KUPC 2019 - I

Maximin Game

Outline

- 1,2,...,2N を、順序を保って 2 つの数列 $a_1, a_2, \ldots, a_N$ と $b_1, b_2, \ldots, b_N$ に分けることを考える。
- 0 と 1 からなる数列 $s_1, s_2, \ldots, s_N$ が与えられる。
- 任意の i について、$s_i = 0$ のとき $a_i < b_i$、$s_i = 1$ のとき $a_i > b_i$ あるような分け方はいくつあるか？

Observation

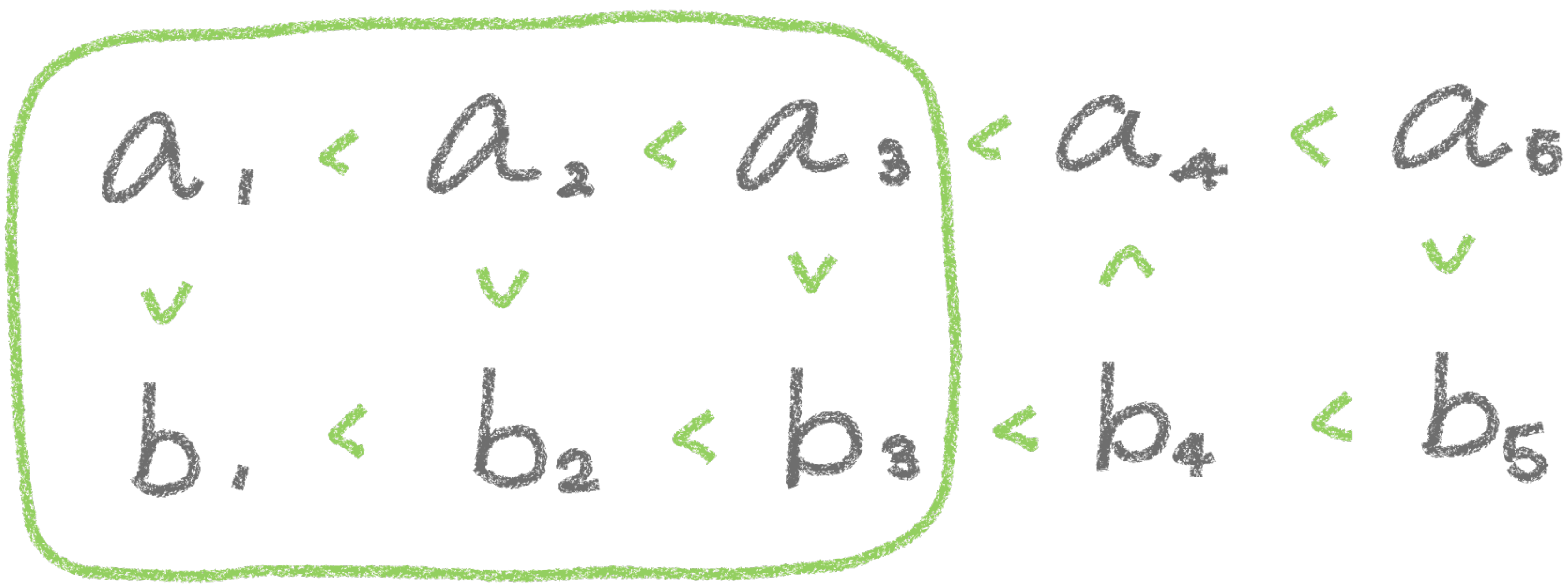
- $s = 1,1,1,0,1$ とする。

$$\begin{array}{ccccccccc} a_1 & < & a_2 & < & a_3 & < & a_4 & < & a_5 \\ \vee & & \vee & & \vee & & \wedge & & \vee \\ b_1 & < & b_2 & < & b_3 & < & b_4 & < & b_5 \end{array}$$

- このとき、上のような大小関係が成り立つ。

Observation

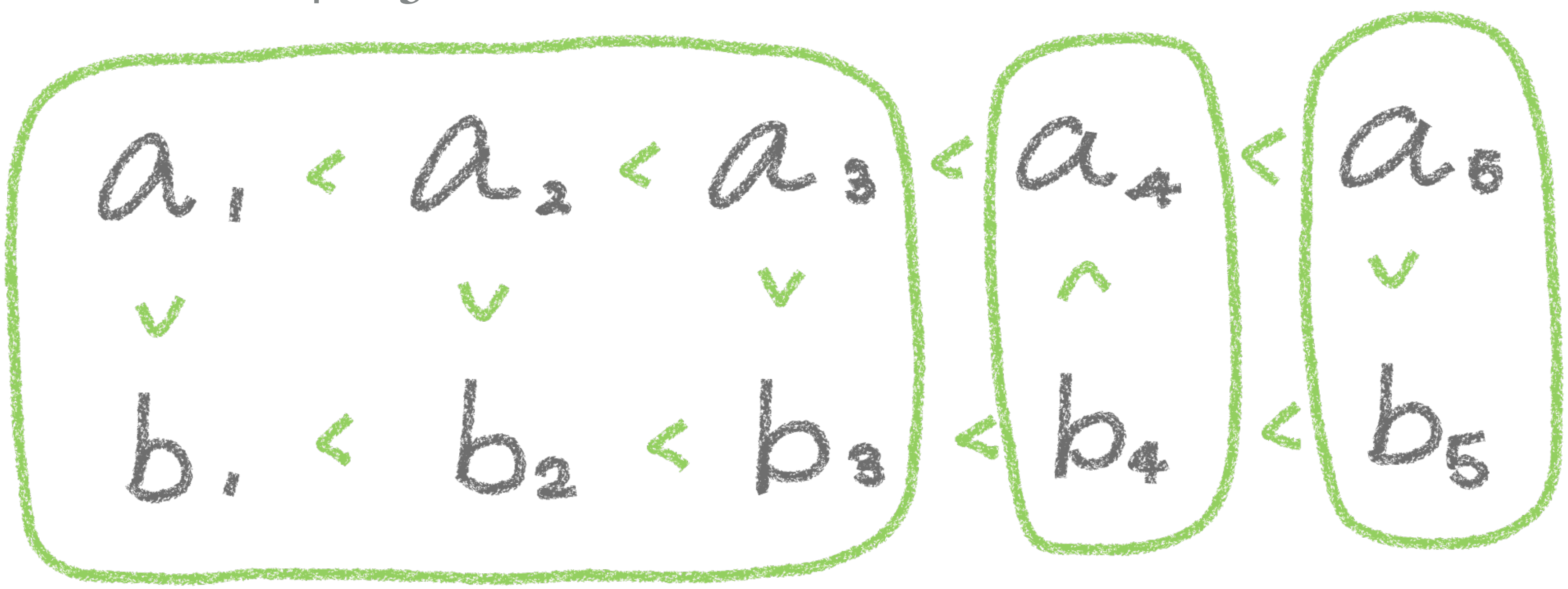
- a_3 に注目すると、



- 囲われた部分の数は、すべて a_3 以下である。また逆に、囲われていない部分の数は、すべて a_3 より大きい。

Observation

- 同様に a_4, a_5 に注目すると、



- 囲われた部分で使われる数の集合は、それぞれ一意に定まる。また、囲われた部分内での a と b の大小関係は一定である。

Observation

- このように、s の値が変わる場所で数列を分割すると、独立な、より単純な問題に帰着することができる。
- 帰着する問題は、たとえば次のように表せる。
- 1,2,...,$2K$ を、順序を保って 2 つの数列 $a_1, a_2, \ldots, a_K$ と $b_1, b_2, \ldots, b_K$ に分けることを考える。ただし任意の i について、$a_i < b_i$ が成り立つ必要がある。そのような分け方はいくつあるか？

Observation

- a の要素を (の位置、b の要素を) の位置と対応させると、この問題は、長さ $2K$ の正しいかっこ列の数え上げと等価である。
- 長さ $2K$ の正しいかっこ列の個数は、K 番目のカタラン数である $C_K = \dfrac{(2K)!}{(K+1)!K!}$ に等しいことが知られている。
- 帰着した各問題の解を掛け合わせれば、元の問題が解ける。

Statistic

- ここに統計情報を書く。