KUPC2020 Spring L: 木の彩色 解説

writer: moririn2528,　editorial: moririn2528, suibaka

2020 年 3 月 20 日

次数が 3 以上の頂点の集合を V_3 とおきます。また, 頂点 $v \in V_3$ に対し，s_v を次のように定めます.

定義 1 v を根とする根付き木を考える．v の任意の子 c に対し，$d_v(c)$ を c の部分木において v から最も遠い葉までの v からの距離と定義する．ここで，u の子を $c_1, c_2, \ldots, c_m (m \geq 3)$ とする．さらに $d_v(c_1), \ldots, d_v(c_m)$ のうち，大きい方から順に *3* つ取った値を $a_1, a_2, a_3 (a_1 \geq a_2 \geq a_3)$ とする．このとき，s_v を

$$s_v = \begin{cases} a_1 + a_3 & (a_1 = a_3) \\ a_1 + a_3 + 1 & (a_1 \neq a_3) \end{cases}$$

で定義する.

ここで $s := \max_{v \in V_3} s_v$ とおくと，$1, 2, s, s+1, \ldots, N$ 番目の来場者を満足させる塗り方が存在します．逆にこれら以外の来場者については，どのように頂点を塗っても満足させることはできません．以下でそれを示します.

i 番目の来場者について，i の値で場合分けをして示します.

- $i = 1$ のとき，頂点をすべて同じ色で塗れば良いです.
- $i = 2$ のとき，木は 2 部グラフなので満足するような塗り方が存在します.
- $3 \leq i \leq s - 1$ のとき，v を $s = s_v$ を満たす頂点とします（複数ある場合はどれでも可）．s の定義からこのような v は必ず存在します．以降，木は v を根とした根付き木として考えます．v の子を $c_1, \ldots, c_m (m \geq 3)$ とおきます．ただし，$d_v(c_1) \geq d_v(c_2) \geq \ldots \geq d_v(c_m)$ が成り立つとします.
  - $i \leq d_v(c_1)$ のとき，c_1 の子孫で v からの距離が $i - 1$ である頂点 u が存在します．このとき，u, c_2 間の距離は i であり，また u, c_3 間の距離も i です．しかし c_2, c_3 間の距離は $2\ (< i)$ なので，u, c_2, c_3 にどのように色を塗っても満足させることはできません.

- $d_v(c_1) < i$ のとき，c_1 の子孫で v からの距離が $d_v(c_1)$ である頂点 u_1 が存在します．また，c_2 の子孫で v からの距離 $i - d_v(c_1)$ である頂点 u_2 と，c_3 の子孫で v からの距離 $i - d_v(c_1)$ の頂点 u_3 が存在します．なぜなら，$s(= s_v)$ の定義から $s - 1 \leq d_v(c_1) + d_v(c_3)$ であり，今 $i \leq s - 1$ なので $i - d_v(c_1) \leq d_v(c_3)$ が成立するためです．次に，u_2, u_3 間の距離 $2(i - d_v(c_1))$ が i の倍数にならないことを示します．すなわち，$2d_v(c_1)$ が i の倍数とならないことを示します．$2d_v(c_1)$ が i の倍数だとすると，$d_v(c_1) < i$ より $2d_v(c_1) = i$ が成立します．u_1, u_3 間の距離は i なので，これは v から u_3 までの距離が $i/2 = d_v(c_1)$ であるということです．このとき定義から $s = d_v(c_1) + d_v(c_3) = 2d_v(c_1) = i$ となりますが，これは $i < s$ に矛盾します．よって，u_2, u_3 間の距離は i の倍数とならず，満足するような塗り方が存在しません．

- $s \leq i$ のとき，もし満足できる彩色がないならば, ある 3 頂点 p, q, r があり, 頂点 p, q 間, q, r 間の距離が i の倍数であり, 頂点 p, r 間の距離が i の倍数でないものが存在します。このとき, 頂点 p, q 間, 頂点 q, r 間の距離は i 以上であり, また, 頂点 p, q, r は同一パス上に存在しません。よって, ある頂点 t で, パス $(p, t), (q, t), (r, t)$ がすべて端点以外被らない頂点が存在します。この頂点 t を原因頂点と呼ぶことにします。$s \leq i$ のとき, すべての頂点が原因頂点とならないことを示します。
  次数が 2 以下の頂点は原因頂点となりません。よって，先の議論と同様にして，次数が 3 以上の点 v に対し頂点 c_1, c_2, c_3 を定めます。
  - $i \geq d_v(c_1) + d_v(c_3) + 1$ のとき
    $d_v(c_2) + d_v(c_3) \leq d_v(c_1) + d_v(c_3) < i$ より, 頂点 v は原因頂点となりません。
  - $i = d_v(c_1) + d_v(c_3)$ のとき
    $s = d_v(c_1) + d_v(c_3)$ が成り立ちます．つまり，s の定義より $d_v(c_1) = d_v(c_2) = d_v(c_3)$ となります。よってこのときも, 頂点 v は原因頂点となりません。

以上より，示されました．

以下，別解です．与えられた木の直径パス P を求め，その端点を u, v とします．また任意の 2 頂点 v_1, v_2 に対し，それらの間の最短距離を $d(v_1, v_2)$ と表すこととします．直径を $r = d(u, v)$ とおきます．任意の頂点 w に対し，値 S_w を以下で定めます．

$$S_w = \begin{cases} \max\{d(u,w), d(v,w)\} & (r = d(u,w) = d(v,w)) \\ \max\{d(u,w), d(v,w)\} + 1 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

ここで $S = \max_{w, w \notin P} S_w$ とおくと，$1, 2, S, S+1, \ldots, N$ 番目の来場者を満足させるような頂点の塗り方が存在します．逆に，これ以外の来場者を満足させることはできません．