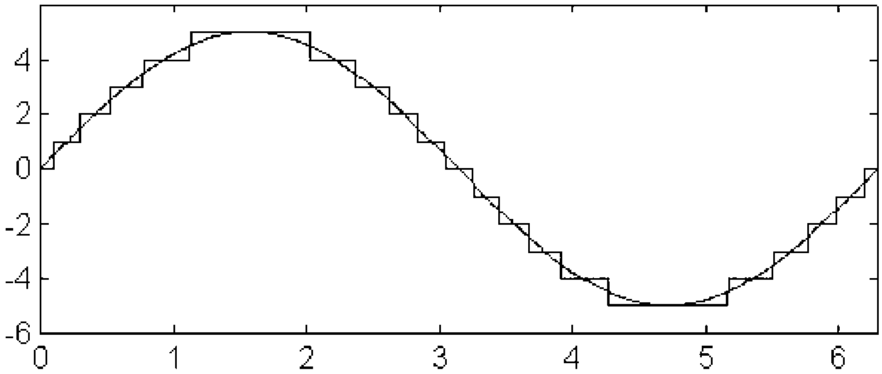
Şekil 1.4 Genliği **kuantalanmış ayrık zamanlı işaret**. Sayısal işaret bu türdendir.



Şekil 1.5 Sabit bir örnekleme aralığı ile elde edilen sayısal bir işaretin grafiksel gösterimi

Analog ve sayısal sinyal

Eğer bir x(t) sürekli zaman sinyali (a,b) sürekli zaman aralığında (a - ∞ ve b +∞ olabilir.) herhangi bir değer alabiliyorsa sinyalin analog olduğu söylenir. Eğer bir x[n] ayrık zamanlı sinyali yalnızca belli bir sayıda ayrık değerler alabiliyorsa bu sinyalin sayısal bir sinyal olduğu söylenebilir.



Ayrık zamanlı işaretler veya diziler

Ayrık-zamanlı x işareti bir dizi sayıdan oluşur ve dizinin sayıları x_n, $x(n)$, $x[n]$ veya $x(nT_S)$ biçiminde gösterilir. Sürekli zamanlı bir sinyalin örneklenmesi ile

$$x(t_0), x(t_1), \ldots, x(t_n), \ldots$$

biçiminde ya da kısaca

$$x[0], x[1], \ldots, x[n], \ldots$$

veya

$$x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots$$

biçiminde gösterilen ayrık zamanlı bir sinyal elde edilebilir. Bu eşitliklerde

$$x_n = x[n] = x(t_n)$$

olup x_n değerleri "örnek", her bir örnek arasındaki zaman da "örnekleme aralığı" adını alırlar. Örnekleme aralıklarının eşit olması (düzgün örnekleme) durumunda, T_s örnekleme aralığı olmak üzere,

$$x_n = x[n] = x(nT_s)$$

yazılabilir.

$x(nT_S)$ gösteriminde n bir tam sayı olup, dizinin sürekli zamanlı bir $x(t)$ işaretinin $t = nT_S$ anlarında örneklenmesinden elde edildiğini göstermektedir. Dizinin sürekli-zamanlı bir işaretten örnekleme yoluyla elde edildiği durumlar dışında $x[n]$ gösterimi kullanılacaktır. Matematiksel olarak x dizisinin n nci elemanı $x[n]$ biçiminde gösterilirken, $\{x[n]\}$, sonlu veya sonsuz uzunluklu tüm diziyi gösterir. Ancak burada genel uygulamaya uygun olarak $x[n]$ hem dizinin elemanı hem de dizinin tamamı için kullanılacaktır. n'in sabit veya değişken olmasına bağlı olarak $x[n]$'in, dizinin n inci elemanı veya tamamı olduğuna karar verilir.

Bir $x[n]$ ayrık zamanlı sinyali iki biçimde yazılabilir:

1. Bir dizinin n. değerini hesaplamak için bir kural belirlenebilir. Örneğin,

$$x[n] = x_n = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^n & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$$

veya

$$\{x_n\} = \left\{1, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{4}, \ldots, \left(\tfrac{1}{2}\right)^n, \ldots\right\}$$

2. Dizinin değerleri açıkça sıralanabilir. Örneğin, Şekil 1-1(b)'de görülen dizi şu biçimde yazılabilir:

$$\{x_n\} = \{\ldots, 0, 0, 1, 2, 2, \underset{\uparrow}{1}, 0, 1, 0, 2, 0, 0, \ldots\}$$

veya

$$\{x_n\} = \{1, 2, 2, \underset{\uparrow}{1}, 0, 1, 0, 2\}$$

Ok işareti, $n = 0$ terimini belirtmek için kullanılır. Okun bulunmaması, ilk terimin $n = 0$'a karşı düştüğünü ve $n < 0$ için bütün terimlerin sıfır olduğunu gösterir.

Dizinin sabit bir sayı ile çarpımı ve iki dizinin toplamı gibi durumlarda belirsizliği önlemek için küme gösterimi kullanılır.

$$\alpha\{x(n)\} = \{\alpha x(n)\}$$

$$\{x(n)\} + \{y(n)\} = \{x(n) + y(n)\}$$

İki dizinin toplamı ve çarpımı şu biçimde tanımlanır:

$$\{c_n\} = \{a_n\} + \{b_n\} \longrightarrow c_n = a_n + b_n$$

$$\{c_n\} = \{a_n\}\{b_n\} \longrightarrow c_n = a_n b_n$$

$$\{c_n\} = \alpha\{a_n\} \longrightarrow c_n = \alpha a_n \qquad \alpha = \text{sabit}$$

Gerçel ve Karmaşık Sinyal

Bir x(t) sinyalin değerleri gerçelse sinyal gerçel değerleri karmaşıksa sinyal karmaşıktır. Karmaşık x(t) sinyali aşağıdaki yapıda olur.

$x(t) = x_1(t) + jx_2(t)$

Burada $j = \sqrt{-1}$ olup $x_1(t)$ ve $x_2(t)$ gerçel sinyallerdir ve t, sürekli veya kesikli bir değişkeni gösteriyor olabilir.

Deterministik ve Rasgele sinyal

Deterministik sinyallerin herhangi bir anda alacağı değerler tamamen belirlenmiştir. Bu nedenle, deterministik bir sinyal t'nin bilinen bir fonksiyonu ile modellenebilir. Deterministik işaretlerin şimdiki ve gelecekteki değerleri, geçmişteki değerlerinden yararlanarak hesaplanabilir. Bundan dolayı bu işaretler kesin bir matematiksel formül ile ifade edilebilir. Örneğin bir sinüzoidal işaretin belli bir dönemi gözlendikten sonra genliği, fazı, frekansı ve bu dönem sonrasındaki davranışı tümüyle belirlenebilir.

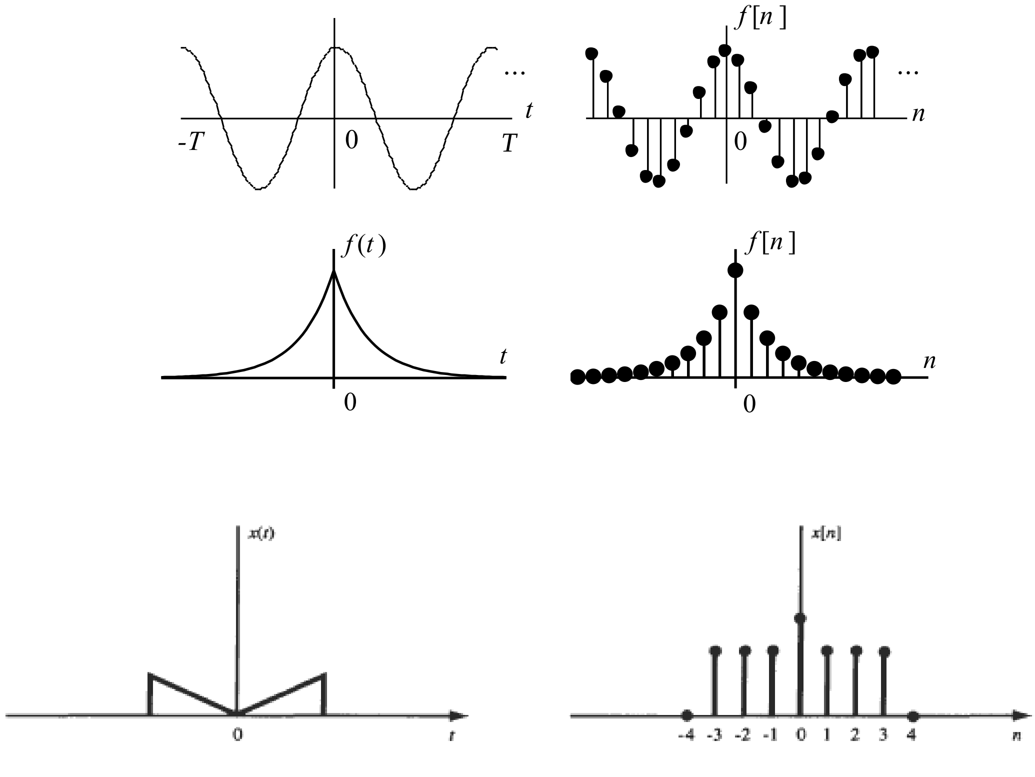
Bazı fiziksel işaretlerin şimdiki ve gelecekteki değerleri geçmişteki değerlerinden hesaplanamaz ya da tahmin edilemez. Örneğin, sistemlerde çeşitli nedenlerle ortaya çıkan gürültü işaretleri rastlantı işaretleridir. Rastlantı işaretleri için kesin bir matematiksel ifade yazmak mümkün değildir. Buna rağmen bu tür işaretlerin büyük bir çoğunluğunun ortalama değer, karesel ortalama değer gibi istatistiksel büyüklükleri hesaplanabilir. Kısaca, rasgele sinyallerin herhangi bir anda alacağı değerler rastgele olduğundan bu işaretler istatiksel olarak karakterize edilir.

Tek ve Çift sinyal

Aşağıdaki koşulları sağlayan x(t) ve x[n] sinyalleri çift sinyallerdir.

x(-t) = x(t)

x[-n] = x[n]

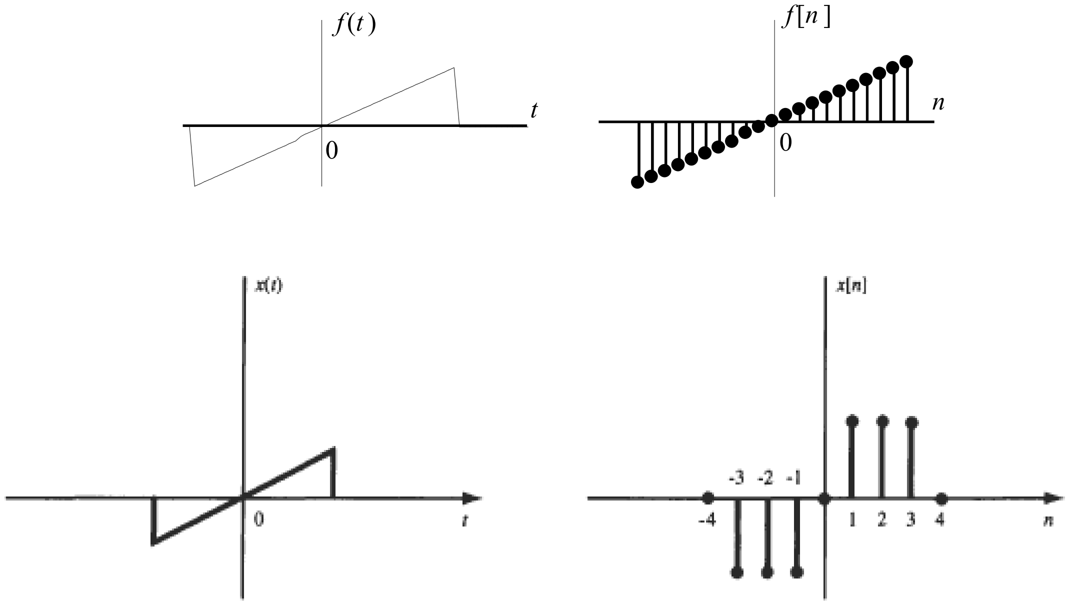


Şekil 1.7 Sürekli ve ayrık çift fonksiyonlara örnekler

Aşağıdaki koşulları sağlayan sinyaller ise tek sinyallerdir.

$$x(-t) = -x(t)$$

$$x[-n] = -x[n]$$



Şekil 1.8 Sürekli ve ayrık tek fonksiyonlara örnekler

Herhangi bir x(t) ve ya x[n] sinyali bir çift ve bir tek sinyalin toplamı olarak ifade edilebilir.

$$x(t) = x_e(t) + x_0(t)$$

$$x[n] = x_e[n] + x_0[n]$$

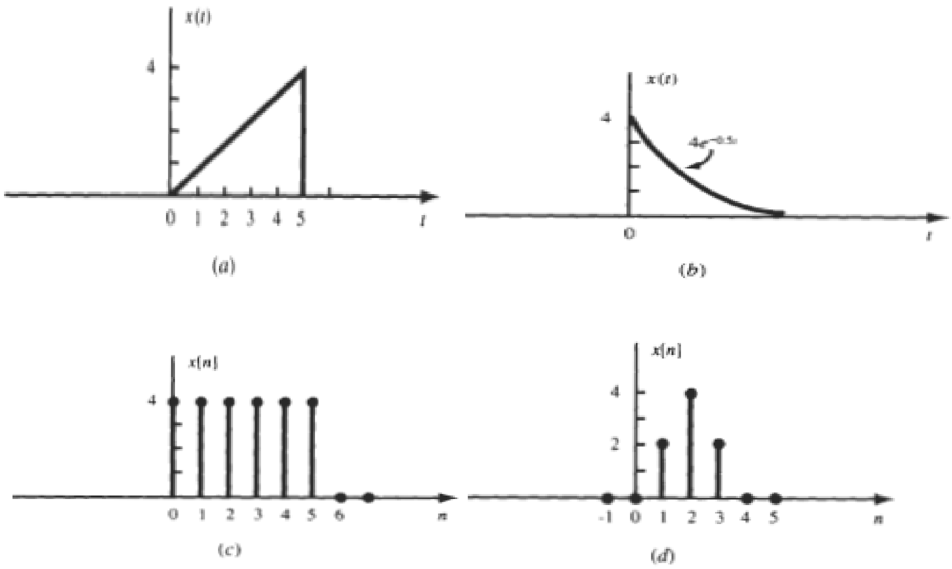
$$x_e(t) = \frac{1}{2}\{ x(t) + x(-t) \}$$

$$x_e[n] = \frac{1}{2}\{ x[n] + x[-n]\}$$

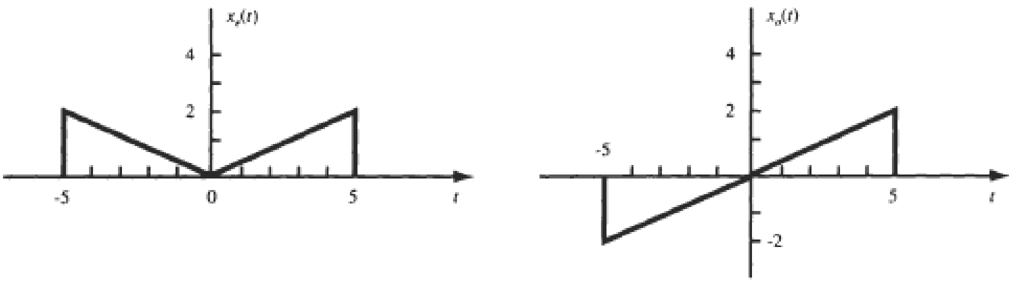
$$x_0(t) = \frac{1}{2}\{ x(t) - x(-t) \}$$

$$x_0[n] = \frac{1}{2}\{ x[n] - x[-n]\}$$

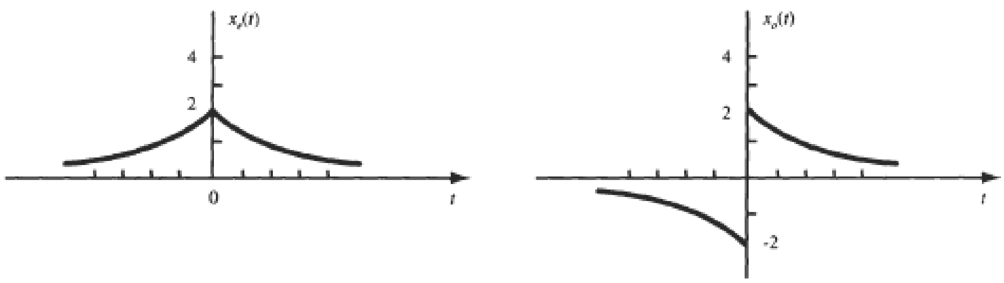
Örnek: Aşağıdaki sinyallerin tek ve çift bileşenlerini elde ediniz.



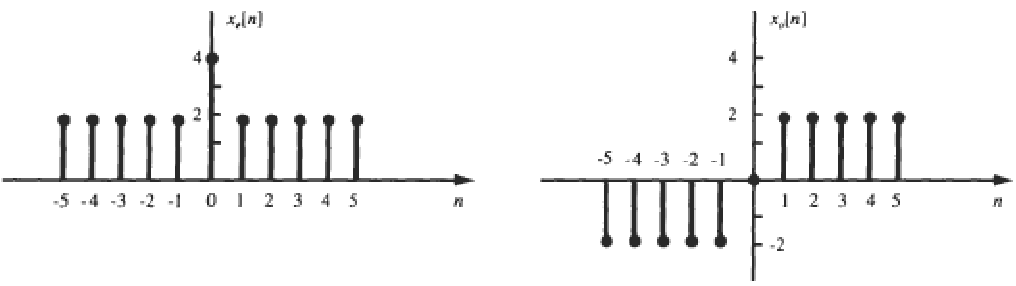
Çözüm:



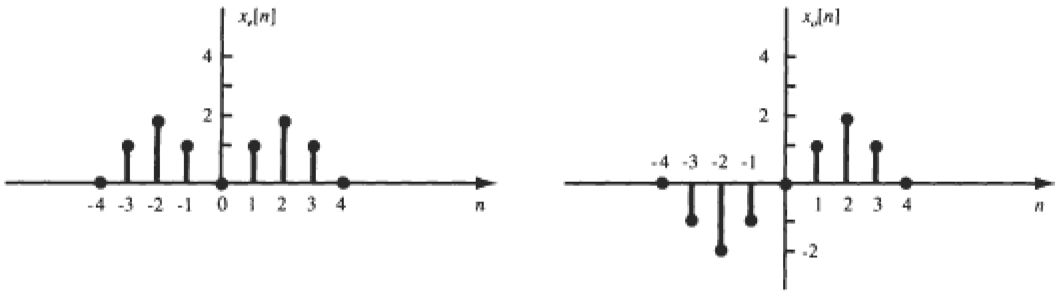
(a)



(b)

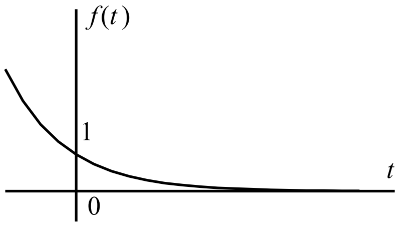


(c)



(d)

Örnek: $f(t) = e^{-t}, \quad -\infty < t < \infty$ işaretinin çift ve tek bileşenlerini bulalım.



Şekil 1.9

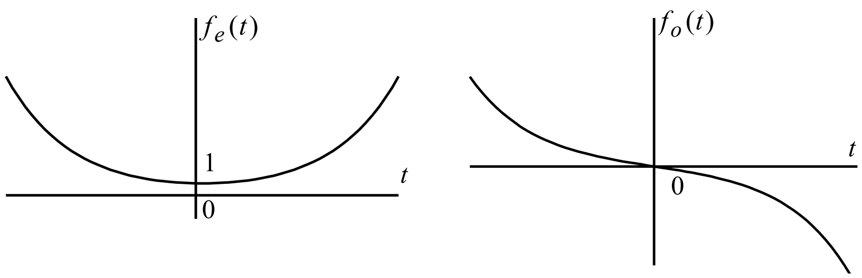
Bu işaretin çift bileşeni

$$f_e(t) = \frac{f(t) + f(-t)}{2} = \frac{e^{-t} + e^{t}}{2}$$

ve tek bileşeni

$$f_o(t) = \frac{f(t) - f(-t)}{2} = \frac{e^{-t} - e^{t}}{2}$$

olarak bulunur. Bunların grafikleri sırasıyla Şek.1.10.a) ve Şek.1.10.b) de çizilmiştir.



a) b)

Şekil 1.10 $f(t) = e^{-t}, \quad -\infty < t < \infty$ işaretinin çift ve tek bileşenleri

Periyodik ve Periyodik Olmayan Sinyal

Bir sürekli zamanlı x(t) sinyali, T sıfırdan farklı pozitif bir sayı olmak üzere

$$x(t+T) = x(t) \quad , \quad \text{bütün t değerleri için}$$

koşulunu sağlıyorsa bu sinyaller periyodiktir ve periyodu T dir. Aşağıdaki şekilde periyodik bir sinyal görülmektedir. Buradan bütün t değerleri ve tam sayı m değerleri için

$$x(t+mT) = x(t)$$

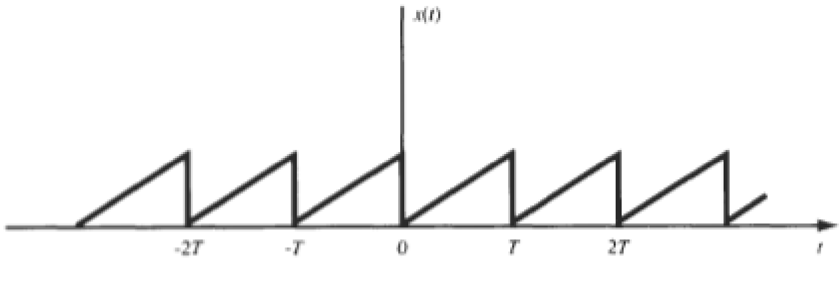
yazılabileceği görülür. x(t)'nin temel periyodu T_0 eşitliğini sağlayan en küçük pozitif T değeridir. Bu tanımın sabit bir sinyal (dc sinyal) için geçerli olmadığına dikkat edilmelidir. Sabit bir x(t) sinyali herhangi bir T için periyodik olduğundan (dolayısıyla en küçük pozitif değer bulunamadığından) bu sinyaller için temel periyottan söz edilemez. Periyodik olmayan bir sürekli zamanlı sinyalin aperiyodik olduğu söylenir. Periyodik ayrık zamanlı sinyaller de benzer biçimde tanımlanırlar. Bir x[n] dizisi

$$x[n+N] = x[n] \quad , \quad \text{bütün n değerleri için}$$

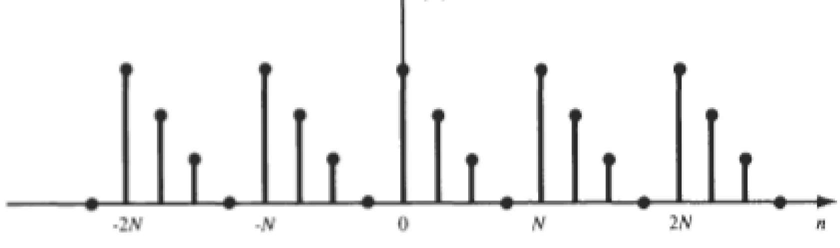
koşulunu sağlayan pozitif bir N tamsayısının varlığı durumunda periyodiktir ve periyodu N 'dir. Şekil-(b) de bu türden bir sinyal görülmektedir. Yukarıdaki eşitlikten ve şekil-(b)'den bütün n değerleri ve herhangi bir m tamsayısı için

$$x[n+mN] = x[n]$$

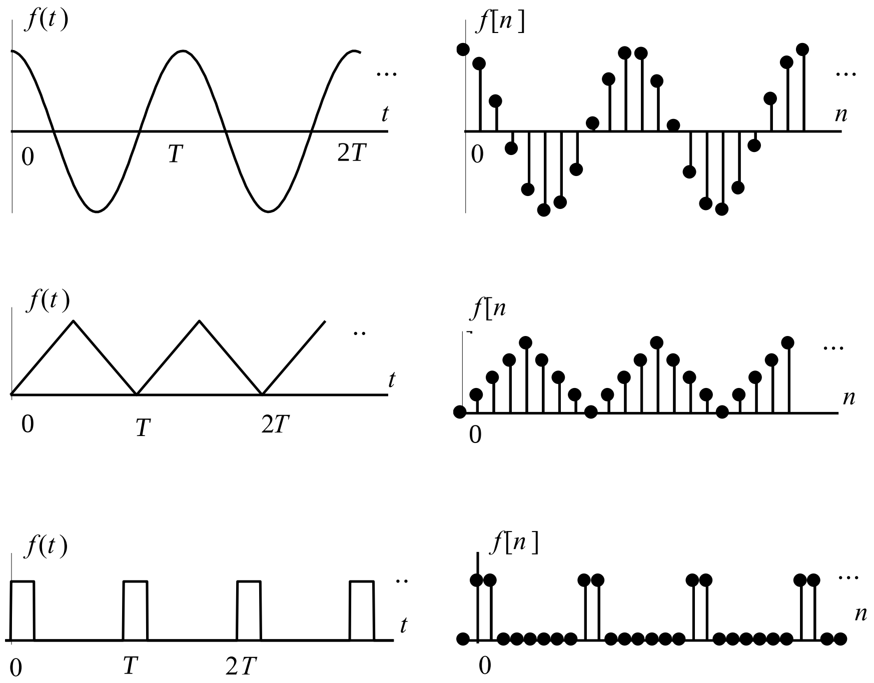
elde edilir. x[n] 'nin temel periyodu olan N_0, eşitliğini sağlayan en küçük pozitif N tamsayısıdır. Periyodik olmayan herhangi bir dizi aperiyodik olarak adlandırılır. Sürekli zamanlı periyodik bir sinyalin düzgün örneklenmesiyle elde edilen bir dizi periyodik olmayabilir. Ayrıca sürekli zamanlı iki periyodik sinyalin toplamı da periyodik olmayabilir. Ancak iki periyodik dizinin toplamı her zaman periyodiktir.



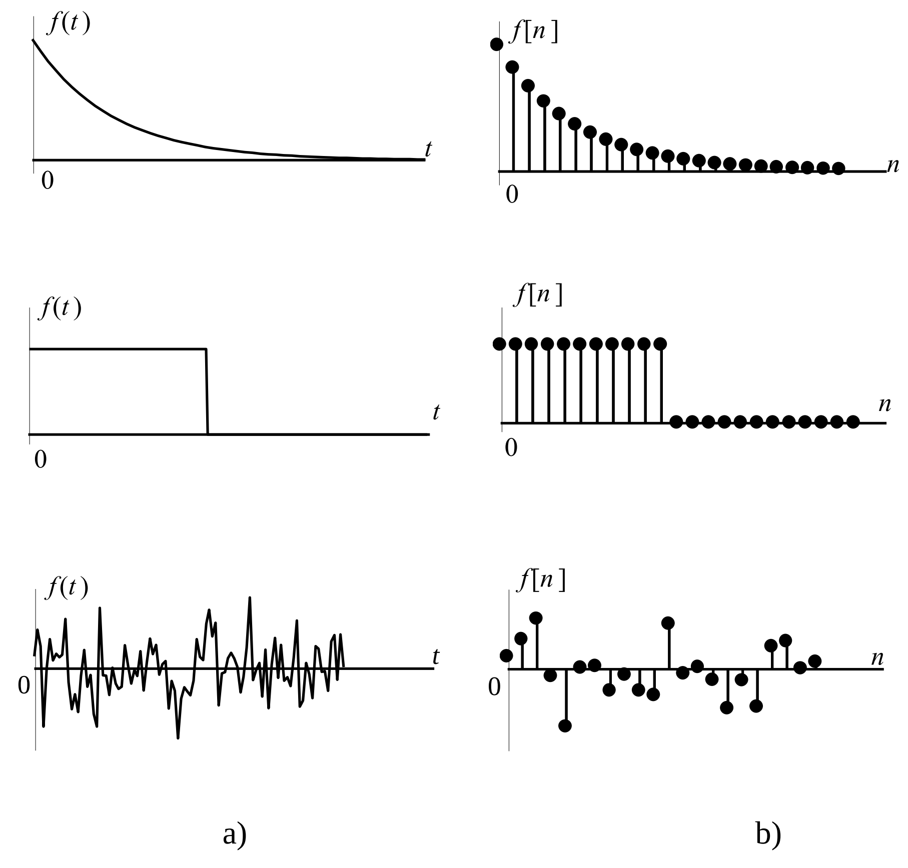
(a)



(b)



Yukarda verilen matematiksel özelliği taşımayan işaretler ise periyodik olmayan işaretler olarak adlandırılır. Pek çok biyolojik ve fiziksel işaret periyodik olmayan bir yapıya sahiptir. Örnek olarak EKG ve ses işareti verilebilir. Periyodik olmayan işaretlerin dalga şekli uygun bir gözleme aralığında tekrar etmez ve gözleme aralığı yeterince büyük olsa bile bazen bu aralık tüm işareti incelemek için yeterli olmayabilir. Aşağıda Şek.1.3' de periyodik yapıya sahip olmayan sürekli ve ayrık işaret örnekleri verilmiştir.



Şekil. Bazı periyodik olmayan işaret örnekleri. a) sürekli, b) ayrık.

Periyodik ve periyodik olmayan işaret sınıflandırmasına yakın diğer bir işaret türü de "yaklaşık periyodik işaretler"dir. Bu işaretler, birbirlerinin tam katlarında periyotlara sahip olmayan iki veya daha fazla periyodik işaretlerin toplamından oluşurlar. Örneğin $f(t) = Sin(t) + Sin\sqrt{2}$ t işareti yaklaşık periyodik işarettir. Bu örnekten görüleceği üzere, "yaklaşık periyodik" deyimi, sağ taraftaki terimlerin her biri periyodik olmasına rağmen, $f(t)$ nin periyodik olmamasından dolayı kullanılmaktadır. Bu tür işaretlerle bazı haberleşme sistemlerinin analizinde karşılaşılmaktadır.

Enerji ve Güç Sinyalleri

v(t) bir R direncinden i(t) akımını akıtan gerilim olsun. Ohm başına ani güç

$$p(t) = \frac{v(t)i(t)}{R} = i^2(t)$$

biçiminde tanımlanır. Ohm başına düşen toplam enerji (E) ve ortalama güç (P) tanımları ise şu biçimdedir:

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} i^2\,(t)dt \quad \text{joule}$$

$$P = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} i^2(t)dt \quad \text{watt}$$

Herhangi bir sürekli zamanlı x(t) sinyalinin normalize enerji içeriği (E) aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2\,dt$$

x(t) sinyalinin normalize gücü (P) ise şu biçimde tanımlanır:

$$P = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt$$

Benzer olarak ayrık zamanlı bir x[n] sinyalinin normalize enerji içeriği ve normalize ortalama gücü de tanımlanabilir:

$$E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2, \qquad E = \sum_{-\infty}^{\infty} |x(n)|^2$$

$$P = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} |x[n]|^2, \qquad P = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N+1} \sum_{n=-N/2}^{N/2} |x(n)|^2$$

tanımlarına dayanarak aşağıdaki sinyal sınıfları tanımlanabilir:

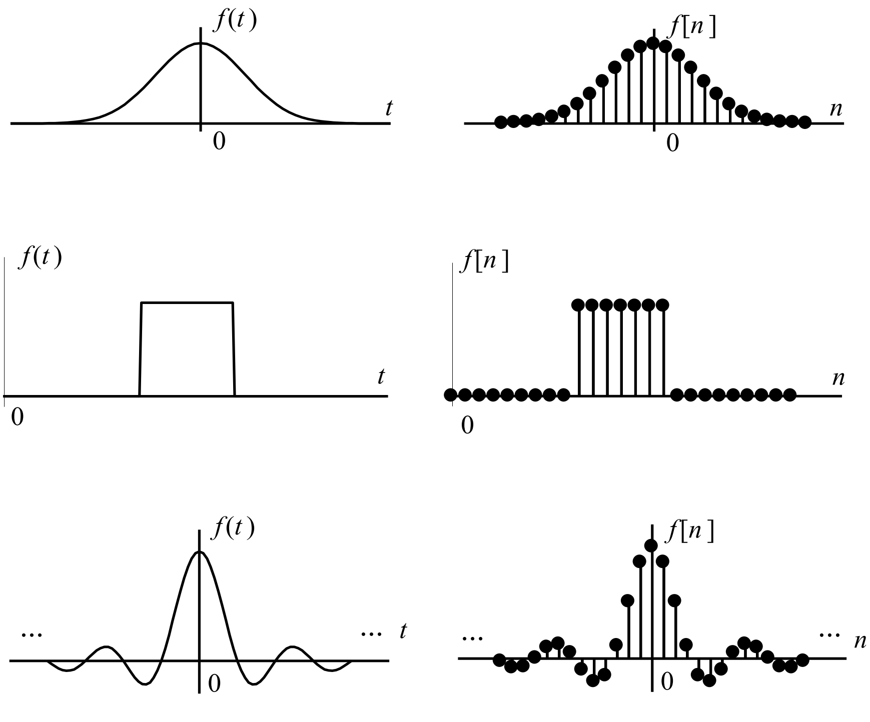
1.Yalnızca $0 < E < \infty$ koşulu sağlandığında x(t) (veya x[n]) bir enerji sinyalidir ve dolayısıyla P = 0 olur.

2. Yalnızca $0 < P < \infty$ koşulu sağlandığında x(t) (veya x[n]) bir güç sinyalidir ve dolayısıyla E = ∞ olur.

3. Bu koşulların birini sağlamayan sinyaller enerji sinyali veya güç sinyali olarak adlandırılamazlar.

Periyodik bir sinyalin bir periyot içerisindeki enerjisi sonlu ise bu sinyal bir güç sinyalidir ve bu sinyalin ortalama gücünün yalnızca bir periyot üzerinden hesaplanması yeterlidir.

Aşağıdaki Şekillerde tipik enerji işaretleri verilmiştir.

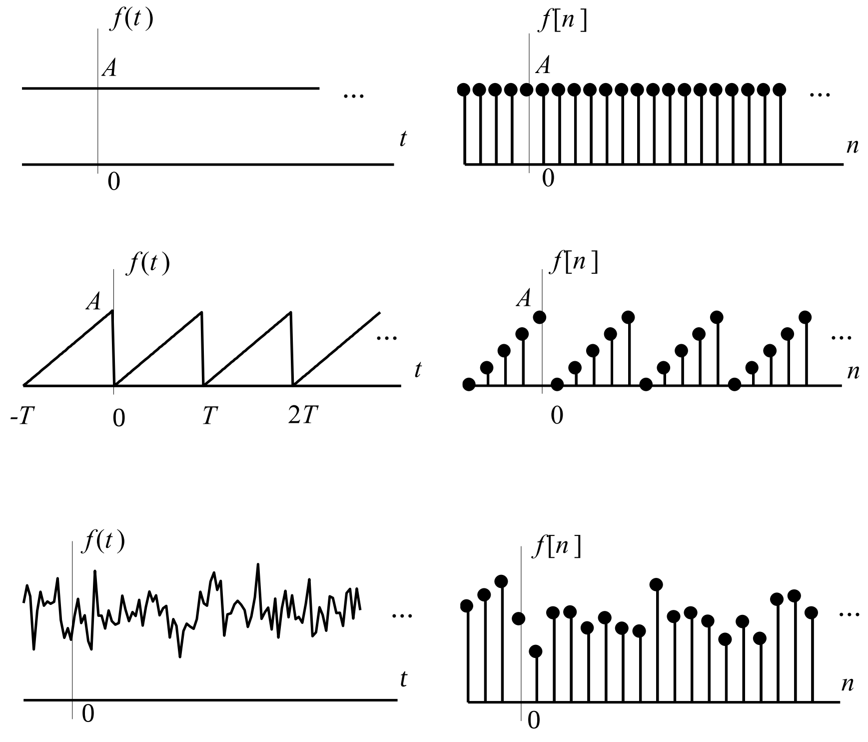


a) b)

Şekil. Bazı enerji işaretleri a)Sürekli Gauss işareti, dikdörtgen vuruş ve sinc işareti

b)Ayrık Gauss işareti, dikdörtgen vuruş ve sinc işareti

Aşağıdaki Şekillerde tipik bazı güç işaretleri gösterilmiştir. Güç işaretleri sonsuz enerjiye sahip olmalarına rağmen, enerji işaretlerinin sıfır ortalama güce sahip olduklarına dikkat ediniz.



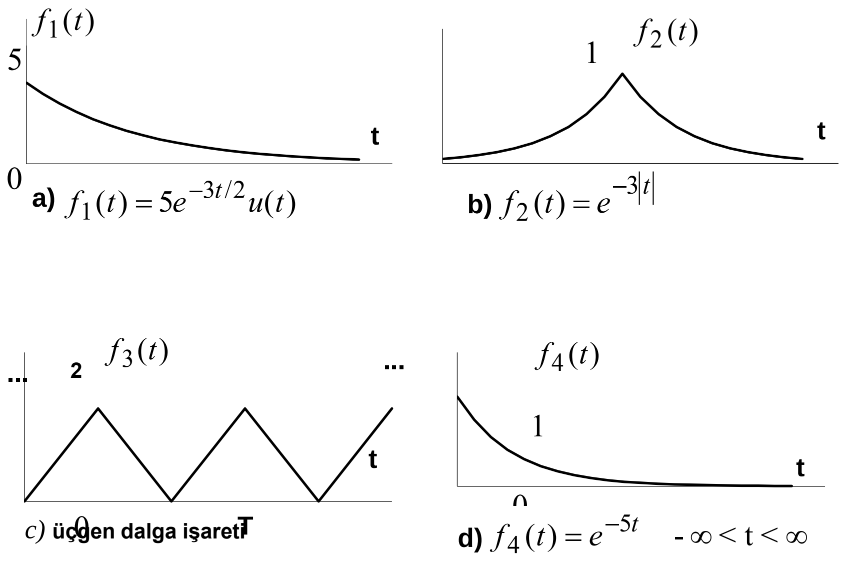
Şekil Güç işaretlerine bazı örnekler

Bazı işaretler ne güç işareti ne de enerji işareti sınıfına girerler. Bunların enerjileri ve ortalama güçleri sonsuz olabilir. Örneğin:

$$x(t) = e^{-\alpha t} \qquad -\infty<t<\infty \tag{1.9}$$

işareti ne güç ne de enerji işaretidir. Çünkü bu işaretin hem ortalama gücü hem de enerjisi sonsuzdur.

Örnek 1.1 Şek.1.6' daki işaretlerin enerjilerini ve güçlerini hesaplayarak enerji işareti veya güç işareti olup olmadıklarını bulunuz.



Şekil 1.6

Çözüm:

a) $$E_{f_1} = \int_{-\infty}^{\infty} \left| \left(5e^{-3t/2}\right)^2 \right| dt = \int_{-\infty}^{\infty} 25e^{-3t} dt = \int_{0}^{\infty} 25e^{-3t} dt = \frac{25}{3}$$

$$P_{f_1} = \lim_{T_M \to \infty} \frac{1}{T_M} \int_{t_1}^{t_1+T_M} |f_1(t)|^2 dt$$

$$= \lim_{T_M \to \infty} \frac{1}{T_M} \int_{0}^{T_M} 25e^{-3t} dt$$

$$= \lim_{T_M \to \infty} \frac{1}{T_M} \left[-\tfrac{25}{3} e^{-3T_M} \right]$$

$$= 0$$

$f_1(t)$ işaretinin enerjisi sonlu bir değer, ortalama gücü sıfır olduğundan enerji işaretidir.

b) $$E_{f_2} = \int_{-\infty}^{\infty} \left| e^{-3|t|} \right|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left| e^{-6|t|} \right| dt = \int_{-\infty}^{0} e^{6t} dt + \int_{0}^{\infty} e^{-6t} dt = \frac{1}{3}$$

$$P_{f_2} = \lim_{T_M \to \infty} \frac{1}{T_M} \int_{-T_M/2}^{T_M/2} |f_2(t)|^2 dt = 0$$

$f_2(t)$ işareti, enerjisi sonlu bir değer ve ortalama gücü sıfır olduğundan dolayı enerji işaretidir.

c) $$E_{f_3} = \int_{-\infty}^{\infty} |f_3(t)|^2 dt = \infty$$

$$P_{f_3} = \frac{1}{T_M} \int_{t_1}^{t_1+T_M} |f_3(t)|^2 dt$$

$$= \frac{2}{T} \int_{0}^{T/2} \left(2 - \frac{4}{T} t\right)^2 dt \qquad = \frac{2}{T} \int_{0}^{T/2} \left(4 - \frac{16}{T} t + \frac{16}{T^2} t^2\right) dt$$

$$= \frac{2}{T} \left(4t - \frac{16}{2T} t^2 + \frac{16}{3T^2} t^3 \right) \Bigg|_{0}^{T/2} = \frac{4}{3}$$

$f_3(t)$ işareti, enerjisi sonsuz ve gücü 4/3 olduğu için güç işaretidir.

d) $f_4(t) = e^{-5t}, \quad -\infty < t < \infty$

$$E_{f_4} = \int_{-\infty}^{\infty} |f_4(t)|^2 dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-10t} dt$$

$$= -\frac{1}{10} e^{-10t} \Big|_{-\infty}^{\infty}$$

$$= -\left(0 - \frac{1}{10} e^{10t}\right)$$

$$= \infty$$

$$P_{f_4} = \lim_{T_M \to \infty} \frac{1}{T_M} \int_{-T_M/2}^{T_M/2} e^{-10t} dt = \lim_{T_M \to \infty} \left(\frac{5e^{5T_M}}{10} \right) = \infty$$

$f_4(t)$ işareti, enerjisi ve ortalama gücü sonsuz olduğu için ne enerji işareti ne de güç işaretidir.

Örnek:

Aşağıdaki sinyallerin enerji sinyali veya güç sinyali olup olmadığını belirleyiniz.

(a) $x(t) = e^{-at}u(t), \quad a > 0$ (b) $x(t) = A\cos(\omega_0 t + \theta)$

(c) $x(t) = tu(t)$ (d) $x[n] = (-0.5)^n u[n]$

(e) $x[n] = u[n]$ (f) $x[n] = 2e^{j3n}$

Çözüm:

(a)

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_0^{\infty} e^{-2at} dt = \frac{1}{2a} < \infty$$

olduğundan, $x(t)$ bir enerji sinyalidir.

(b)

$x(t)$'nin ortalama gücü için

$$P = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} [x(t)]^2 dt = \frac{\omega_0}{2\pi}\int_0^{2\pi/\omega_0} A^2 \cos^2(\omega_0 t + \theta)\, dt$$

$$= \frac{A^2\omega_0}{2\pi}\int_0^{2\pi/\omega_0} \frac{1}{2}[1 + \cos(2\omega_0 t + 2\theta)]\, dt = \frac{A^2}{2} < \infty$$

(c)

$$E = \cancel{\lim_{T\to\infty}} \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2\,dt = \lim_{T\to\infty} \int_0^{T/2} t^2\,dt = \lim_{T\to\infty} \frac{(T/2)^3}{3} = \infty$$

$$P = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2\,dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^{T/2} t^2\,dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \frac{(T/2)^3}{3} = \infty$$

Görüldüğü gibi $x(t)$ ne bir enerji sinyali ne de güç sinyalidir.

(d)

(1.16) tanımı ve (1.91) eşitliği kullanılarak

$$E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} 0.25^n = \frac{1}{1-0.25} = \frac{4}{3} < \infty$$

elde edilir. Dolayısıyla $x[n]$ bir enerji sinyalidir.

(e)

(1.17) tanımından

$$P = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} |x[n]|^2$$

$$= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=0}^{N} 1^2 = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} (N+1) = \frac{1}{2} < \infty$$

elde edilir. Dolayısıyla, $x[n]$ bir güç işareti dir.

(f)

$|x[n]| = |2e^{j3n}| = 2|e^{j3n}| = 2$ olduğundan:

$$P = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} |x[n]|^2 = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} 2^2$$

$$= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} 4(2N+1) = 4 < \infty$$

Görüldüğü gibi $x[n]$ bir güç sinyalidir.

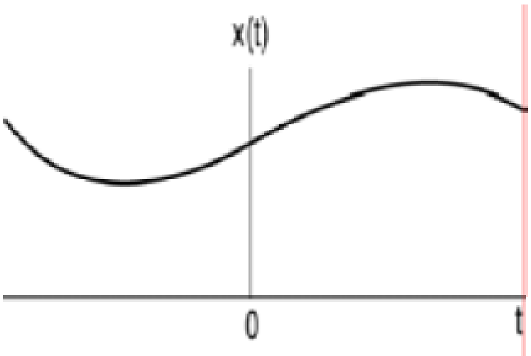
Örnek

$x(n) = e^{j(\frac{\pi}{8})n}$ işaretinin enerjisini $0 \le n \le 100$ aralığında MATLAB de bulalım.

```
clear all;
close all;
n=[0:100];
x=exp(j*pi/8.*n);
Ex1=sum(x.*conj(x))
Ex2=sum(abs(x).^2)
Ex1 =

   101

Ex2 =

   101
```

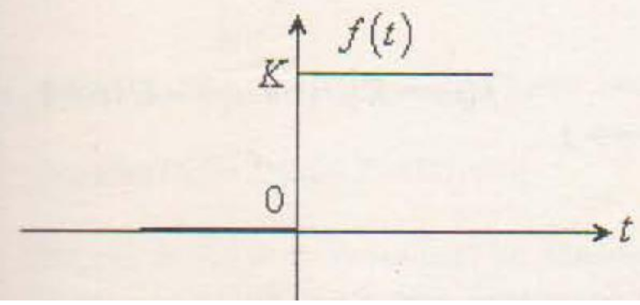
Sürekli ve ayrık zamanlı işaret çeşitleri

A-Temel Sürekli Zamanlı İşaretler



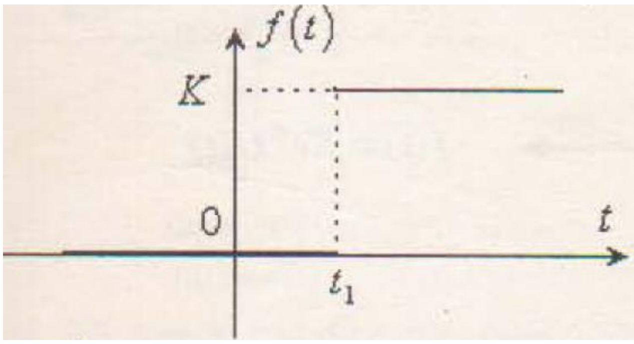
•Dünyadaki birçok fiziksel işaret sürekli-zaman işaretidir. Örneğin, elektrik akımı-gerilimi, sıcaklık, basınç, yoğunluk, v.b.

1- Basamak fonksiyon



$$f(t)=\begin{cases}K & t\geq 0\\ 0 & t<0\end{cases}$$

2- Ötelenmiş basamak fonksiyon

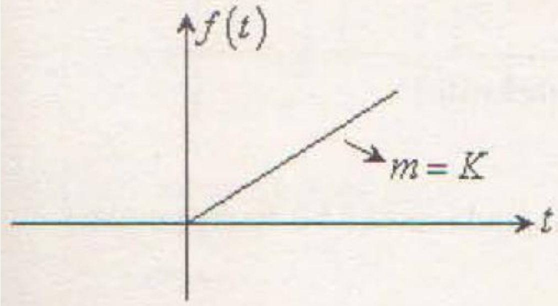


$$f(t)=\begin{cases}K & t\geq t_1\\ 0 & t<t_1\end{cases}$$

Eğer $K = 1$ ise $f(t)$'ye birim basamak fonksiyonu denir ve $U(t)$ sembolüyle gösterilir. Fonksiyonun değer değiştirdiği nokta $t = 0$ yerine $t = t_1$ olursa ötelenmiş basamak fonksiyonu elde edilir.

3- Rampa Fonksiyonu

a) Birinci Dereceden Rampa Fonksiyonu

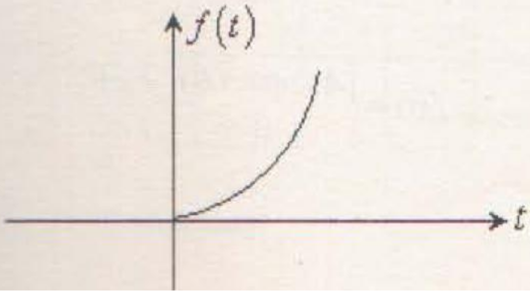


$$f(t)=\begin{cases}Kt & t\geq 0\\ 0 & t<0\end{cases}$$

veya

$$f(t)=KtU(t)$$

b) İkinci Dereceden Rampa Fonksiyonu

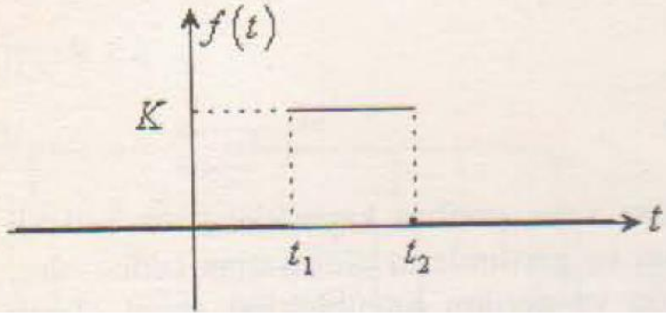


$$f(t)=\begin{cases}Kt^2 & t\geq 0\\ 0 & t<0\end{cases}$$

veya

$$f(t)=Kt^2U(t)$$

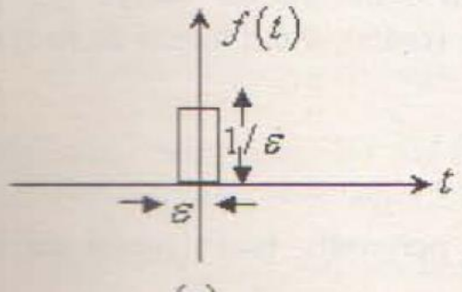
4- Darbe(Pulse) Fonksiyonu



$$f(t)=\begin{cases}K & t_1\leq t\leq t_2\\ 0 & t<t_1, t>t_2\end{cases}$$

5- Birim Dürtü, (Delta Dirak, Birim İmpuls) Fonksiyonu

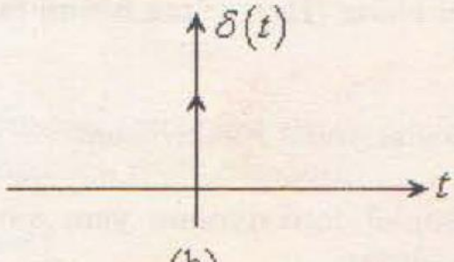
İmpuls fonksiyonu kavramsal bir fonksiyondur ve devreye çok kısa bir an için enerji verilmesini ifade eder. Sembolü δ(t)'dir.



(a)

$\lim \varepsilon \to 0$

$f(t)=\delta(t)$

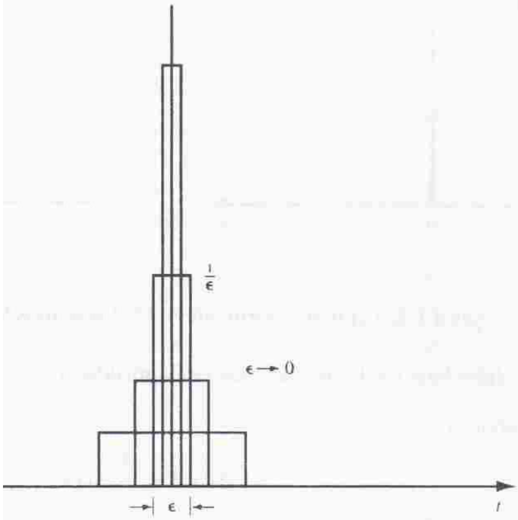


(b)

$$\delta(t)=\begin{cases}\text{sınırsız} & t=0\\ 0 & t\neq 0\end{cases}$$

$$\delta(t)=\begin{cases}0 & t\neq 0\\ \infty & t=0\end{cases}$$

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\delta(t)\,dt=1$$



Şekil 1-5

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(t)\delta(t)\,dt = \phi(0)$$

Bu eşitlikte $\phi(t)$, $t = 0$'da sürekli olan herhangi bir işlevdir.

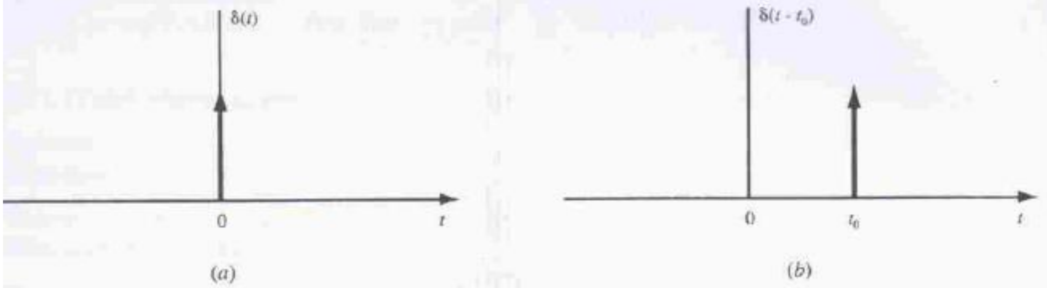
$\delta(t)$ için kullanılan bir başka tanım da şu biçimdedir:

$$\int_a^b \phi(t)\delta(t)\,dt = \begin{cases} \phi(0) & a < 0 < b \\ 0 & a < b < 0 \quad \text{or} \quad 0 < a < b \\ \text{tanımsız} & a = 0 \qquad\quad b = 0 \end{cases} \tag{1.21}$$

$$\int_a^b f(t)\delta(t-t_0)dt = \begin{cases} f(t_0), & a \le t_o \le b \text{ ise} \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

Yukarıdaki ifadede $a<b$ olup, a ve b gerçel sayılardır.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(t)\delta(t-t_0)\,dt = \phi(t_0) \tag{1.22}$$



Şekil 1-6 (a) Birim dürtü işlevi; (b) Ötelenmiş birim dürtü işlevi

$\delta(t)$' nin diğer bazı özellikleri aşağıda sıralanmaktadır.

$x(t)$, $t = 0$'da sürekli ise:

$$\delta(at) = \frac{1}{|a|}\delta(t) \qquad (1.23)$$

$$\delta(-t) = \delta(t) \qquad (1.24)$$

$$x(t)\delta(t) = x(0)\delta(t) \qquad (1.25)$$

$$x(t)\delta(t - t_0) = x(t_0)\delta(t - t_0) \qquad (1.26)$$

$x(t)$, $t = t_0$'da sürekli ise

Herhangi bir sürekli zamanlı $x(t)$ sinyali, (1.22) ve (1.24) eşitlikleri yardımıyla

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)\,d\tau \qquad (1.27)$$

biçiminde ifade edilebilir.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(t)\delta'(t)\,dt = -\phi'(0) \qquad (1.29)$$

$$\delta(t) = u'(t) = \frac{du(t)}{dt} \qquad (1.30)$$

Buna göre, birim basamak fonksiyonu $u(t)$ şu biçimde ifade edilebilir:

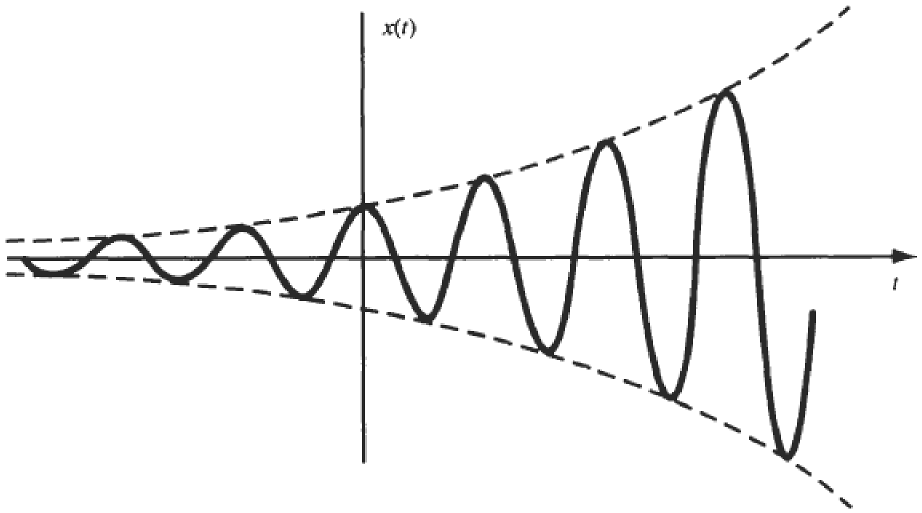
$$u(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)\,d\tau \qquad (1.31)$$

6- Genel Karmaşık Üstel Sinyal

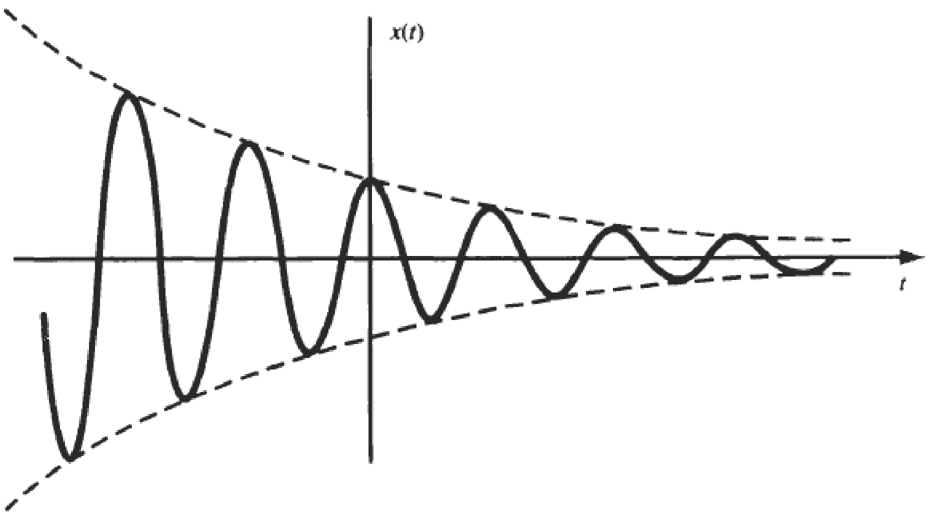
s = σ + jw karmaşık bir sayı olsun ve x(t)'yi şu biçimde tanımlayalım:

$$x(t) = e^{st} = e^{(\sigma + j\omega)t} = e^{\sigma t}(\cos \omega t + j \sin \omega t)$$

bu x(t) sinyali genel karmaşık üstel sinyal olarak adlandırılır. Bu sinyalin gerçel kısmı olan $e^{\sigma t}\cos \omega t$ ve sanal kısmı olan $e^{\sigma t}\sin \omega t$, $\sigma > 0$ ise üstel olarak artan (şekil-a), $\sigma < 0$ ise üstel olarak azalan (şekil-b) sinüzoidal sinyallerdir.



(a)



(b)

7- Karmaşık Üstel Sinyal

$$x(t) = e^{j\omega_0 t}$$

biçiminde gösterilen karmaşık üstel sinyal, karmaşık sinyallere iyi bir örnektir. Euler bağıntısı ile

$$x(t) = e^{j\omega_0 t} = \cos \omega_0 t + j \sin \omega_0 t$$

şeklinde tanımlanabilir. x(t), gerçel kısmı olan $\cos w_0 t$ ve sanal kısmı $\sin w_0 t$ olan karmaşık bir sinyaldir. **Karmaşık üstel sinyalin önemli bir özelliği periyodik olmasıdır**. x(t)'nin temel periyodu

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

eşitliği ile tanımlanır. **x(t) herhangi bir W_0 değeri için periyodiktir.**

8- Gerçel Üstel Sinyal

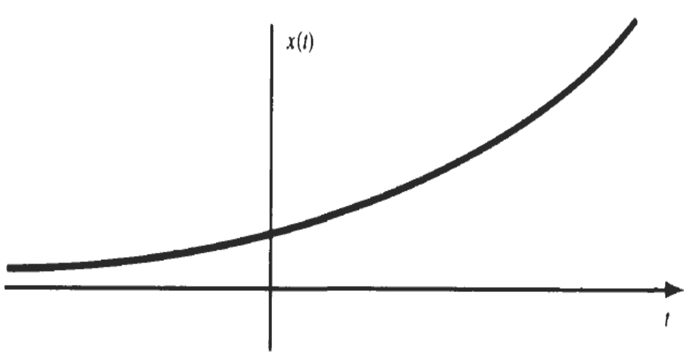
σ gerçel bir sayı olmak üzere s = σ ise

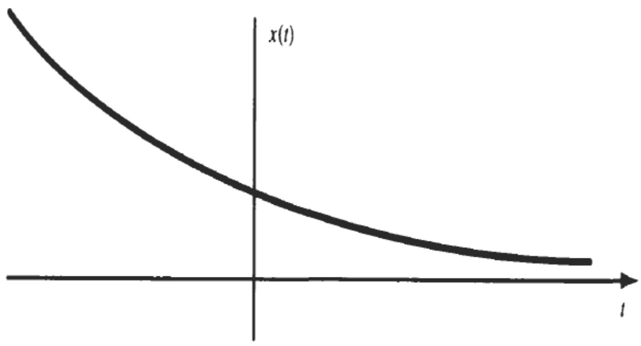
$$x(t) = e^{st} = e^{(\sigma + j\omega)t} = e^{\sigma t}(\cos \omega t + j \sin \omega t)$$

eşitliği bir gerçel üstel sinyale indirgenir.

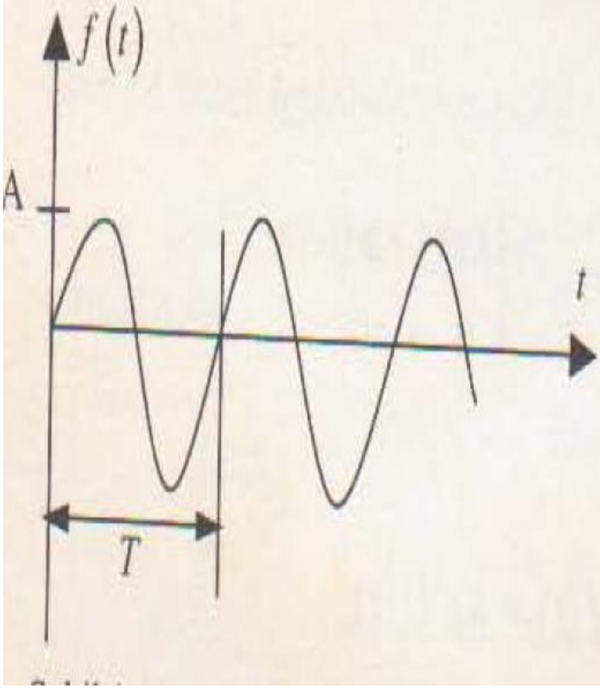
$$x(t) = e^{\sigma t}$$

olur. $\sigma > 0$ ise, x(t) üstel olarak artan, $\sigma < 0$ ise, x(t) üstel olarak azalan bir sinyaldir.





9- Sinüzoidal Sinyal



$$f(t)=\begin{cases}A\sin(\omega t+\theta) & t\geq 0\\ 0 & t<0\end{cases}$$

Sinüsoidal fonksiyona ilişkin olarak şu tanımlar yapılır: $f(t) = f(t + nT)$'dir (burada n bir sabittir).Yani sinüsoidal fonksiyon periyodiktir. T'ye sinüsoidal fonksiyonun periyodu, bunun tersine de frekans denir. $T = 1 / f = 2\pi / \omega$. Burada ω'ya açısal frekans denir ve frekans ile arasındaki ilişki $\omega = 2\pi f$'dir. θ'ya sinüsoidal fonksiyonun faz açısı denir. Bir sabit olan A ise fonksiyonun genliğini göstermektedir. Bu büyüklüklerden T'nin birimi saniye (s), f'nin birimi Hertz (Hz), ω'nın birimi radyan/saniye (rad/s), θ'nın birimi de radyandır (rad).

Sürekli zamanlı bir sinüzoidal sinyal şu biçimde ifade edilir:

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \theta) \tag{1.37}$$

Burada, A genliği (gerçel), ω_0 radyan frekansı (radyan/saniye cinsinden) ve θ faz açısını (radyan cinsinden) gösterir. Şekil 1-9'da gösterilen sinüzoidal sinyalin temel periyodu

$$\cancel{x(t) = A\cos(\omega_0 t + \theta)} \quad T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} \tag{1.37}$$

olup, temel periyodun tersi, temel frekans (f_0) adını alır.

$$f_0 = \frac{1}{T_0} \quad \text{hertz (Hz)} \tag{1.39}$$

(1.38) ve (1.39) eşitliklerinden

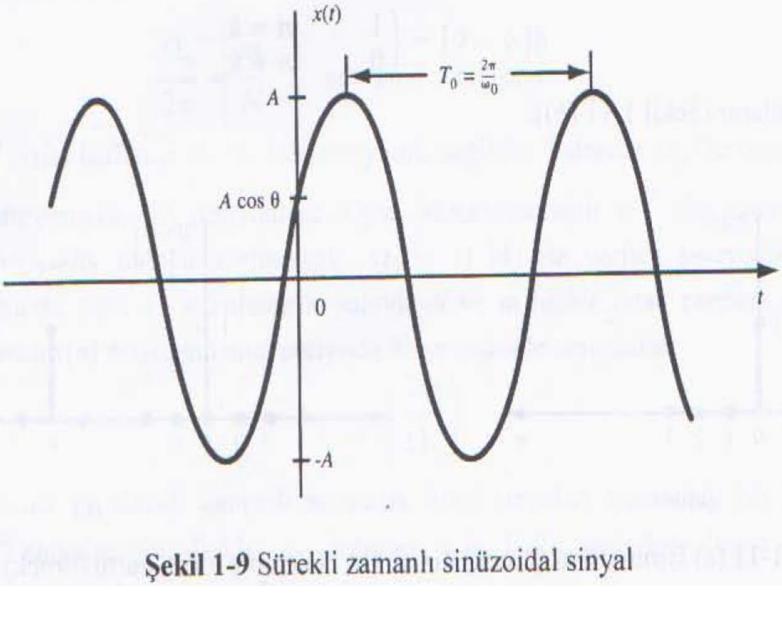
$$\omega_0 = 2\pi f_0 \tag{1.40}$$

elde edilir. ω_0, temel açısal frekans adını alır. Euler bağıntısı yardımıyla, (1.37) eşitliği şu biçimde ifade edilebilir:

$$A\cos(\omega_0 t + \theta) = A\,\mathrm{Re}\{e^{j(\omega_0 t + \theta)}\} \tag{1.41}$$

Burada, "Re", parantezin içindeki ifadenin gerçel bölümünün alındığını gösterir. Benzer olarak, "Im", sanal bölüm için kullanılır:

$$A\,\mathrm{Im}\{e^{j(\omega_0 t + \theta)}\} = A\sin(\omega_0 t + \theta) \tag{1.42}$$



Şekil 1-9 Sürekli zamanlı sinüzoidal sinyal

10- Sinc Fonksiyonu:

Bu fonksiyon ideal alçak geçiren süzgeçlerin birim dürtü tepkisi olduğundan dolayı işaretler ve sistemler teorisinde çok yaygın olarak kullanılır. Şek.1.14 de sürekli sinc fonksiyonu verilmiştir. Bu fonksiyon matematiksel olarak

$$Sincat = \frac{Sin\, a\pi\, t}{a\pi\, t}$$

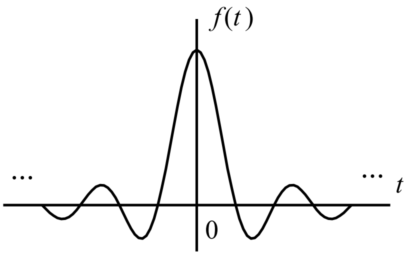
şeklinde tanımlanır.

Tanımdan da anlaşılacağı üzere bu fonksiyon sinüs işaretinin $a\pi t$ değerine oranıdır. Dolayısıyla bu fonksiyon sinüs işaretinin sıfır olduğu t değerlerinde sıfırdır. Bu değerler k tamsayı olmak üzere

$$t = k\frac{1}{a}, \quad k = ..., -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...,$$

ifadesiyle hesaplanır.

Yukarıdaki fonksiyonun maksimum olduğu yerler ise türevinin sıfıra eşitlenmesiyle belirlenir. Bu işlemin yapılması halinde bu noktaların, sıfır noktası hariç, art arda gelen iki sıfır noktasının tam ortasında olmadığı gösterilebilir. Ayrıca bu fonksiyon dikey eksene göre simetrik olmasına rağmen art arda gelen iki sıfır geçiş noktası arasında kalan parçaları, merkezdeki parça hariç, bu iki noktanın ortasından geçen dikey eksene göre simetrik değildir.



Şekil.1.14. Sürekli Sinc fonksiyonu