# KUPC2018 – H
# カラフル数列
解説

suibaka

# 問題概要

以下の条件をすべて満たすような $N$ 個の整数からなる数列として考えられるものは何通りあるか？

- 条件 $i$ : $a_{l_i}, a_{l_i+1}, \ldots, a_{r_i}$ の中に $b_i$ と異なるものが少なくとも 1 つ存在する（$1 \leq i \leq M$）
- すべての要素の値は 1 以上 $S$ 以下

・制約

- $1 \leq N, M \leq 2 \times 10^5$
- $1 \leq S \leq 10^5$

## 入力例 1

```
3 2 2
1 2 1
2 3 2
```

- すべての値が $1$ 以上 $2$ 以下である長さ $3$ の数列
- $a_1, a_2$ の中に $1$ と異なるものが少なくとも 1 つ存在
- $a_2, a_3$ の中に $2$ と異なるものが少なくとも 1 つ存在

- $(1,2,1),(2,1,1),(2,1,2),(2,2,1)$ の 4 つが答え

# 考察 1 – 余事象を考える

以下の $M$ 個の条件をすべて満たすような $N$ 個の整数からなる数列として考えられるものは何通りあるか？

- $a_{l_i}, a_{l_i+1}, \ldots, a_{r_i}$ の中に $b_i$ と異なるものが少なくとも 1 つ存在する

- 条件が複雑で直接数えるのは大変
  $\Rightarrow$ 余事象を考えてみるのは鉄則

以下の $M$ 個の条件のうち、条件を満たすものが少なくとも 1 つ存在するような数列は何通りあるか？

- $a_{l_i}, a_{l_i+1}, \ldots, a_{r_i}$ はすべて $b_i$ に等しい

# 考察 2 – 重複の除去について

- 1 つの条件 $i$ について注目すれば、その条件を満たすような数列の個数は簡単に求まる
  - $[l_i..r_i]$ を $b_i$ で塗りつぶしてほかを適当に塗る
- こうして数えた中には他の条件をも満たす数列が含まれるため、独立に足し合わせることはできない
- 重複して数えている数列を取り除くにはどうすればよいか？

$\Rightarrow$ 包除 DP

# 考察 2 – 包除 DP

- ひとまず簡単のため、すべての $b_i$ は異なる値を取ると仮定
- $dp1[i] := a_1, \ldots, a_i$ だけを考えたときに、余事象を取る前の条件がまだ崩れていないような長さ $i$ の数列の個数
- $dp2[i] := a_1, \ldots, a_i$ だけを考えたときに、はじめてそこで（余事象版の）ある条件を満たすような長さ $i$ の数列の個数
- 真に求めたい値の DP テーブルと余事象版の DP テーブルを同時に求めていく

# 考察 2 – DP 遷移（$b_i$ がすべて異なる時）

- 遷移 1
  $i = l_k - 1$ を満たすすべての条件 $k$ について

$$dp2[r_k] = dp2[r_k] + dp1[i]$$

  - $dp1[i]$ 通りの数列について、$[l_k..r_k]$ を $b_k$ で一色に塗る
  - $b_i$ が全て異なるので、このとき $r_k$ で初めて条件が満たされる

- 遷移 2

$$dp1[i+1] = dp1[i] \times S - dp2[i+1]$$

  - $dp1, dp2$ の定義から明らか

## 入力例 1

3 2 2
1 2 1
2 3 2

| $i$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $dp1$ | 1 | | | |
| $dp2$ | 0 | 0 | 0 | 0 |

## 入力例 1

3 2 2
1 2 1
2 3 2

| $i$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $dp1$ | 1 | 2 | | |
| $dp2$ | 0 | 0 | 1 | 0 |

- $dp2[2] = dp2[2] + dp1[0] = 1$
- $dp1[1] = dp1[0] \times 2 - dp2[1] = 2$

## 入力例 1

3 2 2
1 2 1
2 3 2

| $i$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $dp1$ | 1 | 2 | 3 | |
| $dp2$ | 0 | 0 | 1 | 2 |

- $dp2[3] = dp2[3] + dp1[1] = 2$
- $dp1[2] = dp1[1] \times 2 - dp2[2] = 3$

## 入力例 1

3 2 2
1 2 1
2 3 2

| $i$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $dp1$ | 1 | 2 | 3 → | 4 |
| $dp2$ | 0 | 0 | 1 | 2 ↑ |

- $dp1[3] = dp1[2] \times 2 - dp2[3] = 4$
- よって $dp1[3] = 4$ 通り

# 考察 3 – $b_i$ が等しい条件間の処理

- ある条件 $i$, $j$ について $b_i = b_j$ となる場合、これだけでは不十分（入力例 $2$）
- 以下の 2 つの場合についてそれぞれ考えていく
  - 場合 1：一方の区間がもう一方の区間を完全に含む場合
  - 場合 2：場合 1 ではないが、区間同士が交差するような場合
- 互いに交わらない区間同士はそもそも問題になっていないので気にしなくて良い

# 考察 3 – 場合 1

- 一方の区間がもう一方の区間を完全に含む場合、大きい方の区間の条件は無視しなければならない
- なぜなら、大きいほうの区間が条件を満たすとき、小さい方の区間は当然条件を満たすため
- 無視しないと、包除 DP における「はじめてその位置で条件を満たす～」の部分に反する

# 考察 3 – 場合 2

- $l_i < l_j, r_i < r_j$ とする
- $b_i = b_j$ のとき、$a_{l_j}, \ldots, a_{r_j}$ を $b_j$ で塗りつぶすと先に 条件 $i$ が満たされてしまう

- 例：$(l_1, r_1, b_1) = (1, 3, 1), \quad (l_2, r_2, b_2) = (2, 4, 1)$
  - $a_1$ まで考えているとき、$a_1 = 1$ となる数列に対して $a_2 = a_3 = a_4 = 1$ とすると 1 つ目の条件が満たされてしまう
  - $dp2$ の条件に反する

# 考察 3 – 場合 2

- $dp2$ の計算のときに、$b_j$ で塗りつぶすと先に条件 $i$ が満たされてしまう場合の数を引いてしまえばよい
- 引くべき値は、$b_j$ と等しい値を持つ条件が $dp2[l_j],\ dp2[l_j+1],\ \ldots,\ dp2[r_j]$ に寄与している値の総和
- $b_i$ の値ごとにセグメントツリーや deque で管理すればよい

# 解法 – DP 遷移

- $dp2$ に対する $b_i = x$ の寄与を $dp2_x$ とする
- 遷移 1
  $i = l_k - 1$ を満たすすべての条件 $k$ について
  $$dp2[r_k] = dp2[r_k] + dp1[i] - \sum_{j=l_k}^{r_k} dp2_{b_k}[j]$$
- 遷移 2
  $$dp1[i+1] = dp1[i] \times S - dp2[i+1]$$

# まとめ

- 余事象で考える。
- 区間をソートしておく。$O(M \log M)$
- 同じ $b_i$ の値をもつ条件間で、一方の区間がもう一方に完全に含まれるようなら、大きい方を除去する。$O(M)$
- 包除 DP により先頭の要素から数え上げ。 $O(N)$（座圧すれば $O(M \log N)$ だが本質ではない）
- 同じ $b_i$ を持つ区間は、セグメントツリーや deque で $dp2$ に対する寄与を管理し、重複がないようにカウント。$O(M \log M)$ または $O(M)$
- 結局 $O(M \log M + N)$ でとけた。

# おまけ – 入力例 5 の DP テーブルの様子

| $i$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $dp1$ | 1 | | | | | | | | |
| $dp2$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $dp2_1$ | | | | | | | | | |
| $dp2_2$ | | | | | | | | | |
| $dp2_3$ | | | | | | | | | |

| $i$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $dp1$ | 1 | 3 | | | | | | | |
| $dp2$ | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| $dp2_1$ | | | | | | 1 | | | |
| $dp2_2$ | | | | | | | | | |
| $dp2_3$ | | | | 1 | | | | | |

- $dp2_1[5] = dp2_1[5] + dp1[0] - \sum_{i=1}^{5} dp2_1[i] = 1$
- $dp2_3[3] = dp2_3[3] + dp1[0] - \sum_{i=1}^{3} dp2_3[i] = 1$
- $dp1[1] = dp1[0] \times 3 - dp2[1] = 3$

| $i$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $dp1$ | 1 | 3 | 9 | | | | | | |
| $dp2$ | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 3 | 0 | 0 |
| $dp2_1$ | | | | | | 1 | | | |
| $dp2_2$ | | | | | | | 3 | | |
| $dp2_3$ | | | | 1 | | | | | |

- $dp2_2[6] = dp2_2[6] + dp[1] - \sum_{i=2}^{6} dp2_2[i] = 3$
- $dp1[2] = dp1[1] \times 3 - dp2[2] = 9$

| $i$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $dp1$ | 1 | 3 | 9 | 26 | | | | | |
| $dp2$ | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 3 | 14 | 0 |
| $dp2_1$ | | | | | | 1 | | 8 | |
| $dp2_2$ | | | | | | | 3 | 6 | |
| $dp2_3$ | | | | 1 | | | | | |

- $dp2_1[7] = dp2_1[7] + dp1[2] - \sum_{i=3}^{7} dp2_1[i] = 8$
- $dp2_2[7] = dp2_2[7] + dp1[2] - \sum_{i=3}^{7} dp2_2[i] = 6$
- $dp1[3] = dp1[2] \times 3 - dp2[3] = 26$

| $i$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $dp1$ | 1 | 3 | 9 | 26 | 78 | | | | |
| $dp2$ | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 3 | 14 | 17 |
| $dp2_1$ | | | | | | 1 | | 8 | 17 |
| $dp2_2$ | | | | | | | 3 | 6 | |
| $dp2_3$ | | | | 1 | | | | | |

- $dp2_1[8] = dp2_1[8] + dp1[3] - \sum_{i=4}^{8} dp2_1[i] = 17$
- $dp1[4] = dp1[3] \times 3 - dp2[4] = 78$

| $i$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $dp1$ | 1 | 3 | 9 | 26 | 78 | 233 | | | |
| $dp2$ | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 81 | 14 | 17 |
| $dp2_1$ | | | | | | 1 | | 8 | 17 |
| $dp2_2$ | | | | | | | 3 | 6 | |
| $dp2_3$ | | | | 1 | | | 78 | | |

- $dp2_3[6] = dp2_3[6] + dp1[4] - \sum_{i=5}^{6} dp2_3[i] = 78$
- $dp1[5] = dp1[4] \times 3 - dp2[5] = 233$

| $i$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $dp1$ | 1 | 3 | 9 | 26 | 78 | 233 | 618 | | |
| $dp2$ | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 81 | 14 | 241 |
| $dp2_1$ | | | | | | 1 | | 8 | 17 |
| $dp2_2$ | | | | | | | 3 | 6 | 224 |
| $dp2_3$ | | | | 1 | | | 78 | | |

- $dp2_2[8] = dp2_2[8] + dp1[5] - \sum_{i=6}^{8} dp2_2[i] = 224$
- $dp1[6] = dp1[5] \times 3 - dp2[6] = 618$

| $i$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $dp1$ | 1 | 3 | 9 | 26 | 78 | 233 | 618 | 1840 | |
| $dp2$ | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 81 | 14 | 241 |
| $dp2_1$ | | | | | | 1 | | 8 | 17 |
| $dp2_2$ | | | | | | | 3 | 6 | 224 |
| $dp2_3$ | | | | 1 | | | 78 | | |

- $dp1[7] = dp1[6] \times 3 - dp2[7] = 1840$

| $i$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $dp1$ | 1 | 3 | 9 | 26 | 78 | 233 | 618 | 1840 | 3439 |
| $dp2$ | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 81 | 14 | 2081 |
| $dp2_1$ | | | | | | 1 | | 8 | 17 |
| $dp2_2$ | | | | | | | 3 | 6 | 224 |
| $dp2_3$ | | | | 1 | | | 78 | | 1840 |

- $dp2_3[8] = dp2_3[8] + dp3[7] - \sum_{i=8}^{8} dp2_3[i] = 1840$
- $dp1[8] = dp1[7] \times 3 - dp2[8] = 3439$

- よって答えは $dp1[8] = 3439$ 通り