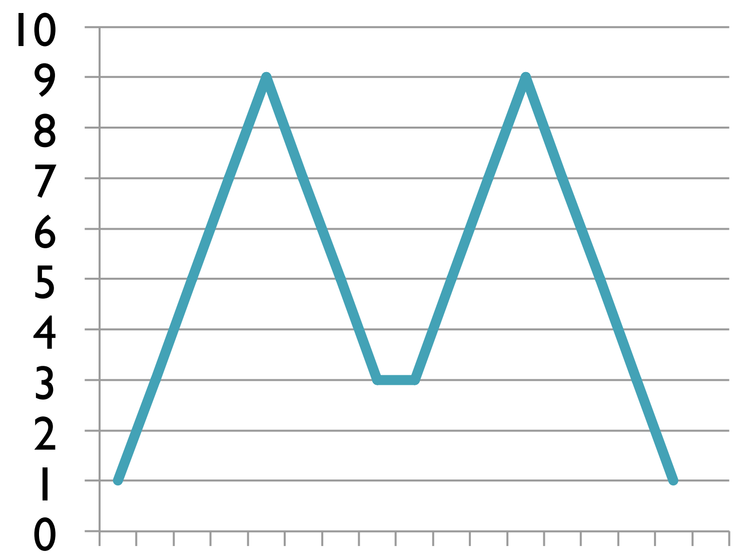
問題E : Fox Number

Writer : 楠本

Tester : 今城



問題概要 1/2

- 素因数分解したとき，指数部が広義に単調減少しているような正の整数を**Fox Number**と呼ぶ.
- 例：
  - $2000 = 2^4 \times 5^3$ は $4 \to 3$となっているのでFox Number.
  - $884 = 2^2 \times 13^1 \times 17^1$ は$2 \to 1 \to 1$となっているのでFox Number.
  - $25000 = 2^3 \times 5^5$ は$3 \to 5$となっていて増加してしまっているのでFox Numberではない.

問題概要 2/2

- 整数の区間[A-B, A+B]が与えられるのでこれに含まれるFox Numberの個数を求めよ.
- A+Bは最大で約10^{12}.
- 区間に含まれる整数は最大で約10^6個.
- 区間には0や負数が含まれる可能性がある.

コーナーケース

- 0以下の整数は Fox Number ではない.
  - 素数の積で表すことができない.
- さらに1も Fox Number ではない.
  - 素数は2以上の正の整数で，かつ指数部は1以上でなければならないと問題文に記されている.
- 従って区間に1以下の整数が含まれていた場合，それを除いて考えてよい.
  - 例えば区間が[-5, 20]ならこれを[2, 20]として問題を考える.
  - [1, 1]のようなケースに注意.

解法1: 区間篩

- 区間に含まれる整数の個数をDとして，サイズDの配列を用意する.
  - 最初どの要素も∞とする.
  - 各要素を区間内の整数に対応付ける.
- 素数pを2,3,5,7,11,...と順にループさせて，区間に含まれる整数をpで素因数分解していく.
- 各ステップにおいて，各要素には直前に行われた素因数分解での指数を格納するとする.
- もしその過程で指数部が増加していることがあったら，その数はFox Numberではないことがわかる.

解法1: 区間篩

- 例：[16,21]を考える
  - 最初：

16	17	18	19	20	21
∞	∞	∞	∞	∞	∞

  - p=2：

16	17	18	19	20	21
4	∞	1	∞	2	∞

  - p=3：

16	17	18	19	20	21
4	∞	×	∞	2	1

  - p=5：

16	17	18	19	20	21
4	∞	×	∞	1	1

…

解法1: 区間篩

- 素数pは$\sqrt{(A+B)}$ までの素数 (つまり10^6程度の素数まで) についてやればよい.
  - なぜなら，$A+B$以下の数が$\sqrt{(A+B)}$より大きい素因数を持っていたとしてもその指数部は高々1なのでFox Numberであるかどうかの判定には影響を及ぼさないから無視してよい.

解法1: 区間篩

- 計算量は?
- 各ステップにおいて素因数分解にかかる時間は D/p である.
- したがって全体では

$$\Sigma_{p \leq \sqrt{(A+B)}} (D/p) = O(D\log\log(A+B) + \sqrt{(A+B)})$$

でできる.

解法2: 非Foxのカウント

- 実はFox Number の方が圧倒的に多い
  - 10^{12}の近くの数は約92%がFox Number
- Fox Number でないもの：つまり，指数部が増加しているような箇所を含む数を探すことにする.
- Fox Number でない数は次のように書ける.
  - $p_1{}^2 \times p_2 \times U$ ($p_1 < p_2$: 素数 かつ Uに含まれるp_2の因数の個数はp_1の因数の個数を超えない)

解法2: 非Foxのカウント

- 条件に合うp1,p2,Uを全通り生成し,条件に合わないものを非Fox Numberとしてふるい落としていく.
- やってみるとなぜか速い.

解法2: 非Foxのカウント(荒い解析)

- なぜ速いのか?
  - 1回のステップで $(D / p_1^2 p_2)$ だけかかることになる.
  - 1からnまでの素数の逆数の和はO(loglog$n$)であり，1からnまでの整数の2乗の逆数の和は小さい定数に収束することが知られているので，これを用いると，計算量は

    $$\Sigma\Sigma(D / p_1^2 p_2) \leq \Sigma\ (1/p_1^2)\ \Sigma(\mathrm{D} / p_2)$$
    $$= \mathrm{O}(D\log\log(A+B) + \sqrt{(A+B)})$$

    となる.

統計

- First Accepted: wata(39:56)
- 正解者: 22人
- 挑戦者: 50人
- 投稿数: 154
- 正答率: 14%