KUPC2020 F: GRIDMST

原案, 作成: yamunaku

1　考察

重みの等しい辺については、順序をつけて、優先的に選ぶものを決めます。順序づけをした後の最小全域木は、順序づけをする前の最小全域木の 1 つであることが示せます。この問題では、等しい重みの辺があるときは、次のように選ぶことにします。

- $(i-1, j)$ と (i, j) を結ぶ辺のスコアを $i \times 10^{18} + j \times 10^9 + 1$ とする。
- $(i, j-1)$ と (i, j) を結ぶ辺のスコアを $i \times 10^{18} + j \times 10^9$ とする。
- 等しい重みの辺については、スコアの小さなものを優先的に選ぶことにする。

最小全域木のアルゴリズムに従って、2 通りの考察を行うことができます。どちらの考察でも、次の結論を導くことができます。

最小全域木に含まれる辺の重みの和は、

$$\sum_{i=1}^{H-1}(A_i + B_1) + \sum_{j=1}^{W-1}(C_1 + D_j) + \sum_{i=2}^{H-1}\sum_{j=2}^{W-1}\min(A_{i-1} + B_j,\ C_i + D_{j-1})$$

である。

1.1　プリム法を用いた考察

頂点 $(1, 1)$ からプリム法を適用することを考えます。数列 A, B, C, D の単調性から、プリム法の各段階では、頂点 (i, j) が $(1, 1)$ と連結であるとき、

- $i > 1$ ならば、 $(i-1, j)$ も $(1, 1)$ と連結である。
- $j > 1$ ならば、 $(i, j-1)$ も $(1, 1)$ と連結である。

となることが帰納的に示せます。つまり、

- 頂点 $(i, 1)$ $(i > 1)$ が連結になるとき、$(i-1, j)$ と (i, j) を結ぶ辺が選ばれます。
- 頂点 $(1, j)$ $(i > 1)$ が連結になるとき、$(i, j-1)$ と (i, j) を結ぶ辺が選ばれます。
- 頂点 (i, j) $(i > 1, j > 1)$ が連結になるとき、$(i-1, j)$ と (i, j) を結ぶ辺か、$(i, j-1)$ と (i, j) を結ぶ辺のどちらか小さい方が選ばれます。

これらの選ばれた辺だけで全域木ができるので、求める辺の重みは、

$$\sum_{i=1}^{H-1}(A_i+B_1)+\sum_{j=1}^{W-1}(C_1+D_j)+\sum_{i=2}^{H-1}\sum_{j=2}^{W-1}\min(A_{i-1}+B_j,\ C_i+D_{j-1})$$

となります。

1.2 ブルーフカ法を用いた考察

ブルーフカ法は、現在の各連結成分について、それに接続する辺の中で重みが最小のものを、最小全域木の辺として同時に選んでいく方法です。

このブルーフカ法を、頂点 $(i,j)(i>1,j>1)$ すべてについて適用することを考えます。このとき、数列 A,B,C,D の単調性から、頂点 (i,j) について選ばれる辺は、$(i-1,j)$ と (i,j) を結ぶ辺か、$(i,j-1)$ と (i,j) を結ぶ辺のどちらか小さい方になります。

辺を選ぶと、頂点 $(i,j)(i>1,j>1)$ は、 $(x,1)$ $(x>1)$ または $(1,y)$ $(y>1)$ と連結になります。グラフは、頂点 $(1,1)$ 単体と、頂点 $(x,1)$ $(x>1)$ を含む連結成分、頂点 $(1,y)$ $(y>1)$ を含む連結成分になります。

これらの連結成分をすべて連結にすることを考えます。

$(1,y)$ $(y>1)$ を含む連結成分に注目すると、それに含まれる頂点の各行での列番号の最小値は広義単調増加です。連結成分の作り方から、その連結成分に接続している、 $(i-1,j)$ と (i,j) を結ぶ辺があったとすると、$y\le j$ であり、この辺の重みは、 $(i,j-1)$ と (i,j) を結ぶ辺以下です。A,B の単調性から、$(1,y)$ を含む連結成分から出ている辺の中では、 $(1,y-1)$ と $(1,y)$ を結ぶ辺の重みが最小であることがわかります。

$(x,1)$ $(x>1)$ についても同様なことが言えます。

したがって、$(i-1,1)$ と $(i,1)$ を結ぶ辺、$(1,j-1)$ と $(1,j)$ を結ぶ辺をすべて選ぶのが最適です。

選ばれる辺の重みの和は、

$$\sum_{i=1}^{H-1}(A_i+B_1)+\sum_{j=1}^{W-1}(C_1+D_j)+\sum_{i=2}^{H-1}\sum_{j=2}^{W-1}\min(A_{i-1}+B_j,\ C_i+D_{j-1})$$

となります。

2 答えの求め方

$\sum_{i=1}^{H-1}(A_i+B_1)+\sum_{j=1}^{W-1}(C_1+D_j)$ は $O(H+W)$ で求めることができます。

$\sum_{i=2}^{H-1}\sum_{j=2}^{W-1}\min(A_{i-1}+B_j,\ C_i+D_{j-1})$ は、愚直に求めると $O((H+W)^2)$ かかってしまうので、高速化が必要です。

- $A_{i-1}-C_i\le -B_j+D_{j-1}$ のとき、$\min(A_{i-1}+B_j,\ C_i+D_{j-1})=A_{i-1}+B_j$
- $A_{i-1}-C_i\ge -B_j+D_{j-1}$ のとき、$\min(A_{i-1}+B_j,\ C_i+D_{j-1})=C_i+D_{j-1}$

であることから、各 i について $A_{i-1}-C_i$ の小さい順に、 $A_{i-1}+B_j$ の累積和と、C_i+D_{j-1} の累積和をとります。

こうすると、各 j について、$A_{i-1}-C_i\le -B_j+D_{j-1}$ となるような i についての $A_{i-1}+B_j$ の和と、$A_{i-1}-C_i\ge -B_j+D_{j-1}$ となるような i についての C_i+D_{j-1} の和を $O(\log H)$ で求めることができます。

全体の計算量は $O((H+W)\log H)$ となります。