K: Xor Array Pattern 解説

原案:SuginaMiku

Kyoto Univ

2017/10/01

問題概要

問題

- n,m,k が与えられる
- 長さ n で $0 \le s_i \le m$ $(1 \le i \le n)$ であり、かつ 0 xor s_1 xor s_2 $xor...s_n = k$ であるような数列 $\{s_i\}$ の数を $10^9 + 7$ で割った数を求める
- $0 < n, m, k < 10^{18}$

問題概要

```
例 (sample3)
```

(n,m,k)=(3,2,3) のとき、数列は

- 0, 1, 2
- 0, 2, 1
- 1, 0, 2
- 1, 2, 0
- 2, 0, 1
- 0 1 0
- **2**, 1, 0

の 6 通りである

考察

- m = 4 のときを考える
- 0 $xor s_1 xor s_2 xor...s_n$ は 0 ~ 7 までの値をとる
 - ▶ n = 0 のとき、k = 0 ~ 7 の数列の数はそれぞれ 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0
 - n = 1 のとき、 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0
 - n = 2 のとき、 5, 4, 4, 4, 2, 2, 2, 2
 - ▶ n = 3 のとき、 19, 19, 19, 19, 13, 12, 12, 12
 - n = 4 のとき、89,88,88,88,68,68,68,68

考察

- 同じような数があちらこちらにみえる
- n が偶数のときは後ろ半分が同じ数になりそう
- n が奇数のときは前半分が同じ数になりそう

次のような行列 A を考えてみる

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

 $A \ O \ i \ f \ j$ 列目が表しているのは、 $j \ xor \ p = i$ となる $p \ (0 \le p \le m)$ が存在するかどうか (xor の合計の j から i への遷移が存在するか) である

$$ullet$$
 $egin{aligned} ullet A^n igg(egin{aligned} 1 \ 0 \ dots \ 0 \end{aligned} \end{aligned} = y$ とすると、 y_k が答えになる

• これを愚直に計算しようとすると $O(nm^3)$ 、行列累乗をバイナリ法で高速化しても $O(m^3\log n)$

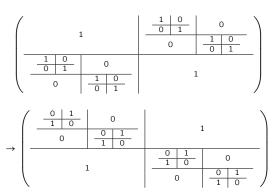
• もう少し行列を観察する

$$A^{1} = \begin{pmatrix} & & & & \frac{1 & 0}{0 & 1} & 0 \\ & 1 & & & 0 & \frac{1 & 0}{0 & 1} & 0 \\ \hline & \frac{1 & 0}{0 & 1} & 0 & & & & & \\ \hline & 0 & \frac{1 & 0}{0 & 1} & & & & & \\ \hline & 0 & \frac{1 & 0}{0 & 1} & & & & & \\ \hline & & & \frac{5 & 4}{4 & 5} & & & & \\ \hline & & 2 & & & \frac{5 & 4}{4 & 5} & 4 \\ \hline & & 2 & & & \frac{5 & 4}{4 & 5} & 4 \\ \hline & & & & & \frac{5 & 4}{4 & 5} & 4 \\ \hline \end{array}$$

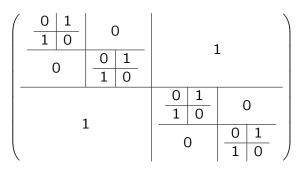
$A^3 =$	19		13 12 12 13 12	12 13 12 12 13	-
	13 12 12 13 12 -	12 13 12 12 13	19		
$A^4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	88 _	88 89 88 88 89	68		
	68		89 88 88 89	88 89 88 88 89	

- A を偶数乗したとき、奇数乗したときで行列は2種類の形状をとる
- いずれの場合も出てくる数字は高々 $floor(log_2 m) + 2$ 個
- 出てくる数字だけを上手いこと扱って計算する方法を考える

■ 累乗して偶奇で行列の形が変動すると扱いづらいので、偶数のときの 形に変形して統一する



● 変形した行列を、例えば次のように圧縮した行列 B を考える



$$\Rightarrow B = \left(\begin{array}{cccc} 0 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{array} \right)$$

$$B^{1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \times 2^{0} & 0 \times 2^{1} & 1 \times 2^{2} \\ 1 & 0 & 0 \times 2^{1} & 1 \times 2^{2} \\ 0 & 0 \times 2^{0} & 0 + 1 & 1 \times 2^{2} \\ 1 & 1 \times 2^{0} & 1 \times 2^{1} & 0 + 1 + 0 \end{pmatrix}$$

$$B^{2} = \begin{pmatrix} 5 & 4 \times 2^{0} & 4 \times 2^{1} & 2 \times 2^{2} \\ 4 & 5 & 4 \times 2^{1} & 2 \times 2^{2} \\ 4 & 4 \times 2^{0} & 5 + 4 \times 2^{0} & 2 \times 2^{2} \\ 2 & 2 \times 2^{0} & 2 \times 2^{1} & 5 + 4 \times 2^{0} + 4 \times 2^{1} \end{pmatrix}$$

$$B^{3} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \times 2^{0} & 2 \times 2^{1} & 5 + 4 \times 2^{0} + 4 \times 2^{1} \\ 13 & 12 \times 2^{0} & 12 \times 2^{1} & 19 \times 2^{2} \\ 12 & 13 & 12 \times 2^{1} & 19 \times 2^{2} \\ 12 & 12 \times 2^{0} & 13 + 12 \times 2^{0} & 19 \times 2^{2} \\ 19 & 19 \times 2^{0} & 19 \times 2^{1} & 13 + 12 \times 2^{0} + 12 \times 2^{1} \end{pmatrix}$$

$$B^{2} = \begin{pmatrix} 5 & 4 \times 2^{0} & 4 \times 2^{1} & 2 \times 2^{2} \\ 4 & 5 & 4 \times 2^{1} & 2 \times 2^{2} \\ 4 \times 2^{0} & 5 + 4 \times 2^{0} & 2 \times 2^{2} \\ 2 \times 2^{0} & 2 \times 2^{1} & 5 + 4 \times 2^{0} + 4 \times 2^{1} \end{pmatrix}$$

$$B^{2} = \begin{pmatrix} 5 & 4 \times 2^{0} \\ 4 & 5 \\ 4 & 4 \times 2^{0} \\ 2 & 2 \times 2^{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \times 2^{1} & 2 \times 2^{2} \\ 4 \times 2^{1} & 2 \times 2^{2} \\ 5 + 4 \times 2^{0} & 2 \times 2^{2} \\ 2 \times 2^{1} & 5 + 4 \times 2^{0} + 4 \times 2^{1} \end{pmatrix}$$

$$B^{2} = \begin{pmatrix} 5 & 4 \times 2^{0} & 4 \times 2^{1} & 2 \times 2^{2} \\ 4 & 5 & 4 \times 2^{1} & 2 \times 2^{2} \\ 4 & 4 \times 2^{0} & 5 + 4 \times 2^{0} & 2 \times 2^{2} \\ 2 & 2 \times 2^{0} & 2 \times 2^{1} & 5 + 4 \times 2^{0} + 4 \times 2^{1} \end{pmatrix}$$

$$B^{2} = \begin{pmatrix} 5 & 4 \times 2^{0} & 4 \times 2^{1} & 2 \times 2^{2} \\ 4 & 5 & 4 \times 2^{1} & 2 \times 2^{2} \\ 4 & 4 \times 2^{0} & 5 + 4 \times 2^{0} & 2 \times 2^{2} \\ 2 & 2 \times 2^{0} & 2 \times 2^{1} & 5 + 4 \times 2^{0} + 4 \times 2^{1} \end{pmatrix}$$

- ullet B^n を求め、k に対応する要素を取り出せば答え
 - ▶ 偶奇で場合分けして頑張る
- B は $(floor(\log m) + 2)^2$ の行列なので、 $O(\log n \times (\log m)^3)$
- これで AC 可能

- B の 0 列目を計算するのに B 全体を持っておく必要はなく、B 全体 も B の 0 列目から算出可能
- 長さ $(floor(\log m) + 2)^2$ の数列同士の掛け算になり、 $O(\log n \times (\log m)^2)$ に計算量が落とせる
- さらに累積和で $O(\log n \times \log m)$ にできる