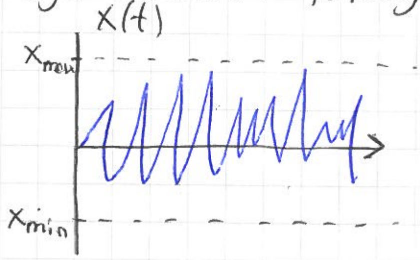
SINYALLER VE SISTEMLER

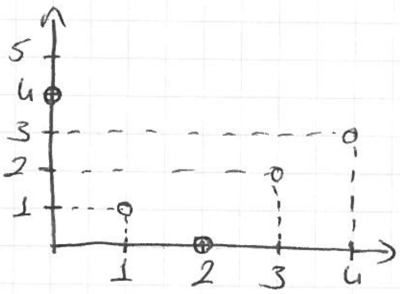
Sinyal, zamanla değişen, belli bir veriyi ve o anki verinin durumunu içeren olgudur.

Sürekli sinyaller, belirli bir aralıktaki tüm değerleri alabilirler ve bağlı oldukları fonksiyonları vardır. Gerçek sinyallerdir.



$$x(t) = 2\sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right)$$

(sayısallaştırmada)
Ayrık sinyaller belirli bir aralıkta sadece tam sayı değerlerini alır. Dizilerle ifade edilir. Gerçek sinyallerdir.



$x[n] = (4, 1, 0, 2, 3) \Rightarrow x(2) = 0$
$x(4) = 3$

$x[n] = (-3, -1, \underset{\uparrow}{1}, 0, 3, 7, 9)$ şeklindeki yazımlarda okun gösterdiği değer $x[0]$'ın değeridir.

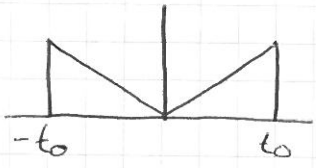
Karmaşık sinyaller, sürekli sinyallere ek olarak içerisinde sanal sayı (karmaşık) içerebilir. Sanal sinyallerdir ve süreklidir.

Rastgele sinyaller, önceden tahmin edilemeyen, belli bir fonksiyonu olmayan değerinin bulunabilmesi için ilgi anda ölçüm yapılması gereken sinyal türüdür. Sanal sinyallerdir.

Çift Sinyaller

$x(-t) = x(t)$

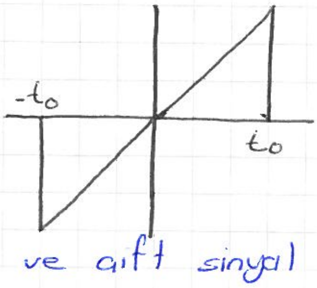
$x[-n] = x[n]$



Tek Sinyaller

$x(-t) = -x(t)$

$x[-n] = -x[n]$



Tüm sinyaller tek ve çift sinyal olarak yazılabilir.

$X(t) = X_t(t) + X_ç(t)$

$$X_ç(t) = \frac{1}{2}\left(x(t) + x(-t)\right) \qquad X_t(t) = \frac{1}{2}\left(x(t) - x(-t)\right)$$

Periyodik sinyaller, $(-\infty, +\infty)$ aralığı içerisinde belirli sürelerde kendini tekrarlayan sinyallerdir.

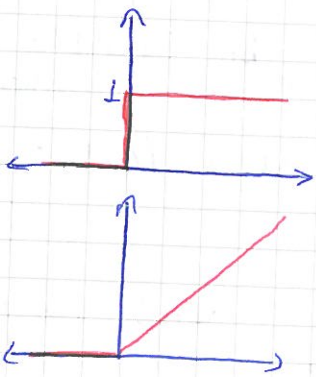
$$X(t+mT) = x(t) \text{ Periyodik}$$

Enerji sinyalleri,

$$E = \int_{t=-\infty}^{t=+\infty} |x(t)|^2 dt \; ; \; 0 < E < \infty \implies x(t) \text{ Enerji sinyali}$$

Ör/: $x(t) = t \cdot u(t)$

$$u(t) = \begin{cases} 1 & ; t \geq 0 \\ 0 & ; t < 0 \end{cases}$$ enerji sinyali midir?



$$x(t) = t \cdot u(t) = \begin{cases} t, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |t u(t)|^2 dt \implies \int_0^{\infty} t^2 dt = \lim_{t \to \infty} \frac{t^3}{3}\Big|_0^{\infty} \quad t = \infty$$

Enerji sinyali değildir.

! Enerji sinyali olabilmesi için değerinin 0 ile sonsuz arasında bir değer alması gerekir.

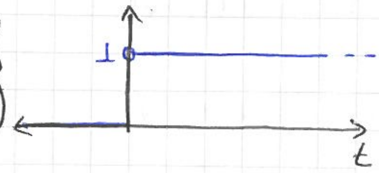
Güç sinyalleri

$$P = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt \; ; \; 0 < P < \infty \text{ Güç sinyali}$$

TEMEL SÜREKLİ ZAMANLI SİNYALER

=Birim Basamak Sinyali=

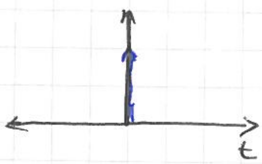
$$u(t) = \begin{cases} 0 \; ; \; t<0 \\ 1 \; ; \; t>0 \\ \text{tanımsız} \; ; \; t=0 \end{cases}$$

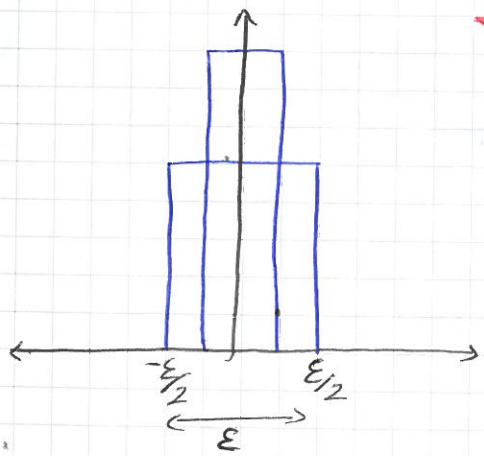


$$u(t-t_0) = \begin{cases} 0 \; ; \; t-t_0<0 \\ 1 \; ; \; t-t_0>0 \end{cases}$$

=Birim Dürtü Sinyali=

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty \; ; \; t=0 \\ 0 \; ; \; E/W \text{ (Elsewhere)} \end{cases}$$





! $\delta(t)$ sinyali sadece sıfır anında tanımlı ve değeri birdir.

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{-\varepsilon/2}^{\varepsilon/2} \delta(t)\,dt = 1$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(t).\delta(t)\,dt = \phi(0)$$

Tek bir nokta dışında her yerde değeri "0" olan herhangi bir sinyalin integrali de sıfır olmalı.

ÖR/: $\phi(t) = \sin(t) \quad \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \sin(t)\,\delta(t)\,dt = \sin(0) = 0$

$$\delta(t-t_0) = \begin{cases} \infty \; ; \; t=t_0 \\ 0 \; ; \; E/W \end{cases} \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t)\,\delta(t-t_0)\,dt = \phi(t_0)$$

- $\delta(a.t) = \dfrac{1}{|a|}\delta(t)$
- $\delta(-t) = \delta(t) \; ; \; \delta(t-t_0) = \delta(t_0-t)$
- $\phi(t)\delta(t) \rightleftharpoons \phi(0)\delta(t)$

$$\phi(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\phi(\tau)\,\delta(t-\tau)\,d\tau$$

Genelleştirilmiş türevi olarak $u'(t)=\delta(t)$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\phi(t).\,g^{(n)}(t)\,dt=(-1)^n\int_{-\infty}^{\infty}\phi^{(n)}(t)\,g(t)\,dt$$

$$u(t)=\int_{-\infty}^{t}\delta(\tau)\,d\tau=\begin{Bmatrix}1\,;\ t>0\\ 0\,;\ t<0\\ \text{tanımsız}\,;\ t=0\end{Bmatrix}$$

=Karmaşık Üstel Sinyaller=

$$x(t)=e^{jw_0t}=\underbrace{\cos(w_0.t)}_{x_1(t)}+j\underbrace{\sin(w_0.t)}_{x_2(t)}$$

$$w_0=2\pi f_0=\frac{2\pi}{T_0}$$

$$x(t)=e^{st}=e^{(\sigma+jw)t}=e^{\sigma t}.e^{jwt}=e^{\sigma t}(\cos wt+j\sin wt)$$

$$s=\sigma+jw \qquad w=0\Rightarrow x(t)=e^{\sigma t}$$

=Sinüzoidal Sinyaller=

$$x(t)=A.\cos(w_0t+\theta)=A.Re\left\{e^{j(w_0t+\theta)}\right\}$$

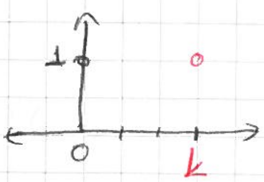
TEMEL AYRIK ZAMANLI SINYALER#

=Birim Basamak Dizisi=

$$u[n]=\begin{Bmatrix}1\,;\ n\geq 0\\ 0\,;\ n<0\end{Bmatrix} \qquad u[n-k]=\begin{Bmatrix}1\,;\ n-k\geq 0\\ 0\,;\ n-k<0\end{Bmatrix}$$

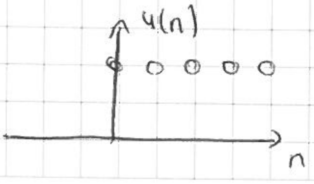
=Birim Dürtü Dizisi=

$$\delta[n]=\begin{Bmatrix}1\,;\ n=0\\ 0\,;\ E/W\end{Bmatrix}$$



$$\delta[n-k]=\begin{Bmatrix}1\,;\ n=k\\ 0\,;\ E/W\end{Bmatrix}$$

- $X[n].\delta[n]=X[0].\delta[n]$



→

- $x[n].\delta[n-k]=x[k]\,\delta(n-k)$

$$\delta[n]=u[n]-u[n-1]$$

- $u[n]=\sum_{k=-\infty}^{n}\delta[k]$

=Karmaşık Üstel Dizileri=

$$x[n] = e^{j\Omega_0 n} = \cos(\Omega_0 n) + j\sin(\Omega_0 n) \qquad \Omega_0 = \frac{2\pi}{N_0}$$

$$e^{j(\Omega_0 + 2\pi k)n} = e^{j\Omega_0 n} \qquad e^{j2\pi k n} = 1 \quad / \; k \in \mathbb{Z}$$

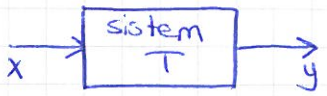
$x[n] = C.\alpha^n$ Karmaşık dizilerin genelleştirilmiş hali

$C = 1 \quad \alpha = e^{j\Omega_0} \Rightarrow x[n] = e^{j\Omega_0 n}$

=Sinüzoidal Diziler=

$$x[n] = A.\cos(\Omega_0.n + \theta) = A.Re\{e^{j(\Omega_0 n + \theta)}\}$$

=SISTEM GÖSTERIMI=



$$y = T\{x\} = Tx$$

$$Tx = Ax + B$$

Deterministik sistemde, x ve y sinyalleri deterministik sinyallerdir. Her anki bir zamandaki değeri bulunabilir.

Stokastik sistemde, x ve y sinyallerinden en az biri tanesi stokastik sinyaldir. Herangi bir zamanda rastgele değerler alır.

Sürekli zaman sistemi, $(x(t), y(t))$

Ayrık zaman sistemi; $(x[n], y[n])$

Bellekli Sistemler; sinyalin önceki veya sonraki değerlerini hafızada tutar.

$$y(t) = Tx = Ax(t-3) + Bx(t+1)$$

Belleksis Sistemler; sinyallerin sadece t anındaki değerini tutar

$$y(t) = Tx = Ax(t) + B + C.\cos(2\pi f t)$$

$$V_R(t) = i_R(t).R \qquad V_C(t) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i_C(\tau).d\tau$$

Nedensel sistemlerde; bellekli sistemlerden farklı olarak istenen t anındaki fonksiyonda x(t) ya da sadece x(t-a) (önceki anlardaki) değerleri bulunur. Sonraki anlardaki değerler bilinemez.

$$y(t) = x(t) + 2\cancel{x}x(t-2)$$

Nedensel olmayan sistemlerde; bütün t değerleri için x(t)'nin değerinin y(t) den önce ya da geride olması önemli değildir.

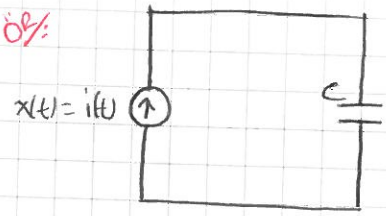
$$y(t) = x(-t) \qquad t=3 : x(-3) = y(3) \quad t=-3 ; x(3) = y(-3)$$

Doğrusal sistemlerde;

- Toplamsallık $y_1 = Tx_1$ ve $y_2 = Tx_2$ olmak üzere $y = y_1 + y_2 = T\{x_1 + x_2\}$
- Homojenlik şartı $\alpha y = T\{\alpha x\}$

yani $T\{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2\} = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2$ eşitliğini sağlaması gerekir.

Ör:



$V_c = y(t)$

Sistem doğrusal mıdır?

$$y(t) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\,d\tau$$

$$y_1 = \frac{\alpha_1}{C}\int_{-\infty}^{t} x_1(\tau)\,d\tau$$

$$y_2 = \frac{\alpha_2}{C}\int_{-\infty}^{t} x_2(\tau)\,d\tau$$

$x(t) = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2$

$x(t) = \alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t)$

$$y_1(t) + y_2(t) \stackrel{?}{=} T\{x(t)\} = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} \alpha_1 x_1(\tau) + \alpha_2 x_2(\tau)\,d\tau$$

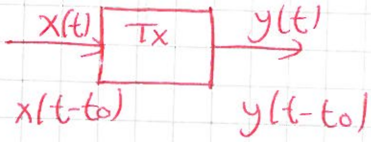
$$y_1(t) + y_2(t) \stackrel{?}{=} \frac{\alpha_1}{C}\int_{-\infty}^{t} x_1(\tau)\,d\tau + \frac{\alpha_2}{C}\int_{-\infty}^{t} x_2(\tau)\,d\tau$$

↳ Eşitlik sağlandığı için $y(t)$ sistemi lineerdir.

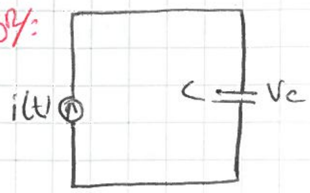
Doğrusal olmayan sistemler; doğrusallık şartını sağlamayan sistemlerdir.

Zamanla değişen sistemler; giriş sinyalinin ötelenmesi kadar çıkış sinyali ötelenmiyor

Zamanla değişmeyen sistemler; giriş sinyalinin ötelenmesi kadar çıkış sinyalininde ötendiği sistemlerdir.



ÖR/:



$$y(t) = T\{x(t)\} = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\,d\tau$$

$$x_1(t) = x(t-t_0)$$

$$y_1(t) = T\{x_1(t)\} = T\{x(t-\tau)\}$$

$$T\{x_1(t)\} = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} x_1(\tau)d\tau$$

$$y_1(t) \stackrel{?}{=} y(t-t_0) \qquad y_1(t) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} x(\tau-t_0)\tau$$

$$y(t-t_0) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t-t_0} x(\tau)d\tau \stackrel{?}{=} \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} x(\tau-t_0)d\tau$$

$$\tau - t_0 = \lambda$$
$$d\tau = d\lambda$$

$$\Rightarrow \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t-t_0} x(\tau)d\tau \stackrel{?}{=} \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t-t_0} x(\lambda)d\lambda$$

↳ Eşitlik sağlandığından zamanla değişmeyen sistem

ÖR/: $y(t) = x(t)\cos(\underbrace{2\pi f_0}_{w_0} t)$

$$x_1(t) = x(t-t_0)$$
$$y_1(t) = x_1(t-t_0)\cos(w_0 t)$$

$$y_1(t) \stackrel{?}{=} y(t-t_0) \Rightarrow y(t-t_0) = x(t-t_0)\cdot\cos(w_0(t-t_0))$$

$$x(t-t_0)\cos(w_0 t) \neq x(t-t_0)\cdot\cos(w_0(t-t_0))$$ olduğundan zamanla değişen sistem

= Kararlı Sistem =

$|x| \leq k_1 \Rightarrow |y| \leq k_2$; k_1, k_2: Sonlu Gerçek Sayılar

= Doğrusal, Zamanla Değişmeyen Sistemler =

Dürtü tepkisi $(h(t))$ $\quad h(t) = T\{\delta(t)\}$

$$h[n] = T\{\delta[n]\}$$

$$y(t) = T\{x(t)\} = T\left\{\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\cdot\delta(t-\tau)d\tau\right\}$$

$$T\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)T\{\delta(t-\tau)\}d\tau$$

Sistem zamanla değişmez ise
$y(t-\tau) = T\{x(t-\tau)\}$
Sistem lineer ise;
$h(t-\tau) = T\{\delta(t-\tau)\}$

$$\boxed{y(t) = T\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau}$$

Ör: Doğrusal zamanla değişmeyen bir sistem için

$x(t)=u(t) \qquad h(t)=e^{-\alpha t}\cdot u(t)\,, \ \alpha>0 \qquad y(t)=?$

$$y(t)=x(t)*h(t)=\int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)\cdot \underbrace{e^{-\alpha(t-\tau)}}_{e^{-\alpha t}\cdot e^{\alpha\tau}}\, u(t-\tau)\,d\tau \quad ; \ \alpha>0$$

$$=e^{-\alpha t}\int_{0}^{\infty} e^{\alpha\tau}\cdot u(t-\tau)\,d\tau$$

$$u(\tau)=\begin{Bmatrix} 1 \ ; & \tau>0 \\ 0 \ ; & \tau<0 \end{Bmatrix}$$

$$u(t-\tau)=\begin{Bmatrix} 1 \ ; & \tau<t \\ 0 \ ; & \tau>t \end{Bmatrix}$$

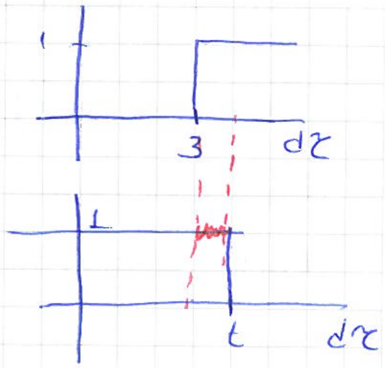
$$y(t)=e^{-\alpha t}\int_{0}^{t} e^{\alpha\tau}\,d\tau\,, \ = e^{-\alpha t}\,(e^{\alpha t}-1)$$

Ör: $x(t)=u(t)-u(t-3)\,, \ h(t)=u(t)-u(t-2) \quad ; \ y(t)=?$

$$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\cdot h(t-\tau)\,d\tau \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty}[u(\tau)-u(\tau-3)][u(t-\tau)-u(t-\tau-2)]\,d\tau$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)u(t-\tau)\,d\tau-\int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)\cdot u(t-\tau-2)\,d\tau-\int_{-\infty}^{\infty} u(\tau-3)\,u(t-\tau)\,d\tau+\int_{-\infty}^{\infty} u(\tau-3)\cdot u(t-\tau-2)\,d\tau$$

$$u(t)\int_{0}^{t} d\tau-u(t-2)\int_{0}^{t-2} d\tau-u(t-3)\int_{3}^{t} d\tau+u(t-5)\int_{3}^{t-2} d\tau$$



$$y(t)=u(t)\cdot t-u(t-2)\cdot(t-2)-u(t-3)(t-3)+u(t-5)(t-5)$$

$$y(t)=\begin{Bmatrix} 0 & ; & t<0 \\ t & ; & 0<t<2 \\ t-(t-2) & ; & 2<t<3 \\ 5-t & ; & 3<t<5 \\ 0 & ; & t>5 \end{Bmatrix}$$

$h(t)$: Dürtü tepkisi $\quad T\{\delta(t)\}$
$s(t)$: Basamak tepkisi $\ T\{u(t)\}$

$$s(t)=h(t)*u(t)=\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\cdot u(t-\tau)\,d\tau \qquad s(t)=\int_{-\infty}^{t} h(\tau)\,d\tau$$