Inside Story of Median Query

writter: moririn2528

October 9, 2020

概略

質問が来るたびに、最後に答える順列を少しずつ確定させていきます。ただしこのとき、1 から順に確定させていくようにします。そうすることで、質問 1 だと多くても 2 つの数字、質問 2, 3 だと 1 つの数字さえ割り振れば答えることができます。なぜなら、1 から数字を割り振るため、後の質問で割り振られることになる数は今割り振った数字より大きく、今の質問の答えに影響しないからです。

ここで、質問が来たとき、いくつかの場合において、すぐに数字を確定させてしまうのではなく、「どれかにこの数字が入っているよ」、という情報を持たせることにします。この情報は 2 つのパターンがあって、a_i, a_j, a_k のどれかに p と q が割り振られているよという情報 (以下サイズ 3 の揺らぎと呼ぶ)、a_i, a_j のいずれかに p が割り振られているよという情報 (以下サイズ 2 の揺らぎと呼ぶ) があります。質問が来たときに、揺らぎが被らないようにサイズを減らしたり、揺らぎを消したり、新たに揺らぎを作ります。

サイズ 3 の揺らぎのポテンシャルを 2、サイズ 2 の揺らぎのポテンシャルを 1 とし、順列のポテンシャルを数字が固定されていない要素の数の 2 倍とすると、質問 1,2 ではコスト (ポテンシャル減少量) 2、質問 3 ではコスト 1 となります。このポテンシャルは、配列の自由度のようなものです。これは、Bob の残りスタミナ値 S 以上となるので、条件を満たす順列を作ることが可能となります。順列 $b_1, b_2, \ldots, b_n$ の作り方は、揺らぎ内の数字をシフトして、揺らぎで指定されていた数字以外すべてをシフトすることで作ることができます。

解説

質問が来たときに、1 から順に数字を確定させていくようにします。さらに、数字を確定させてしまうのではなく、「どれかにこの数字が入っているよ」、という情報を持たせることにします。

ここで以降の解説の簡略化のため、様々な定義をします。

サイズ 3 の揺らぎ a_i, a_j, a_k どれかに p と q が割り振られているという情報、「$(\{i, j, k\}, (p, q))$」$(p < q)$ とも表す。

サイズ 2 の揺らぎ a_i, a_j いずれかに p が割り振られているという情報、「$(\{i, j\}, (p))$」とも表す。

揺らぎ サイズ 3 の揺らぎ、サイズ 2 の揺らぎの総称。

揺らぎがかぶる サイズ 3 の揺らぎ同士がかぶる、とは、$(\{i,*,*\},(*,*))$ と $(\{i,*,*\},(*,*))$ がともに存在することを指す。$*$ はそれぞれ任意の数字を表す。サイズ 2,3 の揺らぎがかぶる、サイズ 2 の揺らぎ同士がかぶる、も同様に定義され、それらの総称を指す。

i が揺らぎに含まれる $(\{i,*,*\},(*,*))$ か $(\{i,*\},(*))$ が存在すること。

i を含む揺らぎ i が揺らぎに含まれないときは存在しない。i が揺らぎに含まれるとき、$(\{i,*,*\},(*,*))$ か $(\{i,*\},(*))$ で存在している揺らぎを指す。揺らぎがかぶらなければ、存在しても 1 つしかない。

$(\{i,j,k\},(p,q))$ から (i,p) を削除 このサイズ 3 の揺らぎをサイズ 2 の揺らぎ $((\{j,k\},(q))$ にし、$a_i = p$ とすることを表す。

$(\{i,j\},(p))$ から (i,p) を削除 このサイズ 2 の揺らぎを削除し、$a_i = p$ とすることを表す。

揺らぎから (i,p) を削除 i が含まれる揺らぎから (i,p) を削除することを表す。このコストは 1 となる。

揺らぎの最小値 揺らぎが $(\{i,j,k\},(p,q))$ のとき $\min(p,q)$、$(\{i,j\},(p))$ のとき p とする。

質問が来たときに、揺らぎが被らないようにサイズを減らしたり、揺らぎを消したり、新たに揺らぎを作ります。具体的には以下のようにします。さらに、サイズ 3 の揺らぎのポテンシャルを 2、サイズ 2 の揺らぎのポテンシャルを 1 とし、順列のポテンシャルを数字が固定されていない要素の数の 2 倍として、操作のコストも考えます。

順列は最初 INF で初期化されているとします。

質問 1 が (i,j,k) で来たとき

- $(\{i,j,k\},(p,q))$ が存在すれば、q を出力。コスト 0
- $(\{i,j\},(p))$ が存在するとき
  - k が揺らぎに含まれないとき
    まず、a_k に数字が割り振られていなければ割り振る。そのあと $\max(a_k,p)$ を出力。コスト 2
  - k が揺らぎに含まれるとき
    k が含まれる揺らぎの最小値を q とする。その揺らぎから (k,q) を削除。$\max(p,q)$ を出力。コスト 1

  $(\{j,k\},(p))$, $(\{k,i\},(p))$ の時も同様にする。
- $(\{i,j,x\},(p,q))$ が存在するとき
  - k が揺らぎに含まれるとき、r を k が含まれる揺らぎの最小値とする。
  - k が揺らぎに含まれないとき、$r = a_k$ とする。

3 つのペア $(p, i), (q, j), (r, k)$ を作り、これを昇順ソートした 3 つのペアを $(P, I), (Q, J), (R, K)$ とする。I を含む揺らぎから (I, P) を削除、J を含む揺らぎから (J, Q) を削除。Q を出力する。

揺らぎから削除を 2 回しているので、コストは 2。

$(\{j, k, x\}, (p, q))$, $(\{k, i, x\}, (p, q))$ の時も同様にする。

- それ以外のとき、i, j, k のうち 2 つ以上含む揺らぎは存在しない。

  i が含まれる揺らぎがあればその最小値を p, なければ $p = a_i$ とし、j, k も同様、q, r を作成。

  3 つのペア $(p, i), (q, j), (r, k)$ を作り、これを昇順ソートした 3 つのペアを $(P, I), (Q, J), (R, K)$ とする。

  - $I = \mathrm{INF}$ のとき、i, j, k いずれかを含む揺らぎが存在しない上、a_i, a_j, a_k に数字が割り振られていない。この時は数字 $x, x+1$ を割り振って、新たにサイズ 3 の揺らぎ $(\{i, j, k\}, (x, x+1))$ を作成。$x+1$ を出力。コスト 2
  - $J = \mathrm{INF}$ のとき、J, K いずれかを含む揺らぎが存在しない上、a_J, a_K に数字が割り振られていない。この時は数字 x を割り振って、新たにサイズ 2 の揺らぎ $(\{J, K\}, (x))$ を作成。さらに、I が含まれる揺らぎがあれば、それから (I, P) を削除。1 から順に数字を割り振っているので $P < x$ であることから、x を出力。コスト最大 2
  - それ以外のとき I が含まれる揺らぎがあれば、それから (I, P) を削除し、同様に J が含まれる揺らぎがあれば、それから (J, Q) を削除して、Q を出力。コスト最大 2

同様に質問 2,3 も場合分けしていきます。質問 2,3 は質問 1 の場合分けを一部削除して少し改良するだけでできるので、詳しくは書きません。自分で頑張ってください (書くのが大変になりました)。

質問 2 (i, j) について、質問 1 では 2 つのペアを揺らぎから削除をして固定していたところを 1 つのみでよく、i を含む揺らぎ、j を含む揺らぎともにない場合は a_i か a_j に数字を割り振れば答えることができます。

質問 3 (i, j) について、質問 2 同様 1 つのペアを揺らぎから削除をして固定すればよく、i を含む揺らぎ、j を含む揺らぎともにない場合は新しい数字 x を割り振ってサイズ 2 の揺らぎ $(\{i, j\}, (x))$ を作成します。

順列 $b_1, b_2, \ldots, b_n$ の作り方について、揺らぎ内の数字をシフトして、揺らぎで指定されていた数字以外すべてをシフトすることで作ることができます。

つまり、以下の操作をします。

1. まだ割り振っていない数字の集合を $C = \{c_i\}_{i=1,2,\ldots,m}$ とし、$c_{m+1} = c_1$ とする。
2. 以下の操作ができなくなるまでする。

   t 回目の操作とする。

- 処理していない揺らぎがあるとき

  $(\{i,j,k\},(p,q))$ の時は $a_i=p$, $a_j=q$, $\boldsymbol{a_k=c_t}$, $\boldsymbol{b_i=c_{t+1}}$, $b_j=p$, $b_k=q$ とする。

  $(\{i,j\},(p))$ の時は $a_i=p$, $a_j=c_t$, $b_i=c_{t+1}$, $b_j=p$ とします。

- 処理していない揺らぎが存在せず、$a_i=\mathrm{INF}$ である i があるとき

  $a_i=c_t$, $b_i=c_{t+1}$ とする

注意: i が揺らぎに含まれず、かつ、$a_i=\mathrm{INF}$ となる i が一つしかないことがあります。i が揺らぎに含まれ、 $a_i=\mathrm{INF}$ となる i も含めてシフトの処理をしないといけません。(太文字の部分の処理)

これによって作られた 2 つの順列は、揺らぎの部分を含めた、数字を固定していない部分に関して要素が異なります。つまり、揺らぎの部分を含めた、数字を固定していない部分の添え字集合を S_I とすると、$\forall i\in S_i$, $a_i\neq b_i$ となります。この操作によって条件を満たした数列を作れているのかどうか確かめます。

まず、質問による Bob のスタミナ減少量はコスト以上なので、Bob のスタミナ減少量の合計は順列と揺らぎのポテンシャルの減少量以上になります。最初の Bob のスタミナと最初の順列と揺らぎのポテンシャルは同じであるので、質問が終わったときの順列と揺らぎのポテンシャル合計 Φ は S 以上になります。

揺らぎの部分を含めた、数字を固定していない部分の要素数を z、サイズ 3 の揺らぎの個数を x、サイズ 2 の揺らぎの個数を y とすると、

$$z=3x+2y+(m-x-y)=m+2x+y$$

$m+2x+y$ は整数であるので、

$$m+2x+y\geq\left\lceil\frac{1}{2}(2m+2x+y)\right\rceil=\left\lceil\frac{\Phi}{2}\right\rceil\geq\left\lceil\frac{S}{2}\right\rceil$$

となり、以上の操作によって作られた 2 つの順列は条件を満たします。