13 июня 2022 г.

§1 КЛАССИФИКАЦИЯ УРАВНЕНИЙ 2-ГО ПОРЯДКА.

Знак подкоренного выражения определяет тип уравнения.

$$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + F = 0. \tag{1}$$

Это уравнение мы будем называть в точке М уравненем
гиперболического типа, если в точке М $a_12^2 - a_{11}a_{22} > 0$,
эллиптического типа, если в точке М $a_12^2 - a_{11}a_{22} < 0$,
параболического типа, если в точке М $a_12^2 - a_{11}a_{22} = 0$[1]),
Нетрудно убедиться в правильноти соотношения

$$a_12^2 - a_{11}a_{22} = (a_12^2 - a_{11}a_{22})D^2, D = \xi_x\eta_y - \eta_x\xi_y,$$

из которого следует инвариантность типа уравнения при преобразовании переменных, так как функциольнотный определитель (якобиан) D преобразования переиенных отличен от нуля. В различных точках области определения уравнение может принадлижать разлчины типам.

Рассмотрим область G, во всех точках которой уравнение имеет один и тот же тип. Через каждую точку области G про-ходят две характеристики, причем для уравнений гиперболического типа характеристики действительны и различны, дляуравнений эллиптического типа — комплексны и различны, а для уравнений параболического типа обе характеристики действительны и совпадают между собой.

Разберем каждый из этих случаев в отдельности.

1. Для уравнения гиперболического типа $a_12^2 - a_{11}a_{22} > 0$ и правые части уравнений (9) и (10) действительны и различны.

[1]Эта терминология заимствованая из теории кривых 2-го порядка.

Общие интегралы их $\phi(x,y) = C$ и $\psi(x,y) = C$ определяют действительные семейства характеристик. Полагая

$$\xi = \phi(x,y), \eta = \psi(x,y), \tag{11}$$

приводим уравнение (4) после деления на коэффициент при $\mu_{\xi\eta}$ к виду

$$\mu_{\xi\eta} = \Phi(\xi, \eta, \mu, \mu_\xi, \mu_\eta), \Phi = -\frac{\bar{F}}{\bar{a}_{12}}.$$

Это - так называемая каноническая форма уравнений гиперболического типа [2] . Часто пользуются второй канонической формой. Положим

т.е

$$\xi = a + b, \quad \eta = a - b,$$
$$a = \tfrac{\xi+\eta}{2}, \quad b = \tfrac{\xi-\eta}{2},$$

где a и b - новые переменные. Тогда

$$u_\xi = \tfrac{1}{2}(u_a + u_b), \quad u_\eta = \tfrac{1}{2}(u_a - u_b), \quad u_{\xi\eta} = \tfrac{1}{4}(u_{aa} + u_{bb})$$

В результате уравнений (4) применет вид

$$u_{aa} - u_{bb} = \Phi_1 \quad (\Phi_1 = 4\Phi)$$

2. Для уравнений параболического типа $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0$, уравнения (9) и (10) совпадают, и мы получаем один общий интеграл уравнения (6): $\phi(x,y) = \text{const}$. Положим в этом случает

$$\xi = \phi(x,y) \text{ и } \eta = \eta(x,y)$$

где $\eta(x,y)$ - любая функция, не зависимая от ϕ. При таком выборе переменных коэффициент

$$\bar{a_{11}} = a_{11}\xi_x^2 + 2a_{12}\xi_x\xi_y + a_{22}\xi_y^2 = (\sqrt{a_{11}}\xi_x + \sqrt{a_{22}}\xi_y)^2$$

[2]Для того чтобы было возможно введение новых переменных ξ и η через функции ϕ и ψ надо убедиться в независимости этих функций, достаточным условием чего является отличие от нуля соответствующего функционального определителя. Пусть функциональный определитель $\phi_x \psi_x$
$\phi_y \psi_y$ в некоторой точке M обращается в нуль. Тогда имеет место пропорциональность строк, т.е.

$$\frac{\phi_x}{\phi_y} = \frac{\psi_x}{\psi_y}$$

что, однако, невозможно, так как

$$\tfrac{\phi_x}{\phi_y} = -\tfrac{a_{12}+\sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{11}} \text{ и } \tfrac{\psi_x}{\psi_y} = -\tfrac{a_{12}+\sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{11}}$$
$$(a_{12}^2 - a_{11}a_{22} > 0)$$

(при этом мы считаем $a_{11} \neq 0$, что не является ограничением общности). Тем самым независимости функции ϕ и ψ установлена.

так как $a_{12} = \sqrt{a_{11}}\sqrt{a_{22}}$; отсюда следует, что

$$\bar{a_{12}} = a_{11}\xi_x\eta_x + a_{12}(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + a_{22}\xi_y\eta_y =$$
$$= (\sqrt{a_{11}}\xi_x + \sqrt{a_{22}}\xi_y)(\sqrt{a_{11}}\eta_x + \sqrt{a_{22}}\eta_y) = 0.$$

После деления уравнения (4) на коэффициент при $u_{\eta\eta}$ получим каноническую форму для уравнения параболического типа