

SGC ライブライ-162

共振器量子電磁力学

量子コンピュータのハードウェア理論

越野 和樹 著

サイエンス社

まえがき

「共振器量子電磁力学について理論面から解説したテキストを」という願ってもない依頼をいただいたのは 2017 年の 9 月であった。順調に書き進めていれば平成のうちに出版されていた筈が、2019 年の 5 月には令和へと時代が移り、そして 2020 年の春先には新型コロナウィルスの感染拡大により、東京オリンピックが延期になるばかりでなく、社会全体が未曾有の混乱に陥っている。まさに「明日何が起こるか分からぬ」といった世相のなかで、その副産物として研究室や自宅に籠る日々が続き、ようやく本書を書き上げることができた。

共振器量子電磁力学（共振器 QED）は「量子電磁力学」という響きから素粒子・高エネルギー物理を連想させるが、実際にはレーザーなどの基礎理論である「量子光学」の一分野である。共振器量子電磁力学を手短に表現すると、「原子を共振器に閉じ込めて（散逸の元となる）自由空間から隔離し、クリーンな量子系を作る」分野といえる。それゆえ、量子計算など量子情報処理のハードウェア構築に向け、欠かすことのできない研究分野となっている。構成要素は、一見すると原子（2 準位系）と共振器（調和振動子）のみであり、固有状態や固有エネルギーなら、あっという間に求まってしまう。では、この系に何か面白い物理はあるのか？——こう思われる方は、是非本書を読み進めて欲しい。共振器 QED 系は、孤立量子系を目指しながらも、制御や測定のために外部光子場と繋がらざるを得ない。このような量子開放系の豊かな物理を伝えるのが、本書の目指すところである。

執筆にあたっては次の点に留意した。(i) 量子光学の和書が比較的少ないとから、当分野の基礎事項をひととおりおさえること。(ii) 大学の学部 4 年生が、本書のみで、無理なく読み進められること。ヒルベルト空間やシュレーディンガー方程式など、量子力学の基礎的概念を知っていれば快調に読み進められると思うが、成果はどうであろうか。

1 章から 3 章は本書の導入部分であり、1 章では量子光学の基礎事項を、2 章では自由空間中の量子光学から共振器 QED 系への橋渡しを、3 章では孤立量子系としての共振器 QED 系について、それぞれ論じている。歴史に沿ってこの順番で説明したが、1 章で扱う自然放出は多自由度系の不可逆なダイナミクス、3 章で扱う真空 Rabi 振動は少数自由度系の可逆なダイナミクスであり、物理としては後者の方がシンプルである。4 章と 5 章は、量子開放系の理論的取り扱いを説明している。古典・量子に関わらず、開放系を扱う標準的なアプローチは、着目する「対象系」とそれ以外の「環境系」に分け、後者について平均化することであり、4 章で議論するマスター方程式はこの手法に則っている。5 章で論じる出入力定式化は、環境自由度も活きた自由度として扱う方法である。量子情報処理においては、制御や測定のために、共振器外部の伝播光子を定量的に議論する必要があり、この方法が必須である。ユニタリな時間発展を追う中で、緩和が自然に導入される様子を堪能していただきたい。6 章から 8 章は、量子開放系の具体的な応用問題である。6 章では、外

界から何も入力の無い場合の緩和を扱い、共振器 QED 系の弱結合・強結合領域が、古典振動子の過減衰・減衰振動に相当することなどを見る。7 章では、古典に対する共振器 QED 系の応答を扱う。古典光は電場振幅で記述されるが（コヒーレント光）、非線形光学応答に付随して、振幅を持たないインコヒーレント光が生じることなどを議論する。8 章では、量子ゲートの観点から、単一光子あるいは 2 光子パルスに対する共振器 QED 系の応答を議論する。9 章と 10 章では、共振器 QED 系の量子情報処理への応用について触れている。9 章では、量子ネットワークのひな型とも言える、複数の原子が一つの導波路に結合している「導波路 QED 系」を議論する。導波路中の伝播光子が離れた原子の間に相互作用を媒介し、協力現象の源となる。10 章は、共振器のパラメータに時間的変調を加えてできる、パラメトリック増幅器を議論する。

全体を通しての注意点を二つほど。(i) 2 章以降では、換算プランク定数 \hbar 、光速 c （あるいは導波路中の光子伝播速度 v ）を 1 とする自然単位系を採用している。このため、時刻 t と位置 r 、周波数 ω と波数 k とエネルギー ε が同じ次元になっている。本書中には $f(t - r)$ 、 $e^{i\omega r}$ のような表記があふれているが驚かないで欲しい。(ii) 連続モードにある光子のラベルとして、本書では位置 r あるいは波数 k を用いている。量子光学の成書では時刻 t あるいは周波数 ω を用いるものが多いが、運動方程式は t に関する微分方程式なので、 t や ω は方程式を解く段階までとっておくためである。

本書は多くの方々との共同研究に基づいています。特にこの 10 年ほど、超伝導原子を用いた実験に深く関わさせていただき、刺激のある研究生活を送ることができました。特に、中村泰信、山本剛、猪股邦宏、河野信吾、仙場浩一、吉原文樹の各氏に感謝申し上げます。かつて筆者は理論と実験とは独立した学問のように思っていましたが、共同研究をとおして理論研究の醍醐味を教えていただきました。また、石原一、加藤岳生、馬場基彰、青木隆朗、金本里奈、後藤隼人、徳永裕己、Julio R. Gea-Banacloche の各氏からは、日常的な議論をとおして様々なご教示をいただきました。また、東京医科歯科大学教養部の皆様（特に増田さん、設楽さん、イワンさん）、サイエンス社編集部の大溝良平、平勢耕介両氏に、お礼申し上げます。最後に、気まぐれな筆者を暖かく支えてくれている家族のみなさんへ、いつも本当に有難う！

2020 年 7 月

越野 和樹

目 次

第 1 章 量子光学の基礎	1
1.1 調和振動子	1
1.1.1 調和振動子の古典論	1
1.1.2 交換関係・不確定性関係	2
1.1.3 基底状態・零点振動	3
1.1.4 数状態	4
1.1.5 コヒーレント状態	6
1.1.6 スクイーズド状態	11
1.1.7 热平衡状態	15
1.2 電磁場と光子	16
1.2.1 自由電磁場の古典論	16
1.2.2 自由電磁場の量子化	16
1.3 原子	18
1.3.1 電子の波動関数	18
1.3.2 第二量子化	19
1.3.3 原子と光子の相互作用	20
1.3.4 2 準位原子	21
1.4 自然放出	24
1.4.1 半古典理論から量子電磁力学へ	24
1.4.2 不安定量子系	25
1.4.3 崩壊直後の振る舞い	26
1.4.4 フエルミの黄金律	26
1.4.5 黄金律の成立条件	28
1.4.6 輻射崩壊レート	29
1.4.7 自己エネルギー・Lamb シフト	30
1.5 Rabi 振動	32
1.6 着衣状態	36
第 2 章 QED から共振器 QED へ	38
2.1 共振器 QED とは	38
2.2 共振器 QED の魅力	40
2.3 さまざまな共振器 QED 系	42

2.3.1	原子	42
2.3.2	超伝導回路 QED 系	43
2.4	原子 - 共振器結合系の理論モデル	45
2.4.1	Rabi モデル	45
2.4.2	Jaynes-Cummings モデル	46
2.5	共振器 QED 系における散逸	47
2.5.1	原子の散逸	47
2.5.2	共振器の散逸	47
2.6	弱結合・強結合	48
第 3 章 共振器 QED 系：孤立系としての性質		50
3.1	Jaynes-Cummings 模型の固有状態	50
3.2	真空 Rabi 振動	51
3.3	分散結合領域	53
3.3.1	分散シフト	53
3.3.2	Schrieffer-Wolff 変換による導出	55
3.3.3	臨界光子数	55
3.4	回転波近似の影響：Bloch-Siegert シフト	56
3.5	超強結合・深強結合	58
第 4 章 量子開放系の理論 (1):量子マスター方程式		62
4.1	マスター方程式の導出	62
4.2	原子 - 共振器系のマスター方程式	65
4.3	期待値の運動方程式	66
第 5 章 量子開放系の理論 (2):入出力定式化		67
5.1	共振器 - 導波路結合系	67
5.2	古典光の状態ベクトル	70
5.3	演算子の時間発展	71
5.4	期待値の時間発展	73
5.5	有効ハミルトニアン	73
5.6	様々な緩和	74
第 6 章 共振器 QED 系の緩和		76
6.1	原子・共振器の緩和	76
6.1.1	原子の緩和	76
6.1.2	共振器の緩和	77
6.2	真空 Rabi 振動：弱結合と強結合	77

6.2.1	ハミルトニアンと初期状態	78
6.2.2	状態ベクトルに基づく解析	78
6.2.3	弱結合と強結合	81
6.2.4	マスター方程式による方法	81
6.3	Purcell 効果	82
6.3.1	Purcell 効果の導出 (1) : 定常状態近似	82
6.3.2	Purcell 因子・cooperativity	83
6.3.3	Purcell 効果の導出 (2) : Fano 対角化	84
6.4	位相緩和と量子ゼノ効果	86
6.4.1	位相緩和のもとでの真空 Rabi 振動	86
6.4.2	繰り返し測定のもとでの真空 Rabi 振動	88
第 7 章	古典光に対する応答	89
7.1	共振器の定常応答	89
7.1.1	定式化	89
7.1.2	入射波	90
7.1.3	定常解	90
7.1.4	反射波	91
7.1.5	両側共振器	92
7.2	原子の定常応答	93
7.2.1	定式化	93
7.2.2	定常解	95
7.2.3	弹性・非弹性散乱	95
7.2.4	散乱光の周波数スペクトル	97
7.2.5	アンチバンチング	100
第 8 章	光子に対する応答	103
8.1	2 準位原子の 1 光子・2 光子応答	103
8.1.1	定式化	103
8.1.2	古典パルスとの対応	105
8.1.3	1 光子応答	106
8.1.4	2 光子応答	107
8.1.5	具体例 : 三角関数型パルス	108
8.2	ビームスプリッタ	111
8.2.1	1 光子の散乱	112
8.2.2	2 光子の散乱 : HOM 干渉	112
8.3	2 光子量子ゲートへの応用	113
8.3.1	Fredkin ゲート	113

8.3.2	平均ゲート忠実度	115
8.4	Λ 型原子の応答	117
8.4.1	定式化	117
8.4.2	時間発展	119
8.4.3	長パルス極限	120
8.5	原子-光子量子ゲート	120
8.5.1	SWAP ゲート	120
8.5.2	$\sqrt{\text{SWAP}}$ ゲート	122
8.6	着衣状態エンジニアリング	123
8.6.1	セットアップ	123
8.6.2	着衣状態	124
8.6.3	原子-光子ゲート	127
第 9 章	導波路 QED 入門	129
9.1	導波路 QED 系とは	129
9.2	無限導波路との結合	129
9.3	超放射	132
9.3.1	角運動量演算子と固有状態	132
9.3.2	超放射	134
9.3.3	近似解	135
9.3.4	反超放射	136
9.4	半無限導波路との結合	137
9.5	半無限導波路に結合した単一原子	139
9.6	Josephson 量子フィルタ	140
9.6.1	セットアップと定式化	141
9.6.2	寿命とゲート時間のトレードオフ	141
9.6.3	輻射緩和	142
9.6.4	光学応答	146
第 10 章	パラメトリック増幅器・発振器	149
10.1	定式化	149
10.2	パラメトリック増幅	151
10.2.1	発振条件	151
10.2.2	定常解	152
10.2.3	非縮退モード	152
10.2.4	縮退モード	153
10.3	スクイーズド光生成	154
10.3.1	共振器 1 (増幅器) のスクイージング	155

10.3.2 共振器 2 のスクイージング	156
10.3.3 フーリエ変換による解析	157
付録 A 量子もつれと混合状態	161
A.1 直積状態とエンタングル状態	161
A.2 密度演算子	162
A.3 純粹状態と混合状態	163
A.4 具体例	163
付録 B 角運動量	165
B.1 交換関係	165
B.2 固有状態	166
付録 C Schrieffer-Wolff 変換	168
付録 D ラプラス変換	170
D.1 定義	170
D.2 ラプラス変換の諸公式	170
D.2.1 初期値・最終値の定理	172
D.3 ラプラス逆変換	172
D.4 微分方程式への応用	172
付録 E 量子ゼノ効果	174
E.1 射影仮設と量子ゼノ効果	174
E.2 一般化された黄金律	175
E.3 量子逆ゼノ効果	176
参考文献	178
索引	182

第 1 章

量子光学の基礎

光子（量子化された電磁場）と原子を舞台におこる量子現象を扱う分野は量子光学と呼ばれており、共振器電磁気学はその一部である。そこで本章では、光子と原子それぞれの量子力学や、両者の相互作用によりおこる自然放出について議論し、「共振器」のつかない量子電磁気学の基礎を概説する。

1.1 調和振動子

本節では、調和振動子の量子化を行い、そのさまざまな量子状態について議論する。電磁場は独立な調和振動子の集まりとして記述されるので、量子光学の理解には調和振動子の量子力学を欠かすことができない^{[1], [2]}。

1.1.1 調和振動子の古典論

まず調和振動子の古典力学を復習しよう。質量 m 、角振動数 ω の一次元調和振動子を考え、その位置を q 、速度を \dot{q} で表す。ここで、ドットは時間微分を表し、 $\dot{q} = \frac{dq}{dt}$ である。この調和振動子のラグランジアン (Lagrangian) は、

$$L = \frac{m}{2}\dot{q}^2 - \frac{m\omega^2}{2}q^2 \quad (1.1)$$

である。ラグランジュ方程式

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) = \frac{\partial L}{\partial q} \quad (1.2)$$

から、お馴染みの調和振動子の運動方程式、

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \omega^2q = 0 \quad (1.3)$$

が導出される。

式 (1.1) のラグランジアンより、運動量 p とハミルトニアン (Hamiltonian) H は

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = m\dot{q}, \quad (1.4)$$

$$H = p\dot{q} - L = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 q^2}{2} \quad (1.5)$$

と定まる。ハミルトン方程式

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q} \quad (1.6)$$

からも、運動方程式 (1.3) を導出できる。ここでは古典論であるため、 q, p は普通の数 (c 数) である。式 (1.3) は 2 階微分方程式であるため、一般解は

$$q(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t \quad (1.7)$$

のように 2 個の任意の実定数 A, B を含んでいる。これらの定数は、初期条件によって定める。例として、初期時刻 $t = 0$ に振動子を位置 q_0 に静止させて手を放す場合には、 $q(0) = q_0, \dot{q}(0) = 0$ であり、

$$q(t) = q_0 \cos \omega t, \quad p(t) = -m\omega q_0 \sin \omega t \quad (1.8)$$

となる。

1.1.2 交換関係・不確定性関係

古典力学では、位置 q 、運動量 p は実変数であり、掛け算の際に両者の順番を自由に交換できる。量子力学への移行は、これらをエルミート演算子 \hat{q}, \hat{p} として、両者に交換関係

$$[\hat{q}, \hat{p}] = \hat{q}\hat{p} - \hat{p}\hat{q} = i\hbar \quad (1.9)$$

を課すことで行われる。交換関係を課すことによって、粒子の位置と運動量を同時に確定させることができないという、古典力学にはない性質が生じる。^{*1)} より定量的には、ある量子状態 $|\psi\rangle$ に対して、位置および運動量の揺らぎを

$$\Delta q = \sqrt{\langle \hat{q}^2 \rangle - \langle \hat{q} \rangle^2}, \quad \Delta p = \sqrt{\langle \hat{p}^2 \rangle - \langle \hat{p} \rangle^2} \quad (1.10)$$

により定義する。ただし、演算子 \hat{O} に対する期待値を $\langle \psi | \hat{O} | \psi \rangle = \langle \hat{O} \rangle$ と略記した。すると位置と運動量の揺らぎの間に次の不等式が成立する。

$$\Delta q \Delta p \geq \hbar/2. \quad (1.11)$$

これを不確定性関係 (uncertainty relation) と呼ぶ。また、等号が成立するような量子状態を最小不確定状態 (minimum uncertainty state) と呼ぶ。

不確定性関係 [式 (1.11)] を導出してみよう。位置および運動量の平均値か

*1) 古典力学では、式 (1.8) のように、位置と運動量が同時に確定した値を持っている。

らのそれを表す演算子

$$\delta\hat{q} = \hat{q} - \langle \hat{q} \rangle, \quad \delta\hat{p} = \hat{p} - \langle \hat{p} \rangle \quad (1.12)$$

を導入すると、 $\langle (\delta\hat{q})^2 \rangle = (\Delta q)^2$, $\langle (\delta\hat{p})^2 \rangle = (\Delta p)^2$, $[\delta\hat{q}, \delta\hat{p}] = i\hbar$ が直ちに確認できる。また、実数 λ を使って演算子 $\hat{O} = \lambda\delta\hat{q} - i\delta\hat{p}$ を定義し、 $\langle \hat{O}^\dagger \hat{O} \rangle$ を計算すると

$$\langle \hat{O}^\dagger \hat{O} \rangle = (\Delta q)^2 \lambda^2 + \hbar\lambda + (\Delta p)^2 \quad (1.13)$$

が得られる。ここで、 $\langle \hat{O}^\dagger \hat{O} \rangle = \langle \psi | \hat{O}^\dagger \hat{O} | \psi \rangle$ はベクトル $\hat{O} | \psi \rangle$ の大きさの自乗を表すので、パラメータ λ の値に依らず $\langle \hat{O}^\dagger \hat{O} \rangle \geq 0$ である。つまり λ に対する二次方程式 $\langle \hat{O}^\dagger \hat{O} \rangle = 0$ が異なる実数解を持たないので、判別式 $\hbar^2 - 4(\Delta q)^2(\Delta p)^2 \leq 0$ より不確定性関係 [式 (1.11)] が証明される。不確定性関係は交換関係 [式 (1.9)] のみの帰結であるため、調和振動子に限らず、全ての量子力学的粒子に対して成り立つ。

1.1.3 基底状態・零点振動

ある物理系における最低エネルギー状態を基底状態 (ground state) と呼ぶ。古典調和振動子の場合には、ポテンシャルの底に振動子が静止している $q(t) = 0, p(t) = 0$ の状態が基底状態であり、そのエネルギーは $E = 0$ である。ところが、このように $q(t), p(t)$ 双方が同時に確定している状態は、量子力学では不確定性関係により禁止されている。本項では、量子化された調和振動子の基底状態の性質を定性的に見てみよう。

量子化された調和振動子のハミルトニアンは

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2\hat{q}^2}{2} \quad (1.14)$$

である。一見、古典調和振動子のハミルトニアン [式 (1.5)] と同一に見えるが、ここでは \hat{q}, \hat{p} が演算子になっており、ハミルトニアン自体が演算子であることに注意しよう。このハミルトニアンに対して、基底状態で期待値をとる。系の対称性より、基底状態では $\langle \hat{q} \rangle = 0, \langle \hat{p} \rangle = 0$ であるので、式 (1.10) より $\langle \hat{q}^2 \rangle = (\Delta q)^2, \langle \hat{p}^2 \rangle = (\Delta p)^2$ である。よって、

$$\begin{aligned} \langle \hat{H} \rangle &= \frac{(\Delta p)^2}{2m} + \frac{m\omega^2(\Delta q)^2}{2} \\ &\geq \omega\Delta q\Delta p \\ &\geq \frac{\hbar\omega}{2} \end{aligned} \quad (1.15)$$

となる。ただし 2 行目の不等式は相加相乗平均の関係による数学的な不等式であり、3 行目の不等式は不確定性関係 [式 (1.11)] による物理的な不等式である。

基底状態は、式(1.15)で許される最低のエネルギー $E_0 = \hbar\omega/2$ を持つものとしよう。すると、式(1.15)における二つの等号成立条件を考えて、位置および運動量に

$$\Delta q = \sqrt{\hbar/2m\omega}, \quad \Delta p = \sqrt{\hbar m\omega/2} \quad (1.16)$$

だけの揺らぎがあることがわかる。(これらの値が正しいことは、1.1.4節において定量的に示される。)これを調和振動子の零点振動(zero-point fluctuations)と呼び、そのエネルギー $\hbar\omega/2$ を零点振動エネルギー(zero-point energy)と呼ぶ。これは、古典論での基底状態(振動子が静止しており、 $E_0 = 0, \Delta q = 0, \Delta p = 0$)と対照的である。

1.1.4 数状態

ここでは、ハミルトニアン[式(1.14)]の固有エネルギーや固有状態を求めよう。 \hat{p}, \hat{q} の線形結合により、消滅演算子 \hat{a} 、生成演算子 \hat{a}^\dagger を次のように定義する。

$$\begin{pmatrix} \hat{a} \\ \hat{a}^\dagger \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2\hbar m\omega}} \begin{pmatrix} m\omega & i \\ m\omega & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{q} \\ \hat{p} \end{pmatrix}. \quad (1.17)$$

逆に \hat{p}, \hat{q} を \hat{a}, \hat{a}^\dagger で表すと

$$\begin{pmatrix} \hat{q} \\ \hat{p} \end{pmatrix} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -im\omega & im\omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{a} \\ \hat{a}^\dagger \end{pmatrix} \quad (1.18)$$

が得られる。式(1.9)より、消滅生成演算子の交換関係は

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1 \quad (1.19)$$

である。また

$$\hat{N} = \hat{a}^\dagger \hat{a} \quad (1.20)$$

を数演算子と呼ぶ。数演算子と消滅生成演算子の交換関係は

$$[\hat{N}, \hat{a}] = -\hat{a}, \quad [\hat{N}, \hat{a}^\dagger] = \hat{a}^\dagger \quad (1.21)$$

である。ハミルトニアン[式(1.14)]を消滅生成演算子を用いて表すと

$$\hat{H} = \hbar\omega (\hat{a}^\dagger \hat{a} + 1/2) \quad (1.22)$$

となる。このハミルトニアンに現れる $1/2$ は交換関係[式(1.19)]に由来するものであり、1.1.3節で議論した零点振動エネルギーに他ならない。^{*2)}

数演算子 \hat{N} の固有値は非負の整数 $n (= 0, 1, 2, \dots)$ であり、この調和振動

^{*2)} 零点振動エネルギーはエネルギーの原点をずらすだけであり、調和振動子の量子ダイナミクスに影響しないので、本書では、多くの場合に零点振動エネルギーを省略する。

子が持つ励起の個数を表している。固有値 n に対する固有状態を $|n\rangle$ で表せば

$$\hat{N}|n\rangle = \hat{a}^\dagger \hat{a}|n\rangle = n|n\rangle \quad (1.23)$$

である。固有状態 $|n\rangle$ は、数状態 (number state) あるいは **Fock** 状態 (Fock state) と呼ばれる。特に励起の無い状態 $|0\rangle$ は真空状態 (vacuum state) と呼ばれる。

消滅演算子 \hat{a} は、振動子から励起を一つ取り去る操作を表す。式 (1.23)において $n = 0$ として左から $\langle 0|$ をかけると、 $\langle 0|\hat{a}^\dagger \hat{a}|0\rangle = 0$ が導かれる。これは、状態ベクトル $\hat{a}|0\rangle$ のノルムが 0 であることを意味している。すなわち

$$\hat{a}|0\rangle = 0 \quad (1.24)$$

である。つまり真空状態からはこれ以上励起を取り去ることができない。次に、 $n \geq 1$ の状態 $\hat{a}|n\rangle$ に対して数演算子を作用させてみよう。式 (1.21), (1.23) を用いることにより次式が得られる。

$$\hat{N}\hat{a}|n\rangle = (\hat{a}\hat{N} - \hat{a})|n\rangle = (n - 1)\hat{a}|n\rangle. \quad (1.25)$$

この式は、状態 $\hat{a}|n\rangle$ も \hat{N} の固有状態であり、固有値 $n - 1$ であることを示している。つまり $\hat{a}|n\rangle = c_n|n - 1\rangle$ (c_n は規格化因子) と書け、 \hat{a} が励起を 1 個減らすことを確認できる。この式のノルムを計算すると、 $c_n^2 = \langle n|\hat{a}^\dagger \hat{a}|n\rangle = n$ となるから、規格化因子は $c_n = \sqrt{n}$ と定まる。よって $n \geq 1$ に対して、

$$\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}|n - 1\rangle \quad (1.26)$$

である。同様に、生成演算子 \hat{a}^\dagger は振動子に励起を 1 個加える操作を表しており、 $n \geq 0$ に対して

$$\hat{a}^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle \quad (1.27)$$

となることも示せる。 $|0\rangle$ からスタートして、式 (1.27) を繰り返し用いることにより

$$|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}}(\hat{a}^\dagger)^n|0\rangle \quad (1.28)$$

と表すこともできる。

調和振動子のハミルトニアン [式 (1.22)] を見ると、数状態がエネルギー固有状態になっていることがわかる。固有エネルギーを E_n で表すと、 $n \geq 0$ に対して、

$$\hat{H}|n\rangle = E_n|n\rangle, \quad E_n = \hbar\omega(n + 1/2) \quad (1.29)$$

と書ける。図 1.1 に調和振動子の準位構造を示した。調和振動子のエネルギー準位は等間隔であり、共鳴光で調和振動子を励起すると、 $|0\rangle \rightarrow |1\rangle$ の遷移ば

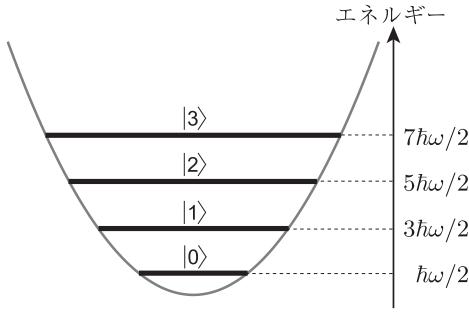


図 1.1 調和振動子のエネルギー準位.

かりでなく $|1\rangle \rightarrow |2\rangle$, $|2\rangle \rightarrow |3\rangle$ といった高いエネルギー準位への遷移も同時に起こる。これは 1.3 節で論じる原子（量子ビット）と対照的である。

数状態 $|n\rangle$ の位置や運動量の期待値は

$$\langle \hat{q} \rangle = \langle n | \hat{q} | n \rangle = 0, \quad (1.30)$$

$$\langle \hat{p} \rangle = \langle n | \hat{p} | n \rangle = 0 \quad (1.31)$$

であり、揺らぎは、

$$\Delta q = \sqrt{(1/2 + n)\hbar/m\omega}, \quad (1.32)$$

$$\Delta p = \sqrt{(1/2 + n)\hbar m\omega} \quad (1.33)$$

である。前節において、不確定性関係から真空状態 ($n = 0$) の揺らぎを式 (1.16) のように評価したが、上の式はそれを再現している。

1.1.5 コヒーレント状態

この項では、調和振動子のハミルトニアン [式 (1.22)] に \hat{a} , \hat{a}^\dagger に比例する項を加えた

$$\hat{H}_c = \hbar\omega\hat{a}^\dagger\hat{a} + \hbar(E^*\hat{a} + E\hat{a}^\dagger) \quad (1.34)$$

の固有値や固有状態を議論しよう。^{*3)} この形のハミルトニアンは、例えば次のような状況で現れる。(i) 調和振動子に一定の外力をかけてポテンシャルに一次の項を加えると、ハミルトニアンは式 (1.34) の形になる。この場合、 ω は元の調和振動子の固有振動数そのものであり、正の値をとる。(ii) 固有周波数 ω の調和振動子を、周波数 ω_d の外場 $\mathcal{E}(t) = Ee^{-i\omega_d t}$ でドライブするとき、この系は時間に依存するハミルトニアン $\hat{H}_{\text{eff}}(t) = \hbar\omega\hat{a}^\dagger\hat{a} + \hbar[\mathcal{E}^*(t)\hat{a} + \mathcal{E}(t)\hat{a}^\dagger]$ で記述される。無摂動ハミルトニアンを $\hat{H}_0 = \hbar\omega_d\hat{a}^\dagger\hat{a}$ と選んで回転座標に移行することにより、 $\hat{H}_{\text{eff}} = e^{-i\hat{H}_0 t/\hbar}[\hat{H}_{\text{eff}}(t) - \hat{H}_0]e^{i\hat{H}_0 t/\hbar}$ が時間依存性を失い、

*3) 零点振動エネルギーは無視した。

式 (1.34) の静的なハミルトニアンに帰着する。こちらの例では ω は(元々の振動数)-(外場周波数)であり、負の値もとりうることに注意が必要である。

ハミルトニアンの対角化

式 (1.34) のハミルトニアンは、二次関数の平方完成の要領で $\hat{H}_c = \hbar\omega(\hat{a}^\dagger + E^*/\omega)(\hat{a} + E/\omega) - \hbar|E|^2/\omega$ と書き換えることができる。よって、演算子 \hat{b} および \hat{b}^\dagger を

$$\hat{b} = \hat{a} + E/\omega, \quad (1.35)$$

$$\hat{b}^\dagger = \hat{a}^\dagger + E^*/\omega \quad (1.36)$$

により定義すると、式 (1.34) のハミルトニアンを

$$\hat{H}_c = \hbar\omega\hat{b}^\dagger\hat{b} - \hbar|E|^2/\omega \quad (1.37)$$

の形に書き換えることができる。^{*4)} \hat{b} および \hat{b}^\dagger が消滅生成演算子の交換関係 $[\hat{b}, \hat{b}^\dagger] = 1$ を満たすことは、容易に確認できる。

変位演算子

式 (1.35), (1.36) の変換を演算子で表現するために、変位演算子を

$$\hat{D}(\alpha) = \exp(\alpha\hat{a}^\dagger - \alpha^*\hat{a}) \quad (1.38)$$

により導入しよう。ここで α は無次元の複素数である。定義式より、

$$\hat{D}^\dagger(\alpha) = \hat{D}(-\alpha) = \hat{D}^{-1}(\alpha) \quad (1.39)$$

が確認できる。よって変位演算子は $\hat{D}(\alpha)\hat{D}^\dagger(\alpha) = \hat{I}$ (\hat{I} は恒等演算子) を満たしており、ユニタリ演算子である。変位演算子は、消滅(生成)演算子を、 α (α^*) だけ平行移動する効果がある。

$$\hat{D}^\dagger(\alpha)\hat{a}\hat{D}(\alpha) = \hat{a} + \alpha, \quad (1.40)$$

$$\hat{D}^\dagger(\alpha)\hat{a}^\dagger\hat{D}(\alpha) = \hat{a}^\dagger + \alpha^*. \quad (1.41)$$

これらの式を導出するには、演算子展開定理

$$e^{\hat{A}}\hat{B}e^{-\hat{A}} = \hat{B} + [\hat{A}, \hat{B}] + \frac{1}{2!}[\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]] + \dots \quad (1.42)$$

において、 $\hat{A} = \alpha^*\hat{a} - \alpha\hat{a}^\dagger$, $\hat{B} = \hat{a}$ とすればよい。また、変位演算子は

$$\hat{D}(\alpha) = e^{-|\alpha|^2/2}e^{\alpha\hat{a}^\dagger}e^{-\alpha^*\hat{a}} \quad (1.43)$$

^{*4)} $\omega = 0$ の場合には、変位 E/ω が発散してしまう。これは、摩擦の無い調和振動子を共鳴外場で定常的に駆動した場合に、振幅が無限に発散することに対応する。現実には、摩擦が離調 ω と同様に振幅を有限に留める役割を果たすので、この発散はおこらない。

とも表せる。この式を導出するには、 $[\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]] = [\hat{B}, [\hat{A}, \hat{B}]] = 0$ の際に成立する、Baker-Hausdorff の公式

$$e^{\hat{A}+\hat{B}} = e^{\hat{A}} e^{\hat{B}} e^{-[\hat{A}, \hat{B}]/2} \quad (1.44)$$

において、 $\hat{A} = \alpha^* \hat{a}$, $\hat{B} = -\alpha \hat{a}^\dagger$ とすればよい。また $\hat{A} = \alpha \hat{a}^\dagger - \alpha^* \hat{a}$, $\hat{B} = \beta \hat{a}^\dagger - \beta^* \hat{a}$ と選ぶことによって、

$$\hat{D}(\alpha) \hat{D}(\beta) = e^{(\alpha\beta^* - \alpha^*\beta)/2} \hat{D}(\alpha + \beta) \quad (1.45)$$

が得られる。つまり、位相因子 $e^{(\alpha\beta^* - \alpha^*\beta)/2}$ を除くと、変位 α, β の変位演算子の積は変位 $\alpha + \beta$ の変位演算子になっている。

固有値・固有状態

式 (1.35), (1.40) を比較することにより、 $\alpha = -E/\omega$ と選ぶと、ハミルトニアンの固有演算子 \hat{b} を

$$\hat{b} = \hat{D}(\alpha) \hat{a} \hat{D}^\dagger(\alpha) \quad (1.46)$$

のように、元の演算子 \hat{a} のユニタリ変換として表現することができる。これを対角化されたハミルトニアン [式 (1.37)] に代入して

$$\hat{D}^\dagger(\alpha) \hat{H}_c \hat{D}(\alpha) = \hbar\omega \hat{a}^\dagger \hat{a} - \hbar|E|^2/\omega \quad (1.47)$$

を得る。右辺のハミルトニアンの固有状態は数状態 $|n\rangle$ であり、 $\hat{D}^\dagger(\alpha) \hat{H}_c \hat{D}(\alpha) |n\rangle = \hbar(n\omega - |E|^2/\omega) |n\rangle$ を得る。 $\hat{D}(\alpha)$ を左から掛け

$$\hat{H}_c \hat{D}(\alpha) |n\rangle = \hbar(n\omega - |E|^2/\omega) \hat{D}(\alpha) |n\rangle \quad (1.48)$$

となる。つまり、ハミルトニアン \hat{H}_c [式 (1.34)] の固有状態は変位を受けた数状態 $\hat{D}(\alpha) |n\rangle$ であり、その固有値は $\hbar(n\omega - |E|^2/\omega)$ である。

コヒーレント状態

一般に、変位を受けた真空状態のことをコヒーレント状態 (coherent state) と呼ぶ。すなわち、コヒーレント状態 $|\alpha\rangle$ は

$$|\alpha\rangle = \hat{D}(\alpha) |0\rangle \quad (1.49)$$

により定義される。一定の外力を受けている調和振動子の例では、図 1.2(a) のように、外力とバネの弾性力が釣り合う位置に静止している状態に相当する。

コヒーレント状態の重要な性質は、消滅演算子 \hat{a} の固有状態である点である。式 (1.49) に \hat{a} を作用させると、

$$\hat{a} |\alpha\rangle = \hat{a} \hat{D}(\alpha) |0\rangle = \hat{D}(\alpha) (\hat{a} + \alpha) |0\rangle = \alpha |\alpha\rangle \quad (1.50)$$

が確かめられる。導出には式(1.40)から導かれる交換関係 $[\hat{a}, \hat{D}(\alpha)] = \alpha \hat{D}(\alpha)$ を用いた。消滅演算子 \hat{a} はエルミート演算子でないので、固有値 α は一般に複素数である。消滅演算子の期待値

$$\langle \hat{a} \rangle = \langle \alpha | \hat{a} | \alpha \rangle = \alpha \quad (1.51)$$

は調和振動子の複素振幅を表し、数演算子の期待値

$$\langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle = |\alpha|^2 \quad (1.52)$$

は平均量子数を表す。複素振幅の実部・虚部に相当する量として、直交位相振幅 \hat{X} , \hat{Y} を

$$\hat{X} = \frac{\hat{a} + \hat{a}^\dagger}{2}, \quad (1.53)$$

$$\hat{Y} = \frac{\hat{a} - \hat{a}^\dagger}{2i} \quad (1.54)$$

により導入しよう。式(1.17)より $\hat{q} = \sqrt{2\hbar/m\omega}\hat{X}$, $\hat{p} = \sqrt{2\hbar m\omega}\hat{Y}$ であるから、 \hat{X} , \hat{Y} は無次元化された位置および運動量（速度）に相当する。 \hat{X} , \hat{Y} の期待値および揺らぎは

$$\langle \hat{X} \rangle = \frac{\alpha + \alpha^*}{2} = \text{Re } \alpha, \quad (1.55)$$

$$\langle \hat{Y} \rangle = \frac{\alpha - \alpha^*}{2i} = \text{Im } \alpha, \quad (1.56)$$

$$\Delta X = \sqrt{\langle \hat{X}^2 \rangle - \langle \hat{X} \rangle^2} = 1/2, \quad (1.57)$$

$$\Delta Y = \sqrt{\langle \hat{Y}^2 \rangle - \langle \hat{Y} \rangle^2} = 1/2 \quad (1.58)$$

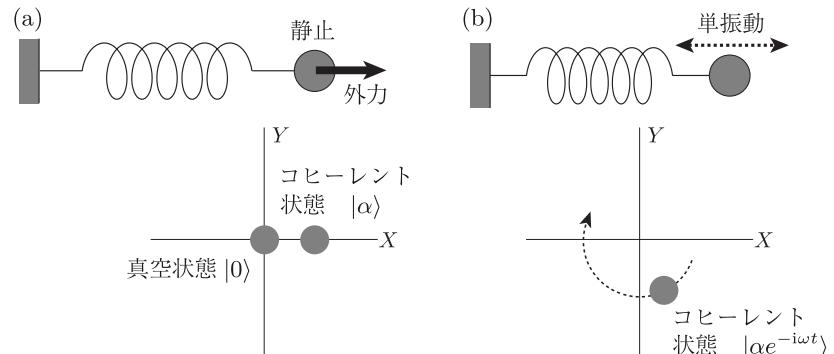


図 1.2 ばね振り子とコヒーレント状態の対応。(a) 外力の下で静止している状態は、コヒーレント状態 $|\alpha\rangle$ に対応する。真空状態 $|0\rangle$ は、自然長の位置に静止している状態に対応し、コヒーレント状態の一種である。これらの状態は量子揺らぎを持つため、 α 平面上において点ではなく有限面積の円で表現される。(b) 単振動は、 α 平面内での等速円運動に対応する。

で与えられる。コヒーレント状態は真空状態と揺らぎの性質が全く同じであり、最小不確定状態である。図 1.2 に示すように、コヒーレント状態 $|\alpha\rangle$ は、複素振幅を表す α 平面上において真空状態 $|0\rangle$ を平行移動した状態に相当している。

コヒーレント状態 $|\alpha\rangle$ を数状態 $|n\rangle$ ($n = 0, 1, \dots$) で表現してみよう。式 (1.28), (1.43), (1.49) と $\hat{a}|0\rangle = 0$ を用いると

$$|\alpha\rangle = e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \quad (1.59)$$

が得られる。このように、コヒーレント状態は異なった数状態の重ね合わせとして表現される。状態 $|\alpha\rangle$ が n 光子 ($n = 0, 1, 2, \dots$) を含む確率は、

$$P(n) = \frac{e^{-|\alpha|^2} |\alpha|^{2n}}{n!} \quad (1.60)$$

で与えられる。これは期待値 $|\alpha|^2$ (= $\langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle$) のポアソン分布に他ならない。

演算子 $|\alpha\rangle\langle\alpha|$ を α 平面上で積分してみよう。 $\alpha = re^{i\theta}$ として二次元極座標で積分すると、

$$\int d^2\alpha |\alpha\rangle\langle\alpha| = \sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{|n\rangle\langle m|}{\sqrt{n!m!}} I_1(n, m) I_2(n, m) \quad (1.61)$$

と書ける。ただし $I_1(n, m) = \int_0^\infty e^{-r^2} r^{n+m+1} dr$, $I_2(n, m) = \int_{-\pi}^\pi e^{i(n-m)\theta} d\theta$ である。 $I_2(n, m) = 2\pi\delta_{nm}$, $2I_1(n, n) = \int_0^\infty e^{-s} s^n ds = n \int_0^\infty e^{-s} s^{n-1} ds = \dots = n!$ を用いると、

$$\int \frac{d^2\alpha}{\pi} |\alpha\rangle\langle\alpha| = \sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle\langle n| = \hat{I} \quad (1.62)$$

が得られる。ただし \hat{I} は恒等演算子である。このように、数状態ばかりでなくコヒーレント状態を用いても恒等演算子を表現できる。

時間発展

コヒーレント状態は、一定の外力を受ける調和振動子の基底状態であり、外力と弾性力の釣り合う位置で静止している状態に対応する。この状態で外力をゼロとすると単振動がおこるが、これは量子力学ではどのように記述されるだろうか。以下では、コヒーレント状態 $|\psi(0)\rangle = |\alpha\rangle$ の時間発展を、シュレーディンガー描像で考えてみよう。

外力をゼロとした後のハミルトニアンは、式 (1.34) において $|E| = 0$ とした $\hat{H} = \hbar\omega\hat{a}^\dagger\hat{a}$ であり、時刻 t での状態ベクトルは $|\psi(t)\rangle = e^{-i\hat{H}t/\hbar}|\psi(0)\rangle$ で時間発展する。コヒーレント状態は数状態の重ね合わせで表現されるが、数状態 $|n\rangle$ は \hat{H} の固有状態であり、 $e^{-i\hat{H}t/\hbar}|n\rangle = e^{-in\omega t}|n\rangle$ のように時間発展する。これを式 (1.59) に従って重ね合わせることにより、

$$|\psi(t)\rangle = e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha e^{-i\omega t})^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle = |\alpha e^{-i\omega t}\rangle \quad (1.63)$$

が得られる。つまり、図 1.2(b) に示すように、コヒーレント状態はコヒーレント状態のまま、複素振幅を表す α 平面上を角速度 ω で等速円運動する。位置や運動量の期待値は

$$\langle \hat{q} \rangle = \sqrt{2\hbar/m\omega} \langle \hat{X} \rangle = \sqrt{2\hbar/m\omega} \operatorname{Re}\{\alpha e^{-i\omega t}\}, \quad (1.64)$$

$$\langle \hat{p} \rangle = \sqrt{2\hbar m\omega} \langle \hat{Y} \rangle = \sqrt{2\hbar m\omega} \operatorname{Im}\{\alpha e^{-i\omega t}\} \quad (1.65)$$

であり、振動子が角速度 ω の単振動をしていることがわかる。例えば、初期状態を $\alpha = q_0 \sqrt{m\omega/2\hbar}$ と選ぶと、式 (1.8) の単振動になる。

1.1.6 スクイーズド状態

1.1.5 節では、調和振動子のハミルトニアン [式 (1.22)] に \hat{a} , \hat{a}^\dagger に比例する項を加え、その基底状態がコヒーレント状態であることを見た。ここでは、 \hat{a}^2 , $\hat{a}^{\dagger 2}$ に比例する項を加えた

$$\hat{H}_s = \hbar\omega\hat{a}^\dagger\hat{a} + \hbar \left(\frac{E^*}{2}\hat{a}^2 + \frac{E}{2}\hat{a}^{\dagger 2} \right) \quad (1.66)$$

の固有値や固有状態を議論しよう。この形のハミルトニアンは、例えば次のような状況で現れる。外場 $\mathcal{E}(t) = Ee^{-2i\omega_d t}$ により駆動されるパラメトリック振動子のハミルトニアンは $\hat{H}_{\text{eff}}(t) = \hbar\omega\hat{a}^\dagger\hat{a} + \hbar[\mathcal{E}^*(t)\hat{a}^2/2 + \mathcal{E}(t)\hat{a}^{\dagger 2}/2]$ で与えられるが、無摂動ハミルトニアンを $\hat{H}_0 = \hbar\omega_d\hat{a}^\dagger\hat{a}$ と選んで相互作用表示に移行することにより、 $\hat{H}_{\text{eff}} = e^{-i\hat{H}_0 t/\hbar} [\hat{H}_{\text{eff}}(t) - \hat{H}_0] e^{i\hat{H}_0 t/\hbar}$ が時間依存性を失い、式 (1.66) の静的なハミルトニアンに帰着する。この場合、 ω は(元々の振動数)-(外場周波数/2) であり、負の値もとりうることに注意が必要である。ただし、以下の議論では $\omega > 0$ として話を進めよう。

ハミルトニアンの対角化

消滅生成演算子 \hat{b}^\dagger , \hat{b} を

$$\begin{pmatrix} \hat{b} \\ \hat{b}^\dagger \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_1 & \xi_2 \\ \xi_2^* & \xi_1^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{a} \\ \hat{a}^\dagger \end{pmatrix} \quad (1.67)$$

により定義し、式 (1.66) のハミルトニアンを対角化する [$\hat{H}_s = \hbar\lambda\hat{b}^\dagger\hat{b} + (\text{c 数})$ の形に書き換える] ことを考えよう。消滅生成演算子は交換関係 $[\hat{b}, \hat{b}^\dagger] = 1$ を満たすよう規格化されているので、

$$|\xi_1|^2 - |\xi_2|^2 = 1 \quad (1.68)$$

となる必要がある。また、 $[\hat{b}, \hat{H}_s] = \hbar\lambda\hat{b}$ より、係数 ξ_1 , ξ_2 は固有方程式

$$\begin{pmatrix} \omega & -E^* \\ E & -\omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} \quad (1.69)$$

を満たす。この固有方程式が実数の固有値 λ を持つためには、非対角項が小さく $|E| < \omega$ である必要がある。^{*5)} 固有値は $\lambda = \pm\sqrt{\omega^2 - |E|^2}$ であるが、 $|E| \rightarrow 0$ のときに $\lambda \rightarrow \omega (> 0)$ となるように正の固有値

$$\lambda = \sqrt{\omega^2 - |E|^2} \quad (1.70)$$

を選ぼう。すると、式 (1.68), (1.69) を満足する固有ベクトルは $\xi_1 = \cosh r$, $\xi_2 = e^{2i\phi} \sinh r$, で与えられる。ただし r および ϕ は、ハミルトニアン中のパラメータ ω および E から

$$r = \frac{1}{2} \tanh^{-1}(|E|/\omega), \quad (1.71)$$

$$e^{2i\phi} = E/|E| \quad (1.72)$$

によって定められる実定数である。式 (1.67) を書き直すと

$$\begin{pmatrix} \hat{b} \\ \hat{b}^\dagger \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh r & e^{2i\phi} \sinh r \\ e^{-2i\phi} \sinh r & \cosh r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{a} \\ \hat{a}^\dagger \end{pmatrix} \quad (1.73)$$

となる。新しい消滅生成演算子 \hat{b} , \hat{b}^\dagger を用いて元のハミルトニアン [式 (1.66)] を表すと

$$\hat{H}_s = \hbar\lambda\hat{b}^\dagger\hat{b} + \frac{\lambda - \omega}{2} \quad (1.74)$$

となり、確かにハミルトニアンが対角化されていることを確認できる。

スクイーズ演算子

式 (1.73) の変換を演算子で表現するために、スクイーズ演算子を

$$\hat{S}(z) = \exp\left(\frac{z^*}{2}\hat{a}^2 - \frac{z}{2}\hat{a}^{\dagger 2}\right) \quad (1.75)$$

により導入しよう。ここで z は無次元の複素数である。定義式より、

$$\hat{S}^\dagger(z) = \hat{S}(-z) = \hat{S}^{-1}(z) \quad (1.76)$$

が確認できる。つまりスクイーズ演算子はユニタリ演算子である。スクイーズ演算子は、消滅生成演算子を次のように変換する。

$$\begin{pmatrix} \hat{S}^\dagger(z)\hat{a}\hat{S}(z) \\ \hat{S}^\dagger(z)\hat{a}^\dagger\hat{S}(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh(|z|) & -\frac{z}{|z|}\sinh(|z|) \\ -\frac{z^*}{|z|}\sinh(|z|) & \cosh(|z|) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{a} \\ \hat{a}^\dagger \end{pmatrix}. \quad (1.77)$$

^{*5)} パラメトリック振動子は、駆動場が強いと発振する（10章参照）。 $|E| < \omega$ は発振しない条件に相当する。

これらの式を導出するには、式(1.42)において、 $\hat{A} = (z\hat{a}^\dagger{}^2 - z^*\hat{a}^2)/2$ 、 $\hat{B} = \hat{a}$ とすればよい。

変位演算子 $\hat{D}(\alpha)$ とスクイーズ演算子 $\hat{S}(z)$ の交換を考えるため、演算子の積 $\hat{S}^\dagger(z)\hat{D}(\alpha)\hat{S}(z)$ を考えよう。 $\hat{D}(\alpha)$ の指標部分の演算子 $\alpha\hat{a}^\dagger - \alpha^*\hat{a}$ に対して、 $\hat{S}^\dagger(z)(\alpha\hat{a}^\dagger - \alpha^*\hat{a})\hat{S}(z) = \bar{\alpha}\hat{a}^\dagger - \bar{\alpha}^*\hat{a}$ が成り立つ。ただし $\bar{\alpha}$ は次式で定義される。

$$\bar{\alpha} = \alpha \cosh(|z|) + \alpha^* \frac{z}{|z|} \sinh(|z|). \quad (1.78)$$

このことから、 $\hat{S}^\dagger(z)\hat{D}(\alpha)\hat{S}(z) = \hat{D}(\bar{\alpha})$ であり、両辺に左から $\hat{S}(z)$ をかけることによって

$$\hat{D}(\alpha)\hat{S}(z) = \hat{S}(z)\hat{D}(\bar{\alpha}) \quad (1.79)$$

が得られる。つまり、変位演算子 $\hat{D}(\alpha)$ とスクイーズ演算子 $\hat{S}(z)$ を交換する際には、変位演算子のパラメータ α が、式(1.78)に従って変換される。

固有値・固有状態

式(1.73)と式(1.77)を比較すると、 $z = re^{2i\phi}$ と選ぶことにより、ハミルトニアン \hat{H}_s の固有演算子 \hat{b} を

$$\hat{b} = \hat{S}(z)\hat{a}\hat{S}^\dagger(z) \quad (1.80)$$

のように、元の演算子 \hat{a} のユニタリ変換として表現することができる。これを対角化されたハミルトニアン [式(1.74)] に代入して

$$\hat{S}^\dagger(z)\hat{H}_s\hat{S}(z) = \hbar\lambda\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{\lambda - \omega}{2} \quad (1.81)$$

を得る。右辺の固有状態は数状態 $|n\rangle$ であり、 $\hat{S}^\dagger(z)\hat{H}_s\hat{S}(z)|n\rangle = \hbar(n\lambda + \frac{\lambda - \omega}{2})|n\rangle$ を得る。 $\hat{S}(z)$ を左から掛けて

$$\hat{H}_s\hat{S}(z)|n\rangle = \hbar\left(n\lambda + \frac{\lambda - \omega}{2}\right)\hat{S}(z)|n\rangle \quad (1.82)$$

となる。つまり、元のハミルトニアン [式(1.66)] の固有状態はスクイーズされた数状態 $\hat{S}(z)|n\rangle$ であり、その固有値は $\hbar(n\lambda + \frac{\lambda - \omega}{2})$ である。

スクイーズド状態

真空状態にスクイーズ演算子を作用させた状態、すなわち

$$|0, z\rangle = \hat{S}(z)|0\rangle \quad (1.83)$$

をスクイーズド真空状態 (squeezed vacuum state) と呼ぶ。 $z = re^{2i\phi}$ とすると、この状態に対する消滅生成演算子の期待値は

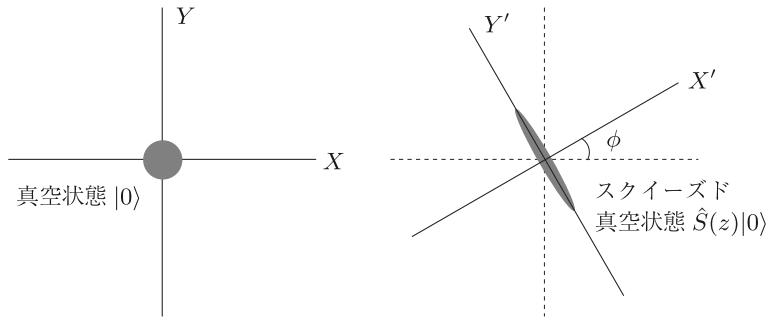


図 1.3 α 平面上での真空状態 $|0\rangle$ とスクイーズド真空状態 $|0, z\rangle$ の表現. スクイーズ演算子 $\hat{S}(z)$ は、 X' 軸方向を e^{-r} 倍に圧縮し、 Y' 軸方向を e^r 倍に拡大する.

$$\langle \hat{a} \rangle = \langle \hat{a}^\dagger \rangle = 0, \quad (1.84)$$

$$\langle \hat{a}^2 \rangle = \langle \hat{a}^\dagger 2 \rangle^* = -\cosh r \sinh r e^{2i\phi}, \quad (1.85)$$

$$\langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle = \sinh^2 r \quad (1.86)$$

で与えられる.

直交位相振幅 \hat{X} , \hat{Y} は式 (1.53), (1.54) により定義されるが、ここでは軸の取り方を角度 ϕ だけ回転した

$$\hat{X}' = \frac{e^{-i\phi}\hat{a} + e^{i\phi}\hat{a}^\dagger}{2}, \quad (1.87)$$

$$\hat{Y}' = \frac{e^{-i\phi}\hat{a} - e^{i\phi}\hat{a}^\dagger}{2i} \quad (1.88)$$

を定義しよう. この直交位相振幅に対して,

$$\langle \hat{X}' \rangle = \langle \hat{Y}' \rangle = 0, \quad (1.89)$$

$$\Delta X' = \sqrt{\langle \hat{X}'^2 \rangle - \langle \hat{X}' \rangle^2} = \frac{e^{-r}}{2}, \quad (1.90)$$

$$\Delta Y' = \sqrt{\langle \hat{Y}'^2 \rangle - \langle \hat{Y}' \rangle^2} = \frac{e^r}{2} \quad (1.91)$$

となることが確認できる. このように、スクイーズド真空状態は $(\Delta X')(\Delta Y') = 1/4$ を満たしており、最小不確定状態である. 真空状態と比較して、 X' 軸方向には揺らぎが e^{-r} だけ圧縮（スクイーズ）され、 Y' 軸方向には揺らぎが e^r だけ増幅されている.

一般のスクイーズド状態は、スクイーズド真空状態を変位させ

$$|\alpha, z\rangle = \hat{D}(\alpha)\hat{S}(z)|0\rangle \quad (1.92)$$

として定義される.*6) この状態に対して,

*6) スクイーズド状態は、真空をスクイーズしてから変位した状態である. これに対して、順序を入れ替えて、真空を変位してからスクイーズした状態も考えうるが、この状態も式 (1.79) よりスクイーズド状態である.

$$\langle \hat{a} \rangle = \langle \hat{a}^\dagger \rangle^* = \alpha, \quad (1.93)$$

$$\langle \hat{a}^2 \rangle = \langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle^* = \alpha^2 - \cosh r \sinh r e^{2i\phi}, \quad (1.94)$$

$$\langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle = |\alpha|^2 + \sinh^2 r, \quad (1.95)$$

$$\langle \hat{X}' \rangle = \operatorname{Re}(\alpha e^{-i\phi}), \quad \langle \hat{Y}' \rangle = \operatorname{Im}(\alpha e^{-i\phi}), \quad (1.96)$$

$$\Delta X' = \frac{e^{-r}}{2}, \quad \Delta Y' = \frac{e^r}{2} \quad (1.97)$$

となることが確認できる。つまり、直交位相振幅は有限の値を持つようになるが、揺らぎの大きさは変わらない。

1.1.7 热平衡状態

この項では、温度 T の環境自由度と热平衡状態にある調和振動子の量子状態を考えよう。真空状態やコヒーレント状態は環境との量子もつれの無い純粹状態 (pure state) であるが、热平衡状態は環境ともつれている混合状態 (mixed state) であり、单一の状態ベクトルでは表現できず密度行列 (density matrix) を使って表現される。(混合状態や密度行列については付録 A 参照。)

热平衡状態にある調和振動子の密度行列は、 $\hat{H} = \hbar\omega \hat{a}^\dagger \hat{a}$ を用いて⁷⁾

$$\hat{\rho}_{\text{th}} = \frac{\exp(-\hat{H}/k_B T)}{Z}, \quad (1.98)$$

$$Z = \operatorname{Tr} \left[\exp(-\hat{H}/k_B T) \right] \quad (1.99)$$

により与えられる。ただし k_B はボルツマン定数であり、 Z は統計力学で分配関数 (distribution function) と呼ばれる量である。

分配関数 Z を計算してみよう。トレースをとる基底として、数状態 $|n\rangle$ ($n = 0, 1, \dots$) を用いると、

$$Z = \sum_{n=0}^{\infty} \langle n | \exp(-\hat{H}/k_B T) | n \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\hbar\omega n / k_B T} = \frac{1}{1 - e^{-\hbar\omega / k_B T}} \quad (1.100)$$

が得られる。また、 $\hat{H} = \sum_{n=0}^{\infty} \hbar\omega n |n\rangle\langle n|$ より $\exp(-\hat{H}/k_B T) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\hbar\omega n / k_B T} |n\rangle\langle n|$ であるから、密度行列は

$$\hat{\rho}_{\text{th}} = \left(1 - e^{-\hbar\omega / k_B T} \right) \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\hbar\omega n / k_B T} |n\rangle\langle n| \quad (1.101)$$

と表される。

量子系の状態が密度行列 $\hat{\rho}$ のとき、演算子 \hat{O} の期待値は $\langle \hat{O} \rangle = \operatorname{Tr}\{\hat{O}\hat{\rho}\}$ により求められる。状態 $|n\rangle$ にある確率 P_n 、平均量子数 \bar{n} は

$$P_n = \operatorname{Tr}\{|n\rangle\langle n|\hat{\rho}_{\text{th}}\} = \langle n | \hat{\rho}_{\text{th}} | n \rangle = \left(1 - e^{-\hbar\omega / k_B T} \right) e^{-\hbar\omega n / k_B T},$$

*7) 零点振動エネルギーは無視した。含めても同じ結果になる。

$$\bar{n} = \text{Tr}\{\hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{\rho}_{\text{th}}\} = \sum_{n=0}^{\infty} n P_n = \frac{1}{e^{\hbar\omega/k_B T} - 1} \quad (1.102)$$

で与えられる。 P_n は式 (1.101) における n 量子成分の係数に他ならない。平均量子数 \bar{n} を用いて密度行列を書き直すと次式を得る。

$$\hat{\rho}_{\text{th}} = \frac{1}{1 + \bar{n}} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\bar{n}}{1 + \bar{n}} \right)^n |n\rangle\langle n|. \quad (1.103)$$

また、密度行列をコヒーレント状態を用いて表すと

$$\hat{\rho}_{\text{th}} = \int d^2\alpha \frac{e^{-|\alpha|^2/\bar{n}}}{\pi\bar{n}} |\alpha\rangle\langle\alpha| \quad (1.104)$$

と書くことができる。導出は読者の演習問題とする。

1.2 電磁場と光子

1.2.1 自由電磁場の古典論

本節では、調和振動子の量子化に倣って自由電磁場（電荷のない真空中の電磁場）を量子化する。まず、自由電磁場の古典力学の要点を復習しておこう。真空中の電磁場は、クーロンゲージの下で、横波のベクトルポテンシャル $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ のみによって記述される。電場 $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ 、磁場 $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ との関係は

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad (1.105)$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (1.106)$$

である。電磁場のラグランジアンは、

$$L = \int d\mathbf{r} \left(\frac{\varepsilon_0}{2} |\mathbf{E}|^2 - \frac{1}{2\mu_0} |\mathbf{B}|^2 \right) \quad (1.107)$$

である。ただし ε_0 は真空の誘電率、 μ_0 は真空の透磁率である。両者の間には、光速度を c として

$$\varepsilon_0 \mu_0 = 1/c^2 \quad (1.108)$$

の関係がある。

1.2.2 自由電磁場の量子化

一般に場の量子化の際には、境界条件を満たすような固有モードを求め、それらを独立な自由度と見なして量子化する。ここでは十分大きな長さ L をとり、三つの軸方向全てに周期的境界条件を課すことにしよう。すると電磁波の波数は、

$$\mathbf{k} = \frac{2\pi}{L} (n_x, n_y, n_z) \quad (1.109)$$

のように離散化される。ただし n_x, n_y, n_z は整数値 ($0, \pm 1, \pm 2, \dots$) をとる。

ベクトルポテンシャル $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ を、自由空間での固有モードである平面波で展開する。ベクトルポテンシャルは実数の物理量であるから、実数の基底である定在波型のモード関数を用いて次のように展開しよう。

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \sum'_{\mathbf{k}, p} \left(\alpha_{\mathbf{k}ep}(t) \frac{\cos \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}{\sqrt{L^3/2}} + \alpha_{\mathbf{k}op}(t) \frac{\sin \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}{\sqrt{L^3/2}} \right) \mathbf{e}_{\mathbf{k}p}. \quad (1.110)$$

ここで添字 e, o はモード関数の偶奇性を表すラベルである。添字 p ($= 1, 2$) は偏光方向を表し、二つの単位ベクトル $\mathbf{e}_{\mathbf{k}1}, \mathbf{e}_{\mathbf{k}2}$ の方向は、 $\{ \mathbf{e}_{\mathbf{k}1}, \mathbf{e}_{\mathbf{k}2}, \mathbf{k} \}$ が右手系となるように選ぶ。波数 \mathbf{k} と $-\mathbf{k}$ に対応する固有モードは同一なので、 \mathbf{k} に関する和を半無限の \mathbf{k} 空間に制限する必要があり、総和記号 \sum'_k は半無限空間（例えば $k_z > 0$ ）での和を表している。個々のモード関数は、量子化体積 L^3 で正規直交系となるよう規格化されている。 $\alpha_{\mathbf{k}ep}, \alpha_{\mathbf{k}op}$ は、それぞれのモードに対する実数の振幅である。

式 (1.105), (1.106) より、電磁場を $\alpha_{\mathbf{k}ep}, \alpha_{\mathbf{k}op}$ を用いて表現すると

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \sum'_{\mathbf{k}, p} \left(-\dot{\alpha}_{\mathbf{k}ep}(t) \frac{\cos \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}{\sqrt{L^3/2}} - \dot{\alpha}_{\mathbf{k}op}(t) \frac{\sin \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}{\sqrt{L^3/2}} \right) \mathbf{e}_{\mathbf{k}p}, \quad (1.111)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \sum'_{\mathbf{k}, p} \left(-\alpha_{\mathbf{k}ep}(t) \frac{\sin \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}{\sqrt{L^3/2}} + \alpha_{\mathbf{k}op}(t) \frac{\cos \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}{\sqrt{L^3/2}} \right) \mathbf{k} \times \mathbf{e}_{\mathbf{k}p} \quad (1.112)$$

となる。式 (1.107) に代入して、自由電磁場のラグランジアンは

$$L = \sum'_{\mathbf{k}, p} \left(\frac{\varepsilon_0}{2} [\dot{\alpha}_{\mathbf{k}ep}^2 + \dot{\alpha}_{\mathbf{k}op}^2] - \frac{\varepsilon_0 \omega_k^2}{2} [\alpha_{\mathbf{k}ep}^2 + \alpha_{\mathbf{k}op}^2] \right) \quad (1.113)$$

と表すことができる。ただし、

$$\omega_k = c|\mathbf{k}| \quad (1.114)$$

である。式 (1.1) と比較すると、 $\alpha_{\mathbf{k}ep}, \alpha_{\mathbf{k}op}$ が各々独立した調和振動子になつており、 $m \leftrightarrow \varepsilon_0, \omega \leftrightarrow \omega_k, q \leftrightarrow \alpha_{\mathbf{k}ep}$ ($\alpha_{\mathbf{k}op}$), $p \leftrightarrow \varepsilon_0 \dot{\alpha}_{\mathbf{k}ep}$ ($\varepsilon_0 \dot{\alpha}_{\mathbf{k}op}$) という対応があることがわかる。よって、式 (1.18) に倣って消滅演算子 $\hat{a}_{\mathbf{k}ep}, \hat{a}_{\mathbf{k}op}$ を導入し、

$$\alpha_{\mathbf{k}ep} \rightarrow \sqrt{\frac{\hbar}{2\varepsilon_0 \omega_k}} (\hat{a}_{\mathbf{k}ep} + \hat{a}_{\mathbf{k}ep}^\dagger), \quad (1.115)$$

$$\dot{\alpha}_{\mathbf{k}ep} \rightarrow -i\sqrt{\frac{\hbar \omega_k}{2\varepsilon_0}} (\hat{a}_{\mathbf{k}ep} - \hat{a}_{\mathbf{k}ep}^\dagger) \quad (1.116)$$

とすれば量子化される。交換関係は

$$[\hat{a}_{\mathbf{k}\sigma p}, \hat{a}_{\mathbf{k}'\sigma' p'}^\dagger] = \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \delta_{\sigma\sigma'} \delta_{pp'} \quad (1.117)$$

である。ハミルトニアンおよびベクトルポテンシャルは生成消滅演算子を用いて

$$\hat{H} = \sum_{\mathbf{k}, p}' \hbar \omega_k (\hat{a}_{\mathbf{k}ep}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}ep} + \hat{a}_{\mathbf{k}op}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}op}), \quad (1.118)$$

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{A}}(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{k}, p}' \sqrt{\frac{\hbar}{2\varepsilon_0 c k}} & \left(\frac{\cos \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}{\sqrt{L^3/2}} (\hat{a}_{\mathbf{k}ep} + \hat{a}_{\mathbf{k}ep}^\dagger) \right. \\ & \left. + \frac{\sin \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}{\sqrt{L^3/2}} (\hat{a}_{\mathbf{k}op} + \hat{a}_{\mathbf{k}op}^\dagger) \right) \mathbf{e}_{\mathbf{k}p} \end{aligned} \quad (1.119)$$

と表される。ただし、零点振動エネルギーは無視した。^{*8)}

進行波基底での表現

展開の基底を定在波から進行波に変更しよう。 $\hat{a}_{\mathbf{k}p} = (\hat{a}_{\mathbf{k}ep} - i\hat{a}_{\mathbf{k}op})/\sqrt{2}$, $\hat{a}_{-\mathbf{k}p} = (\hat{a}_{\mathbf{k}ep} + i\hat{a}_{\mathbf{k}op})/\sqrt{2}$ を導入すると、交換関係は

$$[\hat{a}_{\mathbf{k}p}, \hat{a}_{\mathbf{k}'p'}^\dagger] = \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \delta_{pp'} \quad (1.120)$$

であり、ハミルトニアンおよびベクトルポテンシャルは

$$\hat{H} = \sum_{\mathbf{k}, p} \hbar \omega_k \hat{a}_{\mathbf{k}p}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}p}, \quad (1.121)$$

$$\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{k}, p} \sqrt{\frac{\hbar}{2\varepsilon_0 \omega_k}} \left(\frac{e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}}{\sqrt{L^3}} \hat{a}_{\mathbf{k}p} + \frac{e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}}{\sqrt{L^3}} \hat{a}_{\mathbf{k}p}^\dagger \right) \mathbf{e}_{\mathbf{k}p} \quad (1.122)$$

と表すことができる。定在波表示では \mathbf{k} が半無限空間に制限されていたのに対して、進行波表示では \mathbf{k} は全空間を動き、その代わりに偶奇性を表す添字 σ が無くなっている点に注意が必要である。

1.3 原子

1.3.1 電子の波動関数

原子核の作るクーロンポテンシャル $V(\mathbf{r})$ のもとで、質量 m , 電荷 e の電子が 1 個運動している状況を考える。この電子のハミルトニアン（全力学的エネルギー）は

$$H_e = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + eV(\mathbf{r}) \quad (1.123)$$

である。古典的粒子を量子力学的な波動関数で扱うことを第一量子化という。電子の波動関数 $\psi(\mathbf{r}, t)$ に対するシュレーディンガー方程式は、 $\mathbf{p} \rightarrow -i\hbar\nabla$, $H_e \rightarrow i\hbar\frac{\partial}{\partial t}$ として、

*8) 鏡などで境界条件を与える場合には、電磁場の零点振動は重要な役割を果たす。例として、狭い間隔で向き合う二枚の平面金属板が引き合う静的カシミール効果 (static Casimir effect) や、金属板を振動させたときに光子が生じる動的カシミール効果 (dynamical Casimir effect) が知られている。

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\mathbf{r}, t) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + eV(\mathbf{r}) \right] \psi(\mathbf{r}, t) \quad (1.124)$$

で与えられる。電子が固有状態にあるとき、波動関数は $\psi(\mathbf{r}, t) = \phi_j(\mathbf{r})e^{-i(E_j/\hbar)t}$ のように変数分離できる。ここで $j = 0, 1, \dots$ は固有状態を指定するラベルであり、 $\phi_j(\mathbf{r})$ はエネルギー固有関数、 E_j は固有エネルギーと呼ばれる。^{*9)} 固有関数と固有エネルギーは、次の時間に依存しないシュレーディンガー方程式によって定められる。

$$E_j \phi_j(\mathbf{r}) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\mathbf{r}) \right] \phi_j(\mathbf{r}). \quad (1.125)$$

エネルギー固有関数には、原子核付近に局在した束縛状態と、全空間に広がった非束縛状態（散乱状態）の2種類があり、束縛状態は負の固有エネルギー $E_j < 0$ を持ち、非束縛状態は正の固有エネルギー $E_j > 0$ を持つ。エネルギー固有関数は規格直交性

$$\int d\mathbf{r} \phi_i^*(\mathbf{r}) \phi_j(\mathbf{r}) = \delta_{ij} \quad (1.126)$$

および完全性

$$\sum_j \phi_j^*(\mathbf{r}) \phi_j(\mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (1.127)$$

を満たしている。

1.3.2 第二量子化

1.2節における電磁場の量子化の結果、場の量子状態は各固有モードにおける光子数で指定された。このような量子状態の表現を第二量子化による表現と呼ぶ。以下では、電子状態に関しても第二量子化を適用する。電子場の演算子 $\hat{\psi}(\mathbf{r})$ を次式により導入する。

$$\hat{\psi}(\mathbf{r}) = \sum_j \phi_j(\mathbf{r}) \hat{c}_j, \quad \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}) = \sum_j \phi_j^*(\mathbf{r}) \hat{c}_j^\dagger. \quad (1.128)$$

ただし、 \hat{c}_j (\hat{c}_j^\dagger) は固有状態 j に対する消滅（生成）演算子であり、電子がフェルミ粒子であることを反映して次の反交換関係を満たす。

$$\{\hat{c}_i, \hat{c}_j^\dagger\} = \delta_{ij}, \quad (1.129)$$

$$\{\hat{c}_i, \hat{c}_j\} = \{\hat{c}_i^\dagger, \hat{c}_j^\dagger\} = 0. \quad (1.130)$$

ただし、 $\{\hat{A}, \hat{B}\} = \hat{A}\hat{B} + \hat{B}\hat{A}$ である。場の演算子の反交換関係は、式(1.127)–(1.130) より

*9) 原子の束縛状態には、主量子数 $n (= 1, 2, \dots)$ 、方位量子数 $l (= 0, 1, \dots, n-1)$ 、磁気量子数 $m_l (= 0, \pm 1, \dots, \pm l)$ 、スピン磁気量子数 $m_s (= \uparrow, \downarrow)$ など複数のラベルがあるが、ここでは簡単のため一つの添字で表すことにする。

$$\{\hat{\psi}(\mathbf{r}), \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}')\} = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad (1.131)$$

$$\{\hat{\psi}(\mathbf{r}), \hat{\psi}(\mathbf{r}')\} = \{\hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}), \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}')\} = 0 \quad (1.132)$$

となることが確かめられる。粒子密度演算子 $\hat{\rho}(\mathbf{r})$ および数演算子 \hat{N} は、

$$\hat{\rho}(\mathbf{r}) = \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r})\hat{\psi}(\mathbf{r}), \quad (1.133)$$

$$\hat{N} = \int d\mathbf{r} \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r})\hat{\psi}(\mathbf{r}) = \sum_j \hat{c}_j^\dagger \hat{c}_j \quad (1.134)$$

によって定義される。

第一量子化でのハミルトニアン $-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + eV(\mathbf{r})$ と電子場演算子 $\hat{\psi}(\mathbf{r})$, $\hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r})$ から、第二量子化でのハミルトニアン \hat{H}_e は次のように求められる。

$$\hat{H}_e = \int d\mathbf{r} \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}) \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(\mathbf{r}) \right] \hat{\psi}(\mathbf{r}) = \sum_j E_j \hat{c}_j^\dagger \hat{c}_j. \quad (1.135)$$

一方、電子間相互作用を表すハミルトニアン \hat{H}_{ee} は二体の物理量であり、相互作用によるポテンシャルエネルギー $V(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ を用いて次のように表される。

$$\begin{aligned} \hat{H}_{ee} &= \frac{1}{2} \int d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}_1) \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}_2) V(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \hat{\psi}(\mathbf{r}_2) \hat{\psi}(\mathbf{r}_1) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i,j,k,l} V_{ijkl} \hat{c}_i^\dagger \hat{c}_j^\dagger \hat{c}_k \hat{c}_l, \end{aligned} \quad (1.136)$$

$$V_{ijkl} = \int d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 \phi_i^*(\mathbf{r}_1) \phi_j^*(\mathbf{r}_2) V(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \phi_k(\mathbf{r}_2) \phi_l(\mathbf{r}_1). \quad (1.137)$$

本書では電子間相互作用は一体の波動関数に繰り込まれているものと見なし、原子を \hat{H}_e で記述する。

1.3.3 原子と光子の相互作用

電子と光子の相互作用を導入するには、式(1.123)の古典的なハミルトニアンにおいて $\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p} - e\mathbf{A}(\mathbf{r})$ とすればよい。ただし e は電子の電荷である。この置き換えを行ったハミルトニアンを H' とすると、

$$H' = H - \frac{e}{m} \mathbf{p} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}) + \frac{e^2}{2m} \mathbf{A}^2(\mathbf{r}) \quad (1.138)$$

であり、 $\mathbf{p} \cdot \mathbf{A}$ の項を電子と光子の相互作用ハミルトニアンと見なせばよい。^{*10)}
第二量子化での相互作用ハミルトニアン \hat{H}_{ep} は、式(1.135)に倣って

$$\hat{H}_{ep} = -\frac{e}{m} \int d\mathbf{r} \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}) \mathbf{p} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}) \hat{\psi}(\mathbf{r}) \quad (1.139)$$

で与えられる。

ここで、電子の波動関数（特に、興味のある束縛状態）の広がりは原子の直径程度であり数オングストロームであるのに対して、電磁場の波長は可視光で

*10) \mathbf{A}^2 の項は自由電磁場への僅かな繰り込みと見なす^[1]。

数百ナノメートルと遙かに大きく、積分中の \mathbf{A} の空間依存性は無視できる。よって、原子位置を \mathbf{r}_a とすると、

$$\hat{H}_{\text{ep}} = -\frac{e}{m} \left[\int d\mathbf{r} \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}) \mathbf{p} \hat{\psi}(\mathbf{r}) \right] \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}_a) \quad (1.140)$$

と近似できる。これを長波長近似 (long-wavelength approximation) と呼ぶ。上式で $\int d\mathbf{r} \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}) \mathbf{p} \hat{\psi}(\mathbf{r})$ の部分は第二量子化での運動量演算子であり、 $\mathbf{p} = m\dot{\mathbf{r}} = \frac{i\hbar}{\hbar} [\hat{H}_e, \mathbf{r}]$ を使うと、

$$\int d\mathbf{r} \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}) \mathbf{p} \hat{\psi}(\mathbf{r}) = \sum_{i,j} \frac{im\omega_{ij}}{e} \boldsymbol{\mu}_{ij} \hat{c}_i^\dagger \hat{c}_j \quad (1.141)$$

と書くことができる。ただし ω_{ij} , $\boldsymbol{\mu}_{ij}$ は状態 i と j の間の遷移周波数、遷移双極子モーメントであり、

$$\omega_{ij} = \frac{E_i - E_j}{\hbar}, \quad (1.142)$$

$$\boldsymbol{\mu}_{ij} = e \int d\mathbf{r} \phi_i^*(\mathbf{r}) \mathbf{r} \phi_j(\mathbf{r}) \quad (1.143)$$

により定義される。パリティの同じ状態間では、波動関数の積 $\phi_i^* \phi_j$ が偶関数、位置 \mathbf{r} が奇関数であるため遷移双極子モーメントはゼロになり、光学遷移は禁制になる。量子化されたベクトルポテンシャルの式 (1.122) を用いると、 \hat{H}_{ep} を次のように書くことができる。

$$\hat{H}_{\text{ep}} = \sum_{i,j} \sum_{\mathbf{k},p} \hbar \left(\xi_{ijkp} \hat{c}_i^\dagger \hat{c}_j \hat{a}_{kp} + \text{H.c.} \right), \quad (1.144)$$

$$\xi_{ijkp} = -i\omega_{ij} (\boldsymbol{\mu}_{ij} \cdot \mathbf{e}_{kp}) \sqrt{\frac{1}{2\hbar\varepsilon_0\omega_k L^3}} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_a}. \quad (1.145)$$

1.3.4 2 準位原子

調和振動子の場合（図 1.1）と対照的に、原子のエネルギー準位間隔は一般に大きく異なっている。よって、例えば基底状態 $|g\rangle$ にある原子に、励起状態 $|e\rangle$ とのエネルギー差 ω_{eg} に共鳴する光を照射する場合には、原子の状態変化は二つの状態 $|g\rangle$, $|e\rangle$ に限られ、他の準位が関与しなくなる。本節では、このような 2 準位原子 (two-level atom) の状態の記述法について議論する。

上昇・下降演算子とパウリ行列

2 準位原子では、原子の量子状態は二つの基底ベクトル $|g\rangle$, $|e\rangle$ で張られる空間に限定される。この原子に励起を作る演算子 $\hat{\sigma}^\dagger$ は上昇演算子、励起を消す演算子 $\hat{\sigma}$ は下降演算子と呼ばれ、次式で定義される。

$$\hat{\sigma}^\dagger = |e\rangle\langle g|, \quad (1.146)$$

$$\hat{\sigma} = |g\rangle\langle e|. \quad (1.147)$$

基底状態, 励起状態への射影演算子および恒等演算子は

$$\hat{\sigma}\hat{\sigma}^\dagger = |g\rangle\langle g|, \quad (1.148)$$

$$\hat{\sigma}^\dagger\hat{\sigma} = |e\rangle\langle e|, \quad (1.149)$$

$$\hat{I} = \hat{\sigma}^\dagger\hat{\sigma} + \hat{\sigma}\hat{\sigma}^\dagger = |g\rangle\langle g| + |e\rangle\langle e| \quad (1.150)$$

と書くことができる。また、2準位原子には励起を二つ作れないことを反映して、

$$\hat{\sigma}^2 = (\hat{\sigma}^\dagger)^2 = 0 \quad (1.151)$$

である。スピン $1/2$ を記述するパウリ演算子 $\hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_y, \hat{\sigma}_z$ は、生成消滅演算子を用いて次のように表現できる。

$$\hat{\sigma}_x = \hat{\sigma} + \hat{\sigma}^\dagger, \quad (1.152)$$

$$\hat{\sigma}_y = i(\hat{\sigma} - \hat{\sigma}^\dagger), \quad (1.153)$$

$$\hat{\sigma}_z = \hat{\sigma}^\dagger\hat{\sigma} - \hat{\sigma}\hat{\sigma}^\dagger. \quad (1.154)$$

パウリ演算子の積に関して下記の性質がある。

$$\hat{\sigma}_x^2 = \hat{\sigma}_y^2 = \hat{\sigma}_z^2 = \hat{I}, \quad (1.155)$$

$$\hat{\sigma}_x\hat{\sigma}_y = -\hat{\sigma}_y\hat{\sigma}_x = i\hat{\sigma}_z, \quad (1.156)$$

$$\hat{\sigma}_y\hat{\sigma}_z = -\hat{\sigma}_z\hat{\sigma}_y = i\hat{\sigma}_x, \quad (1.157)$$

$$\hat{\sigma}_z\hat{\sigma}_x = -\hat{\sigma}_x\hat{\sigma}_z = i\hat{\sigma}_y. \quad (1.158)$$

Bloch 球

2準位系における任意の状態 $|\psi\rangle$ は基底ベクトル $|g\rangle, |e\rangle$ の重ね合わせで表

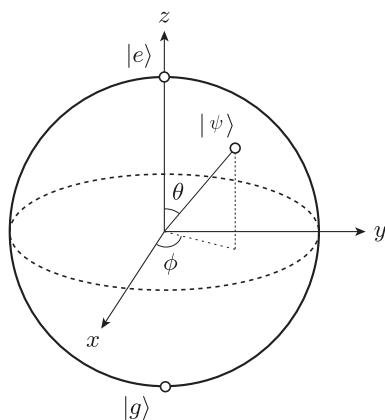


図 1.4 Bloch 球による量子状態の表現。

すことができる。状態ベクトル全体にかかる位相は任意に選べるので、 $|e\rangle$ にかかる係数を負でない実数に選ぶことができる。 $|\psi\rangle$ の規格化条件 $\langle\psi|\psi\rangle = 1$ を考慮すると、 $|\psi\rangle$ を以下のように書くことができる。

$$|\psi\rangle = \cos(\theta/2)|e\rangle + e^{i\phi} \sin(\theta/2)|g\rangle. \quad (1.159)$$

この式中の (θ, ϕ) を Bloch 球上の点の極座標と見なせば、状態 $|\psi\rangle$ を図 1.4 のように図示することができる。状態 $|\psi\rangle$ に対するパウリ演算子の期待値は、 $\langle\hat{O}\rangle = \langle\psi|\hat{O}|\psi\rangle$ として

$$\langle\hat{\sigma}_x\rangle = \sin\theta \cos\phi, \quad (1.160)$$

$$\langle\hat{\sigma}_y\rangle = \sin\theta \sin\phi, \quad (1.161)$$

$$\langle\hat{\sigma}_z\rangle = \cos\theta \quad (1.162)$$

となっており、確かに図 1.4 と対応している。Bloch 球の北極点 $(0, 0, 1)$ および南極点 $(0, 0, -1)$ は、 $\hat{\sigma}_z$ の固有値 ± 1 の固有状態に対応しており、

$$(0, 0, 1) \leftrightarrow |e\rangle, \quad (0, 0, -1) \leftrightarrow |g\rangle \quad (1.163)$$

である。 x, y 方向に関しても同様に

$$(\pm 1, 0, 0) \leftrightarrow \frac{|e\rangle \pm |g\rangle}{\sqrt{2}}, \quad (1.164)$$

$$(0, \pm 1, 0) \leftrightarrow \frac{|e\rangle \pm i|g\rangle}{\sqrt{2}} \quad (1.165)$$

が $\hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_y$ の固有状態である。

純粋状態は Bloch 球の表面上の点として表すことができる。一方、混合状態は Bloch 球内部の点として表現される。例えば最大混合状態の密度行列は $\hat{\rho} = (|g\rangle\langle g| + |e\rangle\langle e|)/2$ であるが、これに対するパウリ演算子の期待値は、 $\langle\hat{O}\rangle = \text{Tr}\{\hat{\rho}\hat{O}\}$ として

$$\langle\hat{\sigma}_x\rangle = \langle\hat{\sigma}_y\rangle = \langle\hat{\sigma}_z\rangle = 0 \quad (1.166)$$

であり、最大混合状態は Bloch 球の中心に対応する。

2 準位原子のハミルトニアン

原子のハミルトニアンは式 (1.135)，自由空間中光子場のハミルトニアンは式 (1.121)，両者の相互作用ハミルトニアンは式 (1.144) で、それぞれ与えられる。以下ではこれらを（添え字を付け替えて） $\hat{H}_a, \hat{H}_p, \hat{H}_{ap}$ と記す。

ここでは、自由空間中にある 2 準位原子のハミルトニアンを示そう。2 準位原子の周波数を $\omega_a (= \omega_e - \omega_g)$ とし、基底状態 $|g\rangle$ のエネルギーをゼロに選ぶと、原子のハミルトニアン \hat{H}_a は

$$\hat{H}_a = \hbar\omega_a \hat{\sigma}^\dagger \hat{\sigma} \quad (1.167)$$

と書くことができる。これは、基底状態と励起状態の中間のエネルギーを原点にとり、 $\hat{H}_a = \hbar\omega_a \hat{\sigma}_z / 2$ と書いても同じである。

次に相互作用ハミルトニアン [式 (1.144)] を考えよう。パリティ選択則より、同じ準位間の遷移双極子モーメント μ_{gg} , μ_{ee} は必ずゼロになる。 $\hat{c}_e^\dagger \hat{c}_g = \hat{\sigma}^\dagger$, $\hat{c}_g^\dagger \hat{c}_e = \hat{\sigma}$ を用いて、 \hat{H}_{ep} は

$$\hat{H}_{\text{ep}} = \sum_{\mathbf{k}, p} \hbar (\xi_{eg\mathbf{k}p} \hat{\sigma}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}p} + \xi_{ge\mathbf{k}p} \hat{\sigma} \hat{a}_{\mathbf{k}p}^\dagger + \text{H.c.}) \quad (1.168)$$

と書ける。このハミルトニアンに含まれる項のうち、光子を消去し原子を脱励起する $\hat{\sigma} \hat{a}_{\mathbf{k}p}$ の項と、光子を生成し原子を励起する $\hat{\sigma}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}p}^\dagger$ の項は、時間的に極めて早く振動するため ($\sim e^{\pm i(\omega_a + \omega_g)t}$) 無視することができる。これを回転波近似 (rotating wave approximation) と呼ぶ。この近似の下で、相互作用ハミルトニアンは

$$\hat{H}_{\text{ep}} = \sum_{\mathbf{k}, p} \hbar (\xi_{\mathbf{k}p} \hat{\sigma}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}p} + \text{H.c.}), \quad (1.169)$$

$$\xi_{\mathbf{k}p} = -i\omega_a (\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{e}_{\mathbf{k}p}) \sqrt{\frac{1}{2\hbar\varepsilon_0\omega_k L^3}} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_a} \quad (1.170)$$

と表される。ただし $\omega_a = \omega_e - \omega_g$, $\boldsymbol{\mu} = \langle e | e\mathbf{r} | g \rangle$ である。

1.4 自然放出

1.4.1 半古典理論から量子電磁力学へ

自然放出とは、励起状態にある原子が自由空間中に光子を放出して、よりエネルギーの低い状態へと遷移する現象のことである。自然放出は輻射崩壊や蛍光などとも呼ばれる普遍的な緩和現象であり、原子・分子ばかりでなく半導体などの固体でも発現し、蛍光灯や発光ダイオードなど様々な発光デバイスの動作原理になっている。このように、自然放出は身近な量子現象の一つであるが、電磁場の量子性なしには理解できない現象であり、量子電磁力学 (quantum electrodynamics, QED) の誕生の契機となった。

量子力学誕生当初は、シュレーディンガー方程式やその解の波動関数として良く知られているように、電子などの粒子に対しては量子力学を適用していたが、電磁場などの場に対しては依然として古典的な場として扱っていた。このような理論的枠組みを半古典理論 (semi-classical theory) と呼ぶ。ところが、この枠組みでは原子の自然放出を記述することができない。なぜなら、半古典理論では、自然放出の初期状態である「原子が励起状態にあり電磁場がゼロ」の状態は電子ハミルトニアンの固有状態であるため、原子は永久に励起状態に留まることになってしまう。具体的には、電子と古典電磁場との相互作用ハミルトニアン [式 (1.139)]において、 $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \mathbf{0}$ とすれば $\hat{H}_{\text{ep}} = 0$ となり、電

子と電磁場の相互作用がゼロになってしまう。

また、自然放出に伴って放出される光は光子数が1個に確定している「単一光子状態」にあるが、1.1.4節で議論したように、このような状態を古典電磁場として記述することは不可能である。（古典場のエネルギーは振幅の自乗に比例するが、单一光子状態は振幅ゼロにも関わらず有限のエネルギーを持っている。）以上のことから、半古典理論によって自然放出を定量的に議論することは不可能であり、電子などの粒子に加えて電磁場も量子力学的に扱う量子電磁力学（QED）の必要性が認識されるようになった。電磁場が量子化されれば、自然放出の初期状態である「原子が励起状態にあり電磁場がゼロ」の状態はもはやハミルトニアンの固有状態ではなく、時間発展して崩壊する。これを次節で議論しよう。

1.4.2 不安定量子系

不安定原子核や励起原子などの量子不安定系は、不可逆的に崩壊して安定状態へと変化する。ここでは励起原子の自由空間中への輻射崩壊を例に、量子不安定系のダイナミクスを量子力学に従って解析してみよう。1.3.4節で見たように、2準位原子と自由空間中の光子場との相互作用を表すハミルトニアンは、次式のように書ける。

$$\hat{H} = \underbrace{\hbar\omega_a \hat{\sigma}^\dagger \hat{\sigma}}_{\hat{H}_f} + \underbrace{\sum_j \hbar\omega_j \hat{a}_j^\dagger \hat{a}_j}_{\hat{H}_i} + \underbrace{\sum_j \hbar(\xi_j \hat{\sigma}^\dagger \hat{a}_j + \xi_j^* \hat{a}_j^\dagger \hat{\sigma})}_{\text{相互作用}}. \quad (1.171)$$

ただし、自由光子場の固有モードのラベル (\mathbf{k}, p) を j と略記した。 \hat{H}_f は原子と光子の無摂動ハミルトニアン（相互作用なし）であり、 \hat{H}_i は両者の相互作用ハミルトニアンである。

$t = 0$ における初期状態では、原子は励起状態にあり、光子場は真空状態（全く光子の無い状態）にあるとする。全系の基底状態（原子が基底状態、光子場が真空状態）を表す状態ベクトルを $|\psi\rangle$ で表すと、

$$|\psi(0)\rangle = \hat{\sigma}^\dagger |\psi\rangle \quad (1.172)$$

と書くことができる。この状態にハミルトニアン \hat{H} を作用させてみると、 $\hat{\sigma}^\dagger |\psi\rangle$ （原子が励起状態にとどまり光子を放出していない状態）に加えて、 $\hat{a}_j^\dagger |\psi\rangle$ （モード j に光子を放出し基底状態に緩和した状態）が現れる。つまり、 $|\psi(0)\rangle$ が固有状態ではなく時間発展することがわかる。これが電磁場を量子化した効果である。

その後の時間発展をシュレーディンガー描像で記述しよう。系の状態ベクトル $|\psi(t)\rangle$ は、シュレーディンガーフォン程式

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = \hat{H} |\psi(t)\rangle \quad (1.173)$$

に従って時間発展する。この解は形式的に

$$|\psi(t)\rangle = e^{-i\hat{H}t/\hbar}|\psi(0)\rangle \quad (1.174)$$

と書くことができる。この状態ベクトルは、 $\hat{\sigma}^\dagger|v\rangle$ と $\hat{a}_j^\dagger|v\rangle$ の重ね合わせになり、次式のように表すことができる。

$$|\psi(t)\rangle = s(t)\hat{\sigma}^\dagger|v\rangle + \sum_j \alpha_j(t)\hat{a}_j^\dagger|v\rangle. \quad (1.175)$$

励起原子の生存確率 $P_s(t)$ および崩壊確率 $P_d(t)$ は

$$P_s(t) = |\langle\psi(0)|\psi(t)\rangle|^2 = |s(t)|^2, \quad (1.176)$$

$$P_d(t) = \sum_j |\alpha_j(t)|^2 = 1 - |s(t)|^2 \quad (1.177)$$

で与えられる。

1.4.3 崩壊直後の振る舞い

式 (1.174), (1.176) を使うと、生存確率 $P_s(t)$ が偶関数となることを次のように示すことができる。

$$|s(t)|^2 = \langle e^{i\hat{H}t/\hbar} \rangle \langle e^{-i\hat{H}t/\hbar} \rangle = |s(-t)|^2. \quad (1.178)$$

ただし、 $\langle \hat{O} \rangle = \langle \psi(0) | \hat{O} | \psi(0) \rangle$ である。本節では、特に t が小さな場合の振る舞いを議論しよう。式 (1.174) を t に関してテイラー展開し、両辺に $\langle \psi(0) |$ を掛けることによって次式を得る。

$$s(t) = 1 - \frac{it}{\hbar} \langle \hat{H} \rangle - \frac{t^2}{2\hbar^2} \langle \hat{H}^2 \rangle + \dots. \quad (1.179)$$

式 (1.176) にこれを代入すると、

$$P_s(t) = 1 - \frac{\langle (\Delta \hat{H})^2 \rangle}{\hbar^2} t^2 + \mathcal{O}(t^4) \quad (1.180)$$

が得られる。ただし $\Delta \hat{H} = \hat{H} - \langle \hat{H} \rangle$ であり、

$$\langle (\Delta \hat{H})^2 \rangle = \langle \hat{H}^2 \rangle - \langle \hat{H} \rangle^2 = \hbar^2 \sum_j |\xi_j|^2 \quad (1.181)$$

である。このように、不安定量子系の崩壊確率は、崩壊の初期では t^2 に比例する。

1.4.4 フェルミの黄金律

前節では、不安定量子系の生存確率が崩壊初期に t^2 に比例して減少することを見たが、一般には生存確率は指数関数的に（つまり t^1 に比例して）減少することが知られている。本節では、この様子を見てみよう。

式 (1.175) の係数 $s(t)$, $\alpha_j(t)$ に対して, 回転座標に移行して $\bar{s}(t)$, $\bar{\alpha}_j(t)$ を次式で導入する.

$$s(t) = \bar{s}(t)e^{-i\omega_a t}, \quad (1.182)$$

$$\alpha_j(t) = \bar{\alpha}_j(t)e^{-i\omega_j t}. \quad (1.183)$$

シュレーディンガー方程式 (1.173) より, $\bar{s}(t)$, $\bar{\alpha}_j(t)$ に対する方程式は

$$\frac{d}{dt}\bar{s} = -i\sum_j \xi_j e^{i(\omega_a - \omega_j)t} \bar{\alpha}_j(t), \quad (1.184)$$

$$\frac{d}{dt}\bar{\alpha}_j = -i\xi_j^* e^{i(\omega_j - \omega_a)t} \bar{s}(t) \quad (1.185)$$

となる. 初期条件は $\bar{s}(0) = 1$, $\bar{\alpha}_j(0) = 0$ である. これらの微分方程式を ξ_j に関する摂動で解くと, \bar{s} は ξ の偶数次, $\bar{\alpha}_j$ は ξ の奇数次の項を含むことがわかる. 一次までの摂動では $\bar{s}(0) = 1$ であり, $\bar{\alpha}_j$ に対する方程式は

$$\frac{d}{dt}\bar{\alpha}_j = -i\xi_j^* e^{i(\omega_j - \omega_a)t} \quad (1.186)$$

である. この方程式の解は

$$\bar{\alpha}_j(t) = -i\xi_j^* e^{i(\omega_j - \omega_a)t/2} t \operatorname{sinc} \left[\frac{(\omega_j - \omega_a)t}{2} \right] \quad (1.187)$$

である. ただし sinc 関数は次式で定義される.

$$\operatorname{sinc} x = \frac{\sin x}{x}. \quad (1.188)$$

時刻 t における原子の崩壊確率 $P_d(t)$ は次式で与えられる.

$$P_d(t) = \sum_j |\alpha_j(t)|^2 = \sum_j |\xi_j|^2 t^2 \operatorname{sinc}^2 \left[\frac{(\omega_j - \omega_a)t}{2} \right]. \quad (1.189)$$

ここで, 関数 $\operatorname{sinc}^2(ax)$ (a は正の定数) の性質を見てみよう. 図 1.5 に示すように, $\operatorname{sinc}^2(ax)$ は $-\pi/a \lesssim x \lesssim \pi/a$ の範囲でのみ大きな値をとり, 積分値は $\int_{-\infty}^{\infty} dx \operatorname{sinc}^2(ax) = \pi/a$ である. よって, a が大きい場合には

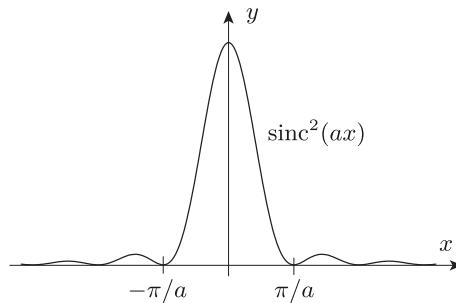


図 1.5 関数 $\operatorname{sinc}^2(ax)$ の概形.

$$\text{sinc}^2(ax) \approx \frac{\pi}{a} \delta(x) \quad (1.190)$$

と近似できる。この近似を式(1.189)に適用すると、

$$P_d(t) = 2\pi t \sum_j |\xi_j|^2 \delta(\omega_j - \omega_a) \quad (1.191)$$

となり、崩壊確率が時間 t に比例して増大することがわかる。よって、崩壊レート Γ を $P_d(t)/t$ によって定義することができる。始状態を $|i\rangle$ 、終状態を $|f\rangle$ 、それらの \hat{H}_f に対する固有エネルギーを E_i, E_f で表すと、崩壊レートは

$$\Gamma = \frac{2\pi}{\hbar} \sum_f |\langle f | \hat{H}_i | i \rangle|^2 \delta(E_f - E_i) \quad (1.192)$$

と表される。これは量子不安定系の崩壊レートを一般的に与える式であり、フェルミの黄金律 (Fermi golden rule) と呼ばれる。

1.4.5 黄金律の成立条件

フェルミ黄金律の導出において、式(1.190)のように sinc^2 関数をデルタ関数で近似した。これには時間 t が大きいことが仮定されているが、どの程度の t が必要かを定量的に見てみよう。

原子光子相互作用のスペクトル密度 $|\xi(\omega)|^2$ を

$$|\xi(\omega)|^2 = \sum_j |\xi_j|^2 \delta(\omega - \omega_j) \quad (1.193)$$

により導入しよう。スペクトル密度は、原子と光子場との結合強度のエネルギー依存性を表しており、光子場の状態密度の情報を自然に含んだ関数である。 $|\xi(\omega)|^2$ を用いると式(1.189)は次のように書き換えられる。

$$P_d(t) = t^2 \int d\omega |\xi(\omega)|^2 \times \text{sinc}^2 \left[\frac{(\omega - \omega_a)t}{2} \right]. \quad (1.194)$$

よって、 $|\xi(\omega)|^2$ の周波数空間における幅 $\Delta\omega$ と、 sinc^2 関数の主要部の幅 ($\sim t^{-1}$) との大小関係が重要である：(i) 崩壊直後の $t \ll (\Delta\omega)^{-1}$ の時間領域では、式(1.194)において、(sinc^2 関数) ≈ 1 と見なすことができる。よってこの時間領域では

$$P_d(t) \approx \left(\int d\omega |\xi(\omega)|^2 \right) t^2 = \left(\sum_j |\xi_j|^2 \right) t^2 \quad (1.195)$$

となり、崩壊確率は t^2 に比例して増大する。これは 1.4.3 節で示したことである。一方、(ii) $t \gg (\Delta\omega)^{-1}$ の時間領域では、 sinc^2 関数をデルタ関数で近似する式(1.190)が適用できる。よって

$$P_d(t) \approx 2\pi |\xi(\omega_a)|^2 t \quad (1.196)$$

となり、崩壊確率は t^1 に比例して増大する。

(i) から (ii) へのクロスオーバーは、 $t \sim (\Delta\omega)^{-1}$ 程度の時間で起こる。原子と自由空間中の光子との相互作用の場合には、スペクトル密度 $|\xi(\omega)|^2$ はあまり周波数 ω に依存せず、 t^2 型の崩壊則に従う時間は極めて短い。^{*11)} 一方、原子が共振器中にある場合などでは、スペクトル密度 $|\xi(\omega)|^2$ は共鳴周波数付近に鋭いピークを持っており、フェルミの黄金律は適用できない。この場合、崩壊確率は単調に減衰するのではなく、コヒーレントな振動を示す（6.2節参照）。

1.4.6 輻射崩壊レート

本節では、自由空間中にある 2 準位原子に対してフェルミの黄金律を適用し、自然放出レート (spontaneous emission rate) を求めよう。式 (1.170) より、この場合のスペクトル密度は次のように書くことができる。

$$|\xi(\omega)|^2 = \sum_{k,p} |\xi_{kp}|^2 \delta(\omega_k - \omega), \quad (1.197)$$

$$\xi_{kp} = -i\omega_a(\mu \cdot e_{kp}) \sqrt{\frac{1}{2\hbar\varepsilon_0\omega_k L^3}} e^{ik \cdot r_a}. \quad (1.198)$$

式 (1.197) における k に関する和を積分に直す。このとき、 k の各成分が $\frac{2\pi}{L}$ の整数倍に離散化されていることに注意して、 $\sum_k \rightarrow (\frac{L}{2\pi})^3 \int d\mathbf{k}$ と置き換える。また、 $\delta(\omega_k - \omega) = \delta(k - \omega/c)/c$ であることを使うと、

$$|\xi(\omega)|^2 = \frac{\omega_a^2}{16\pi^3\hbar\varepsilon_0 c^2} \int d\mathbf{k} \frac{\delta(k - \omega/c)}{k} \sum_{p=1}^2 |\mu \cdot e_{kp}|^2. \quad (1.199)$$

偏光 p に関する和は次のように計算する。 e_{k3} として k 方向の単位ベクトルを選ぶ。つまり $e_{k3} = \mathbf{k}/k$ とする。すると $\{e_{k1}, e_{k2}, e_{k3}\}$ は正規直交基底になるので、 $\sum_{p=1}^3 |\mu \cdot e_{kp}|^2 = |\mu|^2$ である。また、 μ の方向を z 軸に選び、 μ と k のなす角度を θ とすると、 $|\mu \cdot e_{k3}|^2 = |\mu|^2 \cos^2 \theta$ である。以上の考察より $\sum_{p=1}^2 |\mu \cdot e_{kp}|^2 = |\mu|^2 \sin^2 \theta$ である。式 (1.199) 中の \mathbf{k} 積分を三次元極座標で行うと、

$$\begin{aligned} |\xi(\omega)|^2 &= \frac{\omega_a^2 |\mu|^2}{16\pi^3\hbar\varepsilon_0 c^2} \left(\int_0^\infty dk k \delta(k - \omega/c) \right) \times \left(\int_0^\pi d\theta \sin^3 \theta \right) \\ &\times \left(\int_0^{2\pi} d\phi \right) = \frac{\omega_a^2 |\mu|^2}{6\pi^2\hbar\varepsilon_0 c^3} \omega \end{aligned} \quad (1.200)$$

が得られる。これを式 (1.196) に代入して、自由空間中の原子の自然放出レート

$$\gamma = \frac{\omega_a^3 |\mu|^2}{3\pi\hbar\varepsilon_0 c^3} \quad (1.201)$$

が得られる。これはAINシュタインの A 係数とも呼ばれる。

^{*11)} 光子のエネルギーが正であることから、大まかに $\Delta\omega \sim \omega_a$ と考えてよい。

1.4.7 自己エネルギー・Lamb シフト

1.4.4 節では、相互作用 ξ_j の二次までの近似でフェルミの黄金律を導き、励起原子の崩壊レートを導出した。この方法は摂動論であるため、原理的には短い時間 t に対してのみ有効である。本節では、素粒子理論や物性理論の分野で培われてきた、グリーン関数の方法の概略を紹介する。この方法では、相互作用 ξ_j の高次の効果まで系統的に取り入れることができ、また長い時間 t に対しても信頼できる結果を与える。グリーン関数法に関しては数多くの成書があるので、詳細な議論はそちらを参照して欲しい。

ハミルトニアンとして、無摂動部分 \hat{H}_f と相互作用部分 \hat{H}_i から成る、式(1.171)を出発点としよう。原子の励起状態 $\hat{\sigma}^\dagger|v\rangle$ および崩壊後の状態 $\hat{a}_j^\dagger|v\rangle$ に対する無摂動グリーン関数を次式で定義しよう。

$$A^{(0)}(\omega) = \langle v | \hat{\sigma} \frac{1}{\omega + i0 - \hat{H}_f} \hat{\sigma}^\dagger | v \rangle, \quad (1.202)$$

$$P_j^{(0)}(\omega) = \langle v | \hat{a}_j \frac{1}{\omega + i0 - \hat{H}_f} \hat{a}_j^\dagger | v \rangle. \quad (1.203)$$

演算子 $(z - \hat{O})^{-1}$ は、演算子 \hat{O} に対するリゾルベントと呼ばれる。 $\hat{\sigma}^\dagger|v\rangle$ や $\hat{a}_j^\dagger|v\rangle$ は無摂動ハミルトニアン \hat{H}_f の固有状態であるため、無摂動グリーン関数は

$$A^{(0)}(\omega) = \frac{1}{\omega + i0 - \omega_a}, \quad (1.204)$$

$$P_j^{(0)}(\omega) = \frac{1}{\omega + i0 - \omega_j} \quad (1.205)$$

で与えられる。無摂動グリーン関数は、フーリエ変換によって、相互作用の無い場合の原子や光子のダイナミクスと結びついている。例えば

$$\frac{i}{2\pi} \int d\omega e^{-i\omega t} A^{(0)}(\omega) = \langle v | \hat{\sigma} e^{-i\hat{H}_f t} \hat{\sigma}^\dagger | v \rangle = e^{-i\omega_a t} \quad (1.206)$$

は原子の自然な位相回転を表している。換言すると、無摂動グリーン関数 $A^{(0)}(\omega)$ の ω 平面における極が、原子の周波数を表している。

次に、相互作用のある場合の原子グリーン関数

$$A(\omega) = \langle v | \hat{\sigma} \frac{1}{\omega + i0 - \hat{H}} \hat{\sigma}^\dagger | v \rangle \quad (1.207)$$

について調べよう。この量は、フーリエ変換により、式(1.175)に現れる原子励起状態の生存振幅 $s(t)$ と関係している。

$$\frac{i}{2\pi} \int d\omega e^{-i\omega t} A(\omega) = \langle v | \hat{\sigma} e^{-i\hat{H} t} \hat{\sigma}^\dagger | v \rangle = s(t). \quad (1.208)$$

ここで、式(1.204) や式(1.207) に現れるグリーン関数の中身の演算子を

$$\hat{R} = \frac{1}{\omega + i0 - \hat{H}}, \quad (1.209)$$

$$\hat{R}_f = \frac{1}{\omega + i0 - \hat{H}_f} \quad (1.210)$$

と表すことにしよう。演算子に関する恒等式 $\hat{A}^{-1} - \hat{B}^{-1} = \hat{A}^{-1}(\hat{B} - \hat{A})\hat{B}^{-1}$ において $\hat{A} = \omega + i0 - \hat{H}$, $\hat{B} = \omega + i0 - \hat{H}_f$ とすると,

$$\hat{R} = \hat{R}_f + \hat{R}\hat{H}_i\hat{R}_f \quad (1.211)$$

が得られる。これより

$$\hat{R} = \hat{R}_f + \hat{R}_f\hat{H}_i\hat{R}_f + \hat{R}_f\hat{H}_i\hat{R}_f\hat{H}_i\hat{R}_f + \dots \quad (1.212)$$

が得られる。この式に対して、状態 $\hat{\sigma}^\dagger|v\rangle$ で期待値をとると、式 (1.207) より $\hat{A}(\omega)$ が得られる。 \hat{H}_i は原子励起状態 $\hat{\sigma}^\dagger|v\rangle$ と崩壊後の状態 $\hat{a}_j^\dagger|v\rangle$ とを結合させるので、 \hat{H}_i を偶数個含む項のみが非零の寄与を与える、次式が得られる。

$$\begin{aligned} A(\omega) &= A^{(0)}(\omega) + A^{(0)}(\omega)\Sigma(\omega)A^{(0)}(\omega) \\ &\quad + A^{(0)}(\omega)\Sigma(\omega)A^{(0)}(\omega)\Sigma(\omega)A^{(0)}(\omega) + \dots \end{aligned} \quad (1.213)$$

ここで $\Sigma(\omega)$ は励起原子の自己エネルギー (self energy) と呼ばれる、

$$\Sigma(\omega) = \sum_j |\xi_j|^2 P_j^{(0)}(\omega) \quad (1.214)$$

で与えられる。式 (1.213) の右辺第 n 項は、 $|\xi|^2(n-1)$ に比例する項であり、 $2(n-1)$ 次摂動に対応している。例えば二次摂動の項を直感的に表現すると、図 1.6 のような概略図で表すことができ、ファインマンダイアグラム (Feynman diagram) と呼ばれる。

式 (1.213) は等比級数になっており、次のようにまとめられる。

$$A(\omega) = \frac{A^{(0)}(\omega)}{1 - \Sigma(\omega)A^{(0)}(\omega)}. \quad (1.215)$$

この式では結合定数 ξ_j が分母に現れており、摂動が無限次まで取り込まれていることがわかる。式 (1.204) を使うと、

$$A(\omega) = \frac{1}{\omega - \omega_a - \Sigma(\omega)} \quad (1.216)$$

が得られる。無摂動の場合の式 (1.204) で見たように、グリーン関数の極は原子の周波数に対応している。よって、相互作用の無い場合の原子の周波数

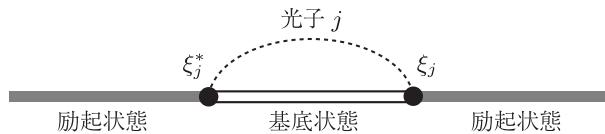


図 1.6 二次摂動に対するファインマンダイアグラム。

ω_a が、相互作用を繰りこんだ結果 $\omega_a + \Sigma(\omega)$ に変化した、と解釈することができる。自己エネルギー $\Sigma(\omega)$ は周波数 ω の関数であるが、ここでは極付近 ($\omega \sim \omega_a$) での振る舞いに着目して、 $\Sigma(\omega) \approx \Sigma(\omega_a)$ と近似しよう。式 (1.214), (1.205) より

$$\Sigma(\omega_a) = \sum_j \frac{|\xi_j|^2}{\omega_a - \omega_j + i0} \quad (1.217)$$

である。これは複素量であり、実部および虚部は

$$\text{Re } \Sigma(\omega_a) = \sum_j \frac{|\xi_j|^2}{\omega_a - \omega_j}, \quad (1.218)$$

$$\text{Im } \Sigma(\omega_a) = -\pi \sum_j |\xi_j|^2 \delta(\omega_a - \omega_j) \quad (1.219)$$

である。自己エネルギーの実部 $\text{Re } \Sigma(\omega_a)$ は、原子と光子の相互作用に由来する原子の遷移周波数のシフトを表し、**Lamb シフト** (Lamb shift) と呼ばれる。一方、自己エネルギーの虚部 $\text{Im } \Sigma(\omega_a)$ は、原子の自然放出レートの半分 $\gamma/2$ であることがわかる。これは、励起原子の生存確率 $|s(t)|^2$ が γ で崩壊することを意味しており、フェルミ黄金律による結果と整合している。

1.5 Rabi 振動

本節では、自由空間にある原子に対して、その遷移周波数に共鳴するドライブ光を照射するときのダイナミクスを考えよう。この状況を解析する厳密な方法は、初期状態として古典ドライブ光に相当するコヒーレント状態をとり、原子・光子場双方を量子化したハミルトニアンを用いて、時間発展を追うことである。これは 7 章で詳しく議論する。

ここでは、原子の状態空間のみに作用する有効ハミルトニアン $\hat{H}_{\text{eff}}(t)$ を用いて、孤立系の量子力学として原子のダイナミクスを解析しよう。^{*12)} 本来の原子と光の相互作用は式 (1.171) で記述されるが、演算子 \hat{a}_j をドライブの効果を表す c 数に置き換えた

$$\hat{H}_{\text{eff}}(t) = \omega_a \hat{\sigma}^\dagger \hat{\sigma} + [\mathcal{F}(t) \hat{\sigma}^\dagger + \mathcal{F}^*(t) \hat{\sigma}] \quad (1.220)$$

を原子に対する有効ハミルトニアンとしよう。 $\mathcal{F}(t)$ は原子が感じるドライブ光の振幅である。ここでは周波数 ω_d の定常光を仮定し

$$\mathcal{F}(t) = F_d e^{-i\omega_d t} \quad (1.221)$$

の場合を考えよう。ただし F_d は複素振幅であり、ドライブ光の位相 θ_d を用い

*12) 原子と光子場の結合が弱くドライブ光が強い極限において、孤立系としてのユニタリな時間発展は正当化される (5.5 節参照)。

て $F_d = |F_d|e^{-i\theta_a}$ と表すことができる。原子の初期状態 $|\psi(0)\rangle$ に関しては特に指定しない。

$\hat{H}_{\text{eff}}(t)$ は時間に依存するハミルトニアンであるが、ドライブ周波数 ω_d での回転座標へ移行すると、^{*13)} 有効ハミルトニアンは静的になり

$$\hat{H}_{\text{eff}} = (\omega_a - \omega_d)\hat{\sigma}^\dagger\hat{\sigma} + F_d\hat{\sigma}^\dagger + F_d^*\hat{\sigma} \quad (1.222)$$

で与えられる。

Bloch ベクトルの運動

$\hat{H}_{\text{eff}}(t)$ に基づくハイゼンベルグ方程式から、 $\langle\hat{\sigma}\rangle = \langle\psi(0)|\hat{\sigma}(t)|\psi(0)\rangle$ および $\langle\hat{\sigma}^\dagger\hat{\sigma}\rangle$ に対する運動方程式

$$\frac{d}{dt}\langle\hat{\sigma}\rangle = -i(\omega_a - \omega_d)\langle\hat{\sigma}\rangle - iF_d(1 - 2\langle\hat{\sigma}^\dagger\hat{\sigma}\rangle), \quad (1.223)$$

$$\frac{d}{dt}\langle\hat{\sigma}^\dagger\hat{\sigma}\rangle = iF_d^*\langle\hat{\sigma}\rangle - iF_d\langle\hat{\sigma}\rangle^* \quad (1.224)$$

が得られる。原子の状態を、Bloch ベクトル $\mathbf{r} = (x, y, z)$ で記述しよう。Bloch ベクトルの 3 成分と $\langle\hat{\sigma}\rangle$, $\langle\hat{\sigma}^\dagger\hat{\sigma}\rangle$ との関係式は、 $\hat{\sigma} = (\hat{\sigma}_x - i\hat{\sigma}_y)/2$ および $\hat{\sigma}^\dagger\hat{\sigma} = (\hat{I} + \hat{\sigma}_z)/2$ から

$$\langle\hat{\sigma}\rangle = \frac{x - iy}{2}, \quad (1.225)$$

$$\langle\hat{\sigma}^\dagger\hat{\sigma}\rangle = \frac{z + 1}{2} \quad (1.226)$$

である。Bloch ベクトルを用いると、運動方程式 (1.223), (1.224) は次のように書き換えられる。

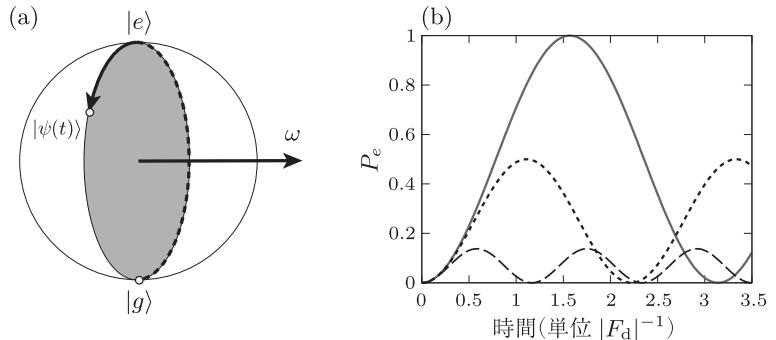


図 1.7 Rabi 振動のダイナミクス。(a) Bloch 球による表現。ドライブ光の離調・振幅・位相で定まるベクトル ω を軸とし、Rabi 振動数 Ω_r で回転する。(b) 励起確率の時間依存性。ドライブ周波数は $(\omega_d - \omega_a)/|F_d| = 0$ (実線), 2 (点線), 5 (破線)。

*13) $\omega_d\hat{\sigma}^\dagger\hat{\sigma}$ を無摂動部分にとり、相互作用表示に移る。

$$\frac{d}{dt}\mathbf{r} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}. \quad (1.227)$$

これは Bloch ベクトルの回転を表しており、角速度ベクトル $\boldsymbol{\omega}$ は

$$\boldsymbol{\omega} = (2|F_d| \cos \theta_d, 2|F_d| \sin \theta_d, \omega_a - \omega_d) \quad (1.228)$$

で与えられる。よって原子状態を表す点 \mathbf{r} は、図 1.7(a) のように、ベクトル $\boldsymbol{\omega}$ の方向を軸として一定の角速度で回転する。角速度の大きさは、

$$\Omega_r = |\boldsymbol{\omega}| = \sqrt{(\omega_a - \omega_d)^2 + 4|F_d|^2} \quad (1.229)$$

で与えられ、**Rabi 振動数** (Rabi frequency) と呼ばれる。また、式 (1.227) より、

$$\frac{d}{dt}|\mathbf{r}|^2 = 2\mathbf{r} \cdot \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt} \right) = 2(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \cdot \mathbf{r} = 0, \quad (1.230)$$

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}) = \boldsymbol{\omega} \cdot \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt} \right) = \boldsymbol{\omega} \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = 0 \quad (1.231)$$

であるから、 $|\mathbf{r}|^2$ および $\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}$ は保存量である。

基底状態からの時間発展

以下では、初期時刻 $t = 0$ において原子が基底状態 $|g\rangle$ にあるとしよう。すると $(x(0), y(0), z(0)) = (0, 0, -1)$ であり、保存量の値は次のように定まる。

$$|\mathbf{r}|^2 = 1, \quad (1.232)$$

$$\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r} = \omega_d - \omega_a. \quad (1.233)$$

式 (1.232) は Bloch ベクトルが常に Bloch 球面上にあること、つまり原子が純粋状態に保たれることを示している。式 (1.227) をもう一度時間微分して

$$\frac{d^2}{dt^2}\mathbf{r} = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r})\boldsymbol{\omega} - |\boldsymbol{\omega}|^2\mathbf{r} \quad (1.234)$$

を得る。ここに (1.233) を使うと

$$\frac{d^2}{dt^2}\mathbf{r} = -\Omega_r^2\mathbf{r} + (\omega_d - \omega_a)\boldsymbol{\omega} \quad (1.235)$$

を得る。これは各成分に対する単振動の運動方程式である。速度に対する初期条件は、式 (1.227) より $(\dot{x}(0), \dot{y}(0), \dot{z}(0)) = (-2|F_d| \sin \theta_d, 2|F_d| \cos \theta_d, 0)$ である。 z 成分について解くと、励起状態占有確率 $P_e(t) = \langle \hat{\sigma}^\dagger \hat{\sigma} \rangle = (z + 1)/2$ は次式で与えられる。

$$P_e(t) = \frac{2|F_d|^2}{4|F_d|^2 + (\omega_d - \omega_a)^2} (1 - \cos \Omega_r t). \quad (1.236)$$

$P_e(t)$ の時間発展の様子を図 1.7(b) に示した。このように、定常光によって

誘起される原子の基底状態と励起状態の間の振動を **Rabi 振動** (Rabi oscillation) と呼ぶ。特に、ドライブ光が原子に共鳴している場合 ($\omega_d = \omega_a$) には、 $t = (1 + 2n)\pi/\Omega_r$ ($n = 0, 1, \dots$)において原子は完全に励起状態に到達する。

π パルス、量子ゲート

初期状態ベクトル $|\phi(0)\rangle$ と時刻 t における状態ベクトル $|\phi(t)\rangle$ とは、ユニタリな時間推進演算子 $\hat{U}(t)$ を用いて $|\phi(t)\rangle = \hat{U}(t)|\phi(0)\rangle$ によって結ばれる。ここでは $\hat{U}(t)$ を求めよう。

式 (1.222) の静的な有効ハミルトニアン \hat{H}_{eff} を

$$\hat{H}_{\text{eff}} = \frac{\omega_a - \omega_d}{2} + \frac{\Omega_r}{2}\hat{V}, \quad (1.237)$$

$$\hat{V} = \frac{2|F_d|\cos\theta_d}{\Omega_r}\hat{\sigma}_x + \frac{2|F_d|\sin\theta_d}{\Omega_r}\hat{\sigma}_y + \frac{\omega_a - \omega_d}{\Omega_r}\hat{\sigma}_z \quad (1.238)$$

と分解しておこう。 \hat{H}_{eff} は静的であるため、時間推進演算子 $\hat{U}(t)$ は $\hat{U}(t) = \exp(-i\hat{H}_{\text{eff}}t)$ により与えられる。 $\hat{V}^2 = \hat{I}$ (単位行列) であることに注意すると、

$$\hat{U}(t) = e^{i(\omega_d - \omega_a)t/2} \left[\cos(\Omega_r t/2) - i \sin(\Omega_r t/2) \hat{V} \right] \quad (1.239)$$

が得られる。

問題

$\hat{U}(t)$ を用いて式 (1.236) を導出せよ。

解答 初期状態 $|\psi(0)\rangle = |g\rangle$ に $\hat{U}(t)$ を作用させると、

$$|\psi(t)\rangle = -(2iF_d/\Omega_r)\sin(\Omega_r t/2)|e\rangle + \dots \quad (1.240)$$

となる。励起確率は $|e\rangle$ にかかる係数の絶対値自乗であり、式 (1.236) と一致する。

ドライブ光が原子に共鳴しており ($\omega_d = \omega_a$)、また連続光ではなく Rabi 振動の半周期 ($0 \leq t \leq \pi/\Omega_r$) だけ複素振幅 F_d を持つ矩形パルスの場合を考えよう。このパルスを π パルス (π -pulse) と呼ぶ。このパルスによる時間推進演算子は

$$\hat{U}_\pi = -i(\cos\theta_d\hat{\sigma}_x + \sin\theta_d\hat{\sigma}_y) \quad (1.241)$$

である。 π パルスを基底状態・励起状態に照射すると

$$|g\rangle \rightarrow \hat{U}_\pi|g\rangle = -ie^{-i\theta_d}|e\rangle, \quad (1.242)$$

$$|e\rangle \rightarrow \hat{U}_\pi|e\rangle = -ie^{i\theta_d}|g\rangle \quad (1.243)$$

となり、量子ビットを反転させる作用をする。これは量子情報処理における

NOT ゲートである。

パルス時間が Rabi 振動の 1/4 周期の場合 ($0 \leq t \leq \pi/2\Omega_r$) を **$\pi/2$ パルス** ($\pi/2$ -pulse) と呼ぶ。時間推進演算子は

$$\hat{U}_{\pi/2} = (\hat{I} - i \cos \theta_d \hat{\sigma}_x - i \sin \theta_d \hat{\sigma}_y) / \sqrt{2} \quad (1.244)$$

である。 $\pi/2$ パルスを基底状態・励起状態に照射すると

$$|g\rangle \rightarrow \hat{U}_{\pi/2}|g\rangle = (|g\rangle - ie^{-i\theta_d}|e\rangle) / \sqrt{2}, \quad (1.245)$$

$$|e\rangle \rightarrow \hat{U}_{\pi/2}|e\rangle = (-ie^{i\theta_d}|g\rangle + |e\rangle) / \sqrt{2} \quad (1.246)$$

であり、状態を Bloch 球上の極から赤道面へと移動させる。これは量子情報処理におけるアダマールゲートである。

1.6 着衣状態

静的な有効ハミルトニアン \hat{H}_{eff} [式 (1.222)] を再考しよう。ドライブ周波数 ω_d や複素振幅 F_d は「その場制御」可能なパラメータであるが、上のハミルトニアンにはそれらが独立なパラメータとして入っていることに注意しよう。つまり、量子系に印加するドライブ光は、その系の固有状態を操作するのに用いることができる。このような操作を電場修飾と呼び、 \hat{H}_{eff} の固有状態を着衣状態 (dressed state) と呼ぶ。

着衣状態 $|+\rangle$ および $|-\rangle$ は、原子の基底状態 $|g\rangle$ 、励起状態 $|e\rangle$ を用いて

$$|+\rangle = \cos \phi |g\rangle + e^{-i\theta_d} \sin \phi |e\rangle, \quad (1.247)$$

$$|-\rangle = -e^{i\theta_d} \sin \phi |g\rangle + \cos \phi |e\rangle \quad (1.248)$$

で与えられる。ただし、角度 ϕ は

$$2\phi = \arg [(\omega_d - \omega_a)/2 + i|F_d|] \quad (1.249)$$

で決まる。着衣状態間のエネルギー差は、式 (1.229) で与えられる Rabi 振動数 Ω_r に他ならない。

図 1.8 に、ドライブが原子に共鳴している場合 ($\omega_d = \omega_a$) の着衣状態のエネルギー図を示す。状態ベクトル中の数字 ($N, N \pm 1$ など) はドライブ中の光子数を表している。^{*14)} 左側はドライブ光なしの場合のエネルギー準位であり、状態 $|g, N\rangle$ (エネルギー $N\omega_d$) と状態 $|e, N-1\rangle$ (エネルギー $\omega_a + (N-1)\omega_d$) が縮退している。右側はドライブ光ありの場合を表しており、状態 $|g, N\rangle$ と $|e, N-1\rangle$ が混成して着衣状態 $|\pm, N - \frac{1}{2}\rangle$ を作っている。

*14) ここでは相対的な光子数の差のみに注目し、 N の具体的な値は気にしない。

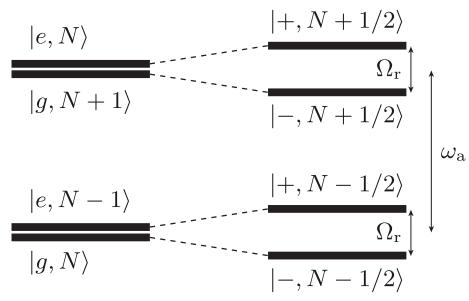


図 1.8 着衣状態のエネルギー準位構造. 状態ベクトル中の数字 N はドライブ光子数を表す. (左) ドライブ光なしの場合. (右) ドライブ光ありの場合.

第 2 章

QED から共振器 QED へ

前章では「共振器」のつかない QED, つまり原子と自由空間中の光子場との相互作用について概観した。本章では「共振器」QED, つまり原子と共振器中の光子を舞台に発現する量子力学について、その特徴や魅力を定性的に紹介する。自由空間中では原子はエネルギー的に広がった多数の調和振動子と結合しているが、共振器 QED 系は原子が一つの調和振動子と結合しているシンプルな系であり、その分、系の持つ量子性がより強く発現しやすい。また、共振器 QED 系は様々な物理系によって実現することができる。

2.1 共振器 QED とは

自由空間中の電磁場の量子化を復習しよう（1.2 節参照）。そこでは、自由空間中に長さ L の周期的境界条件を仮定し、電磁場の波数 \mathbf{k} を離散化した。波数 \mathbf{k} やエネルギー $\hbar c|\mathbf{k}|$ の刻み幅は、式 (1.109) のように L^{-1} に比例しており、また固有モードと原子の結合は、式 (1.145) のように $L^{-3/2}$ に比例してい

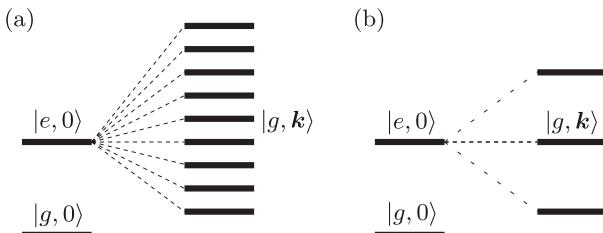


図 2.1 原子 - 光子結合系のエネルギー準位。 $|e, 0\rangle$ は原子が励起状態にあり光子の無い状態を、 $|g, \mathbf{k}\rangle$ は原子が基底状態にありモード \mathbf{k} に光子が一つある状態を表す。(a) 自由空間中。原子は多数の光子モードと弱く結合している。(b) 共振器中。原子は少数のモード（実効的には 1 個のみ）と強く結合している。

る。自由空間中では L は非常に大きいため、図 2.1(a) で示すように、原子は連続的なエネルギー分布を持つ多数のモードと弱く結合している。その結果、励起原子は不可逆的な自然放出を起こす (1.4 節参照)。

共振器とは、鏡や誘電体など損失の少ない光学媒質を用いて、電磁場を狭い空間に閉じ込める装置である。この共振器内での電磁場の固有モードを共振器モード (cavity mode) と呼ぶ。共振器中では、空間サイズ L が小さいため固有エネルギーの離散化幅が大きく、図 2.1(b) に示すように、原子は少数のモードと強く結合する。特に、共振器を適切に設計することにより、原子が実効的に 1 個だけの共振器モードと相互作用する状況を作り出すことができる。この状況下では、原子と共振器との間で可逆な励起のやりとりが行われる。これは**真空 Rabi 振動** (vacuum Rabi oscillation) と呼ばれる現象である (3.2 節参照)。このように、原子 (2 準位系) - 共振器 (調和振動子) 結合系の量子力学を研究する分野が**共振器量子電磁気学** (cavity QED) である。

一方で、ロスが無く反射率 100% の鏡を用いて完全に孤立した原子 - 共振器系を準備できたとしても、外界からこの系にアクセスできないのでは、系のクリーンさを実証したり、活用することができない。よって、共振器を構成する鏡に僅かな透過率を持たせるなどして、図 2.2 のように共振器に外部の伝播モードを弱く結合させ、光を介して外界からのアクセスを可能にしている。本書では、この伝播モードを導波路モード (waveguide mode) と呼ぶことにしよう。^{*1)} 導波路モードから照射する光としては、状態制御に用いるドライブ光や状態測定に用いるプローブ光など、古典光 (コヒーレント状態) を照射するのが一般的であるが、単一光子を入射して量子デバイスとして用いる場合もある。このように、共振器 QED は量子開放系の光学応答を研究する学問であるとも言える。

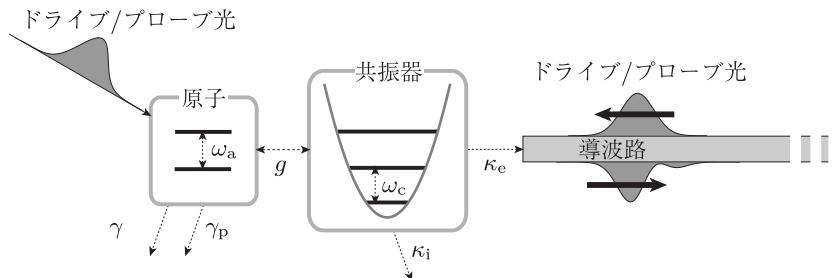


図 2.2 共振器 QED 系の概念図。 ω_a : 原子の遷移周波数, ω_c : 共振器の遷移周波数, g : 原子 - 共振器結合, γ : 原子の自然放出, γ_p : 原子の純位相緩和, κ_e : 共振器モードの外部ロス (導波路への緩和), κ_i : 共振器モードの内部ロス (その他の要因による緩和)。

^{*1)} Fabry-Perot 共振器のように、実際の導波路が結合していない場合にも、この呼び方を用いる。

2.2 共振器 QED の魅力

共振器 QED の発足当初は、原子の自然放出制御という基礎科学としての面白さから注目を集めた^[3]。一方最近では、量子計算機をはじめとする多様な量子情報デバイスの開発が進んでおり、そのハードウェア構築にあたって共振器 QED の知見を欠かすことができない。本節では、基礎・応用の両面から、共振器 QED 系の魅力について概観する。

クリーンな量子系

共振器 QED 系の最大のメリットは、環境自由度から隔離された少数自由度のクリーンな量子系を実現できる点であろう。ごく直感的には、鏡や誘電体に囲われた原子と比べて、まわりに何も物質の無い自由空間中に置かれた原子のほうが、より孤立しておりクリーンな量子系のように思える。ところが実際には、電磁場の量子化により、原子はエネルギー的に広がった多数の光子モードと結合しており [図 2.1(a)] それらが自然放出を引き起こしてしまう。これを避けるためには、共振器を用いて電磁場モードを図 2.1(b) のように離散化し、共振器の共鳴エネルギーを原子の共鳴エネルギーから大きく離しておけばよい。このとき、原子を重ね合わせ状態 $c_0|g\rangle + c_1|e\rangle$ にしておけば、その重ね合わせは長時間保持される。近年、0 または 1 の確定した値をとる従来の古典ビットの代わりに、2 準位系の重ね合わせ状態を量子ビットとして用いる量子情報処理が盛んに研究されているが、このように寿命やコヒーレンス時間の長い量子系は、量子メモリとして活用できるため、量子情報処理にとって貴重な物理的資源である。

デザイン可能性

先ほど「共振器の共鳴エネルギーを原子の共鳴エネルギーから大きく離す」と記したが、共振器 QED では図 2.2 に示す様々なパラメータを人工的に決めることができる。つまり、系をデザインすることができる。例えば、共振器のサイズによって共振器モードの周波数 ω_c を、共振器を構成する鏡の反射率やファイバーとの結合強度により共振器モードの崩壊レート κ_e を、それぞれ決めることができる。また原子として、半導体量子ドットや超伝導量子ビットなど固体中の人工原子を用いる際には、原子の共鳴周波数 ω_a をデザイン可能である。

上述の例は、全て系の作製段階でのデザイン可能性であり、一旦系が出来あがってしまえばパラメータの値は固定されているが、さらに進んで、パラメータの値を「その場制御」できる系もある。例えば、超伝導回路を用いた実装では、回路の中に超伝導量子干渉計 (superconducting quantum interference device, SQUID) を作りこんでおき、近傍に電流を流して貫通磁束を制御する

ことで、量子ビットの共鳴周波数 ω_a や共振器の崩壊レート κ_e を時間的に変調することができる^{[4], [5]}.

原子発光の制御：導波路 QED 系の構築

ファイバーなどの一次元導波路中に光子を正確に 1 個含むパルスを生成する单一光子生成 (single-photon generation) は、それを検出する单一光子検出 (single-photon detection) と併せて、量子通信の基盤となる技術である。单一光子生成の一つの方法は、原子からの自然放出光を導波路へと高効率で誘導することであり、そのためには、原子の導波路への自然放出レートが自由空間への自然放出レートと比べて遙かに大きい状況を作つておけばよい。共振器 QED では、Purcell 効果を用いてこのような状況を実現することができる (6.3 節参照)。

このように、原子が一次元的な伝播光子モードに強く結合した系は導波路 QED 系 (waveguide QED system) と呼ばれている。導波路 QED 系では、導波路から照射する光子が、原子と非常に効率良く相互作用するという特長がある。一般に、光子を原子と効率良く相互作用させることは簡単では無い。例えば自由空間中の原子にひとつの光子を照射しても、ほとんどの場合光子は原子と相互作用せずに素通りしてしまう。この原因是、照射光と原子発光の空間モード形状が著しく異なるためである。一方、導波路 QED 系では、原子発光が導波路中の伝播光子であるため、照射光と原子発光の空間モード形状が良く一致している。その結果、光子が原子を素通りする確率振幅が量子干渉によってキャンセルし、光子と原子との相互作用効率を劇的に増強することができる。

共振器 QED では、原子と共振器モードを着目する量子系とし、その他の自由度を環境と見なすことが多い。この立場では、共振器の外部ロス κ_e は散逸に他ならない。これとは対照的に、導波路 QED では、導波路中の伝播光子を活用して空間的に離れた物質量子ビット（原子など）を量子力学的に接続することに主眼がおかれる。この立場では、導波路も着目量子系の構成要素として考えられるので、共振器の外部ロス κ_e はコヒーレントな過程であると見なされる。

量子情報デバイスへの応用

前項で述べた单一光子源をはじめとして、ほとんど全ての量子デバイスにおいて、共振器 QED 効果が利用されているといつても過言ではない。ここでは別の例として、超伝導量子ビットの状態測定において、どのように共振器が活用されているか見てみよう。

標準的な超伝導量子ビットの状態測定方法は分散読み出し (dispersive read-out) と呼ばれる方法であり^[6]、超伝導量子ビットに周波数の大きく離れた共振器を強く結合させる。その結果、共振器の共鳴周波数が量子ビット状態に依存

するようになるので(3.3節参照), 共振器にプローブ光を照射し, 光学応答の違いにより量子ビットの状態を非破壊的に測定することができる.

実験の際には, プローブ光が強いほど信号雑音比(SN比)が向上するので望ましいが, 量子ビットと結合した共振器には非線形性があり, あまり強い光を入射するわけにはいかない(3.3.3節参照). そこで弱いプローブ光を入力し, 出力をノイズを抑えつつ增幅する必要がある. この際に活躍するのがパラメトリック増幅器であるが, このデバイスは共鳴周波数を変調可能な共振器に他ならない(10章参照). このように, 最先端の量子技術では, 共振器や共振器QED効果が数多くの場面で利用されている.

2.3 さまざまな共振器QED系

共振器QED系の基本となる構造は, 図2.2に示すような「2準位系-調和振動子-導波路」結合系である. これは様々な物理系によって実装される. 本節では, 2準位系として単一原子を用いる場合と, 固体中の人工原子である超伝導量子ビットを用いる場合について, 具体例を紹介する.

2.3.1 原子

Fabry-Perot共振器

図2.3のように, 二枚の高反射率ミラーを向かい合わせた**Fabry-Perot共振器**(Fabry-Perot resonator)の内部において単一原子を結合させた系が, 共振器QEDの基本といえる構成である. 初期の研究では, 原子ビームを共振器に透過させることで一時的な原子-共振器結合を実現していたが^[3], 近年になり原子を共振器モード内にトラップする技術が確立され, より安定した共振器QED系を構築できるようになった. このタイプの共振器QED系を用いて, 単一原子の真空Rabi分裂の観測^[7], 単一原子レーザーの実現^[8], 光子ブロッケードの観測^[9], 超微弱光に対する非線形位相シフトの観測^[10], 波形制御した

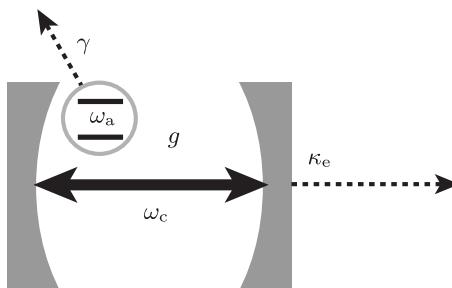


図2.3 Fabry-Perot共振器を用いた共振器QED系の概念図. 典型的なパラメータ値は, $\omega_a/2\pi = \omega_c/2\pi \sim 4 \times 10^{15} \text{ Hz}$, $g/2\pi \sim 70 \text{ MHz}$, $\kappa/2\pi \sim 10 \text{ MHz}$, $\gamma/2\pi \sim 5 \text{ MHz}$, 原子のトラップ時間 $T \sim 3 \text{ sec}$.

単一光子生成^[11]など、多岐に亘る成果が得られている。Fabry-Perot 共振器にはファイバーなどの導波路が直接結合している訳ではないが、通常は鏡に僅かな透過性を持たせてあり、共振器の発光モードが図 2.2 の導波路モードに相当する。外部入射光を効率的に共振器と相互作用させるためには、入射光の空間形状を共振器の発光パターンに一致させること、すなわち空間モード整合をとる必要がある。

トロイド共振器

複数の共振器 QED 系を伝播光子で接続する分散型の量子ネットワークを構成するためには、光子の伝播経路として光ファイバーを利用するのが現実的である。そのためには、共振器が光ファイバー中の伝播モードと直接結合していることが望ましい。そのような系として、図 2.4 に示すトロイド共振器や、微小球共振器を用いた共振器 QED 系がある。トロイド共振器は透明な誘電体で作られたリング型の共振器であり、リングに沿って全反射を繰り返しながら伝播するウィスパリングギャラリー モード (whispering gallery mode) を固有モードとして持つ。この固有モード近傍に単一原子をトラップし、またテーパ加工された光ファイバーを近接させることによって、原子 - 共振器 - 導波路結合系を構成する。トロイド共振器の固有モードには時計回りと反時計回りのほぼ縮退したモードがあり、前者はファイバー中の左向き進行波と、後者は右向き進行波と、それぞれ結合している。最近になり、光ファイバー中に誘電体多層膜による高反射の鏡を作りこんだ Fabry-Perot 共振器が作製できるようになり、全ファイバー型の共振器 QED 系も実現されている^{[12]~[14]}。この系には、ファイバーから直接光子を入出力できるという利点がある。

2.3.2 超伝導回路 QED 系

超伝導回路を用いても、図 2.2 に示すような量子系を実装することができ、超伝導回路 QED (circuit QED) と呼ばれている^[15]。この実装方法では、前

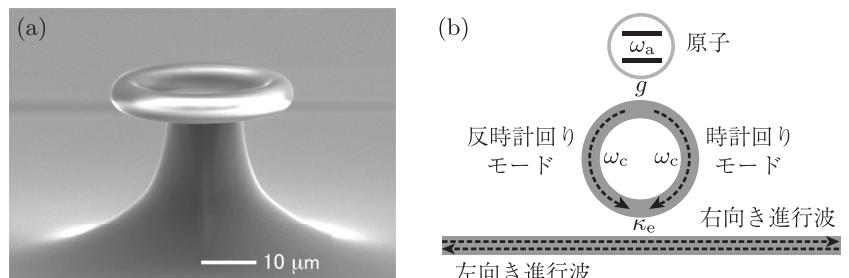


図 2.4 トロイド共振器 QED 系。(a) トロイド共振器の顕微鏡写真、(b) 概念図。典型的なパラメータ値は図 2.3 と同程度。(写真提供：青木隆朗氏。)

述の可視光領域の実装方法と比較すると、電磁波として遙かに周波数の小さいマイクロ波を用いる、原子－共振器結合 g を非常に大きくできる、系のパラメータを設計可能である、といった特徴がある。

電子回路では、LC 回路が調和振動子と等価であることは良く知られている。調和振動子は $|0\rangle - |1\rangle$ 間や $|1\rangle - |2\rangle$ 間など、隣接する全ての準位間隔が等しいため、2 準位系として使いにくいという欠点がある。すなわち、状態 $|0\rangle$ を $|1\rangle$ に変えるためにその周波数の光を照射すると、 $|1\rangle \rightarrow |2\rangle$ 遷移や $|2\rangle \rightarrow |3\rangle$ 遷移も同時に起きてしまう。そこで LC 回路における線形インダクタのかわりに、非線形インダクタとして Josephson 接合を導入すると、二次関数ポテンシャルがコサインポテンシャルに置換され、調和振動子は非線形調和振動子となる。これがトランズモン (transmon) と呼ばれる超伝導人工原子であり、一番下の状態 $|0\rangle$, $|1\rangle$ を人工原子として用いる^{[16], [17]}。この他にも、非調和性の大きい磁束量子ビット (flux qubit) などがよく用いられる^[18]。

二次元実装

超伝導回路 QED には、二次元的実装と三次元的実装がある。歴史的には、全ての回路を基板上で実現する二次元的実装が先に実証された^[15]。その一例として、初めて原子と共振器の深強結合 (3.5 節参照) を達成した回路を図 2.5 に示す^[19]。図 2.5(a) の回路図にあるように、キャパシタ C 、線形インダクタ L_0 、可変インダクタ L_c が LC 共振器を構成し、三つの Josephson 接合と L_c により磁束量子ビットが構成される。両者は L_c を共有しているが、このように回路の一部を共有する結合はガルバニック結合 (galvanic coupling) と呼ば

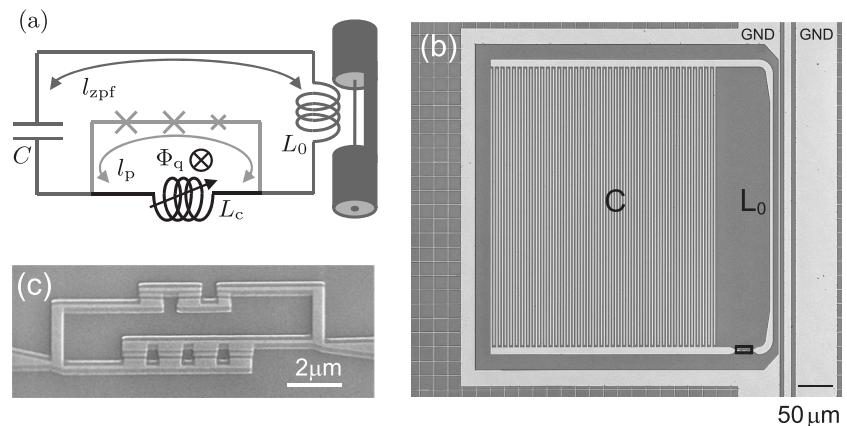


図 2.5 二次元的な磁束量子ビット－共振器結合系^[19]。(a) 等価回路図。(b) 顕微鏡写真。(c) 人工原子の拡大図。パラメータ値は、 $\omega_a/2\pi = 0.441$ GHz, $\omega_c/2\pi = 5.71$ GHz, $g/2\pi = 7.63$ GHz であり、 $g > \omega_a, \omega_c$ の深強結合条件を満たしている。(写真提供：仙場浩一氏、吉原文樹氏、布施智子氏。)

れている。また、系の状態をマイクロ波応答によりプローブするために、系の近傍にコプレーナ導波路（図 2.5(b) 中の右側にある縦のライン）が配置されており、原子－共振器系は L_0 を介して誘導的にこの導波路と結合している。

三次元実装

次に三次元的実装の例を見てみよう。三次元的実装は 2011 年に報告された比較的新しい技術であり^[20]、図 2.6(a) のような空洞共振器を共振器として用い、内部において電場の真空揺らぎが大きな場所、すなわち電場の腹の場所にトランズモンを配置する。ここで用いるトランズモンは、図 2.6(b) のような大容量のキャパシタを Josephson 接合で結合した構造を持っており、キャパシタを構成する二枚のパッドがアンテナとしてはたらき共振器モードと結合する。共振器には外部導波路（同軸ケーブル）が取り付けてある。このセットアップには、(i) 空洞共振器が誘電損失を大きく抑えるため数十マイクロ秒の長い量子ビット寿命を達成できる、(ii) 導波路との結合強度 κ_e を比較的簡単に変えられる、(iii) 共振器と量子ビットが分離可能なため独立に評価でき、実験に応じた組み合わせで実験が可能である、といった利点がある。

2.4 原子－共振器結合系の理論モデル

2.4.1 Rabi モデル

一つの 2 準位原子（共鳴周波数 ω_a ）と一つの共振器モード（共鳴周波数 ω_c ）が結合している系のハミルトニアンを考えよう。相互作用が無い場合のハミ

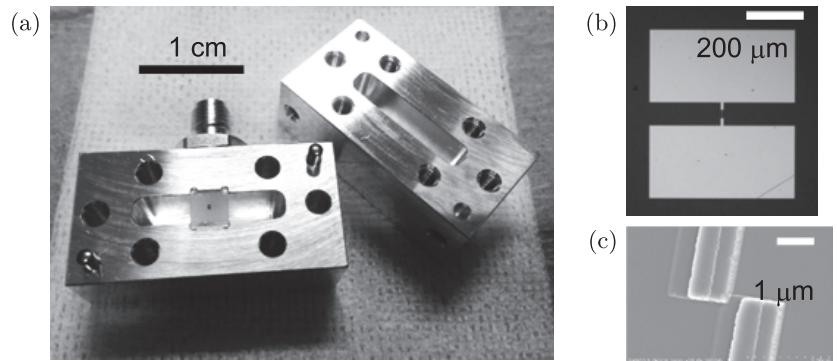


図 2.6 三次元的なトランズモン－空洞共振器結合系。(a) 共振器、(b) トランズモン、(c) トランズモン中央にある Josephson 接合。パラメータ値は、 $\omega_a/2\pi = 7.87$ GHz, $\omega_c/2\pi = 10.63$ GHz, 分散シフト $\chi/2\pi = 1.50$ MHz である。この系は分散結合領域にあり、マイクロ波光子の量子非破壊検出に活用された^[21]。（写真提供：河野信吾氏。）

ルトニアンは $\hat{H}_a = \hbar\omega_a \hat{\sigma}^\dagger \hat{\sigma}$, $\hat{H}_c = \hbar\omega_c \hat{a}^\dagger \hat{a}$ である。相互作用に関しては、1.3.3 節での議論より、 $\hat{H}_{ac} = -(e/m)\hat{\mathbf{p}} \cdot \hat{\mathbf{A}}(\mathbf{r}_a)$ と書くことができる。ここで $\hat{\mathbf{p}}$ は原子の運動量演算子、 $\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{r}_a)$ は原子位置 \mathbf{r}_a における共振器モードのベクトルポテンシャルである。

$\hat{\mathbf{p}}$ に関しては、式 (1.141) より $\hat{\mathbf{p}} = i(m\omega_a/e)(\mu\hat{\sigma}^\dagger - \mu^*\hat{\sigma})$ と表せる。ただし $\mu = e\langle e|\mathbf{r}|g\rangle$ は原子の遷移双極子モーメントである。ここでは $\hat{\sigma}$ の位相を適切に選んで μ を実数とし、 $\hat{\mathbf{p}} = -(m\omega_a/e)\mu(\hat{\sigma}^\dagger + \hat{\sigma})$ の形にしておこう。また $\hat{\mathbf{A}}$ に関しては、共振器モードは定在波であるため、定在波基底のベクトルポテンシャル [式 (1.119)] から一つのモードを取り出して $\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{r}_a) = \sqrt{\hbar/2\varepsilon_0\omega_c V}f(\mathbf{r}_a)(\hat{a}^\dagger + \hat{a})\mathbf{e}$ と表せる。ただし、 $f(\mathbf{r})$ は共振器モード形状を表す無次元の関数、 $V = \int d\mathbf{r}|f(\mathbf{r})|^2$ はモード体積、 \mathbf{e} は偏光方向を表す単位ベクトルである。

以上をまとめて、原子–共振器結合系のハミルトニアンを

$$\hat{H}_R = \hbar\omega_a \hat{\sigma}^\dagger \hat{\sigma} + \hbar\omega_c \hat{a}^\dagger \hat{a} + \hbar g(\hat{\sigma}^\dagger + \hat{\sigma})(\hat{a}^\dagger + \hat{a}), \quad (2.1)$$

$$g = \frac{(\mu \cdot \mathbf{e})\omega_a}{\sqrt{2\hbar\varepsilon_0\omega_c V}} f(\mathbf{r}_0) \quad (2.2)$$

と書くことができる。これを **Rabi モデル** (Rabi model) と呼ぶ。自由空間中では並進対称性のために自然放出レートは原子位置に依らなかったが、共振器 QED では原子–共振器結合 g が共振器モードの体積 V や原子位置 \mathbf{r}_a に依存する。

2.4.2 Jaynes-Cummings モデル

相互作用が無い $g = 0$ の場合に、原子や共振器の消滅演算子の時間発展をハイゼンベルグ描像で考えると、 $\hat{\sigma}(t) \sim \hat{\sigma}e^{-i\omega_a t}$, $\hat{a}(t) \sim \hat{a}e^{-i\omega_c t}$ の形の時間依存性を示す。すると Rabi モデルの相互作用項 $(\hat{\sigma}^\dagger + \hat{\sigma})(\hat{a}^\dagger + \hat{a})$ は、

$$\hat{\sigma}^\dagger \hat{a}e^{i(\omega_a - \omega_c)t} + \hat{a}^\dagger \hat{\sigma}e^{-i(\omega_a - \omega_c)t} + \hat{\sigma}^\dagger \hat{a}^\dagger e^{i(\omega_a + \omega_c)t} + \hat{\sigma} \hat{a}e^{-i(\omega_a + \omega_c)t}$$

の形の時間依存性を示す。ここで原子と共振器とがほぼ共鳴している $\omega_a \approx \omega_c$ の場合には、 $(\hat{\sigma}^\dagger \hat{a}^\dagger + \hat{\sigma} \hat{a})$ は $(\hat{\sigma}^\dagger \hat{a} + \hat{a}^\dagger \hat{\sigma})$ に比べて非常に早く振動するため、時間的に平均化されてゼロとなってしまい、無視することができる。これを回転波近似 (rotating-wave approximation) と呼ぶ。結合 g は共鳴周波数 ω_a , ω_c に比べて通常遙かに小さいので、ほとんどの場合に回転波近似は精度よく成り立っているが、原子や共振器のエネルギーに僅かなエネルギー・シフト (Bloch-Siegert シフト) をもたらすことが知られている (3.4 節)。

この近似のもとで、Rabi モデルは、次の **Jaynes-Cummings モデル** (Jaynes-Cummings model)

$$\hat{H}_{JC} = \hbar\omega_a \hat{\sigma}^\dagger \hat{\sigma} + \hbar\omega_c \hat{a}^\dagger \hat{a} + \hbar g(\hat{\sigma}^\dagger \hat{a} + \hat{a}^\dagger \hat{\sigma}) \quad (2.3)$$

に帰着する。Jaynes-Cummings モデルでは総励起数 (= 原子励起数 + 共振器光子数) が保存されるため、理論的取り扱いが簡単になる (3.1 節参照)。

2.5 共振器 QED 系における散逸

共振器 QED 系は、例外なく共振器外部の自由度と結合している。例えば、共振器は導波路などの外部伝播モードと結合しており、固体中の人工原子は背景物質中の素励起と結合している。通常、これらの外部自由度は非常に数が多く、また固有エネルギーが連続的に分布している。このような外部自由度のことを環境 (environment) あるいは熱浴 (heat bath) と呼び、環境と結合している物理系のことを開放系 (open system) と呼ぶ。共振器 QED 系は量子力学に支配されているので「量子開放系」である。

自由度の小さな系どうしの結合は、一般に振動などの可逆なダイナミクスを引き起こす。例えば、一つの原子と共振器とが結合すると、両者の間で励起の交換である真空 Rabi 振動がおこる (3.2 節参照)。一方、環境のように自由度の大きな系と結合すると、不可逆なダイナミクスが発現する。典型例は原子の自然放出である (1.4 節参照)。つまり、環境との結合は古典力学における摩擦のはたらきをし、系に散逸をもたらす。本節では、共振器 QED 系にどのような散逸チャンネルがあるかを概観する。

2.5.1 原子の散逸

原子は共振器モードとの結合の他にも、共振器がカバーしていない方向に広がる自由空間的な光子場とも結合している。これを本書では「非共振器モード」と呼ぶことにしよう。非共振器モードは連続的なエネルギースペクトルを持つので、励起原子は非共振器モードへと不可逆的に自然放出する。原子が固体中人工原子の場合には、発光を伴わずに環境へとエネルギーを放出し下準位へと遷移する無輻射緩和 (non-radiative decay) と呼ばれる過程がある。両過程とも原子から環境へのエネルギー散逸を伴い、原子にとっては同じ効果をもたらすので、本書では両者を含めて γ で表すこととする。

一方、気体原子どうしが衝突したり、人工原子が環境中の低エネルギー素励起と量子もつれを生じたりすると、原子のエネルギーは散逸しないものの、量子コヒーレンスが損なわれるタイプの緩和過程がある。この緩和過程は純位相緩和 (pure dephasing) と呼ばれる。本書ではこのレートを γ_p で表す。

2.5.2 共振器の散逸

共振器は外部からのアクセスを可能にするため、外部伝播モードと結合している。Fabry-Perot 共振器の場合には、一方 (あるいは両方) の鏡に有限の透過があり、共振器から漏れ出す伝播光がこれに相当している。また、トロイド

共振器の場合には共振器に近接した光ファイバーが、超伝導量子ビットの場合には基板上に作製されたマイクロ波導波路が、これに相当する。本書ではこれらの一次元伝播モードを（実際の導波路の有無に関わらず）導波路モード (waveguide mode) と呼ぶことにしよう。導波路モードはエネルギー的に広がっており、共振器中の光子は導波路へと不可逆な自然放出を起こす。これを共振器の外部ロス (external loss) と呼び、そのレートを κ_e で表す。

一方、鏡による光子吸収などにより、光子が熱として環境に散逸する。これを共振器の内部ロス (internal loss) と呼び、このレートを κ_i で表す。外部ロス・内部ロスともに共振器から環境へのエネルギー散逸を伴う散逸過程である。ただし、共振器から導波路モードに放出される光子を、散逸としてではなく伝播光子として積極的に活用する導波路 QED の立場からは、 κ_e はもはや散逸を表すパラメータではなく、共振器と導波路モードとのコヒーレントな結合定数という意味合いを持つようになる。

2.6 弱結合・強結合

共振器 QED の誕生以来、原子 - 共振器結合 g を大きくすることに多大な努力が向けられてきた。その最初のマイルストーンは、結合 g を緩和レート κ, γ, γ_p に比べて大きくすることであり、結合 \lesssim 緩和レートの状況を弱結合領域 (weak-coupling regime), 結合 \gtrsim 緩和レートの状況を強結合領域 (strong-coupling regime) と呼ぶ。原子と共振器が共鳴しているとき、両者間の結合により固有エネルギーの分裂である真空 Rabi 分裂がおこるが（図 3.1 参照）、強結合領域にあれば分裂幅 $>$ 線幅であり、スペクトル上で真空 Rabi 分裂を観測可能になる。また、励起原子の輻射崩壊を実時間のダイナミクスとして見ると、強結合領域では真空 Rabi 振動が見られるのに対し、弱結合領域では単調に減衰する（図 6.1 参照）。

次のマイルストーンは、結合 g が原子や共振器の共振周波数 ω_a, ω_c の数十パーセント程度に達することであり、この領域を超強結合領域 (ultrastrong-coupling regime) と呼ぶ。超強結合領域では、Rabi モデルから Jaynes-Cummings モデルを導く際に行った回転波近似の破れが顕著になり、Bloch-Siegert シフトが観測できるようになる。更には、結合 g が原子や共振器の共振



図 2.7 共振器 QED 系における結合強度。

周波数 ω_a , ω_c を凌駕する領域を深強結合領域 (deep-strong-coupling regime) と呼ぶ。回転波近似が良い精度で成り立つ弱結合～強結合領域では、原子－共振器結合系の基底状態は全く励起の無い $|g, 0\rangle$ (原子が基底状態、共振器が 0 光子状態) であるが、深強結合領域では、共振器内に有限個の仮想光子があり、原子と共振器の間に量子もつれがある状態が基底状態となる。

可視光領域の共振器 QED 系では、共振周波数 ω_a , ω_c が大きいので超強結合や深強結合の達成は容易ではないが、超伝導回路 QED 系では、共振周波数 ω_a , ω_c がマイクロ波領域にあり圧倒的に低いため、超強結合や深強結合が実現されている^[22]。

第 3 章

共振器 QED 系：孤立系としての性質

共振器 QED 系には意図的なものも含め必ず外部環境との相互作用があるが、本章ではまず、環境から完全に切り離されている共振器 QED 系の性質、すなわち孤立量子系としての共振器 QED 系のエネルギー準位構造やコヒーレントな量子ダイナミクスについて概観する。自由空間中では、原子はエネルギー的に広がった多モードの光子場と相互作用し、励起原子は自然放出を起こして不可逆的に基底状態へと緩和する。一方共振器中では、光子モードの離散化により原子は单一モードの光子場と相互作用し、両者の間で可逆にエネルギーを交換する。

3.1 Jaynes-Cummings 模型の固有状態

本節では、Jaynes-Cummings 模型

$$\hat{H}_{\text{JC}} = \omega_a \hat{\sigma}^\dagger \hat{\sigma} + \omega_c \hat{a}^\dagger \hat{a} + g(\hat{\sigma}^\dagger a + \hat{a}^\dagger \hat{\sigma}) \quad (3.1)$$

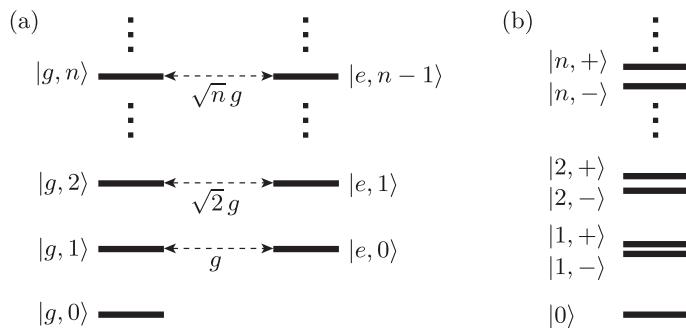


図 3.1 Jaynes-Cummings 模型のエネルギー準位。 $\omega_a \approx \omega_c$ の場合。(a) 対角化前。総励起数の等しい $|g, n\rangle$ と $|e, n-1\rangle$ の間に結合がある。(b) 対角化後。 $|g, n\rangle$ と $|e, n-1\rangle$ が混成され、固有状態 $|n, \pm\rangle$ を作る。

の固有状態を求める。ただし $\hbar = 1$ とした。原子-共振器結合系での総励起数は $\hat{n} = \hat{\sigma}^\dagger \hat{\sigma} + \hat{a}^\dagger \hat{a}$ と表されるが、 $[\hat{n}, \hat{H}_{\text{JC}}] = 0$ であることを直ちに確認できる。これは、Jaynes-Cummings モデルでは総励起数が保存量であることを意味する。このとき、ハミルトニアン \hat{H}_{JC} の固有状態は総励起数の等しい状態のみから構成されることが知られており、解析的に固有状態を求めることができる。

励起数 0 の状態は $|g, 0\rangle$ のみであり、 \hat{H}_{JC} の基底状態になっている。この状態ベクトルを $|0\rangle$ と書くことにしよう。励起数 $n (\geq 1)$ の状態ベクトルは $|g, n\rangle, |e, n-1\rangle$ の二つであり、両者の線形結合により \hat{H}_{JC} の固有状態を作ることができる。 $|g, n\rangle, |e, n-1\rangle$ を基底とする部分空間では、ハミルトニアン $\hat{H}_{\text{JC},n}$ は次の 2×2 行列で表される。

$$\begin{aligned}\hat{H}_{\text{JC},n} &= \begin{pmatrix} n\omega_c & g\sqrt{n} \\ g\sqrt{n} & \omega_a + (n-1)\omega_c \end{pmatrix} \\ &= \frac{\omega_a + (2n-1)\omega_c}{2} + \begin{pmatrix} \frac{\omega_c - \omega_a}{2} & g\sqrt{n} \\ g\sqrt{n} & -\frac{\omega_c - \omega_a}{2} \end{pmatrix} \\ &= \frac{\omega_a + (2n-1)\omega_c}{2} + \sqrt{\left(\frac{\omega_c - \omega_a}{2}\right)^2 + g^2 n} \begin{pmatrix} \cos 2\theta_n & \sin 2\theta_n \\ \sin 2\theta_n & -\cos 2\theta_n \end{pmatrix}. \quad (3.2)\end{aligned}$$

ただし複素数 $(\omega_c - \omega_a)/2 + ig\sqrt{n}$ の偏角を $2\theta_n$ とした。つまり

$$\theta_n = \frac{1}{2} \arg [(\omega_c - \omega_a)/2 + ig\sqrt{n}] \quad (3.3)$$

である。このハミルトニアンの固有状態は

$$|n, +\rangle = \cos \theta_n |g, n\rangle + \sin \theta_n |e, n-1\rangle, \quad (3.4)$$

$$|n, -\rangle = \sin \theta_n |g, n\rangle - \cos \theta_n |e, n-1\rangle \quad (3.5)$$

で与えられる。また、対応する固有エネルギーは

$$\varepsilon_{n,\pm} = \frac{\omega_a + (2n-1)\omega_c}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\omega_c - \omega_a}{2}\right)^2 + g^2 n} \quad (3.6)$$

で与えられる（複号同順）。図 3.1 に、対角化前後の Jaynes-Cummings モデルの準位構造を示した。

3.2 真空 Rabi 振動

本節では、Jaynes-Cummings モデルで記述される、孤立した原子-共振器結合系の量子ダイナミクスを議論する。例として、初期時刻 $t = 0$ において系が状態 $|e, n-1\rangle$ にあるとして（励起数 $n \geq 1$ ），その後の時間発展をシュレーディンガー描像で調べよう。式 (3.4), (3.5) より、初期状態ベクトルを次式の

ように表すことができる。

$$|\psi(0)\rangle = |e, n-1\rangle = \sin \theta_n |n, +\rangle - \cos \theta_n |n, -\rangle. \quad (3.7)$$

$|n, \pm\rangle$ がエネルギー $\varepsilon_{n,\pm}$ の固有状態であることから、時刻 t での状態ベクトルは

$$|\psi(t)\rangle = e^{-i\varepsilon_{n,+}t} \sin \theta_n |n, +\rangle - e^{-i\varepsilon_{n,-}t} \cos \theta_n |n, -\rangle \quad (3.8)$$

で与えられる。式 (3.4), (3.5) を使って基底を $|g, n\rangle, |e, n-1\rangle$ に戻すと

$$|\psi(t)\rangle = C_{g,n}(t) |g, n\rangle + C_{e,n-1}(t) |e, n-1\rangle, \quad (3.9)$$

$$C_{g,n}(t) = \cos \theta_n \sin \theta_n (e^{-i\varepsilon_{n,+}t} - e^{-i\varepsilon_{n,-}t}), \quad (3.10)$$

$$C_{e,n-1}(t) = \cos^2 \theta_n e^{-i\varepsilon_{n,-}t} + \sin^2 \theta_n e^{-i\varepsilon_{n,+}t} \quad (3.11)$$

と書ける。状態ベクトル全体にかかる位相因子 $\exp(-i\frac{\varepsilon_{n,+}+\varepsilon_{n,-}}{2}t) = \exp(-i\frac{\omega_a+(2n-1)\omega_c}{2}t)$ を除き、 ω_n を

$$\omega_n = \frac{\varepsilon_{n,+} - \varepsilon_{n,-}}{2} = \sqrt{\left(\frac{\omega_c - \omega_a}{2}\right)^2 + g^2 n} \quad (3.12)$$

によって導入すると、係数 $C_{g,n}, C_{e,n-1}$ は

$$C_{g,n}(t) = -i \sin 2\theta_n \sin \omega_n t, \quad (3.13)$$

$$C_{e,n-1}(t) = \cos \omega_n t + i \cos 2\theta_n \sin \omega_n t \quad (3.14)$$

と簡略化できる。特に、原子と共振器が共鳴している $\omega_a = \omega_c$ の場合には、

$$C_{g,n}(t) = -i \sin(\sqrt{n}gt), \quad (3.15)$$

$$C_{e,n-1}(t) = \cos(\sqrt{n}gt) \quad (3.16)$$

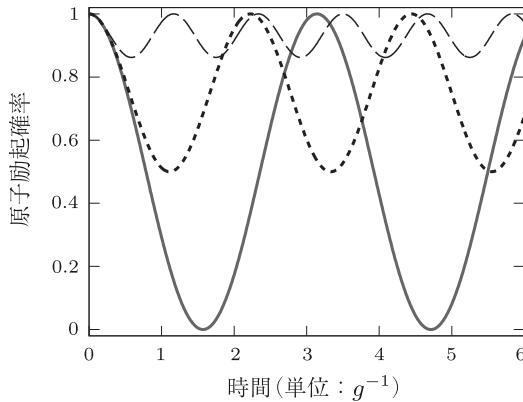


図 3.2 真空 Rabi 振動 (励起数 $n = 1$)。原子と共振器との間で励起のキャッチボーグがおこる。離調 $|\omega_a - \omega_c| = 0$ (実線), $2g$ (点線), $5g$ (破線)。

となる。

励起数 $n = 1$ の場合について、原子励起確率 $P_e(t) = |C_{e,0}(t)|^2$ の時間発展を図 3.2 に示した。原子と共振器の間で励起がやりとりされている様子を確認できる。これを**真空 Rabi 振動** (vacuum Rabi oscillation) と呼ぶ。原子と共振器が共鳴している場合には、真空 Rabi 振動の振幅が大きく、 $t = (1/2+n)\pi/g$ において励起は完全に共振器へとうつる。離調 $\omega_a - \omega_c$ の絶対値が大きくなるに従って、振幅は小さくなり振動周期は短くなる。

問題

図 3.2 をよく見ると、初期時刻付近での $P_e(t)$ の振る舞いが、離調 $\omega_a - \omega_c$ に依存していないことがわかる。これを説明せよ。

解答 励起状態の生存確率は、式 (3.1) のハミルトニアンを用いて

$$P_e(t) = |\langle e, 0 | e^{-i\hat{H}_{JC}t} | e, 0 \rangle|^2 \quad (3.17)$$

と表すことができる。これを級数展開して t^2 の項までを整理すると

$$P_e(t) = 1 - (\langle \hat{H}_{JC}^2 \rangle - \langle \hat{H}_{JC} \rangle^2)t^2 + \dots \quad (3.18)$$

が得られる。ただし $\langle \hat{O} \rangle = \langle e, 0 | \hat{O} | e, 0 \rangle$ と略記した。ハミルトニアンの分散を計算すると $\langle \hat{H}_{JC}^2 \rangle - \langle \hat{H}_{JC} \rangle^2 = g^2$ となる。よって

$$P_e(t) = 1 - g^2 t^2 + \dots \quad (3.19)$$

となり、離調に依存しない。

3.3 分散結合領域

3.3.1 分散シフト

本節では Jaynes-Cummings モデルに戻り、原子と共振器の離調が両者の結合よりも十分大きい $|\omega_a - \omega_c| \gg g$ の場合を議論しよう。このようなパラメータ領域を分散結合領域 (dispersive regime) と呼ぶ。図 3.2 を見ると、 $|\omega_a - \omega_c| \gg g$ の場合には真空 Rabi 振動の振幅が小さくなり、分散結合領域では何も面白いことが起こらない（原子と共振器が独立に振る舞う）ように思われるかもしれない。しかし、以下に見るように、原子と共振器の間に「対角的」相互作用が実現でき、原子や共振器に対する量子非破壊測定^[23]へと応用することができる。

本節では $\omega_c > \omega_a$ を仮定し、 $\omega_c - \omega_a \gg g$ としよう。この場合の Jaynes-Cummings モデルのエネルギー図は、図 3.3(a) のようになる。3.1 節で扱った共鳴の場合と同じように、総励起数 n の等しい二つの状態 $|g, n\rangle$, $|e, n-1\rangle$ が n に依存した結合 $g\sqrt{n}$ で結ばれている。分散結合領域では（エネルギー

差) \gg (結合) であるため、固有状態における $|g, n\rangle$, $|e, n-1\rangle$ の混ざりは僅かである。式 (3.3) より $\theta_n \approx g\sqrt{n}/(\omega_c - \omega_a)$ である。これを式 (3.4), (3.5) に代入して、固有状態は

$$|n, +\rangle \approx |g, n\rangle + \frac{g\sqrt{n}}{\omega_c - \omega_a} |e, n-1\rangle, \quad (3.20)$$

$$|n, -\rangle \approx |e, n-1\rangle - \frac{g\sqrt{n}}{\omega_c - \omega_a} |g, n\rangle \quad (3.21)$$

により与えられる。固有エネルギーは、式 (3.6)において g を微小量として展開し、 g^2 までの近似で

$$\varepsilon_{n,+} \approx n\omega_c + n\chi, \quad (3.22)$$

$$\varepsilon_{n,-} \approx \omega_a + (n-1)\omega_c - n\chi \quad (3.23)$$

と表すことができる。 χ は分散シフト (dispersive shift) と呼ばれており、

$$\chi = \frac{g^2}{\omega_c - \omega_a} \quad (3.24)$$

で与えられる。

結合 g を繰り込んだ後のエネルギー図を図 3.3(b) に示した。左側のラダーのエネルギー間隔は $\varepsilon_{g,n+1} - \varepsilon_{g,n} = \omega_c + \chi$ であり、右側のラダーのエネルギー間隔は $\varepsilon_{e,n+1} - \varepsilon_{e,n} = \omega_c - \chi$ である。これは、共振器の共鳴周波数が原子状態に依存しており、基底状態の場合には $\omega_c + \chi$ 、励起状態の場合には $\omega_c - \chi$ であることを意味する。この周波数依存性を利用して、例えば共振器に光を照射して反射光の位相を測ることで、原子の量子状態を非破壊的に測定することができる。このような測定方法を分散読み出し (dispersive readout) と呼ぶ。

一方、原子の共鳴周波数は、 $|e, n\rangle$ と $|g, n\rangle$ 間のエネルギー差である。これを計算すると、

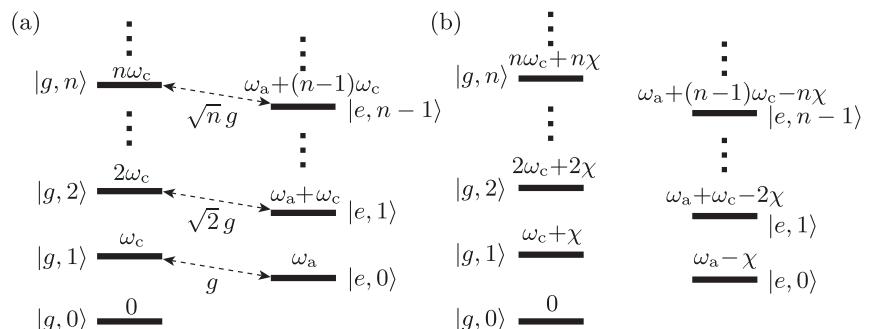


図 3.3 分散結合領域における Jaynes-Cummings モデルのエネルギー準位。(a) 相互作用 g の繰り込み前。(b) 繰り込み後。

$$\varepsilon_{e,n} - \varepsilon_{g,n} = \omega_a + (2n-1)\chi \quad (3.25)$$

となる。つまり、原子の共鳴周波数が共振器内の光子数によって 2χ ずつシフトする。これをを利用して、原子の光学応答を測定することにより、共振器内の光子数分布を測定することができる^{[24], [25]}。

3.3.2 Schrieffer-Wolff 変換による導出

本節では、上述の分散シフトを、Schrieffer-Wolff 変換（付録 C 参照）により導出してみよう。分散領域では、Jaynes-Cummings 模型の相互作用項を摂動として扱うことができる。よってハミルトニアンを

$$\hat{H}_{JC} = \underbrace{\omega_a \hat{\sigma}^\dagger \hat{\sigma} + \omega_c \hat{a}^\dagger \hat{a}}_{\hat{H}_0} + \underbrace{g(\hat{\sigma}^\dagger \hat{a} + \hat{a}^\dagger \hat{\sigma})}_{\hat{V}} \quad (3.26)$$

のように無摂動部分 \hat{H}_0 と摂動部分 \hat{V} に分け、Schrieffer-Wolff 変換

$$\hat{H}'_{JC} = e^{-\hat{S}} \hat{H}_{JC} e^{\hat{S}} \quad (3.27)$$

により \hat{H}'_{JC} を対角化する。式 (C.8) より、ユニタリ変換の生成子である反エルミート演算子 \hat{S} は

$$\hat{S} = \frac{g}{\omega_c - \omega_a} (\hat{\sigma}^\dagger \hat{a} - \hat{a}^\dagger \hat{\sigma}) \quad (3.28)$$

で与えられる。また式 (C.6) より、変換後のハミルトニアン \hat{H}'_{JC} は

$$\begin{aligned} \hat{H}'_{JC} &= (\omega_a - \chi) \hat{\sigma}^\dagger \hat{\sigma} + (\omega_c + \chi) \hat{a}^\dagger \hat{a} - 2\chi \hat{\sigma}^\dagger \hat{\sigma} \hat{a}^\dagger \hat{a} + \dots \\ &= (\omega_c + \chi) \hat{n} \hat{\sigma}^\dagger \hat{\sigma} + [(\omega_a - \chi) + (\omega_c - \chi) \hat{n}] \hat{\sigma}^\dagger \hat{\sigma} + \dots \end{aligned} \quad (3.29)$$

で与えられる。ここで … は g^3 以上の微小量である。

変換後のハミルトニアン \hat{H}'_{JC} は対角化されており、固有状態は $|g, n\rangle$, $|e, n-1\rangle$ である。付録 C の議論に従うと、変換前のハミルトニアン \hat{H}_{JC} の固有状態は $e^{\hat{S}}|g, n\rangle$, $e^{\hat{S}}|e, n-1\rangle$ であり、 $e^{\hat{S}} \approx 1 + \hat{S}$ として、

$$e^{\hat{S}}|g, n\rangle = |g, n\rangle + \frac{g\sqrt{n}}{\omega_c - \omega_a}|e, n-1\rangle, \quad (3.30)$$

$$e^{\hat{S}}|e, n-1\rangle = |e, n-1\rangle - \frac{g\sqrt{n}}{\omega_c - \omega_a}|g, n\rangle \quad (3.31)$$

が得られる。これらは確かに式 (3.20), (3.21) と一致している。また、 \hat{H}_{JC} の固有値は \hat{H}'_{JC} の固有値と同じであり、 $n(\omega_c + \chi)$, $\omega_a + (n-1)\omega_c - n\chi$ である。これは前節の式 (3.22), (3.23) と確かに一致している。

3.3.3 臨界光子数

上述のように、分散結合領域にある原子-共振器系の固有エネルギーは

式 (3.22), (3.23) で与えられ, 共鳴周波数が原子状態に依存する調和振動子と見なせることを見た。ただし, より厳密には, 固有エネルギーは式 (3.6) で与えられるために非調和性があり, 光子数が増えるに従って調和振動子からのずれが顕著になる^[26]。 $\omega_c - \omega_a \gg g$ の分散結合領域において, 式 (3.6) を $(\frac{g}{\omega_c - \omega_a})^4$ のオーダーまで展開することにより

$$\varepsilon_{n,+} \approx n\omega_c + n\frac{g^2}{\omega_c - \omega_a} - n^2\frac{g^4}{(\omega_c - \omega_a)^3} + \dots, \quad (3.32)$$

$$\varepsilon_{n,-} \approx \omega_a + (n-1)\omega_c - n\frac{g^2}{\omega_c - \omega_a} + n^2\frac{g^4}{(\omega_c - \omega_a)^3} + \dots \quad (3.33)$$

が得られる。調和振動子近似が良い条件は, 非調和性を表す g^4 の項が g^2 の項よりも十分小さいことであり, $n \ll n_c$ と表すことができる。ただし n_c は臨界光子数と呼ばれており,

$$n_c = \frac{(\omega_c - \omega_a)^2}{4g^2} \quad (3.34)$$

で定義される。

3.4 回転波近似の影響 : Bloch-Siegert シフト

Rabi モデルから Jaynes-Cummings モデルを得る過程において (2.4.2 節参照), 相互作用項のうち励起数を保存しない項を回転波近似により無視した。本節では, これらの項の影響を, Jaynes-Cummings モデルへの補正として定量的に議論しよう。

まず, Rabi モデルのハミルトニアンを次のように三つの部分に分ける。

$$\hat{H}_R = \underbrace{\omega_a \hat{\sigma}^\dagger \hat{\sigma} + \omega_c \hat{a}^\dagger \hat{a}}_{\hat{H}_0} + \underbrace{g(\hat{\sigma}^\dagger \hat{a} + \hat{a}^\dagger \hat{\sigma})}_{\hat{H}_1} + \underbrace{g(\hat{\sigma}^\dagger \hat{a}^\dagger + \hat{\sigma} \hat{a})}_{\hat{V}}. \quad (3.35)$$

このハミルトニアンに Schrieffer-Wolff 変換を施して, 励起数非保存の項 \hat{V} を, Jaynes-Cummings 模型に対するエネルギー補正として取り込む。そのためには, 変換の生成子である反エルミート行列 \hat{S} として g^2 のオーダーまで取り入れ, $\hat{S} = \hat{S}_1 + \hat{S}_2$ とする。Baker-Campbell-Hausdorff の関係式 (C.3) を用いて g^2 までの項を書き下すと

$$\begin{aligned} \hat{H}'_R &= \underbrace{\hat{H}_0}_{g^0} + \underbrace{\hat{H}_1 + \hat{V} + [\hat{H}_0, \hat{S}_1]}_{g^1} \\ &\quad + \underbrace{[\hat{H}_0, \hat{S}_2] + [\hat{H}_1, \hat{S}_1] + [\hat{V}, \hat{S}_1] + \frac{1}{2}[[\hat{H}_0, \hat{S}_1], \hat{S}_1]}_{g^2} + \dots \end{aligned} \quad (3.36)$$

が得られる。以下では, 次の方針で \hat{S}_1, \hat{S}_2 を選ぶ。(i) 本節では, 分散結合領域ではない $\omega_a \approx \omega_c$ の場合を考えており, 励起数保存の \hat{H}_1 の項は摂動として

扱えないのでそのまま残す。よって g^1 の項に関しては、

$$\hat{V} + [\hat{H}_0, \hat{S}_1] = 0 \quad (3.37)$$

を満たすよう \hat{S}_1 を定める。式 (C.8) より

$$\hat{S}_1 = \frac{g}{\omega_a + \omega_c} (\hat{\sigma} \hat{a} - \hat{\sigma}^\dagger \hat{a}^\dagger) \quad (3.38)$$

が得られる。(ii) g^2 の項に関しては、式 (3.37) を使うと $[\hat{H}_0, \hat{S}_2] + [\hat{H}_1, \hat{S}_1] + [\hat{V}, \hat{S}_1]/2$ と簡略化できる。ここで $[\hat{V}, \hat{S}_1]/2$ は対角的であるので、

$$[\hat{H}_0, \hat{S}_2] + [\hat{H}_1, \hat{S}_1] = 0 \quad (3.39)$$

となるように \hat{S}_2 を選ぶ。式 (C.8) と同様の考察により、

$$\hat{S}_2 = \frac{g^2}{2\omega_c(\omega_a + \omega_c)} [\hat{\sigma}^\dagger, \hat{\sigma}] (\hat{a}^2 - \hat{a}^\dagger \hat{a}) \quad (3.40)$$

が得られる。

結局、変換後のハミルトニアンは

$$\hat{H}' = \hat{H}_0 + \hat{H}_1 + \Delta \hat{H}, \quad (3.41)$$

$$\Delta \hat{H} = \frac{1}{2} [\hat{V}, \hat{S}_1] = \frac{g^2}{\omega_a + \omega_c} (\hat{\sigma}^\dagger \hat{\sigma} \hat{a}^\dagger \hat{a} - \hat{\sigma} \hat{\sigma}^\dagger \hat{a} \hat{a}^\dagger) \quad (3.42)$$

で与えられる。 $\Delta \hat{H}$ は \hat{V} の繰り込みによる Jaynes-Cummings モデルへのエネルギー補正であり、 $|g, n\rangle$ のエネルギーを $g^2(n+1)/(\omega_a + \omega_c)$ だけ下げ、 $|e, n\rangle$ のエネルギーを $g^2n/(\omega_a + \omega_c)$ だけ上げる。^{*1)} これを **Bloch-Siegert**

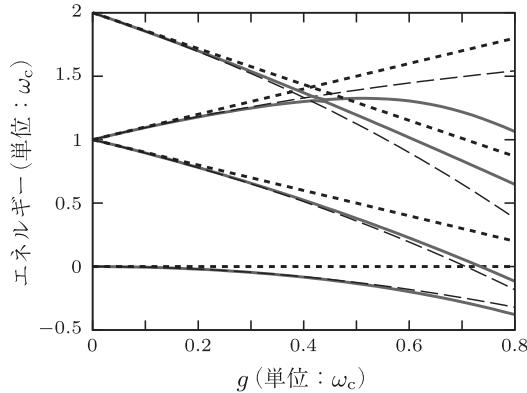


図 3.4 Rabi モデル・Jaynes-Cummings モデルの固有エネルギー。 $\omega_a = \omega_c$ の場合。実線:Rabi モデル、点線:Jaynes-Cumming モデル、破線:Bloch-Siegert シフトを考慮した Jaynes-Cumming モデル。

*1) $|g, n\rangle$ と $|e, n+1\rangle$ の間の結合が $g\sqrt{n+1}$ 、エネルギー差が $\omega_a + \omega_c$ であることを用いて、摂動論によりこのエネルギーshiftを導くことも可能である。

シフト (Bloch-Siegert shift) と呼ぶ^[27].

図 3.4 に, Rabi ハミルトニアンや Jaynes-Cummings ハミルトニアンの固有エネルギーを結合 g の関数として示した. 比較的 g の小さい $g \lesssim 0.5\omega_c$ の領域では, Bloch-Siegert シフトを考慮した Jaynes-Cummings ハミルトニアが, 厳密な Rabi ハミルトニアを良く近似していることがわかる. 一方, $g \gtrsim 0.5\omega_c$ の領域では乖離が大きくなるが, これは固有状態の生成により多くの準位が絡んでくるためである.

3.5 超強結合・深強結合

一般に共振器 QED 系では, 原子や共振器の共鳴周波数 ω_a, ω_c に比べて両者の結合 g は圧倒的に小さい. ところが超伝導回路 QED 系では, 共鳴周波数がマイクロ波領域にあることに加え, 原子の遷移双極子モーメントを大きくできるため, ω_a や ω_c の数十パーセントに達する巨大な結合 g を実現できる. このパラメータ領域は超強結合領域 (ultrastrong-coupling regime) と呼ばれ, 3.4 節で議論した Bloch-Siegert シフトが観測できる^[28]. さらに, 最近になって, $g \gtrsim \omega_a, \omega_c$ の状況までもが実現できるようになった^[19]. このパラメータ領域は深強結合領域 (deep-strong-coupling regime) と呼ばれる.

本節では, 深強結合領域での固有状態について議論しよう. 出発点は, 次の Rabi ハミルトニアである.

$$\hat{H}_R = \omega_a \hat{\sigma}^\dagger \hat{\sigma} + \omega_c \hat{a}^\dagger \hat{a} + g(\hat{\sigma}^\dagger + \hat{\sigma})(\hat{a}^\dagger + \hat{a}). \quad (3.43)$$

三つのパラメータ間に $g \gtrsim \omega_c \gg \omega_a$ の関係があるとしよう. すると原子にとっては, ω_a の項よりも g の項の方が支配的になるので, こちらが対角的になるよう, $\hat{\sigma} + \hat{\sigma}^\dagger (= \hat{\sigma}_x)$ の固有状態

$$|L\rangle = (|g\rangle + |e\rangle)/\sqrt{2}, \quad (3.44)$$

$$|R\rangle = (|g\rangle - |e\rangle)/\sqrt{2} \quad (3.45)$$

を基底に選ぼう. この基底では $\hat{\sigma}_x = |L\rangle\langle L| - |R\rangle\langle R|$, $\hat{\sigma}_z = 1/2 - (|L\rangle\langle R| + |R\rangle\langle L|)/2$ であるから, 式 (3.43) は定数項を除いて次のように書ける.

$$\begin{aligned} \hat{H}_{\text{desc}} &= [\omega_c \hat{a}^\dagger \hat{a} + g(\hat{a} + \hat{a}^\dagger)] |L\rangle\langle L| + [\omega_c \hat{a}^\dagger \hat{a} - g(\hat{a} + \hat{a}^\dagger)] |R\rangle\langle R| \\ &\quad - \frac{\omega_a}{2} (|L\rangle\langle R| + |R\rangle\langle L|). \end{aligned} \quad (3.46)$$

このハミルトニアの 1 行目は, 原子状態に依存した静的な力 $\pm g$ が調和振動子に加わっているのと等価である. 無次元数 α を

$$\alpha = g/\omega_c \quad (3.47)$$

により導入すると, $|L\rangle\langle L|$ の係数部分を, $\omega_c \hat{a}^\dagger \hat{a} + g(\hat{a} + \hat{a}^\dagger) = \omega_c (\hat{a} + \alpha)^\dagger (\hat{a} + \alpha)$

$\alpha) - g^2/\omega_c = \omega_c \hat{D}(-\alpha) \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{D}(\alpha) - g^2/\omega_c$ と書くことができる。ここで $\hat{D}(\alpha)$ は変位演算子であり、導出には式 (1.40) を用いた。 $|R\rangle\langle R|$ の係数部分についても同様の変形ができる。こうして、式 (3.46) は定数項を除いて次のように書ける。

$$\begin{aligned}\hat{H}_{\text{dsc}} &= \omega_c \hat{D}(-\alpha) \hat{a}^\dagger \hat{a} D(\alpha) |L\rangle\langle L| + \omega_c \hat{D}(\alpha) \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{D}(-\alpha) |R\rangle\langle R| \\ &\quad - \frac{\omega_a}{2} (|L\rangle\langle R| + |R\rangle\langle L|).\end{aligned}\quad (3.48)$$

この式において、2行目の $|L\rangle, |R\rangle$ 間相互作用を小さいとして無視すると、固有状態は $|L\rangle \otimes \hat{D}(-\alpha)|n\rangle, |R\rangle \otimes \hat{D}(\alpha)|n\rangle$ であり ($n = 0, 1, \dots$)、固有エネルギーは $|L\rangle, |R\rangle$ に対して縮退しており $n\omega_c$ であることがわかる。よって、深強結合領域での固有状態は、図 3.5 のように、原子状態に応じて $\pm g/\omega_c$ だけ変位した共振器が、結合 $\omega_a/2$ を介して弱く相互作用している、という描像で理解できる。

次に $|L\rangle, |R\rangle$ 間相互作用の効果を考えよう。これは図 3.5 の左右の共振器の間に結合をもたらすが、 $\omega_c \gg \omega_a$ であるから、縮退した 2 状態 $|L\rangle \otimes \hat{D}(-\alpha)|n\rangle, |R\rangle \otimes \hat{D}(\alpha)|n\rangle$ の間のみに結合の効果が現れる。この 2 状態の部分空間でのハミルトニアン $\hat{H}_{\text{dsc},n}$ は

$$\hat{H}_{\text{dsc},n} = \begin{pmatrix} n\omega_c & -\frac{\omega_a}{2} I(n, \alpha) \\ -\frac{\omega_a}{2} I(n, \alpha) & n\omega_c \end{pmatrix} \quad (3.49)$$

と書ける。ただし、 $I(n, \alpha)$ は共振器状態 $\hat{D}(-\alpha)|n\rangle$ と $\hat{D}(\alpha)|n\rangle$ の重なり積分であり、

$$I(n, \alpha) = \langle n|\hat{D}^2(\alpha)|n\rangle = \langle n|\hat{D}(2\alpha)|n\rangle = e^{-2\alpha^2} L_n(4\alpha^2) \quad (3.50)$$

で与えられる。ただし、二つ目の等号の導出には式 (1.45) を用いた。また、 $L_n(x)$ はラゲール多項式である。図 3.6 に $I(n, \alpha)$ の α 依存性を示した。定義により $I(n, \alpha)$ の絶対値は 1 より小さいので、共振器の変位は結合を弱めるはたらきを持つ。固有状態および固有エネルギーは次式で与えられる。

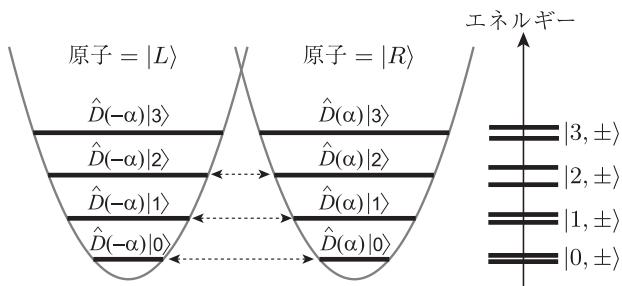


図 3.5 深強結合領域における、Rabi ハミルトニアンの固有状態。原子状態に応じて変位を受けた共振器が、弱く結合している。

$$|n, \pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|L\rangle \otimes \hat{D}(-\alpha)|n\rangle \pm |R\rangle \otimes \hat{D}(\alpha)|n\rangle \right), \quad (3.51)$$

$$\varepsilon_{n,\pm} = n\omega_c \mp \frac{\omega_a}{2} I(n, \alpha). \quad (3.52)$$

ここで注意しておきたいのは、図 3.6 に見られるように、ある程度大きな α に対しては、 $I(n, \alpha)$ が n に依存して正負両方の値をとりうることである。よって、 $|n, +\rangle$ と $|n, -\rangle$ の上下関係が共振器内光子数 n に依存して逆転する。これは、原子の基底状態と励起状態との逆転と解釈することができる^[29]。

図 3.6 より、 $n = 0$ の場合には $I(0, \alpha) > 0$ であることがわかる。よって、 $|0, +\rangle$ が Rabi ハミルトニアンの基底状態、 $|0, -\rangle$ が第一励起状態になっている。 $\hat{D}(\pm\alpha)|0\rangle$ はコヒーレント状態 $|\pm\alpha\rangle$ であるから、基底状態は

$$|0, \pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|L\rangle \otimes |-\alpha\rangle \pm |R\rangle \otimes |\alpha\rangle) \quad (3.53)$$

と書ける。このように、深結合領域では、原子と共振器とがもつれ合った非古典的な状態が基底状態となる。また、基底状態での光子数の期待値を計算すると

$$\langle 0, \pm | \hat{a}^\dagger \hat{a} | 0, \pm \rangle = |\alpha|^2 \quad (3.54)$$

であるから、基底状態であるにも関わらず共振器内に光子が存在している、という結論になる。ただし、通常のコヒーレント状態は、調和振動子であればその固有振動数で振動している状態〔図 1.2(b)〕に相当するが、ここでのコヒーレント状態は、調和振動子に外力を加えた際の静的な変位〔図 1.2(a)〕に相当し、性質が異なる。

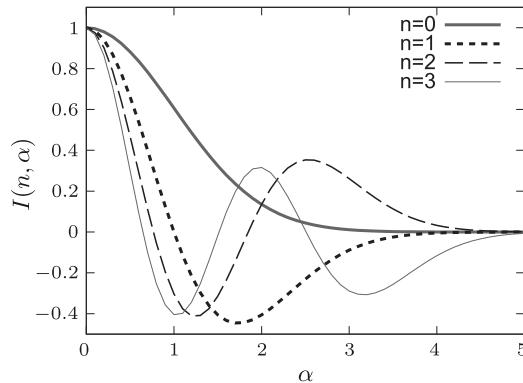


図 3.6 $I(n, \alpha)$ の α 依存性 ($n = 0, \dots, 3$)。 $I(n, \alpha)$ は α に関して偶関数なので $\alpha \geq 0$ の領域のみを表示している。

問題

より一般の $I_{nm}(\alpha) = \langle n | \hat{D}(\alpha) | m \rangle$ を計算してみよう。ただし $n \leq m$ とする。

解答 $|m\rangle = (\hat{a}^\dagger)^m |0\rangle / \sqrt{m!}$, $\hat{D}(\alpha)(\hat{a}^\dagger)^m \hat{D}(-\alpha) = (\hat{a}^\dagger - \alpha^*)^m$ を用いると,

$$I_{nm}(\alpha) = \sum_{r=0}^m \frac{\sqrt{m!}}{r!(m-r)!} (-\alpha^*)^{m-r} \langle n | (\hat{a}^\dagger)^r | \alpha \rangle$$

と書ける。 $\hat{a}^r |n\rangle = \sqrt{n!/(n-r)!} |n-r\rangle$, $\langle n-r | \alpha \rangle = e^{-|\alpha|^2/2} \alpha^{n-r} / \sqrt{(n-r)!}$ を用いると,

$$I_{nm}(\alpha) = e^{-|\alpha|^2/2} \alpha^{n-m} \sqrt{\frac{m!}{n!}} L_m^{(n-m)}(|\alpha|^2)$$

が得られる。ただし $L_p^{(q)}(x)$ はラグール陪多項式であり,

$$L_p^{(q)}(x) = \sum_{j=0}^p \frac{(p+q)!}{(p-j)!(q+j)!j!} (-x)^j$$

で与えられる。

第 4 章

量子開放系の理論 (1): 量子マスター方程式

前章では閉じた量子系としての共振器 QED 系の性質を議論したが、実際の共振器 QED 系は種々の外部自由度と結合した量子開放系である。本章では量子開放系における緩和効果を理論的に扱う手法として量子マスター方程式を議論する。量子開放系では外部自由度との量子もつれのため、量子状態を状態ベクトルではなく密度行列を用いて表す。量子マスター方程式は、密度行列に対するシュレーディンガー描像の運動方程式である。

4.1 マスター方程式の導出

本節では、量子開放系の運動方程式を導出しよう。導出の大筋は、全系を「着目系」と「環境」に分けて全系の運動方程式から環境自由度について平均化を行い、着目系の状態を表す密度行列 (density matrix) に対する運動方程式を導く。この方程式は量子マスター方程式 (quantum master equation) と呼ばれる。マスター方程式は、密度行列は時間発展し演算子は時間発展しないシュレーディンガー表示の方程式である。ここで議論は 2 準位原子の自然放出を例にとり具体的に話を進めるが、他のタイプの緩和に対しても同様に導出が可能である。種々の緩和を考慮したマスター方程式は 4.2 節において示す。

2 準位原子と自由空間中の光子場との相互作用を表すハミルトニアン [式 (1.171)] を再び示そう ($\hbar = 1$ としてある)。

$$\hat{H} = \underbrace{\omega_a \hat{\sigma}^\dagger \hat{\sigma}}_{\hat{H}_s} + \underbrace{\sum_j \omega_j \hat{a}_j^\dagger \hat{a}_j}_{\hat{H}_e} + \underbrace{\sum_j (\xi_j \hat{\sigma}^\dagger \hat{a}_j + \xi_j^* \hat{a}_j^\dagger \hat{\sigma})}_{\hat{H}_i}. \quad (4.1)$$

\hat{H}_s は着目系、 \hat{H}_e は環境、 \hat{H}_i は両者の相互作用を表すハミルトニアンであり、光子の波数や偏光を一つの離散的なラベル j で表している。 $\hat{H}_s + \hat{H}_e$ を無摂動ハミルトニアンに選んで相互作用表示に移ると、全系の密度行列 $\hat{R}(t)$ の運動

方程式は

$$\frac{d}{dt}\hat{R}(t) = -i[\hat{H}_i(t), \hat{R}(t)], \quad (4.2)$$

$$\hat{H}_i(t) = \hat{\sigma}^\dagger \times \underbrace{\sum_j \xi_j^* e^{i(\omega_a - \omega_j)t} \hat{a}_j}_{\hat{\Gamma}(t)} + \text{H.c.} \quad (4.3)$$

となる。本節で求めたいのは着目系の密度行列 $\hat{\rho}(t)$ である。 $\hat{\rho}(t)$ は全系の密度行列 $\hat{R}(t)$ から、環境自由度についてトレースをとることで求められる。

$$\hat{\rho}(t) = \text{Tr}_e\{\hat{R}(t)\}. \quad (4.4)$$

式 (4.2) を時刻 0 から t まで積分すると

$$\hat{R}(t) = \hat{R}(0) - i \int_0^t dt' [\hat{H}_i(t'), \hat{R}(t')] \quad (4.5)$$

が得られる。これを再び式 (4.2) に代入して

$$\frac{d}{dt}\hat{R}(t) = -i[\hat{H}_i(t), \hat{R}(0)] - \int_0^t dt' [\hat{H}_i(t), [\hat{H}_i(t'), \hat{R}(t')]] \quad (4.6)$$

が得られる。

ここで全系の密度行列 $\hat{R}(t)$ に関して次の二つの仮定をおく。(i) 初期時刻 $t = 0$ において着目系と環境に量子もつれが無く、密度行列は $\hat{R}(0) = \hat{\rho}(0) \otimes \hat{\rho}_e$ と分離されている。(ii) 環境のサイズは着目系のサイズに比べて圧倒的に大きいため、着目系のダイナミクスによる環境への反作用を無視することができ、 $\hat{R}(t) = \hat{\rho}(t) \otimes \hat{\rho}_e$ とおける。以上の仮定により、

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\hat{\rho}(t) \otimes \hat{\rho}_e &= -i[\hat{H}_i(t), \hat{\rho}(0) \otimes \hat{\rho}_e] \\ &\quad - \int_0^t dt' [\hat{H}_i(t), [\hat{H}_i(t'), \hat{\rho}(t') \otimes \hat{\rho}_e]] \end{aligned} \quad (4.7)$$

が得られる。ここで、式 (4.7) の環境自由度に関してトレースをとる。以下では、演算子 \hat{O} に対して、 $\text{Tr}_e\{\hat{O}\hat{\rho}_e\} = \langle \hat{O} \rangle$ のように略記しよう。式 (4.7) の右辺第一項には $\langle \hat{H}_i(t) \rangle$ が現れる。式 (4.3) から $\langle \hat{H}_i(t) \rangle$ を計算すると、 $\langle \hat{a}_j \rangle$ や $\langle \hat{a}_j^\dagger \rangle$ など一次の演算子に対する期待値が現れるが、環境は通常は真空状態や熱平衡状態にあるため、この期待値はゼロになる。よって $\langle \hat{H}_i(t) \rangle = 0$ であり、

$$\frac{d}{dt}\hat{\rho}(t) = - \int_0^t dt' \text{Tr}_e\{[\hat{H}_i(t), [\hat{H}_i(t'), \hat{\rho}(t') \otimes \hat{\rho}_e]]\} \quad (4.8)$$

が得られる。

上式 (4.8) は系の密度行列 $\hat{\rho}(t)$ のみの方程式になっているが、時間発展を決める式に過去の状態 $\hat{\rho}(t')$ が入っており、遅延微分方程式 (delay differential equation) の形をしている。ここでさらに二つの仮定をおく。(iii) 系と環境の相互作用が小さく、 $\hat{\rho}(t)$ の時間依存性が緩やかであるとして、式 (4.8) におい

て $\hat{\rho}(t') \rightarrow \hat{\rho}(t)$ と置き換える。これをマルコフ近似 (Markov approximation) という。(iv) 時間積分の下限を $0 \rightarrow -\infty$ とする。以上の仮定の下で、

$$\frac{d}{dt}\hat{\rho}(t) = - \int_{-\infty}^t dt' \text{Tr}_e\{[\hat{H}_i(t), [\hat{H}_i(t'), \hat{\rho}(t) \otimes \hat{\rho}_e]]\} \quad (4.9)$$

が得られる。この式は自由空間中の原子に限らず一般の量子開放系に対して成立する。

以下では、 $\hat{H}_i(t)$ として式 (4.3) を用いて計算を進める。環境自由度のトレースをとる際に $\text{Tr}_e\{\hat{\Gamma}(t')\hat{\rho}_e\hat{\Gamma}^\dagger(t)\} = \text{Tr}_e\{\hat{\Gamma}^\dagger(t)\hat{\Gamma}(t')\hat{\rho}_e\} = \langle \hat{\Gamma}^\dagger(t)\hat{\Gamma}(t') \rangle$ となる点などに注意すると、

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\hat{\rho}(t) &= I_1(\hat{\sigma}^\dagger\hat{\rho}\hat{\sigma}^\dagger - \hat{\sigma}^\dagger\hat{\sigma}\hat{\rho}) + I_2(\hat{\sigma}^\dagger\hat{\rho}\hat{\sigma} - \hat{\sigma}\hat{\sigma}^\dagger\hat{\rho}) \\ &\quad + I_3(\hat{\sigma}\hat{\rho}\hat{\sigma}^\dagger - \hat{\sigma}^\dagger\hat{\sigma}\hat{\rho}) + I_4(\hat{\sigma}\hat{\rho}\hat{\sigma} - \hat{\sigma}\hat{\sigma}\hat{\rho}) + \text{H.c.} \end{aligned} \quad (4.10)$$

が得られる。ここで積分 I_1, I_2, I_3, I_4 は

$$I_1 = \int_{-\infty}^t dt' \langle \hat{\Gamma}(t)\hat{\Gamma}(t') \rangle, \quad (4.11)$$

$$I_2 = \int_{-\infty}^t dt' \langle \hat{\Gamma}^\dagger(t)\hat{\Gamma}(t') \rangle, \quad (4.12)$$

$$I_3 = \int_{-\infty}^t dt' \langle \hat{\Gamma}(t)\hat{\Gamma}^\dagger(t') \rangle, \quad (4.13)$$

$$I_4 = \int_{-\infty}^t dt' \langle \hat{\Gamma}^\dagger(t)\hat{\Gamma}^\dagger(t') \rangle \quad (4.14)$$

により定義される。1.1.7 節で議論したように、温度 T の熱平衡状態では

$$\langle \hat{a}_i \hat{a}_j \rangle = 0, \quad (4.15)$$

$$\langle \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_j \rangle = \bar{n}_{\omega_j} \delta_{ij} \quad (4.16)$$

である。ただし、 \bar{n}_{ω_j} は熱平衡状態でのエネルギー $\hbar\omega_j$ の光子の平均光子数

$$\bar{n}_{\omega_j} = \frac{1}{e^{\hbar\omega_j/k_B T} - 1} \quad (4.17)$$

である。以上の事実を使うと、 $I_1 = I_4 = 0$ であり、 I_2, I_3 は非零であることがわかる。例として I_3 について計算を進めると、

$$I_3 = i \sum_j \frac{|\xi_j|^2(1 + \bar{n}_{\omega_j})}{\omega_a - \omega_j + i0} \approx i(1 + \bar{n}_{\omega_a})\Sigma(\omega_a) \quad (4.18)$$

が得られる。ここで $\Sigma(\omega_a)$ は励起原子の自己エネルギー [式 (1.217)] である。自己エネルギーの実部は Lamb シフトを与えるが、 ω_a への繰り込みと考えてここでは無視する。自己エネルギーの虚部は、自然放出レートを γ とすると

$$\text{Im } \Sigma(\omega_a) = -\pi \sum_j |\xi_j|^2 \delta(\omega_a - \omega_j) = -\gamma/2 \quad (4.19)$$

である。よって $I_2 = (\gamma/2)\bar{n}_{\omega_a}$, $I_3 = (\gamma/2)(1 + \bar{n}_{\omega_a})$ と書ける。以上の結果より、式(4.10)は次の形に整理できる。

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\hat{\rho} &= \frac{\gamma}{2}(1 + \bar{n}_{\omega_a})(2\hat{\sigma}\hat{\rho}\hat{\sigma}^\dagger - \hat{\sigma}^\dagger\hat{\sigma}\hat{\rho} - \hat{\rho}\hat{\sigma}^\dagger\hat{\sigma}) \\ &\quad + \frac{\gamma}{2}\bar{n}_{\omega_a}(2\hat{\sigma}^\dagger\hat{\rho}\hat{\sigma} - \hat{\sigma}\hat{\sigma}^\dagger\hat{\rho} - \hat{\rho}\hat{\sigma}\hat{\sigma}^\dagger).\end{aligned}\quad (4.20)$$

上式は、相互作用表示でのマスター方程式である。最後に、これをシュレーディンガー表示に戻そう。相互作用表示の密度行列を $\hat{\rho}_i(t)$ 、シュレーディンガー表示の密度行列を $\hat{\rho}_s(t)$ と表記すると、両者は $\hat{\rho}_s(t) = e^{-i\hat{H}_s t}\hat{\rho}_i(t)e^{i\hat{H}_s t}$ により結ばれているので、

$$\frac{d}{dt}\hat{\rho}_s(t) = -i[\hat{H}_s, \hat{\rho}_s(t)] + e^{i\hat{H}_s t} \frac{d\hat{\rho}_i(t)}{dt} e^{-i\hat{H}_s t} \quad (4.21)$$

を得る。この式に相互作用表示でのマスター方程式(4.20)を代入することにより、シュレーディンガー表示でのマスター方程式

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\hat{\rho} &= -i[\hat{H}_s, \hat{\rho}] + \frac{\gamma}{2}(1 + \bar{n}_{\omega_a})(2\hat{\sigma}\hat{\rho}\hat{\sigma}^\dagger - \hat{\sigma}^\dagger\hat{\sigma}\hat{\rho} - \hat{\rho}\hat{\sigma}^\dagger\hat{\sigma}) \\ &\quad + \frac{\gamma}{2}\bar{n}_{\omega_a}(2\hat{\sigma}^\dagger\hat{\rho}\hat{\sigma} - \hat{\sigma}\hat{\sigma}^\dagger\hat{\rho} - \hat{\rho}\hat{\sigma}\hat{\sigma}^\dagger)\end{aligned}\quad (4.22)$$

が得られる。ただし $\hat{\rho}_s$ の添え字を落として $\hat{\rho}$ とした。

4.2 原子－共振器系のマスター方程式

4.1節では、自由空間中の原子について、自由空間中の光子場を環境自由度として消去することにより、原子のマスター方程式を導出した。本節では、原子－共振器結合系について、様々な緩和を考慮したときのマスター方程式を示す。

原子の緩和には、自然放出のようなエネルギー散逸を伴う緩和に加えて、エネルギー散逸を伴わず量子コヒーレンスのみが失われる位相緩和がある。これは原子が「対角的に」環境と結合することでおこるので、自然放出の緩和項に対して $\hat{\sigma} \rightarrow \hat{\sigma}^\dagger \hat{\sigma}$, $\hat{\sigma}^\dagger \rightarrow \hat{\sigma}^\dagger \hat{\sigma}$ の置き換えをすればよい。^{*1)} 共振器モードの緩和の要因には内部損失 κ_i と外部損失 κ_e があるが、緩和に関しては両者とも同じはたらきを持つので、全緩和レート $\kappa = \kappa_e + \kappa_i$ で扱うことができる。^{*2)} 共振器モードの緩和は原子の自然放出と同様のメカニズムで起こるので、自然放出の緩和項に対して $\hat{\sigma} \rightarrow \hat{a}$ の置き換えをすればよい。こうして、原子－共振器系を記述するマスター方程式は

$$\frac{d\hat{\rho}}{dt} = -i[\hat{H}_s, \hat{\rho}] + \frac{\kappa}{2}(2\hat{a}\hat{\rho}\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{\rho} - \hat{\rho}\hat{a}^\dagger\hat{a})$$

*1) $\hat{\sigma}^\dagger \hat{\sigma}$ のかわりに、 $\hat{\sigma} \hat{\sigma}^\dagger$ や $\hat{\sigma}_z = [\hat{\sigma}^\dagger, \hat{\sigma}]$ を用いても同じである。 $\hat{\sigma} \hat{\sigma}^\dagger + \hat{\sigma}^\dagger \hat{\sigma} = \hat{1}$ に注意。

*2) ただし、単一光子源など、共振器から導波路への放出光を活用する際には区別が必要である。

$$+ \frac{\gamma}{2}(2\hat{\sigma}\hat{\rho}\hat{\sigma}^\dagger - \hat{\sigma}^\dagger\hat{\sigma}\hat{\rho} - \hat{\rho}\hat{\sigma}^\dagger\hat{\sigma}) - \gamma_p[\hat{\sigma}^\dagger\hat{\sigma}, [\hat{\sigma}^\dagger\hat{\sigma}, \hat{\rho}]] \quad (4.23)$$

で与えられる。原子-共振器系のハミルトニアン \hat{H}_s としては、Rabi モデル [式 (2.1)] や回転波近似を施した Jaynes-Cummings モデル [式 (2.3)] を用いる。

4.3 期待値の運動方程式

演算子 \hat{O} を着目系（今の場合、原子と共振器）に関わる演算子としよう。これは $\hat{O} = \hat{\sigma}^\dagger\hat{a}$ のように $\hat{\sigma}$ や \hat{a} （とその共役）の組み合わせでもよいし、状態間遷移を表す $\hat{O} = |g, n\rangle\langle e, n+1|$ のような演算子でもよい。この演算子の期待値を $\langle \hat{O}(t) \rangle$ で表す。この量は、シュレーディンガー表示のもとでは、密度行列 $\hat{\rho}(t)$ と（時間に依存しない）演算子 \hat{O} により次式で求められる。

$$\langle \hat{O}(t) \rangle = \text{Tr}_s\{\hat{O}\hat{\rho}(t)\}. \quad (4.24)$$

ここで Tr_s は着目系（system）に関する自由度についてトレースをとる操作を表す。両辺を時間で微分すると

$$\frac{d}{dt}\langle \hat{O}(t) \rangle = \text{Tr}_s\left\{\hat{O}\frac{d\hat{\rho}}{dt}\right\} \quad (4.25)$$

であるから、式 (4.23) の左から演算子 \hat{O} をかけてトレースをとることにより、 $\langle \hat{O}(t) \rangle$ の時間発展を表す次の方程式が得られる。

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\langle \hat{O} \rangle &= -i\langle [\hat{O}, \hat{H}_s] \rangle + \frac{\kappa}{2}\langle \hat{a}^\dagger[\hat{O}, \hat{a}] + [\hat{a}^\dagger, \hat{O}]\hat{a} \rangle \\ &\quad + \frac{\gamma}{2}\langle \hat{\sigma}^\dagger[\hat{O}, \hat{\sigma}] + [\hat{\sigma}^\dagger, \hat{O}]\hat{\sigma} \rangle + \gamma_p\langle \hat{\sigma}^\dagger\hat{\sigma}[\hat{O}, \hat{\sigma}^\dagger\hat{\sigma}] + [\hat{\sigma}^\dagger\hat{\sigma}, \hat{O}]\hat{\sigma}^\dagger\hat{\sigma} \rangle. \end{aligned} \quad (4.26)$$

ただし、行列のトレースに関する恒等式 $\text{Tr}\{\hat{A}\hat{B}\hat{C}\} = \text{Tr}\{\hat{C}\hat{A}\hat{B}\}$ を用いた。式 (4.23) と式 (4.26) は似た形をしているが、前者は演算子に対する方程式、後者は c 数に対する方程式である。

第 5 章

量子開放系の理論(2):入出力定式化

共振器 QED 系に結合している外部伝播モード（導波路モード）は、連続的な自由度を持っており、系の緩和を誘発する環境自由度としての側面を持つ。しかし、導波路中の伝播光子に興味がある場合などには、前章で行ったように導波路モードを「消去」する訳にはゆかない。本章では、着目系（共振器 QED 系）・環境系（導波路モード）双方を活きた量子的自由度として、ハイゼンベルグ描像で量子開放系のダイナミクスを解析する。この方法は入出力定式化 (input-output formalism) と呼ばれており、古典光・量子光に対する光学応答の解析に威力を發揮する。

5.1 共振器－導波路結合系

本節では、最も単純な量子開放系である共振器－導波路結合系を例にとり、入出力定式化の諸式を導出しよう。

ハミルトニアン

一つの共振器モードが、連続的な波数 $k (> 0)$ を持つ一次元フォトン場（以下、導波路モード）と結合している状況を考える。導波路モードには分散がないとしよう。すると波数 k のモードのエネルギー ε_k は、導波路中の光子速度を v として $\varepsilon_k = \hbar v k$ で与えられる。また、共振器と導波路の相互作用は弱く、線形結合で書けるとしよう。共振器－導波路系を記述するハミルトニアンは、 $\hbar = v = 1$ として、次式で与えられる。

$$\hat{H} = \underbrace{\omega_c \hat{a}^\dagger \hat{a}}_{\hat{H}_c} + \underbrace{\int_0^\infty dk k \hat{b}_k^\dagger \hat{b}_k}_{\hat{H}_w} + \underbrace{\int_0^\infty dk \left(\xi_k \hat{a}^\dagger \hat{b}_k + \xi_k^* \hat{b}_k^\dagger \hat{a} \right)}_{\hat{H}_i}. \quad (5.1)$$

ここで ω_c は共振器周波数、 ξ_k は共振器－導波路結合であり、 \hat{a} は共振器モード、 \hat{b}_k は波数 k の導波路モードに対する消滅演算子である。また、相互作用

\hat{H}_i において、光子数非保存の項を落とす回転波近似を施してある。

このような状況は、例えば図 5.1(a) に示すような、トロイド共振器がファイバー導波路と接している系で実現される。トロイド共振器には反時計回りと時計回りの固有モードがあるが、前者は右方向への伝播モード、後者は左方向への伝播モードとのみ結合しており、独立に考えることができる。導波路の固有モードは、全空間に広がる一方向への進行波である。また図 5.1(b) に示すような、対向する二枚の鏡で構成される Fabry-Perot 共振器において、片方の鏡のみに僅かな光の透過がある片側共振器 (one-sided cavity) も式 (5.1) により記述される。この場合、導波路の固有モードは、鏡の位置で固定端境界条件を持ち半無限空間に広がる定在波である。

理論的扱いを簡単にするため、式 (5.1) のハミルトニアンに次の近似をする。

(i) k 積分の下限を 0 から $-\infty$ へと拡張する。こうして導入される負波数のモードは分散関係 $\varepsilon_k = \hbar v k$ より負のエネルギーを持つが、共振器モードとの離調が非常に大きいため、ほとんど影響が無い。(ii) 共振器中の光子は、指數関数則に従って単調に導波路へと崩壊する。このような場合、共振器モードはエネルギー的に広く導波路モードと結合しており、結合定数 ξ_k の大きさが波数 k にあまり依存しないことが知られている。よって、これを定数と見なし、共振器周波数での値 ξ_{ω_c} に置き換える。共振器モードの導波路への崩壊レートを κ_e とすると、フェルミの黄金律 [式 (1.192)] より

$$\kappa_e = 2\pi \int dk |\xi_k|^2 \delta(k - \omega_c) = 2\pi |\xi_{\omega_c}|^2 \quad (5.2)$$

であるから、 $\xi_k = \sqrt{\kappa_e/2\pi}$ とおく。^{*1)} これらの近似の下で、共振器 - 導波路系のハミルトニアンは次式で与えられる。

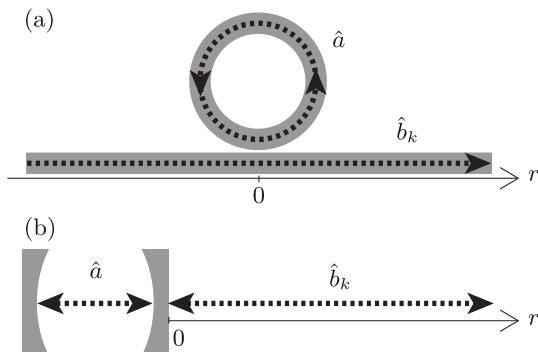


図 5.1 共振器 - 導波路系の例。(a) トロイド共振器。導波路の固有モード \hat{b}_k は全空間 ($-\infty < r < \infty$) に広がる右向きの進行波である。(b) 片側共振器。導波路の固有モード \hat{b}_k は半無限空間 ($0 < r < \infty$) に広がる定在波である。

*1) このように ξ_k を定数とおくことで、共振器内光子は厳密に指數関数則に従って崩壊する。これはマルコフ近似に相当する。

$$\hat{H} = \underbrace{\omega_c \hat{a}^\dagger \hat{a}}_{\hat{H}_c} + \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} dk k \hat{b}_k^\dagger \hat{b}_k}_{\hat{H}_w} + \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} dk \sqrt{\frac{\kappa_e}{2\pi}} (\hat{a}^\dagger \hat{b}_k + \hat{b}_k^\dagger \hat{a})}_{\hat{H}_i}. \quad (5.3)$$

波数表示・実空間表示

図 5.1(a) では、 \hat{b}_k は波動関数 $\sim e^{ikr}$ で全空間に広がる光子に対する消滅演算子である。これを導波路モード演算子の波数表示と呼ぶ。そのフーリエ変換として、実空間表示 \tilde{b}_r を次のように導入しよう。

$$\tilde{b}_r = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ikr} \hat{b}_k, \quad (5.4)$$

$$\hat{b}_k = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dr e^{-ikr} \tilde{b}_r. \quad (5.5)$$

\tilde{b}_r は位置 r にデルタ関数的に局在する光子に対する消滅演算子である。

波数表示および実空間表示での導波路モード演算子の交換関係は

$$[\hat{b}_k, \hat{b}_{k'}^\dagger] = \delta(k - k'), \quad (5.6)$$

$$[\tilde{b}_r, \tilde{b}_{r'}^\dagger] = \delta(r - r') \quad (5.7)$$

である。波数が離散化されている場合と異なり、連続表示の生成消滅演算子は次元を持つことに注意しよう。波数表示の演算子 \hat{b}_k は(長さ) $^{1/2}$ の次元を持っている、実空間表示の演算子 \tilde{b}_r は(長さ) $^{-1/2}$ の次元を持っている。

共振器-導波路相互作用 \hat{H}_i は、実空間表示を用いると

$$\hat{H}_i = \sqrt{\kappa_e} (\hat{a}^\dagger \tilde{b}_0 + \tilde{b}_0^\dagger \hat{a}) \quad (5.8)$$

と書くことができる。これは、共振器と導波路とが位置 $r = 0$ において局所的に結合していると解釈できる。

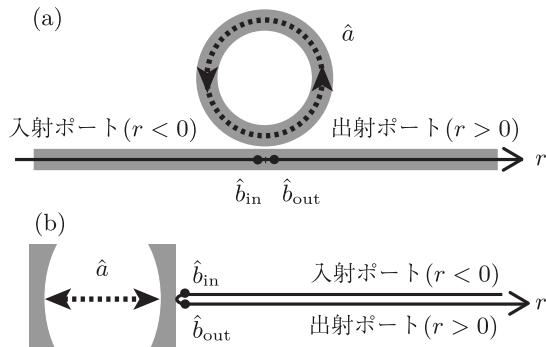


図 5.2 導波路モードの実空間表示。 $r < 0$ の領域が入射ポート、 $r > 0$ の領域が出射ポートに相当する。入射場（出射場）演算子 \hat{b}_{in} (\hat{b}_{out}) は共振器入射直前（直後）の演算子に対応する。

半無限導波路

導波路モードが半無限空間にしかない、図 5.1(b) の場合にはどう考えればよいだろうか。この場合には、導波路の固有モードは定在波であり、式 (5.4), (5.5) に替えて

$$\tilde{b}_r = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty dk \sin(kr) \hat{b}_k, \quad (5.9)$$

$$\hat{b}_k = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty dr \sin(kr) \tilde{b}_r \quad (5.10)$$

により実空間表示を導入すればよい。式 (5.9) は次のように分解できる。

$$\tilde{b}_r = \underbrace{\frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty dk e^{-ikr} \hat{b}_k}_{\text{input}} + \underbrace{\frac{-i}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty dk e^{ikr} \hat{b}_k}_{\text{output}}. \quad (5.11)$$

\hat{b}_k は $\sim e^{-ikt}$ の形の時間発展をするので、右辺第一項が負方向への伝搬モード（入射成分）、第二項が正方向への伝搬モード（出射成分）に対応する。実際の入射成分は「 $r > 0$ の領域を負の波数 $k < 0$ で伝播する」のだが、 r 軸を図 5.2(b) のように取り直し「 $r < 0$ の領域を正の波数 $k > 0$ で伝播する」と見なすことで、全空間を正方向に伝搬するフォトン場として扱うことができる。

厳密には、半無限導波路では式 (5.11) により実空間表示を導入すべきだが、本書では簡単のため、単純なフーリエ変換〔式 (5.4)〕を実空間表示として用いる。これは鏡面での反射による波の符号反転を考えないことに相当する。

5.2 古典光の状態ベクトル

共振器 - 導波路系の初期状態として、共振器中には光子が無く、導波路の入射ポートから振幅 $\alpha f(r)$ の古典光パルスが入射する状況を考えよう。ただし、 $f(r)$ は入射光子の波動関数であり、入射ポート ($r < 0$ の領域) に局在しており、 $\int_{-\infty}^0 dr |f(r)|^2 = 1$ と規格化されている。 α はこの光子モードの複素振幅であり、1.1.5 節における調和振動子の α と同じ意味を持つ。

ここで演算子 $\hat{O}^\dagger = \int dr f(r) \tilde{b}_r^\dagger$ を考えると、この演算子は $[\hat{O}, \hat{O}^\dagger] = 1$ を満たすよう規格化されており、波束 $f(r)$ を持つ光子の生成演算子としてはたらく。よって式 (1.43), (1.49) との類推により、振幅 $\alpha f(r)$ の古典パルスの状態ベクトルは

$$|\psi(0)\rangle = \mathcal{N} \exp \left(\alpha \int_{-\infty}^0 dr f(r) \tilde{b}_r^\dagger(0) \right) |v\rangle \quad (5.12)$$

と書ける。ここで $|v\rangle$ は共振器や導波路に全く光子が無い真空状態であり、 $\mathcal{N} = \exp(-|\alpha|^2/2)$ は規格化定数である。

式 (1.42) において、 $\hat{A} = -\alpha \int dr f(r) \tilde{b}_r^\dagger(0)$, $\hat{B} = \tilde{b}_r(0)$ とすることにより、

$$\tilde{b}_r(0)|\psi(0)\rangle = \alpha f(r)|\psi(0)\rangle \quad (5.13)$$

が得られる。つまり、連続モードの場合でもコヒーレント状態は消滅演算子の固有状態である。よって、演算子 $\tilde{b}_r(0)$ をコヒーレント状態 (5.12) に作用させると、演算子 $\tilde{b}_r(0)$ を c 数である電場振幅 $\alpha f(r)$ に厳密に置き換えることができる。

5.3 演算子の時間発展

入出力関係式

まず、波数表示での導波路モード演算子 \hat{b}_k のハイゼンベルグ方程式を考えよう。式 (5.3) のハミルトニアンより

$$\frac{d}{dt}\hat{b}_k = -ik\hat{b}_k - i\sqrt{\frac{\kappa_e}{2\pi}}\hat{a} \quad (5.14)$$

となる。この式を初期時刻 0 から t まで積分すると

$$\hat{b}_k(t) = \hat{b}_k(0)e^{-ikt} - i\sqrt{\frac{\kappa_e}{2\pi}} \int_0^t dt' \hat{a}(t')e^{ik(t'-t)} \quad (5.15)$$

が得られる。ここで式 (5.4) により実空間表示に移行すると、

$$\tilde{b}_r(t) = \tilde{b}_{r-t}(0) - i\sqrt{\kappa_e} \Theta_{r \in (0,t)} \hat{a}(t-r) \quad (5.16)$$

が得られる。ただし

$$\Theta_{r \in (a,b)} = \begin{cases} 1 & (a < r < b) \\ 1/2 & (r = a, b) \\ 0 & (r < a, b < r) \end{cases} \quad (5.17)$$

である。ここで式 (5.16) の意味を考えてみよう。右辺第一項は、入射波が速度 v で並進運動をする様子を表している。一方、右辺第二項は共振器からの輻射を表しており、因果律を満たす $0 < r < t$ の領域に共振器からの輻射が入射波に重ね合わされる様子を表している。式 (5.16) は出射ポートでの光子振幅を入射波と共振器モードの振幅から決める式であり、入出力関係式 (input-output relation) と呼ばれる。出射ポートでは入射波と共振器からの輻射が干渉し、位相シフト (7.1.4 節参照) や共鳴トンネリング (7.1.5 節参照) など、一次元光学系に独特的な物理現象を引き起こす。

問題

$\hat{s}(t)$ を系 (今の場合には共振器) の演算子とする。交換関係 $[\tilde{b}_r(0), \hat{s}(t)]$ を求めよ。この交換関係は、例えば 2 点相關関数の計算などで必要になる。

解答 式(5.16)において $r \rightarrow r+t$ とし、演算子 $\hat{s}(t)$ との交換関係をとると次式を得る。

$$[\tilde{b}_{r+t}(t), \hat{s}(t)] = [\tilde{b}_r(0), \hat{s}(t)] - i\sqrt{\kappa_e} \Theta_{r \in (-t, 0)} [\hat{a}(-r), \hat{s}(t)]. \quad (5.18)$$

ここで左辺は同時刻・別自由度の演算子なので、交換してゼロになる。よって、次の交換関係を得る。

$$[\tilde{b}_r(0), \hat{s}(t)] = i\sqrt{\kappa_e} \Theta_{r \in (-t, 0)} [\hat{a}(-r), \hat{s}(t)]. \quad (5.19)$$

$\tilde{b}_r(0)$ と $\hat{s}(t)$ のように異なる時刻の演算子は一般に交換しないが、式(5.19)によれば $r > 0$ または $r < -t$ であれば交換する。これは次のように直感的に理解できる： $r > 0$ の演算子は出射ポートを表すので、系と相互作用しない。 $r < -t$ の演算子は入射ポートにあるが、時刻 t までには系に到達できないので、 $\hat{s}(t)$ とは交換する。相対論的な表現を使えば、 $\tilde{b}_r(0)$ と $\hat{s}(t)$ は空間的な関係にあり、導波路中での光速度 v で作られる光円錐の外にある。

共振器のハイゼンベルグ方程式

次に共振器モード \hat{a} の時間発展を見てみよう。式(5.3)より、 \hat{a} に対するハイゼンベルグ方程式は

$$\frac{d}{dt} \hat{a} = -i\omega_c \hat{a} - i\sqrt{\kappa_e} \tilde{b}_0 \quad (5.20)$$

となる。ただし \tilde{b}_0 は位置 $r = 0$ における実空間表示の導波路モード演算子〔式(5.4)〕である。ここで式(5.16)を使うと、 $\theta(0) = 1/2$ であることに注意して、

$$\frac{d}{dt} \hat{a} = (-i\omega_c - \kappa_e/2) \hat{a} - i\sqrt{\kappa_e} \tilde{b}_{-t}(0) \quad (5.21)$$

が得られる。この式の右辺第一項では、共振器の周波数が複素数 $\omega_c - i\kappa_e/2$ となっており、共振器内の光子が導波路へと漏れてゆく緩和効果が取り込まれている。一方、右辺第二項は導波路からの入射光による共振器の駆動を表している。

入射場・出射場演算子

共振器に入射する直前($r = -0$)および直後($r = +0$)での導波路モード演算子を、入射場演算子 $\hat{b}_{\text{in}}(t)$ および出射場演算子 $\hat{b}_{\text{out}}(t)$ として下記のように定義する。

$$\hat{b}_{\text{in}}(t) = \tilde{b}_{-0}(t) = \tilde{b}_{-t}(0), \quad (5.22)$$

$$\hat{b}_{\text{out}}(t) = \tilde{b}_{+0}(t). \quad (5.23)$$

式(5.22)の二番目の等号は式(5.16)から導かれるものであり、入射ポートでの光子の並進運動を表している。共振器のハイゼンベルグ方程式(5.21)と入出力関係式(5.16)を入射場・出射場演算子で表現すると次式のようになる。

$$\frac{d}{dt}\hat{a} = (-i\omega_c - \kappa_e/2)\hat{a} - i\sqrt{\kappa_e}\hat{b}_{in}(t), \quad (5.24)$$

$$\hat{b}_{out}(t) = \hat{b}_{in}(t) - i\sqrt{\kappa_e}\hat{a}(t). \quad (5.25)$$

問題

$\hat{s}(t)$ を系の演算子とする。交換関係 $[\hat{b}_{in}(t'), \hat{s}(t)]$ を求めよ。

解答 式 (5.22) より $\tilde{b}_{-t'}(0) = \hat{b}_{in}(t')$ である。式 (5.19) において $r \rightarrow -t'$ とすれば次式を得る。

$$[\hat{b}_{in}(t'), \hat{s}(t)] = i\sqrt{\kappa_e}\Theta_{t' \in (0, t)}[\hat{a}(t'), \hat{s}(t)]. \quad (5.26)$$

5.4 期待値の時間発展

ハイゼンベルグ描像では、演算子 $\hat{O}(t)$ の期待値は、初期状態ベクトルを使って $\langle \hat{O}(t) \rangle = \langle \psi(0) | \hat{O}(t) | \psi(0) \rangle$ として求められる。ここでは一例として、共振器モードの振幅 $\langle \hat{a}(t) \rangle$ の求め方を見てみよう。ハイゼンベルグ方程式 (5.21) に対して初期状態ベクトル (5.12) で期待値をとることにより、 $\langle \hat{a}(t) \rangle$ の従う運動方程式

$$\frac{d}{dt}\langle \hat{a} \rangle = (-i\omega_c - \kappa_e/2)\langle \hat{a} \rangle - i\sqrt{\kappa_e}\alpha f(-t) \quad (5.27)$$

が得られる。ここで、コヒーレント光の性質である式 (5.13) を用いた。この 1 階微分方程式を解いて、 $\langle \hat{a}(t) \rangle$ が得られる。

導波路モードでの光の振幅は $\langle \tilde{b}_r(t) \rangle$ により求められる。入出力関係式 (5.16) に対して初期状態ベクトル (5.12) で期待値をとることにより、

$$\langle \tilde{b}_r(t) \rangle = \alpha f(r-t) - i\sqrt{\kappa_e}\Theta_{r \in (0, t)}\langle \hat{a}(t-r) \rangle \quad (5.28)$$

が得られる。ここで第一項は入射パルス $\alpha f(r)$ が共振器と相互作用せずに並進運動する成分である。第二項は共振器からの輻射であり、微分方程式 (5.27) の解である。出力光は両者の重ね合わせで与えられる。ここでは計算方法の概略を見るにとどめ、7 章で古典光への光学応答を定量的に議論する。

5.5 有効ハミルトニアン

外場によりドライブされる着目系（原子や共振器）の応答を考える際には、本章で行ったように、着目系に加え外部モードも量子化し、拡大された量子系のダイナミクスを解析するのが厳密な方法である。一方、例えば 1.5 節の Rabi 振動の解析では、外部モードを量子的自由度として扱わず、c 数の外場として取り込んだ有効ハミルトニアン $\hat{H}_{eff}(t)$ を使って、閉じた系としてダイナミク

スを解析した。ここでは、有効ハミルトニアンの「導出」をしてみよう。

式 (5.27) の右辺第二項は、共振器の感じる外場が、

$$\mathcal{F}(t) = \sqrt{\kappa_e} \alpha f(-t) \quad (5.29)$$

で与えられることを表している。ここで $\mathcal{F}(t)$ を一定に保ちつつ、結合を弱く、入射光振幅を強くする極限 ($\kappa_e \rightarrow 0, \alpha \rightarrow \infty$) を考えよう。このとき式 (5.27) は、 $\frac{d}{dt}\langle\hat{a}\rangle = -i\omega_c\langle\hat{a}\rangle - i\sqrt{\kappa_e}\alpha f(-t)$ に帰着する。これは、有効ハミルトニアン

$$\hat{H}_{\text{eff}}(t) = \omega_c \hat{a}^\dagger \hat{a} + [\mathcal{F}(t)\hat{a}^\dagger + \mathcal{F}^*(t)\hat{a}] \quad (5.30)$$

から得られるハイゼンベルグ方程式 $\frac{d}{dt}\hat{a} = i[\hat{H}_{\text{eff}}(t), \hat{a}]$ と一致する。このように、着目系と導波路との結合が弱く、強いコヒーレント光を入射するという条件の下で、有効ハミルトニアン $\hat{H}_{\text{eff}}(t)$ を用いた孤立量子系として扱いが正当化される。

量子情報処理において、量子ビットの状態制御には外場を印加する必要があり、量子ビットを外部自由度と相互作用させることが必須である。よって量子ビットを孤立量子系として、完全にコヒーレントに制御することは原理的に不可能である。しかし、ここでの議論の結果は、結合を弱くし外場を強くする極限において、コヒーレントな量子制御が近似的に可能であることを示唆している。実際、量子コンピュータの実装実験では、この方針に従って高忠実度の量子ゲートを達成している。

5.6 様々な緩和

前節までは、共振器の外部ロス（導波路への輻射崩壊）を例にとり入出力定式化の概要を見た。本節では、原子-共振器結合系を着目系として、様々な緩和過程がある場合に拡張しよう。着目系のハミルトニアンを \hat{H}_s で表す。^{*2)} 緩和過程として、図 2.2 に示す、(i) 共振器の外部ロス（導波路モードへの結合）、(ii) 共振器の内部ロス、(iii) 原子のエネルギー緩和、(iv) 原子の位相緩和、の 4 種類の緩和チャンネルを考慮する。(ii)-(iv) の緩和を引き起こす環境自由度を (i) と同様に線形分散を持つ一次元ボゾン場によりモデル化し、それらを $\hat{c}_k, \hat{d}_k, \hat{e}_k$ で表そう。式 (5.3) に倣うと、環境まで含めたハミルトニアンは

$$\begin{aligned} \hat{H} = & \hat{H}_s + \int_{-\infty}^{\infty} dk \left[k \hat{b}_k^\dagger \hat{b}_k + \sqrt{\frac{\kappa_e}{2\pi}} (\hat{a}^\dagger \hat{b}_k + \hat{b}_k^\dagger \hat{a}) \right] \\ & + \int_{-\infty}^{\infty} dk \left[k \hat{c}_k^\dagger \hat{c}_k + \sqrt{\frac{\kappa_i}{2\pi}} (\hat{a}^\dagger \hat{c}_k + \hat{c}_k^\dagger \hat{a}) \right] \end{aligned}$$

^{*2)} 具体的には、Rabi モデル [式 (2.1)] や Jaynes-Cummings ハミルトニアン \hat{H}_{JC} [式 (2.3)] である。

$$\begin{aligned}
& + \int_{-\infty}^{\infty} dk \left[k \hat{d}_k^\dagger \hat{d}_k + \sqrt{\frac{\gamma}{2\pi}} (\hat{\sigma}^\dagger \hat{d}_k + \hat{d}_k^\dagger \hat{\sigma}) \right] \\
& + \int_{-\infty}^{\infty} dk \left[k \hat{e}_k^\dagger \hat{e}_k + \sqrt{\frac{\gamma_p}{\pi}} \hat{\sigma}^\dagger \hat{\sigma} (\hat{e}_k + \hat{e}_k^\dagger) \right]
\end{aligned} \tag{5.31}$$

と書ける。それぞれの場に対する入出力関係式は

$$\tilde{b}_r(t) = \tilde{b}_{r-t}(0) - i\sqrt{\kappa_e} \Theta_{r \in (0,t)} \hat{a}(t-r), \tag{5.32}$$

$$\tilde{c}_r(t) = \tilde{c}_{r-t}(0) - i\sqrt{\kappa_i} \Theta_{r \in (0,t)} \hat{a}(t-r), \tag{5.33}$$

$$\tilde{d}_r(t) = \tilde{d}_{r-t}(0) - i\sqrt{\gamma} \Theta_{r \in (0,t)} \hat{\sigma}(t-r), \tag{5.34}$$

$$\tilde{e}_r(t) = \tilde{e}_{r-t}(0) - i\sqrt{2\gamma_p} \Theta_{r \in (0,t)} \hat{\sigma}^\dagger(t-r) \hat{\sigma}(t-r) \tag{5.35}$$

で与えられる。式(5.31)のハミルトニアンより、着目系の演算子 \hat{O} に対するハイゼンベルグ方程式が次のように導かれる。

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \hat{O} &= i[\hat{H}_s, \hat{O}] + \frac{\kappa_e + \kappa_i}{2} ([\hat{a}^\dagger, \hat{O}] \hat{a} + \hat{a}^\dagger [\hat{a}, \hat{O}]) \\
&\quad + \frac{\gamma}{2} ([\hat{\sigma}^\dagger, \hat{O}] \hat{\sigma} + \hat{\sigma}^\dagger [\hat{\sigma}, \hat{O}]) + \gamma_p [[\hat{\sigma}^\dagger \hat{\sigma}, \hat{O}], \hat{\sigma}^\dagger \hat{\sigma}] \\
&\quad + i\sqrt{\kappa_e} [\hat{a}^\dagger, \hat{O}] \tilde{b}_{-t}(0) + i\sqrt{\kappa_e} \tilde{b}_{-t}^\dagger(0) [\hat{a}, \hat{O}] \\
&\quad + i\sqrt{\kappa_i} [\hat{a}^\dagger, \hat{O}] \tilde{c}_{-t}(0) + i\sqrt{\kappa_i} \tilde{c}_{-t}^\dagger(0) [\hat{a}, \hat{O}] \\
&\quad + i\sqrt{v\gamma} [\hat{\sigma}^\dagger, \hat{O}] \tilde{d}_{-t}(0) + i\sqrt{v\gamma} \tilde{d}_{-t}^\dagger(0) [\hat{\sigma}, \hat{O}] \\
&\quad + i\sqrt{2v\gamma_p} [\hat{\sigma}^\dagger \hat{\sigma}, \hat{O}] \tilde{e}_{-t}(0) + i\sqrt{2v\gamma_p} \tilde{e}_{-t}^\dagger(0) [\hat{\sigma}^\dagger \hat{\sigma}, \hat{O}].
\end{aligned} \tag{5.36}$$

初期状態として、導波路以外の自由度は真空状態にあり、導波路から古典光パルス $\alpha f(r)$ が入射する場合を考えよう。この状態を表す状態ベクトルは式(5.12)の $|\psi(0)\rangle$ である。よって物理量 \hat{O} の期待値 $\langle \hat{O}(t) \rangle = \langle \psi(0) | \hat{O} | \psi(0) \rangle$ の時間発展を表す方程式は次式で与えられる。

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \langle \hat{O} \rangle &= i\langle [\hat{H}_s, \hat{O}] \rangle + \frac{\kappa_e + \kappa_i}{2} \langle [\hat{a}^\dagger, \hat{O}] \hat{a} + \hat{a}^\dagger [\hat{a}, \hat{O}] \rangle \\
&\quad + \frac{\gamma}{2} \langle [\hat{\sigma}^\dagger, \hat{O}] \hat{\sigma} + \hat{\sigma}^\dagger [\hat{\sigma}, \hat{O}] \rangle + \gamma_p \langle [[\hat{\sigma}^\dagger \hat{\sigma}, \hat{O}], \hat{\sigma}^\dagger \hat{\sigma}] \rangle \\
&\quad + i\sqrt{\kappa_e} \langle [\hat{a}^\dagger, \hat{O}] \rangle \alpha f(-t) + i\sqrt{\kappa_e} \alpha^* f^*(-t) \langle [\hat{a}, \hat{O}] \rangle.
\end{aligned} \tag{5.37}$$

コヒーレント状態の性質(5.13)より、厳密に $\tilde{b}_r(0) \rightarrow \alpha f(r)$, $\tilde{c}_r(0) \rightarrow 0$, $\tilde{d}_r(0) \rightarrow 0$, $\tilde{e}_r(0) \rightarrow 0$ の置き換えができることに注意しよう。特に、導波路からの入射光が無い場合 ($\alpha f(r) = 0$) には、入出力定式化から得られる式(5.37)とマスター方程式から得られる式(4.26)とは一致している。

第 6 章

共振器 QED 系の緩和

本章では、前章までに導入した量子開放系の理論を使って、励起された共振器 QED 系の緩和を議論する。孤立した共振器 QED 系では、原子と共振器の間で励起をやりとりする真空 Rabi 振動が起こるが、現実には原子の自然放出や共振器の外部・内部ロスにより振動は減衰し、強結合領域では減衰振動、弱結合領域では過減衰が起こる。またエネルギー緩和と位相緩和の違いも議論する。

6.1 原子・共振器の緩和

本節では原子-共振器相互作用の無い $g = 0$ の場合を考え、原子や共振器の単独での緩和について議論しよう。

6.1.1 原子の緩和

原子の緩和を見るために、 $\langle \hat{\sigma} \rangle$ と $\langle \hat{\sigma}^\dagger \hat{\sigma} \rangle$ に着目しよう。 $\langle \hat{\sigma} \rangle = (\langle \hat{\sigma}_x \rangle - i\langle \hat{\sigma}_y \rangle)/2$ であるから、 $\langle \hat{\sigma} \rangle$ は Bloch ベクトルの横成分 (x, y 成分) に対応する量であり、原子のコヒーレンスを表す。 $\langle \hat{\sigma}^\dagger \hat{\sigma} \rangle = (1 + \langle \hat{\sigma}_z \rangle)/2$ であるから、 $\langle \hat{\sigma}^\dagger \hat{\sigma} \rangle$ は Bloch ベクトルの縦成分 (z 成分) に対応する量であり、原子の励起状態占有確率を表す。

$\langle \hat{\sigma} \rangle$ と $\langle \hat{\sigma}^\dagger \hat{\sigma} \rangle$ の時間発展を見てみよう。式 (4.26) あるいは式 (5.37) において $\hat{O} = \hat{\sigma}^\dagger \hat{\sigma}$ と選ぶと次式が得られる。

$$\frac{d}{dt} \langle \hat{\sigma}^\dagger \hat{\sigma} \rangle = -\gamma \langle \hat{\sigma}^\dagger \hat{\sigma} \rangle. \quad (6.1)$$

式 (6.1) より、Bloch ベクトルの縦成分は、レート γ で減衰することがわかる。これを原子の縦緩和 (longitudinal relaxation) と呼ぶ。縦緩和レートの逆数を縦緩和時間 T_1 として定義する。

$$T_1 = \frac{1}{\gamma}. \quad (6.2)$$

一方、式(4.26)あるいは式(5.37)において $\hat{O} = \hat{\sigma}$ と選ぶと次式が得られる。

$$\frac{d}{dt}\langle\hat{\sigma}\rangle = (-i\omega_a - \gamma/2 - \gamma_p)\langle\hat{\sigma}\rangle. \quad (6.3)$$

式(6.3)より、Blochベクトルの横成分は、角速度 ω_a で回転しつつ、レート $\gamma/2 + \gamma_p$ で減衰することがわかる。これを原子の横緩和(transverse relaxation)と呼ぶ。横緩和レートの逆数を横緩和時間 T_2 として定義する。

$$T_2 = \frac{1}{\gamma/2 + \gamma_p}. \quad (6.4)$$

T_1, T_2 の定義式から

$$T_2 \leq 2T_1 \quad (6.5)$$

であることがわかる。等号は、純位相緩和が無視できる $\gamma_p \rightarrow 0$ の極限において成立する。この極限を自然幅極限(natural linewidth limit)と呼ぶ。

6.1.2 共振器の緩和

共振器モードの緩和を見るために、振幅 $\langle\hat{a}\rangle$ と平均光子数 $\langle\hat{a}^\dagger\hat{a}\rangle$ の運動を見てみよう。式(4.26)あるいは式(5.37)において $\hat{O} = \hat{a}$, $\hat{a}^\dagger\hat{a}$ と選ぶと次式が得られる。

$$\frac{d}{dt}\langle\hat{a}\rangle = (-i\omega_c - \kappa/2)\langle\hat{a}\rangle, \quad (6.6)$$

$$\frac{d}{dt}\langle\hat{a}^\dagger\hat{a}\rangle = -\kappa\langle\hat{a}^\dagger\hat{a}\rangle. \quad (6.7)$$

これらの式より、共振器モードの振幅は、角速度 ω_c で回転しつつレート $\kappa/2$ で減衰し、平均光子数はレート κ で減衰する。^{*1)}

共振器を外部入射光により定常励起するとき、共振器内の平均光子数 $\langle\hat{a}^\dagger\hat{a}\rangle$ を入射周波数の関数としてプロットすると、スペクトルは中心周波数 ω_c 、線幅(半値全幅) κ のローレンツ型になる[式(7.12)]。共振器のQ値(Q factor)は両者の比として

$$Q = \frac{\omega_c}{\kappa} \quad (6.8)$$

により定義される。共振器長 L のFabry-Perot共振器の基本モードでは、 $\omega = 2\pi c/\lambda = \pi c/L$ であり、光子が共振器中を一往復する時間 $2L/c$ はおよそ ω^{-1} である。一方、光子の共振器中での滞在時間はおよそ κ^{-1} であるから、Q値は光子が外部に漏れ出すまでの、共振器中での往復回数を表している。

6.2 真空Rabi振動：弱結合と強結合

前節において、原子や共振器の単独の緩和は指數関数的におこることを見

*1) エネルギーではなく、振幅の減衰レートを κ で表す流儀もある。

た。一方、3.2 節において、緩和の無い原子－共振器結合系は両者の間で励起を交換し続け、減衰の無い真空 Rabi 振動を示すことを見た。本節では、原子や共振器に緩和のある場合について、真空 Rabi 振動の減衰を考察する。緩和過程として、原子から非共振器モードへの自然放出 γ と、共振器から導波路モードへの外部ロス κ_e がある状況を考えよう ($\gamma_p = \kappa_i = 0$)。位相緩和の効果は 6.4 節にて議論する。また、 $\kappa_e = \kappa$ と表記し、 $\hbar = v$ (導波路中の伝搬速度) = 1 とおく。

6.2.1 ハミルトニアンと初期状態

系全体（原子－共振器－環境）を表すハミルトニアン \hat{H} は、式 (5.31)において $\gamma_p = \kappa_i = 0$ としたものである。また、初期時刻 $t = 0$ において、原子は励起状態にあり、共振器や環境は基底状態にあるとする。この初期状態ベクトル $|\psi(0)\rangle$ は

$$|\psi(0)\rangle = \hat{\sigma}^\dagger |v\rangle \quad (6.9)$$

と書ける。ただし $|v\rangle$ は系全体の基底状態、すなわち全く励起の無い状態を表す。

6.2.2 状態ベクトルに基づく解析

量子開放系の良く知られた解析方法はマスター方程式によるものであり、式 (4.26) を使って、原子－共振器系の各種期待値に対する、c 数の連立微分方程式を得ることができる。しかし、6.2.4 節で議論するように、この方法は密度行列に基づいているため、一般に計算が煩雑になる。ここでは、より簡潔な、状態ベクトルと入出力定式化に基づく解析を紹介する。

状態ベクトル

時刻 t での状態ベクトルは、系全体のハミルトニアン \hat{H} [式 (5.31)] を用いて

$$|\psi(t)\rangle = e^{-i\hat{H}t} |\psi(0)\rangle \quad (6.10)$$

により時間発展する。励起数は 1 で保存されているので、この状態ベクトルを

$$\begin{aligned} |\psi(t)\rangle &= \alpha_1(t)\hat{\sigma}^\dagger |v\rangle + \alpha_2(t)\hat{a}^\dagger |v\rangle \\ &+ \int dr \alpha_3(r,t)\tilde{b}_r^\dagger |v\rangle + \int dr \alpha_4(r,t)\tilde{d}_r^\dagger |v\rangle \end{aligned} \quad (6.11)$$

と表すことができる。ただし α_1, α_2 は原子励起状態および共振器モードの 1 光子状態の確率振幅を表し、 α_3, α_4 は導波路モードおよび非共振器モードに放出された光子の波動関数を表す。^{*2)}

^{*2)} 非共振器モードは本来は様々な方向に広がっているが、ここでは一次元場でモデル化してある。

式 (6.11) より $\alpha_1(t) = \langle v | \hat{\sigma}(0) | \psi(t) \rangle$ であり, 式 (6.10) より $|\psi(t)\rangle = e^{-i\hat{H}t}\hat{\sigma}^\dagger(0)|v\rangle$ であるから, $\alpha_1(t) = \langle v | e^{-i\hat{H}t}e^{i\hat{H}t}\hat{\sigma}(0)e^{-i\hat{H}t}\hat{\sigma}^\dagger(0)|v\rangle$ と書ける. ここで, $\hat{H}|v\rangle = 0$ より $\langle v | e^{-i\hat{H}t} = \langle v |$ であることと, 演算子のハイゼンベルグ表示の定義式 $\hat{\sigma}(t) = e^{i\hat{H}t}\hat{\sigma}(0)e^{-i\hat{H}t}$ を用いると,

$$\alpha_1(t) = \langle v | \hat{\sigma}(t)\hat{\sigma}^\dagger(0) | v \rangle, \quad (6.12)$$

$$\alpha_2(t) = \langle v | \hat{a}(t)\hat{\sigma}^\dagger(0) | v \rangle \quad (6.13)$$

が得られる.

同様の考察を $\alpha_3(r,t)$ に対して行うと, $\alpha_3(r,t) = \langle v | \tilde{b}_r(0) | \psi(t) \rangle = \langle v | \tilde{b}_r(t)\hat{\sigma}^\dagger(0) | v \rangle$ が得られる. ここで入出力関係式 (5.32) を用いると, $\alpha_3(r,t) = \langle v | \tilde{b}_{r-t}(0)\hat{\sigma}^\dagger(0) | v \rangle - i\sqrt{\kappa}\Theta_{r \in (0,t)}\langle v | \hat{a}(t-r)\hat{\sigma}^\dagger(0) | v \rangle$ が得られる. 右辺第一項中の二つの演算子は同時刻であるため交換し, $\tilde{b}_{r-t}(0)|v\rangle = 0$ よりゼロとなる. 以上の考察から,

$$\alpha_3(r,t) = -i\sqrt{\gamma}\Theta_{r \in (0,t)}\alpha_1(t-r), \quad (6.14)$$

$$\alpha_4(r,t) = -i\sqrt{\kappa}\Theta_{r \in (0,t)}\alpha_2(t-r) \quad (6.15)$$

が導かれる.

α_1, α_2 の運動方程式

式 (5.36) より, 演算子 $\hat{\sigma}$ や \hat{a} のハイゼンベルグ方程式は,

$$\frac{d}{dt}\hat{\sigma} = (-i\omega_a - \gamma/2)\hat{\sigma} - ig(1 - 2\hat{\sigma}^\dagger\hat{\sigma})\hat{a} + i\sqrt{\gamma}[\hat{\sigma}^\dagger, \hat{\sigma}]\tilde{d}_{-t}(0), \quad (6.16)$$

$$\frac{d}{dt}\hat{a} = (-i\omega_c - \kappa/2)\hat{a} - ig\hat{\sigma} - i\sqrt{\kappa}\tilde{b}_{-t}(0) \quad (6.17)$$

である. これらの方程式に対して, 左から $\langle v |$, 右から $\hat{\sigma}^\dagger(0)|v\rangle$ をかけることにより, α_1, α_2 に対する運動方程式が得られる. 例えば α_1 に対しては,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\alpha_1 &= (-i\omega_a - \gamma/2)\alpha_1 - ig\alpha_2 + 2ig\langle v | \hat{\sigma}^\dagger(t)\hat{\sigma}(t)\hat{a}(t)\hat{\sigma}^\dagger(0) | v \rangle \\ &\quad + i\sqrt{\gamma}\langle v | [\hat{\sigma}^\dagger, \hat{\sigma}]\tilde{d}_{-t}(0)\hat{\sigma}^\dagger(0) | v \rangle. \end{aligned} \quad (6.18)$$

この系では励起数が保存されるので, $\hat{\sigma}(t)\hat{a}(t)\hat{\sigma}^\dagger(0)|v\rangle = 0$ となり右辺第3項はゼロになる. また, 第4項では, 同時刻の演算子 $\tilde{d}_{-t}(0)$ と $\hat{\sigma}^\dagger(0)$ は交換可能であり, $\tilde{d}_{-t}(0)|v\rangle = 0$ より, こちらもゼロになる. 以上の考察から,

$$\frac{d}{dt}\alpha_1 = (-i\omega_a - \gamma/2)\alpha_1 - ig\alpha_2, \quad (6.19)$$

$$\frac{d}{dt}\alpha_2 = (-i\omega_c - \kappa/2)\alpha_2 - ig\alpha_1 \quad (6.20)$$

が得られる. 初期条件は $\alpha_1(0) = 1, \alpha_2(0) = 0$ である.

問題

式 (6.11) の状態ベクトルが規格化されていること、つまり

$$P(t) = |\alpha_1(t)|^2 + |\alpha_2(t)|^2 + \int dr |\alpha_3(r, t)|^2 + \int dr |\alpha_3(r, t)|^2$$

とすると、常に $P(t) = 1$ であることを確認せよ。

解答 式 (6.14) より、 $\int_{-\infty}^{\infty} dr |\alpha_3(r, t)|^2 = \gamma \int_0^t dr |\alpha_1(t - r)|^2 = \gamma \int_0^t dt' |\alpha_1(t')|^2$ と書ける。こうして

$$P(t) = |\alpha_1(t)|^2 + |\alpha_2(t)|^2 + \gamma \int_0^t dt' |\alpha_1(t')|^2 + \kappa \int_0^t dt' |\alpha_2(t')|^2$$

と書ける。この量を時間微分して、式 (6.19), (6.20) を使うと $dP(t)/dt = 0$ が得られる。初期条件 $P(0) = 1$ と合わせ、 $P(t) = 1$ を確認できる。

α_1, α_2 の関数形

ラプラス変換（付録 D 参照）を用いて、連立微分方程式 (6.19), (6.20) の解を求めよう。初期条件は $\alpha_1(0) = 1, \alpha_2(0) = 0$ である。 $\alpha_1(t), \alpha_2(t)$ のラプラス変換を $A_1(s), A_2(s)$ とすると、それらに対する方程式は

$$\begin{pmatrix} s + i\omega_a + \gamma/2 & ig \\ ig & s + i\omega_c + \kappa/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1(s) \\ A_2(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (6.21)$$

であり、

$$\begin{pmatrix} A_1(s) \\ A_2(s) \end{pmatrix} = \frac{1}{(s - \lambda_1)(s - \lambda_2)} \begin{pmatrix} s + i\omega_c + \kappa/2 \\ -ig \end{pmatrix} \quad (6.22)$$

が得られる。ただし λ_1, λ_2 は二次方程式

$$(s + i\omega_a + \gamma/2)(s + i\omega_c + \kappa/2) + g^2 = 0 \quad (6.23)$$

の二つの解である。逆変換は、 $s = \lambda_1, \lambda_2$ における関数 $A_j(s)e^{ts}$ の留数の和として求められ、

$$\alpha_1(t) = \frac{\lambda_1 + i\omega_c + \kappa/2}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{\lambda_1 t} + \frac{\lambda_2 + i\omega_c + \kappa/2}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{\lambda_2 t}, \quad (6.24)$$

$$\alpha_2(t) = \frac{ig}{\lambda_2 - \lambda_1} (e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t}) \quad (6.25)$$

が得られる。

上述の解は、系に散逸の無い $\kappa = \gamma = 0$ の場合には、3.2 節で議論した真空 Rabi 振動に帰着する。実際に、方程式 (6.23) の解は、Jaynes-Cummings モデルの 1 励起固有状態のエネルギー $\varepsilon_{1,\pm}$ [式 (3.6)] を用いて、 $s = -i\varepsilon_{1,\pm}$ であることを確認できる。

6.2.3 弱結合と強結合

本節では、原子と共振器が共鳴している $\omega_a = \omega_c$ の場合に、励起原子がどのように崩壊するか見てみよう。原子周波数 ω_a での回転座標にうつると、 s を決める方程式 (6.23) は

$$(s + \gamma/2)(s + \kappa/2) + g^2 = 0 \quad (6.26)$$

となる。

g が小さい場合には、二次方程式 (6.26) は二つの負の実数解を持つ。このとき、図 6.1(a) に示すように、励起原子は単調に崩壊する。これは摩擦のある調和振動子の過減衰に相当する。一般に、結合 g が緩和定数 ($\kappa_e, \kappa_i, \gamma, \gamma_p$) よりも小さいとき、この共振器 QED 系は弱結合領域 (weak-coupling regime) にあるという。

g が大きい場合には、二次方程式 (6.26) は複素共役の関係にある二つの複素数解を持つ。このとき、図 6.1(b) に示すように、励起原子は共振器と励起を交換しながら、振動しつつ崩壊する。これは摩擦のある調和振動子の減衰振動に相当する。一般に、結合 g が緩和定数 ($\kappa_e, \kappa_i, \gamma, \gamma_p$) よりも大きいとき、この共振器 QED 系は強結合領域 (strong-coupling regime) にあるという。

6.2.4 マスター方程式による方法

ここで、同じ問題をマスター方程式を用いて解析してみよう。式 (4.26)において $\hat{O} = \hat{\sigma}, \hat{a}$ とおけば、下記の連立微分方程式が得られる。

$$\frac{d}{dt}\langle\hat{\sigma}\rangle = (-i\omega_a - \gamma/2)\langle\hat{\sigma}\rangle - ig\langle\hat{a}\rangle + 2ig\langle\hat{\sigma}^\dagger\hat{\sigma}\hat{a}\rangle, \quad (6.27)$$

$$\frac{d}{dt}\langle\hat{a}\rangle = (-i\omega_c - \kappa/2)\langle\hat{a}\rangle - ig\langle\hat{\sigma}\rangle. \quad (6.28)$$

一見すると、これらの式は式 (6.19), (6.20) と同じ形をしている。しかし、総励起数が確定している式 (6.9) の初期状態のもとでは、 $\langle\hat{\sigma}(t)\rangle$ や $\langle\hat{a}(t)\rangle$ など励

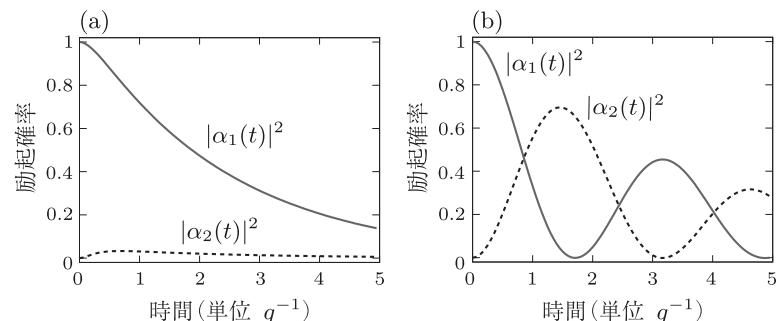


図 6.1 原子励起確率 $|\alpha_1(t)|^2$ および共振器の 1 光子確率 $|\alpha_2(t)|^2$ の時間変化。

(a) 弱結合領域 ($g/\kappa = 0.1$), (b) 強結合領域 ($g/\kappa = 2$)。どちらの図でも、原子の緩和は無いとしている ($\gamma = \gamma_p = 0$)。

起数を保存しない演算子の期待値は常にゼロとなり、面白い解は得られない。

マスター方程式を使ってゼロでない量を得るには、励起数を保存する $\langle \hat{\sigma}^\dagger \hat{\sigma} \rangle$ や $\langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle$ を計算する必要がある。それらに対する連立微分方程式は次のとおりである。

$$\frac{d}{dt} \langle \hat{\sigma}^\dagger \hat{\sigma} \rangle = -\gamma \langle \hat{\sigma}^\dagger \hat{\sigma} \rangle - ig(\langle \hat{\sigma}^\dagger \hat{a} \rangle - \text{c.c.}), \quad (6.29)$$

$$\frac{d}{dt} \langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle = -\kappa \langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle + ig(\langle \hat{\sigma}^\dagger \hat{a} \rangle - \text{c.c.}), \quad (6.30)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle \hat{\sigma}^\dagger \hat{a} \rangle &= \left[i(\omega_a - \omega_c) - \frac{\kappa + \gamma}{2} \right] \langle \hat{\sigma}^\dagger \hat{a} \rangle - ig \langle \hat{\sigma}^\dagger \hat{\sigma} \rangle + ig \langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle \\ &\quad - 2ig \langle \hat{\sigma}^\dagger \hat{a}^\dagger \hat{\sigma} \hat{a} \rangle. \end{aligned} \quad (6.31)$$

今の状況では、原子-共振器系に含まれる励起数は高々 1 個であるので、式 (6.31) に現れる $\langle \hat{\sigma}^\dagger \hat{a}^\dagger \hat{\sigma} \hat{a} \rangle$ は常にゼロであり、方程式は上記の 3 変数で閉じる。初期条件は、 $\langle \hat{\sigma}^\dagger \hat{\sigma} \rangle = 1$, $\langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle = 0$, $\langle \hat{\sigma}^\dagger \hat{a} \rangle = 0$ である。

このように、密度行列に基づく方程式 (6.29)–(6.31) は、状態ベクトルに基づく方程式 (6.19)–(6.20) より煩雑になる。6.2.2 節の結果を用いると、

$$\langle \hat{\sigma}^\dagger \hat{\sigma} \rangle = |\alpha_1(t)|^2, \quad (6.32)$$

$$\langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle = |\alpha_2(t)|^2, \quad (6.33)$$

$$\langle \hat{\sigma}^\dagger \hat{a} \rangle = \alpha_1^*(t)\alpha_2(t) \quad (6.34)$$

となっていることを確認できる。

6.3 Purcell 効果

図 6.1(a) に見られるように、 $\kappa > g$ の弱結合領域では原子は単調に崩壊する。本節では、共振器の外部ロスが非常に大きい $\kappa \gg g$ の状況下での原子の崩壊を詳しく見てみよう。

6.3.1 Purcell 効果の導出 (1)：定常状態近似

本節でも、原子と共振器が共鳴している場合 ($\omega_a = \omega_c$) を考察する。 $\alpha_1(t) = \bar{\alpha}_1(t)e^{-i\omega_a t}$, $\alpha_2(t) = \bar{\alpha}_2(t)e^{-i\omega_c t}$ によって、原子周波数での回転座標に移行すると、式 (6.19), (6.20) は次のように書ける。

$$\frac{d}{dt} \bar{\alpha}_1 = -\frac{\gamma}{2} \bar{\alpha}_1 - ig \bar{\alpha}_2, \quad (6.35)$$

$$\frac{d}{dt} \bar{\alpha}_2 = -\frac{\kappa}{2} \bar{\alpha}_2 - ig \bar{\alpha}_1. \quad (6.36)$$

ここで、式 (6.36) を形式的に解くと

$$\bar{\alpha}_2(t) = \bar{\alpha}_2(0)e^{-\kappa t/2} - ig \int_0^t d\tau \bar{\alpha}_1(t-\tau) e^{-\kappa\tau/2} \quad (6.37)$$

が得られる。初期条件の影響を表す右辺第一項は、初期の短い時間 ($t \lesssim \kappa^{-1}$) 以外では無視できる。また、 $\bar{\alpha}_1(t)$ の時間変化が遅く、 κ^{-1} の時間内で一定と見なせるときには

$$\bar{\alpha}_2(t) \approx -ig\bar{\alpha}_1(t) \int_0^t d\tau e^{-\kappa\tau/2} \approx -\frac{2ig}{\kappa}\bar{\alpha}_1(t) \quad (6.38)$$

と近似することができる。これは、式 (6.36)において $d\bar{\alpha}_2/dt \approx 0$ としたことと等価である。このように、緩和の速い変数の時間微分をゼロとおく近似は定常状態近似 (steady-state approximation) と呼ばれる。 $\bar{\alpha}_1(t)$ は大きさ 1 程度の量であるから、 $\bar{\alpha}_2(t)$ は g/κ 程度の微小量である。このことは図 6.1(a) でも確認できる。式 (6.38) を式 (6.35) に代入して

$$\frac{d}{dt}\bar{\alpha}_1 = -\left(\frac{\gamma}{2} + \frac{2g^2}{\kappa}\right)\bar{\alpha}_1 \quad (6.39)$$

が得られる。式 (6.39) より、 $\kappa \gg g$ のときには、原子→共振器→導波路の崩壊が指數関数的になることがわかる。原子の全自然放出レートを Γ 、自由空間への放出レートを Γ_1 、導波路への放出レートを Γ_2 とすると、

$$\Gamma = \underbrace{\Gamma_1}_{\Gamma_1} + \underbrace{\frac{4g^2}{\kappa}}_{\Gamma_2} \quad (6.40)$$

である。このように、原子の自然放出レートが共振器により増大する効果を Purcell 効果 (Purcell effect) と呼ぶ^[30]。

6.3.2 Purcell 因子・cooperativity

原子の共振器中での自然放出レートと本来（自由空間中）の自然放出レートとの比は Purcell 因子 (Purcell factor) と呼ばれており、

$$F = \frac{\Gamma}{\Gamma_1} = 1 + \frac{4g^2}{\kappa\gamma} \quad (6.41)$$

で与えられる。また、二つの自然放出レートの比は協同係数 (cooperativity) と呼ばれています

$$C = \frac{\Gamma_2}{\Gamma_1} = \frac{4g^2}{\kappa\gamma} \quad (6.42)$$

で与えられる。^{*3)} $F = 1 + C$ の関係がある。また、原子が導波路に光子を放出する確率は β 値 (β factor) と呼ばれ、

$$\beta = \frac{\Gamma_2}{\Gamma} = \frac{1}{1 + C^{-1}} \quad (6.43)$$

で与えられる。

^{*3)} κ や γ の定義の仕方により、異なる因子が掛った値を協同係数として定義する場合もある。

共振器のモード体積を V とすると、2.4.1 節で議論したように、パラメータ g は $g \sim V^{-1/2}$ の形で V に依存する。また、式 (6.8) より、パラメータ κ は $\kappa \sim Q^{-1}$ の形で共振器の Q 値に依存する。これらのことから、Purcell 因子は Q/V に比例して増大する。

一次元原子と導波路 QED

$\Gamma_2 \gg \Gamma_1$ のとき、原子から放射される光子はほとんど導波路へと誘導される。このような一次元性の良い光学系は、一次元原子 (one-dimensional atom) あるいは導波路 QED 系 (waveguide QED system) と呼ばれる。このような系が初めて実現されたのは、弱結合領域にある光領域での共振器 QED 系であった^[31]。一方、超伝導回路 QED 系では、人工原子を（共振器を介さず）導波路に直接結合させることで一次元原子系を実現できる^{[32], [33]}。

6.3.3 Purcell 効果の導出 (2) : Fano 対角化

環境を含む全系のハミルトニアンに立ち戻って、Purcell 効果について考察しよう。緩和として原子と共振器の輻射緩和 (κ, γ) のみがある場合の原子–共振器系のハミルトニアンは、次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \hat{H} = & \underbrace{\omega_a \hat{\sigma}^\dagger \hat{\sigma} + \int_{-\infty}^{\infty} dk \left[k \hat{c}_k^\dagger \hat{c}_k + \sqrt{\frac{\gamma}{2\pi}} (\hat{\sigma}^\dagger \hat{c}_k + \hat{c}_k^\dagger \hat{\sigma}) \right]}_{\hat{H}_{\text{an}}} \\ & + \underbrace{\omega_c \hat{a}^\dagger \hat{a} + \int_{-\infty}^{\infty} dk \left[k \hat{b}_k^\dagger \hat{b}_k + \sqrt{\frac{\kappa}{2\pi}} (\hat{a}^\dagger \hat{b}_k + \hat{b}_k^\dagger \hat{a}) \right]}_{\hat{H}_{\text{cw}}} \\ & + \underbrace{g(\hat{\sigma}^\dagger \hat{a} + \hat{a}^\dagger \hat{\sigma})}_{\hat{H}_{\text{int}}}. \end{aligned} \quad (6.44)$$

\hat{H}_{an} は原子 + 非共振器モードを、 \hat{H}_{cw} は共振器 + 導波路モードを、 \hat{H}_{int} は原子–共振器結合を、それぞれ表している。^{*4)}

このハミルトニアンにおいて、Fano 対角化と呼ばれる手法を用いて \hat{H}_{cw} の部分を対角化しよう^[34]。 \hat{H}_{cw} はボーズ演算子の二次形式となっているので、 \hat{a} と \hat{b}_q の線形変換により対角化できる。固有モードの消滅演算子 \hat{B}_k を

$$\hat{B}_k = \eta(k) \hat{a} + \int dq \zeta(k, q) \hat{b}_q \quad (6.45)$$

の形に書き、固有モードとなる条件 $[\hat{B}_k, \hat{H}] = k \hat{B}_k$ と、規格化条件 $[\hat{B}_k, \hat{B}_{k'}^\dagger] = \delta(k - k')$ から係数 $\eta(k)$, $\zeta(k, q)$ を定めると、

*4) 5.1 節での議論に倣い、 H_{an} において次の単純化をしている。(i) 原子と非共振器モードの結合定数は厳密には k に依存する量であるが、定数 $\sqrt{\gamma/2\pi}$ とした。(ii) 光子エネルギーの下限を 0 から $-\infty$ へと広げた。 H_{cw} についても同様である。

$$\eta(k) = \sqrt{\frac{\kappa}{2\pi}} \frac{1}{k - \omega_c + i\kappa/2}, \quad (6.46)$$

$$\zeta(k, q) = \frac{\kappa}{2\pi} \frac{1}{(k - \omega_c + i\kappa/2)(k - q + i0)} + \delta(k - q) \quad (6.47)$$

となる。元の演算子 \hat{a} , \hat{b}_q , \hat{H}_{cw} の \hat{B}_k による表現は

$$\hat{a} = \int dk \eta^*(k) \hat{B}_k, \quad (6.48)$$

$$\hat{b}_q = \int dk \zeta^*(k, q) \hat{B}_k, \quad (6.49)$$

$$\hat{H}_{\text{cw}} = \int dk k \hat{B}_k^\dagger \hat{B}_k \quad (6.50)$$

である。全系のハミルトニアン (6.44) を \hat{B}_k を用いて書き直すと

$$\begin{aligned} \hat{H} = & \omega_a \hat{\sigma}^\dagger \hat{\sigma} + \int_{-\infty}^{\infty} dk \left[k \hat{c}_k^\dagger \hat{c}_k + (\xi_k^{(1)} \hat{\sigma}^\dagger \hat{c}_k + H.c.) \right] \\ & + \int_{-\infty}^{\infty} dk \left[k \hat{B}_k^\dagger \hat{B}_k + (\xi_k^{(2)} \hat{\sigma}^\dagger \hat{B}_k + H.c.) \right] \end{aligned} \quad (6.51)$$

となる。ただし結合定数 $\xi_k^{(1)}$, $\xi_k^{(2)}$ は

$$\xi_k^{(1)} = \sqrt{\frac{\gamma}{2\pi}}, \quad (6.52)$$

$$\xi_k^{(2)} = g \eta^*(k) = \sqrt{\frac{g^2 \kappa}{2\pi}} \frac{1}{k - \omega_c - i\kappa/2} \quad (6.53)$$

で与えられる。こうして、式 (6.44) のハミルトニアンを、原子が 2 種類の光子場 \hat{c}_k , \hat{B}_k に直接結合している形 [式 (6.51)] に書き直すことができた。

相互作用のスペクトル密度 $|\xi_k^{(1)}|^2$, $|\xi_k^{(2)}|^2$ の概形を、周波数 k の関数として図 6.2 に示した。 $|\xi_k^{(1)}|^2$ は非共振器モードとの結合に由来しており、光子エネルギー k に依存しない。^{*5)} 一方、 $|\xi_k^{(2)}|^2$ は共振器由来のスペクトルであり、総

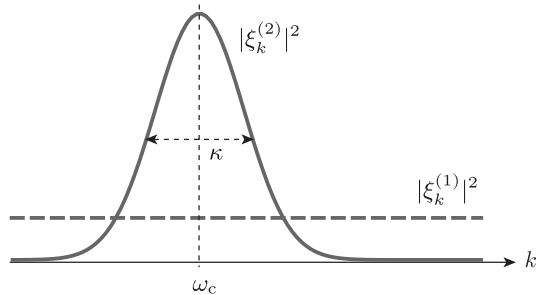


図 6.2 原子と光子場との結合のスペクトル密度。 $|\xi_k^{(1)}|^2$ は非共振器モードに由来し、ほぼ一定値である。 $|\xi_k^{(2)}|^2$ は共振器の作るスペクトルであり、外部ロスのために有限の幅 κ を持つ。

*5) 厳密には、光子の状態密度などのために、 $|\xi_k^{(1)}|^2$ は光子エネルギーに緩やかに依存するが、考えている周波数領域ではほぼ一定値であり、それを $\gamma/2\pi$ とおいでいる。

和則 $\int dk |\xi_k^{(2)}|^2 = g^2$ を満たす, 中心周波数 ω_c , 幅 κ のローレンツ関数である。原子の輻射緩和レートは, フェルミの黄金律を使うと, 次のようにスペクトル密度の $k = \omega_a$ での値により決まる。

$$\begin{aligned}\Gamma &= 2\pi \int dk \left(|\xi_k^{(1)}|^2 + |\xi_k^{(2)}|^2 \right) \delta(k - \omega_a) \\ &= \gamma + \frac{\kappa g^2}{(\omega_a - \omega_c)^2 + \kappa^2/4}.\end{aligned}\quad (6.54)$$

$\omega_a = \omega_c$ の場合には, 式 (6.40) の崩壊レートを確かに再現している。

6.4 位相緩和と量子ゼノ効果

6.4.1 位相緩和のもとでの真空 Rabi 振動

本節では, エネルギー緩和がなく位相緩和のみがある状況において ($\kappa = \gamma = 0$, $\gamma_p > 0$), 真空 Rabi 振動の減衰を考えよう。エネルギー緩和のみの場合は「系+環境」で励起数が保存されているため, 式 (6.11) のように状態ベクトルを簡単に書き下すことができるが, 位相緩和がある場合には事情が異なる。ここでは, 系の期待値に対する方程式 (4.26) または式 (5.37)に基づいて解析をすすめよう。

原子励起確率 $\langle \hat{\sigma}^\dagger \hat{\sigma} \rangle$ や共振器光子数 $\langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle$ に対する運動方程式は次のとおりである。

$$\frac{d}{dt} \langle \hat{\sigma}^\dagger \hat{\sigma} \rangle = -ig(\langle \hat{\sigma}^\dagger \hat{a} \rangle - \text{c.c.}), \quad (6.55)$$

$$\frac{d}{dt} \langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle = ig(\langle \hat{\sigma}^\dagger \hat{a} \rangle - \text{c.c.}), \quad (6.56)$$

$$\frac{d}{dt} \langle \hat{\sigma}^\dagger \hat{a} \rangle = [i(\omega_a - \omega_c) - \gamma_p] \langle \hat{\sigma}^\dagger \hat{a} \rangle - ig \langle \hat{\sigma}^\dagger \hat{\sigma} \rangle + ig \langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle. \quad (6.57)$$

ただし, 式 (6.57) の導出には $\langle \hat{\sigma}^\dagger \hat{a}^\dagger \hat{\sigma} \hat{a} \rangle = 0$ を使った。初期状態ベクトルは式 (6.9) で与えられ, 初期条件は $\langle \hat{\sigma}^\dagger \hat{\sigma} \rangle = 1$, $\langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle = \langle \hat{\sigma}^\dagger \hat{a} \rangle = 0$ である。式 (6.55), (6.56) より直ちに

$$\langle \hat{\sigma}^\dagger \hat{\sigma} \rangle + \langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle = 1 \quad (6.58)$$

がわかる。つまり励起は「原子+共振器」系から外部に散逸しない。これは, κ や γ があるときには系が基底状態 $|g, 0\rangle$ へと緩和するのと対照的である。

以下では, 共鳴の場合 ($\omega_a = \omega_c$) を考えよう。このとき, $\langle \hat{\sigma}^\dagger \hat{a} \rangle$ は純虚数となり, 式 (6.55) は $\langle \hat{\sigma}^\dagger \hat{a} \rangle = i/2g \times \frac{d}{dt} \langle \hat{\sigma}^\dagger \hat{\sigma} \rangle$ と書ける。これを式 (6.57) に代入して

$$\frac{d^2}{dt^2} \langle \hat{\sigma}^\dagger \hat{\sigma} \rangle + \gamma_p \frac{d}{dt} \langle \hat{\sigma}^\dagger \hat{\sigma} \rangle + 4g^2 \langle \hat{\sigma}^\dagger \hat{\sigma} \rangle = 2g^2 \quad (6.59)$$

が得られる。これは, 一定の外力を受けている, 摩擦のある調和振動子の運動

方程式と同じである。この方程式の解は、ラプラス変換（付録 D 参照）を用いて、次のように求められる。

$$\langle \hat{\sigma}^\dagger \hat{\sigma} \rangle = \frac{1}{2} + \frac{2g^2}{\lambda_1(\lambda_2 - \lambda_1)} e^{\lambda_1 t} + \frac{2g^2}{\lambda_2(\lambda_1 - \lambda_2)} e^{\lambda_2 t}. \quad (6.60)$$

ただし $\lambda_{1,2}$ は次の二次方程式の二つの解である。

$$s^2 + \gamma_p s + 4g^2 = 0. \quad (6.61)$$

$\langle \hat{\sigma}^\dagger \hat{\sigma} \rangle$ や $\langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle$ の時間発展の様子を図 6.3 に示した。 $4g > \gamma_p$ の強結合領域では $\lambda_{1,2}$ に虚部が生じ、原子励起確率 $\langle \hat{\sigma}^\dagger \hat{\sigma} \rangle$ は振動しつつ減衰して $1/2$ に漸近する。一方、 $4g < \gamma_p$ の弱結合領域では $\langle \hat{\sigma}^\dagger \hat{\sigma} \rangle$ は単調に減衰して $1/2$ に漸近する。図 6.1 では、共振器を介した導波路へのエネルギー散逸のために、原子および共振器中の励起数 $\langle \hat{\sigma}^\dagger \hat{\sigma} \rangle$, $\langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle$ が共に 0 に漸近するのに対し、図 6.3 ではエネルギー散逸がないために $\langle \hat{\sigma}^\dagger \hat{\sigma} \rangle$, $\langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle$ は共に $1/2$ に漸近する。 $t \rightarrow \infty$ における原子-共振器系の密度行列は、最大混合状態

$$\rho(\infty) = \frac{1}{2}|g, 1\rangle\langle g, 1| + \frac{1}{2}|e, 0\rangle\langle e, 0| \quad (6.62)$$

である。

位相緩和の弱い $\gamma_p \ll g$ の極限では、式 (6.61) の二つの解は近似的に $\lambda_{1,2} \approx -\gamma_p/2 \pm 2ig$ で与えられ、式 (6.60) は

$$\langle \hat{\sigma}^\dagger \hat{\sigma} \rangle = \frac{1 + e^{-\gamma_p t/2} \cos(2gt)}{2} \quad (6.63)$$

と書くことができる。つまり真空 Rabi 振動がレート $\gamma_p/2$ で減衰する。

一方、位相緩和の強い $\gamma_p \gg g$ の極限では、式 (6.61) の二つの解は近似的に $\lambda_1 \approx -\gamma_p$, $\lambda_2 \approx -\frac{4g^2}{\gamma_p}$ で与えられる。素早く減衰する $e^{\lambda_1 t}$ の項を無視すると、式 (6.60) は

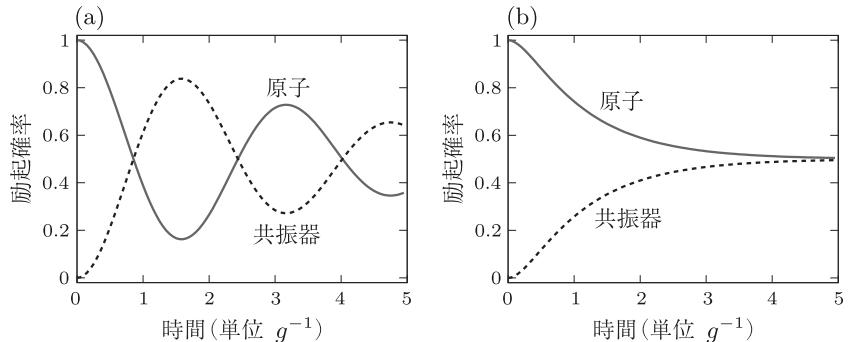


図 6.3 原子励起確率 $\langle \hat{\sigma}^\dagger \hat{\sigma} \rangle$, 共振器光子数 $\langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle$ の時間変化。(a) 強結合領域 ($g/\gamma_p = 2$), (b) 弱結合領域 ($g/\gamma_p = 0.2$)。原子や共振器からのエネルギー緩和が無い場合 ($\gamma = \kappa = 0$)。

$$\langle \hat{\sigma}^\dagger \hat{\sigma} \rangle = \frac{1 + e^{-(4g^2/\gamma_p)t}}{2} \quad (6.64)$$

と書くことができる。速い位相緩和の極限 $\gamma_p \rightarrow \infty$ では $\langle \hat{\sigma}^\dagger \hat{\sigma} \rangle \rightarrow 1$ となり、原子は励起状態に凍結される。この現象は、次節で見るよう、原子に繰り返し測定を行った場合と等価であり、量子ゼノ効果 (quantum Zeno effect) (付録 E 参照) と解釈することができる。

6.4.2 繰り返し測定のもとでの真空 Rabi 振動

散逸の無い原子 - 共振器系は、両者間で永久に励起を交換し続ける（真空 Rabi 振動）。以下では、原子と共振器は共鳴しているものとし、原子が基底状態にあるか励起状態にあるかの測定を、時間 τ_i 毎に繰り返して行う場合の時間発展を考えよう。時刻 $t_n (= n\tau_i)$ において原子が励起状態にある確率を P_n としよう。原子が基底状態にある確率は当然 $1 - P_n$ である。散逸のない真空 Rabi 振動の議論 (3.2 節) を思い出すと、励起状態にある原子が時間 τ_i 後にも励起状態にある確率は $\cos^2 g\tau_i$ 、基底状態にある原子が時間 τ_i 後に励起されている確率は $\sin^2 g\tau_i$ である。よって

$$P_{n+1} = \cos^2 g\tau_i \times P_n + \sin^2 g\tau_i \times (1 - P_n) \quad (6.65)$$

という漸化式が成り立つ。初期条件 $P_0 = 1$ と併せてこの漸化式を解くと、

$$P_n = \frac{1 + \cos^n 2g\tau_i}{2} \quad (6.66)$$

が得られる。時刻 t を用いて表すと

$$P(t) = \frac{1 + (\cos 2g\tau_i)^{t/\tau_i}}{2} \approx \frac{1 + e^{-2g^2\tau_i t}}{2} \quad (6.67)$$

と書ける。ただし測定時間間隔 τ_i が振動周期 ($\sim g^{-1}$) よりも十分短いとして $\cos 2g\tau_i \approx 1 - 2g^2\tau_i^2 \approx e^{-2g^2\tau_i^2}$ と近似した。

式 (6.64) と (6.67) を比較すると

$$\tau_i = \frac{2}{\gamma_p} \quad (6.68)$$

とすれば、両者が一致することを確認できる。このように、運動に特徴的な時間スケール (今の例では g^{-1}) と比較して位相緩和時間が十分短い場合には、繰り返し測定と位相緩和とは系に同等の効果をもたらす。

第 7 章

古典光に対する応答

本章では、共振器や原子の古典光（コヒーレント光）に対する応答を議論する。共振器の光学応答は入射光強度に依存しない（線形応答）のに対して、原子には 2 個以上の光子を同時に吸収できない飽和効果があるため、光学応答が入射光強度に依存する（非線形応答）。また、光子を共振器に入射する際には、出力においても光子のエネルギーは保存され（弾性散乱）出力光も全てコヒーレント光であるが、原子に入射する際には、光子どうしの相互作用によりエネルギーは必ずしも保存せず（非弾性散乱）出力においてインコヒーレントな成分が混ざる。

7.1 共振器の定常応答

7.1.1 定式化

本節では、片側共振器（片方の鏡のみに透過のある Fabry-Perot 共振器、図 7.1）に古典的な連続光を入射するときの、定常的な光学応答を考察する。共振器の共鳴周波数を ω_c 、外部・内部・全ロスレートを κ_e 、 κ_i 、 $\kappa (= \kappa_e + \kappa_i)$ 、共振器モードの消滅演算子を \hat{a} 、導波路モードの入出力演算子を \hat{b}_{in} 、 \hat{b}_{out} とする。また共振器の内部ロスも仮想的な導波路との結合によりモデル化し、入出

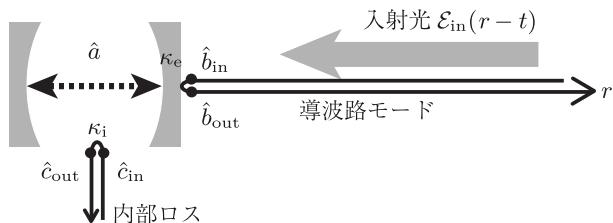


図 7.1 片側共振器の光学応答。導波路モード（入射ポート）からコヒーレントな連続光 $\mathcal{E}_{in}(r - t)$ を入射する。

力演算子を \hat{c}_{in} , \hat{c}_{out} としよう。5.3 節の議論にしたがって、次の二式を議論の出発点とする。

$$\frac{d}{dt}\hat{a} = (-i\omega_c - \kappa/2)a - i\sqrt{\kappa_e} \hat{b}_{\text{in}}(t) - i\sqrt{\kappa_i} \hat{c}_{\text{in}}(t), \quad (7.1)$$

$$\hat{b}_{\text{out}}(t) = \hat{b}_{\text{in}}(t) - i\sqrt{\kappa_e} \hat{a}(t). \quad (7.2)$$

初期時刻 $t = 0$ において共振器は真空状態であり、導波路から振幅 E_{in} 、周波数 ω_{in} の単色光

$$\mathcal{E}_{\text{in}}(r-t) = E_{\text{in}} e^{i\omega_{\text{in}}(r-t)} \quad (7.3)$$

が入射する場合を考える。 $t = 0$ における入射波の空間形状は $\mathcal{E}_{\text{in}}(r)$ であるため、初期状態ベクトルは次式で与えられる。^{*1)}

$$|\psi(0)\rangle = \mathcal{N} \exp\left(\int_{-\infty}^0 dr \mathcal{E}_{\text{in}}(r) \tilde{b}_r^\dagger(0)\right) |v\rangle. \quad (7.4)$$

ただし、 $|v\rangle$ は共振器や導波路に光子が無い状態であり、 $\mathcal{N} = \exp(-\int dr |\mathcal{E}_{\text{in}}(r)|^2/2)$ は規格化定数である。式 (5.22) より $\hat{b}_{\text{in}}(t) = \tilde{b}_{-t}(0)$ であるから、初期状態ベクトル $|\psi(0)\rangle$ は $\hat{b}_{\text{in}}(t)$ の固有状態であり、

$$\hat{b}_{\text{in}}(t)|\psi(0)\rangle = \mathcal{E}_{\text{in}}(-t)|\psi(0)\rangle \quad (7.5)$$

が成り立つ。このように、コヒーレント光が入射する際には、演算子 $\hat{b}_{\text{in}}(t)$ を c 数 $\mathcal{E}_{\text{in}}(-t)$ に厳密に置き換えることができる。

7.1.2 入射波

ハイゼンベルグ描像での演算子 $\hat{O}(t)$ の期待値 $\langle\psi(0)|\hat{O}(t)|\psi(0)\rangle$ を、単に $\langle\hat{O}\rangle$ と表すことにしよう。共振器入射直前 ($r = -0$) での入射波振幅は

$$\langle\hat{b}_{\text{in}}(t)\rangle = \mathcal{E}_{\text{in}}(-t) \quad (7.6)$$

で与えられる。また、そこでの流束は

$$\langle\hat{b}_{\text{in}}^\dagger(t)\hat{b}_{\text{in}}(t)\rangle = |\langle\hat{b}_{\text{in}}(t)\rangle|^2 = |E_{\text{in}}|^2 \quad (7.7)$$

で与えられる。導出には式 (7.5) を用いた。流束は (時間)⁻¹ の次元を持つ実の量であり、単位時間あたりに共振器に入射する光子数を表している。このように (流束) = |振幅|² と表されるのは古典光 (コヒーレント状態) に特有の性質である。

7.1.3 定常解

式 (7.1) より、共振器モードの振幅 $\langle\hat{a}\rangle$ に対する運動方程式は

*1) $t = 0$ において出射ポートでは振幅ゼロとして r 積分の上限を 0としたが、 $+\infty$ でも以下の議論に影響しない。

$$\frac{d}{dt}\langle \hat{a} \rangle = (-i\omega_c - \kappa/2)\langle \hat{a} \rangle - i\sqrt{\kappa_e}\mathcal{E}_{in}(-t) \quad (7.8)$$

で与えられる。式(7.8)の定常解は $\langle \hat{a} \rangle \sim e^{-i\omega_{in}t}$ の時間依存性を持つ。よって $d/dt \rightarrow -i\omega_{in}$ とおくことにより、定常解

$$\langle \hat{a} \rangle = \frac{-i\sqrt{\kappa_e}}{\kappa/2 - i\Delta\omega}\mathcal{E}_{in}(-t) \quad (7.9)$$

が得られる。ただし $\Delta\omega = \omega_{in} - \omega_c$ は入射光周波数の共振器からの離調を表す。振幅 $\langle \hat{a} \rangle$ は入射波 $\mathcal{E}_{in}(-t)$ に比例していることがわかる。このような光学応答を線形応答 (linear response) と呼ぶ。共振器は非線形性の無い光学素子であるので、応答は常に線形である。

次に、共振器内光子数 $\langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle$ を求めよう。式(7.1)より、光子数演算子 $\hat{a}^\dagger \hat{a}$ に対する運動方程式は

$$\frac{d}{dt}\hat{a}^\dagger \hat{a} = -\kappa \hat{a}^\dagger \hat{a} + i\sqrt{\kappa_e} \hat{b}_{in}^\dagger(t) \hat{a} - i\sqrt{\kappa_e} \hat{a}^\dagger \hat{b}_{in}(t) \quad (7.10)$$

であり ($\hat{c}_{in}(t)$ の項は略した)，期待値をとって

$$\frac{d}{dt}\langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle = -\kappa \langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle + i\sqrt{\kappa_e} [\mathcal{E}_{in}^*(-t)\langle \hat{a} \rangle - \mathcal{E}_{in}(-t)\langle \hat{a} \rangle^*] \quad (7.11)$$

を得る。定常状態では $\langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle$ は時間依存しないので $d/dt \rightarrow 0$ とおくと，

$$\langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle = \frac{\kappa_e}{|\kappa/2 - i\Delta\omega|^2} |\mathcal{E}_{in}(-t)|^2 \quad (7.12)$$

が得られる。この式を(7.9)と比較することにより，

$$\langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle = \langle \hat{a} \rangle^* \langle \hat{a} \rangle \quad (7.13)$$

が確認できる。これは古典光（コヒーレント状態）に固有の性質であり、一般には $\langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle \geq \langle \hat{a} \rangle^* \langle \hat{a} \rangle$ である。等号が成り立たない場合の例として、例えば光子数状態 $|n\rangle$ に対しては $\langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle = n$, $\langle \hat{a} \rangle = 0$ である。

7.1.4 反射波

共振器出射直後 ($r = +0$) における反射波振幅は $\langle \hat{b}_{out}(t) \rangle$ により評価され，式(7.2)などから，

$$\langle \hat{b}_{out}(t) \rangle = \frac{(\kappa_i - \kappa_e)/2 - i\Delta\omega}{\kappa/2 - i\Delta\omega} \times \mathcal{E}_{in}(-t) \quad (7.14)$$

で与えられる。また反射波の流束は $\langle b_{out}^\dagger(t) b_{out}(t) \rangle$ であり，

$$\langle b_{out}^\dagger(t) b_{out}(t) \rangle = |\langle \hat{b}_{out}(t) \rangle|^2 \quad (7.15)$$

であることを確認できる。式(7.15)は、入射光と同様に、反射光もコヒーレント状態にあることを意味している。

反射係数は入射波と反射波の振幅比として

$$R = \frac{\langle \hat{b}_{\text{out}}(t) \rangle}{\langle \hat{b}_{\text{in}}(t) \rangle} = \frac{(\kappa_i - \kappa_e)/2 - i\Delta\omega}{\kappa/2 - i\Delta\omega} \quad (7.16)$$

で与えられる。反射係数 R は入射周波数に依存する複素量であり、 $|R| \leq 1$ の領域にある。また、共振器は常に線形応答を示すため、反射係数 R は入射強度 $|E_{\text{in}}|^2$ に依存しない。図 7.2 に、反射係数の離調 $\Delta\omega$ 依存性を示した。位相シフトの様子は、外部ロス κ_e と内部ロス κ_i の比によって定性的に異なる。 $\kappa_e > \kappa_i$ の状況は過結合 (over coupling) と呼ばれており、このときは共鳴入射に対して符号反転 (π 位相シフト) がおこる。特に共振器に内部ロスの無い $\kappa_i = 0$ の場合には、振幅の大きさを保ったまま ($|R| = 1$) 位相のみがシフトする。逆に $\kappa_e < \kappa_i$ の状況は不足結合 (under coupling) と呼ばれており、位相シフトは $\pm\pi$ に達しない。両者の境目である $\kappa_e = \kappa_i$ の場合を臨界結合 (critical coupling) と呼ぶ。この場合には、共鳴入射に対して反射波が完全に消失し、入射光のエネルギーは全て内部ロスへと散逸する。これは電気回路でのインピーダンス整合と同じ現象である。

7.1.5 両側共振器

本節では、両方の鏡に透過がある両側共振器の光学応答について考察する。図 7.3 のように、共振器は左右両側に広がる半無限の導波路モードと相互作用する。共振器モードの右 (左) 側導波路への崩壊レートを κ_1 (κ_2)、右 (左) 側導波路の入出力演算子を \hat{b}_{in} , \hat{b}_{out} (\hat{c}_{in} , \hat{c}_{out}) とする。また、簡単のため内部ロスは無いものとし、共振器の全崩壊レートを $\kappa = \kappa_1 + \kappa_2$ とする。

図 7.1 と図 7.3 を比較してわかるように、内部ロスの無い両側共振器と内部ロスのある片側共振器は等価であり、 $\kappa_e \rightarrow \kappa_1$, $\kappa_i \rightarrow \kappa_2$ の置き換えを行えばよい。透過光振幅は $\langle \hat{c}_{\text{out}}(t) \rangle = -i\sqrt{\kappa_2}\langle \hat{a}(t) \rangle$ として求められ、反射および透

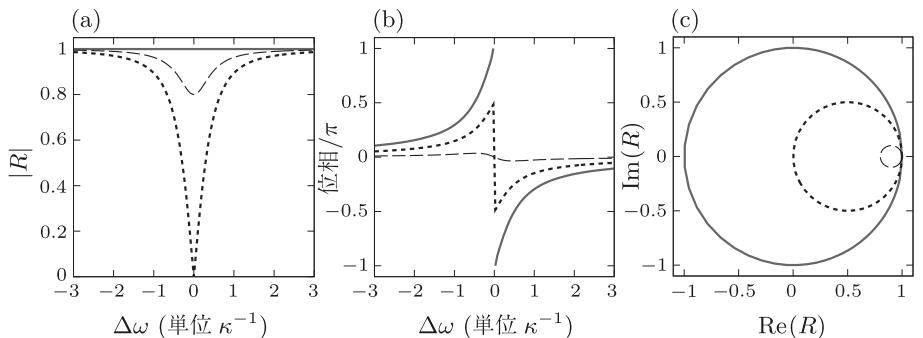


図 7.2 反射係数 R の入射周波数依存性。 (a) 絶対値 $|R|$, (b) 位相 $\arg(R)$, (c) 複素平面上での軌跡。 $\kappa_e/\kappa = 1.0$ (過結合, 実線), $\kappa_e/\kappa = 0.5$ (臨界結合, 点線), $\kappa_e/\kappa = 0.1$ (不足結合, 細破線)。

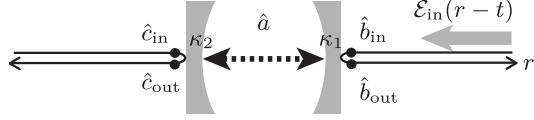


図 7.3 両側共振器の光学応答. 右側の導波路モードからコヒーレントな連続光 $\mathcal{E}_{in}(r-t)$ を入射する.

過係数は

$$R = \frac{\langle b_{out}(t) \rangle}{\langle b_{in}(t) \rangle} = \frac{(-\kappa_1 + \kappa_2)/2 + i\Delta\omega}{(\kappa_1 + \kappa_2)/2 + i\Delta\omega}, \quad (7.17)$$

$$T = \frac{\langle c_{out}(t) \rangle}{\langle b_{in}(t) \rangle} = -\frac{\sqrt{\kappa_1 \kappa_2}}{(\kappa_1 + \kappa_2)/2 + i\Delta\omega} \quad (7.18)$$

で与えられる. 反射係数と透過係数が $|T|^2 + |R|^2 = 1$ を満足していることを確認できる. これはエネルギー保存を表しているばかりでなく, 入射波が全て弾性散乱され, コヒーレント光のまま反射あるいは透過していることを意味している.

周波数フィルタ

ここでは二つの鏡からの散逸レートが等しい場合 ($\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa/2$) に着目しよう. この場合の透過率 $|T|^2$ は, (7.18) より,

$$|T|^2 = \frac{(\kappa/2)^2}{(\kappa/2)^2 + (\Delta\omega)^2} \quad (7.19)$$

の形のローレンツ関数になる. つまり, 両側共振器は, 共振器周波数 ω_c を中心とし幅 κ の領域の光を透過する, 周波数フィルタとして動作する.

特に, 入射光が共振器に共鳴する単色光の場合には, $|T|^2 = 1$ となり, 入射光が共振器を完全に透過する. これは共鳴トンネリング (resonant tunneling) と呼ばれる現象である. 個々の鏡が単独である場合には入射光をほぼ完全に反射するにも関わらず, 二枚の鏡が共振器を構成するように配置すると, 不思議なことに共振器に共鳴する光は二枚の鏡を完全に透過する. この現象の本質は干渉効果であり, 反射ポートにおいて入射光と共振器からの輻射とが逆位相を持つために相殺し, 反射光が完全に消失する.

7.2 原子の定常応答

7.2.1 定式化

前節では, コヒーレント光に対する共振器の応答を議論したが, 共振器の応答は入射強度に依存しない (線形応答). 本節では, 非線形光学応答の現れる場合として, 2 準位原子の応答を議論しよう. 図 7.4 のように, 原子は導波路

モードとそれ以外の散乱光モードに直接結合しているものとする。^{*2)} それぞれのモードへの原子の崩壊レートを γ_e , γ_i で表そう.

次のハイゼンベルグ方程式と入出力関係式を議論の出発点としよう. ただし $\gamma = \gamma_e + \gamma_i$ は原子の全崩壊レートである.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\hat{\sigma} &= (-i\omega_a - \gamma/2)\hat{\sigma} - i\sqrt{\gamma_e}(1 - 2\hat{\sigma}^\dagger\hat{\sigma})\hat{b}_{in}(t) \\ &\quad - i\sqrt{\gamma_i}(1 - 2\hat{\sigma}^\dagger\hat{\sigma})\hat{c}_{in}(t), \end{aligned} \quad (7.20)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\hat{\sigma}^\dagger\hat{\sigma} &= -\gamma\hat{\sigma}^\dagger\hat{\sigma} + i\sqrt{\gamma_e}\left(\hat{b}_{in}^\dagger(t)\hat{\sigma} - \hat{\sigma}^\dagger\hat{b}_{in}(t)\right) \\ &\quad + i\sqrt{\gamma_i}\left(\hat{c}_{in}^\dagger(t)\hat{\sigma} - \hat{\sigma}^\dagger\hat{c}_{in}(t)\right), \end{aligned} \quad (7.21)$$

$$\hat{b}_{out}(t) = \hat{b}_{in}(t) - i\sqrt{\gamma_e}\hat{\sigma}(t), \quad (7.22)$$

$$\hat{c}_{out}(t) = \hat{c}_{in}(t) - i\sqrt{\gamma_i}\hat{\sigma}(t). \quad (7.23)$$

初期時刻 $t = 0$ において原子が基底状態にあり, 導波路から定常的なコヒーレント光 $\mathcal{E}_{in}(r-t) = E_{in}e^{i\omega_{in}(r-t)}$ を入射する場合の光学応答を考える. 初期状態ベクトルは式 (7.4) で与えられ^{*3)}, 期待値 $\langle\hat{\sigma}\rangle$, $\langle\hat{\sigma}^\dagger\hat{\sigma}\rangle$ の運動方程式は次式のようになる.

$$\frac{d}{dt}\langle\hat{\sigma}\rangle = (-i\omega_a - \gamma/2)\langle\hat{\sigma}\rangle - i\sqrt{\gamma_e}(1 - 2\langle\hat{\sigma}^\dagger\hat{\sigma}\rangle)\mathcal{E}_{in}(-t), \quad (7.24)$$

$$\frac{d}{dt}\langle\hat{\sigma}^\dagger\hat{\sigma}\rangle = -\gamma\langle\hat{\sigma}^\dagger\hat{\sigma}\rangle + i\sqrt{\gamma_e}[\mathcal{E}_{in}^*(-t)\langle\hat{\sigma}\rangle - \mathcal{E}_{in}(-t)\langle\hat{\sigma}\rangle^*]. \quad (7.25)$$

これらの式は, 調和振動子の光学応答を表す式 (7.8), (7.11) と良く似ているが, 式 (7.24) の右辺第二項に因子 $(1 - 2\langle\hat{\sigma}^\dagger\hat{\sigma}\rangle)$ が入っている点で異なっている. これは 2 準位原子が同時に二つ以上の光子を吸収できないこと, つまり飽和 (saturation) に由来する項である.

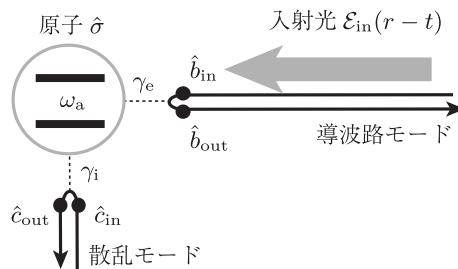


図 7.4 2 準位原子の光学応答. 導波路モードからコヒーレントな連続光 $\mathcal{E}_{in}(r-t)$ を入射する.

*2) 本節の議論は, 緩和 κ の大きな共振器と結合している 2 準位原子にも適用できる.

6.3 節参照.

*3) ここでの $|v\rangle$ は, 原子および導波路に励起の無い状態である.

7.2.2 定常解

時刻 t が緩和の時間スケール γ^{-1} よりも十分に大きいとき、原子は定常状態に落ち着く。定常状態では、時間に依存しない量 $\langle \hat{\sigma} \rangle_s$, $\langle \hat{\sigma}^\dagger \hat{\sigma} \rangle_s$ を用いて、

$$\langle \hat{\sigma}(t) \rangle = \langle \hat{\sigma} \rangle_s e^{-i\omega_{in} t}, \quad (7.26)$$

$$\langle \hat{\sigma}^\dagger(t) \hat{\sigma}(t) \rangle = \langle \hat{\sigma}^\dagger \hat{\sigma} \rangle_s \quad (7.27)$$

と表すことができる。式 (7.24), (7.25) に代入して

$$\langle \hat{\sigma} \rangle_s = \frac{-i\sqrt{\gamma_e}(\gamma/2 + i\Delta\omega)E_{in}}{2\gamma_e|E_{in}|^2 + |\gamma/2 + i\Delta\omega|^2}, \quad (7.28)$$

$$\langle \hat{\sigma}^\dagger \hat{\sigma} \rangle_s = \frac{\gamma_e|E_{in}|^2}{2\gamma_e|E_{in}|^2 + |\gamma/2 + i\Delta\omega|^2} \quad (7.29)$$

が得られる。これらの式から

$$\langle \hat{\sigma}^\dagger(t) \hat{\sigma}(t) \rangle \geq \langle \hat{\sigma}(t) \rangle^* \langle \hat{\sigma}(t) \rangle \quad (7.30)$$

であることを確認できる。これは調和振動子の場合の式 (7.13) と対照的であり、原子の光学応答が非線形であることの表れである。

入射光のパワーが弱く $|E_{in}|^2 \ll \gamma$ を満たしている状況では、光子入射レート $|E_{in}|^2$ が原子の自然放出レート γ よりも十分に小さく、原子がほとんど基底状態にいると考えられる。この条件下では、(7.28), (7.29) の分母における $|E_{in}|^2$ を含む項を無視することができ、

$$\langle \hat{\sigma} \rangle_s \approx \frac{-i\sqrt{\gamma_e}E_{in}}{\gamma/2 - i\Delta\omega}, \quad (7.31)$$

$$\langle \hat{\sigma}^\dagger \hat{\sigma} \rangle_s \approx \frac{\gamma_e|E_{in}|^2}{|\gamma/2 + i\Delta\omega|^2} \quad (7.32)$$

となる。これは調和振動子の応答 (7.9), (7.12) と一致しており、原子が線形応答を示していることがわかる。逆に入射光パワーが強く、 $|E_{in}|^2 \gg \gamma$ となっている場合には、

$$\langle \hat{\sigma} \rangle_s \approx 0, \quad (7.33)$$

$$\langle \hat{\sigma}^\dagger \hat{\sigma} \rangle_s \approx 1/2 \quad (7.34)$$

となる。これは原子が飽和している状況を表しており、原子の密度行列は最大混合状態 $\hat{\rho} = (|g\rangle\langle g| + |e\rangle\langle e|)/2$ に近づく。このように、2 準位原子を強く励起しても定常状態で反転分布を作ることはできない。図 7.5 に、調和振動子と原子の光学応答を比較した。弱パワー領域では両者の応答は同じだが、強パワー領域では原子の応答に飽和効果が発現する。

7.2.3 弹性・非弾性散乱

導波路モードへの反射光の振幅および流束は、式 (7.5), (7.22) を用いると、

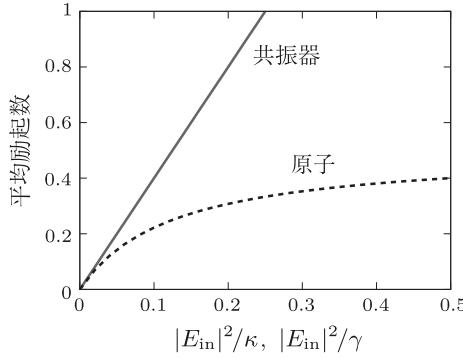


図 7.5 共振器と原子の光学応答の違い. $\langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle$ [式 (7.12)] と $\langle \hat{\sigma}^\dagger \hat{\sigma} \rangle$ [式 (7.29)] を, 入射光パワー $|E_{\text{in}}|^2$ の関数としてプロットした. 導波路以外へのロスは無いとしている ($\kappa_i = 0$, $\gamma_i = 0$).

$$\langle \hat{b}_{\text{out}}(t) \rangle = \mathcal{E}_{\text{in}}(-t) - i\sqrt{\gamma_e} \langle \hat{\sigma} \rangle, \quad (7.35)$$

$$\langle \hat{b}_{\text{out}}^\dagger(t) \hat{b}_{\text{out}}(t) \rangle = |\mathcal{E}_{\text{in}}(-t)|^2 - i\sqrt{\gamma_e} [\mathcal{E}_{\text{in}}^*(-t) \langle \hat{\sigma} \rangle - \text{c.c.}] + \gamma_e \langle \hat{\sigma}^\dagger \hat{\sigma} \rangle \quad (7.36)$$

で与えられる. 一方, 散乱光の振幅および流束は

$$\langle \hat{c}_{\text{out}}(t) \rangle = -i\sqrt{\gamma_i} \langle \hat{\sigma} \rangle, \quad (7.37)$$

$$\langle \hat{c}_{\text{out}}^\dagger(t) \hat{c}_{\text{out}}(t) \rangle = \gamma_i \langle \hat{\sigma}^\dagger \hat{\sigma} \rangle \quad (7.38)$$

で与えられる. 式 (7.28), (7.29) より, 定常状態において $i\sqrt{\gamma_e} \mathcal{E}_{\text{in}}^*(-t) \langle \hat{\sigma} \rangle - i\sqrt{\gamma_e} \mathcal{E}_{\text{in}}(-t) \langle \hat{\sigma} \rangle^* = \gamma \langle \hat{\sigma}^\dagger \hat{\sigma} \rangle$ となることを確認できる. これより

$$\langle \hat{b}_{\text{out}}^\dagger(t) \hat{b}_{\text{out}}(t) \rangle + \langle \hat{c}_{\text{out}}^\dagger(t) \hat{c}_{\text{out}}(t) \rangle = \langle \hat{b}_{\text{in}}^\dagger(t) \hat{b}_{\text{in}}(t) \rangle \quad (7.39)$$

が得られる. これは入出力での光子数保存を表す式である. 一方, 式 (7.35), (7.36) より $|\langle \hat{b}_{\text{out}}(t) \rangle|^2 = \langle \hat{b}_{\text{out}}^\dagger(t) \hat{b}_{\text{out}}(t) \rangle - \gamma_e (\langle \hat{\sigma}^\dagger \hat{\sigma} \rangle - \langle \hat{\sigma} \rangle^* \langle \hat{\sigma} \rangle)$ と表すことができる. 式 (7.30) を使うと

$$|\langle \hat{b}_{\text{out}}(t) \rangle|^2 \leq \langle \hat{b}_{\text{out}}^\dagger(t) \hat{b}_{\text{out}}(t) \rangle \quad (7.40)$$

が導ける. 散乱光に関しても同様に $|\langle \hat{c}_{\text{out}}(t) \rangle|^2 \leq \langle \hat{c}_{\text{out}}^\dagger(t) \hat{c}_{\text{out}}(t) \rangle$ となる. これらの式は, 共振器の場合と対照的に, 反射光や散乱光にインコヒーレントな成分が含まれていることを意味している. その由来は, 原子を介した光子どうしの相互作用であり, $\omega_{\text{in}} + \omega_{\text{in}} \rightarrow (\omega_{\text{in}} + \delta\omega) + (\omega_{\text{in}} - \delta\omega)$ などの過程で, エネルギーの異なった光子が生成される.

弾性散乱確率 P_{el} を次式により定義しよう.

$$P_{\text{el}} = \frac{|\langle \hat{b}_{\text{out}}(t) \rangle|^2 + |\langle \hat{c}_{\text{out}}(t) \rangle|^2}{|\langle \hat{b}_{\text{in}}(t) \rangle|^2} = 1 - \frac{\gamma (\langle \hat{\sigma}^\dagger \hat{\sigma} \rangle - \langle \hat{\sigma} \rangle^* \langle \hat{\sigma} \rangle)}{|E_{\text{in}}|^2}. \quad (7.41)$$

図 7.6 に, 弹性散乱確率 P_{el} を入力パワー $|E_{\text{in}}|^2$ の関数として示した. 低パ

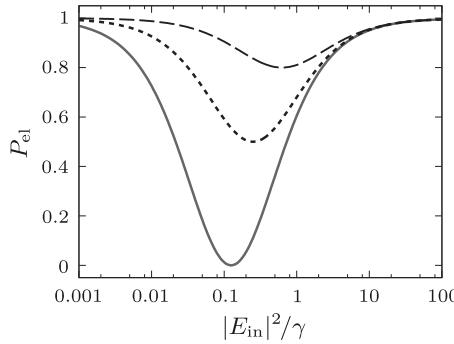


図 7.6 弹性散乱確率 P_{el} の入射強度依存性. $\gamma_i = 0$ の場合. 入射光の離調 $\Delta\omega = \omega_{\text{in}} - \omega_a$ は 0 (実線), 0.5γ (点線), γ (破線).

ワーフィeld $|E_{\text{in}}|^2 \ll \gamma$ では, 原子が線形応答を示すために弾性散乱が支配的である. 一方, 高パワー領域 $|E_{\text{in}}|^2 \gg \gamma$ では, 原子は高々 1 個の光子しか吸収できないので, ほとんどの入射光子は原子と相互作用せずそのまま反射され, やはり弾性散乱が支配的になる. その中間の領域で非弾性散乱が優位となり, 特に条件 $\gamma_i = 0$, $\Delta\omega = 0$, $|E_{\text{in}}|^2 = \gamma/8$ のもとでは完全に非弾性散乱となる. 光子と原子の離調 $\Delta\omega$ が増えると, 入射光子と原子との相互作用が弱まり, 弹性散乱確率は単調に増加する.

7.2.4 散乱光の周波数スペクトル

散乱光の周波数スペクトルを

$$S(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \iint_0^T \frac{dt_1 dt_2}{2\pi T} e^{i\omega(t_2-t_1)} \langle \hat{c}_{\text{out}}^\dagger(t_1) \hat{c}_{\text{out}}(t_2) \rangle \quad (7.42)$$

として定義しよう. ただし $S(\omega)$ は,

$$\int d\omega S(\omega) = \langle \hat{c}_{\text{out}}^\dagger(t) \hat{c}_{\text{out}}(t) \rangle \quad (7.43)$$

のように規格化されている. 定常状態では, 2 点相関関数 $\langle \hat{c}_{\text{out}}^\dagger(t_1) \hat{c}_{\text{out}}(t_2) \rangle$ が時間差 $t_2 - t_1$ のみに依存することを用いると, 式 (7.42) は次式のように書き換えられる.

$$S(\omega) = \text{Re} \int_0^\infty \frac{d\tau}{\pi} e^{i\omega\tau} \langle \hat{c}_{\text{out}}^\dagger(t) \hat{c}_{\text{out}}(t + \tau) \rangle. \quad (7.44)$$

この式の右辺には時刻 t が含まれるが, 定常状態では t に依存しない. 式 (7.23) を用いると, 2 点相関関数は次のように分解できる.

$$\langle \hat{c}_{\text{out}}^\dagger(t) \hat{c}_{\text{out}}(t + \tau) \rangle = \langle \hat{c}_{\text{out}}^\dagger(t) \rangle^* \langle \hat{c}_{\text{out}}(t + \tau) \rangle + \gamma_i \langle \hat{\sigma}^\dagger(t), \hat{\sigma}(t + \tau) \rangle. \quad (7.45)$$

ただし $\langle \hat{A}, \hat{B} \rangle = \langle \hat{A}\hat{B} \rangle - \langle \hat{A} \rangle \langle \hat{B} \rangle$ である.

弹性散乱（コヒーレント）成分

式(7.45)の右辺第一項はスペクトルの弾性散乱成分 $S_c(\omega)$ を与える。

$$S_c(\omega) = \operatorname{Re} \int_0^\infty \frac{d\tau}{\pi} e^{i\omega\tau} \langle \hat{c}_{\text{out}}^\dagger(t) \rangle^* \langle \hat{c}_{\text{out}}(t + \tau) \rangle. \quad (7.46)$$

弾性散乱光は入射波と同じ周波数を持つ定常光であり、 $\langle \hat{c}_{\text{out}}(t) \rangle = E_{\text{out}}^c e^{-i\omega_{\text{in}} t}$ と書ける。よって

$$S_c(\omega) = |E_{\text{out}}^c|^2 \delta(\omega - \omega_{\text{in}}) \quad (7.47)$$

となり、入射周波数 ω_{in} にデルタ関数型のピークを作る。

非弾性散乱（インコヒーレント）成分

式(7.45)の右辺第二項は非弾性散乱成分 $S_i(\omega)$ を与える。

$$S_i(\omega) = \operatorname{Re} \int_0^\infty \frac{d\tau}{\pi} e^{i\omega\tau} \gamma_i \langle \hat{\sigma}^\dagger(t), \hat{\sigma}(t + \tau) \rangle. \quad (7.48)$$

この量を評価するために、原子に関する3種類の2点相関関数 $\alpha_1(t, \tau) = \langle \hat{\sigma}^\dagger(t), \hat{\sigma}(t + \tau) \rangle$, $\alpha_2(t, \tau) = \langle \hat{\sigma}^\dagger(t), \hat{\sigma}^\dagger(t + \tau) \rangle$, $\alpha_3(t, \tau) = \langle \hat{\sigma}^\dagger(t), \hat{\sigma}^\dagger(t + \tau) \hat{\sigma}(t + \tau) \rangle$ を導入しよう。式(7.20), (7.21)において $t \rightarrow t + \tau$ とすると、 α_1 , α_2 , α_3 の変数 τ に対する微分方程式が次のように導かれる。^{*4)}

$$\frac{\partial \alpha_1}{\partial \tau} = (-i\omega_a - \gamma/2)\alpha_1 + 2i\sqrt{\gamma_e} \mathcal{E}_{\text{in}}(t + \tau)\alpha_3, \quad (7.49)$$

$$\frac{\partial \alpha_2}{\partial \tau} = (i\omega_a - \gamma/2)\alpha_2 - 2i\sqrt{\gamma_e} \mathcal{E}_{\text{in}}^*(t + \tau)\alpha_3, \quad (7.50)$$

$$\frac{\partial \alpha_3}{\partial \tau} = i\sqrt{\gamma_e} \mathcal{E}_{\text{in}}^*(t + \tau)\alpha_1 - i\sqrt{\gamma_e} \mathcal{E}_{\text{in}}(t + \tau)\alpha_2 - \gamma\alpha_3. \quad (7.51)$$

次に、演算子の自然な時間発展を分離するために、変数 $\bar{\alpha}_j$ ($j = 1, 2, 3$) を次のように導入する： $\alpha_1(t, \tau) = e^{-i\omega_{\text{in}}\tau}\bar{\alpha}_1(\tau)$, $\alpha_2(t, \tau) = e^{i\omega_{\text{in}}(2t+\tau)}\bar{\alpha}_2(\tau)$, $\alpha_3(t, \tau) = e^{i\omega_{\text{in}}t}\bar{\alpha}_3(\tau)$ 。定常状態では、 $\bar{\alpha}_j$ は時間差 τ のみに依存することに注意して、次式を得る。

$$\frac{d}{d\tau} \bar{\alpha}_1 = c_{11}\bar{\alpha}_1 + c_{13}\bar{\alpha}_3, \quad (7.52)$$

$$\frac{d}{d\tau} \bar{\alpha}_2 = c_{22}\bar{\alpha}_2 + c_{23}\bar{\alpha}_3, \quad (7.53)$$

$$\frac{d}{d\tau} \bar{\alpha}_3 = c_{31}\bar{\alpha}_1 + c_{32}\bar{\alpha}_2 + c_{33}\bar{\alpha}_3. \quad (7.54)$$

ただし、 $c_{11} = c_{22}^* = i(\omega_{\text{in}} - \omega_a) - \gamma/2$, $c_{33} = -\gamma$, $c_{13} = c_{23}^* = 2i\sqrt{\gamma_e} E_{\text{in}}$, $c_{31} = c_{32}^* = i\sqrt{\gamma_e} E_{\text{in}}^*$ である。 $\bar{\alpha}_j(\tau)$ ($j = 1, 2, 3$) のラプラス変換を $A_j(s)$ で表そう（付録D参照）。すなわち、複素変数 s を用いて、 $A_j(s) = \int_0^\infty d\tau e^{-s\tau} \bar{\alpha}_j(\tau)$ である。上記の連立微分方程式をラプラス変換すると

*4) 導出には、 $\tau > 0$ であれば $[\hat{\sigma}(t), \hat{b}_{\text{in}}(t + \tau)] = 0$ となること [式(5.26)] を用いる。

$$(s - c_{11})A_1(s) - c_{13}A_3(s) = \bar{\alpha}_1(0), \quad (7.55)$$

$$(s - c_{22})A_2(s) - c_{23}A_3(s) = \bar{\alpha}_2(0), \quad (7.56)$$

$$-c_{31}A_1(s) - c_{32}A_2(s) + (s - c_{33})A_3(s) = \bar{\alpha}_3(0) \quad (7.57)$$

を得る。また、

$$\bar{\alpha}_1(0) = \langle \hat{\sigma}^\dagger \hat{\sigma} \rangle_s - |\langle \hat{\sigma} \rangle_s|^2, \quad (7.58)$$

$$\bar{\alpha}_2(0) = -(\langle \hat{\sigma} \rangle_s^*)^2, \quad (7.59)$$

$$\bar{\alpha}_3(0) = -\langle \hat{\sigma} \rangle_s^* \langle \hat{\sigma}^\dagger \hat{\sigma} \rangle_s \quad (7.60)$$

である。式(7.55)–(7.57)から、多項式 $A_3(s)$ は

$$A_3(s) = \frac{1}{(s - \lambda_1)(s - \lambda_2)(s - \lambda_3)} \times \left[c_{31}\bar{\alpha}_1(0)(s - c_{22}) + c_{32}\bar{\alpha}_2(0)(s - c_{11}) + \bar{\alpha}_3(0)(s - c_{11})(s - c_{22}) \right] \quad (7.61)$$

で与えられる。ただし λ_j ($j = 1, 2, 3$) は、 s に対する三次方程式

$$(s - c_{11})(s - c_{22})(s - c_{33}) - c_{13}c_{31}(2s - c_{33}) = 0 \quad (7.62)$$

の解である。求めたいスペクトル関数 $S_i(\omega)$ は、式(7.48)より

$$S_i(\omega) = \frac{\gamma_i}{\pi} \operatorname{Re} A_i(i(\omega_{in} - \omega)) \quad (7.63)$$

で与えられる。

以下では、入射光が原子に共鳴しており ($\omega_{in} = \omega_a$) かつ高強度である ($|E_{in}|^2 \gg \gamma$) 場合を考えよう。このとき、方程式(7.62)の解は $\lambda_1 = -\gamma/2$, $\lambda_{2,3} = -3\gamma/4 \pm i\Omega_r$ である。ただし $\Omega_r = 2\sqrt{\gamma_e|E_{in}|}$ は Rabi 振動数 [式(1.229)] である。また、式(7.33), (7.34)より $\bar{\alpha}_1(0) \approx 1/2$, $\bar{\alpha}_2(0) \approx \bar{\alpha}_3(0) \approx 0$ である。これらの事実から

$$A_3(s) \approx \frac{c_{31}}{2(s - \lambda_2)(s - \lambda_3)}, \quad (7.64)$$

$$\begin{aligned} A_1(s) &\approx \frac{1}{2(s - \lambda_1)} - \frac{\gamma_e|E_{in}|^2}{(s - \lambda_1)(s - \lambda_2)(s - \lambda_3)} \\ &\approx \frac{1}{4(s - \lambda_1)} + \frac{1}{8(s - \lambda_2)} + \frac{1}{8(s - \lambda_3)} \end{aligned} \quad (7.65)$$

が得られ、 $S_i(\omega)$ は三つのローレンツ関数の和で表される。

$$\begin{aligned} S_i(\omega) &\approx \frac{\gamma\gamma_i}{32\pi} \left(\frac{4}{|\omega - \omega_a + i(\gamma/2)|^2} + \frac{3}{|\omega - (\omega_a + \Omega_r) + i(3\gamma/4)|^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{3}{|\omega - (\omega_a - \Omega_r) + i(3\gamma/4)|^2} \right). \end{aligned} \quad (7.66)$$

入射光が原子に共鳴している場合のスペクトル $S_i(\omega)$ の数値例を図 7.7 に示した。入射光強度が低い場合には、スペクトルは原子の共鳴周波数 ω_a を中心と

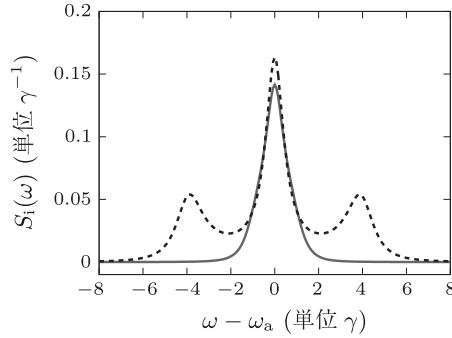


図 7.7 散乱光スペクトルの非弾性散乱成分. 入射光は原子に共鳴しており ($\omega_{\text{in}} = \omega_a$), 強度は $|E_{\text{in}}|^2 = \gamma/4$ (実線), $|E_{\text{in}}|^2 = 4\gamma$ (点線) である.

する単一のピークを持つ. 一方, 高強度の場合には, 式 (7.66) に従ってピークは三つに分裂する. このスペクトル形状は **Mollow 三重項** (Mollow triplet) と呼ばれる^{[35], [36]}.

Mollow 三重項は, 1.6 節で議論した着衣状態間の遷移として理解できる. 図 1.8 に示すように, 着衣状態間には 4 種類の遷移がある. $|+, N + 1/2\rangle \leftrightarrow |+, N - 1/2\rangle$, $|-, N + 1/2\rangle \leftrightarrow |-, N - 1/2\rangle$, は遷移周波数 ω_a であり, Mollow 三重項の中央のバンドに相当する. $|+, N + 1/2\rangle \leftrightarrow |-, N - 1/2\rangle$ は遷移周波数 $\omega_a + \Omega_r$ のサイドバンドに, $|+, N - 1/2\rangle \leftrightarrow |-, N + 1/2\rangle$ は遷移周波数 $\omega_a - \Omega_r$ のサイドバンドに, それぞれ相当する.

7.2.5 アンチバンチング

本節では, 散乱光強度の時間相関について調べよう. 強度相関関数として, 2 点相関関数を 1 点相関関数で規格化した量

$$g^{(2)}(\tau) = \frac{\langle \hat{c}_{\text{out}}^\dagger(t)\hat{c}_{\text{out}}^\dagger(t+\tau)\hat{c}_{\text{out}}(t+\tau)\hat{c}_{\text{out}}(t) \rangle}{\langle \hat{c}_{\text{out}}^\dagger(t)\hat{c}_{\text{out}}(t) \rangle \langle \hat{c}_{\text{out}}^\dagger(t+\tau)\hat{c}_{\text{out}}(t+\tau) \rangle} \quad (7.67)$$

を定義しよう. この量は時刻 t , τ の両方に依存するように見えるが, 定常状態では時間差 τ のみに依存する. 式 (7.23) を用いると

$$g^{(2)}(\tau) = \frac{\langle \hat{\sigma}^\dagger(t)\hat{\sigma}^\dagger(t+\tau)\hat{\sigma}(t+\tau)\hat{\sigma}(t) \rangle}{\langle \hat{\sigma}^\dagger(t)\hat{\sigma}(t) \rangle \langle \hat{\sigma}^\dagger(t+\tau)\hat{\sigma}(t+\tau) \rangle} \quad (7.68)$$

のように原子の演算子で表すことができる. 右辺の分母は, 式 (7.29) を用いて $\langle \hat{\sigma}^\dagger \hat{\sigma} \rangle_s^2$ と表すことができる.

右辺の分子に現れる 2 点相関関数を計算するため, 変数 β_j ($j = 1, 2, 3$) を $\beta_1(t, \tau) = \langle \hat{\sigma}^\dagger(t)\hat{\sigma}(t+\tau)\hat{\sigma}(t) \rangle - \langle \hat{\sigma}^\dagger(t)\hat{\sigma}(t) \rangle \langle \hat{\sigma}(t+\tau) \rangle$, $\beta_2(t, \tau) = \langle \hat{\sigma}^\dagger(t)\hat{\sigma}^\dagger(t+\tau)\hat{\sigma}(t)\hat{\sigma}(t) \rangle - \langle \hat{\sigma}^\dagger(t)\hat{\sigma}(t) \rangle \langle \hat{\sigma}^\dagger(t+\tau)\hat{\sigma}(t) \rangle$, $\beta_3(t, \tau) = \langle \hat{\sigma}^\dagger(t)\hat{\sigma}^\dagger(t+\tau)\hat{\sigma}(t+\tau)\hat{\sigma}(t) \rangle - \langle \hat{\sigma}^\dagger(t)\hat{\sigma}(t) \rangle \langle \hat{\sigma}^\dagger(t+\tau)\hat{\sigma}(t+\tau) \rangle$, により導入する. また, 演算子の自然な時間発展を分離するために, 変数 $\bar{\beta}_j$ ($j = 1, 2, 3$) を $\beta_1(t, \tau) = e^{-i\omega_{\text{in}}(t+\tau)}\bar{\beta}_1(\tau)$,

$\beta_2(t, \tau) = e^{i\omega_{in}(t+\tau)}\bar{\beta}_2(\tau)$, $\beta_3(t, \tau) = \bar{\beta}_3(\tau)$ により導入する。これらの量は、式 (7.49)–(7.54) と全く同じ微分方程式に従うことを確認できる。 $\bar{\beta}_j(\tau)$ ($j = 1, 2, 3$) のラプラス変換を $B_j(s)$ としよう。これらの量に対して、式 (7.55)–(7.57) と同様の式が成り立つ。異なる点は、 $\bar{\beta}_j(\tau)$ の初期値であり、

$$\bar{\beta}_1(0) = -\langle \hat{\sigma}^\dagger \hat{\sigma} \rangle_s \langle \hat{\sigma} \rangle_s^*, \quad (7.69)$$

$$\bar{\beta}_2(0) = -\langle \hat{\sigma}^\dagger \hat{\sigma} \rangle_s \langle \hat{\sigma} \rangle_s^*, \quad (7.70)$$

$$\bar{\beta}_3(0) = -\langle \hat{\sigma}^\dagger \hat{\sigma} \rangle_s^2 \quad (7.71)$$

である。 $B_3(s)$ は次式で与えられる。

$$B_3(s) = \frac{1}{(s - \lambda_1)(s - \lambda_2)(s - \lambda_3)} \times \left[c_{31} \bar{\beta}_1(0)(s - c_{22}) + c_{32} \bar{\beta}_2(0)(s - c_{11}) + \bar{\beta}_3(0)(s - c_{11})(s - c_{22}) \right]. \quad (7.72)$$

ドライブ光が原子と共に鳴している場合 ($\omega_{in} = \omega_a$), $B_3(\tau)$ は更に簡略化できて

$$B_3(s) = -\frac{\langle \hat{\sigma}^\dagger \hat{\sigma} \rangle_s^2 (s + 3\gamma/2)}{(s - \lambda_2)(s - \lambda_3)} \quad (7.73)$$

となる。ここで $\lambda_{2,3}$ は s に対する二次方程式 $s^2 + (3\gamma/2)s + (\gamma^2/2 + 4\gamma_e|E_{in}|^2) = 0$ の解である。原関数 $\bar{\beta}_3(\tau)$ は

$$\bar{\beta}_3(\tau) = \sum_{j=2,3} \text{Res}_{s=\lambda_j} B_3(s) e^{s\tau} \quad (7.74)$$

として与えられる。求める相関関数は、式 (7.68) などを用いて $g^{(2)}(\tau) = \bar{\beta}_3(\tau)/\langle \hat{\sigma}^\dagger \hat{\sigma} \rangle_s^2 + 1$ により与えられる。図 7.8 に $g^{(2)}(\tau)$ の数値例を示した。ラプラス変換の最終値の定理より

$$\bar{\beta}_3(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s B_3(s) = 0 \quad (7.75)$$

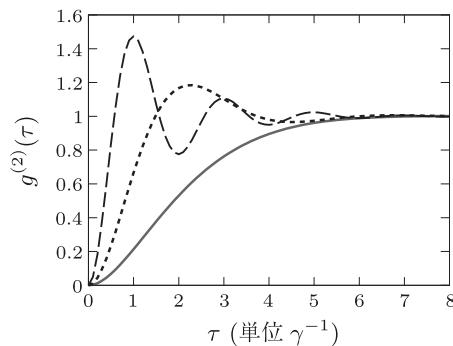


図 7.8 散乱光強度の時間相関関数 $g^{(2)}(\tau)$ 。 $\omega_{in} = \omega_a$, $\gamma_e/\gamma = 0.5$ の場合。入射強度は $|E_{in}|^2/\gamma = 0.1$ (実線), 1 (点線), 5 (破線)。

であるので、式 (7.71) と合わせて $g^{(2)}(0) = 0$, $g^{(2)}(\infty) = 1$ がわかる。

$g^{(2)}(0) > 1$ であることは、2 光子の同時計数の確率が高くなっていることを意味する。これを光子のバンチング (bunching) という。一般に古典的な光では $g^{(2)}(0) \geq 1$ であり、コヒーレント光では常に $g^{(2)}(0) = 1$ である。一方、 $g^{(2)}(0) < 1$ は 2 光子の同時計数の確率が低くなっていることを意味するが、これは光の量子性の発現であり、光子のアンチバンチング (anti-bunching) という^{[37], [38]}。 $g^{(2)}(0)$ は单一光子源の評価に用いられる量である。

第 8 章

光子に対する応答

光子は長いコヒーレンス時間と伝搬性を併せ持つており、量子情報の格好の担体である。本章では、量子ゲートの観点から、単一光子状態や 2 光子状態など、光子数の確定した光子パルスと原子との相互作用について議論する。光子どうしの非線形相互作用を利用する光子–光子ゲートでは、光子波束に量子もつれが生じてしまい、忠実度の良いゲート動作が難しい。単一光子と原子を相互作用させる原子–光子ゲートは、1 光子（線形）応答に基づくため高忠実度での動作が可能である。

8.1 2 準位原子の 1 光子・2 光子応答

8.1.1 定式化

ハイゼンベルグ方程式

本節では、図 8.1 に示すように、半無限導波路の端に 2 準位原子が結合している系において、単一光子あるいは 2 光子パルスを導波路から入射し、出力される光子の状態を議論する。^{*1)} 原子の緩和は導波路との結合（外部ロス）のみであり、輻射崩壊レートを Γ で表す。ハイゼンベルグ方程式

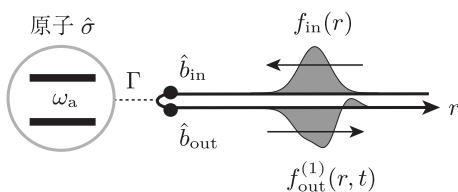


図 8.1 2 準位原子と光子の相互作用。1 光子または 2 光子パルスが、導波路端にある原子と相互作用し反射される。光子波動関数は 1 光子の場合を示した。

*1) 原子が外部ロスの大きな共振器を介して導波路と結合していくてもよい。このときは Purcell 効果より、 $\Gamma = 4g^2/\kappa$ である。

は 7.2 節のものと同一である。本節で必要な式を再掲しておく。

$$\hat{H} = \omega_a \hat{\sigma}^\dagger \hat{\sigma} + \int_{-\infty}^{\infty} dk k \hat{b}_k^\dagger \hat{b}_k + \sqrt{\Gamma} (\hat{\sigma}^\dagger \tilde{b}_0 + \tilde{b}_0^\dagger \hat{\sigma}), \quad (8.1)$$

$$\tilde{b}_r(t) = \tilde{b}_{r-t}(0) - i\sqrt{\Gamma} \Theta_{r \in (0,t)} \hat{\sigma}(t-r), \quad (8.2)$$

$$\frac{d}{dt} \hat{\sigma} = (-i\omega_a - \Gamma/2) \hat{\sigma} - i\sqrt{\Gamma} (1 - 2\hat{\sigma}^\dagger \hat{\sigma}) \tilde{b}_{-t}(0). \quad (8.3)$$

後に見るように、導波路に関しては同時刻で異なる位置座標の演算子が必要となるため、時刻・位置の 2 変数を持つ式 (8.2) の入出力関係式が有用である。

初期状態

図 8.1 に示すように、初期時刻 $t = 0$ において原子は基底状態にあり、単一光子あるいは 2 光子が導波路から入射する状況を考察する。単一光子の波動関数を $f_{\text{in}}(r)$ で表そう。この関数は入射ポート ($r < 0$ の領域) に局在しており、 $\int dr |f_{\text{in}}(r)|^2 = 1$ を満たすように規格化されている。また 2 光子入射として、単一光子のモードに二つ光子が入っている場合を考えよう。これらの 1 光子・2 光子入射を表す状態ベクトルは次式で与えられる。

$$|\psi_1(0)\rangle = \int dr f_{\text{in}}(r) \tilde{b}_r^\dagger |\text{v}\rangle, \quad (8.4)$$

$$|\psi_2(0)\rangle = \iint dr_1 dr_2 \frac{f_{\text{in}}(r_1) f_{\text{in}}(r_2)}{\sqrt{2}} \tilde{b}_{r_1}^\dagger \tilde{b}_{r_2}^\dagger |\text{v}\rangle. \quad (8.5)$$

ただし $|\text{v}\rangle$ は全系（原子 + 導波路）に励起の無い真空状態である。

終状態

終時刻 t を十分大きな時間に選ぼう。すると、原子中の励起は完全に伝播光子として導波路中に放出され、原子は基底状態に戻っている。また散逸のない系を想定しているので、相互作用前後で光子数は保たれている。出力光子の波動関数を、1 光子の場合を $f_{\text{out}}^{(1)}(r, t)$ 、2 光子の場合を $f_{\text{out}}^{(2)}(r_1, r_2, t)$ で表すと、終状態ベクトルは次式のように書ける。

$$|\psi_1(t)\rangle = \int dr f_{\text{out}}^{(1)}(r, t) \tilde{b}_r^\dagger |\text{v}\rangle, \quad (8.6)$$

$$|\psi_2(t)\rangle = \iint dr_1 dr_2 \frac{f_{\text{out}}^{(2)}(r_1, r_2, t)}{\sqrt{2}} \tilde{b}_{r_1}^\dagger \tilde{b}_{r_2}^\dagger |\text{v}\rangle. \quad (8.7)$$

2 光子波動関数に関して、入力では 2 光子が独立であり $f_{\text{in}}(r_1) f_{\text{in}}(r_2)$ のように変数分離されていたが、出力波動関数 $f_{\text{out}}^{(2)}(r_1, r_2, t)$ は一般に変数分離できないことに注意が必要である。^{*2)} これは原子を介した光子間相互作用の結

^{*2)} 共振器など線形光学系に対する応答では、出力でも 2 光子は独立であり、 $f_{\text{out}}^{(2)}(r_1, r_2, t) = f_{\text{out}}^{(1)}(r_1, t) f_{\text{out}}^{(1)}(r_2, t)$ と分離できる。

果、空間的な相関（量子もつれ）が生じることに起因する。^{*3)} ほかにも出力光子の波動関数には次の性質がある。 (i) 波動関数は出力ポート ($r > 0$ の領域) に局在しており, $\int dr |f_{\text{out}}^{(1)}(r, t)|^2 = 1$, $\int dr_1 dr_2 |f_{\text{out}}^{(2)}(r_1, r_2, t)|^2 = 1$ と規格化されている。 (ii) 終状態では出力光子は導波路中を並進運動する: $f_{\text{out}}^{(1)}(r, t) = f_{\text{out}}^{(1)}(r - t)$, $f_{\text{out}}^{(2)}(r_1, r_2, t) = f_{\text{out}}^{(2)}(r_1 - t, r_2 - t)$. (iii) 2 光子波動関数は空間変数に対して対称である: $f_{\text{out}}^{(2)}(r_1, r_2, t) = f_{\text{out}}^{(2)}(r_2, r_1, t)$.

初期状態ベクトルと終状態ベクトルは、全系のハミルトニアン [式 (8.1)] によるユニタリな時間発展で、

$$|\psi_j(t)\rangle = e^{-i\hat{H}t}|\psi_j(0)\rangle \quad (8.8)$$

により結ばれている ($j = 1, 2$).

8.1.2 古典パルスとの対応

式 (8.8) で決まるユニタリな時間発展を解き、出力波動関数 $f_{\text{out}}^{(1)}(r, t)$, $f_{\text{out}}^{(2)}(r_1, r_2, t)$ を求めよう。このような散乱問題を解く標準的な方法は、波数空間におけるグリーン関数法により光子の伝播関数を求める方法である^{[39], [40]}。ところが、一般にこの方法では、複数の光子が入射する場合には多くのファインマン図が現れて計算が煩雑になる。一方、7 章でみたように、古典光（コヒーレント状態）に対する光学系の応答は多数の光子が関わる多体問題であるにも関わらず、光を c 数の場として扱って比較的簡単に解析することができる。ここでは、コヒーレント状態と数状態との対応に注意し、光子（数状態）の散乱問題に、古典光（コヒーレント状態）に対する光学応答理論を援用してみよう^{[41], [42]}。

対応 $\hat{a} \leftrightarrow \int dr f_{\text{in}}(r) \tilde{b}_r^\dagger$ を使うと、振幅 $\alpha f_{\text{in}}(r)$ を持つ古典パルスの状態ベクトルは次のように書ける。

$$|\psi_c(0)\rangle = \mathcal{N} \exp \left(\alpha \int dr f_{\text{in}}(r) \tilde{b}_r^\dagger \right) |\nu\rangle. \quad (8.9)$$

ただし $\mathcal{N} = \exp(-|\alpha|^2/2)$ は規格化定数である。式 (1.59) では、離散的な調和振動子のコヒーレント状態を数状態で展開した。連続モードのコヒーレント状態である式 (8.9) に対しても同様の展開が可能であり、

$$|\psi_c(0)\rangle = \mathcal{N} \left(|\nu\rangle + \alpha |\psi_1(0)\rangle + \frac{\alpha^2}{\sqrt{2}} |\psi_2(0)\rangle + \dots \right) \quad (8.10)$$

が得られる。この式の右辺を見ると、本節で着目する 1 光子状態 $|\psi_1(0)\rangle$ や 2 光子状態 $|\psi_2(0)\rangle$ を含んでいる。終時刻 t での状態ベクトルは、量子力学的時間発展 [式 (8.8)] の線形性より

^{*3)} 実験では、光の振幅や強度などを、空間座標を固定して時間の関数として扱うことが多い。この立場では時間的な相関というべきである。

$$|\psi_c(t)\rangle = \mathcal{N} \left(|v\rangle + \alpha |\psi_1(t)\rangle + \frac{\alpha^2}{\sqrt{2}} |\psi_2(t)\rangle + \dots \right) \quad (8.11)$$

で与えられる。

出力状態 $|\psi_c(t)\rangle$ に対して、次の 1 点・2 点相関関数を考える。

$$\mathcal{G}^{(1)}(r, t) = \langle \psi_c(t) | \tilde{b}_r | \psi_c(t) \rangle, \quad (8.12)$$

$$\mathcal{G}^{(2)}(r_1, r_2, t) = \langle \psi_c(t) | \tilde{b}_{r_1} \tilde{b}_{r_2} | \psi_c(t) \rangle. \quad (8.13)$$

1 点相関関数は出力光の電場振幅に他ならない。式 (8.6), (8.7), (8.11) を使うと次式が得られる。

$$\begin{aligned} \mathcal{G}^{(1)}(r, t) &= e^{-|\alpha|^2} \left[\alpha f_{\text{out}}^{(1)}(r, t) + \alpha |\alpha|^2 \int dr' f_{\text{out}}^{(1)*}(r', t) f_{\text{out}}^{(2)}(r', r, t) + \dots \right] \\ &= \alpha f_{\text{out}}^{(1)}(r, t) - \alpha |\alpha|^2 \left[f_{\text{out}}^{(1)}(r, t) - \int dr' f_{\text{out}}^{(1)*}(r', t) f_{\text{out}}^{(2)}(r', r, t) \right] \\ &\quad + \dots \end{aligned} \quad (8.14)$$

ただし \dots は α に関するより高次の項を表す。式 (8.14) より、1 光子波動関数 $f_{\text{out}}^{(1)}(r, t)$ は次のようにして求めることができる：入力として式 (8.10) のコヒーレント状態パルスを仮定し、出力される電場振幅 $\langle \tilde{b}_r(t) \rangle$ のうち α^1 に比例する成分（線形応答成分）を求めれば、それが 1 光子波動関数 $f_{\text{out}}^{(1)}(r, t)$ になっている。

2 点相関関数についても同様に、

$$\mathcal{G}^{(2)}(r_1, r_2, t) = \alpha^2 f_{\text{out}}^{(2)}(r_1, r_2, t) + \dots \quad (8.15)$$

であることがわかる。よって 2 光子入力の場合にも、入力としてコヒーレント状態パルスを仮定し、出力ポートでの 2 点相関関数 $\langle \tilde{b}_{r_1}(t) \tilde{b}_{r_2}(t) \rangle$ を最低次 (α^2 に比例する成分) で評価すれば、2 光子波動関数 $f_{\text{out}}^{(2)}(r_1, r_2, t)$ を求めることができる。

8.1.3 1 光子応答

1 光子出力波動関数 $f_{\text{out}}^{(1)}(r, t)$ を求めよう。そのために、コヒーレント状態 $|\psi_c(0)\rangle$ の入力に対する出力光の 1 点相関関数をハイゼンベルグ表示で計算しよう。 $\mathcal{G}^{(1)}(r, t) = \langle \psi_c(0) | \tilde{b}_r(t) | \psi_c(0) \rangle$ であるから、式 (8.2), (8.9) より

$$\mathcal{G}^{(1)}(r, t) = \alpha f_{\text{in}}(r - t) - i\sqrt{\Gamma} \langle \hat{\sigma}(t - r) \rangle \quad (8.16)$$

を得る。求めたい波動関数 $f_{\text{out}}^{(1)}(r, t)$ は α^1 に比例する成分であり、

$$f_{\text{out}}^{(1)}(r, t) = f_{\text{in}}(r - t) - i\sqrt{\Gamma} x(t - r) \quad (8.17)$$

で与えられる。ただし、 $x(t)$ は $\langle \hat{\sigma}(t) \rangle$ のうち α^1 に比例する成分である。 $\langle \hat{\sigma}(t) \rangle$ に対する方程式は

$$\frac{d}{dt}\langle\hat{\sigma}\rangle = (-i\omega_a - \Gamma/2)\langle\hat{\sigma}\rangle - i\sqrt{\Gamma}(1 - 2\langle\hat{\sigma}^\dagger\hat{\sigma}\rangle)\alpha f_{\text{in}}(-t) \quad (8.18)$$

であるが、 $\langle\hat{\sigma}^\dagger\hat{\sigma}\rangle$ は最低でも $|\alpha|^2$ に比例する量であるため、 $x(t)$ には寄与しない。よって $x(t)$ に対する方程式は

$$\frac{d}{dt}x(t) = (-i\omega_a - \Gamma/2)x(t) - i\sqrt{\Gamma}f_{\text{in}}(-t) \quad (8.19)$$

である。この式は共振器の古典光に対する応答の式 (7.8) と同じであり、原子の線形応答成分である。初期条件 $x(0) = 0$ より、微分方程式 (8.19) の解は次の形になる。

$$x(t) = -i\sqrt{\Gamma} \int_0^t dt' f_{\text{in}}(-t') e^{(i\omega_a + \Gamma/2)(t' - t)}. \quad (8.20)$$

以上をまとめると、1 光子の出力波動関数 $f_{\text{out}}^{(1)}(r, t)$ は式 (8.17), (8.20) で与えられ、確かに $r - t$ のみの関数になっている。

8.1.4 2 光子応答

入力 $|\psi_c(0)\rangle$ に対する出力光の 2 点相関関数をハイゼンベルグ表示で計算しよう。 $\mathcal{G}^{(2)}(r_1, r_2, t) = \langle\psi_c(0)|\tilde{b}_{r_1}(t)\tilde{b}_{r_2}(t)|\psi_c(0)\rangle$ である。 $\tilde{b}_{r_1}(t)$ と $\tilde{b}_{r_2}(t)$ は同時刻の演算子であり交換するので $r_1 > r_2$ と選んでおこう。式 (8.2), (8.9) より次式が得られる。

$$\begin{aligned} \mathcal{G}^{(2)}(r_1, r_2, t) &= \alpha^2 f_{\text{in}}(r_1 - t)f_{\text{in}}(r_2 - t) - i\sqrt{\Gamma}\alpha f_{\text{in}}(r_2 - t)\langle\hat{\sigma}(t - r_1)\rangle \\ &\quad - i\sqrt{\Gamma}\alpha f_{\text{in}}(r_1 - t)\langle\hat{\sigma}(t - r_2)\rangle \\ &\quad - \Gamma\langle\hat{\sigma}(t - r_1)\hat{\sigma}(t - r_2)\rangle. \end{aligned} \quad (8.21)$$

求めたい波動関数 $f_{\text{out}}^{(2)}(r_1, r_2, t)$ は、 $\mathcal{G}^{(2)}(r_1, r_2, t)$ の α^2 に比例する成分である。 $\langle\hat{\sigma}(t_1)\hat{\sigma}(t_2)\rangle$ の α^2 に比例する成分を $y(t_1, t_2)$ と書くと、

$$\begin{aligned} f_{\text{out}}^{(2)}(r_1, r_2, t) &= f_{\text{in}}(r_1 - t)f_{\text{in}}(r_2 - t) - i\sqrt{\Gamma}f_{\text{in}}(r_2 - t)x(t - r_1) \\ &\quad - i\sqrt{\Gamma}f_{\text{in}}(r_1 - t)x(t - r_2) - \Gamma y(t - r_1, t - r_2) \\ &= f_{\text{out}}^{(1)}(r_1, t)f_{\text{out}}^{(1)}(r_2, t) \\ &\quad - \Gamma[y(t - r_1, t - r_2) - x(t - r_1)x(t - r_2)] \end{aligned} \quad (8.22)$$

で与えられる。

原子の 2 点相関関数 $\langle\hat{\sigma}(t_1)\hat{\sigma}(t_2)\rangle$ を求めよう。ただし $t_1 < t_2$ である。 $\hat{\sigma}(t_2)$ についてのハイゼンベルグ方程式 (8.3) に、左から $\hat{\sigma}(t_1)$ を掛けて期待値をとると、

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t_2}\langle\hat{\sigma}(t_1)\hat{\sigma}(t_2)\rangle &= (-i\omega_a - \Gamma/2)\langle\hat{\sigma}(t_1)\hat{\sigma}(t_2)\rangle - i\sqrt{\Gamma}\langle\hat{\sigma}(t_1)\rangle\alpha f_{\text{in}}(-t_2) \\ &\quad + 2i\sqrt{\Gamma}\langle\hat{\sigma}(t_1)\hat{\sigma}^\dagger(t_2)\hat{\sigma}(t_2)\rangle\alpha f_{\text{in}}(-t_2) \end{aligned} \quad (8.23)$$

を得る。 $\langle \hat{\sigma}(t_1)\hat{\sigma}^\dagger(t_2)\hat{\sigma}(t_2) \rangle$ は最低でも $(\alpha^*)^1\alpha^2$ に比例する量であるため、 $y(t_1, t_2)$ には寄与しない。よって $y(t_1, t_2)$ に対する方程式は

$$\frac{\partial}{\partial t_2}y(t_1, t_2) = (-i\omega_a - \Gamma/2)y(t_1, t_2) - i\sqrt{\Gamma}x(t_1)f_{in}(-t_2) \quad (8.24)$$

となる。式(8.19)と比べると、違いは非齊次項に定数 $x(t_1)$ が掛かっている点だけなので、この方程式の特殊解が $x(t_1)x(t_2)$ であることは瞭然である。一方、齊次方程式 $\frac{d}{dt_2}y = (-i\omega_a - \Gamma/2)y$ の解は、任意定数 C を用いて $C \exp[(-i\omega_a - \Gamma/2)t_2]$ と書けることから、式(8.24)の一般解は

$$y(t_1, t_2) = x(t_1)x(t_2) + C \exp[(-i\omega_a - \Gamma/2)t_2] \quad (8.25)$$

である。原子の消滅演算子の積は同時刻ではゼロとなるので $y(t_1, t_1) = 0$ である。この条件から任意定数 C を定めて次式を得る。

$$y(t_1, t_2) = x(t_1)x(t_2) - [x(t_1)]^2 \exp[(i\omega_a + \Gamma/2)(t_1 - t_2)]. \quad (8.26)$$

以上をまとめると、2光子の出力波動関数は次式で与えられる。

$$f_{out}^{(2)}(r_1 - t, r_2 - t) = f_{out}^{(1)}(r_1 - t)f_{out}^{(1)}(r_2 - t) + \Gamma x^2(t - \max(r_1, r_2))e^{-(i\omega_a + \Gamma/2)|r_1 - r_2|}. \quad (8.27)$$

これは確かに $r_1 - t, r_2 - t$ のみの関数である。

8.1.5 具体例：三角関数型パルス

入力パルスが中心周波数 ω_{in} 、パルス長 d の三角関数型である場合を考える。

$$f_{in}(r) = \begin{cases} -\sqrt{2/d} \sin(\pi r/d) e^{i\omega_{in}r} & (-d < r < 0) \\ 0 & (\text{otherwise}). \end{cases} \quad (8.28)$$

図8.2に示すように、このパルスは初期時刻において入射ポート ($r < 0$) に局在しており、また $\int_{-\infty}^0 dr |f_{in}(r)|^2 = 1$ と規格化されている。以下では

$$\lambda_0 = -i\omega_a - \Gamma/2, \quad (8.29)$$

$$\lambda_1 = -i(\omega_{in} - \pi/d), \quad (8.30)$$

$$\lambda_2 = -i(\omega_{in} + \pi/d) \quad (8.31)$$

と表すことにしよう。原子の線形応答 $x(t)$ は、式(8.20)を使うと

$$x(t) = \begin{cases} C_0 e^{\lambda_0 t} + C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} & (0 < t < d) \\ C_3 e^{\lambda_0 t} & (d < t) \end{cases} \quad (8.32)$$

の形に書くことができる。ただし係数は次式で与えられる： $C_0 = \sqrt{\frac{\Gamma}{2d}}(\frac{1}{\lambda_1 - \lambda_0} - \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_0})$, $C_1 = -\sqrt{\frac{\Gamma}{2d}}\frac{1}{\lambda_1 - \lambda_0}$, $C_2 = \sqrt{\frac{\Gamma}{2d}}\frac{1}{\lambda_2 - \lambda_0}$, $C_3 = C_0 + C_1 e^{(\lambda_1 - \lambda_0)d} + C_2 e^{(\lambda_2 - \lambda_0)d}$.

導波路中ではパルスは一定速度 $v (= 1)$ で並進運動するので、式 (8.17) からもわかるように、出力波動関数は $r - t$ の形で時空間座標に依存する。以下では、光子の伝播速度で並進運動する座標系に移行し、 $r - t \rightarrow r$ で表すことにしよう。また、この座標系では光子は常に $r < 0$ の領域に存在するので、階段関数 $\theta(-r)$ を省略する。

1 光子出力

式 (8.17) を使うと、1 光子の出力波動関数は次式で与えられる。

$$f_{\text{out}}^{(1)}(r) = \begin{cases} 0 & (0 < r) \\ D_0 e^{-\lambda_0 r} + D_1 e^{-\lambda_1 r} + D_2 e^{-\lambda_2 r} & (-d < r < 0) \\ D_3 e^{-\lambda_0 r} & (r < -d). \end{cases} \quad (8.33)$$

ただし係数は次式で与えられる： $D_0 = -i\sqrt{\Gamma}C_0$, $D_1 = -i\sqrt{\Gamma}C_1 - i/\sqrt{2d}$, $D_2 = -i\sqrt{\Gamma}C_2 + i/\sqrt{2d}$, $D_3 = -i\sqrt{\Gamma}C_3$.

入射パルスが無限に長い $d \rightarrow \infty$ の極限を考えよう。このとき、 $e^{-\lambda_0 r}$ を含む項は減衰するので無視することができ、

$$f_{\text{out}}^{(1)}(r) \approx -\frac{\Gamma/2 + i(\omega_{\text{in}} - \omega_a)}{\Gamma/2 - i(\omega_{\text{in}} - \omega_a)} f_{\text{in}}(r) \quad (8.34)$$

で与えられる。この式の右辺の f_{in} にかかる因子の絶対値は 1 であるので、長パルス極限では、入射パルスは形状を保ったまま、位相シフトを受けて反射されることがわかる。 f_{in} にかかる因子は、線形応答の場合の反射係数 R [式 (7.16)] に他ならない。

図 8.2 に、共鳴入射 ($\omega_{\text{in}} = \omega_a$) の場合の入出力波動関数を比較した。このときには、位相因子 $e^{i\omega_{\text{in}}(r-t)}$ を除くと入出力波動関数は実数になるので、それを示してある。式 (8.17) からわかるように、出力パルスは入力パルスと原子からの輻射との重ね合わせであり、後者は Γ^{-1} のオーダーの時間遅れを持つ

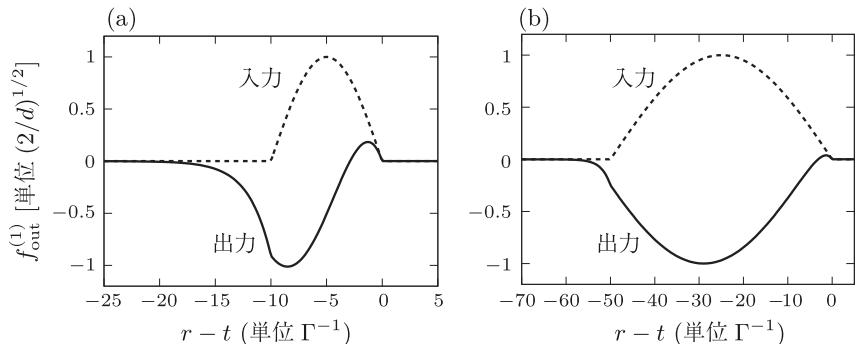


図 8.2 1 光子入射の場合の入出力波動関数の比較。 $\omega_{\text{in}} = \omega_a$ 。パルス長は (a) $d = 10\Gamma^{-1}$, (b) $d = 50\Gamma^{-1}$ 。

て原子から導波路へと放出される。よって短パルス ($d \sim \Gamma^{-1}$) の場合にはパルス形状は大きく変形する。一方長パルス ($d \gg \Gamma^{-1}$) の場合には、式(8.34)で見たように、パルス形状をほぼ保ったまま符号が反転する。

2 光子出力

2 準位原子に 2 光子を同時に入射すると、原子がそれらを同時に吸収できない飽和非線形効果のため、2 光子間に実効的な相互作用が発現する。これを見るために、2 光子「線形」出力波動関数 $f_{\text{out}}^{(2),L}$ を次の式により導入しよう。

$$f_{\text{out}}^{(2),L}(r_1, r_2, t) = f_{\text{out}}^{(1)}(r_1, t)f_{\text{out}}^{(1)}(r_2, t). \quad (8.35)$$

これは、光子が独立に反射される場合の出力であり、2 準位原子と同じ共鳴周波数の共振器（調和振動子）に置換した場合に得られる出力である。

図 8.3 は 2 光子出力波動関数の空間形状である。ここでも共鳴入射を仮定しており、位相因子 $e^{i\omega_{\text{in}}(r_1+r_2-2t)}$ を除くと出力波動関数は実数になる。非線形効果は短パルス ($d \sim \Gamma^{-1}$) の場合に顕著になる。ここでは $d = 10\Gamma^{-1}$ としてある。

図 8.3(a) は線形出力波動関数 $f_{\text{out}}^{(2),L}(r_1, r_2, t)$ である。定義式(8.35)からわかるように、出力される 2 光子に空間的な相関はない。一体の出力波動関数 $f_{\text{out}}^{(1)}(r)$ は、図 8.2(a) に見られるように、 $r = r_0 \approx -3\Gamma^{-1}$ においてゼロ点を持つ。これを反映して、2 光子波動関数は二つの直線 $r_1 = r_0, r_2 = r_0$ 上においてゼロとなり、 $(r_1 - r_0)(r_2 - r_0) > 0$ の領域では正の値を、 $(r_1 - r_0)(r_2 - r_0) < 0$ の領域では負の値をとる。全体としては正の値が支配的である。

図 8.3(b) は、2 準位原子への応答として得られる、非線形の出力波動関数

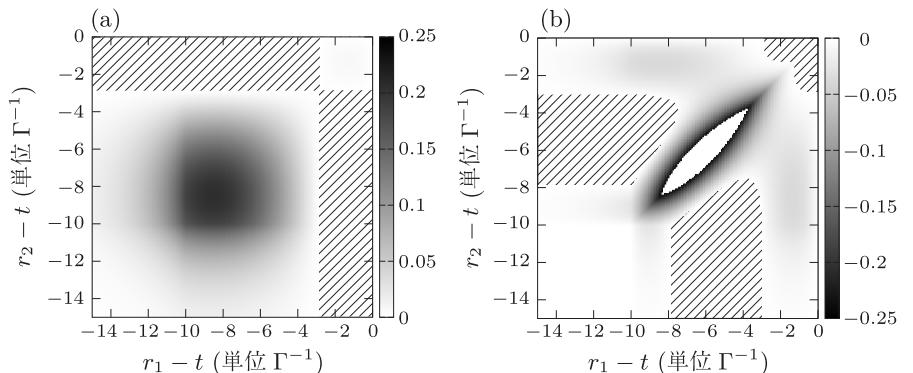


図 8.3 2 光子出力波動関数の空間形状。 $\omega_{\text{in}} = \omega_a, d = 10\Gamma^{-1}$ 。(a) 線形出力 $f_{\text{out}}^{(2),L}(r_1, r_2)$ 。正の値が支配的であり、斜線部分で負の値を持つ。(b) 2 準位原子に対する出力 $f_{\text{out}}^{(2)}(r_1, r_2)$ 。負の値が支配的であり、斜線部分で正の値を持つ。対角線上の白い部分では $f_{\text{out}}^{(2)} < -0.25$ であり、最大で -0.46 に達する。

$f_{\text{out}}^{(2)}(r_1, r_2, t)$ である。線形出力と比較した特徴は次の二点である。(i) 全体として負の値が支配的である。つまり、線形出力と比較して符号が反転している。(ii) 2 光子波動関数は対角線上で大きな負の値をとる。つまり、2 光子が空間的に正の相関を持つようになる。換言すると、空間的な量子もつれが生じている^{[43], [44]}。これらの特徴は、定性的に次のように理解できる：(i) 一つ目の光子が原子に吸収されている間、原子は励起状態にあり二つ目の光子を吸収することができない。よって一つ目の光子は式 (8.34) の符号反転を受けるのに對して、二つ目の光子は符号反転を受けずに原子を透過する。それらの積である二体波動関数は負の値をとる。(ii) 光子は原子による吸収および再放出により、図 8.2 に見られるような Γ^{-1} の時間オーダーの遅れを生じる。光子を二つ入射すると、一つ目の光子が吸収されている間は二つ目の光子はこの効果を受けないので、遅れを生じない。よって出力では 2 光子の時間間隔が相対的に近くなる。

8.2 ビームスプリッタ

次節で 2 光子非線形性を活用した量子ゲート (Fredkin ゲート) の議論をするが、本節ではその構成要素であるビームスプリッタの動作を見ておこう。ビームスプリッタは透過率 50% の半透鏡であり、図 8.4 に示すように、ポート 1, 2 から入力された光子を混成してポート 3, 4 へと出力する。ポート j , 位置座標 r の光子生成演算子を $\tilde{b}_{j,r}^\dagger$ で表すと、ビームスプリッタの作用はアダマール変換 (Hadamard transform) と呼ばれる次のユニタリ変換により表現される。

$$\begin{pmatrix} \tilde{b}_{1,r}^\dagger \\ \tilde{b}_{2,r}^\dagger \end{pmatrix} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{b}_{3,r}^\dagger \\ \tilde{b}_{4,r}^\dagger \end{pmatrix}. \quad (8.36)$$

逆にポート 3, 4 を入力、ポート 1, 2 を出力とする場合の作用は、式 (8.36)において添字 $1 \leftrightarrow 3$, $2 \leftrightarrow 4$ の入れ替えを行い、

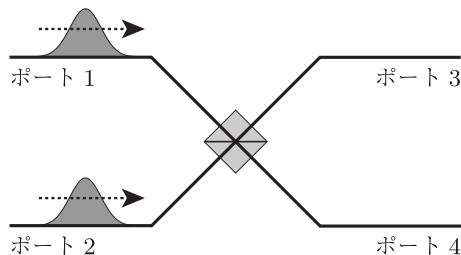


図 8.4 ビームスプリッタの概念図。ポート 1, 2 から入射する光子を混成してポート 3, 4 へと出力する。逆から入力することもできる。

$$\begin{pmatrix} \tilde{b}_{3,r}^\dagger \\ \tilde{b}_{4,r}^\dagger \end{pmatrix} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{b}_{1,r}^\dagger \\ \tilde{b}_{2,r}^\dagger \end{pmatrix} \quad (8.37)$$

で表現される。

8.2.1 1 光子の散乱

ビームスプリッタの一つのポートに、光子 1 個を入力する場合を考えよう。例として、ポート 1 にパルス形状 $f(r)$ の光子を入射する ($\int dr |f(r)|^2 = 1$)。全てのポートに光子がない状態を $|v\rangle$ で表すと、入力状態は

$$|\psi_{\text{in}}^{(10)}\rangle = \int dr f(r) \tilde{b}_{1,r}^\dagger |v\rangle \quad (8.38)$$

と表される。ただし上付き添字 (1, 0) は入射ポートへの入力光子数を表す。式 (8.36) より、ビームスプリッタ透過後の出力状態は

$$|\psi_{\text{out}}^{(10)}\rangle = \int dr \frac{f(r)}{\sqrt{2}} \tilde{b}_{3,r}^\dagger |v\rangle + \int dr \frac{f(r)}{\sqrt{2}} \tilde{b}_{4,r}^\dagger |v\rangle \quad (8.39)$$

である。ポート 3 (4) に光子が出力される確率は、右辺第一項 (第二項) のノルムをとり、 $\int dr |f(r)/\sqrt{2}|^2 = 1/2$ である。つまり入射光子は等確率でポート 3, 4 に分割される。

8.2.2 2 光子の散乱 : HOM 干渉

次に、ポート 1, 2 から光子を一つずつ入力する場合を考えよう。それらの光子のパルス形状を $f_1(r)$, $f_2(r)$ とする。入力状態は

$$\begin{aligned} |\psi_{\text{in}}^{(11)}\rangle &= \left(\int dr f_1(r) \tilde{b}_{1,r}^\dagger \right) \left(\int dr' f_2(r') \tilde{b}_{2,r'}^\dagger \right) |v\rangle \\ &= \iint dr dr' f_1(r) f_2(r') \tilde{b}_{1,r}^\dagger \tilde{b}_{2,r'}^\dagger |v\rangle \end{aligned} \quad (8.40)$$

と表される。式 (8.36) より、ビームスプリッタ透過後の出力状態は

$$\begin{aligned} |\psi_{\text{out}}^{(11)}\rangle &= \iint dr dr' \frac{f_1(r) f_2(r')}{2} \tilde{b}_{3,r}^\dagger \tilde{b}_{3,r'}^\dagger |v\rangle \\ &\quad - \iint dr dr' \frac{f_1(r) f_2(r')}{2} \tilde{b}_{4,r}^\dagger \tilde{b}_{4,r'}^\dagger |v\rangle \\ &\quad + \iint dr dr' \frac{f_1(r') f_2(r) - f_1(r) f_2(r')}{2} \tilde{b}_{3,r}^\dagger \tilde{b}_{4,r'}^\dagger |v\rangle \end{aligned} \quad (8.41)$$

と表される。ここで上式の右辺第一項 (第二項) は 2 光子が共にポート 3 (4) に出力される状態を表し、第三項は光子が両ポートに 1 個ずつ出力される状態を表す。それらの確率を P_{20} , P_{02} , P_{11} とすると、各項のノルムをとることにより

$$P_{20} = P_{02} = \frac{1 + |J|^2}{4}, \quad (8.42)$$

$$P_{11} = \frac{1 - |J|^2}{2} \quad (8.43)$$

と書ける。ただし J は $f_1(r)$ と $f_2(r)$ の重なり積分

$$J = \int dr f_1^*(r) f_2(r) \quad (8.44)$$

である。確率保存 $P_{20} + P_{02} + P_{11} = 1$ は容易に確認できる。

二つの光子パルスが時間的に大きくずれていたり、あるいは異なる周波数を持つ場合を考えよう。これらの場合には光子波動関数 $f_1(r)$ と $f_2(r)$ に殆ど重なりが無く、 $J = 0$ となる。すると $P_{20} = P_{02} = 1/4$, $P_{11} = 1/2$ であり、これは 8.2.1 節で議論した 1 光子散乱が独立に起こっていると理解できる。

一方、二つの光子パルスが完全に一致している $f_1(r) = f_2(r)$ の場合には $J = 1$ であり、 $P_{20} = P_{02} = 1/2$, $P_{11} = 0$ となる。つまり二つの光子は干渉の結果、必ず同じポートへと散乱される。これは **Hong-Ou-Mandel 干渉** (Hong-Ou-Mandel interference) と呼ばれる^[45]。散乱後の 2 光子の状態 [式 (8.41)] は、各ポートへと散乱された光子数を基底にとると $(|20\rangle - |02\rangle)/\sqrt{2}$ と表すことができる。一般に、 $(|N0\rangle + e^{i\theta}|0N\rangle)/\sqrt{2}$ (θ は位相) の形の重ね合わせ状態は **NOON 状態** (NOON state) と呼ばれており、例えば量子センシングにおいて測定精度を高めるのに有用であることが知られている^{[46], [47]}。

8.3 2 光子量子ゲートへの応用

光と光の相互作用は非線形光学媒質を介して得られる。しかしながら、単一光子レベルの微弱光での相互作用は大変小さいために、有意な相互作用が得られないのが常である。ところが 8.1 節において、2 準位原子の飽和非線形性は 2 光子間に波動関数の符号反転をもたらすほどの大きな非線形効果を生むことを見た。本節では、この 2 光子間の非線形相互作用を Fredkin ゲートと呼ばれる量子ゲートへと応用する可能性について議論しよう^{[48], [49]}。

8.3.1 Fredkin ゲート

Fredkin ゲートの概念図を図 8.5 に示した。ポート 1, 2 から入射する光子はビームスプリッタにより混成され、ポート 3, 4 へと向かう。ポート 3, 4 の光子は非線形媒質（ここでは 2 準位原子）と相互作用したのち、再びビームスプリッタで混成されてポート 1, 2 へと出力される。

入力状態

Fredkin ゲートではポート 1, 2 への入射光子数（0 個または 1 個）に量子情報をエンコードする。入射光子のモード関数は両ポートで共通であり、それを $f_{in}(r)$ としよう。ポート 1 から m 個の光子、ポート 2 から n 個の光子を入力

する状態を $|mn\rangle$ で表すと ($m, n = 0, 1$), これらの 4 つの状態は, 次式のように書ける.

$$|00\rangle = |v\rangle, \quad (8.45)$$

$$|01\rangle = \hat{B}_2^\dagger |v\rangle, \quad (8.46)$$

$$|10\rangle = \hat{B}_1^\dagger |v\rangle, \quad (8.47)$$

$$|11\rangle = \hat{B}_1^\dagger \hat{B}_2^\dagger |v\rangle. \quad (8.48)$$

ここで $|v\rangle$ は全系の基底状態 (全てのポートに光子がなく, 原子が基底状態にある状態) を表す. \hat{B}_j^\dagger はポート j に光子を生成する演算子であり, ポート j , 座標 r における光子の生成演算子を $\tilde{b}_{j,r}^\dagger$ とすると

$$\hat{B}_j^\dagger = \int dr f_{\text{in}}(r) \tilde{b}_{j,r}^\dagger \quad (8.49)$$

で与えられる.

出力状態

上述の入力状態の時間発展を考えよう. 1 光子入力の場合 ($|01\rangle, |10\rangle$), 最初のビームスプリッタ透過により, 光子は半々の確率でポート 3 または 4 に向かう. 原子との相互作用によってパルス形状は変化するが [$f_{\text{in}}(r) \rightarrow f_{\text{out}}^{(1)}(r)$]^{*4)} ポート 3, 4 に光路差が無ければ必ず入射されたポートに光子が出力される. 一方, 2 光子入力の場合 ($|11\rangle_{\text{in}}$), 最初のビームスプリッタ透過により, HOM 干渉のため二つの光子は必ずまとまってポート 3 または 4 に出力される. 原子との相互作用によってパルス形状は変化するが [$f_{\text{in}}(r_1)f_{\text{in}}(r_2) \rightarrow f_{\text{out}}^{(2)}(r_1, r_2)$], 二度目のビームスプリッタ透過により, 2 光子は必ずポート 1, 2 に 1 個ずつ出力される. 以上をまとめると, 式 (8.45)–(8.48) の 4 つの入力状態に対する

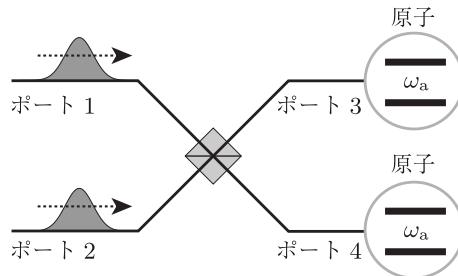


図 8.5 Fredkin ゲートの概念図. ポート 1, 2 から入射する光子数 (0 個または 1 個) に量子情報をエンコードする. 入射光子は「ビームスプリッタによる混成」→「2 準位原子との相互作用」→「ビームスプリッタによる再混成」を経て, 再びポート 1, 2 に出力される.

*4) 時間変数 t は省略する.

出力状態は、次式で与えられる。

$$|00\rangle \rightarrow \hat{U}_r|00\rangle = |v\rangle, \quad (8.50)$$

$$|01\rangle \rightarrow \hat{U}_r|01\rangle = \overline{B}_2^\dagger|v\rangle, \quad (8.51)$$

$$|10\rangle \rightarrow \hat{U}_r|10\rangle = \overline{B}_1^\dagger|v\rangle, \quad (8.52)$$

$$|11\rangle \rightarrow \hat{U}_r|11\rangle = \iint dr dr' f_{\text{out}}^{(2)}(r, r') \tilde{b}_{1,r}^\dagger \tilde{b}_{2,r'}^\dagger |v\rangle. \quad (8.53)$$

ただし \hat{U}_r は「現実の」時間発展を表すユニタリ演算子である。また、 $\overline{B}_j^\dagger = \int dr f_{\text{out}}^{(1)}(r) \tilde{b}_{j,r}^\dagger$ であり、線形応答の光子パルスによってモードを定義している。2光子入射に対しては [式 (8.53)]、ポート 1, 2 に必ず 1 光子ずつ出力されるが、それらの光子は一般には空間的な相関を持っており、 \overline{B}_j^\dagger を用いて簡潔に表現することができない。

理想的動作

8.1.5 節において、原子の飽和非線形性のために、2光子波動関数の符号が反転することを見た。量子ゲートの観点からは、2光子出力波動関数が $f_{\text{out}}^{(2)}(r, r') = -f_{\text{out}}^{(1)}(r)f_{\text{out}}^{(1)}(r')$ のように、線形出力の完全な符号反転になっていると都合が良い。このとき、式 (8.53) の右辺を $-\overline{B}_1^\dagger \overline{B}_2^\dagger |v\rangle$ と書くことができる。「理想的」時間発展のユニタリ演算子を \hat{U}_i とすると、ゲートの理想的出力状態は、次式で与えられる。

$$|00\rangle \rightarrow \hat{U}_i|00\rangle = |v\rangle, \quad (8.54)$$

$$|01\rangle \rightarrow \hat{U}_i|01\rangle = \overline{B}_2^\dagger|v\rangle, \quad (8.55)$$

$$|10\rangle \rightarrow \hat{U}_i|10\rangle = \overline{B}_1^\dagger|v\rangle, \quad (8.56)$$

$$|11\rangle \rightarrow \hat{U}_i|11\rangle = -\overline{B}_1^\dagger \overline{B}_2^\dagger |v\rangle. \quad (8.57)$$

これは制御位相ゲート (controlled phase gate) あるいは制御 Z ゲート (controlled Z gate) と呼ばれる 2 量子ゲートであり、二つの量子ビット間に量子もつれを生成するゲートとしてはたらく。

8.3.2 平均ゲート忠実度

入力状態が $|\phi\rangle$ であるとき、このゲートの忠実度は $f_\phi = |\langle\phi|\hat{U}_i^\dagger \hat{U}_r|\phi\rangle|^2$ として評価される。この量を、4つの基底ベクトルで張られる全ての純粋状態の入力状態について平均をとったものを平均ゲート忠実度 (average gate fidelity) と呼び、 f_{av} で表すことにしてよう。基底の数を d として (ここでは $d = 4$)、平均ゲート忠実度は次の式で求められることが知られている^[50]。

$$F = \left| \frac{1}{d} \sum_{j=1}^d \langle j | \hat{U}_i^\dagger \hat{U}_r | j \rangle \right|^2, \quad (8.58)$$

$$f_{\text{av}} = \frac{Fd + 1}{d + 1}. \quad (8.59)$$

ただし、式(8.58)における状態 $|j\rangle$ に関する和は、4つの基底ベクトル $|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle$ に対してとる。

式(8.50)–(8.57)を用いて F を計算しよう。ゼロまたは1光子入力 $|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle$ に対しては $\hat{U}_r|j\rangle = \hat{U}_i|j\rangle$ であるが、2光子入力 $|11\rangle$ に対しては線形出力波動関数と非線形出力波動関数の不一致に由来する忠実度の低下がある。両者の重なり積分を

$$I = \iint dr_1 dr_2 f_{\text{out}}^{(1)*}(r_1) f_{\text{out}}^{(1)*}(r_2) f_{\text{out}}^{(2)}(r_1, r_2) \quad (8.60)$$

とすると、 $F = |3 - I|^2/16$ となる。理想的動作のときは $I = -1$ であり、このとき $F = f_{\text{av}} = 1$ となる。

この重なり積分 I を、入射パルス長 d の関数として図8.6(a)に示した。ここでは共鳴入射の場合を扱っており、重なり積分は実数になるので、実部のみ示してある。図8.6(b)には平均ゲート忠実度を示した。パルスが短い $d \ll \Gamma^{-1}$ の場合には、光子の持つ周波数広がりが原子の線幅に比べて遙かに大きいので、光子は原子と相互作用せず単純に反射されるため、応答は線形に近づき、 $I \rightarrow 1, f_{\text{av}} \rightarrow 1/4$ となる。一方、パルスが長い $d \gg \Gamma^{-1}$ の場合には、時間的な広がりのために励起状態の占有確率が小さくなるため、原子の飽和効果が薄まり、この極限でも応答は線形に近づく。その中間の $d \sim 10\Gamma^{-1}$ 程度で重なり積分 I は負の値を持つが、図8.3でみたように線形・非線形の波動関数の形状は大きく異なっており、理想値 -1 には達しない。

伝播光子間の非線形光学効果を利用して量子情報処理を行うというアイディアは古くからあるが^[49]、上述の議論のように、光子波形など着目する自由度以外に「余分な」量子もつれが生じるため、原理的に高忠実度のゲート操作ができないことが知られている^{[51], [52]}。

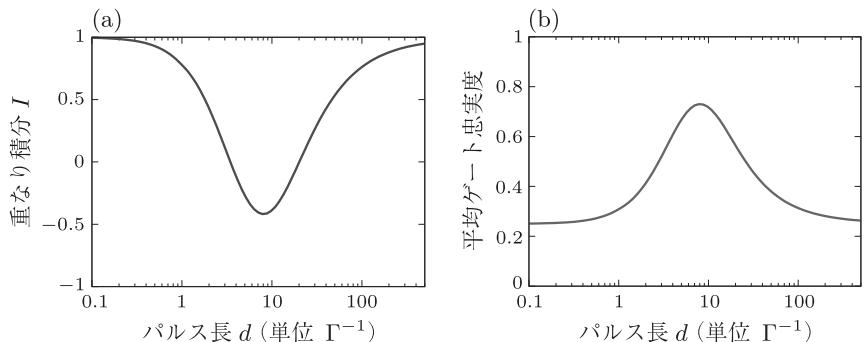


図8.6 (a) 重なり積分 I 、(b) 平均ゲート忠実度 f_{av} の入射パルス長 d 依存性。共鳴入射 ($\omega_{\text{in}} = \omega_a$) の場合。

8.4 Λ 型原子の応答

8.4.1 定式化

ハイゼンベルグ方程式

Λ 型原子 (Λ 系) とは、一つの励起状態と二つの安定状態との間に許容な光学遷移がある量子系のことである。 Λ 型原子のエネルギー図を、図 8.7 に示した。許容遷移の形がギリシア文字のラムダ (Λ) に似ているのでこう呼ばれている。 Λ 型原子の二つの安定状態を $|0\rangle$, $|1\rangle$, 励起状態を $|2\rangle$ とし、原子の遷移演算子を $\hat{\sigma}_{ij} = |i\rangle\langle j|$ で表そう ($i, j = 0, 1, 2$)。状態 $|0\rangle$, $|1\rangle$ はエネルギー的に縮退しているものとし、^{*5)} 状態 $|2\rangle$ への遷移周波数を ω_a とする。励起状態 $|2\rangle$ は二つの安定状態へ輻射緩和するが、 $|2\rangle \rightarrow |0\rangle$ 遷移では縦偏光の光子を、 $|2\rangle \rightarrow |1\rangle$ 遷移では横偏光の光子を放出し、緩和レートをそれぞれ Γ_v , Γ_h とする。波数（実空間）表示での縦偏光光子場の演算子を \hat{v}_k (\tilde{v}_r), 横偏光光子場の演算子を \hat{h}_k (\tilde{h}_r) で表すと、全系のハミルトニアンは次式で与えられる。

$$\begin{aligned}\hat{H} = & \omega_a \hat{\sigma}_{22} + \int dk k (\hat{v}_k^\dagger \hat{v}_k + \hat{h}_k^\dagger \hat{h}_k) \\ & + \sqrt{\Gamma_v} (\hat{\sigma}_{20} \tilde{v}_0 + \tilde{v}_0^\dagger \hat{\sigma}_{02}) + \sqrt{\Gamma_h} (\hat{\sigma}_{21} \tilde{h}_0 + \tilde{h}_0^\dagger \hat{\sigma}_{12}).\end{aligned}\quad (8.61)$$

また、このハミルトニアンから、次のハイゼンベルグ方程式が得られる。

$$\tilde{v}_r(t) = \tilde{v}_{r-t}(0) - i\sqrt{\Gamma_v} \Theta_{r \in (0,t)} \hat{\sigma}_{02}(t-r), \quad (8.62)$$

$$\tilde{h}_r(t) = \tilde{h}_{r-t}(0) - i\sqrt{\Gamma_h} \Theta_{r \in (0,t)} \hat{\sigma}_{12}(t-r), \quad (8.63)$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \hat{\sigma}_{02} = & \left(-i\omega_a - \frac{\Gamma_v + \Gamma_h}{2} \right) \hat{\sigma}_{02} - i\sqrt{\Gamma_v} (\hat{\sigma}_{00} - \hat{\sigma}_{22}) \tilde{v}_{-t}(0) \\ & - i\sqrt{\Gamma_h} \hat{\sigma}_{01} \tilde{h}_{-t}(0),\end{aligned}\quad (8.64)$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \hat{\sigma}_{12} = & \left(-i\omega_a - \frac{\Gamma_v + \Gamma_h}{2} \right) \hat{\sigma}_{12} - i\sqrt{\Gamma_h} (\hat{\sigma}_{11} - \hat{\sigma}_{22}) \tilde{h}_{-t}(0) \\ & - i\sqrt{\Gamma_v} \hat{\sigma}_{10} \tilde{v}_{-t}(0).\end{aligned}\quad (8.65)$$

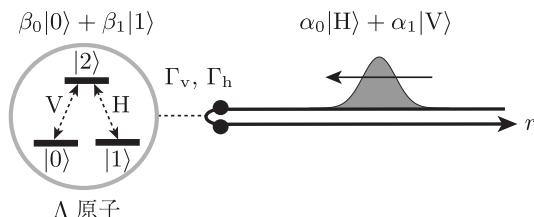


図 8.7 単一光子と Λ 原子の相互作用。 Λ 原子は半無限導波路の端点に結合している。 $|0\rangle \leftrightarrow |2\rangle$ 遷移は縦偏光光子、 $|1\rangle \leftrightarrow |2\rangle$ 遷移は横偏光光子と相互作用する。

*5) 本節の議論は非縮退の場合も成り立つ。

初期状態

図 8.7 に示すように、初期時刻 $t = 0$ において原子は安定状態 $(\beta_0|0\rangle + \beta_1|1\rangle)$ にあり、縦・横偏光の重ね合わせ状態にある単一光子 $(\alpha_0|H\rangle + \alpha_1|V\rangle)$ が入射する状況を考える。入射光子の波動関数を $f_{\text{in}}(r)$ とする。この関数は入射ポート ($r < 0$) に局在しており、 $\int dr |f_{\text{in}}(r)|^2 = 1$ と規格化されている。初期状態に対する 4 つの基底ベクトルは次式で与えられる。

$$|H, 0\rangle = \int dr f_{\text{in}}(r) \tilde{h}_r^\dagger |0, v\rangle, \quad (8.66)$$

$$|H, 1\rangle = \int dr f_{\text{in}}(r) \tilde{h}_r^\dagger |1, v\rangle, \quad (8.67)$$

$$|V, 0\rangle = \int dr f_{\text{in}}(r) \tilde{v}_r^\dagger |0, v\rangle, \quad (8.68)$$

$$|V, 1\rangle = \int dr f_{\text{in}}(r) \tilde{v}_r^\dagger |1, v\rangle. \quad (8.69)$$

ただし状態 $|j, v\rangle$ は、原子が状態 $|j\rangle$ にあり導波路中に光子の無い状態を表す ($j = 0, 1, 2$)。量子力学的時間発展の線形性より、これら 4 つの状態の時間発展から全ての入射状態の時間発展がわかる。

終状態

4 つの初期状態は、式 (8.61) のハミルトニアンにより $|H, 0\rangle \rightarrow e^{-i\hat{H}t}|H, 0\rangle$ のようにユニタリな時間発展をする。状態 $|H, 0\rangle$ と $|V, 1\rangle$ に関しては、入射光子と原子の選択則があつてないために、光子は原子と相互作用することなく単純に反射する。一方、状態 $|H, 1\rangle$ と $|V, 0\rangle$ に関しては、光子が原子に吸収されてラマン型の遷移を誘起する可能性がある。終時刻 t を十分に大きくとると原子は完全に脱励起し、状態ベクトルは次のように書ける。

$$e^{-i\hat{H}t}|H, 0\rangle = \int dr g_1(r, t) \tilde{h}_r^\dagger |0, v\rangle, \quad (8.70)$$

$$e^{-i\hat{H}t}|H, 1\rangle = \int dr g_2(r, t) \tilde{h}_r^\dagger |1, v\rangle + \int dr g_3(r, t) \tilde{v}_r^\dagger |0, v\rangle, \quad (8.71)$$

$$e^{-i\hat{H}t}|V, 0\rangle = \int dr g_4(r, t) \tilde{h}_r^\dagger |1, v\rangle + \int dr g_5(r, t) \tilde{v}_r^\dagger |0, v\rangle, \quad (8.72)$$

$$e^{-i\hat{H}t}|V, 1\rangle = \int dr g_6(r, t) \tilde{v}_r^\dagger |1, v\rangle. \quad (8.73)$$

ただし $g_j(r, t)$ ($j = 1, \dots, 6$) は出力光子の波動関数である。これらの波動関数は出力ポート ($r > 0$) に局在しており、確率保存から $\int dr |g_1(r, t)|^2 = \int dr |g_6(r, t)|^2 = 1$, $\int dr [|g_2(r, t)|^2 + |g_3(r, t)|^2] = \int dr [|g_4(r, t)|^2 + |g_5(r, t)|^2] = 1$, と規格化されている。次節において、出力光子の波動関数 $g_j(r, t)$ を求めよう。

8.4.2 時間発展

本項では、4つの初期状態の時間発展を考察しよう。例として初期状態 $|H, 1\rangle$ に対する出力波動関数 $g_2(r, t)$, $g_3(r, t)$ を求めよう。以下の議論には次の二つの性質が有用である：(i) $|0, v\rangle$ および $|1, v\rangle$ は、式(8.61)のハミルトニアのエネルギー 0 の固有状態である。よって $e^{-i\hat{H}t}|0, v\rangle = |0, v\rangle$, $e^{-i\hat{H}t}|1, v\rangle = |1, v\rangle$ 。(ii) 式(8.67)より、 $\tilde{h}_r(0)|H, 1\rangle = f_{in}(t)|1, v\rangle$, $\tilde{v}_r(0)|H, 1\rangle = 0$ 。

式(8.71)より、 $g_2(r, t)$ および $g_3(r, t)$ を次のように表現できる。

$$g_2(r, t) = \langle 1, v | \tilde{h}_r(0) e^{-i\hat{H}t} | H, 1 \rangle = \langle 1, v | \tilde{h}_r(t) | H, 1 \rangle, \quad (8.74)$$

$$g_3(r, t) = \langle 0, v | \tilde{v}_r(0) e^{-i\hat{H}t} | H, 1 \rangle = \langle 0, v | \tilde{v}_r(t) | H, 1 \rangle. \quad (8.75)$$

ただし二つ目の等号の導出には性質(i)を用いた。式(8.62), (8.63)と性質(ii)を用いると、

$$g_2(r, t) = -i\sqrt{\Gamma_h} \langle 1, v | \hat{\sigma}_{12}(t-r) | H, 1 \rangle + f_{in}(r-t), \quad (8.76)$$

$$g_3(r, t) = -i\sqrt{\Gamma_v} \langle 0, v | \hat{\sigma}_{02}(t-r) | H, 1 \rangle \quad (8.77)$$

が得られる。以下では $s_{02}(t) = \langle 0, v | \hat{\sigma}_{02}(t) | H, 1 \rangle$, $s_{12}(t) = \langle 1, v | \hat{\sigma}_{12}(t) | H, 1 \rangle$ としよう。初期条件は $s_{02}(0) = s_{12}(0) = 0$ である。式(8.64), (8.65)と性質(ii)を用いるとこれらの量の時間発展を決める式は

$$\frac{d}{dt}s_{02} = \left(-i\omega_a - \frac{\Gamma_v + \Gamma_h}{2} \right) s_{02} - i\sqrt{\Gamma_h} u_{01} f_{in}(-t), \quad (8.78)$$

$$\frac{d}{dt}s_{12} = \left(-i\omega_a - \frac{\Gamma_v + \Gamma_h}{2} \right) s_{12} - i\sqrt{\Gamma_h} (u_{11} - u_{22}) f_{in}(-t) \quad (8.79)$$

により与えられる。ただし、 $u_{01}(t) = \langle 0, v | \hat{\sigma}_{01}(t) | 1, v \rangle$, $u_{11}(t) = \langle 1, v | \hat{\sigma}_{11}(t) | 1, v \rangle$, $u_{22}(t) = \langle 1, v | \hat{\sigma}_{22}(t) | 1, v \rangle$ とした。性質(i)を用いると、これらの量が時間依存せず $u_{01}(t) = u_{11}(t) = 1$, $u_{22}(t) = 0$ であることを確認できる。

このようにして、出力波動関数 $g_j(r, t)$ ($j = 1, \dots, 6$) は次式で与えられる。

$$g_1(r, t) = g_6(r, t) = f_{in}(r-t), \quad (8.80)$$

$$g_3(r, t) = g_4(r, t) = -\sqrt{\Gamma_v \Gamma_h} s(t-r), \quad (8.81)$$

$$g_2(r, t) = f_{in}(r-t) - \Gamma_h s(t-r), \quad (8.82)$$

$$g_5(r, t) = f_{in}(r-t) - \Gamma_v s(t-r). \quad (8.83)$$

ただし $s(t)$ は、初期条件 $s(0) = 0$ に対する、微分方程式

$$\frac{d}{dt}s = \left(-i\omega_a - \frac{\Gamma_v + \Gamma_h}{2} \right) s + f_{in}(-t) \quad (8.84)$$

の解である。

8.4.3 長パルス極限

入射光子の中心周波数を ω_{in} , パルス長を d としよう. パルス長が長く, 入射光子の離調 $\Delta\omega = \omega_{\text{in}} - \omega_a$ や緩和レート $\Gamma_v + \Gamma_h$ と比べて入射パルスの周波数広がり d^{-1} が十分に小さい場合には, 式(8.84)を断熱的に解くことができ,

$$s(t) \approx \frac{2}{\Gamma_v + \Gamma_h - 2i\Delta\omega} f_{\text{in}}(-t) \quad (8.85)$$

と近似できる. これより, 出力波動関数の近似式は次のようになる.

$$g_1(r, t) = g_6(r, t) = f_{\text{in}}(r - t), \quad (8.86)$$

$$g_3(r, t) = g_4(r, t) = -\frac{2\sqrt{\Gamma_v\Gamma_h}}{\Gamma_v + \Gamma_h - 2i\Delta\omega} f_{\text{in}}(r - t), \quad (8.87)$$

$$g_2(r, t) = \frac{\Gamma_v - \Gamma_h - 2i\Delta\omega}{\Gamma_v + \Gamma_h - 2i\Delta\omega} f_{\text{in}}(r - t), \quad (8.88)$$

$$g_5(r, t) = \frac{\Gamma_h - \Gamma_v - 2i\Delta\omega}{\Gamma_v + \Gamma_h - 2i\Delta\omega} f_{\text{in}}(r - t). \quad (8.89)$$

長パルス極限では, 入射と出力で光子波動関数のパルス形状 $f_{\text{in}}(r - t)$ が保たれていることがわかる. 実際には(原子との相互作用の無い $g_{1,6}$ 以外には), 図8.2に見られるような光子の吸収と再放出に伴う $(\Gamma_v + \Gamma_h)^{-1}$ 程度のパルス遅れがあるが, パルス長に比べて大変短いので影響が小さい.

8.5 原子-光子量子ゲート

8.5.1 SWAP ゲート

理想的動作

前節では, 半無限導波路に結合した Λ 原子に单一光子が入射した場合について, 反射前後の量子状態の変化を議論した. 量子情報処理のためには, Λ 原子の二つの崩壊レートが等しい $\Gamma_v = \Gamma_h$ の場合が特に有用である. さらに, 入射光子が Λ 原子に共鳴している $\Delta\omega = 0$ の場合に着目しよう. 長パルス極限での量子状態変化は, 式(8.70)–(8.73)および式(8.86)–(8.89)から,

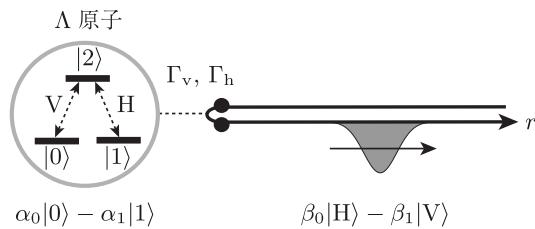


図 8.8 SWAP ゲートにおける, 反射後の光子および Λ 原子の量子状態. 図 8.7 の入射状態と比較して, 光子と原子の量子情報(重ね合わせの係数)が交換されている.

$$\hat{U}_i|H,0\rangle = |H,0\rangle, \quad (8.90)$$

$$\hat{U}_i|H,1\rangle = -|V,0\rangle, \quad (8.91)$$

$$\hat{U}_i|V,0\rangle = -|H,1\rangle, \quad (8.92)$$

$$\hat{U}_i|V,1\rangle = |V,1\rangle \quad (8.93)$$

である。 $|H,1\rangle$ や $|V,0\rangle$ の場合には、入射した単一光子が決定論的に（確率 1 で） Λ 系にラマン遷移を誘起し、異なる偏光状態に変換されて出力される。この現象は単一光子による決定論的ラマン遷移 (deterministic one-photon Raman interaction) と呼ばれ、可視光領域ではルビジウム原子を用いて^[53]、またマイクロ波領域では超伝導磁束量子ビットを用いて^{[54], [55]}、それぞれ実証されている。より一般的な入射状態 $(\alpha_0|H\rangle + \alpha_1|V\rangle)(\beta_0|0\rangle + \beta_1|1\rangle)$ に対しては、時間発展の線形性から

$$\begin{aligned} \hat{U}_i(\alpha_0|H\rangle + \alpha_1|V\rangle)(\beta_0|0\rangle + \beta_1|1\rangle) = \\ (\beta_0|H\rangle - \beta_1|V\rangle)(\alpha_0|0\rangle - \alpha_1|1\rangle) \end{aligned} \quad (8.94)$$

と変化することがわかる。つまり、反射前に光子にエンコードされていた量子情報 (α_0, α_1) と原子の量子情報 (β_0, β_1) とが、反射後には交換している^[56]。このような 2 量子ビットゲートを **SWAP** ゲート (SWAP gate) と呼ぶ。

ゲート忠実度

上記の理想的動作は、長パルス極限のものであり、光子パルス形状は相互作用前後で保たれている。例えば式 (8.90) をより丁寧に書くと

$$\hat{U}_i|H,1\rangle = \int dr f_{in}(r-t)\tilde{v}_r^\dagger|0, v\rangle \quad (8.95)$$

である。一方で、有限パルス長の場合の現実的動作 $\hat{U}_r|H,1\rangle$ は式 (8.71) で与えられるが、相互作用のため $g_3(r,t)$ は $f_{in}(r-t)$ よりも遅れている。また、

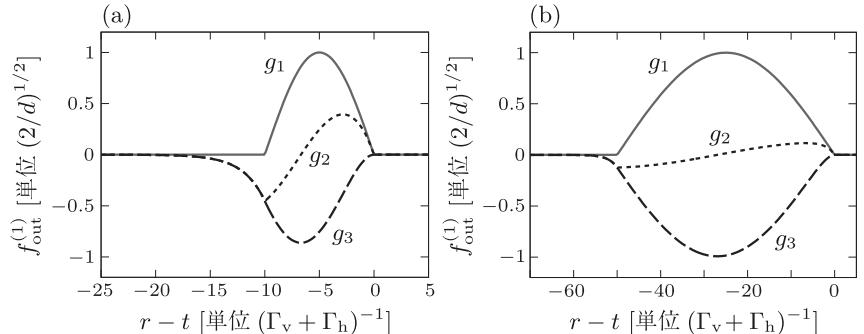


図 8.9 SWAP ゲートに対する出力波動関数。 $\Gamma_v = \Gamma_h$, $\omega_{in} = \omega_a$ の場合。パルス長は (a) $d = 10(\Gamma_v + \Gamma_h)^{-1}$, (b) $d = 50(\Gamma_v + \Gamma_h)^{-1}$ 。

入射パルスと Λ 原子からの輻射の破壊的干渉によって $g_2(r, t) \approx 0$ となるもの、実際には僅かに残っている。入力パルスが式(8.28)のような三角関数型である場合について、出力パルス形状を図8.9に示した。

平均ゲート忠実度は式(8.58), (8.59)で与えられる。このSWAPゲートの場合には、 $g_1 = g_6 = f_{\text{in}}$ であることを使うと

$$f_{\text{av}} = \frac{1 + \left| 1 - \frac{1}{2} \int dr f_{\text{in}}^*(g_3 + g_4) \right|^2}{5} \quad (8.96)$$

となる。 f_{av} をパルス長 d の関数として図8.10に示した。2光子ゲートの場合とは対照的に、単一光子のみを用いるゲートでは長パルス極限において波形の歪みが相対的に小さくなり、原理的には高忠実度ゲート ($f_{\text{av}} \approx 1$) が可能である。ただし、パルス長に応じてゲート時間も長くなるので、ここでは考慮していない位相緩和などの影響を受けやすくなり、実際にはパルス長と忠実度にはトレードオフの関係がある。

8.5.2 $\sqrt{\text{SWAP}}$ ゲート

ここでは、 Λ 原子の二つの崩壊レートが等しく ($\Gamma_v = \Gamma_h$)、入射光子が $\Delta\omega = -\Gamma_v$ の離調を持つ場合を考えよう。長パルス極限での量子状態変化は、式(8.70)–(8.73)および式(8.86)–(8.89)から、

$$\hat{U}_i |H, 0\rangle = |H, 0\rangle, \quad (8.97)$$

$$\hat{U}_i |H, 1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(e^{i\pi/4} |H, 1\rangle + e^{3i\pi/4} |V, 0\rangle \right), \quad (8.98)$$

$$\hat{U}_i |V, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(e^{3i\pi/4} |H, 1\rangle + e^{i\pi/4} |V, 0\rangle \right), \quad (8.99)$$

$$\hat{U}_i |V, 1\rangle = |V, 1\rangle \quad (8.100)$$

となる。このゲートを2回作用させると、前項で扱ったSWAPゲートになる

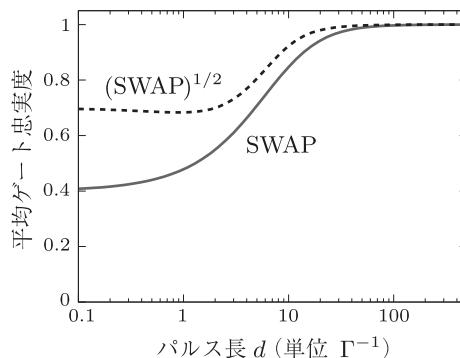


図8.10 SWAPゲートおよび $\sqrt{\text{SWAP}}$ ゲートの忠実度。

ことを確認できる。よってこのゲートを $\sqrt{\text{SWAP}}$ ゲートと呼ぶ。^{*6)} $\sqrt{\text{SWAP}}$ ゲートは、量子計算に必要な量子もつれ生成を行うことができる。

平均ゲート忠実度は

$$f_{\text{av}} = \frac{1 + \left| 1 + \frac{1-i}{4} \int dr f_{\text{in}}^*(g_2 - ig_3 - ig_4 + g_5) \right|^2}{5} \quad (8.101)$$

で与えられる。 f_{av} をパルス長 d の関数として図 8.10 に示した。長パルス極限において忠実度 1 に近づくのは SWAP ゲートと同じである。一方、短パルス極限では、光子の周波数広がりが大きくなるために光子は原子と相互作用せず単純に反射され、 $g_2 = g_5 = f_{\text{in}}$, $g_3 = g_4 = 0$ に近づき、SWAP ゲートでは忠実度 0.4 に、 $\sqrt{\text{SWAP}}$ ゲートでは忠実度 0.7 に漸近する。

8.6 着衣状態エンジニアリング

8.6.1 セットアップ

前節までの議論で、 Λ 型原子に单一光子を入射することにより様々なタイプの原子-光子ゲートを実現できることがわかった。ただし、有用なゲートが得られるのは Λ 型原子の二つの崩壊レートが揃っている ($\Gamma_v = \Gamma_h$)、やや特殊な場合に限定されてしまう。^{*7)} ここでは、分散領域にある共振器 QED 系（2 準位原子-共振器結合系）を外場でドライブし、着衣状態により Λ 型原子を実現する着衣状態エンジニアリング (dressed-state engineering) を紹介しよう^{[57], [58]}。この手法の長所は、ドライブ光の周波数 ω_d 、振幅 E_d という 2 種類のパラメータを自在に変えられる点であり、 Λ 系の遷移周波数や崩壊レート比を「その場制御」して、全く異なる光学応答を実現できる点である。

セットアップを図 8.11 に示した。2 準位原子と共振器の共鳴周波数を ω_a , ω_c 、結合を g で表そう。 $\omega_c > \omega_a$ であり、分散結合領域 $\omega_c - \omega_a \gg g$ にある場

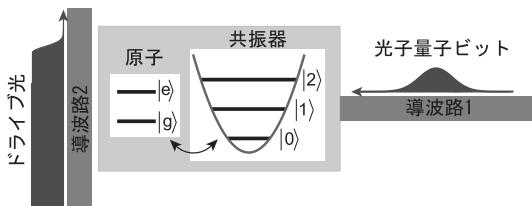


図 8.11 着衣状態エンジニアリングのセットアップ。分散結合領域にある原子-共振器系の原子をドライブし、着衣状態により Λ 系を作る。単一光子は共振器に結合している導波路 1 から入射し、同じポートに出力される。

*6) 離調が $\Delta\omega = \Gamma_v$ の場合にも $\sqrt{\text{SWAP}}$ ゲートになっている。このときのゲート動作は、 $\hat{U}_i|H, 0\rangle = |H, 0\rangle$, $\hat{U}_i|H, 1\rangle = (e^{-i\pi/4}|H, 1\rangle + e^{-3i\pi/4}|V, 0\rangle)/\sqrt{2}$, $\hat{U}_i|V, 0\rangle = (e^{-3i\pi/4}|H, 1\rangle + e^{-i\pi/4}|V, 0\rangle)/\sqrt{2}$, $\hat{U}_i|V, 1\rangle = |V, 1\rangle$ である。

*7) 天然の原子では、例えば Rb などにこのような遷移がある。

合を考える。共振器には单一光子出入力用の半無限導波路 1 が結合している。また、原子にはドライブ照射用の導波路 2 が結合しており、ここから定常光 $\mathcal{E}(t) = E_d e^{-i\omega_d t}$ を入射して原子をドライブする。共振器から導波路 1 への外部ロスレートを κ 、原子から導波路 2 への自然放出レートを γ で表し、 $\kappa \gg \gamma$ とする。このとき、導波路 1 から入射した光子は、ほとんど散逸なく導波路 1 へと反射される。つまり一次元性の良い光学系となっている。

分散結合領域にある原子-共振器系の準位構造は図 3.3 に示してあり、各準位のエネルギーは、 $\varepsilon_{|g,n\rangle} = (\omega_c + \chi)n$ 、 $\varepsilon_{|e,n\rangle} = (\omega_a - \chi) + (\omega_c - \chi)n$ で与えられる。また、5.5 節の議論に従うと、ドライブ光の効果は、時間依存する項 $\sqrt{\gamma}\mathcal{E}(t)\hat{\sigma}^\dagger + \sqrt{\gamma}\mathcal{E}^*(t)\hat{\sigma}$ をハミルトニアンに加えることにより取り込むことができる。以上をまとめて、原子-共振器系を記述するハミルトニアン \hat{H}_{sys} は

$$\begin{aligned}\hat{H}_{\text{sys}}(t) = & (\omega_c + \chi)\hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{\sigma}\hat{\sigma}^\dagger + [(\omega_a - \chi) + (\omega_c - \chi)\hat{a}^\dagger\hat{a}]\hat{\sigma}^\dagger\hat{\sigma} \\ & + \sqrt{\gamma}[\mathcal{E}(t)\hat{\sigma}^\dagger + \mathcal{E}^*(t)\hat{\sigma}]\end{aligned}\quad (8.102)$$

で与えられる。ドライブ周波数 ω_d での回転座標へ移行すると、このハミルトニアンは静的になり

$$\begin{aligned}\hat{H}_{\text{sys}} = & (\omega_c + \chi)\hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{\sigma}\hat{\sigma}^\dagger + [(\omega_a - \chi - \omega_d) + (\omega_c - \chi)\hat{a}^\dagger\hat{a}]\hat{\sigma}^\dagger\hat{\sigma} \\ & + \Omega_d(\hat{\sigma}^\dagger + \hat{\sigma})\end{aligned}\quad (8.103)$$

と書ける。ただしドライブ振幅 E_d は実数であるとし、 $\Omega_d = \sqrt{\gamma}E_d$ とおいた。

8.6.2 着衣状態

Λ 系の生成には $|g, 0\rangle$, $|e, 0\rangle$, $|g, 1\rangle$, $|e, 1\rangle$ の 4 準位を用いる。これらの状態はドライブが無いときの固有状態であり、裸状態 (bare state) と呼ばれる。回転座標での裸状態のエネルギー準位を図 8.12 に示す。ドライブ周波数が $\omega_a - 3\chi < \omega_d < \omega_a - \chi$ にある場合、準位構造は図 8.12(a) のように入れ子状になるので、この領域をドライブ周波数の「入れ子領域」、それ以外の領域を「非入れ子領域」と呼ぶ。

ドライブ光を照射すると、裸状態 $|g, 0\rangle$, $|e, 0\rangle$ ($|g, 1\rangle$, $|e, 1\rangle$) が混成されて着衣状態 $|\tilde{1}\rangle$, $|\tilde{2}\rangle$ ($|\tilde{3}\rangle$, $|\tilde{4}\rangle$) を作る。ただし着衣状態は低エネルギー側からレベルするものとする。それらは次式で与えられる。

$$|\tilde{1}\rangle = \cos\theta_l|g, 0\rangle - \sin\theta_l|e, 0\rangle, \quad (8.104)$$

$$|\tilde{2}\rangle = \sin\theta_l|g, 0\rangle + \cos\theta_l|e, 0\rangle, \quad (8.105)$$

$$|\tilde{3}\rangle = \cos\theta_h|e, 1\rangle - \sin\theta_h|g, 1\rangle, \quad (8.106)$$

$$|\tilde{4}\rangle = \sin\theta_h|e, 1\rangle + \cos\theta_h|g, 1\rangle. \quad (8.107)$$

ただし $\theta_{l,h}$ は

$$2\theta_l = \arg[(\omega_a - \chi - \omega_d)/2 + i\Omega_d], \quad (8.108)$$

$$2\theta_h = \arg[-(\omega_a - 3\chi - \omega_d)/2 + i\Omega_d] \quad (8.109)$$

で決まる角度である。固有エネルギーは

$$\tilde{\omega}_{1,2} = \frac{\omega_a - \chi - \omega_d}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\omega_a - \chi - \omega_d}{2}\right)^2 + \Omega_d^2}, \quad (8.110)$$

$$\tilde{\omega}_{3,4} = \omega_c + \frac{\omega_a - \chi - \omega_d}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\omega_a - 3\chi - \omega_d}{2}\right)^2 + \Omega_d^2} \quad (8.111)$$

で与えられる。ただしルートの前の符号は $\tilde{\omega}_1 < \tilde{\omega}_2$, $\tilde{\omega}_3 < \tilde{\omega}_4$ となるように選ぶ。

崩壊レート

状態 $|\tilde{3}\rangle$, $|\tilde{4}\rangle$ は共振器の励起状態であり、導波路 1 に光子を放出して状態 $|\tilde{1}\rangle$, $|\tilde{2}\rangle$ へと緩和する。状態 $|\tilde{m}\rangle$ ($m = 3, 4$) から状態 $|\tilde{n}\rangle$ ($n = 1, 2$) への緩和レートは

$$\tilde{\kappa}_{mn} = \kappa |\langle \tilde{m} | \hat{a}^\dagger | \tilde{n} \rangle|^2 \quad (8.112)$$

で与えられる。式 (8.104)–(8.107) より, $\theta_t = \theta_l + \theta_h$ として

$$\tilde{\kappa}_{32} = \tilde{\kappa}_{41} = \kappa \cos^2 \theta_t, \quad (8.113)$$

$$\tilde{\kappa}_{31} = \tilde{\kappa}_{42} = \kappa \sin^2 \theta_t \quad (8.114)$$

となる。 $\tilde{\kappa}_{31} + \tilde{\kappa}_{32} = \tilde{\kappa}_{41} + \tilde{\kappa}_{42} = \kappa$ であり、状態 $|\tilde{3}\rangle$, $|\tilde{4}\rangle$ からの全緩和レートは保存されている。

単一光子に対する応答

導波路 1 から单一光子を入射したときの 4 準位系の応答を考えよう。簡単のため、入射光子は周波数 ω の单色光であるとしよう。また、原子の緩和 γ が

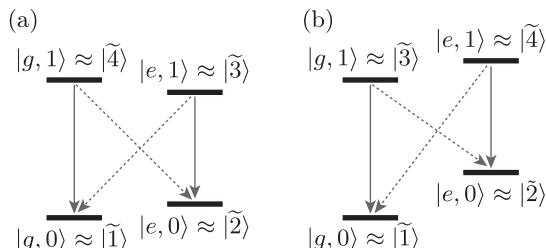


図 8.12 回転座標における 4 準位のエネルギー図。(a) 入れ子領域 ($\omega_a - 3\chi < \omega_d < \omega_a - \chi$), (b) 非入れ子領域 ($\omega_d < \omega_a - 3\chi$ または $\omega_a - \chi < \omega_d$)。ドライブなしの場合には輻射崩壊は垂直方向のみにおこるが（実線矢印）ドライブすると斜め方向の崩壊パスが現れる（点線矢印）。

十分に小さく着衣状態 $|\tilde{1}\rangle$, $|\tilde{2}\rangle$ は共に安定であるとし, 原子の初期状態はそれらの重ね合わせであるとしよう. 着衣状態では 2 方向に崩壊パスがあるため, 入射光子はラマン遷移を誘起する可能性がある. 全体系 (4 準位系 + 伝播光子) の状態ベクトルの反射前後の時間発展は

$$|\tilde{1}, \omega\rangle \rightarrow \xi_{11}(\omega)|\tilde{1}, \omega\rangle + \xi_{12}(\omega)|\tilde{2}, \omega - \Delta\omega\rangle, \quad (8.115)$$

$$|\tilde{2}, \omega\rangle \rightarrow \xi_{21}(\omega)|\tilde{1}, \omega + \Delta\omega\rangle + \xi_{22}(\omega)|\tilde{2}, \omega\rangle \quad (8.116)$$

と書ける. ただし $\Delta\omega = \tilde{\omega}_2 - \tilde{\omega}_1$ であり, 係数 $\xi_{mn}(\omega)$ は

$$\xi_{11}(\omega) = 1 - \frac{\kappa \sin^2 \theta_t}{\kappa/2 - i(\omega - \tilde{\omega}_{31})} - \frac{\kappa \cos^2 \theta_t}{\kappa/2 - i(\omega - \tilde{\omega}_{41})}, \quad (8.117)$$

$$\xi_{12}(\omega) = \frac{\kappa \cos \theta_t \sin \theta_t}{\kappa/2 - i(\omega - \tilde{\omega}_{31})} - \frac{\kappa \cos \theta_t \sin \theta_t}{\kappa/2 - i(\omega - \tilde{\omega}_{41})}, \quad (8.118)$$

$$\xi_{21}(\omega) = \frac{\kappa \cos \theta_t \sin \theta_t}{\kappa/2 - i(\omega - \tilde{\omega}_{32})} - \frac{\kappa \cos \theta_t \sin \theta_t}{\kappa/2 - i(\omega - \tilde{\omega}_{42})}, \quad (8.119)$$

$$\xi_{22}(\omega) = 1 - \frac{\kappa \cos^2 \theta_t}{\kappa/2 - i(\omega - \tilde{\omega}_{32})} - \frac{\kappa \sin^2 \theta_t}{\kappa/2 - i(\omega - \tilde{\omega}_{42})} \quad (8.120)$$

で与えられる.

崩壊レートの制御

崩壊レート $\tilde{\kappa}_{mn}$ はドライブ光の周波数 ω_d や強度 Ω_d に依存する. 図 8.13 に, 崩壊レートの強度 Ω_d への依存性を示した. ドライブ周波数が入れ子領域 $\omega_a - 3\chi < \omega_d < \omega_a - \chi$ にある場合 [図 8.13(a)] と非入れ子領域にある場合 [図 8.13(b)] とで振る舞いが定性的に異なるが, その理由は次のとおりである. 式 (8.108), (8.109)において, $\Omega_d \rightarrow 0$ の弱ドライブ極限を考えよう. ドライブ周波数が入れ子領域にあるとき, $\theta_l = \theta_h = \theta_t = 0$ であり, 崩壊の選択則は $|\tilde{3}\rangle \rightarrow |\tilde{2}\rangle$, $|\tilde{4}\rangle \rightarrow |\tilde{1}\rangle$ である. これに対して, 非入れ子領域では $\theta_t = \pi/2$

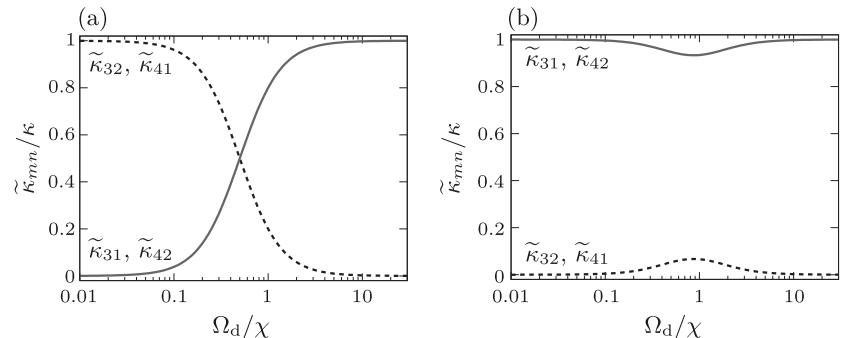


図 8.13 着衣状態間の崩壊レート $\tilde{\kappa}_{mn}$ のドライブ強度依存性. 実線は $\tilde{\kappa}_{31} = \tilde{\kappa}_{42}$, 点線は $\tilde{\kappa}_{32} = \tilde{\kappa}_{41}$. ドライブ周波数は (a) $\omega_d = \omega_a - 2\chi$ (入れ子領域), (b) $\omega_d = \omega_a$ (非入れ子領域).

であり、崩壊の選択則は $|\tilde{3}\rangle \rightarrow |\tilde{1}\rangle$, $|\tilde{4}\rangle \rightarrow |\tilde{2}\rangle$ である。一方、強ドライブ極限では、ドライブ周波数に依らず $\theta_l = \theta_h = \pi/4$, $\theta_t = \pi/2$ であり、崩壊の選択則は $|\tilde{3}\rangle \rightarrow |\tilde{1}\rangle$, $|\tilde{4}\rangle \rightarrow |\tilde{2}\rangle$ である。このように、入れ子領域では弱/強ドライブ極限で選択則が入れ替わるので崩壊レートはドライブ強度に敏感であり、ドライブ強度が

$$\Omega_d = \frac{\sqrt{(\omega_a - \chi - \omega_d)(\omega_d - \omega_a + 3\chi)}}{2} \quad (8.121)$$

のときに、 $\tilde{\kappa}_{31} = \tilde{\kappa}_{32} = \tilde{\kappa}_{41} = \tilde{\kappa}_{42} = \kappa/2$ となる。この条件は、 $\omega_d - \Omega_d$ 平面上での楕円で表される（図 8.14 の点線）。

問題

式 (8.121) を導出せよ。

解答 4 つの崩壊レートが等しくなる条件は $\theta_t = \pi/4$ である。これより $2\theta_l + 2\theta_h = \pi/2$, $\tan(2\theta_l) \times \tan(2\theta_h) = 1$ が従う。式 (8.108), (8.109) より導かれる $\tan(2\theta_l) = 2\Omega_d/(\omega_a - \chi - \omega_d)$, $\tan(2\theta_h) = -2\Omega_d/(\omega_a - 3\chi - \omega_d)$ を使って、式 (8.121) が示せる。

8.6.3 原子-光子ゲート

SWAP ゲート

ドライブ周波数を入れ子領域に選び、強度を式 (8.121) で与えられる値にすると、 $|\tilde{1}\rangle \leftrightarrow |\tilde{3}\rangle \leftrightarrow |\tilde{2}\rangle$ または $|\tilde{1}\rangle \leftrightarrow |\tilde{4}\rangle \leftrightarrow |\tilde{2}\rangle$ の遷移を「崩壊レートの揃った Λ 系」として用いることができ、原子-光子 SWAP ゲートを実現できる。このゲートでは、着衣状態 $|\tilde{1}\rangle$, $|\tilde{2}\rangle$ を原子量子ビットとし、*8) 異なる二つの周波数

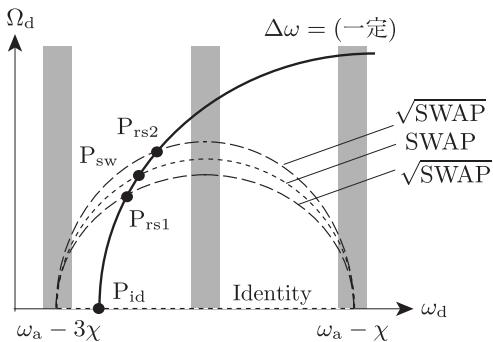


図 8.14 様々なゲートに対するドライブ条件。実線 ($\Delta\omega = \text{一定}$) に沿ってドライブ条件を変えることで、光子量子ビットの基底を保ったまま様々なゲートを実現できる。 P_{sw} (SWAP ゲート), $P_{rs1/2}$ ($\sqrt{\text{SWAP}}$ ゲート), P_{id} (Identity ゲート)。

*8) 断熱的にドライブ光をオン/オフすることによって、 $|\tilde{1}\rangle$, $|\tilde{2}\rangle$ は裸状態 $|g, 0\rangle$, $|e, 0\rangle$ に変換できる。

状態 $|\omega_l\rangle$, $|\omega_h\rangle$ を光子量子ビットとする。光子周波数は $(\omega_l, \omega_h) = (\tilde{\omega}_{32}, \tilde{\omega}_{31})$, $(\tilde{\omega}_{42}, \tilde{\omega}_{41})$ のどちらでもよいが、ここでは $(\tilde{\omega}_{32}, \tilde{\omega}_{31})$ として議論を進めよう。 $\omega_l = \tilde{\omega}_{32}$ が他の遷移周波数 $(\tilde{\omega}_{31}, \tilde{\omega}_{41}, \tilde{\omega}_{42})$ から十分に離れているとすると、式 (8.117)–(8.120) から $\xi_{11}(\omega_l) = \xi_{21}(\omega_l) = 1$, $\xi_{12}(\omega_l) = \xi_{22}(\omega_l) = 0$ となり、式 (8.115), (8.116) から $|\tilde{1}, \omega_l\rangle \rightarrow |\tilde{1}, \omega_l\rangle$, $|\tilde{2}, \omega_l\rangle \rightarrow |\tilde{1}, \omega_l\rangle$ であることがわかる。 $\omega_h = \tilde{\omega}_{31}$ に対しても同様の議論から、 $|\tilde{1}, \omega_h\rangle \rightarrow |\tilde{2}, \omega_l\rangle$, $|\tilde{2}, \omega_h\rangle \rightarrow |\tilde{2}, \omega_h\rangle$ となる。これら 4 本の式は、

$$(\alpha_1|\omega_l\rangle + \alpha_2|\omega_h\rangle)(\beta_1|\tilde{1}\rangle + \beta_2|\tilde{2}\rangle) \rightarrow \\ (\beta_1|\omega_l\rangle + \beta_2|\omega_h\rangle)(\alpha_1|\tilde{1}\rangle + \alpha_2|\tilde{2}\rangle) \quad (8.122)$$

とまとめることができ ($\alpha_{1,2}$, $\beta_{1,2}$ は任意係数)，原子・光子量子ビットの間で量子情報の交換 (SWAP ゲート) が起きていることを意味している。

ゲートが精度よく動作するには ω_l ($= \tilde{\omega}_{32}$) や ω_h ($= \tilde{\omega}_{31}$) が意図しない遷移を引き起こさない必要がある。この条件は、ドライブ周波数 ω_d と三つの周波数 $\omega_a - 3\chi$, $\omega_a - 2\chi$, $\omega_a - \chi$ との離調が線幅 κ よりも大きい場合に達成される (図 8.14 中の灰色領域)。

$\sqrt{\text{SWAP}}$ ゲート, Identity ゲート

着衣状態を用いるゲート方式の特長は、ドライブ周波数 ω_d や強度 Ω_d により、系の光学応答を大きく変えられる点である。特に、着衣状態 $|\tilde{1}\rangle$, $|\tilde{2}\rangle$ 間のエネルギー差

$$\Delta\omega = \sqrt{(\omega_a - \chi - \omega_d)^2 + 4\Omega_d^2} \quad (8.123)$$

を一定に保ったまま ω_d , Ω_d を変えることにより、光子量子ビットの基底 $|\omega_l\rangle$, $|\omega_h\rangle$ を保ったままゲート動作を切り替えることができる点である。

図 8.14 に様々なゲート動作を実現するための、ドライブ周波数 ω_d および強度 Ω_d の条件を示した。 $\Delta\omega = (\text{一定})$ の条件は実線で表されており、この線上でドライブ条件を変えることにより連続的にゲート動作を変えることができる。その中には、原子と光子に量子もつれを作る $\sqrt{\text{SWAP}}$ ゲートや、光子が原子と相互作用せずに通過する Identity ゲートが含まれている。

第 9 章

導波路 QED 入門

9.1 導波路 QED 系とは

多数の量子ビットからなる量子回路を動作させることは量子計算をはじめとする「量子状態工学」の究極の目標である。その自然な実装方法の一つは、多数の物質量子ビットを集積化し、それらを直接結合させてゲート操作を行う方法である。これらの方法では、直接結合による短時間のゲート操作が可能となる一方、空間的に近接した量子ビットを扱うため漏話などの問題が避けられない。

それと相補的なもう一つの方法は、空間的に離れた物質量子ビット間を、優れた量子コヒーレンスと伝播性を合わせ持つ光子によって量子的に接続する方法である^[59]。ところが、個々の光子を原子などの物質量子ビットと効率良く相互作用させることは簡単では無い。例えば自由空間中の原子にひとつの光子を照射しても、ほとんどの場合光子は原子と相互作用せずに素通りしてしまう。この原因は、照射光と原子発光の空間モード形状が著しく異なるためである。

この困難を打破しうるのが「導波路 QED 系」と称される一次元的な光学系である。この系では、原子や人工原子からの発光がファイバーや導波路などの一次元モードへとほぼ完全に誘導される。よって、この系において一次元モードから原子へ励起光を照射すると、照射光と原子からの散乱光との空間モードが良く一致しているため両者は強く干渉する。その結果、光子が原子を「素通り」する確率振幅を消去し、光子と原子との相互作用効率を劇的に増強することができる。

9.2 無限導波路との結合

ハミルトニアン

本節では、図 9.1 のように、一本の導波路に N 個の 2 準位原子が結合して

いる場合について考察しよう。導波路中の固有モードは一次元的な進行波であり、波数 $k (> 0)$ で正方向に伝播するモードの消滅演算子を \hat{a}_k 、波数 $k (> 0)$ で負方向に伝播するモードの消滅演算子を \hat{b}_k で表そう。固有モード関数は

$$f_k^{(a)}(r) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikr}, \quad f_k^{(b)}(r) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-ikr} \quad (9.1)$$

で与えられる。空間座標の原点 ($r = 0$) は、原子系の平均位置あたりに選んでおこう。また、原子 j の共鳴周波数を ω_j 、導波路に結合する位置を r_j 、結合の強さを γ_j 、消滅演算子を $\hat{\sigma}_j$ で表そう。回転波近似の下で、全系（原子 + 導波路）のハミルトニアンは次のように書ける。

$$\begin{aligned} \hat{H} = & \underbrace{\sum_{j=1}^N \omega_j \hat{\sigma}_j^\dagger \hat{\sigma}_j}_{\hat{H}_a} + \underbrace{\int_0^\infty dk k (\hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k + \hat{b}_k^\dagger \hat{b}_k)}_{\hat{H}_w} \\ & + \underbrace{\sum_{j=1}^N \int_0^\infty dk (\xi_{jk}^{(a)} \hat{\sigma}_j^\dagger \hat{a}_k + \xi_{jk}^{(b)} \hat{\sigma}_j^\dagger \hat{b}_k + \text{H.c.})}_{\hat{H}_i}. \end{aligned} \quad (9.2)$$

ここで結合定数 $\xi_{jk}^{(a)}$, $\xi_{jk}^{(b)}$ は

$$\xi_{jk}^{(a)} = \sqrt{\frac{\gamma_j}{2}} f_k^{(a)}(r_j), \quad \xi_{jk}^{(b)} = \sqrt{\frac{\gamma_j}{2}} f_k^{(b)}(r_j) \quad (9.3)$$

で与えられる。ただし、結合定数 γ_j は原子 j が単独で導波路に結合した場合の導波路への輻射崩壊レートを表す。上記のハミルトニアンでは波数 k は正の値をとるが、5.1 節でも行ったように波数 k の下限を $-\infty$ に拡張しよう。こうして導入される負波数モードは負のエネルギーを持つが、原子との離調が線幅よりも十分に大きいためにほとんど影響が無い。 \hat{a}_k , \hat{b}_k のフーリエ変換として空間表示の導波路モード演算子を次のように導入する。

$$\tilde{a}_r = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dk e^{ikr} \hat{a}_k, \quad \tilde{b}_r = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dk e^{-ikr} \hat{b}_k. \quad (9.4)$$

これを用いると、ハミルトニアンの相互作用項 \hat{H}_i を

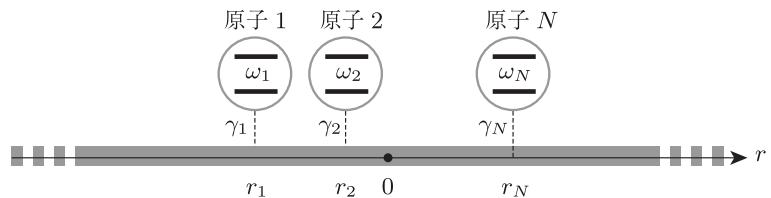


図 9.1 原子系 ($j = 1, \dots, N$) と無限導波路の結合。原子 j の遷移周波数を ω_j 、輻射緩和レートを γ_j 、導波路との結合位置を r_j とする。

$$\hat{H}_i = \sum_{j=1}^N \sqrt{\gamma_j/2} \left[\hat{\sigma}_j^\dagger (\tilde{a}_{r_j} + \tilde{b}_{-r_j}) + \text{H.c.} \right] \quad (9.5)$$

と表すことができる。

運動方程式

5.3 節と同様の方法により、導波路モードに対する下記の入出力関係式を導くことができる。

$$\tilde{a}_r(t) = \tilde{a}_{r-t}(0) - i \sum_j \sqrt{\frac{\gamma_j}{2}} \hat{\sigma}_j(t + r_j - r) \Theta_{r \in (r_j, r_j+t)}, \quad (9.6)$$

$$\tilde{b}_r(t) = \tilde{b}_{r-t}(0) - i \sum_j \sqrt{\frac{\gamma_j}{2}} \hat{\sigma}_j(t - r_j - r) \Theta_{r \in (-r_j, -r_j+t)}. \quad (9.7)$$

これらの式から

$$\begin{aligned} \tilde{a}_{r_j}(t) + \tilde{b}_{-r_j}(t) &= \tilde{a}_{r_j-t}(0) + \tilde{b}_{-r_j-t}(0) \\ &\quad - i \sum_m \sqrt{\frac{\gamma_m}{2}} \hat{\sigma}_m(t - |r_m - r_j|) \end{aligned} \quad (9.8)$$

が得られる。

式 (9.2), (9.5), (9.8) から、原子系に関する任意の演算子 \hat{O} に対するハイゼンベルグ方程式を導出すると、時間遅れのある項を含むことがわかる。原子どうしの間隔 Δr が短く、原子間を光子が伝播するのに要する時間が緩和時間よりも十分に短い場合には、

$$\hat{\sigma}_j(t - \Delta r) \approx \hat{\sigma}_j(t) e^{i\omega_j \Delta r} \quad (9.9)$$

と近似できる。これを自由発展近似 (free-evolution approximation) と呼ぶ。近似の成立条件は $\gamma_j \Delta r \ll 1$ である。^{*1)} この近似の下で

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{O}}{dt} &= i[\hat{H}_a, \hat{O}] + i \sum_j \left(\hat{N}_j^\dagger(t) [\hat{\sigma}_j, \hat{O}] + [\hat{\sigma}_j^\dagger, \hat{O}] \hat{N}_j(t) \right) + \sum_{j,m} \frac{\sqrt{\gamma_j \gamma_m}}{2} \times \\ &\quad \left(e^{i\omega_m |r_m - r_j|} [\hat{\sigma}_j^\dagger, \hat{O}] \hat{\sigma}_m + e^{-i\omega_j |r_j - r_m|} [\hat{\sigma}_j^\dagger, [\hat{O}, \hat{\sigma}_m]] \right) \end{aligned} \quad (9.10)$$

が得られる。ただし $\hat{N}_j(t)$ は原子 j に対するノイズ演算子であり

$$\hat{N}_j(t) = \sqrt{\frac{\gamma_j}{2}} \{ \tilde{a}_{r_j-t}(0) + \tilde{b}_{-r_j-t}(0) \} \quad (9.11)$$

で定義される。

原子間相互作用と協力的緩和

以下では、全ての原子が同一の共鳴周波数 ω_a を持つ場合を考えよう。また、

*1) 導波路中の光子の伝播速度を v を復活させれば、 $\gamma_j \Delta r / v \ll 1$ 。

入射波の周波数が ω_a 近傍であることを想定し

$$\tilde{a}_{r_j-t}(0) \approx e^{i\omega_a r_j} \tilde{a}_{-t}(0), \quad \tilde{b}_{-r_j-t}(0) \approx e^{-i\omega_a r_j} \tilde{b}_{-t}(0) \quad (9.12)$$

と近似しよう。近似の成立条件は、入射波の離調を $\Delta\omega (= \omega_{in} - \omega_a)$ として $\Delta\omega r_j \ll 1$ である。^{*2)} すると、式(9.10)を次のように書き直せる。

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{O}}{dt} &= i[\hat{H}_a + \hat{H}_{aa}, \hat{O}] + i \sum_{f=a,b} \left\{ [\tilde{f}_{-t}^\dagger(0)[\hat{S}_f, \hat{O}] + [\hat{S}_f^\dagger, \hat{O}]\tilde{f}_{-t}(0)] \right\} \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{f=a,b} ([\hat{S}_f^\dagger, \hat{O}]\hat{S}_f + \hat{S}_f^\dagger[\hat{O}, \hat{S}_f]). \end{aligned} \quad (9.13)$$

ただし、 \hat{H}_{aa} は導波路モードを介して発現する原子間ホッピング相互作用であり、

$$\hat{H}_{aa} = \sum_{j,m} h_{jm} \hat{\sigma}_j^\dagger \hat{\sigma}_m, \quad (9.14)$$

$$h_{jm} = \frac{\sqrt{\gamma_j \gamma_m}}{2} \sin(\omega_a |r_j - r_m|) \quad (9.15)$$

で与えられる。通常、粒子間の相互作用は相対距離が大きくなるに従って小さくなるが、式(9.15)に見られるように、導波路モード（一次元場）を介して発現するこの相互作用は距離とともに減衰しない特徴がある。また、 \hat{S}_a および \hat{S}_b は原子系に対する「協力的」消滅演算子であり、

$$\hat{S}_a = \sum_j \sqrt{\frac{\gamma_j}{2}} e^{-i\omega_a r_j} \hat{\sigma}_j, \quad \hat{S}_b = \sum_j \sqrt{\frac{\gamma_j}{2}} e^{i\omega_a r_j} \hat{\sigma}_j \quad (9.16)$$

で与えられる。このように、導波路と結合した原子系には、(i) 原子間にホッピング相互作用 \hat{H}_{aa} が生じる、(ii) 協力的生成消滅演算子 $\hat{S}_{a,b}$ を介して導波路モードへと輻射緩和する、という二つの効果が現れる^{[60], [61]}。

9.3 超放射

9.3.1 角運動量演算子と固有状態

前節において、複数の原子が導波路に結合する場合を考察し、協力的な輻射緩和が起こることを見た。その具体例として、本節では N 個の励起原子 ($j = 1, 2, \dots, N$) が導波路の同じ位置に結合している場合を考えよう。^{*3)} また、全ての原子は同じパラメータを持つものとし、 $\omega_j = \omega_a$, $\gamma_j = \gamma$, $r_j = 0$ としよう。このような場合には、 N 個の原子は一つ一つ区別がつかず、巨大な

^{*2)} 入射周波数が ω_{in} のときは $\langle \tilde{a}_{r_j-t}(0) \rangle = e^{i\omega_{in} r_j} \langle \tilde{a}_{-t}(0) \rangle$ であるが、この近似はこれを $e^{i\omega_a r_j} \langle \tilde{a}_{-t}(0) \rangle$ に置き換えることに相当する。よって近似の成立条件は $|\omega_{in} - \omega_a| r_j \ll 1$ である。離調が線幅程度であれば、これは自由発展近似の成立条件と同じである。

^{*3)} 原子が半波長の整数倍で整列している場合にも、概ね同じ結果になる。

スピン $N/2$ を持つ 1 個の粒子のように振る舞う。このような集団的運動を記述するには角運動量演算子（付録 B 参照）が有用である。

以下、 N 原子の消滅生成演算子と角運動量演算子の対応を示す。演算子 $\hat{J}_1, \hat{J}_2, \hat{J}_3$ を

$$\hat{J}_1 = \frac{1}{2} \sum_j (\hat{\sigma}_j + \hat{\sigma}_j^\dagger), \quad (9.17)$$

$$\hat{J}_2 = \frac{i}{2} \sum_j (\hat{\sigma}_j - \hat{\sigma}_j^\dagger), \quad (9.18)$$

$$\hat{J}_3 = \frac{1}{2} \sum_j (\hat{\sigma}_j^\dagger \hat{\sigma}_j - \hat{\sigma}_j \hat{\sigma}_j^\dagger) = \sum_j \hat{\sigma}_j^\dagger \hat{\sigma}_j - \frac{N}{2} \quad (9.19)$$

により導入しよう。これらの演算子は式 (B.2) の交換関係を満たしており、角運動量演算子としての性質を持つ。角運動量の大きさを表す演算子 $\hat{\mathbf{J}}^2$ ($= \hat{J}_1^2 + \hat{J}_2^2 + \hat{J}_3^2$) は角運動量の z 成分を表す演算子 \hat{J}_3 と可換であり、角運動量演算子の固有状態として $\hat{\mathbf{J}}^2$ および \hat{J}_3 の同時固有状態 $|l, m\rangle$ を選ぶ。固有方程式は

$$\hat{\mathbf{J}}^2 |l, m\rangle = l(l+1) |l, m\rangle, \quad (9.20)$$

$$\hat{J}_3 |l, m\rangle = m |l, m\rangle \quad (9.21)$$

であり、 l のとりうる値は $l = 0, \frac{1}{2}, 1, \dots$ であり、 m のとりうる値は $m = -l, \dots, l$ である。昇降演算子は $\hat{J}_\pm = \hat{J}_1 \pm i\hat{J}_2$ により定義される。 N 原子系の記法では、式 (9.17), (9.18) より

$$\hat{J}_+ = \sum_j \hat{\sigma}_j^\dagger, \quad \hat{J}_- = \sum_j \hat{\sigma}_j \quad (9.22)$$

と表すことができる。

N 原子が全て基底状態にある状態ベクトルを $|g \cdots g\rangle$ 、全て励起状態にある状態ベクトルを $|e \cdots e\rangle$ で表そう。 $\hat{J}_3 |g \cdots g\rangle = -\frac{N}{2} |g \cdots g\rangle$ であるから、 $|g \cdots g\rangle$ は \hat{J}_3 の固有ベクトルであり、固有値 $m = -\frac{N}{2}$ を持つことがわかる。また、式 (B.8) と $\hat{J}_- |g \cdots g\rangle = 0$ を用いると、 $\hat{\mathbf{J}}^2 |g \cdots g\rangle = \hat{J}_3(\hat{J}_3 - 1) |g \cdots g\rangle = \frac{N}{2}(\frac{N}{2} + 1) |g \cdots g\rangle$ が導かれる。つまり $|g \cdots g\rangle$ は $\hat{\mathbf{J}}^2$ の固有ベクトルでもあり、ラベル l の値は $l = \frac{N}{2}$ であることがわかる。 $|e \cdots e\rangle$ に対しても同様の議論ができる、角運動量の記法では

$$|gg \cdots g\rangle = |l = \frac{N}{2}, m = -\frac{N}{2}\rangle, \quad (9.23)$$

$$|ee \cdots e\rangle = |l = \frac{N}{2}, m = \frac{N}{2}\rangle \quad (9.24)$$

と表すことができる。本節では、 N 原子が全て励起されている状態からの自然放出を扱う。よって全系（原子 + 導波路）の初期状態ベクトルは、導波路モードの真空状態を $|\psi\rangle$ として

$$|\psi(0)\rangle = |e \cdots e\rangle \otimes |\text{v}\rangle \quad (9.25)$$

と表される。

9.3.2 超放射

原子系の任意の演算子 \hat{O} に対するハイゼンベルグ方程式は式 (9.13) であつた。本節で考えている状況(全ての原子に対して $\omega_j = \omega_a, \gamma_j = \gamma, r_j = 0$)では、 $\hat{H}_a = \omega_a(\hat{J}_3 + N/2), \hat{H}_{aa} = 0, \hat{S}_a = \hat{S}_b = \sqrt{\gamma/2} \hat{J}_-$ となる。 \hat{O} の期待値は、初期状態ベクトル (9.25) を用いて $\langle \hat{O}(t) \rangle = \langle \psi(0) | \hat{O}(t) | \psi(0) \rangle$ により求められる。初期状態では導波路が真空状態にあるため $\tilde{a}_{-t}(0) |\psi(0)\rangle = \tilde{b}_{-t}(0) |\psi(0)\rangle = 0$ となることを使うと、 $\langle \hat{O}(t) \rangle$ に対する運動方程式は

$$\frac{d}{dt} \langle \hat{O} \rangle = i\omega_a \langle [\hat{J}_3, \hat{O}] \rangle + \frac{\gamma}{2} (\langle [\hat{J}_+, \hat{O}] \hat{J}_- \rangle + \langle \hat{J}_+ [\hat{O}, \hat{J}_-] \rangle) \quad (9.26)$$

に帰着する。

まず $\hat{O} = \hat{\mathbf{J}}^2$ としてみよう。 $\hat{\mathbf{J}}^2$ が \hat{J}_3 や \hat{J}_\pm と交換する [式 (B.5), (B.6)] ことから

$$\frac{d}{dt} \langle \hat{\mathbf{J}}^2 \rangle = 0 \quad (9.27)$$

が得られる。つまり $\hat{\mathbf{J}}^2$ は保存量であり、量子数 l は初期時刻における値 ($l = N/2$) に固定されている。よって原子の輻射崩壊は、状態 $|\frac{N}{2}, m\rangle$ ($m = -\frac{N}{2}, \dots, \frac{N}{2}$) で張られるヒルベルト空間の中でおこる。

以下では、ラベル m (角運動量 z 成分) の代わりに原子励起数 n を用いよう。式 (9.19) より、 $n = m + \frac{N}{2}$ の関係がある。 n 励起状態 $|\frac{N}{2}, n - \frac{N}{2}\rangle$ への射影演算子を $\hat{P}_n = |\frac{N}{2}, n - \frac{N}{2}\rangle \langle \frac{N}{2}, n - \frac{N}{2}|$ により定義すると、時刻 t に原子系がこの状態にいる確率は、 $p_n(t) = \langle \hat{P}_n(t) \rangle$ により与えられる。式 (9.26)において $\hat{O} = \hat{P}_n$ と選ぶと、次の(古典的)マスター方程式が得られる。

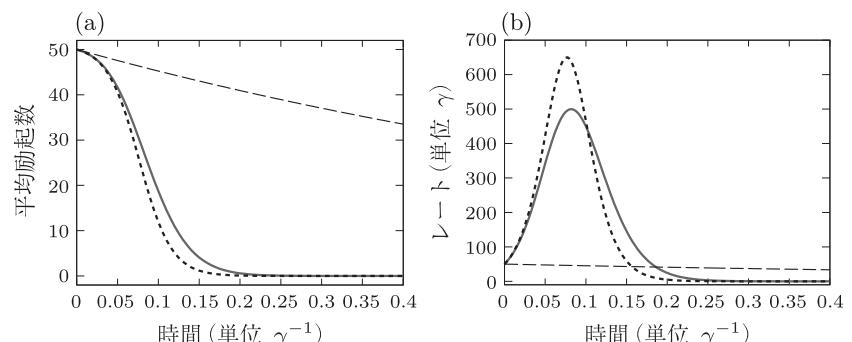


図 9.2 $N = 50$ 原子系の超放射。(a) 平均励起原子数 $\langle \hat{n} \rangle$, (b) 光子放出レート r . 実線: マスター方程式 (9.28) による厳密な数値解, 点線: 近似解 $\langle \hat{n} \rangle_{\text{app}}$ [式 (9.35)], 破線: 各原子が独立に崩壊する場合 [$\langle \hat{n} \rangle_{\text{indep}} = Ne^{-\gamma t}$].

$$\frac{d}{dt}p_n(t) = \gamma(N-n)(n+1)p_{n+1}(t) - \gamma(N-n+1)np_n(t). \quad (9.28)$$

初期条件はクロネッカーのデルタを用いて、 $p_j(0) = \delta_{j,N}$ である。式 (9.28) の右辺から、 n 励起状態の崩壊レートが $\gamma(N-n+1)n$ の形の n 依存性を持つことがわかる。崩壊の始め ($n = N$) や終わり ($n = 1$) ではこのレートは γN であるのに対して、崩壊の最中 ($n \approx N/2$) ではこのレートは $\gamma N^2/4$ となり、原子数に比例して崩壊が速くなる。このような協力的な輻射崩壊を超放射 (superradiance) と呼ぶ^{[62], [63]}。

原子系のマスター方程式 (9.28) から、時刻 t での励起原子数の確率分布 $\{p_n(t)\}$ を数値的に求めることができる。平均励起原子数 $\langle \hat{n} \rangle$ 、単位時間あたりの崩壊原子数 r は

$$\langle \hat{n} \rangle = \sum_n np_n(t), \quad (9.29)$$

$$r = -\frac{d\langle \hat{n} \rangle}{dt} \quad (9.30)$$

として求められる。式 (9.28) を数値的に解いて、 $\langle \hat{n}(t) \rangle$ や $r(t)$ の時間依存性を図 9.2 に実線で示した。これらは（この理論モデルの範囲内で）厳密な値である。原子間の協力効果が無い場合（破線）と比較して、崩壊の加速がおこっていることを確認できる。

9.3.3 近似解

式 (9.26) において $\hat{O} = \hat{J}_3$ としてみよう。式 (B.7), (B.8)などを用いると

$$\frac{d}{dt}\langle \hat{J}_3 \rangle = -\gamma \left[\langle \hat{J}^2 \rangle - \langle \hat{J}_3(\hat{J}_3 - 1) \rangle \right] \quad (9.31)$$

が得られる。ここで、 $\langle \hat{J}^2 \rangle = \frac{N}{2}(\frac{N}{2} + 1)$ が保存量であることを使い、励起原子数を表す演算子 $\hat{n} = \hat{J}_3 + N/2$ を導入すると

$$\frac{d}{dt}\langle \hat{n} \rangle = -\gamma(N+1)\langle \hat{n} \rangle + \gamma\langle \hat{n}^2 \rangle \quad (9.32)$$

が得られる。^{*4)} ここで方程式を閉じさせるために、励起原子数の揺らぎを無視して $\langle \hat{n}^2 \rangle \approx \langle \hat{n} \rangle^2$ と近似して、微分方程式

$$\frac{d}{dt}\langle \hat{n} \rangle_{\text{app}} = -\gamma(N+1)\langle \hat{n} \rangle_{\text{app}} + \gamma\langle \hat{n} \rangle_{\text{app}}^2 \quad (9.34)$$

に従う量 $\langle \hat{n} \rangle_{\text{app}}$ を考えよう。初期条件 $\langle \hat{n}(0) \rangle_{\text{app}} = N$ より微分方程式 (9.34)

^{*4)} この式は次のように導出することもできる。平均励起原子数の定義式 (9.29) を時間で微分し、マスター方程式 (9.28) を用いることにより、

$$\frac{d}{dt}\langle \hat{n} \rangle = \sum_n n \frac{dp_n}{dt} = -\gamma(N+1)\langle \hat{n} \rangle + \gamma\langle \hat{n}^2 \rangle \quad (9.33)$$

が得られる。ただし $\langle \hat{n}^2 \rangle = \sum_n n^2 p_n(t)$ である。

の解は

$$\langle \hat{n} \rangle_{\text{app}} = \frac{N(N+1)}{N + e^{(N+1)\gamma t}} \quad (9.35)$$

である。この近似解を図 9.2(a) に点線で示した。近似解を導く際に $\langle \hat{n}^2 \rangle \approx \langle \hat{n} \rangle^2$ としたが、正しくは常に $\langle \hat{n}^2 \rangle \leq \langle \hat{n} \rangle^2$ であるから、近似解 $\langle \hat{n} \rangle_{\text{app}}$ は厳密解 $\langle \hat{n} \rangle$ を小さく評価している。これは図 9.2(a) でも確認できる。

9.3.4 反超放射

ここまで議論では、光子を介した原子どうしの相互作用が原子の輻射崩壊を加速させることを見た。一方で、異なる初期条件のもとでは、原子の輻射崩壊が遅くなったり、さらには完全に抑制される場合があり反超放射 (subradiance) と呼ばれる。

ここでは、最も簡単な $N = 2$ の場合を例に、反超放射のメカニズムを説明しよう。固有状態をラベル (l, m) で指定すると、状態は $|1, 1\rangle = |ee\rangle$, $|1, 0\rangle = (|ge\rangle + |eg\rangle)/\sqrt{2}$, $|1, -1\rangle = |gg\rangle$, $|0, 0\rangle = (|ge\rangle - |eg\rangle)/\sqrt{2}$ の 4 つであり、超放射は $l = 1$ の状態空間で $|1, 1\rangle \rightarrow |1, 0\rangle \rightarrow |1, -1\rangle$ のように起こる。一方、 $l = 0$ の状態は $|0, 0\rangle$ の一つだけであり緩和を起こさない。この状態 $|0, 0\rangle$ が反超放射状態に相当する。

問題

超放射状態 $|1, 0\rangle$ と基底状態 $|1, -1\rangle$ の間の遷移双極子モーメント $\mu_{\text{sup}} = \langle 1, 0 | \hat{J}_1 | 1, -1 \rangle$ を求めよ。また反超放射状態に対する量 $\mu_{\text{sub}} = \langle 0, 0 | \hat{J}_1 | 1, -1 \rangle$ を求めよ。

解答 超放射状態に対しては

$$\mu_{\text{sup}} = (\langle eg | \hat{\sigma}_1^\dagger | gg \rangle + \langle ge | \hat{\sigma}_2^\dagger | gg \rangle) / \sqrt{2} = \sqrt{2} \quad (9.36)$$

となり、遷移双極子モーメントは 1 原子の場合の $\sqrt{2}$ 倍、崩壊レートは 2 倍になる。反超放射状態に対しては

$$\mu_{\text{sub}} = (-\langle eg | \hat{\sigma}_1^\dagger | gg \rangle + \langle ge | \hat{\sigma}_2^\dagger | gg \rangle) / \sqrt{2} = 0 \quad (9.37)$$

となり、遷移双極子モーメントはゼロになり崩壊は禁制になる。

上の問題からわかるように、超放射状態の場合には二つの原子からの自然放出光子が正の干渉をおこし、反超放射状態の場合には負の干渉をおこしている。換言すると、遷移双極子モーメントの総和は 2 原子間で一定に保たれていって、遷移双極子モーメントが超放射状態に集中する分、反超放射状態は遷移双極子モーメントを失って緩和が抑制される。

9.4 半無限導波路との結合

ハミルトニアン

本節では、図 9.3 のように、一本の半無限導波路に N 個の 2 準位原子が結合している場合について考察しよう。半無限導波路の理論的扱いについては 5.1 節で議論した。それにならって、座標軸 r を導波路端点を原点とするようになると、導波路中の固有モードは定在波であり、波数 k (> 0) で一次元的にラベルされる。固有モード関数は

$$f_k^{(c)}(r) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos(kr + \theta) \quad (9.38)$$

で与えられる。ただし θ は導波路端点での境界条件を決める位相であり、 $\theta = 0$ ならば開放端、 $\theta = \pi/2$ ならば固定端である。このモードに対する消滅演算子を \hat{c}_k で表そう。すると、全系（原子 + 導波路）のハミルトニアンは次のように書ける。

$$\hat{H} = \underbrace{\sum_{j=1}^N \omega_j \hat{\sigma}_j^\dagger \hat{\sigma}_j}_{\hat{H}_a} + \underbrace{\int_0^\infty dk k \hat{c}_k^\dagger \hat{c}_k}_{\hat{H}_w} + \underbrace{\sum_{j=1}^N \int_0^\infty dk (\xi_{jk}^{(c)} \hat{\sigma}_j^\dagger \hat{c}_k + \text{H.c.})}_{\hat{H}_i}. \quad (9.39)$$

ここで結合定数 $\xi_{jk}^{(c)}$ は

$$\xi_{jk}^{(c)} = \sqrt{\frac{\gamma_j}{2}} f_k^{(c)}(r_j) = \sqrt{\frac{\gamma_j}{\pi}} \cos(kr_j + \theta) \quad (9.40)$$

で与えられる。ただし、原子 j が導波路に結合する位置を r_j 、結合の強さを γ_j とした。無限導波路の場合と同様に、波数 k の下限を $-\infty$ まで拡張し、 \hat{c}_k のフーリエ変換として空間表示の導波路モード演算子を次のように導入する。

$$\tilde{c}_r = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dk e^{ikr} \hat{c}_k. \quad (9.41)$$

これを用いると、ハミルトニアンの相互作用項 \hat{H}_i を

$$\hat{H}_i = \sum_{j=1}^N \sqrt{\frac{\gamma_j}{2}} [\hat{\sigma}_j^\dagger (e^{i\theta} \tilde{c}_{r_j} + e^{-i\theta} \tilde{c}_{-r_j}) + \text{H.c.}] \quad (9.42)$$

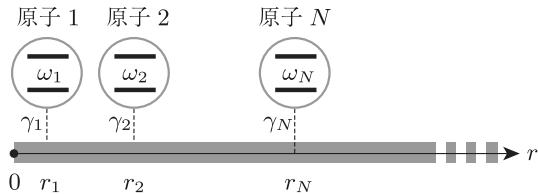


図 9.3 原子系 ($j = 1, \dots, N$) と半無限導波路との結合。

と表すことができる。

運動方程式

5.3 節と同様の方法により、導波路モードに対する下記の入出力関係式を導くことができる。

$$\begin{aligned}\tilde{c}_r(t) = & \tilde{c}_{r-t}(0) - i \sum_j \sqrt{\frac{\gamma_j}{2}} [e^{i\theta} \hat{\sigma}_j(t-r-r_j) \Theta_{r \in (-r_j, -r_j+t)} \\ & + e^{-i\theta} \hat{\sigma}_j(t-r+r_j) \Theta_{r \in (r_j, r_j+t)}].\end{aligned}\quad (9.43)$$

これより

$$\begin{aligned}\sqrt{\frac{\gamma_j}{2}} [e^{i\theta} \tilde{c}_{r_j}(t) + e^{-i\theta} \tilde{c}_{-r_j}(t)] = & \hat{N}_j(t) - i \sum_m \frac{\sqrt{\gamma_j \gamma_m}}{2} \times \\ & [e^{2i\theta} \hat{\sigma}_m(t-r_m-r_j) + \hat{\sigma}_m(t-|r_m-r_j|)]\end{aligned}\quad (9.44)$$

が得られる。ただし、 $\hat{N}_j(t)$ は原子 j に対するノイズ演算子であり

$$\hat{N}_j(t) = \sqrt{\frac{\gamma_j}{2}} [e^{i\theta} \tilde{c}_{r_j-t}(0) + e^{-i\theta} \tilde{c}_{-r_j-t}(0)] \quad (9.45)$$

で定義される。式 (9.39), (9.42), (9.44) から、原子系に関する任意の演算子 \hat{O} に対するハイゼンベルグ方程式を導くことができる。自由発展近似 [式 (9.9)] を用いて

$$\begin{aligned}\frac{d\hat{O}}{dt} = & i[\hat{H}_a, \hat{O}] + i \sum_j (\hat{N}_j^\dagger(t)[\hat{\sigma}_j, \hat{O}] + [\hat{\sigma}_j^\dagger, \hat{O}]\hat{N}_j(t)) \\ & + \sum_{j,m} \frac{\sqrt{\gamma_j \gamma_m}}{2} (e^{i[\omega_m(r_m+r_j)+2\theta]} + e^{i\omega_m|r_m-r_j|}) [\hat{\sigma}_j^\dagger, \hat{O}] \hat{\sigma}_m \\ & + \sum_{j,m} \frac{\sqrt{\gamma_j \gamma_m}}{2} (e^{-i[\omega_j(r_m+r_j)+2\theta]} + e^{-i\omega_j|r_m-r_j|}) \hat{\sigma}_j^\dagger [\hat{O}, \hat{\sigma}_m]\end{aligned}\quad (9.46)$$

が得られる。

原子間相互作用と協力的緩和

以下では、全ての原子が同一の共鳴周波数 ω_a を持つ場合を考えよう。また、入射波の周波数が ω_a 近傍であることを想定し、式 (9.12) と同様に

$$\tilde{c}_{r_j-t}(0) \approx e^{i\omega_a r_j} \tilde{c}_{-t}(0) \quad (9.47)$$

と近似しよう。すると、式 (9.46) は次のように書ける。

$$\begin{aligned}\frac{d\hat{O}}{dt} = & i[\hat{H}_a + \hat{H}_{aa}, \hat{O}] + i \left\{ \tilde{c}_{-t}^\dagger(0)[\hat{S}, \hat{O}] + [\hat{S}^\dagger, \hat{O}]\tilde{c}_{-t}(0) \right\} \\ & + \frac{1}{2} ([\hat{S}^\dagger, \hat{O}]\hat{S} + \hat{S}^\dagger[\hat{O}, \hat{S}]).\end{aligned}\quad (9.48)$$

ただし、原子間ホッピング相互作用 \hat{H}_{aa} は

$$\hat{H}_{\text{aa}} = \sum_{j,m} h_{jm} \hat{\sigma}_j^\dagger \hat{\sigma}_m, \quad (9.49)$$

$$h_{jm} = \sqrt{\gamma_j \gamma_m} \cos[\omega_a \min(r_j, r_m) + \theta] \sin[\omega_a \max(r_j, r_m) + \theta] \quad (9.50)$$

であり、原子系に対する「協力的」消滅演算子 \hat{S} は

$$\hat{S} = \sum_j \sqrt{2\gamma_j} \cos(\omega_a r_j + \theta) \hat{\sigma}_j \quad (9.51)$$

である。無限導波路の場合は、原子系は 2 種類の連続モードと結合しており二つの協力的消滅演算子 \hat{S}_a , \hat{S}_b を介して緩和したが、半無限導波路の場合は 1 種類だけである。また、ホッピングの係数 h_{jm} に関して、無限導波路の場合は二つの原子の距離 $|r_j - r_m|$ のみに依存するが [式 (9.15)], 半無限導波路の場合は導波路端での反射があり、より複雑な形を持つ [式 (9.50)],

9.5 半無限導波路に結合した単一原子

9.2 節の議論において原子数 $N = 1$ として、一つの原子が無限導波路に結合している場合を復習しよう。式 (9.14), (9.15) より $\hat{H}_{\text{aa}} = 0$ となり、原子の遷移周波数は原子の結合位置 r_1 に依存しない。また、式 (9.13) において $\hat{O} = \hat{\sigma}_1^\dagger \hat{\sigma}_1$ と選び、初期条件を原子励起状態 ($|\psi(0)\rangle = \hat{\sigma}_1^\dagger |v\rangle$) として原子の崩壊を見てみると、 $\frac{d}{dt}\langle \hat{\sigma}_1^\dagger \hat{\sigma}_1 \rangle = -\gamma_1 \langle \hat{\sigma}_1^\dagger \hat{\sigma}_1 \rangle$ が得られる。つまり崩壊レート γ_1 も原子の結合位置 r_1 に依存しない。これら二つの点は、系の並進対称性からも自明である。

一つの原子が半無限導波路に結合している場合は、系の並進対称性が破れており事情が異なる^[64]。式 (9.49), (9.50) より $\hat{H}_{\text{aa}} = \frac{\gamma_1}{2} \sin[2(\omega_a r_1 + \theta)] \hat{\sigma}_1^\dagger \hat{\sigma}_1$ であり、 \hat{H}_a と合わせると、原子の遷移周波数は

$$\omega_a \rightarrow \omega_a + \frac{\gamma_1}{2} \sin[2(\omega_a r_1 + \theta)] \quad (9.52)$$

となり、結合位置 r_1 に依存するようになる。また、式 (9.48) において $\hat{O} = \hat{\sigma}_1^\dagger \hat{\sigma}_1$ と選んで励起確率の時間発展を見てみると、 $\frac{d}{dt}\langle \hat{\sigma}_1^\dagger \hat{\sigma}_1 \rangle = -2\gamma_1 \cos^2(\omega_a r_1 + \theta) \langle \hat{\sigma}_1^\dagger \hat{\sigma}_1 \rangle$ となり、原子の崩壊レートも

$$\gamma_1 \rightarrow 2\gamma_1 \cos^2(\omega_a r_1 + \theta) \quad (9.53)$$

のように、結合位置 r_1 に依存するようになる。

無限/半無限導波路の違いを、1.4.7 節で議論した、原子の自己エネルギーの観点から見てみよう。無限導波路の場合には、原子-導波路結合のスペクトル密度は、式 (9.2) より

$$|\xi(\omega)|^2 = |\xi_{1\omega}^{(a)}|^2 + |\xi_{1\omega}^{(b)}|^2 = \frac{\gamma_1}{2\pi} \quad (9.54)$$

となり、周波数 ω に依存しない一定値をとる。原子の自己エネルギーは、式 (1.217) の連続スペクトル版として

$$\Sigma(\omega_a) = \int d\omega \frac{|\xi(\omega)|^2}{\omega_a - \omega + i0} = -\frac{i\gamma_1}{2} \quad (9.55)$$

となる。この量の実部・虚部が Lamb シフトと自然放出レートに相当し、(Lamb シフト) = $\text{Re } \Sigma(\omega_a) = 0$, (自然放出レート) = $-2 \text{Im } \Sigma(\omega_a) = \gamma_1$ で与えられる。これらの結果は、無限導波路の場合には、原子の遷移周波数が結合により変化しないこと、自然放出レートが結合位置に依存しないことを再現している。

一方、半無限導波路の場合の結合スペクトル密度は、式 (9.39) より

$$|\xi(\omega)|^2 = |\xi_{1\omega}^{(c)}|^2 = \frac{\gamma_1}{\pi} \cos^2(\omega_a r_1 + \theta) \quad (9.56)$$

となり、周波数 ω に依存する。この場合の自己エネルギーは、

$$\begin{aligned} \Sigma(\omega_a) &= -\frac{\gamma_1}{\pi} \int d\omega \frac{\cos^2(\omega r_1 + \theta)}{\omega - \omega_a + i0} \\ &= \frac{\gamma_1}{2} \sin[2(\omega_a r_1 + \theta)] - i\gamma_1 \cos^2(\omega_a r_1 + \theta) \end{aligned} \quad (9.57)$$

となる。よって、(Lamb シフト) = $\text{Re } \Sigma(\omega_a) = \frac{\gamma_1}{2} \sin[2(\omega_a r_1 + \theta)]$, (自然放出レート) = $-2 \text{Im } \Sigma(\omega_a) = 2\gamma_1 \cos^2(\omega_a r_1 + \theta)$ となり、式 (9.52), (9.53) の結果を再現する。

このように、半無限導波路では、原子の自然放出レートが導波路端の境界条件に依存する。超伝導回路 QED では、導波路端を SQUID で終端してそれを貫く磁束量を制御することにより境界条件を連続的に変化させることができる^[65]、超伝導原子の自然放出レートを「遠隔操作」することができ、波形制御可能な単一光子源を実現することができる^[66]。

9.6 Josephson 量子フィルタ

量子計算を行う際には、量子ビットに対して個別にゲート操作や状態測定を行う必要がある。そのために、特に固体中の人工原子によって量子ビットを実装する場合には、個々の原子に専用の共振器や導波路を結合させて、そこからゲートパルスや読み出しパルスを照射する。この原子-導波路結合には二つの役割がある。一つは、原子が「感じる」パルス強度を決める役割である。量子計算のためには、短いゲート時間や読み出し時間が求められるが、そのためには原子-導波路結合は強いほうが良い。もう一つは、原子の導波路への輻射崩壊レートを決める役割である。量子計算のためには量子ビットの寿命が長いほうが望ましく、原子-導波路結合は弱いほうが良い。このように、量子ビット寿命とゲート時間の間にはトレードオフが存在する。Josephson 量子フィルタ

は、このトレードオフを解消し、長い量子ビット寿命と短いゲート時間とを両立させる役割を持つ^{[67], [68]}.

9.6.1 セットアップと定式化

本節では、図 9.4 のように、制御の対象である原子 1 (データ量子ビット、DQ) に対してゲートパルス照射用の半無限導波路 (制御線) を結合させる状況を考察する。この原子 1 を輻射崩壊から守るために、その手前に原子 2 (Josephson 量子フィルタ、JQF) を強く結合させる。原子 1, 2 の共鳴周波数は等しく $\omega_1 = \omega_2 = \omega_a$ であり、導波路への結合位置を $r_{1,2}$ 、結合定数を $\gamma_{1,2}$ とおく。また導波路端点での境界条件は開放端であるとする。

この系の理論的な定式化は、9.4 節において $\theta = 0$, $N = 2$ とする場合に相当する。以下では、原子と導波路端点との距離が短く自由発展近似 [式 (9.9)] が成り立ち、また、入射波周波数が ω_a 近傍であり近似 $\tilde{c}_{r_j-t}(0) \approx e^{i\omega_a r_j} \tilde{c}_{r_j-t}(0)$ [式 (9.47)] が成り立つものとしよう。原子 1, 2 に関する任意の演算子 \hat{O} に対する運動方程式 (9.46) を再掲すると、

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{O}}{dt} &= i[\hat{H}_a, \hat{O}] + i \sum_{m=1,2} \left(\hat{N}_m^\dagger(t)[\hat{\sigma}_m, \hat{O}] + [\hat{\sigma}_m^\dagger, \hat{O}]\hat{N}_m(t) \right) \\ &\quad + \sum_{m,n=1,2} \left(\xi_{mn} [\hat{\sigma}_m^\dagger, \hat{O}] \hat{\sigma}_n + \xi_{mn}^* \hat{\sigma}_m^\dagger [\hat{O}, \hat{\sigma}_n] \right), \end{aligned} \quad (9.58)$$

$$\hat{H}_a = \sum_{m=1,2} \omega_m \hat{\sigma}_m^\dagger \hat{\sigma}_m, \quad (9.59)$$

$$\hat{N}_m(t) = \sqrt{2\gamma_m} \cos(\omega_a r_m) \tilde{c}_{-t}(0), \quad (9.60)$$

$$\xi_{mn} = \frac{\sqrt{\gamma_m \gamma_n}}{2} \left(e^{i\omega_a(r_m+r_n)} + e^{i\omega_a|r_m-r_n|} \right) \quad (9.61)$$

である。

9.6.2 寿命とゲート時間のトレードオフ

まず JQF が無い場合 ($\gamma_2 = 0$) について、DQ の寿命やゲート時間を見て

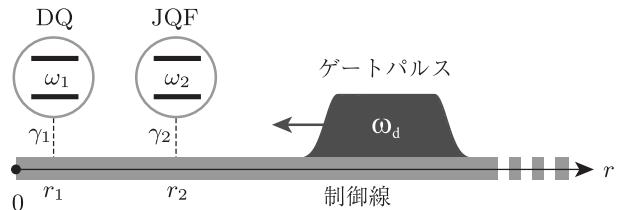


図 9.4 Josephson 量子フィルタ (JQF) によるデータ量子ビット (DQ) の保護。本節でのパラメータ値は次のとおり : $\omega_1/2\pi = \omega_2/2\pi = 5$ GHz (導波路中の光速度 $v = 10^8$ m/s のとき, 共鳴波長 $\lambda_a = 20$ mm), $r_1 = 0$ mm, $r_2 = \lambda_a/2 = 10$ mm, $\gamma_1/2\pi = 2$ kHz, $\gamma_2/2\pi = 100$ MHz.

みよう. 式 (9.58)において $\hat{O} = \hat{\sigma}_1$ とすると,

$$\frac{d}{dt}\hat{\sigma}_1 = (-i\bar{\omega}_a - \eta^2/2)\hat{\sigma}_1 + i\eta(1 - 2\hat{\sigma}_1^\dagger\hat{\sigma}_1)\tilde{c}_{-t}(0) \quad (9.62)$$

が得られる. ただし $\bar{\omega}_a = \omega_a + (\gamma_1/2)\sin(2\omega_ar_1)$ は Lamb シフトを繰りこんだ DQ の遷移周波数 [式 (9.52)] であり, $\eta = \sqrt{2\gamma_1}\cos(\omega_ar_1)$ である.

照射光が無い場合には, $\tilde{c}_{-t}(0) \rightarrow 0$ として, DQ の励起確率は $\frac{d}{dt}\langle\hat{\sigma}_1^\dagger\hat{\sigma}_1\rangle = -\eta^2\langle\hat{\sigma}_1^\dagger\hat{\sigma}_1\rangle$ に従って指数的に減衰する. よって, 量子ビットの輻射寿命 T_r は

$$T_r = 1/\eta^2 \quad (9.63)$$

で与えられる. 一方, 振幅 E_d の共鳴光を定常的に照射する場合には, $\tilde{c}_{-t}(0) \rightarrow \mathcal{E}(t) = E_d e^{-i\bar{\omega}_a t}$ として, DQ の励起確率は $\frac{d^2}{dt^2}\langle\hat{\sigma}_1^\dagger\hat{\sigma}_1\rangle = 2\eta^2|E_d|^2(1 - 2\langle\hat{\sigma}_1^\dagger\hat{\sigma}_1\rangle)$ に従い,^{*5)} Rabi 振動数 $\Omega_r = 2|\eta E_d|$ で振動する. ゲート時間 T_g を Rabi 振動周期の半分, ゲート速度 T_g^{-1} をその逆数で見積もりると,

$$T_g^{-1} = \frac{2|\eta E_d|}{\pi} \quad (9.64)$$

となり, T_r と T_g^{-1} を同時に大きくすることはできない. このように, 量子ビットの寿命とゲート速度の間にはトレードオフが存在する.

通常, 量子ビットには輻射崩壊以外にも崩壊経路が存在するので, 量子ビットの寿命 T_1 は輻射寿命 T_r よりも短い. よって, 式 (9.63), (9.64) より

$$\frac{T_1}{T_g^2} \leq \frac{4|E_d|^2}{\pi^2} \quad (9.65)$$

が成立する. $|E_d|^2$ は照射光の光子流束 (単位時間あたりの光子数) を表す.

9.6.3 輻射緩和

本節では, DQ の輻射緩和を考えよう. JQF がもし励起されていたとしても, 大きな γ_2 のためにすぐに基底状態に緩和するので, 初期状態として, DQ のみが励起状態にある次の状態を考えよう.

$$|\psi(0)\rangle = \hat{\sigma}_1^\dagger |v\rangle. \quad (9.66)$$

ただし $|v\rangle$ は全系 (DQ + JQF + 制御線) に励起の無い状態である.

この状態が式 (9.39) のハミルトニアン \hat{H} により, $|\psi(t)\rangle = e^{-i\hat{H}t}|\psi(0)\rangle$ と時間発展する. \hat{H} は励起数を保存するので, $|\psi(t)\rangle$ は 1 励起の状態空間で時間発展し,

$$|\psi(t)\rangle = \sum_{j=1,2} \alpha_j(t) \hat{\sigma}_j^\dagger(0) |v\rangle + \int dr f(r, t) \tilde{c}_r^\dagger(0) |v\rangle \quad (9.67)$$

*5) DQ の緩和は無視した.

と書くことができる。ここで $f(r, t)$ は放出光子の波動関数であり、

$$\sum_j |\alpha_j(t)|^2 + \int_0^\infty dr |f(r, t)|^2 = 1 \quad (9.68)$$

を満たすように規格化されている。

係数 $\alpha_j(t)$ の運動方程式を求めてみよう。式 (9.67) から、 $\alpha_j(t) = \langle v | \hat{\sigma}_j(0) | \psi(t) \rangle = \langle v | e^{-i\hat{H}t} \hat{\sigma}_j(t) \hat{\sigma}_1^\dagger(0) | v \rangle$ であり、さらに $\hat{H}|v\rangle = 0$ から

$$\alpha_j(t) = \langle v | \hat{\sigma}_j(t) \hat{\sigma}_1^\dagger(0) | v \rangle \quad (9.69)$$

と表すことができる。式 (9.58) より、演算子 $\hat{\sigma}_{1,2}(t)$ のハイゼンベルグ方程式は

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \hat{\sigma}_1 &= (-i\omega_a - \xi_{11}) \hat{\sigma}_1 - \xi_{12} (1 - 2\hat{\sigma}_1^\dagger \hat{\sigma}_1) \hat{\sigma}_2 \\ &\quad - i(1 - 2\hat{\sigma}_1^\dagger \hat{\sigma}_1) \hat{N}_1(t), \end{aligned} \quad (9.70)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \hat{\sigma}_2 &= (-i\omega_a - \xi_{22}) \hat{\sigma}_2 - \xi_{21} (1 - 2\hat{\sigma}_2^\dagger \hat{\sigma}_2) \hat{\sigma}_1 \\ &\quad - i(1 - 2\hat{\sigma}_2^\dagger \hat{\sigma}_2) \hat{N}_2(t) \end{aligned} \quad (9.71)$$

により与えられるが、左から $\langle v |$ 、右から $\hat{\sigma}_1^\dagger(0) | v \rangle$ を掛けて期待値をとることにより

$$\frac{d}{dt} \alpha_1 = -(i\omega_a + \xi_{11}) \alpha_1 - \xi_{12} \alpha_2, \quad (9.72)$$

$$\frac{d}{dt} \alpha_2 = -\xi_{21} \alpha_1 - (i\omega_a + \xi_{22}) \alpha_2 \quad (9.73)$$

が得られる。^{*6)} 初期条件は $\alpha_1(0) = 1$ 、 $\alpha_2(0) = 0$ である。

放出される光子の波動関数 $f(r, t)$ を求めよう。式 (9.69) と同様にして、
 $f(r, t) = \langle v | \tilde{c}_r(t) \hat{\sigma}_1^\dagger(0) | v \rangle$ が得られる。また、式 (9.43) に式 (9.9) の近似を適用して、
 $\tilde{c}_r(t) = \tilde{c}_{r-t}(0) - i \sum_j \sqrt{2\gamma_j} \cos(\omega_a r_j) \hat{\sigma}_j(t-r) \Theta_{r \in (0, t)}$ が得られる。
以上より、波動関数 $f(r, t)$ は

$$f(r, t) = -i \Theta_{r \in (0, t)} \sum_{j=1,2} \sqrt{2\gamma_j} \cos(\omega_a r_j) \alpha_j(t-r) \quad (9.74)$$

で与えられる。放出光子は導波路を一定速度 $v (= 1)$ で伝播するため、波動関数は 1 変数 $r - t$ のみに依存している。また、自然放出が $t = 0$ に始まっているため、波動関数は $0 < r < t$ の領域に分布している。

問題

規格化条件 (9.68) を確認せよ。

*6) 導出には $\hat{\sigma}_1(t) \hat{\sigma}_2(t) \hat{\sigma}_j^\dagger(0) | v \rangle = 0$ を用いる。この式は、直感的には 1 励起状態から 2 個の励起を取り去ることはできない、と理解できる。

解答 $P(t) = \sum_j |\alpha_j(t)|^2 + \int_0^\infty dr |f(r, t)|^2$ の時間微分を考える。 $f(r, t)$ が変数 $r - t$ のみに依存し、また $0 < r < t$ の領域に局在していることを考慮すると $\frac{d}{dt} \int_0^\infty dr |f(r, t)|^2 = |f(0, t)|^2$ となることがわかる。この事実と式 (9.72), (9.73) より $\frac{d}{dt} P(t) = 0$ が示せる。初期条件 $P(0) = 1$ を考慮して、任意の時刻 t において $P(t) = 1$ である。

α_1, α_2 の時間発展

式 (9.72), (9.73) において原子どうしの相互作用を無視すると、原子 j の複素周波数は $\omega_a - i\xi_{jj}$ で与えられ、崩壊レートは $-2\text{Im}(\xi_{jj}) = 2\gamma_j \cos^2(\omega_a r_j)$ で与えられる。 $\gamma_2 \gg \gamma_1$ であるから、JQF の位置が $r_2 \approx (1+2n)\lambda_a/4$ である場合を除くと ($\lambda_a = 2\pi v/\omega_a$ は DQ および JQF の共鳴波長, n は自然数), JQF は DQ よりも遙かに速く崩壊する。よって、式 (9.73) において周波数 ω_d の回転座標に移行し断熱近似を行うと、 $\alpha_2(t) \approx -(\xi_{21}/\xi_{22})\alpha_1(t)$ が得られる。これを式 (9.72) に代入すると、DQ の複素周波数 $\tilde{\omega}'_1$ は

$$\begin{aligned}\tilde{\omega}'_1 &= \omega_a - i \left(\xi_{11} - \frac{\xi_{12}\xi_{21}}{\xi_{22}} \right) \\ &= \omega_a - \gamma_1 \frac{\cos(\omega_a r_1) \sin[\omega_a(r_2 - r_1)]}{\cos(\omega_a r_2)}\end{aligned}\quad (9.75)$$

となり、虚部がゼロになることを確認できる。これは、JQF を制御ラインに強く結合させることによって、DQ の輻射崩壊を完全に抑えられることを意味する。条件は $r_2 \neq (1+2n)\lambda_a/4$ 、すなわち JQF が共鳴する導波路モードの節以外の位置に結合していることであり、(DQ が JQF よりも導波路端点に近ければ) DQ の位置 r_1 には依存しない。

問題

JQF が DQ よりも導波路端点に近い場合について、DQ の複素周波数 $\tilde{\omega}'_1$ を求めよ。

解答 $\tilde{\omega}'_1 = \omega_a - i(\xi_{11} - \xi_{12}\xi_{21}/\xi_{22})$, $\xi_{jj} = \gamma_j \cos(\omega_a r_j) e^{i\omega_a r_j}$ は上述の議論と変わらないが、 ξ_{12} (= ξ_{21}) に関して違いがあり、 $r_2 < r_1$ の場合には $\xi_{12} = \sqrt{\gamma_1 \gamma_2} \cos(\omega_a r_2) e^{i\omega_a r_1}$ となる。このとき

$$\tilde{\omega}'_1 = \omega_a - \gamma_1 e^{i\omega_a(r_1 - r_2)} \sin[\omega_a(r_1 - r_2)] \quad (9.76)$$

となり、DQ の緩和を完全に抑制する (= $\tilde{\omega}'_1$ の虚部をゼロにする) ためには、DQ と JQF の間隔を $r_1 = r_2 + n\lambda_a/2$ ($n = 0, 1, \dots$) に厳密に合わせる必要が生じる。

微分方程式 (9.72), (9.73) は厳密に解くことができ、解は

$$\alpha_1(t) = \left(\frac{\mu_2 + \xi_{22}}{\mu_2 - \mu_1} e^{\mu_1 t} + \frac{\mu_1 + \xi_{22}}{\mu_1 - \mu_2} e^{\mu_2 t} \right) e^{-i\omega_a t}, \quad (9.77)$$

$$\alpha_2(t) = \frac{\xi_{21}}{\mu_2 - \mu_1} (e^{\mu_1 t} - e^{\mu_2 t}) e^{-i\omega_a t} \quad (9.78)$$

で与えられる。ただし μ_1, μ_2 は複素数 s に対する二次方程式

$$(s + \xi_{11})(s + \xi_{22}) - \xi_{12}\xi_{21} = 0 \quad (9.79)$$

の解である。図 9.5 に、DQ の位置を $r_1 = 0$ に固定して JQF の位置を変えた場合の、DQ の励起確率 $P_1(t) = \langle \hat{\sigma}_1^\dagger \hat{\sigma}_1 \rangle$ の時間発展を示した。確かに、 $r_2 \approx (1 + 2n)\lambda_a/4$ でない限り、DQ の崩壊を抑制できることを確認できる。JQF の最適位置は $r_2 = n\lambda_a/2$ であり、その際には式 (9.77), (9.78) は次式に帰着する。

$$\alpha_1(t) = \left(\frac{\gamma_2}{\gamma_1 + \gamma_2} + \frac{\gamma_1}{\gamma_1 + \gamma_2} e^{-(\gamma_1 + \gamma_2)t} \right) e^{-i\omega_a t}, \quad (9.80)$$

$$\alpha_2(t) = (-)^{n+1} \frac{\sqrt{\gamma_1 \gamma_2}}{\gamma_1 + \gamma_2} [1 - e^{-(\gamma_1 + \gamma_2)t}] e^{-i\omega_a t}. \quad (9.81)$$

$t \rightarrow \infty$ の極限では、DQ の励起確率は $P_1(t) = \gamma_2^2/(\gamma_1 + \gamma_2)^2 \approx 1 - 2\gamma_1/\gamma_2$ である。よって、 $\gamma_2 \gg \gamma_1$ であれば、DQ の輻射崩壊はほとんど抑えられる。

反超放射

DQ の輻射崩壊が抑えられるのは、9.3.4 節で議論した反超放射効果によるものである。簡単のため、二つの原子が両方とも導波路端に結合している $r_1 = r_2 = 0$ の場合について考察しよう。原子の 1 励起状態空間は二つの基底 $\hat{\sigma}_1^\dagger |v\rangle, \hat{\sigma}_2^\dagger |v\rangle$ で張られるが、次に示す $|sup\rangle$ および $|sub\rangle$ が、それぞれ超放射・反超放射状態に相当する。

$$|sup\rangle = \frac{\sqrt{\gamma_1} \hat{\sigma}_1^\dagger + \sqrt{\gamma_2} \hat{\sigma}_2^\dagger}{\sqrt{\gamma_1 + \gamma_2}} |v\rangle, \quad (9.82)$$

$$|sub\rangle = \frac{\sqrt{\gamma_2} \hat{\sigma}_1^\dagger - \sqrt{\gamma_1} \hat{\sigma}_2^\dagger}{\sqrt{\gamma_1 + \gamma_2}} |v\rangle. \quad (9.83)$$

超放射状態は崩壊レート $2(\gamma_1 + \gamma_2)$ で速く崩壊するが、反超放射状態は崩壊し

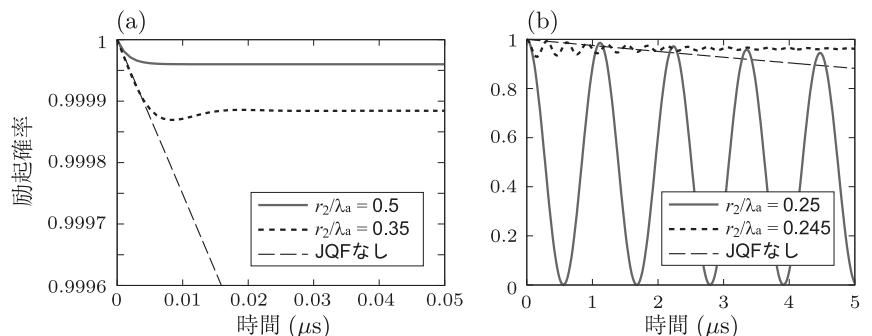


図 9.5 様々な JQF 位置 (r_2) でのデータ量子ビット (DQ) の生存確率。 (a) $r_2/\lambda_a = 0.5, 0.35$ 。 (b) $r_2/\lambda_a = 0.25, 0.245$ 。他のパラメータは図 9.4 キャプションのとおり。破線は JQF なしの場合。

ない。DQ の励起状態は

$$\hat{\sigma}_1^\dagger |v\rangle = \frac{\sqrt{\gamma_1}|\text{sup}\rangle + \sqrt{\gamma_2}|\text{sub}\rangle}{\sqrt{\gamma_1 + \gamma_2}} \quad (9.84)$$

のように表すことができ、 $\gamma_2 \gg \gamma_1$ であるため、ほとんど反超放射状態から成っており崩壊しない。

9.6.4 光学応答

この節では、制御パルスに対する DQ および JQF の光学応答について調べよう。初期条件として、時刻 $t = 0$ において二つの原子が共に基底状態にあり、振幅 $\mathcal{E}(t)$ の古典的な制御パルスを導波路から照射する場合を考えよう。 $t = 0$ の瞬間ににおける制御パルスの空間形状は $\mathcal{E}(-r)$ であるから、初期状態ベクトルは

$$|\phi(0)\rangle = \mathcal{N} \exp\left(\int_{-\infty}^0 dr \mathcal{E}(-r) \tilde{c}_r^\dagger(0)\right) |v\rangle \quad (9.85)$$

と表すことができる。ただし $|v\rangle$ は導波路まで含めた全系の基底状態であり、 $\mathcal{N} = \exp(-\int dr |\mathcal{E}(-r)|^2/2)$ は状態ベクトルの規格化因子である。この状態はコヒーレント状態であり、演算子 $\tilde{c}_r(0)$ の固有状態であることに注意しよう。

以下では、演算子 $\hat{O}(t)$ の期待値を $\langle \hat{O}(t) \rangle$ と表すことにしよう。つまり $\langle \hat{O}(t) \rangle = \langle \phi(0) | \hat{O}(t) | \phi(0) \rangle$ である。例えば $\langle \hat{\sigma}_1 \rangle$ の運動方程式は、ハイゼンベルグ方程式 (9.70) を状態ベクトル (9.85) で挟むことにより

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle \hat{\sigma}_1 \rangle &= (-i\omega_a - \xi_{11}) \langle \hat{\sigma}_1 \rangle - \xi_{12} \langle \hat{\sigma}_2 \rangle + 2\xi_{12} \langle \hat{\sigma}_1^\dagger \hat{\sigma}_1 \hat{\sigma}_2 \rangle \\ &\quad - i(1 - 2\langle \hat{\sigma}_1^\dagger \hat{\sigma}_1 \rangle) \langle \hat{N}_1(t) \rangle, \end{aligned} \quad (9.86)$$

$$\langle \hat{N}_1(t) \rangle = \sqrt{2\gamma_j} \cos(\omega_a l_j) \mathcal{E}(t) \quad (9.87)$$

と与えられる。以下の解析では、 $\langle \hat{\sigma}_1 \rangle$, $\langle \hat{\sigma}_2 \rangle$, $\langle \hat{\sigma}_1^\dagger \hat{\sigma}_1 \rangle$, $\langle \hat{\sigma}_2^\dagger \hat{\sigma}_2 \rangle$, $\langle \hat{\sigma}_2^\dagger \hat{\sigma}_1 \rangle$, $\langle \hat{\sigma}_1 \hat{\sigma}_2 \rangle$, $\langle \hat{\sigma}_1^\dagger \hat{\sigma}_1 \hat{\sigma}_2 \rangle$, $\langle \hat{\sigma}_2^\dagger \hat{\sigma}_1 \hat{\sigma}_2 \rangle$, $\langle \hat{\sigma}_1^\dagger \hat{\sigma}_2^\dagger \hat{\sigma}_1 \hat{\sigma}_2 \rangle$ に対する連立微分方程式を数値的に解く。

Rabi 振動

まずは定常光励起に対する応答を見てみよう。 $t = 0$ に二つの原子は基底状態にあるとし、振幅 $\mathcal{E}(t) = E_d e^{-i\omega_a t}$ の古典的なドライブ光が照射された場合の励起確率の時間発展を図 9.6 に示した。 P_{1f} は JQF が無い場合の DQ の励起確率であり、次式で与えられる。

$$P_{1f}(t) = \frac{\Omega_1^2}{2(\Omega_1^2 + 2\gamma_1^2)} \left[1 - e^{-3\gamma_1 t/2} \left(\cos \tilde{\Omega}_1 t + \frac{3\gamma_1}{2\tilde{\Omega}_1} \sin \tilde{\Omega}_1 t \right) \right]. \quad (9.88)$$

ただし $\Omega_1 = \sqrt{8\gamma_1|E_d|^2}$ は緩和が無い場合の Rabi 振動数であり、 $\tilde{\Omega}_1 = \sqrt{8\gamma_1|E_d|^2 - (\gamma_1/2)^2}$ は緩和により繰り込みを受けた Rabi 振動数である。

ドライブ光強度が強い場合の時間発展を図 9.6(a) に示した。JQF は γ_2^{-1} 程

度の短い時間スケールで吸収飽和して、最大混合状態 ($|g\rangle\langle g| + |e\rangle\langle e|)/2$ に落ち着く。また、DQ は JQF が無い場合とほとんど同様の Rabi 振動をする。その理由は、吸収飽和を起こした JQF は導波路からの入射光を完全に透過させるためである。つまり、強い光でドライブすると JQF はすぐ「透明」になり、DQ のダイナミクスに影響を与えない。一方、図 9.6(b) はドライブ光が弱い場合の時間発展である。この場合には、JQF が完全に吸収飽和していないため、入射光をある程度反射する。その結果、DQ に届くドライブ光は弱められ、JQF 無しの場合と比較して Rabi 振動が遅くなる。

DQ のダイナミクスが JQF の影響を受けないための条件は、JQF がドライブ光により飽和し、ほとんど最大混合状態になることである。この条件は、7.2 節で見たように、入射光子レート $|E_d|^2 \gg$ JQF の緩和レート γ_2 、である。

π パルス

図 9.7(a) に、定常光による DQ および JQF の Rabi 振動をより長い時間スケールで示した。式 (9.88) からもわかるように、DQ の Rabi 振動は γ_1^{-1} の時間スケールで減衰する。減衰の理由は、ドライブ光照射中は JQF が透明になり、DQ からの輻射崩壊を防がないためである。図 9.7(b) に、Rabi 振動の半周期 ($t = \pi/\Omega_1$) でドライブ光を切った場合、すなわち π パルス照射による DQ および JQF のダイナミクスを示した。 π パルス照射後、JQF は γ_2^{-1} の時間スケールで素早く基底状態へと緩和する。その結果、DQ の励起状態は反超放射状態となるため、DQ の輻射緩和が抑えられる。このように、JQF は、ゲートパルス照射中は飽和してパルスを透過させる一方、パルスが切れると基底状態に素早く緩和して DQ の崩壊を防ぐ。このように、JQF はゲートパルスの有無に応じて、自動的に DQ - 導波路結合のオン・オフを切り替える役割を持つ。

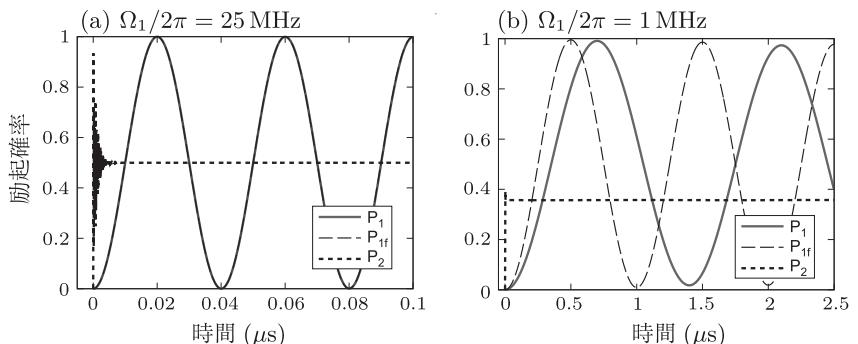


図 9.6 定常ドライブのもとでの DQ (P_1 , 実線) および JQF (P_2 , 点線) の Rabi 振動。 P_{1f} (破線) は JQF なしの場合の DQ の Rabi 振動。Rabi 振動数は (a) $\Omega_1/2\pi = 1$ MHz, (b) $\Omega_1/2\pi = 25$ MHz。対応する E_d^2/γ_2 の値は、それぞれ 391 と 0.625. (a) では P_1 と P_{1f} が重なっている。

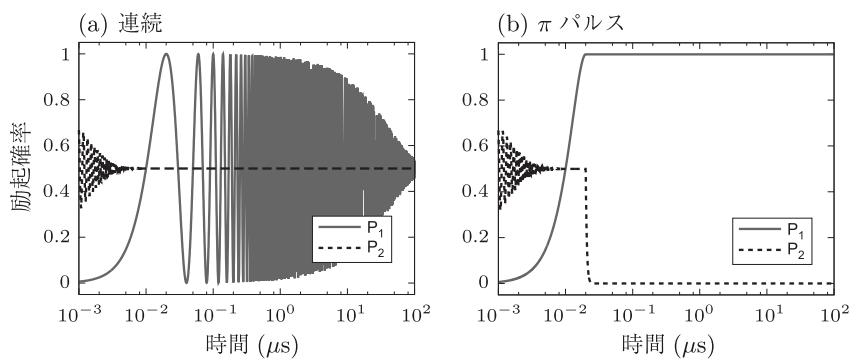


図 9.7 (a) 連続 ドライブと (b) π パルス 励起との比較. Rabi 振動数は $\Omega_1/2\pi = 25$ MHz, π パルスの時間幅は 20 ns.

第 10 章

パラメトリック増幅器・発振器

共振器 QED 系は、様々な量子デバイスへと応用される。本章では、その代表例であるパラメトリック増幅器を見てみよう。量子系を光でプローブする際には系への擾乱を抑えるために微弱光を用いる必要があるが、パラメトリック増幅器は微弱光に余分なノイズを加えることなく増幅可能な、量子的な増幅器である。また、パラメトリック増幅器はスクイーズド光生成にも応用される。

10.1 定式化

我々がブランコを漕ぐときには、ブランコの周期の半分の周期で重心を上げ下げすることにより、ブランコの振幅が大きくなってゆく。この動作には、ブランコの共振周波数の 2 倍の周波数で共振周波数に変調を加える効果がある。このように、系のパラメータ（今の場合は共振周波数）を介して系を励起することをパラメトリック励起 (parametric excitation) と呼ぶ。

ここでは、共鳴周波数 ω_c の共振器に対して、その約 2 倍の周波数 $\alpha\omega_c$ ($\alpha \sim 2$) で共鳴周波数に変調を加える場合を考えよう^{[69], [70]}。つまり、

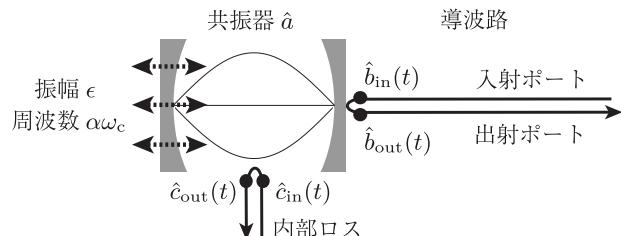


図 10.1 パラメトリック増幅器の概略図。共振器の共鳴周波数 ω_c に対して、振幅 ϵ 、周波数 $\alpha\omega_c$ ($\alpha \sim 2$) の変調を与える。共振器には入出力ポートとして、半無限の導波路モードが結合している。

$$\omega_c \rightarrow \omega_c + 2\epsilon \cos(\alpha\omega_c t) \quad (10.1)$$

とする。ただし変調の振幅は元の共鳴周波数よりも十分に小さい ($\epsilon \ll \omega_c$) とする。共鳴周波数 ω_c の調和振動子の古典的な運動方程式は、変位を表す変数を q として $\frac{d^2q}{dt^2} + \omega_c^2 q = 0$ で与えられる。この調和振動子の共鳴周波数に、式 (10.1) の形の変調を加える場合の運動方程式は、 ϵ^2 の項を無視して、

$$\frac{d^2q}{dt^2} + [\omega_c^2 + 4\omega_c\epsilon \cos(\alpha\omega_c t)]q = 0 \quad (10.2)$$

であり、この運動方程式の元となる（古典的）ハミルトニアンは

$$H_c(t) = \frac{p^2}{2m} + \frac{m}{2}[\omega_c^2 + 4\omega_c\epsilon \cos(\alpha\omega_c t)]q^2 \quad (10.3)$$

である。1.1 節に倣って、このハミルトニアンを量子化しよう。古典変数 q, p を交換関係 $[\hat{q}, \hat{p}] = i\hbar$ を満たす演算子とし、 $\hat{q} = \sqrt{\hbar/2m\omega_c}(\hat{a}^\dagger + \hat{a})$, $\hat{p} = i\sqrt{\hbar m\omega_c/2}(\hat{a}^\dagger - \hat{a})$ により生成消滅演算子を用いてハミルトニアンを書き換える。 $\hbar = 1$ とすると、この共振器のハミルトニアン

$$\hat{H}_c(t) = \omega_c \hat{a}^\dagger \hat{a} + \epsilon \cos(\alpha\omega_c t)(\hat{a}^\dagger + \hat{a})^2 \quad (10.4)$$

が得られる。

図 10.1 のように、共振器には入出力ポートとして半無限の一次元モード（導波路モード）が接続されている。そのモードの消滅演算子を \hat{b}_k （実空間表示では \tilde{b}_r ）で表そう。また共振器の内部ロス（出力ポート以外へのエネルギー緩和）も一次元ボソン場でモデル化し、 \hat{c}_k （実空間表示では \tilde{c}_r ）で表そう。系全体のハミルトニアン $\hat{H}(t)$ は、

$$\begin{aligned} \hat{H}(t) &= \hat{H}_c(t) + \int dk \left[k\hat{b}_k^\dagger \hat{b}_k + \sqrt{\kappa_e/2\pi}(\hat{a}^\dagger \hat{b}_k + \hat{b}_k^\dagger \hat{a}) \right] \\ &\quad + \int dk \left[k\hat{c}_k^\dagger \hat{c}_k + \sqrt{\kappa_i/2\pi}(\hat{a}^\dagger \hat{c}_k + \hat{c}_k^\dagger \hat{a}) \right] \end{aligned} \quad (10.5)$$

で与えられる。 κ_e は共振器の外部ロスレート（出力ポートへの崩壊レート）、 κ_i は内部ロスレートを表す。

5.3 節の議論に従って、共振器モード \hat{a} のハイゼンベルグ方程式と、導波路モードの入出力関係式は次式で与えられる。

$$\frac{d}{dt}\hat{a} = (-i\omega_c - \kappa/2)\hat{a} - i\epsilon e^{-i\alpha\omega_c t}\hat{a}^\dagger - i\sqrt{\kappa_e}\hat{b}_{in}(t) - i\sqrt{\kappa_i}\hat{c}_{in}(t), \quad (10.6)$$

$$\hat{b}_{out}(t) = \hat{b}_{in}(t) - i\sqrt{\kappa_e}\hat{a}(t). \quad (10.7)$$

ただし $\kappa = \kappa_e + \kappa_i$ は共振器モードの全崩壊レートである。式 (10.6) の右辺第二項は本来 $-2i\epsilon \cos(\alpha\omega_c t)(\hat{a}^\dagger + \hat{a})$ であるが、 \hat{a} が概ね $e^{-i\omega_c t}$ の時間依存性を示すことを考慮し、回転波近似を施してある。

10.2 パラメトリック増幅

この共振器に対して、入射ポートから古典光（コヒーレント状態）を照射する場合の応答を見てみよう。以下で定量的に議論するように、入射光周波数が共振器にほぼ共鳴している時には出力光が大きく増幅され、パラメトリック増幅 (parametric amplification) と呼ばれる。パラメトリック増幅器は、例えば超伝導量子ビットの单一試行読み出し^[71]など、量子情報処理の様々な場面に応用される。

共振器位置 ($r = -0$) における入射光の振幅を時間の関数として $\mathcal{E}_{\text{in}}(t)$ で表すと、共振器モードの振幅 $\langle \hat{a}(t) \rangle$ に対する運動方程式は

$$\frac{d}{dt} \langle \hat{a} \rangle = (-i\omega_c - \kappa/2) \langle \hat{a} \rangle - i\epsilon e^{-i\alpha\omega_c t} \langle \hat{a} \rangle^* - i\sqrt{\kappa_e} \mathcal{E}_{\text{in}}(t) \quad (10.8)$$

となる。また、共振器位置 ($r = +0$) における出力光振幅 $\mathcal{E}_{\text{out}}(t) = \langle \hat{b}_{\text{out}}(t) \rangle$ は

$$\mathcal{E}_{\text{out}}(t) = \mathcal{E}_{\text{in}}(t) - i\sqrt{\kappa_e} \langle \hat{a}(t) \rangle \quad (10.9)$$

で与えられる。 $\langle \hat{a}(t) \rangle = A(t)e^{-i\alpha\omega_c t/2}$, $\mathcal{E}_{\text{in}}(t) = \tilde{\mathcal{E}}_{\text{in}}(t)e^{-i\alpha\omega_c t/2}$ により変数変換をすると、式 (10.8) は

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} A \\ A^* \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -\frac{\kappa}{2} - i(1 - \alpha/2)\omega_c & -i\epsilon \\ i\epsilon & -\frac{\kappa}{2} + i(1 - \alpha/2)\omega_c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ A^* \end{pmatrix} \\ &\quad + i\sqrt{\kappa_e} \begin{pmatrix} -\tilde{\mathcal{E}}_{\text{in}}(t) \\ \tilde{\mathcal{E}}_{\text{in}}^*(t) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (10.10)$$

となる。

10.2.1 発振条件

まずは入射波が無い $\mathcal{E}_{\text{in}}(t) = 0$ の場合について考えよう。このときの式 (10.10) の解は $A(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}$ と書ける。ただし $C_{1,2}$ は初期条件によって決まる定数であり、 $\lambda_{1,2}$ は λ に対する二次方程式

$$[\lambda + \kappa/2 + i(1 - \alpha/2)\omega_c][\lambda + \kappa/2 - i(1 - \alpha/2)\omega_c] - \epsilon^2 = 0 \quad (10.11)$$

の解であり、

$$\lambda_{1,2} = -\frac{\kappa}{2} \pm \sqrt{\epsilon^2 - (1 - \alpha/2)^2 \omega_c^2} \quad (10.12)$$

で与えられる。 $\lambda_{1,2}$ の実部がともに負であれば、この解は時間と共に減衰してゼロになる。一方、どちらかの実部が正であれば、解は時間と共に成長する。このとき、入射波がゼロでも共振器モードの振幅が有限の値を持つようになり、出力ポートにコヒーレント光が発生する。これをパラメトリック発振

(parametric oscillation) と呼ぶ^{[72], *1)}。その条件は

$$\epsilon > \sqrt{(\kappa/2)^2 + (1 - \alpha/2)^2 \omega_c^2} = \epsilon_c \quad (10.13)$$

である。発振後のパラメトリック振動子の状態は発振直前の外部入力信号に敏感であり、かつてはパラメトロンと呼ばれる論理素子に応用された^[73]。近年では、位相検出器としての特性を活用した量子ビットの单一試行読み出しや^[74]、量子アニーリング素子へと応用されている^{[75], [76]}。

10.2.2 定常解

以下ではパラメトリック発振が起こらない $\epsilon < \epsilon_c$ の場合について、単色光 $\mathcal{E}_{\text{in}}(t) = E_{\text{in}} e^{-i\omega t}$ が入射する場合の定常応答を議論しよう。入射光の離調を $\Delta\omega = \omega - \frac{\alpha}{2}\omega_c$ により定義すると、 $\tilde{\mathcal{E}}_{\text{in}}(t) = E_{\text{in}} e^{-i\Delta\omega t}$ である。 $A(t)$ の定常解には $e^{\pm i\Delta\omega t}$ の 2 種類の周波数成分があることに注意すると、式 (10.10) の定常解は次式で与えられる。

$$A(t) = \frac{-i\sqrt{\kappa_e}\left\{\frac{\kappa}{2} - i[\Delta\omega - (\frac{\alpha}{2} - 1)\omega_c]\right\}}{\left(\frac{\kappa}{2} - i\Delta\omega\right)^2 + \left[(\frac{\alpha}{2} - 1)^2\omega_c^2 - \epsilon^2\right]} E_{\text{in}} e^{-i\Delta\omega t} \\ + \frac{\sqrt{\kappa_e}\epsilon}{\left(\frac{\kappa}{2} + i\Delta\omega\right)^2 + \left[(\frac{\alpha}{2} - 1)^2\omega_c^2 - \epsilon^2\right]} E_{\text{in}}^* e^{i\Delta\omega t}. \quad (10.14)$$

式 (10.9) より、出力光振幅 $\mathcal{E}_{\text{out}}(t)$ は

$$\mathcal{E}_{\text{out}}(t) = J(\omega) \times E_{\text{in}} e^{-i\omega t} + K(\omega) \times E_{\text{in}}^* e^{-i(\alpha\omega_c - \omega)t}, \quad (10.15)$$

$$J(\omega) = 1 - \frac{\kappa_e\left\{\frac{\kappa}{2} - i[\Delta\omega - (\frac{\alpha}{2} - 1)\omega_c]\right\}}{\left(\frac{\kappa}{2} - i\Delta\omega\right)^2 + \left[(\frac{\alpha}{2} - 1)^2\omega_c^2 - \epsilon^2\right]}, \quad (10.16)$$

$$K(\omega) = -i \frac{\kappa_e\epsilon}{\left(\frac{\kappa}{2} + i\Delta\omega\right)^2 + \left[(\frac{\alpha}{2} - 1)^2\omega_c^2 - \epsilon^2\right]} \quad (10.17)$$

で与えられる。パラメトリック増幅器では一般に、周波数 ω の単色入射波に対して、信号光 (signal) と呼ばれる周波数 ω の成分と、アイドラー光 (idler) と呼ばれる周波数 $\alpha\omega_c - \omega$ の成分が出力される。

10.2.3 非縮退モード

入射周波数 ω が変調周波数 $\alpha\omega_c$ の半分に一致していない場合には、信号光とアイドラー光とが異なる周波数を持つ。このような動作モードを非縮退モードと呼ぶ。信号光パワーと入射光パワーとの比、すなわち $|J(\omega)|^2 = G_s(\omega)$ を信号ゲイン (signal gain) と呼び、アイドラー光パワーと入射光パワーの比 $|K(\omega)|^2 = G_i(\omega)$ を相互変調ゲイン (intermodulation gain) と呼ぶ。これらのゲインは入射光の位相に依存しない。ロスのない $\kappa_i = 0$ の場合には、両者には次の関係がある。

*1) この計算では振幅は指数関数的に発散するが、現実には調和振動子に非線形性があるため、振幅は有限の値に落ち着く。

$$G_s(\omega) - G_i(\omega) = 1. \quad (10.18)$$

信号および相互変調ゲインの入射周波数依存性を図 10.2 に示した。縦軸のデシベル (dB) は増幅器の利得を表す単位であり、入力パワーが P_i 、出力パワーが P_o のときの増幅率は $10 \log_{10}(P_o/P_i)$ デシベルである。

10.2.4 縮退モード

$\omega = \alpha\omega_c/2$ の場合には、信号光とアイドラー光の周波数が一致し、出力は両者の重ね合わせとなる。このような動作モードを縮退モードと呼ぶ。縮退モードでは信号光とアイドラー光とが干渉するため、出力振幅が入射波の位相に依存する。位相 θ_{in} を $E_{in} = |E_{in}|e^{i\theta_{in}}$ により定義すると、縮退ゲイン $G_d(\theta_{in})$ は

$$G_d(\theta_{in}) = |e^{i\theta_{in}} J(\alpha\omega_c/2) + e^{-i\theta_{in}} K(\alpha\omega_c/2)|^2 \quad (10.19)$$

で与えられる。特に、共振器周波数のちょうど 2 倍でポンプする $\alpha = 2$ の場合には、

$$G_d(\theta_{in}) = \frac{(\frac{\kappa_e^2 - \kappa_i^2}{4} + \epsilon^2)^2 + \kappa_e^2 \epsilon^2 + 2\kappa_e \epsilon (\frac{\kappa_e^2 - \kappa_i^2}{4} + \epsilon^2) \sin(2\theta_{in})}{(\frac{\kappa^2}{4} - \epsilon^2)^2} \quad (10.20)$$

となる。

変調なしの $\epsilon = 0$ の場合には、ゲインは入射波の位相 θ_{in} に依存せず

$$G_d^0 = \left(\frac{\kappa_e - \kappa_i}{\kappa_e + \kappa_i} \right)^2 \quad (10.21)$$

となる。これはロスのある片側共振器の反射率 [式 (7.17)] である。

以下では、共振器の内部ロスが外部ロスに比べて小さい $\kappa_i < \kappa_e$ の状況を考えよう。入射波の位相が $\theta_{in} = (-1/4 + n)\pi$ (n は整数) のときにゲインは最小となり

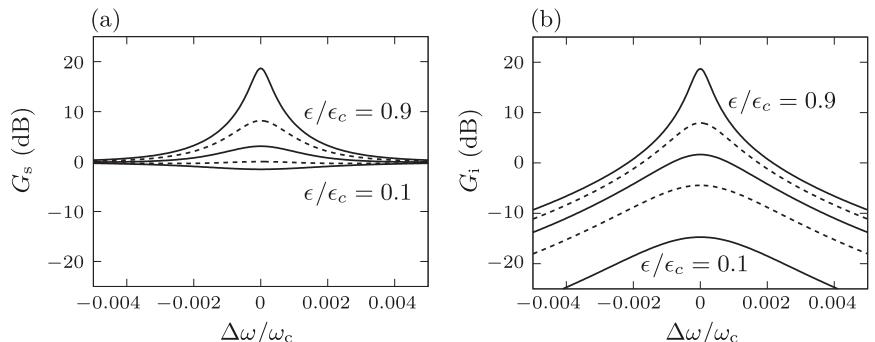


図 10.2 (a) 信号ゲイン G_s , (b) 相互変調ゲイン G_i の入射周波数依存性 ($\Delta\omega = \omega - \omega_c$)。 $Q_e = \omega_c/\kappa_e = 200$, $Q_i = \omega_c/\kappa_i = 2000$, $\alpha = 2$ 。
変調の振幅 ϵ/ϵ_c の値は、下から 0.1, 0.3, 0.5, 0.7, 0.9。

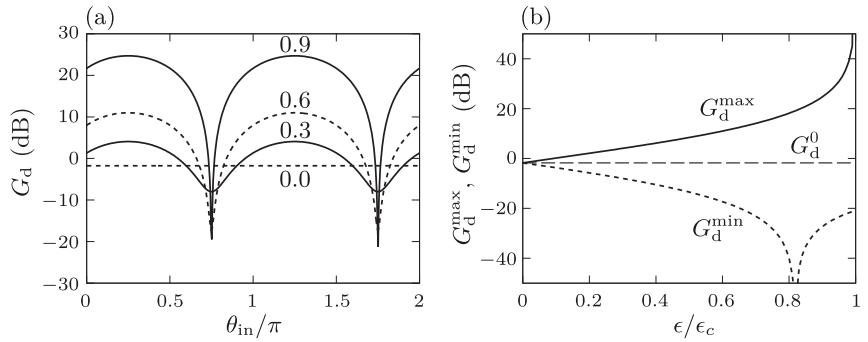


図 10.3 (a) 縮退ゲインの入射波位相 θ_{in} 依存性. 図中の数字は変調振幅 ϵ/ϵ_c の値を表す. (b) 縮退ゲインの最小値 G_d^{min} および最大値 G_d^{max} の変調振幅 ϵ 依存性. パラメータ値は図 10.2 と同じ.

$$G_d^{min} = \left(\frac{\epsilon - (\kappa_e - \kappa_i)/2}{\epsilon + (\kappa_e + \kappa_i)/2} \right)^2 \quad (10.22)$$

の値をとる. また, 入射波の位相が $\theta_{in} = (1/4 + n)\pi$ (n は整数) のときにゲインは最大となり

$$G_d^{max} = \left(\frac{\epsilon + (\kappa_e - \kappa_i)/2}{\epsilon - (\kappa_e + \kappa_i)/2} \right)^2 \quad (10.23)$$

の値をとる.

縮退ゲインの入射波位相 θ_{in} 依存性を図 10.3(a) に示した. 変調振幅 ϵ が臨界値 ϵ_c に近づくほど, 増幅と減衰のコントラストが大きくなる. また, 縮退ゲインの最小値 G_d^{min} および最大値 G_d^{max} の変調振幅 ϵ 依存性を図 10.3(b) に示した. 変調の振幅が $\epsilon/\epsilon_c = (\kappa_e - \kappa_i)/\kappa$ のときには, 破壊的干渉のため $G_d^{min} = 0$ になる.

10.3 スクイーズド光生成

本節では, パラメトリック増幅器が発振しておらず ($\epsilon < \epsilon_c$), また入射ポートに光を入力しない状況を考えよう. 前節の議論に従うと, 増幅器からの出力光の振幅はゼロである. しかし, このことは増幅器が全く光を出力していないことを意味している訳ではない. 以下で見るよう, 実は真空スクイーズド光が出力されているのである^{[77], [78]}.

ここでは図 10.4 のように, パラメトリック増幅器 (共振器 1) からの出力を, 光源として別の共振器 2 へと入力している状況について考えよう. 簡単のため, 共振器周波数は両者とも ω_c であり, パラメトリック増幅器の変調周波数は $2\omega_c$ ($\alpha = 2$) であるとする. 共振器 m ($= 1, 2$) に対する消滅演算子を \hat{a}_m , 入出力演算子を $\hat{b}_{in,m}, \hat{b}_{out,m}$, 外部・内部・全ロスレートを κ_{em}, κ_{im} ,

κ_m ($= \kappa_{em} + \kappa_{im}$) で表すことにしよう。式 (10.6), (10.7) に倣って、共振器のハイゼンベルグ方程式や出入力関係式は次のようになる。

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\hat{a}_1 &= (-i\omega_c - \kappa_1/2)\hat{a}_1 - ie^{-2i\omega_c t}\hat{a}_1^\dagger \\ &\quad - i\sqrt{\kappa_{e1}}\hat{b}_{in,1}(t) - i\sqrt{\kappa_{i1}}\hat{c}_{in,1}(t),\end{aligned}\quad (10.24)$$

$$\frac{d}{dt}\hat{a}_2 = (-i\omega_c - \kappa_2/2)\hat{a}_2 - i\sqrt{\kappa_{e2}}\hat{b}_{in,2}(t) - i\sqrt{\kappa_{i2}}\hat{c}_{in,2}(t), \quad (10.25)$$

$$\hat{b}_{out,1}(t) = \hat{b}_{in,1}(t) - i\sqrt{\kappa_{e1}}\hat{a}_1(t), \quad (10.26)$$

$$\hat{b}_{out,2}(t) = \hat{b}_{in,2}(t) - i\sqrt{\kappa_{e2}}\hat{a}_2(t). \quad (10.27)$$

また、共振器 1 の出力が共振器 2 の入力になっているため、

$$\hat{b}_{in,2}(t) = \hat{b}_{out,1}(t - t_0) \quad (10.28)$$

の関係がある。ここで $t_0 (> 0)$ は共振器間の伝播時間であるが、以下の議論は t_0 に依らないので $t_0 \rightarrow +0$ としよう。増幅器が発振しない条件は、式 (10.13) より、

$$\epsilon < \epsilon_c = \kappa_1/2 \quad (10.29)$$

である。

10.3.1 共振器 1 (増幅器) のスクイージング

まずは共振器 1 (増幅器) 内の光子の性質を調べよう。以下では、演算子 $\hat{A}_m(t) = \hat{a}_m(t)e^{i\omega_c t}$, $\hat{B}_{in,m}(t) = \hat{b}_{in,m}(t)e^{i\omega_c t}$ を定義し、共振器周波数 ω_c の回転座標へと移行する。今考えている状況では増幅器への光の入力が無い。よって、初期状態ベクトルを $|\psi_i\rangle$ とすると、 $\hat{b}_{in,1}(t)|\psi_i\rangle = 0$ である。式 (10.24) について初期状態で期待値をとると、ただちに $\langle \hat{A}_1 \rangle = 0$ が導かれる。つまり

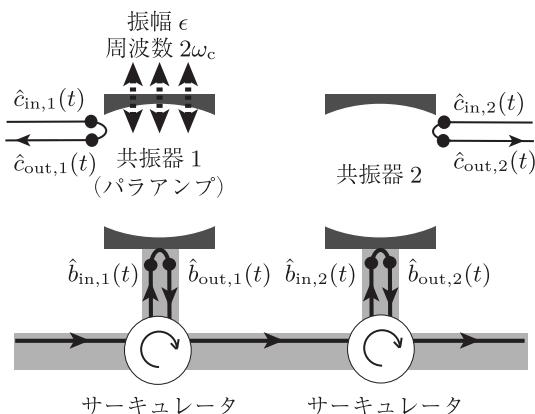


図 10.4 パラメトリック増幅器を用いた真空スクイーズド光生成。増幅器（共振器 1）には倍周波数 $2\omega_c$ の周波数変調を与え、入力ポートには光を入射しない。

共振器内での光子場振幅はゼロになる。一方、二次の量については、式(5.26)より $[\hat{b}_{\text{in},1}(t), \hat{a}_1(t)] = 0$ となることを用いると

$$\frac{d}{dt} \langle \hat{A}_1^\dagger \hat{A}_1 \rangle = -\kappa_1 \langle \hat{A}_1^\dagger \hat{A}_1 \rangle + i\epsilon \left(\langle \hat{A}_1 \hat{A}_1 \rangle - \langle \hat{A}_1^\dagger \hat{A}_1^\dagger \rangle \right), \quad (10.30)$$

$$\frac{d}{dt} \langle \hat{A}_1 \hat{A}_1 \rangle = -\kappa_1 \langle \hat{A}_1 \hat{A}_1 \rangle - i\epsilon \left(2\langle \hat{A}_1^\dagger \hat{A}_1 \rangle + 1 \right) \quad (10.31)$$

が導かれる。定常状態では $d/dt \rightarrow 0$ として

$$\langle \hat{A}_1^\dagger \hat{A}_1 \rangle = \frac{2\epsilon^2}{\kappa_1^2 - 4\epsilon^2}, \quad (10.32)$$

$$\langle \hat{A}_1 \hat{A}_1 \rangle = \frac{-i\epsilon\kappa_1}{\kappa_1^2 - 4\epsilon^2} \quad (10.33)$$

である。パラメトリック増幅器から出力される光子の流束（単位時間あたりの光子数）は、式(10.26)から $\langle \hat{b}_{\text{out},1}^\dagger(t) \hat{b}_{\text{out},1}(t) \rangle = \kappa_{e1} \langle \hat{A}_1^\dagger \hat{A}_1 \rangle$ であり、 $\epsilon > 0$ であれば確かに光子が出力されていることがわかる。

共振器1（増幅器）内の光子のスクイージングを調べよう。式(1.87), (1.88)において $\phi = \pi/4$ と選び、直交位相振幅を $\hat{X}_1 = (e^{-i\pi/4} \hat{A}_1 + e^{i\pi/4} \hat{A}_1^\dagger)/2$, $\hat{Y}_1 = (e^{-i\pi/4} \hat{A}_1 - e^{i\pi/4} \hat{A}_1^\dagger)/2i$ によって導入しよう。 $\langle \hat{X}_1 \rangle = \langle \hat{Y}_1 \rangle = 0$, つまり直交位相振幅の期待値がゼロになることは直ちに確認できる。揺らぎに関しては

$$(\Delta X_1)^2 = \frac{1 + 2\langle \hat{A}_1^\dagger \hat{A}_1 \rangle + 2\text{Im}\langle \hat{A}_1 \hat{A}_1 \rangle}{4} = \frac{\kappa_1}{4(\kappa_1 + 2\epsilon)}, \quad (10.34)$$

$$(\Delta Y_1)^2 = \frac{1 + 2\langle \hat{A}_1^\dagger \hat{A}_1 \rangle - 2\text{Im}\langle \hat{A}_1 \hat{A}_1 \rangle}{4} = \frac{\kappa_1}{4(\kappa_1 - 2\epsilon)} \quad (10.35)$$

となる。 $\epsilon > 0$ であれば $\Delta X_1 < 1/2$ であるから、 X_1 方向にスクイージングがおきている。スクイージングは変調振幅 ϵ に対して単調に増加するが、発振のしきい値に近づく $\epsilon \rightarrow \epsilon_c (= \kappa_1/2)$ の極限においても揺らぎは真空状態と比べて半分に留まり、3 dB限界(3 dB limit)として知られている^[79]。また、 $(\Delta X_1)(\Delta Y_1) > 1/4$ であり、最小不確定性は満たしていない。

10.3.2 共振器2のスクイージング

共振器2内の光子のスクイージングを調べよう。共振器1の場合と同様に、 $\langle \hat{A}_2^\dagger \hat{A}_2 \rangle$ および $\langle \hat{A}_2 \hat{A}_2 \rangle$ に着目する。これらの量の運動方程式は、共振器1の出力が共振器2の入力になっていること〔式(10.28)〕などを用いると次式で与えられる。

$$\frac{d}{dt} \langle \hat{A}_2^\dagger \hat{A}_2 \rangle = -\kappa_2 \langle \hat{A}_2^\dagger \hat{A}_2 \rangle - \sqrt{\kappa_{e1}\kappa_{e2}} (\langle \hat{A}_1^\dagger \hat{A}_2 \rangle + \langle \hat{A}_2^\dagger \hat{A}_1 \rangle), \quad (10.36)$$

$$\frac{d}{dt} \langle \hat{A}_2 \hat{A}_2 \rangle = -\kappa_2 \langle \hat{A}_2 \hat{A}_2 \rangle - 2\sqrt{\kappa_{e1}\kappa_{e2}} \langle \hat{A}_1 \hat{A}_2 \rangle. \quad (10.37)$$

ただし、式(10.28)における伝播時間 t_0 については、簡単のため $t_0 \rightarrow +0$ の

極限をとり二つの共振器を同時刻として扱っている。伝播光子を介して共振器 1 と 2 の間に交差項が生じている。それらの運動方程式を作ると

$$\frac{d}{dt}\langle\hat{A}_1^\dagger\hat{A}_2\rangle = -\frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}\langle\hat{A}_1^\dagger\hat{A}_2\rangle + i\epsilon\langle\hat{A}_1\hat{A}_2\rangle - \sqrt{\kappa_{e1}\kappa_{e2}}\langle\hat{A}_1^\dagger\hat{A}_1\rangle, \quad (10.38)$$

$$\frac{d}{dt}\langle\hat{A}_1\hat{A}_2\rangle = -\frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}\langle\hat{A}_1\hat{A}_2\rangle - i\epsilon\langle\hat{A}_1^\dagger\hat{A}_2\rangle - \sqrt{\kappa_{e1}\kappa_{e2}}\langle\hat{A}_1\hat{A}_1\rangle \quad (10.39)$$

となる。

これらの方程式の定常解は、 $d/dt \rightarrow 0$ とすることにより得られる。 $\langle\hat{A}_2^\dagger\hat{A}_2\rangle$, $\langle\hat{A}_2\hat{A}_2\rangle$ の定常値は

$$\langle\hat{A}_2^\dagger\hat{A}_2\rangle = \frac{\epsilon^2\kappa_{e1}\kappa_{e2}(\kappa_1 + \frac{\kappa_2}{2})}{\kappa_2[(\frac{\kappa_1+\kappa_2}{2})^2 - \epsilon^2][(\frac{\kappa_1}{2})^2 - \epsilon^2]}, \quad (10.40)$$

$$\langle\hat{A}_2\hat{A}_2\rangle = \frac{-i\epsilon\kappa_{e1}\kappa_{e2}[\frac{\kappa_1(\kappa_1+\kappa_2)}{4} + \epsilon^2]}{\kappa_2[(\frac{\kappa_1+\kappa_2}{2})^2 - \epsilon^2][(\frac{\kappa_1}{2})^2 - \epsilon^2]} \quad (10.41)$$

である。式 (10.34), (10.35) と同様の考察から、共振器 2 の直交位相成分の揺らぎは

$$(\Delta X_2)^2 = \frac{1}{4} - \frac{\epsilon\kappa_{e1}\kappa_{e2}}{2\kappa_2(\frac{\kappa_1+\kappa_2}{2} + \epsilon)(\frac{\kappa_1}{2} + \epsilon)}, \quad (10.42)$$

$$(\Delta Y_2)^2 = \frac{1}{4} + \frac{\epsilon\kappa_{e1}\kappa_{e2}}{2\kappa_2(\frac{\kappa_1+\kappa_2}{2} - \epsilon)(\frac{\kappa_1}{2} - \epsilon)} \quad (10.43)$$

となる。共振器 2 においても X_2 方向にスクイージングがおきており、スクイージングが変調振幅 ϵ に対して単調に増加することを確認できる。 $\epsilon \rightarrow \epsilon_c$ の極限での X_2 方向の揺らぎは

$$(\Delta X_2)^2 = \frac{1}{4} \left[1 - \frac{\kappa_{e1}\kappa_{e2}}{\kappa_2(\kappa_1 + \kappa_2/2)} \right] \quad (10.44)$$

である。共振器 2 の線幅が共振器 1 の線幅よりも十分に狭い $\kappa_2 \ll \kappa_1$ のとき、 $(\Delta X_2)^2 \approx (1 - \frac{\kappa_{e1}\kappa_{e2}}{\kappa_1\kappa_2})/4$ と近似できる。よって、二つの共振器の内部ロスレートを外部ロスレートよりも十分に小さくすることによって、原理的には揺らぎを幾らでも抑えることができる。これは共振器 1 の場合と対照的である。スクイージングを最大化するための共振器 2 の外部ロスレートの値は、 $\kappa_{e2} = \sqrt{\kappa_{i2}(2\kappa_1 + \kappa_{i2})}$ である。

10.3.3 フーリエ変換による解析

增幅器内光子

時間表示の演算子 $\hat{a}_1(t)$ のフーリエ変換として、周波数表示 $\hat{A}_1(\omega)$ を

$$\hat{A}_1(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dt e^{i(\omega_c + \omega)t} \hat{a}_1(t), \quad (10.45)$$

$$\hat{a}_1(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int d\omega e^{-i(\omega_c + \omega)t} \hat{A}_1(\omega) \quad (10.46)$$

により導入しよう。ただしこでの ω は、定義より ω_c からの離調を表している。式 (10.24) をフーリエ変換することにより、 $\hat{A}_1(\omega)$ を入射場演算子 $\hat{B}_{\text{in},1}(\omega)$, $\hat{C}_{\text{in},1}(\omega)$ の線形結合として次のように表すことができる。

$$\begin{aligned}\hat{A}_1(\omega) &= \alpha_1(\omega)\hat{B}_{\text{in},1}(\omega) + \alpha_2(\omega)\hat{B}_{\text{in},1}^\dagger(-\omega) \\ &\quad + \alpha_3(\omega)\hat{C}_{\text{in},1}(\omega) + \alpha_4(\omega)\hat{C}_{\text{in},1}^\dagger(-\omega),\end{aligned}\quad (10.47)$$

$$\alpha_1(\omega) = \frac{\sqrt{\kappa_{e1}}(\omega + i\frac{\kappa_1}{2})}{(\omega + iz_1)(\omega + iz_2)}, \quad (10.48)$$

$$\alpha_2(\omega) = \frac{-\sqrt{\kappa_{e1}}\epsilon}{(\omega + iz_1)(\omega + iz_2)}, \quad (10.49)$$

$$\alpha_3(\omega) = \frac{\sqrt{\kappa_{i1}}(\omega + i\frac{\kappa_1}{2})}{(\omega + iz_1)(\omega + iz_2)}, \quad (10.50)$$

$$\alpha_4(\omega) = \frac{-\sqrt{\kappa_{i1}}\epsilon}{(\omega + iz_1)(\omega + iz_2)}. \quad (10.51)$$

ただし、 $z_1 = \frac{\kappa_1}{2} - \epsilon$, $z_2 = \frac{\kappa_1}{2} + \epsilon$ である。時間表示の入射場演算子には、交換関係 $[\hat{b}_{\text{in},1}(t), \hat{b}_{\text{in},1}^\dagger(t')] = \delta(t - t')$ が成立するので、^{*2)} 周波数表示でも同様の関係 $[\hat{B}_{\text{in},1}(\omega), \hat{B}_{\text{in},1}^\dagger(\omega')] = \delta(\omega - \omega')$ が成立する。

周波数表示を用いて、共振器 1 中の光子数の期待値 $\langle \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 \rangle$ や $\langle \hat{a}_1 \hat{a}_1 \rangle$ を計算してみよう。式 (10.46) より

$$\langle \hat{a}_1^\dagger(t) \hat{a}_1(t) \rangle = \frac{1}{2\pi} \iint d\omega_1 d\omega_2 e^{i(\omega_1 - \omega_2)t} \langle \hat{A}_1^\dagger(\omega_1) \hat{A}_1(\omega_2) \rangle, \quad (10.52)$$

$$\langle \hat{a}_1(t) \hat{a}_1(t) \rangle = \frac{1}{2\pi} \iint d\omega_1 d\omega_2 e^{-i(2\omega_c + \omega_1 + \omega_2)t} \langle \hat{A}_1(\omega_1) \hat{A}_1(\omega_2) \rangle \quad (10.53)$$

と書ける。式 (10.47) を用いると

$$\langle \hat{A}_1^\dagger(\omega_1) \hat{A}_1(\omega_2) \rangle = [\alpha_2^*(\omega_1)\alpha_2(\omega_2) + \alpha_4^*(\omega_1)\alpha_4(\omega_2)]\delta(\omega_1 - \omega_2), \quad (10.54)$$

$$\langle \hat{A}_1(\omega_1) \hat{A}_1(\omega_2) \rangle = [\alpha_1^*(\omega_1)\alpha_2(\omega_2) + \alpha_3^*(\omega_1)\alpha_4(\omega_2)]\delta(\omega_1 + \omega_2) \quad (10.55)$$

が得られる。以上の式より

$$\begin{aligned}\langle \hat{a}_1^\dagger(t) \hat{a}_1(t) \rangle &= \int \frac{d\omega}{2\pi} [| \alpha_2(\omega) |^2 + | \alpha_4(\omega) |^2] \\ &= \frac{\kappa_1 \epsilon^2}{2\pi} \int d\omega \frac{1}{|\omega + iz_1|^2 |\omega + iz_2|^2},\end{aligned}\quad (10.56)$$

$$\begin{aligned}e^{2i\omega_c t} \langle \hat{a}_1(t) \hat{a}_1(t) \rangle &= \int \frac{d\omega}{2\pi} [\alpha_1(\omega)\alpha_2(-\omega) + \alpha_3(\omega)\alpha_4(-\omega)] \\ &= -\frac{\kappa_1 \epsilon}{2\pi} \int d\omega \frac{\omega + i\frac{\kappa_1}{2}}{|\omega + iz_1|^2 |\omega + iz_2|^2}\end{aligned}\quad (10.57)$$

が得られる。留数積分を行うことにより、式 (10.32), (10.33) との一致を確認できる。

*2) 式 (5.22) より、同時刻で異なる位置の演算子に置き換えられる。

増幅器からの出力

式 (10.26) のフーリエ変換から、増幅器からの出力場の演算子は $\hat{b}_{\text{out},1}(\omega) = \hat{b}_{\text{in},1}(\omega) - i\sqrt{\kappa_{e1}}\hat{a}_1(\omega)$ によって求められ、次の形にまとめることができる。

$$\begin{aligned}\hat{B}_{\text{out},1}(\omega) &= \beta_1(\omega)\hat{B}_{\text{in},1}(\omega) + \beta_2(\omega)\hat{B}_{\text{in},1}^\dagger(-\omega) \\ &\quad + \beta_3(\omega)\hat{C}_{\text{in},1}(\omega) + \beta_4(\omega)\hat{C}_{\text{in},1}^\dagger(-\omega),\end{aligned}\quad (10.58)$$

$$\beta_1(\omega) = 1 - i\sqrt{\kappa_{e1}}\alpha_1(\omega), \quad (10.59)$$

$$\beta_j(\omega) = -i\sqrt{\kappa_{e1}}\alpha_j(\omega) \quad (j = 2, 3, 4). \quad (10.60)$$

この式を用いて、入射ポートから定常的な古典光 $\mathcal{E}_{\text{in}}(t) = E_{\text{in}}e^{-i\omega_{\text{in}}t}$ が入射する場合の、出力光の振幅を計算してみよう。式 (10.46), (10.58) より

$$\begin{aligned}\langle \hat{b}_{\text{out},1}(t) \rangle &= \int \frac{d\omega}{\sqrt{2\pi}} e^{-i(\omega_c+\omega)t} \langle \hat{B}_{\text{out},1}(\omega) \rangle \\ &= \int \frac{d\omega}{\sqrt{2\pi}} e^{-i(\omega_c+\omega)t} \left[\beta_1(\omega) \langle \hat{B}_{\text{in},1}(\omega) \rangle + \beta_2(\omega) \langle \hat{B}_{\text{in},1}^\dagger(-\omega) \rangle \right]\end{aligned}\quad (10.61)$$

が得られる。ここで $\langle \hat{B}_{\text{in},1}(\omega) \rangle$ については、式 (10.45) と $\langle \hat{b}_{\text{in},1}(t) \rangle = E_{\text{in}}e^{-i\omega_{\text{in}}t}$ を用いると

$$\begin{aligned}\langle \hat{B}_{\text{in},1}(\omega) \rangle &= \int \frac{d\omega}{\sqrt{2\pi}} e^{i(\omega_c+\omega)t} \langle \hat{b}_{\text{in},1}(t) \rangle \\ &= \sqrt{2\pi} E_{\text{in}} \delta(\omega + \omega_c - \omega_{\text{in}})\end{aligned}\quad (10.62)$$

となる。これを式 (10.61) に代入して

$$\langle \hat{b}_{\text{out},1}(t) \rangle = \beta_1(\omega_{\text{in}} - \omega_c) E_{\text{in}} e^{-i\omega_{\text{in}}t} + \beta_2(\omega_c - \omega_{\text{in}}) E_{\text{in}}^* e^{-i(2\omega_c - \omega_{\text{in}})t} \quad (10.63)$$

が得られる。式 (10.16), (10.17) と比べると、 $\beta_1(\omega - \omega_c) = J(\omega)$, $\beta_2(\omega_c - \omega) = K(\omega)$ であることが予想され、係数をチェックすると確かにそうなっていることがわかる。

入力場演算子と同じように、出力場演算子についても交換関係 $[\hat{b}_{\text{out},1}(t), \hat{b}_{\text{out},1}^\dagger(t')] = \delta(t - t')$, $[\hat{B}_{\text{out},1}(\omega), \hat{B}_{\text{out},1}^\dagger(\omega')] = \delta(\omega - \omega')$ が成り立つ。式 (10.58) を使うと

$$|\beta_1(\omega)|^2 - |\beta_2(\omega)|^2 + |\beta_3(\omega)|^2 - |\beta_4(\omega)|^2 = 1 \quad (10.64)$$

が得られる。特に共振器 1 にロスがない $\kappa_{i1} = 0$ の場合には、 $\beta_3(\omega) = \beta_4(\omega) = 0$ であるから、上の式は信号ゲインと相互変調ゲインの関係式 (10.18) に帰着する。

共振器 2 内光子

次に共振器 2 内の光子の性質を調べよう。式 (10.25) をフーリエ変換し、

$\hat{B}_{\text{in},2}(\omega) = \hat{B}_{\text{out},1}(\omega)$ であることを使うと,

$$\begin{aligned}\hat{A}_2(\omega) &= \gamma_1(\omega)\hat{B}_{\text{in},1}(\omega) + \gamma_2(\omega)\hat{B}_{\text{in},1}^\dagger(-\omega) + \gamma_3(\omega)\hat{C}_{\text{in},1}(\omega) \\ &\quad + \gamma_4(\omega)\hat{C}_{\text{in},1}^\dagger(-\omega) + \gamma_5(\omega)\hat{C}_{\text{in},2}(\omega)\end{aligned}\quad (10.65)$$

と書くことができる。ただし, $z_3 = \kappa_2/2$ として

$$\gamma_j(\omega) = \frac{\sqrt{\kappa_{e2}}}{\omega + iz_3} \beta_j(\omega) \quad (j = 1, \dots, 4), \quad (10.66)$$

$$\gamma_5(\omega) = \frac{\sqrt{\kappa_{i2}}}{\omega + iz_3} \quad (10.67)$$

である。共振器 1 の場合と同様に, $\langle \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2 \rangle$ や $\langle \hat{a}_2 \hat{a}_2 \rangle$ を次のように表現できる。

$$\langle \hat{a}_2^\dagger(t) \hat{a}_2(t) \rangle = \int \frac{d\omega}{2\pi} [|\gamma_2(\omega)|^2 + |\gamma_4(\omega)|^2], \quad (10.68)$$

$$e^{2i\omega_c t} \langle \hat{a}_2(t) \hat{a}_2(t) \rangle = \int \frac{d\omega}{2\pi} [\gamma_1(\omega)\gamma_2(-\omega) + \gamma_3(\omega)\gamma_4(-\omega)]. \quad (10.69)$$

留数積分を行い, 式 (10.40), (10.41) との一致を確認することは読者への宿題としよう。

付録 A

量子もつれと混合状態

A.1 直積状態とエンタングル状態

一つの孤立した量子系を考えよう。話を具体的にするために、ここでは一次元調和振動子を例にとる。その量子状態は、状態ベクトルで表される。数状態を基底に選ぶと、

$$|\phi_a\rangle_s = \sum_{n=0}^{\infty} a_n |n\rangle_s \quad (\text{A.1})$$

と書ける。ただし $\sum_n |a_n|^2 = 1$ である。状態ベクトルの添え字 s は「着目系 (system)」を意味する。

次に調和振動子二つの系を考え、二つ目の振動子の状態ベクトルが $|\phi_b\rangle_e = \sum_{i=0}^{\infty} b_i |i\rangle_e$ と書けるとしよう。状態ベクトルの添え字 e は「環境 (environment)」を意味する。^{*1)} すると、二つの調和振動子全体を表す状態ベクトルは次のように書ける。

$$|\Phi_{\text{pro}}\rangle = |\phi_a\rangle_s |\phi_b\rangle_e = \sum_{n,i} a_n b_i |n\rangle_s |i\rangle_e. \quad (\text{A.2})$$

このように、多体量子系の状態ベクトルが個々の状態ベクトルの「積」として表されるとき、それを直積状態 (product state) と呼ぶ。直積状態は、個々の量子系が独立しており相互作用がないときに実現される。

一般には、多体量子系の状態ベクトルは直積で表すことはできない。調和振動子二つの系では、より一般的な状態ベクトルは、次式のように表される。

$$|\Phi_{\text{ent}}\rangle = \sum_{n,i} c_{ni} |n\rangle_s |i\rangle_e. \quad (\text{A.3})$$

ただし係数は $\sum_{n,i} |c_{ni}|^2 = 1$ を満たす。前述の直積状態 $|\Phi_{\text{pro}}\rangle$ は、係数が

*1) 環境は通常マクロな自由度の量子系から構成されるが、表記を簡単にするために一自由度とした。多自由度でも議論の本質は同じである。

$c_{ni} = a_n b_i$ のように因数分解可能である場合に相当する。それ以外の、直積状態として表せない量子状態をエンタングル状態 (entangled state) と呼び、このときに二つの量子系に量子もつれ (entanglement) があると言う。

A.2 密度演算子

以下では着目系のみが興味の対象であるとしよう。全体系の状態ベクトルが式 (A.3) の $|\Phi_{\text{ent}}\rangle$ で与えられるとき、着目系の物理量を表す演算子 \hat{O}_s の期待値は次式で求められる。

$$\begin{aligned}\langle \hat{O}_s \rangle &= \langle \Phi_{\text{ent}} | \hat{O}_s | \Phi_{\text{ent}} \rangle = \sum_{m,n,j,i} c_{mj}^* c_{ni} \langle m | \hat{O}_s | n \rangle_{s,e} \langle j | i \rangle_e \\ &= \sum_{m,n,j} c_{mj}^* c_{nj} \langle m | \hat{O}_s | n \rangle_s.\end{aligned}\quad (\text{A.4})$$

この量を求めるのに、あらかじめ全体系の状態ベクトル $|\Phi_{\text{ent}}\rangle$ から環境自由度を消去し、着目系のみの状態を表す量があると便利である。そのために、全体系の密度演算子 (density matrix) を $|\Phi_{\text{ent}}\rangle\langle\Phi_{\text{ent}}|$ により定義し、着目系に縮約した密度演算子 (reduced density matrix) $\hat{\rho}_s$ を次式により導入する。

$$\begin{aligned}\hat{\rho}_s &= \text{Tr}_e\{|\Phi_{\text{ent}}\rangle\langle\Phi_{\text{ent}}|\} = \sum_{m,n,j,i} c_{mj}^* c_{ni} \text{Tr}_e\{|n\rangle_s |i\rangle_e e \langle j | s \langle m|\} \\ &= \sum_{m,n,j} c_{mj}^* c_{nj} |n\rangle_s \langle m|.\end{aligned}\quad (\text{A.5})$$

最後の等号の導出には $\text{Tr}_e\{|n\rangle_s |i\rangle_e e \langle j | s \langle m|\} = |n\rangle_{ss} \langle m| \sum_k e \langle k | i \rangle_e e \langle j | k \rangle_e = |n\rangle_{ss} \langle m | \delta_{ij}$ を用いた。演算子 \hat{O}_s の期待値 [式 (A.4)] は、密度演算子 $\hat{\rho}_s$ を用いて

$$\langle \hat{O}_s \rangle = \text{Tr}_s\{\hat{O}_s \hat{\rho}_s\} \quad (\text{A.6})$$

により求めることができる。

密度演算子 $\hat{\rho}_s$ の性質を見てみよう。式 (A.5) より、

$$\hat{\rho}_s^\dagger = \hat{\rho}_s, \quad (\text{A.7})$$

$$\text{Tr}_s\{\hat{\rho}_s\} = 1 \quad (\text{A.8})$$

を直ちに確認できる。つまり $\hat{\rho}_s$ はトレース 1 のエルミート演算子である。 $\hat{\rho}_s$ の固有値、固有状態を p_j , $|\psi_j\rangle_s$ で表そう。(縮退のある場合には、 $|\psi_j\rangle_s$ が正規直交基底となるように選ぶ。) 上述の性質より p_j は実数であり $\sum_j p_j = 1$ を満たしている。また $p_j = s \langle \psi_j | \hat{\rho}_s | \psi_j \rangle_s$ は系が状態 $|\psi_j\rangle_s$ にある確率を表すので非負であり、 $\{p_j\}$ は確率分布を表す。密度演算子は

$$\hat{\rho}_s = \sum_j p_j |\psi_j\rangle_{ss} \langle \psi_j| \quad (\text{A.9})$$

と表すことができる。

A.3 純粹状態と混合状態

式 (A.5)において、全体系が直積状態であり $c_{ni} = a_n b_i$ と分解できるときには、 $\sum_i |b_i|^2 = 1$ に注意すると

$$\hat{\rho}_s = \sum_{m,n} a_m^* a_n |n\rangle_s \langle m| = |\phi_a\rangle_s \langle \phi_a| \quad (\text{A.10})$$

となり、密度演算子は单一の状態 $|\phi_a\rangle_s$ への射影演算子に帰着する。このような状態を純粹状態 (pure state) と呼ぶ。密度演算子の固有値は $(1, 0, 0, \dots)$ であり、固有値 1 に対応する固有ベクトルは $|\phi_a\rangle_s$ 、固有値 0 に対応する固有ベクトルは $|\phi_a\rangle_s$ と直交する全てのベクトルである。

一方、純粹状態以外の状態を混合状態 (mixed state) と呼ぶ。混合状態は二つ以上の純粹状態の確率的な重ね合わせである。着目系が混合状態にあるとき、その系は他の自由度（環境など）とエンタングルしている。

純粹状態と混合状態を区別する量として、純粹度 (purity) P を次式で定義しよう。

$$P = \text{Tr}_s\{\hat{\rho}_s^2\}. \quad (\text{A.11})$$

純粹状態に対しては $\hat{\rho}_s^2 = \hat{\rho}_s$ であるので $P = 1$ である。一方、式 (A.9) を用いると、 $P = \sum_j p_j^2$ であるから、混合状態に対しては $P < 1$ である。

ここまで説明では、異なる粒子（二つの調和振動子）を想定して量子もつれや混合状態を説明したが、一つの粒子が複数の自由度を持っている場合にも、これらの概念は適用される。例えば、一つの粒子が x, y, z 方向の自由度を持つ三次元調和振動子では、 $(|1\rangle_x |0\rangle_y |0\rangle_z + |0\rangle_x |1\rangle_y |0\rangle_z + |0\rangle_x |0\rangle_y |1\rangle_z)/\sqrt{3}$ といったエンタングル状態がありうる。もし y 方向の自由度のみに着目する場合、この状態の密度行列は $\hat{\rho}_y = \frac{2}{3}|0\rangle_{yy}|0\rangle + \frac{1}{3}|1\rangle_{yy}|1\rangle$ であり、混合状態として記述される。

A.4 具体例

具体例として、調和振動子の量子状態が基底状態 $|0\rangle$ および一量子状態 $|1\rangle$ で閉じている場合を考え、 $|0\rangle = (1, 0)^t$, $|1\rangle = (0, 1)^t$ として量子状態を 2 成分ベクトルで表現しよう。演算子は 2×2 の行列で表され、消滅演算子 \hat{a} 、数演算子 $\hat{a}^\dagger \hat{a}$ は次のように書ける。

$$\hat{a} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{a}^\dagger \hat{a} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.12})$$

まず、この調和振動子が純粋状態

$$|\psi_1\rangle = \cos\theta|0\rangle + e^{i\phi}\sin\theta|1\rangle \quad (\text{A.13})$$

にある場合を考えよう。対応する密度行列は

$$\hat{\rho}_1 = \begin{pmatrix} \cos^2\theta & e^{-i\phi}\cos\theta\sin\theta \\ e^{i\phi}\cos\theta\sin\theta & \sin^2\theta \end{pmatrix} \quad (\text{A.14})$$

であり、純粋状態の性質である $\hat{\rho}_1^2 = \hat{\rho}_1$, $P = \text{Tr}\{\hat{\rho}_1^2\} = 1$ を確認できる。

次に、この調和振動子が別の調和振動子とエンタングルしており、

$$|\psi_2\rangle = \cos\theta|0\rangle|0\rangle + e^{i\phi}\sin\theta|1\rangle|1\rangle \quad (\text{A.15})$$

で表される場合を考えよう。この場合、はじめの調和振動子に対する密度行列は

$$\hat{\rho}_2 = \begin{pmatrix} \cos^2\theta & 0 \\ 0 & \sin^2\theta \end{pmatrix} \quad (\text{A.16})$$

であり、式 (A.14) と比較して非対角項が落ちていることがわかる。この状態に対しては、 $P = \text{Tr}\{\hat{\rho}_2^2\} = \cos^4\theta + \sin^4\theta$ であり、 θ が $\pi/2$ の整数倍である場合を除いて $P < 1$ の混合状態である。

状態 $\hat{\rho}_1$, $\hat{\rho}_2$ に対して励起数 $\hat{a}^\dagger\hat{a}$ の期待値を計算すると、 $\langle\hat{a}^\dagger\hat{a}\rangle_1 = \text{Tr}\{\hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{\rho}_1\} = \sin^2\theta$, $\langle\hat{a}^\dagger\hat{a}\rangle_2 = \sin^2\theta$ となり、励起数の期待値が等しいことがわかる。一方、複素振幅 \hat{a} に対しては、 $\langle\hat{a}\rangle_1 = e^{i\phi}\cos\theta\sin\theta$, $\langle\hat{a}\rangle_2 = 0$ となり、状態 $\hat{\rho}_1$ だけがゼロでない振幅期待値を持つ。

付録 B

角運動量

B.1 交換関係

古典粒子の角運動量は、 $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ により定義される。 x, y, z 座標に対応する量を添え字 1, 2, 3 で表すことにすると、角運動量の各成分は $L_1 = r_2 p_3 - r_3 p_2$, $L_2 = r_3 p_1 - r_1 p_3$, $L_3 = r_1 p_2 - r_2 p_1$ で与えられる。これらの量を演算子と見なして、交換関係 $[\hat{r}_i, \hat{p}_j] = i\hbar\delta_{ij}$ を課すと、角運動量の成分間の交換関係は $[\hat{L}_i, \hat{L}_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk}\hat{L}_k$ となる。ただし ε_{ijk} は交代記号と呼ばれるテンソルであり

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & (i, j, k) = (1, 2, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2) \\ -1 & (i, j, k) = (1, 3, 2), (2, 1, 3), (3, 2, 1) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases} \quad (\text{B.1})$$

である。これに倣って、交換関係

$$[\hat{J}_i, \hat{J}_j] = i\varepsilon_{ijk}\hat{J}_k \quad (\text{B.2})$$

を満たす演算子の組 $\{\hat{J}_1, \hat{J}_2, \hat{J}_3\}$ の性質について議論しよう。

角運動量の大きさを表す演算子 $\hat{\mathbf{J}}^2$ と昇降演算子 \hat{J}_\pm を

$$\hat{\mathbf{J}}^2 = \hat{J}_1^2 + \hat{J}_2^2 + \hat{J}_3^2, \quad (\text{B.3})$$

$$\hat{J}_\pm = \hat{J}_1 \pm i\hat{J}_2 \quad (\text{B.4})$$

により定義しよう。すると次の関係式を示すことができる。

$$[\hat{\mathbf{J}}^2, \hat{J}_3] = 0, \quad (\text{B.5})$$

$$[\hat{\mathbf{J}}^2, \hat{J}_\pm] = 0, \quad (\text{B.6})$$

$$[\hat{J}_3, \hat{J}_\pm] = \pm \hat{J}_\pm, \quad (\text{B.7})$$

$$\hat{\mathbf{J}}^2 = \hat{J}_3(\hat{J}_3 + 1) + \hat{J}_-\hat{J}_+ = \hat{J}_3(\hat{J}_3 - 1) + \hat{J}_+\hat{J}_-. \quad (\text{B.8})$$

B.2 固有状態

式 (B.5) より, 全角運動量 $\hat{\mathbf{J}}^2$ と角運動量 z 成分 \hat{J}_3 の同時固有状態をとることができる. これを $|l, m\rangle$ で表そう. ただし, l は $\hat{\mathbf{J}}^2$ に対するラベルであり, m は \hat{J}_3 に対するラベルである. 固有方程式は

$$\hat{\mathbf{J}}^2|l, m\rangle = \lambda_l|l, m\rangle, \quad (\text{B.9})$$

$$\hat{J}_3|l, m\rangle = m|l, m\rangle \quad (\text{B.10})$$

である. 固有値 λ_l および m は実数である.

\hat{J}_3 の固有値 m に上限・下限があることを次のように示すことができる. $I = \langle l, m | \hat{\mathbf{J}}^2 - \hat{J}_3^2 | l, m \rangle$ という量を考えよう. 式 (9.20), (9.21) を使うと $I = \lambda_l - m^2$ である. 一方, $\hat{\mathbf{J}}^2 - \hat{J}_3^2 = \hat{J}_1^2 + \hat{J}_2^2$ であるから, $I = \langle l, m | \hat{J}_1^2 | l, m \rangle + \langle l, m | \hat{J}_2^2 | l, m \rangle$ と書ける. ここで演算子 \hat{J}_1, \hat{J}_2 はエルミートであるから, $I = (\text{状態 } \hat{J}_1 | l, m \rangle \text{ のノルム}) + (\text{状態 } \hat{J}_2 | l, m \rangle \text{ のノルム})$ であり, $I \geq 0$ である. 以上のことから $\lambda_l \geq 0$ であり, $-\sqrt{\lambda_l} \leq m \leq \sqrt{\lambda_l}$ である.

状態 $\hat{J}_\pm |l, m\rangle$ の性質を考えよう. この状態に $\hat{\mathbf{J}}^2$ や \hat{J}_3 を作用させ, 交換関係 (B.6), (B.7) を用いると

$$\hat{\mathbf{J}}^2 \hat{J}_\pm |l, m\rangle = \lambda_l \hat{J}_\pm |l, m\rangle, \quad (\text{B.11})$$

$$\hat{J}_3 \hat{J}_\pm |l, m\rangle = (m \pm 1) \hat{J}_\pm |l, m\rangle \quad (\text{B.12})$$

が得られる. つまり演算子 \hat{J}_\pm は $\hat{\mathbf{J}}^2$ の固有値を保ったまま \hat{J}_3 の固有値を 1 だけ増減させるはたらきを持ち, そのため昇降演算子と呼ばれる. よって, 規格化定数を C として

$$\hat{J}_\pm |l, m\rangle = C |l, m \pm 1\rangle \quad (\text{B.13})$$

と書くことができる.

先ほど示したとおり, m には上限・下限がある. よって

$$\hat{J}_+ |l, m_{\max}\rangle = 0, \quad (\text{B.14})$$

$$\hat{J}_- |l, m_{\min}\rangle = 0 \quad (\text{B.15})$$

となる m_{\max}, m_{\min} が存在する. (そうでないと, 例えば \hat{J}_+ を繰り返して $|l, m\rangle$ に作用させることにより, 幾らでも大きな固有値 m を持つ状態ができるしまう.) 式 (B.14) の左辺のノルムを, 式 (B.8) を使って計算すると,

$$0 = \langle l, m_{\max} | \hat{J}_- \hat{J}_+ | l, m_{\max} \rangle = \lambda_l - m_{\max}(m_{\max} + 1) \quad (\text{B.16})$$

が得られる. 同様に, 式 (B.8), (B.15) より

$$0 = \langle l, m_{\min} | \hat{J}_+ \hat{J}_- | l, m_{\min} \rangle = \lambda_l - m_{\min}(m_{\min} - 1) \quad (\text{B.17})$$

が得られる。式 (B.16), (B.17) より $m_{\max} + m_{\min} = 0$ が得られる。ここで m どうしの差は整数であることを考えると、 m_{\max} ($= -m_{\min}$) $= 0, \frac{1}{2}, 1, \dots$ の値をとる。以下では $m_{\max} = l$ と記そう。式 (B.16) または (B.17) より、 $\lambda_l = l(l+1)$ である。

以上をまとめると、演算子 \hat{J}^2 , \hat{J}_3 の同時固有状態 $|l, m\rangle$ は次の性質を満たす：

$$\hat{J}^2 |l, m\rangle = l(l+1) |l, m\rangle, \quad (\text{B.18})$$

$$\hat{J}_3 |l, m\rangle = m |l, m\rangle. \quad (\text{B.19})$$

ただし l は $0, \frac{1}{2}, 1, \dots$ の値をとり、 m は $-l, \dots, l$ の値をとる。最後に、式 (B.13) の規格化定数を定めておこう。 $C^2 = \langle l, m | \hat{J}_{\mp} \hat{J}_{\pm} | l, m \rangle = l(l+1) - m(m \pm 1)$ より

$$\hat{J}_{\pm} |l, m\rangle = \sqrt{l(l+1) - m(m \pm 1)} |l, m \pm 1\rangle \quad (\text{B.20})$$

となる。

付録 C

Schrieffer-Wolff 変換

無摂動ハミルトニアン \hat{H}_0 と摂動 \hat{V} から成る、次のハミルトニアン \hat{H} を考えよう。

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{V}. \quad (\text{C.1})$$

ただし、 \hat{H}_0 の固有状態 $|m\rangle$ と固有エネルギー E_m は既にわかっているものとし、摂動 \hat{V} の対角成分は全てゼロであるとする。（もし $\langle m|\hat{V}|m\rangle \neq 0$ であるときは、この量を E_m に繰り込んでしまえばよい。）

Schrieffer-Wolff 変換とは、演算子形式の摂動論である。ハミルトニアン \hat{H} にユニタリ変換

$$\hat{H} \rightarrow \hat{H}' = e^{-\hat{S}} \hat{H} e^{\hat{S}} \quad (\text{C.2})$$

を施し、変換後のハミルトニアン \hat{H}' に摂動の一次の項が現れないようにする。ただし、 \hat{S} は反エルミート演算子であり、摂動の一次に比例する量である。Baker-Campbell-Hausdorff の関係式

$$\hat{H}' = \hat{H} + [\hat{H}, \hat{S}] + \frac{1}{2}[[\hat{H}, \hat{S}], \hat{S}] + \dots \quad (\text{C.3})$$

を用いて二次の量までを書き下すと

$$\hat{H}' = \underbrace{\hat{H}_0}_{V^0} + \underbrace{\hat{V} + [\hat{H}_0, \hat{S}]}_{V^1} + \underbrace{\frac{1}{2}[[\hat{H}_0, \hat{S}], \hat{S}]}_{V^2} + \dots \quad (\text{C.4})$$

が得られる。 V^1 の項を消去するには、 \hat{S} を

$$\hat{V} + [\hat{H}_0, \hat{S}] = 0 \quad (\text{C.5})$$

と選べばよい。これを式 (C.4) に代入すると、変換後のハミルトニアン \hat{H}' は

$$\hat{H}' = \hat{H}_0 + \frac{1}{2}[\hat{V}, \hat{S}] + \dots \quad (\text{C.6})$$

と書ける。ただし、…は摂動の三次以上の項である。

反エルミート演算子 \hat{S} の具体形を求めよう。 $\hat{S} = \sum_{m,n} c_{mn} |m\rangle\langle n|$ とおいて式 (C.5) に代入し、係数 c_{mn} を定めると、

$$\hat{S} = - \sum_{m,n} \frac{\langle m|\hat{V}|n\rangle}{E_m - E_n} |m\rangle\langle n| \quad (\text{C.7})$$

が得られる。これはさらに

$$\hat{S} = -i \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{-\infty}^0 dt e^{\varepsilon t} \hat{V}(t) \quad (\text{C.8})$$

と表現することができる。ただし、 $\hat{V}(t) = e^{i\hat{H}_0 t} \hat{V} e^{-i\hat{H}_0 t}$ （相互作用表示）である。

\hat{H}' の固有状態を $|m\rangle'$ 、対応する固有値を λ'_m としよう。つまり $\hat{H}'|m\rangle' = \lambda'_m|m\rangle'$ とする。この両辺に左から $e^{\hat{S}}$ を掛けると、 $\hat{H}e^{\hat{S}}|m\rangle' = \lambda'_m e^{\hat{S}}|m\rangle'$ が得られる。つまり変換前のハミルトニアン \hat{H} の固有値は $\lambda_m = \lambda'_m$ であり、Schrieffer-Wolff 変換の前後で不変である。対応する固有状態は $|m\rangle = e^{\hat{S}}|m\rangle'$ で与えられる。

付録 D

ラプラス変換

古典力学におけるニュートン方程式や、量子力学におけるシュレーディンガー方程式のように、物理学においては運動方程式が微分方程式として与えられていることが多い。ここでは、微分方程式を解く便法の一つとして、ラプラス変換の活用法をごく簡単に紹介する。

D.1 定義

時刻 $t > 0$ の領域で定義された関数 $f(t)$ を考える。この関数は「原関数」、「時間表示」、「 t 関数」などと呼ばれる。そのラプラス変換を、複素数 s を用いて、

$$F(s) = \int_0^\infty dt e^{-st} f(t) \quad (\text{D.1})$$

によって定義しよう。^{*1)} こちらの関数は「像関数」、「周波数表示」、「 s 関数」などと呼ばれる。また、ラプラス変換を $\mathcal{L}[f]$ と表記する場合もある。

D.2 ラプラス変換の諸公式

ラプラス変換の基本的な性質について、表 D.1 にまとめた。注意点は下記のとおり。(i) t 関数の平行移動において、 $f(t)$ の定義域が $t > 0$ であるから、 $\mathcal{L}[f(t-a)] = \int_a^\infty dt e^{-st} f(t-a)$ によりラプラス変換を定義する。(ii) 署み込み関数 $(f * g)(t)$ は、

$$(f * g)(t) = \int_0^t dt' f(t')g(t-t') \quad (\text{D.2})$$

*1) 実は、この積分が収束することは自明ではなく、 s に関する条件が必要である。本節では、ラプラス変換を微分方程式を解く道具として用いるという立場で、この点は気にせず進めよう。

表 D.1 ラプラス変換の基本的性質

性質	t 関数	s 関数	コメント
線形性	$af(t) + bg(t)$	$aF(s) + bG(s)$	
相似性	$f(at)$	$\frac{1}{a}F(s/a)$	$a > 0$
平行移動	$f(t - a)$	$e^{-as}F(s)$	
微分	$f'(t)$	$sF(s) - f(0)$	
積分	$\int_0^t dt' f(t')$	$F(s)/s$	
畳み込み	$(f * g)(t)$	$F(s)G(s)$	

表 D.2 主な関数のラプラス変換表

	t 関数	s 関数
定数	1	$1/s$
一次関数	t	$1/s^2$
べき関数 (一般)	t^n	$n! / s^{n+1}$
指数関数	e^{-at}	$1/(s + a)$
三角関数	$\cos \omega t$	$s/(s^2 + \omega^2)$
三角関数	$\sin \omega t$	$\omega/(s^2 + \omega^2)$
双曲線関数	$\cosh \omega t$	$s/(s^2 - \omega^2)$
双曲線関数	$\sinh \omega t$	$\omega/(s^2 - \omega^2)$

により定義される。

物理では関数の 2 階微分がよく現れるが、そのラプラス変換は次のように求められる。表 D.1 における「微分」の式は、 $\mathcal{L}[f'] = s\mathcal{L}[f] - f(0)$ と書け、ここで $f' \rightarrow f''$ とすると $\mathcal{L}[f''] = s\mathcal{L}[f'] - f'(0)$ である。前者の式を後者に代入して、

$$\mathcal{L}[f''] = s^2\mathcal{L}[f] - sf(0) - f'(0) \quad (\text{D.3})$$

が得られる。さらに一般の n 階微分に対しては、

$$\mathcal{L}[f^{(n)}] = s^n\mathcal{L}[f] - s^{n-1}f(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0) \quad (\text{D.4})$$

と表すことができる。

表 D.2 に、よく使う関数のラプラス変換を示した。一次関数のラプラス変換は、定義式において部分積分を行うことで導出できる。また、一般のべき関数のラプラス変換は、数学的帰納法で導出できる。三角関数や双曲線関数に関しては、それらを指数関数の和に分解すれば、指数関数のラプラス変換から容易に求められる。例えば、 $\mathcal{L}[\cos \omega t] = (\mathcal{L}[e^{i\omega t}] + \mathcal{L}[e^{-i\omega t}])/2 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{s+i\omega} + \frac{1}{s-i\omega} \right) = s/(s^2 + \omega^2)$ である。

D.2.1 初期値・最終値の定理

関数 $f'(t)$ のラプラス変換より

$$\int_0^\infty dt e^{-st} \frac{df}{dt} = sF(s) - f(0) \quad (\text{D.5})$$

が得られる（表 D.1 の“微分”）。この式において $s \rightarrow \infty$ の極限をとると、左辺は 0 に近づく。よって

$$f(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s) \quad (\text{D.6})$$

が得られる。これを初期値の定理と呼ぶ。

一方、式 (D.5) において $s \rightarrow 0$ の極限を考えよう。左辺は $\int_0^\infty \frac{df}{dt} = f(\infty) - f(0)$ に近づく。よって

$$f(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s) \quad (\text{D.7})$$

が得られる。これを最終値の定理と呼ぶ。

D.3 ラプラス逆変換

ラプラス変換 [式 (D.1)] では、時間領域の関数 $f(t)$ を周波数領域の関数 $F(s)$ に変換した。この逆変換は、プロムウェイッチ積分と呼ばれる

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} ds e^{ts} F(s) \quad (\text{D.8})$$

により行われる。ただし c は正の定数である。積分路を閉じさせて留数定理を用いることにより、 $f(t)$ は、関数 $e^{ts} F(s)$ の全ての特異点における留数の総和として求められる。

D.4 微分方程式への応用

ここでは、ラプラス変換を使う微分方程式の解法例を紹介する。具体例として、摩擦のない調和振動子（固有周波数 Ω ）に周期的外力（周期 ω , 振幅 A ）を加える場合を考えよう。運動方程式は

$$\ddot{x}(t) + \Omega^2 x(t) = A \sin \omega t \quad (\text{D.9})$$

で与えられる。また初期条件は $x(0) = x_0$, $\dot{x}(0) = v_0$ とする。

関数 $x(t)$ のラプラス変換を $X(s)$ で表すことにしよう。2階微分の変換式 (D.3) やラプラス変換表 D.2 を用いて、式 (D.9) をラプラス変換すると

$$X(s) = \frac{A\omega}{(s^2 + \omega^2)(s^2 + \Omega^2)} + \frac{x_0 s + v_0}{s^2 + \Omega^2} \quad (\text{D.10})$$

が得られる。これを部分分数に分解して、

$$\begin{aligned} X(s) &= \frac{A}{\Omega^2 - \omega^2} \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} + x_0 \frac{s}{s^2 + \Omega^2} \\ &+ \left[\frac{v_0}{\Omega} + \frac{A\omega}{\Omega(\omega^2 - \Omega^2)} \right] \frac{\Omega}{s^2 + \Omega^2} \end{aligned} \quad (\text{D.11})$$

が得られる。ラプラス変換表 D.2 を用いて、時間領域の関数に戻すと

$$x(t) = \frac{A}{\Omega^2 - \omega^2} \sin \omega t + x_0 \cos \Omega t + \left[\frac{v_0}{\Omega} + \frac{A\omega}{\Omega(\omega^2 - \Omega^2)} \right] \sin \Omega t \quad (\text{D.12})$$

が得られる。これが求める関数 $x(t)$ である。

問題

s の関数 $e^{ts} X(s)$ の全ての留数から、関数 $x(t)$ を求めよ。

解答 式 (D.10) より、関数 $e^{ts} X(s)$ の極は $s = \pm i\omega, \pm i\Omega$ であり、留数は

$$\text{Res}_{s=\pm i\omega} e^{ts} X(s) = \frac{\pm iA}{2(\omega^2 - \Omega^2)} e^{\pm i\omega t}, \quad (\text{D.13})$$

$$\text{Res}_{s=\pm i\Omega} e^{ts} X(s) = \left[\frac{x_0}{2} \mp \frac{i}{2} \left(\frac{v_0}{2} + \frac{A\omega}{\Omega(\omega^2 - \Omega^2)} \right) \right] e^{\pm i\Omega t} \quad (\text{D.14})$$

である。これら 4つの留数の和として、式 (D.12) が再現される。

付録 E

量子ゼノ効果

E.1 射影仮設と量子ゼノ効果

2 準位原子が重ね合わせ状態 $|\psi\rangle = c_0|g\rangle + c_1|e\rangle$ にあるとする。この原子に対して、それが基底状態にあるか励起状態にあるかを測定すると、確率 $|c_0|^2$ で「基底状態」、確率 $|c_1|^2$ で「励起状態」という測定結果が得られる。また測定直後の状態に関しては、測定前の重ね合わせが壊れ、測定結果が「基底状態」のときには $|g\rangle$ に、「励起状態」のときには $|e\rangle$ に収縮する。これを波動関数の収縮 (wave function reduction) あるいは射影仮設 (projection postulate) と呼ぶ。

1.4 節では、励起原子の生存確率 $P_s(t)$ が、崩壊の初期において

$$P_s(t) = 1 - \frac{\langle(\Delta\hat{H})^2\rangle}{\hbar^2}t^2 \quad (\text{E.1})$$

の形で減少することを見た [式 (1.180)]。ただし $\langle(\Delta\hat{H})^2\rangle = \langle e|\hat{H}^2|e\rangle - \langle e|\hat{H}|e\rangle^2$ である。この事実と上述の射影仮設を使って、短い時間間隔 τ_m で励起原子に対して測定を繰り返す場合の、原子の生存確率 $\overline{P}_s(t)$ を考えよう。

$t = 0$ において励起されている原子が $t = \tau_m$ においても励起されている確率は $P_s(\tau_m)$ であり、確認の直後には原子は励起状態にリセットされる。よって、 $t = 2\tau_m$ において励起されている確率は $[P_s(\tau_m)]^2$ であり、一般に $t = n\tau_m$ において励起されている確率は $[P_s(\tau_m)]^n$ である。^{*1)} よって、時間間隔 τ_m の繰り返し測定の下では、時刻 t における励起原子の生存確率 $\overline{P}_s(t)$ は

$$\overline{P}_s(t) = [P_s(\tau_m)]^{t/\tau_m} \quad (\text{E.2})$$

で与えられる。

繰り返し測定の下での原子の崩壊レートは測定時間間隔 τ_m に依存すると考えられるので、これを $\Gamma(\tau_m)$ としよう。 $\overline{P}_s(t) = e^{-\Gamma(\tau_m)t}$ とおくことに

*1) 一度崩壊した原子が、光子を再吸収して「復活」する確率は無視する。

よって,

$$\Gamma(\tau_m) = -\frac{\log P_s(\tau_m)}{\tau_m} \quad (\text{E.3})$$

と表すことができる。特に測定時間間隔 τ_m が短い場合には、式 (E.1) を用いて、

$$\Gamma(\tau_m) = \frac{\langle(\Delta\hat{H})^2\rangle}{\hbar^2}\tau_m \quad (\text{E.4})$$

が得られる。つまり、測定時間間隔に比例して崩壊レートは小さくなる。

このように、不安定量子系に対してそれが崩壊したか否かを頻繁に測定すると、系の崩壊が遅くなるという結論が得られる(図 E.1 の実線)。これを「アキレスが亀に追いつかない」という有名なゼノンのパラドックスになぞらえて **量子ゼノ効果** (quantum Zeno effect) と呼ぶ^[80]。注意点として、ゼノンのパラドックスは本当のパラドックスであり、実際にはアキレスは亀に追いつけるのだが、量子ゼノ効果はパラドックスではなく、実験でも確かめられている^{[81], [82]}。

量子ゼノ効果のオリジナルの議論は、上述のように「意図的な」繰り返し測定に基づいている。一方、6.4 節において、位相緩和によっても量子系のダイナミクスが凍結することを見た。位相緩和の原因是着目系の状態に応じた環境との量子もつれ生成であり、「意図しない」測定を連続的に行っていることと同等である。よって、位相緩和による崩壊レートの変化も、量子ゼノ効果と呼ぶことがある。

E.2 一般化された黄金律

前節では、原子の崩壊確率として t^2 則 [式 (E.1)] を用いたが、これは崩壊のごく初期に成り立つ式である。より長い時間領域で成り立つ正確な表現は式 (1.194) であり、これを用いると、

$$P_s(t) = 1 - t^2 \int d\omega |\xi(\omega)|^2 \times \text{sinc}^2 \left[\frac{(\omega - \omega_a)t}{2} \right] \quad (\text{E.5})$$

が得られる。ただし $|\xi(\omega)|^2$ は原子光子相互作用のスペクトル密度 [式 (1.193)] であり、 ω_a は原子の共鳴周波数である。これを式 (E.3) に代入して

$$\Gamma(\tau_m) = 2\pi \int d\omega |\xi(\omega)|^2 \times \tilde{\delta}_{\tau_m}(\omega - \omega_a) \quad (\text{E.6})$$

が得られる。ただし関数 $\tilde{\delta}_{\tau_m}(\omega - \omega_a)$ は

$$\tilde{\delta}_{\tau_m}(\omega - \omega_a) = \frac{\tau_m}{2\pi} \text{sinc}^2 \left[\frac{(\omega - \omega_a)\tau_m}{2} \right] \quad (\text{E.7})$$

によって定義される。この関数は、 ω_a を中心とするデルタ関数 $\delta(\omega - \omega_a)$ に

$1/\tau_m$ 程度の周波数幅をつけた関数であり, $\tau_m \rightarrow \infty$ の極限で, $\tilde{\delta}_{\tau_m}(\omega - \omega_a) \rightarrow \delta(\omega - \omega_a)$ となり, デルタ関数に帰着する. 式 (E.6) は繰り返し測定のある場合に一般化されたフェルミ黄金律 (generalized Fermi golden rule) であり^[83], 測定なしの極限 $\tau_m \rightarrow \infty$ において, 元のフェルミ黄金律に帰着する. 式 (E.6) を固有エネルギーを用いて表現すると, 次式のようになる.

$$\Gamma(\tau_m) = \frac{2\pi}{\hbar} \sum_f |\langle f | \hat{H}_i | i \rangle|^2 \times \tilde{\delta}_{\tau_m}(E_f - E_i), \quad (\text{E.8})$$

$$\tilde{\delta}_{\tau_m}(E_f - E_i) = \frac{\tau_m}{2\pi\hbar} \operatorname{sinc}^2 \left[\frac{(E_f - E_i)\tau_m}{2\hbar} \right]. \quad (\text{E.9})$$

問題

測定時間間隔の短い $\tau_m \rightarrow 0$ の極限で, 式 (E.8) が式 (E.4) に帰着することを示せ.

解答 $\tau_m \rightarrow 0$ の極限では関数 $\tilde{\delta}_{\tau_m}$ は無限の幅を持ち, $\tilde{\delta}_{\tau_m} = \tau_m/(2\pi\hbar)$ と定数と見なすことができる. また, $\sum_f |\langle f | \hat{H}_1 | i \rangle|^2 = \langle (\Delta \hat{H})^2 \rangle$ より, 式 (E.4) が再現される.

E.3 量子逆ゼノ効果

量子ゼノ効果は, 頻繁な繰り返し測定によって崩壊レートが抑えられることであった. これとは逆に, 繰り返し測定によって崩壊レートが測定なしの場合よりも大きくなることがある (図 E.1 の点線). この現象は量子逆ゼノ効果 (quantum anti-Zeno effect) と呼ばれている.

測定なしの場合の崩壊レートは, 式 (E.6) において $\tau_m \rightarrow \infty$ の極限をとり, $\Gamma(\infty) = 2\pi \int d\omega |\xi(\omega)|^2 \times \delta(\omega - \omega_a)$ で与えられる. これは通常のフェルミ黃

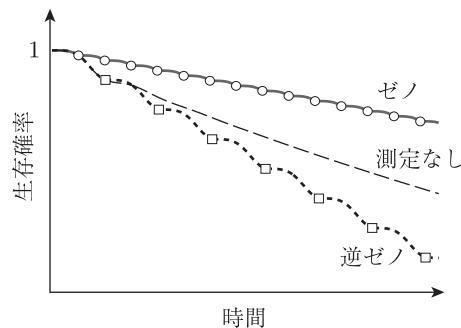


図 E.1 量子ゼノ効果と量子逆ゼノ効果. 細破線は測定なしの場合の生存確率を表す. 短い時間間隔 (○) で測定を繰り返すと崩壊が遅くなる (量子ゼノ効果, 実線). それより長めの時間間隔 (□) で測定を繰り返すと, 条件によっては崩壊が速くなる (量子逆ゼノ効果, 点線).

金律である。繰り返し測定の効果は、デルタ関数に周波数幅がつくことであり、これによって $\Gamma(\tau_m)$ が増加することが量子逆ゼノ効果である。原子光子相互作用のスペクトル密度 $|\xi(\omega)|^2$ を原子周波数 $\omega = \omega_a$ 付近でテイラー展開して式 (E.6) に代入すると、量子逆ゼノ効果が現れるためには

$$\frac{d^2}{d\omega^2} |\xi(\omega)|^2 \Big|_{\omega=\omega_a} > 0 \quad (\text{E.10})$$

が必要であることがわかる。つまり、相互作用スペクトル密度が原子周波数 ω_a 付近で上に凸であることが、量子逆ゼノ効果の必要条件である^[83]。ただし、この条件が満たされていても、測定時間間隔 τ_m が短い極限では、崩壊レートが抑えられて量子ゼノ効果となる。量子逆ゼノ効果の発現条件は、不等式 (E.10) を満たしつつ、測定時間間隔があまり短くないことである。

参考文献

- [1] L. Mandel and E. Wolf, *Optical Coherence and Quantum Optics* (Cambridge Univ. Press, 1995).
- [2] R. Loudon, *The Quantum Theory of Light* (Oxford Univ. Press, 1973).
- [3] S. Haroche and D. Kleppner, Physics Today **42**, 24 (1989).
- [4] L. DiCarlo, J. M. Chow, J. M. Gambetta, L. S. Bishop, B. R. Johnson, D. I. Schuster, J. Majer, A. Blais, L. Frunzio, S. M. Girvin, and R. J. Schoelkopf, Nature **460**, 240 (2009).
- [5] P. Krantz, M. Kjaergaard, F. Yan, T. P. Orlando, S. Gustavsson, and W. D. Oliver, Appl. Phys. Rev. **6**, 021318 (2019).
- [6] A. Blais, R. -S. Huang, A. Wallraff, S. M. Girvin, and R. J. Schoelkopf, Phys. Rev. A **69**, 062320 (2004).
- [7] A. Boca, R. Miller, K. M. Birnbaum, A. D. Boozer, J. McKeever, and H. J. Kimble, Phys. Rev. Lett. **93**, 233603 (2004).
- [8] J. McKeever, A. Boca, A. D. Boozer, J. R. Buck, and H. J. Kimble, Nature **425**, 268 (2003).
- [9] K. M. Birnbaum, A. Boca, R. Miller, A. D. Boozer, T. E. Northup, and H. J. Kimble, Nature **436**, 87 (2005).
- [10] Q. A. Turchette, C. J. Hood, W. Lange, H. Mabuchi, and H. J. Kimble, Phys. Rev. Lett. **75**, 4710 (1995).
- [11] M. Keller, B. Lange, K. Hayasaka, W. Lange, and H. Walther, Nature **431**, 1075 (2004).
- [12] R. Yalla, M. Sadgrove, K. P. Nayak, and K. Hakuta, Phys. Rev. Lett. **113**, 143601 (2014).
- [13] S. Kato and T. Aoki, Phys. Rev. Lett. **115**, 093603 (2015).
- [14] S. Kato, N. Nemet, K. Senga, S. Mizukami, X. Huang, S. Parkins, and T. Aoki, Nat. Commun. **10**, 1160 (2019).
- [15] A. Wallraff, D. I. Schuster, A. Blais, L. Frunzio, R. -S. Huang, J. Majer, S. Kumar, S. M. Girvin, and R. J. Schoelkopf, Nature **431**, 162 (2004).
- [16] J. Koch, T. M. Yu, J. Gambetta, A. A. Houck, D. I. Schuster, J. Majer, A. Blais, M. H. Devoret, S. M. Girvin, and R. J. Schoelkopf, Phys. Rev. A **76**, 042319 (2007).
- [17] J. A. Schreier, A. A. Houck, J. Koch, D. I. Schuster, B. R. Johnson, J. M. Chow, J. M. Gambetta, J. Majer, L. Frunzio, M. H. Devoret, S. M. Girvin, and R. J. Schoelkopf, Phys. Rev. B **77**, 180502(R) (2008).
- [18] T. P. Orlando, J. E. Mooij, L. Tian, C. H. van der Wal, L. S. Levitov, S. Lloyd, and J. J. Mazo, Phys. Rev. B **60**, 15398 (1999).
- [19] F. Yoshihara, T. Fuse, S. Ashhab, K. Kakuyanagi, S. Saito, and K. Semba, Nat. Phys.

13, 44 (2017).

- [20] H. Paik, D. I. Schuster, L. S. Bishop, G. Kirchmair, G. Catelani, A. P. Sears, B. R. Johnson, M. J. Reagor, L. Frunzio, L. I. Glazman, S. M. Girvin, M. H. Devoret, and R. J. Schoelkopf, Phys. Rev. Lett. **107**, 240501 (2011).
- [21] S. Kono, K. Koshino, Y. Tabuchi, A. Noguchi, and Y. Nakamura, Nat. Phys. **14**, 546 (2018).
- [22] A. F. Kockum, A. Miranowicz, S. De Liberato, S. Savasta, and F. Nori, Nat. Rev. Phys. **1**, 19 (2019).
- [23] N. Imoto, H. A. Haus, and Y. Yamamoto, Phys. Rev. A **32**, 2287 (1985).
- [24] D. I. Schuster, A. A. Houck, J. A. Schreier, A. Wallraff, J. M. Gambetta, A. Blais, L. Frunzio, J. Majer, B. Johnson, M. H. Devoret, S. H. Girvin, and R. J. Schoelkopf, Nature **445**, 515 (2007).
- [25] S. Kono, Y. Masuyama, T. Ishikawa, Y. Tabuchi, R. Yamazaki, K. Usami, K. Koshino, and Y. Nakamura, Phys. Rev. Lett. **119**, 023602 (2017).
- [26] M. Boissonneault, J. M. Gambetta, and A. Blais, Phys. Rev. A **79**, 013819 (2009).
- [27] F. Bloch and A. Siegert, Phys. Rev. **57**, 522 (1940).
- [28] P. Forn-Diaz, J. Lisenfeld, D. Marcos, J. J. Garcia-Ripoll, E. Solano, C. J. P. M. Harmans, and J. E. Mooij, Phys. Rev. Lett. **105**, 237001 (2010).
- [29] F. Yoshihara, T. Fuse, Z. Ao, S. Ashhab, K. Kakuyanagi, S. Saito, T. Aoki, K. Koshino, and K. Semba, Phys. Rev. Lett. **120**, 183601 (2018).
- [30] E. M. Purcell, Phys. Rev. **69**, 37 (1946).
- [31] Q. A. Turchette, C. J. Hood, W. Lange, H. Mabuchi, and H. J. Kimble, Phys. Rev. Lett. **75**, 4710 (1995).
- [32] O. Astafiev, A. M. Zagoskin, A. A. Abdumalikov, Yu A. Pashkin, T. Yamamoto, K. Inomata, Y. Nakamura, and J. S. Tsai, Science **327**, 840 (2010).
- [33] I. -C. Hoi, A. F. Kockum, T. Palomaki, T. M. Stace, B. Fan, L. Tornberg, S. R. Sathyamoorthy, G. Johansson, P. Delsing, and C. M. Wilson, Phys. Rev. Lett. **111**, 053601 (2013).
- [34] U. Fano, Phys. Rev. **124**, 1866 (1961).
- [35] B. R. Mollow, Phys. Rev. **188**, 1969 (1969).
- [36] F. Y. Wu, R. E. Grove, and S. Ezekiel, Phys. Rev. Lett. **35**, 1426 (1975).
- [37] H. J. Carmichael and D. F. Walls, J. Phys. B: At. Mol. Phys. **9**, 1199 (1976).
- [38] H. J. Kimble, M. Dagenais, L. Mandel, Phys. Rev. Lett. **39**, 691 (1977).
- [39] G. D. Mahan, *Many-Particle Physics* (Springer, 1990).
- [40] 小形正男, 「物性物理のための場の理論・グリーン関数—量子多体系をどう解くか?」SGC ライブドア 142 (サイエンス社, 2018 (電子版 2020)).
- [41] K. Koshino and H. Ishihara, Phys. Rev. Lett. **93**, 173601 (2004).

- [42] K. Koshino, Phys. Rev. Lett. **98**, 223902 (2007).
- [43] K. Kojima, H. F. Hofmann, S. Takeuchi, and K. Sasaki, Phys. Rev. A **68**, 013803 (2003).
- [44] K. Koshino and H. Ishihara, Phys. Rev. A **70**, 013806 (2004).
- [45] C. K. Hong, Z. Y. Ou, and L. Mandel, Phys. Rev. Lett. **59**, 2044 (1987).
- [46] B. C. Sanders, Phys. Rev. A **40**, 2417 (1989).
- [47] A. N. Boto, P. Kok, D. S. Abrams, S. L. Braunstein, C. P. Williams, and J. P. Dowling, Phys. Rev. Lett. **85**, 2733 (2000).
- [48] E. Fredkin and T. Toffoli, Int. J. Theor. Phys. **21**, 219 (1982).
- [49] G. J. Milburn, Phys. Rev. Lett. **62**, 2124 (1989).
- [50] M. Horodecki, P. Horodecki, and R. Horodecki, Phys. Rev. A **60**, 1888 (1999).
- [51] J. H. Shapiro, Phys. Rev. A **73**, 062305 (2006).
- [52] J. Gea-Banacloche, Phys. Rev. A **81**, 043823 (2010).
- [53] I. Shomroni, S. Rosenblum, Y. Lovsky, O. Bechler, G. Guendelman, and B. Dayan, Science **345**, 903 (2014).
- [54] K. Inomata, K. Koshino, Z. R. Lin, W. D. Oliver, J. S. Tsai, Y. Nakamura and T. Yamamoto, Phys. Rev. Lett. **113**, 063064 (2014).
- [55] K. Inomata, Z. R. Lin, K. Koshino, W. D. Oliver, J. S. Tsai, T. Yamamoto and Y. Nakamura, Nat. Commun. **7**, 12303 (2016).
- [56] K. Koshino, S. Ishizaka and Y. Nakamura, Phys. Rev. A **82**, 010301(R) (2010).
- [57] K. Koshino, K. Inomata, T. Yamamoto and Y. Nakamura, Phys. Rev. Lett. **111**, 153601 (2013).
- [58] K. Koshino, K. Inomata, Z. R. Lin, Y. Tokunaga, T. Yamamoto, and Y. Nakamura, Phys. Rev. Appl. **7**, 064006 (2017).
- [59] A. Reiserer and G. Rempe, Rev. Mod. Phys. **87**, 1379 (2015).
- [60] D. E. Chang, L. Jiang, A. V. Gorshkov, and H. J. Kimble, New J. Phys. **14**, 063003 (2012).
- [61] K. Lalumiere, B. C. Sanders, A. F. van Loo, A. Fedorov, A. Wallraff, and A. Blais, Phys. Rev. A **88**, 043806 (2013).
- [62] R. H. Dicke, Phys. Rev. **93**, 99 (1954).
- [63] M. Gross and S. Haroche, Phys. Rep. **93**, 301 (1982).
- [64] K. Koshino and Y. Nakamura, New J. Phys. **14**, 043005 (2012).
- [65] M. Wallquist, V. S. Shumeiko, and G. Wendin, Phys. Rev. B **74**, 224506 (2006).
- [66] P. Forn-Diaz, C. W. Warren, C. W. S. Chang, A. M. Vadiraj, and C. M. Wilson, Phys. Rev. Appl. **8**, 054015 (2017).
- [67] K. Koshino, S. Kono, and Y. Nakamura, Phys. Rev. Appl. **13**, 014051 (2020).
- [68] S. Kono, K. Koshino, D. Lachance-Quirion, A. F. van Loo, Y. Tabuchi, A. Noguchi, and Y. Nakamura, Nat. Commun. **11**, 3683 (2020).

- [69] T. Yamamoto, K. Inomata, M. Watanabe, K. Matsuba, T. Miyazaki, W. D. Oliver, Y. Nakamura and J. S. Tsai, *Appl. Phys. Lett.* **93**, 042510 (2008).
- [70] T. Yamamoto, K. Koshino and Y. Nakamura, *Principles and Methods of Quantum Information Technologies*, ed. by Y. Yamamoto and K. Sembra (Springer, Tokyo, 2016), chapter 23.
- [71] R. Vijay, D. H. Slichter, I. Siddiqi, *Phys. Rev. Lett.* **106**, 110502 (2011).
- [72] A. H. Nayfeh, D. T. Mook, *Nonlinear Oscillations* (Wiley-Interscience, New York, 1995).
- [73] E. Goto, *Proc. Inst. Radio Eng.* **47**, 1304 (1959).
- [74] Z. R. Lin, K. Inomata, K. Koshino, W. D. Oliver, Y. Nakamura, J. S. Tsai and T. Yamamoto, *Nat. Commun.* **5**, 4480 (2014).
- [75] H. Goto, *Sci. Rep.* **6**, 21686 (2016).
- [76] S. Puri, C. K. Andersen, A. L. Grimsmo and A. Blais, *Nat. Commun.* **8**, 15785 (2017).
- [77] L. Zhong, E. P. Menzel, R. Di Candia, P. Eder, M. Ihmig, A. Baust, M. Haeberlein, E. Hoffmann, K. Inomata, T. Yamamoto, Y. Nakamura, E. Solano, F. Deppe, A. Marx, and R. Gross, *New J. Phys.* **15**, 125013 (2013).
- [78] S. Kono, Y. Masuyama, T. Ishikawa, Y. Tabuchi, R. Yamazaki, K. Usami, K. Koshino, and Y. Nakamura, *Phys. Rev. Lett.* **119**, 023602 (2017).
- [79] A. Vinante and P. Falferi, *Phys. Rev. Lett.* **111**, 207203 (2013).
- [80] B. Misra and E. C. G. Sudarshan, *J. Math. Phys.* **18**, 756 (1977).
- [81] W. M. Itano, D. J. Heinzen, J. J. Bollinger, and D. J. Wineland, *Phys. Rev. A* **41**, 2295 (1990).
- [82] M. C. Fischer, B. Gutierrez-Medina, and M. G. Raizen, *Phys. Rev. Lett.* **87**, 040402 (2001).
- [83] K. Koshino and A. Shimizu, *Phys. Rep.* **412**, 191 (2005).

索引

欧字

2 準位原子 21
3 dB 限界 156
 β 値 83
Bloch-Siegert シフト 58
Fabry-Perot 共振器 42
Fano 対角化 84
Fock 状態 5

Hong-Ou-Mandel 干渉 113
Jaynes-Cummings モデル 46
Lamb シフト 32
Mollow 三重項 100
NOON 状態 113
 $\pi/2$ パルス 36
 π パルス 35
Purcell 因子 83
Purcell 効果 83

Q 値 77
Rabi 振動 35
Rabi 振動数 34
Rabi モデル 46
SWAP ゲート 121

ア
アイドラー光 152
アダマール変換 111
アンチバンチング 102
一次元原子 84
一般化されたフェルミ黄金律 176
ウィスパリングギャラリーモード 43

エンタングル状態 162

力

回転波近似 24, 46
外部ロス 48
開放系 47
過結合 92
片側共振器 68
ガルバニック結合 44
環境 47
基底状態 3
強結合領域 48, 81
共振器モード 39
共振器量子電磁気学 39
協同係数 83
共鳴トンネリング 93

サ

交代記号 165
コヒーレント状態 8
混合状態 15, 163
最小不確定状態 2
自己エネルギー 31
自然幅極限 77
自然放出レート 29
磁束量子ビット 44
射影仮設 174
弱結合領域 48, 81
自由発展近似 131
縮約した密度演算子 162
純位相緩和 47
純粹状態 15, 163
純粹度 163
深強結合領域 49, 58
真空 Rabi 振動 39, 53
真空状態 5
信号ゲイン 152

信号光	152	パラメトリック発振	151
数状態	5	パラメトリック励起	149
スクイーズド真空状態	13	半古典理論	24
制御 Z ゲート	115	反超放射	136
制御位相ゲート	115	パンチング	102
静的カシミール効果	18	ファインマンダイヤグラム	31
線形応答	91	フェルミの黄金律	28
相互変調ゲイン	152	不確定性関係	2
タ			
縦緩和	76	不足結合	92
单一光子検出	41	分散結合領域	53
单一光子生成	41	分散シフト	54
单一光子による決定論的ラマン遷移	121	分散読み出し	41, 54
遅延微分方程式	63	分配関数	15
着衣状態	36	平均ゲート忠実度	115
着衣状態エンジニアリング	123	飽和	94
超強結合領域	48, 58	マ	
超伝導回路 QED	43	マルコフ近似	64
長波長近似	21	密度演算子	162
超放射	135	密度行列	15, 62
直積状態	161	無輻射緩和	47
定常状態近似	83	ヤ	
動的カシミール効果	18	横緩和	77
導波路 QED 系	41, 84	ラ	
導波路モード	39, 48	ラグランジアン	1
トランズモン	44	量子逆ゼノ効果	176
ナ			
内部ロス	48	量子光学	1
出入力関係式	71	量子ゼノ効果	88, 175
出入力定式化	67	量子電磁力学	24
熱浴	47	量子マスター方程式	62
ハ			
裸状態	124	量子もつれ	162
波動関数の収縮	174	臨界結合	92
ハミルトニアン	1	零点振動	4
パラメトリック増幅	151	零点振動エネルギー	4

著者略歴

越野 和樹

こし の かず き

2000年 東京大学大学院理学系研究科修了、博士（理学）

2007年 東京医科歯科大学教養部准教授

専門・研究分野

量子光学、量子デバイスの理論研究

主要著書

「基礎物理学 力学」（共著、培風館、2016年）

SGCライブラリ-162

共振器量子電磁力学

量子コンピュータのハードウェア理論（電子版）

2024年3月10日 ©

初版発行

この電子書籍は2020年9月25日初版発行の
同タイトルを底本としています。

著者 越野 和樹

発行者 森 平 敏 孝

発行所 株式会社 サイエンス社

〒151-0051 東京都渋谷区千駄ヶ谷1丁目3番25号

営業 ☎ (03) 5474-8500（代） 振替 00170-7-2387

編集 ☎ (03) 5474-8600（代）

FAX ☎ (03) 5474-8900

組版 プレイン

《検印省略》

本書の内容を無断で複写複製することは、著作者および
出版者の権利を侵害することができますので、その場合
にはあらかじめ小社あて許諾をお求め下さい。

ISBN978-4-7819-9010-1

サイエンス社のホームページのご案内

<https://www.saiensu.co.jp>

ご意見・ご要望は

sk@saiensu.co.jp まで