Отчёт по лабораторной работе №6

Разложение чисел на множители

Кирил Тесленко

Содержание

List of Figures

1 Цель работы

Изучение задачи разложения на множители, изучение p-алгоритма Поллрада.

2 Теоретические сведения

Разложение на множители — предмет непрерывного исследования в прошлом; и такие же исследования, вероятно, продолжатся в будущем. Разложение на множители играет очень важную роль в безопасности некоторых криптосистем с открытым ключом.

Согласно Основной теореме арифметики любое положительное целое число больше единицы может быть уникально записано в следующей главной форме разложения на множители, где $p_1, p_2, ..., p_k$ — простые числа и $e_1, e_2, ..., e_k$ — положительные целые числа.

$$n = p_1^{e_1} * p_2^{e_2} * ... * p_k^{e_k}$$

Поиск эффективных алгоритмов для разложения на множители больших составных чисел ведется давно. К сожалению, совершенный алгоритм для этого пока не найден. Хотя есть несколько алгоритмов, которые могут разложить число на множители, ни один не способен провести разложение достаточно больших чисел в разумное время. Позже мы увидим, что это хорошо для криптографии, потому что современные криптографические системы полагаются на этот факт. В этой секции мы даем несколько простых алгоритмов, которые проводят разложение составного числа. Цель состоит в том, чтобы сделать процесс разложения на множители менее трудоёмким.

В 1974 г. Джон Поллард разработал метод, который находит разложение числа p на простые числа. Метод основан на условии, что p–1 не имеет сомножителя, большего, чем заранее определенное значение B, называемое границей. Алгоритм Полларда показывает, что в этом случае

$$p = GCD(2^{B!} - 1, n)$$

Сложность. Заметим, что этот метод требует сделать B–1 операций возведения в степень $a = a^e modn$. Есть быстрый алгоритм возведения в степень, который выполняет это за $2 * 1og_2 B$ операций. Метод также использует вычисления НОД, который требует n^3 операций. Мы можем сказать, что сложность — так или иначе больше, чем $O(B)$ или $O(2^n)$, где n_b — число битов в B. Другая проблема – этот алгоритм может заканчиваться сигналом об ошибке. Вероятность успеха очень мала, если B имеет значение, не очень близкое к величине $\sqrt{n}$.

2.1 p-алгоритм Поллрада

- Вход. Число n, начальное значение c, функция f, обладающая сжимающими свойствами.
- Выход. Нетривиальный делитель числа n.

1. Положить $a = c, b = c$
2. Вычислить $a = f(a)(modn), b = f(b)(modn)$
3. Найти $d = GCD(a - b, n)$
4. Если $1 < d < n$, то положить $p = d$ и результат: p. При $d = n$ результат: ДЕЛИТЕЛЬ НЕ НАЙДЕН. При $d = 1$ вернуться на шаг 2.

3 Выполнение работы

3.1 Реализация алгоритма на языке Python

```
from math import gcd


def f(x, n):
    return (x*x+5)%n


def fu(n, a, b, d):
    a = f(a, n)
    b = f(f(b, n), n)
    d = gcd(a-b, n)
    if 1<d<n:
        print(d)
        exit()
    if d == n:
        print("not found")
    if d == 1:
        fu(n, a, b, d)


def main():
    n = 1359331
    c = 1
```

```
a = f(c, n)
b = f(a, n)
d = gcd(a-b, n)
if 1< d < n:
    print(d)
    exit()
if d == n:
    pass
if d == 1:
    fu(n, a, b, d)
```

3.2 Контрольный пример

In [1]:

```python
from math import gcd

def f(x, n):
    return (x*x+5)%n

def fu(n, a, b, d):
    a = f(a, n)
    b = f(f(b, n), n)
    d = gcd(a-b, n)
    if 1<d<n:
        print(d)
        exit()
    if d == n:
        print("not found")
    if d == 1:
        fu(n, a, b, d)

def main():
    n = 1359331
    c = 1
    a = f(c, n)
    b = f(a, n)
    d = gcd(a-b, n)
    if 1< d < n:
        print(d)
        exit()
    if d == n:
        pass
    if d == 1:
        fu(n, a, b, d)
```

In [2]:

```python
main()
```

```
1181
```

Figure 3.1: Работа алгоритма

4 Выводы

Изучили задачу разложения на множители и р-алгоритм Поллрада.

Список литературы

1. Алгоритмы тестирования на простоту и факторизации
2. P-метод Полларда