Median Query

writter: moririn2528

October 10, 2020

概略

まず、最初の 4 つ a_0, a_1, a_2, a_3 に対して、タイプ 1 の質問を 4 回使います (3 回でも可能ですが、4 回で説明します)。質問の答えより、上位を値が大きい方から 2 つ、下位を値が小さい方から 2 つとすると、上位の添え字集合、上位の min、下位の添え字集合、下位の max が得られます。この 4 つの情報を基本情報と呼ぶことにします。

この情報とタイプ 1 の質問を 2 回使って元の 4 つと新たな a_i のうち、一つの添え字と値のペア、そしてその他 4 つに対する基本情報を得ることができます。これが場合分けによってできます。

また、基本情報と値集合がわかれば、上位 2 つ、下位 2 つにタイプ 2 の質問をそれぞれすることで添え字と値のペアがわかります。これによって隠された順列を判定することができます。

解説

$a_i, a_j, a_k, a_l (a_i < a_j < a_k < a_l)$ に対して, 下位の添え字集合を $\{i, j\}$、下位の max を a_j、上位の添え字集合を $\{k, l\}$、上位の min を a_k とします。そして、この 4 つの情報をまとめて (i, j, k, l) の基本情報と呼ぶことにします。

また、タイプ 1 (i, j, k) で質問し、Alice が答えた数値を $f(i, j, k)$ とします。

(i, j, k, l) の基本情報は a_i, a_j, a_k, a_l に対して質問 1 を 4 回することで得られます。具体的には、$a_i < a_j < a_k < a_l$ のとき、$f(i, j, k) = f(i, j, l) = a_j, f(j, k, l) = f(i, k, l) = a_k$ より、同じ答えが返ってくる添え字集合の共通部分を取ることで、上位、下位の添え字集合がわかります。

次に、(i, j, k, l) の基本情報はわかっているときに、a_x が未知である x を取ってきて、i, j, k, l, x のうち 1 つの添え字に対応する値と、それ以外 4 つに対する基本情報をタイプ 1 の質問 2 回で得ます。

(i, j, k, l) に対して、下位の添え字集合を $\{i, j\}$、下位の max を L、上位の添え字集合を $\{k, l\}$、上位の min を H とし、それ以外の情報は知らないとします。タイプ 1 (i, k, x) で質問します。

- $f(i, k, x) < L$ のとき、$a_k > L$ から、$a_i, a_x < L$ となります。a_i か a_j どちらかは L であるので、$a_j = L$ となり、$\max(a_i, a_x) = f(i, k, x)$ となり、(i, x, k, l) の基本情報全てそろいます。

- $f(i,k,x) = L$ のとき、順列なので $a_i = L$ です。また、$a_i < a_k$ より $a_x < a_i$ となります。よって、(j,x,k,l) の基本情報は下位の max 以外はわかっています。下位の max を知るためにタイプ 1 (j,x,k) で質問します。

- $L < f(i,k,x) < H$ のとき、$a_x = f(i,k,x)$ です。

- $f(i,k,x) = H$ のとき、$f(i,k,x) = L$ と同様にできて、$a_k = H$、(i,j,x,l) の基本情報は上位の min をタイプ 1 (i,x,l) で質問して知れば ok です。

- $H < f(i,k,x)$ のとき、$f(i,k,x) < L$ と同様、$a_l = H$、(i,j,k,x) の基本情報全てそろいます。

これを $n-4$ 回繰り返すことによって、(i,j,k,l) の基本情報と、(i,j,k,l) 以外の添え字 x に対する値 a_x がわかります。すると、値の集合 $\{a_i, a_j, a_k, a_l\}$ も知ることができます。(i,j,k,l) の上位の添え字集合に対してタイプ 2 の質問をし、下位の添え字集合に対してタイプ 2 の質問をすることで、a_i, a_j, a_k, a_l をソートした時の添え字の順番がわかります。これより a_i, a_j, a_k, a_l もわかり、隠された順列の値を全て知ることができます。

想定部分点解法 1

タイプ 1 を $3n$ 回以下、タイプ 2 を 2 回使って解く方法を示します。これは基本的に解説と同じです。質問の仕方が異なるだけです。

(i,j,k,l) の基本情報はわかっているときに、a_x が未知である x を取ってきて、i,j,k,l,x のうち 1 つの添え字に対応する値と、それ以外 4 つに対する基本情報をタイプ 1 の質問 3 回で得ます。

タイプ 1 の質問を (i,j,x) と (k,l,x) でします。$p = f(i,j,x), q = f(k,l,x)$ とします。

- $p = L, q = H$ のとき、$L < a_x < H$ です。タイプ 1 の質問を (i,k,x) とかですると、a_x が返ってきます。

- $p < L$ のとき、$a_x < L$ です。タイプ 1 の質問を (i,k,x) でして、$r = f(i,k,x)$ とします。$r = L$ のとき $a_i = L$ であり、$r \neq L$ のとき $a_j = L$ となります。

  $a_i = L$ のとき、$\max(a_j, a_x) = p$ であるので、(j,x,k,l) の基本情報がそろっています。$a_j = L$ の時も同様です。

- $q > H$ の時も上記と同様にすることができます。

余談　この問題が生まれたときのタイプ 1 のクエリ回数上限は $6n$ 回でした。時間を経るうちに上限が $4n, 3n, 2n$ 回と減っていき、今回の問題となりました。上に示した解法は上限が $3n$ 回だった時の想定解です。

$2n$ 回で出来ることがわかっていれば $3n$ 回から $2n$ 回にするのは難しくないと思っていたため、当初部分点を設定しない方針でした。しかし、解く側からするとそこまで簡単ではないうえ、いろんな人に考えてもらえるよう、部分点をつけることになりました。タイプ 1 の上限が $3n$ 回あれば意外と様々なやり方があると思います。

想定部分点解法 2

タイプ 1 を $2n$ 回以下、タイプ 2 を 3 回使って解く方法を示します。

これは解法とすこし異なります。セット (i,j) を持ちます。a_i, a_j はまだ数字が入っていないとします。タイプ 2 の質問を (i,j) でして、$a_i < a_j$ を仮定します ($a_i > a_j$ の時は i,j を swap する)。タイプ 1 の質問を 2 回することで、まだ数字が入っていない a_x と a_i, a_j 3 つのうち 1 つに数字をいれます。

まずタイプ 1 の質問を (i,j,x) でします。

- $a_k = f(i,j,x)$ となる k が存在しないとき、$a_x = f(i,j,x)$ とします。
- $a_k = f(i,j,x)$ となる k が存在するとき

  $a_i = f(i,j,x)$ か $a_j = f(i,j,x)$ となります。$a_i = f(i,j,x)$ となるとき、$a_i < a_j$ より、$a_k < f(i,j,x)$ かつ $a_x < f(i,j,x)$ となり、$a_j = f(i,j,x)$ となるとき、$f(i,j,x) < a_k$ かつ $f(i,j,x) < a_x$ となります。よって、タイプ 1 の質問を (i,k,x) でして、$f(i,k,x) < f(i,j,x)$ であれば $a_i = f(i,j,x)$、そうでなければ $a_j = f(i,j,x)$ となります。

  $a_i = f(i,j,x)$ のとき、セットを (x,j) とし、$a_k = f(x,j,k)$ とします。$f(x,j,k) = f(i,k,x)$ であるので、質問をする必要はありません。$a_j = f(i,j,x)$ のときも同様にセットを更新します。

この操作が終了したあと、セットが (i,j), $a_x = 2$, $a_y = n-1$ とします。このとき、i,j,x,y 以外の添え字 k での数字 a_k は正しくなっています。$a_i = 1, a_x = 2$ か $a_i = 2, a_x = 1$ かどうか、また $a_j = n-1, a_y = n$ か $a_j = n, a_y = n-1$ かどうか、はわからないので、質問 2 を 2 回使って確定させます。

余談　これは、Inside Story の タイプ 3 だけのジャッジの解法に思いを馳せると生まれる解法だと思います。想定部分点解法 1 くらいの難易度があると思ったので、これも想定部分点解法としました。

満点解法別解

想定部分点解法 2 の改良です。

最初のセット (i,j) を決めるときに、タイプ 2 を 1 回使うのではなく、タイプ 1 を 4 回使います。想定解法の最初のタイプ 1 を 4 回使うやり方をすると、上位の添え字集合と下位の添え字集合が得られるので、それぞれの集合から 1 つずつ取ってきてセットにします。これで満点を取ることが可能です。

余談　tatyam さんの提出コードを見るまで想定部分点解法 2 から満点解法を得れるとは思いませんでした。もしこれが作問時に思いついていたら、Inside Story の問題はなくなっていたかもしれませんね。