J – Link-cut Tworee

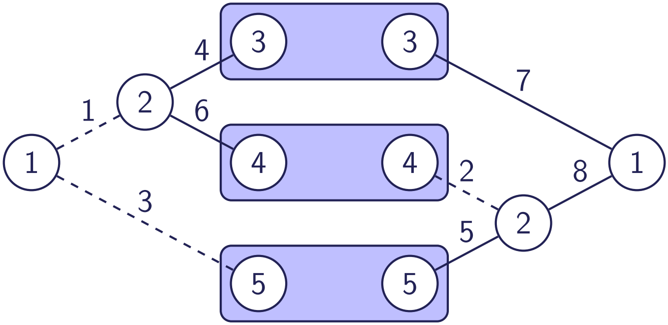
KUPC 2019

@ suibaka

問題概要

- N 頂点で葉の個数が等しい根付き木が 2 つある
- 各辺には重み（コスト）がついている
- 2 つの木の葉の間に一対一対応を作って縮約する
- 辺をいくつか取り除いて 2 つの木を作る
    - もともとの根同士は非連結にする
    - 任意の頂点は 2 つの木のどちらかに必ず属する
- 取り除いた辺の重みの和がコストとなる
- うまく縮約して達成可能な最小コストを求めよ

入力例 1



- 頂点 3 と 3、4 と 4、5 と 5 を組み合わせて縮約
- 点線の部分で切るとコスト 6 で、これが最小

縮約は後で考える

- 辺を切ってから縮約したほうが簡単
  - コストの最小化と、木にする部分の議論を分離できる

- うまく縮約すれば条件を満たすようにできる辺の取り除き方はなにか？
- 必要条件から攻めると見通しが良い

どう辺を切ればよいか？

Proposition

取り除く辺集合を E とする。また、葉の個数を m とする。

$$
\begin{aligned}
&E\text{ を切ったときに条件を満たす縮約方法が存在} \\
&\Leftrightarrow |E| = m \\
&\quad \wedge \text{すべての頂点が根または葉と連結} \\
&\quad \wedge \text{少なくとも 1 つ、根と連結な葉が存在}
\end{aligned}
$$

- 必要条件から攻めると自然に出てくる

証明 – 必要性

E で切って、条件を満たすように縮約できるとする。

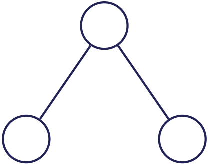
$|E|$ 箇所切るので、連結成分の個数が $|E|+2$ 個になる。
m 回の縮約により、連結成分の個数は $|E|+2-m$ 個になる。
$|E|+2-m=2$ でなければならないので、$|E|=m$

2 つ目と 3 つ目は明らか。

証明 – 十分性

E が先の 3 条件を満たすとする。与えられた木の葉の個数 m に関する帰納法で示す。

$m = 2$ のとき、本質的に考えるべき木は以下の 1 種類しかない（$\because$ 根は葉ではない）。これは具体的に構成して示せる。



証明 – 十分性

$m = k + 1$ の時を考える。$m = k$ のとき成り立つと仮定する。
以下の 2 つの場合がある。

Case 1: 根と連結な葉の個数がちょうど 1 個

Case 2: 根と連結な葉の個数が 2 個以上

証明 – 十分性

Case 1: 根と連結な葉の個数がちょうど 1 個

根と連結な葉 v がある木を T_1 として一般性を失わない。このとき、T_2 の連結成分の中に、葉を 2 つ以上含むものが少なくとも 1 つ存在する。そこへ v を縮約してやると、根と非連結な T_1 の葉と縮約可能な葉が生まれる。これは T_2 において根と連結な葉と全く同じ条件であるから、うまくグラフを変形すると帰納法の仮定が使うことができる。

証明 – 十分性

Case 2: 根と連結な葉の個数が 2 個以上

すべての葉が根と連結であることはありえないから、根と連結な葉とそうでない葉があって縮約できる。あとは Case 1 と同様にグラフをうまく変形すれば帰納法の仮定が使える形になる。

(証明終)

削除する辺のコストの最小化

- 2 つの根をあらかじめ辺でつないでおく
- 辺のコストが大きい方から見ていって、その辺を使っても「葉が含まれる連結成分の個数が $m+1$ 個以上」ならば使う
- 使えなかった m 個の辺が切ってもらうべき辺
- マトロイドなので最適
- $O(n \log n)$

おまけ

- この問題の 3 条件のうち、「任意の頂点は T_1 の頂点 1 または T_2 の頂点 1 と連結」という条件のみ無くした場合でも解けるか？