

問題I: 山

原案: 吉田

Writer: 森

Tester: 楠本, 吉田

解説: 吉田

リジャッジについて

- * コンテスト中に入出力を追加し、リジャッジを行いました。ご迷惑をおかけしました。

問題

- * $H \times W$ 行列が与えられる。
- * 各要素は相異なる。
- * 行どうしのスワップ、列どうしのスワップを繰り返して“山”に出来るか判定しなさい。

山

1	<	3	>	2
▲		▲		▲
7	<	9	>	8
▼		↑		▼
4	<	6	>	5

山頂

山でない

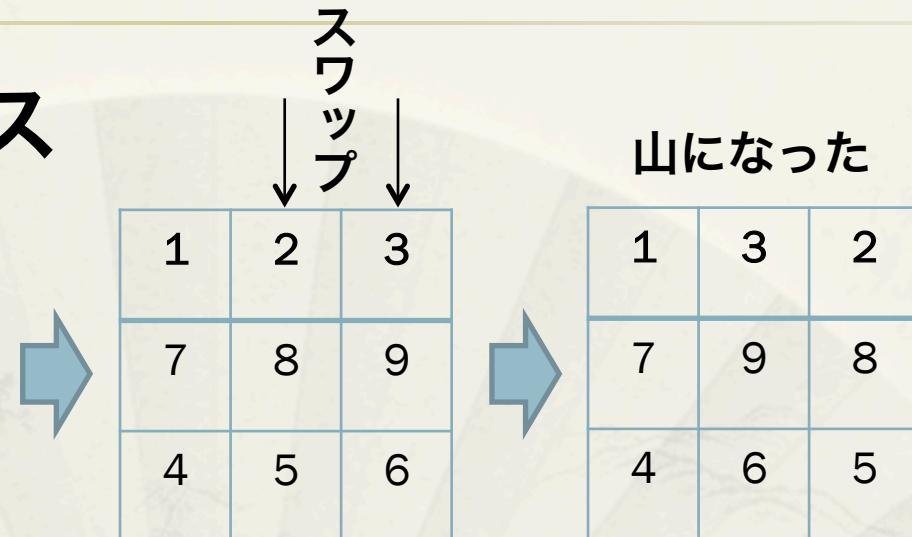
1	3	2
4	6	5
7	8	9

例

* Yesインスタンス

スワップ
スワップ

7	8	9
1	2	3
4	5	6



* Noインスタンス

1	3	2
4	6	5
7	8	9

どうスワップしても
山にできない

半順序

- * 行、列に対して自然な半順序が定義できる。

行1	1	3	2
行2	7	9	8

行1 < 行2

行1	1	9	2
行2	7	3	8

行1と行2の間に
順序関係なし

- * 行列が山 \Leftrightarrow ある a, b が存在して
 - * 行1 < ... < 行 $a-1$ < 行 a > 行 $a+1$ > ... > 行 H かつ
 - * 列1 < ... < 列 $b-1$ < 列 b > 列 $b+1$ > ... > 列 W

考察

- * 行のスワップは列の順序に影響を与えない。
 - * 列のスワップは行の順序に影響を与えない。
- ⇒行と列を別々に考えて良い。

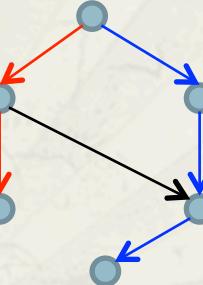
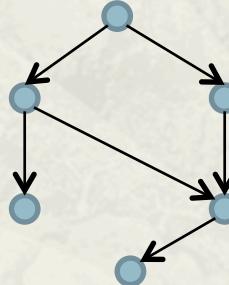
以降、行を山にする、つまりある a が存在して、

- * 行 $1 < \dots <$ 行 $a-1 <$ 行 $a >$ 行 $a+1 > \dots >$ 行 H

になるかのみを考える。

行が山に出来るか？

- * 行の順序関係から有向グラフGを作る。
 - * 行 $a >$ 行 b ならば (a, b) という有向枝を作る。
- * 行が山に出来る \Leftrightarrow ある点からスタートする2本のパスで頂点全てを被覆できる。



2本のパスで被覆できるので、
山にできる

Gを作るのに必要な計算量

- * $N = \max(H, W)$, $w = \text{Wordサイズ} = 32$ と置く。
- * 素朴にやると $O(N^3)$
 - * 行の組が $O(N^2)$ 個
 - * 行どうしの比較に $O(N)$
- * 工夫すると $O(N^3/w)$ にできる(練習問題)。

2本のパスで被覆

- * グラフGは明らかにDAG (閉路が無い)。
- * DAGの全ての頂点を被覆するのに必要なパスの本数は、最大フローもしくは二部グラフの最大マッチングで計算可能。
- * $M = O(N^2)$ をGの枝数とすると、計算量は $O(M\sqrt{N}) = O(N^{2.5})$

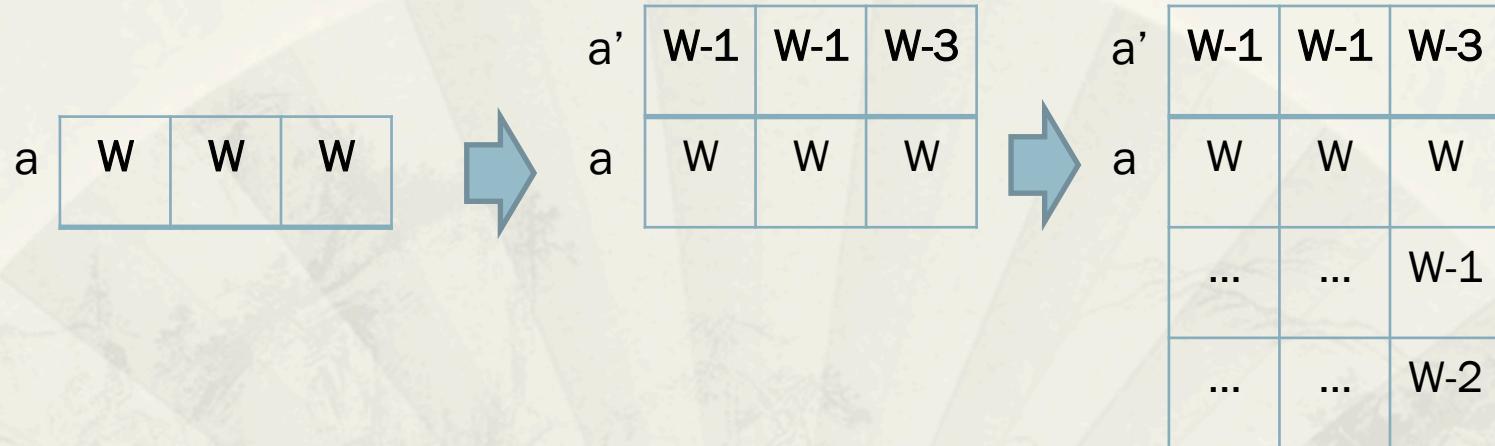
2本のパスで被覆

- * その他の方法(1):
 - * 2本で被覆不可能 \Leftrightarrow 3個以上の順序関係の無い点がある。
 - * 工夫すると $O(N^3/w)$ で計算可能。
- * その他の方法(2):
 - * 二本のパスの端点だけ覚え、行を一つずつどちらかのパスに追加していく。
 - * 動的計画法で $O(N^3)$ で解ける。
 - * 入力が弱いので間に合う？

行が山に出来るか？(別解)

- * 各列の値は $\{1, \dots, W\}$ からなるとしてよい。
- * 次のように構成的に山を作成。
 1. 山頂の行 a は (W, \dots, W) でなくてはならない。
 2. 値 $W-1$ を含む行 a' を、 a の上に足す。
 3. a' の b 列目の値が $x < W-1$ ならば、 a の下に b 列目の値が $W-1, \dots, x+1$ の行を足す。
 4. 以下、同じことを繰り返す。

例



* $O(N^2)$ 時間で実装可能。

統計

- * First acceptance: cafelier (87:00)
- * 正解者: 9人
- * 挑戦者: 36人
- * 投稿数: 158
- * 正答率: 5%