KUPC2017 - H
Make a Potion

drafear

問題概要

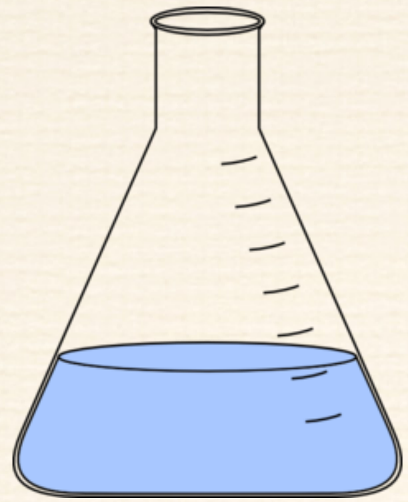
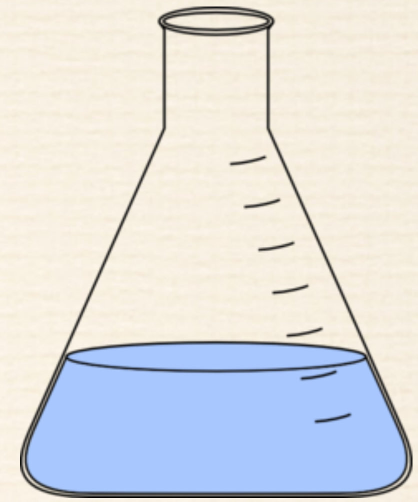
- n種類の液体が体積v_iずつある
- 条件のもとで液体を調合してポーションを作る

> 液体a_iを体積x_i以上使うなら
> 液体b_iを体積y_i以上使う

- ポーションの効力を最大化したい

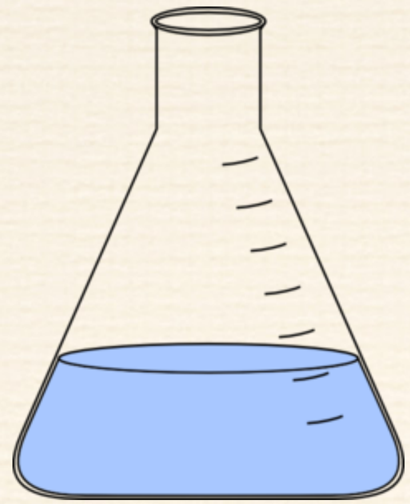
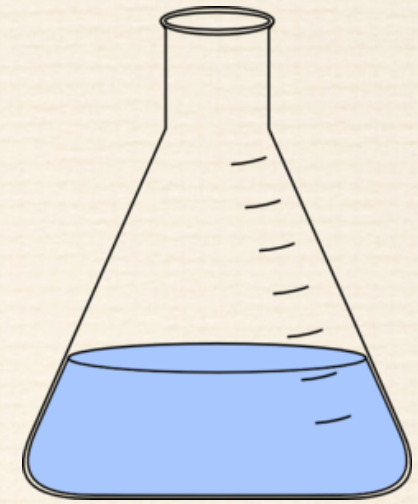
> 効力 = Σ(液体iの使用体積)×h_i

例

			
体積	1000		1800
変化量	1		-10
制約	≧200	⇒	≧10
	≧801	⇒	≧1000

「⇒」は「ならば」

例

体積	1000		1800
変化量	1		-10
制約	≧200	⇒	≧10
	≧801	⇒	≧1000
使用量	800		10
効力		700	

考察

- 線形計画っぽい！
- 液体iをw_i使うとすると
  以下のように定式化できる

$$
\begin{aligned}
&\max\ \Sigma w_i h_i \\
&\text{st. } 0 \leqq w_i \leqq v_i \\
&\qquad w_{bi} \geqq y_i \text{ if } w_{ai} \geqq x_i
\end{aligned}
$$

考察

- 線形計画問題にするために変数の定義を変更

$$
\begin{aligned}
&\max\ \Sigma w_i h_i \\
&\text{st. } 0 \leqq w_i \leqq v_i \\
&\qquad \boxed{w_{bi} \geqq y_i \text{ if } w_{ai} \geqq x_i}
\end{aligned}
$$

考察

- fij := 液体iを体積j以上使う(1/0)
- すると2-SATっぽくなる

$$
\begin{aligned}
\text{max} \quad & \Sigma f_{ij} h_i \\
\text{st.} \quad & f_{b_i y_i} \geqq f_{a_i x_i} \\
& f_{i(j-1)} \geqq f_{ij} \\
& f_{ij} \in \{0, 1\}
\end{aligned}
$$

忘れやすい

解答

- これを最小カットにすれば良い

最小カット問題

入力： 重み付き有向グラフG=(V,E)
頂点s，t

出力： s∈S，t∉Sであって、
∀(u∈S，v∉S，w)∈E について
Σwを最小化するS

解答

- これを最小カットにすれば良い

<u>最小カット問題</u>

- 頂点集合を2つのグループS，Tに分割する
- ただし s∈S，t∈T
- S -> T への重みwの辺がコスト
- つまり，辺(u,v,w)を追加するということは「uがグループS,vがグループTであるときコストwがかかる」ようにすること

解答

- fij := 液体iを体積j以上使う(1/0)

条件

$f_{ij} \Rightarrow f_{i(j-1)}$

$f_{a_i x_i} \Rightarrow f_{b_i y_i}$

忘れやすい

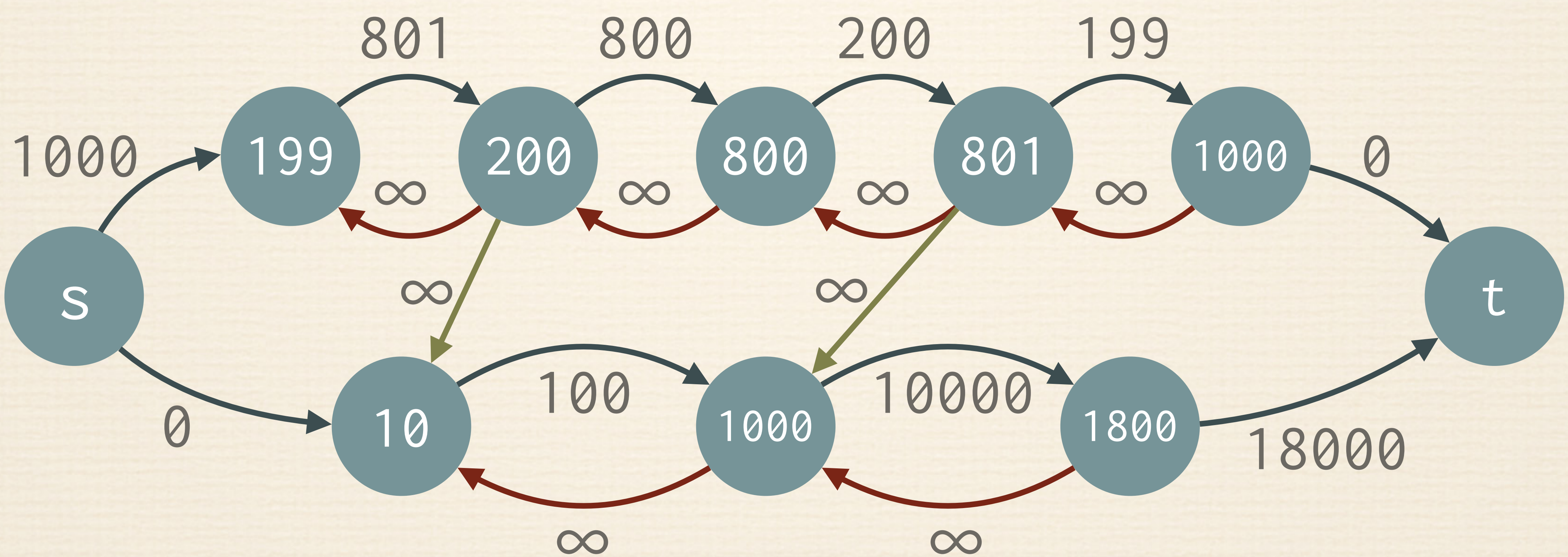
「⇒」は「ならば」

解答

```
2 2
1000 1800
1 -10
1 200 2 10
1 801 2 1000
```

sample1

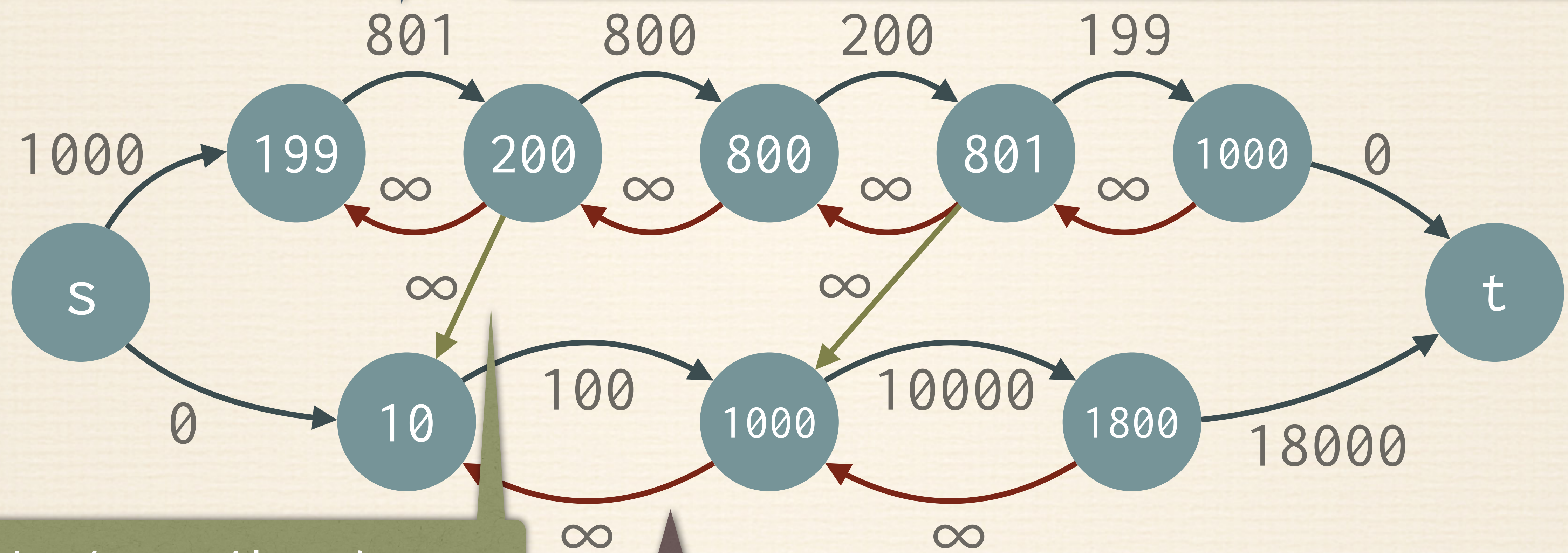
- グループSを$f_{ij}=1$,
  グループTを$f_{ij}=0$とする
- u→vをコスト∞ではると
  u∈S⇒v∈S
- 左の例の答えは以下のグラフで
  1000 - (最小カットのサイズ)



解答

これをカットすると液体1を
199使うのでコスト1000-801

1000は辺の重みを負にしないためのゲタ



液体1を200使うなら
液体2を10使う

1000使うなら999使う
…
11使うなら10使う