問題G
自由研究

原案：楠本
テスター：岡
解説：広瀬

問題概要

- 無向グラフGに対してA(G)とE(G)を次で定める
- Gの頂点集合をVとする。 n=#Vとおく
- A(G)はGの最大独立集合の大きさ
- 全単射f:V→｛1,…n｝(n!通りある)をランダムに選択したときの　#{ v | vと隣接する任意の頂点wに対しf(v)<f(w) }の期待値をE(G)とする
- A(G)-E(G)が最大となるような頂点数４０以下のグラフGを１つ出力する。

方針

- 最大独立集合X⊂Vを固定して、E(G)を出来るだけ小さくすることを考える
- 辺が増えれば増えるほどE(G)は小さくなる
- Xが独立集合となるような、最も辺の数が多いグラフだけ考えればいい
- そのようなグラフの隣接関係は
  「vとwが隣接 ⇔ v ∉ X or w ∉ X 」で与えられる
- このようなグラフをG_Xで表す

方針

- A(G_X)-E(G_X)を計算しよう
- #X=mとする
- A(G_X)＝m
- vを頂点とする。vと隣接する任意の頂点wに対しf(v)<f(w)となる確率は、1/(e(v)+1)となる。ただし e(v)はvに隣接する頂点の数。
- 期待値の線形性よりE(G)はGの各頂点vに対するする1/(e(v)+1)の総和
- 特にE(G_X)＝m/(n-m+1)＋(n-m)/n

解法

- $m - m/(n-m+1) - (n-m)/n$が最大となるような$1 \leqq m \leqq n \leqq 40$を全探索で求める
- $(n,m)=(40,35)$のとき最大となる
- #X=mとし、G_Xを出力する

結果

- First AC: semiexp (73:18)
- 正解者数: 25
- 提出数: 548
- AC率: 14%