色塗り (coloring)

- **問題**: joisino
- **解答**: asi1024, drafear, joisino
- **解説**: joisino

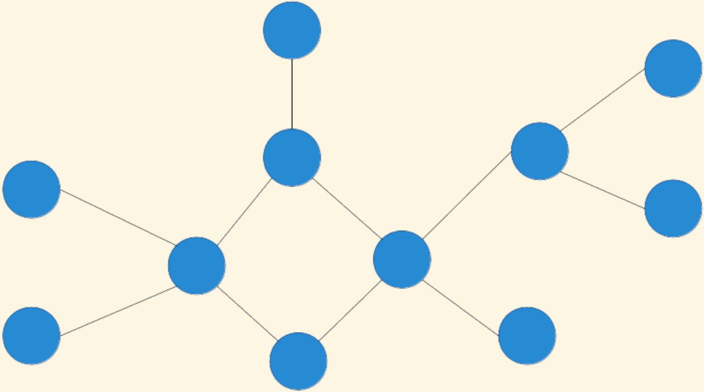
問題概要

- n 頂点 n 辺からなる連結な無向グラフが与えられる
- k 色で塗る方法を数え上げよ
- ただし頂点番号を入れ替えて同じになる塗り方は 1 通りと数えるものとする

考察

- グラフがどんな形になるか描いてみる

考察



- サイクルがちょうど 1 つあって、根付き木がまわりに付いている
- クトゥルフとかなもりとか言われている種類のグラフ

考察

- まずは根付き木を k 色で塗る方法を数え上げる
- これは簡単な木 DP と数え上げ
- 同型な部分木については同じように塗ると区別がつかなくなるので部分木のハッシュ値を計算して同型判定ができるようにしておく
- 同型な部分木をまとめたものの色の塗り方の数を計算しそれらと根の塗り方と通り数を全て掛けあわせれば OK
- コンビネーションの計算は毎回計算しても全体で $O(n \log n)$

考察

- 次にサイクルの部分を中心に考えて全体の場合の数を計算する
- サイクルの根付き木の周期を p, サイクルの大きさを s とする
- 区別できなくなるような塗り方の重複を除去したい
- 区別できなくなるのは、反転 (折り返) して一致する場合と p の倍数の頂点分回転して一致する場合
- このような操作に対して重複なく数えあげるには、コーシーフロベニウスの補題 (バーンサイドの補題) が使える

考察

- コーシーフロベニウスの補題
- 群 G が集合 S に作用するとする
- 軌道の数は G の元によって不変な S の元の数の平均で求まる

よくある質問

- Q: なに言ってんだこいつ
- A1: もう少し丁寧に言うと、群になっている操作の集合 (何もしない操作が含まれいて、操作に対して元に戻す操作が含まれて、結合法則が成り立つような操作の集まり) に対して、区別できるようなものの数は、それぞれの操作で変化しないものの数の平均 (総数を操作の数で割ったもの) と等しい
- A2: ポリアの定理の特殊な場合といったら分かる人も多そう (ポリアの定理という名前でこの命題を指すこともある)

証明

- 今考えている操作 G (反転と p の倍数回転の操作) が群であることについて
- なにもしない操作はもちろんある
- 回転しても、逆回転できて、反転してももう一度反転すれば元にもどる
- 結合法則も成り立つ
- よって群
- 実際、二面体群という群

考察

- まずはサイクルの周期 p と、グラフを折り返せるかを調べる

考察

- サイクルの周期 p について
- p の候補はサイクルの大きさの約数で、 $O(\sqrt{n})$ 通り
- 木 DP パートで計算したハッシュ値を使い、毎回 $O(n)$ かけて p だけ回転してもグラフの形が変わらないか調べればよい
- $O(n\sqrt{n})$ でサイクルの周期が求まった

考察

- 折り返せるかについて
- 対称軸のうち一つを求める
- 対称軸は、その場所からどちら向きに読んでも同じになるような場所
- 木 DP パートで計算したハッシュ値を使って、サイクルの文字列と、それを反転させて繰り返したものに対して KMP 法やローリングハッシュなどで一致する場所を探す
- $O(n)$ で対称軸の存在と場所が求まった

考察

- 回転で変化しない塗り方の個数を数える
- x を周期 p の倍数でサイクルの大きさ s の約数とする
- x 頂点分回転することになる G の元は $\varphi(s/x)$ 個 (φ はオイラーのトーシェント関数)
- そのような元について、変化しないような塗り方はサイクルの最初の x 頂点の木の塗り方の数の積
- x は s の約数でなければならないので、 $O(\sqrt{n})$ 個
- よって全ての x ついて毎回塗り方を求めても $O(n\sqrt{n})$

考察

- 反転できない場合はここで終了
- G の元の個数は s/p なので、求めた塗り方の総数を s/p で割れば答えになる

考察

- 反転ができる場合
- x を周期 p の倍数でサイクルの大きさ s の約数とする
- 反転は対象軸で反転させてから x 回転させることと同じ
- 回転の場合と同様にして、変化しないような塗り方を求める
- x 回転させる元は $\varphi(s/x)$ 個で、それぞれについて塗り方は反転で重なるのを除いた木の塗り方の数の積 (全てのサイクルの頂点を調べて、折り返した先よりインデックスが大きく無ければ掛け合わせることを繰り返せばよい)
- よって全ての x ついて毎回塗り方を求めても $O(n\sqrt{n})$
- 反転ありの場合は $|G| = 2s/p$ なので総数を $2s/p$ で割れば答えになる

統計

- First Accepted uwi(201:09)
- Accepted 1
- Trying 2
- Total Submission 2

ご清聴ありがとうございました

- ご清聴ありがとうございました