ニム？

KUPC 2018 - J

担当: gazelle

問題概要

- コインの山が N 個ある
- 二人のプレイヤーが交互に山からコインを取っていく
- 山からとるコインの枚数は広義単調増加でなくてはならない
- 相手がうまく取れなくなったら勝ち
- 先手と後手どちらが必勝か

考察

まず山が 1 つしかない場合を考えてみる。もし山にあるコインの数（a とする）が、一度に取れるコインの枚数 K 以下ならば、明らかに先手必勝である。それ以外の場合、a - K が偶数ならば先手必勝、奇数ならば後手必勝となる。
a - K が奇数のときを考える。このとき後手は、

・山のコインが K + 2 枚以上のときは 1 枚だけ取る
・山のコインが K + 1 枚以上のときは K 枚取る
・山のコインが K 枚以下のときは コインを全て取る

ことで勝利できる。1 つ目の状況では、相手にコインの枚数 K + 1 以上で渡るため、次のターンで負けることはない。山のコインは減っていき、いずれ 2 つ目か 3 つ目の状況になる。

考察

3 つ目の状況では明らかに勝つことができる。2 つ目の状況では山の残りコインは 1 枚になるが、仮定を考えると相手はすでに 2 以上の数を宣言しているため、うまくコインを取ることができない。よってこの場合も後手は勝つことができる。
a - K が偶数の場合は、先手が最初にコインを 1 枚取ることで先手を奇数の場合の後手に同一視できるため、先手必勝になる。

考察

次に山が複数の場合を考えてみる。この場合、

・コインの枚数が K + 1 枚以上のときに、コインが 1 枚以上ある山が 1 つになる
・コインが 1 枚以上ある山が複数あるときに、全ての山のコインの枚数が K 以下になる

の 2 つの状況が考えられる。
まずどちらの状況でも、最後の手番以外で 2 以上の数を宣言した人は負けることを示す。1 つ目の状況では、もう片方のプレイヤーが山が 1 つの場合の戦略をとることで勝利できる。2 つ目の状況では、もう片方のプレイヤーが残りコインが最大の山からコインを 1 枚取ることを続ければよい。

考察

全ての山のコインが 1 枚でない限り（この場合は明らかにもう片方のプレイヤーの勝ちである）、この操作でコインが 1 枚以上ある山の数は変わらないから、そのような山の数が減るのは相手のターンに限る。よっていずれ山が 1 つの状態で自分に手番が回ってき、その山のコインを全て取ることで勝利できる。
本題に戻る。1 つ目の状況では、山が 1 つの場合と同じになり、 a - K の偶奇で勝ち負けが決まる（上の事実から、この偶奇は Σa_i - K の偶奇に一致する）。2 つ目の状況では、山を 1 つにした場合負けることから、2 枚以上コインのある山がある場合はそこからコインを取るのがよく、コインの総数は 1 枚ずつ減少する。つまり Σa_i の偶奇で勝ち負けが決まる。
この 2 つの条件がどちらも先手有利ならば先手必勝であり、後手有利なら後手必勝である。

考察

1 つ目の条件が後手有利だが、2 つ目の条件が先手有利の場合、先手は山が 1 つになる前に全ての山のコインを K 枚以下にしたい。もしコインの枚数が最大の山が複数あれば、その状態を維持できるため 1 つ目の状況にはならない。そうでない場合、山の最大のコインの枚数を amax、それ以外の山のコインの枚数の和を etc としたとき、amax - K ≦ etc ならば明らかに 2 つ目の状況にならない。逆にそうでないときは、この条件が維持されるようにコインを取り続けることができ、2 つ目の状況にすることができる。
これと反対（1 つ目の条件が先手有利だが、2 つ目の条件が後手有利）の場合もほぼ同様である。