KUPC2018 K

光と闇の調和

原案: DRAFEAR

問題概要

- 頂点に重みが付いた二部グラフが与えられる
  - 左の頂点iは右の頂点l_iから頂点r_iまでと接続されている
- 各頂点に**レベル(1~kの整数)**を同時に設定する
- 自分のレベルより大きいレベルの頂点としか
  接続されていない頂点を全て削除する
- 残った頂点の重みの平均値を最大化する

考察

自分のレベルより大きいレベルの頂点としか
接続されていない頂点を全て削除する

↓

各枝についてどちらかは必ず残る

↓

残す頂点を決めたとき、点カバーになっている

考察

- 逆に、点カバーなら

  それらを残すようなレベル設定が存在する

  - 残す頂点: レベル2
  - 残さない頂点: レベル1
    - 点カバーなので相手は全てレベル2

次の問題になった！

- 頂点に重みが付いた二部グラフが与えられる
- 選んだ頂点の重みの平均が最大となるような**点カバー**を求めよ

考察

- 平均最大化といえば二分探索
  - 平均 x 以上にできるか？？
  - n頂点選んでそれぞれの重みがw_iだったとすると

$$\frac{\sum w_i}{n} \geq x$$

となるように選びたい. すなわち

$$\sum (x - w_i) \leq 0 \longrightarrow \boxed{\text{最小点カバー！！}}$$

考察

- 負の重みの頂点 → 必ず選ぶ
- その他の頂点で重み付き最小点カバーをする
- 重み付き最小点カバーも2部グラフの場合には

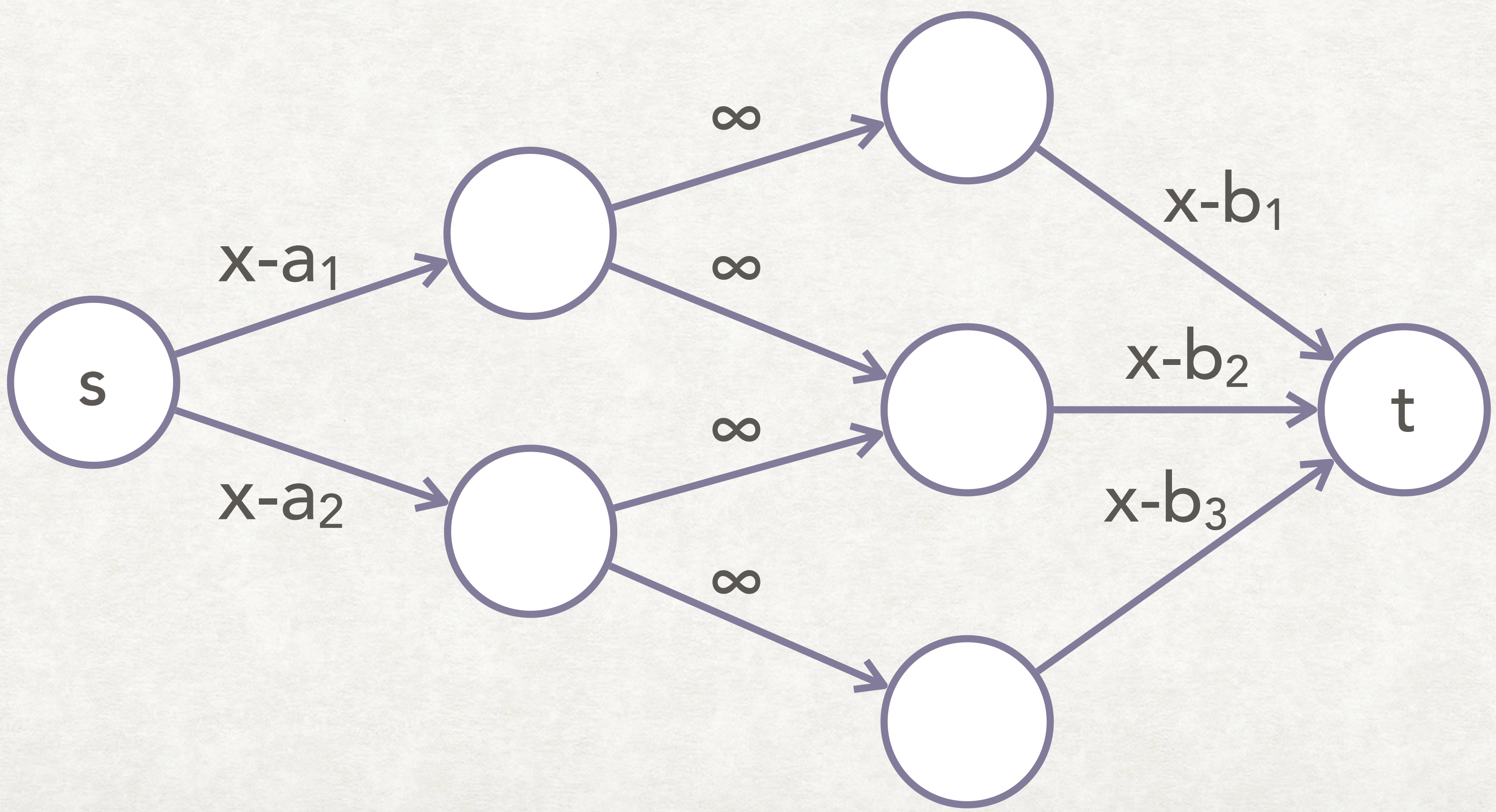
  最大流(最小カット)に帰着できることが

  普通の点カバーと同じように証明できる

  - カットされた辺に接続する頂点を選ぶと点カバー
  - 点カバーで選ばれた頂点に接続する辺を選ぶとカット

部分点解

- 答えで二分探索して重み付き最小点カバーに帰着
- 負の重みの頂点を選ぶ
- その他の頂点で重み付き最小点カバー



部分点解

- 辺数が O(nm) になるのでTLE
  - 適当なアルゴリズムでフローを流せば部分点
- これを高速化すれば満点

満点解

- 左の頂点iは右の頂点l_iから頂点r_iまでと容量∞で接続されている
- 右の頂点1に流すことを考える
  - $l_i = 1$ の頂点から流せる
  - r_i が小さい頂点から順に流せるだけ流すのが最適
  - これ以降, $l_i = 1$ は $l_i = 2$ として扱って良い
  - 次は右の頂点2に流すことを考える. これを繰り返す

満点解

- すなわち、l = 1, 2, …, m として
  - l_i = l となる i について
    r_i と容量 x-a_i の組をpriority_queueに追加
  - 容量 x-b_i の辺に r_i が小さい順にpriority_queueから取り出して流せるだけ流していく
    - ただし r_i < l なら流せないことに注意
- O((n+m)logn) なので間に合う