

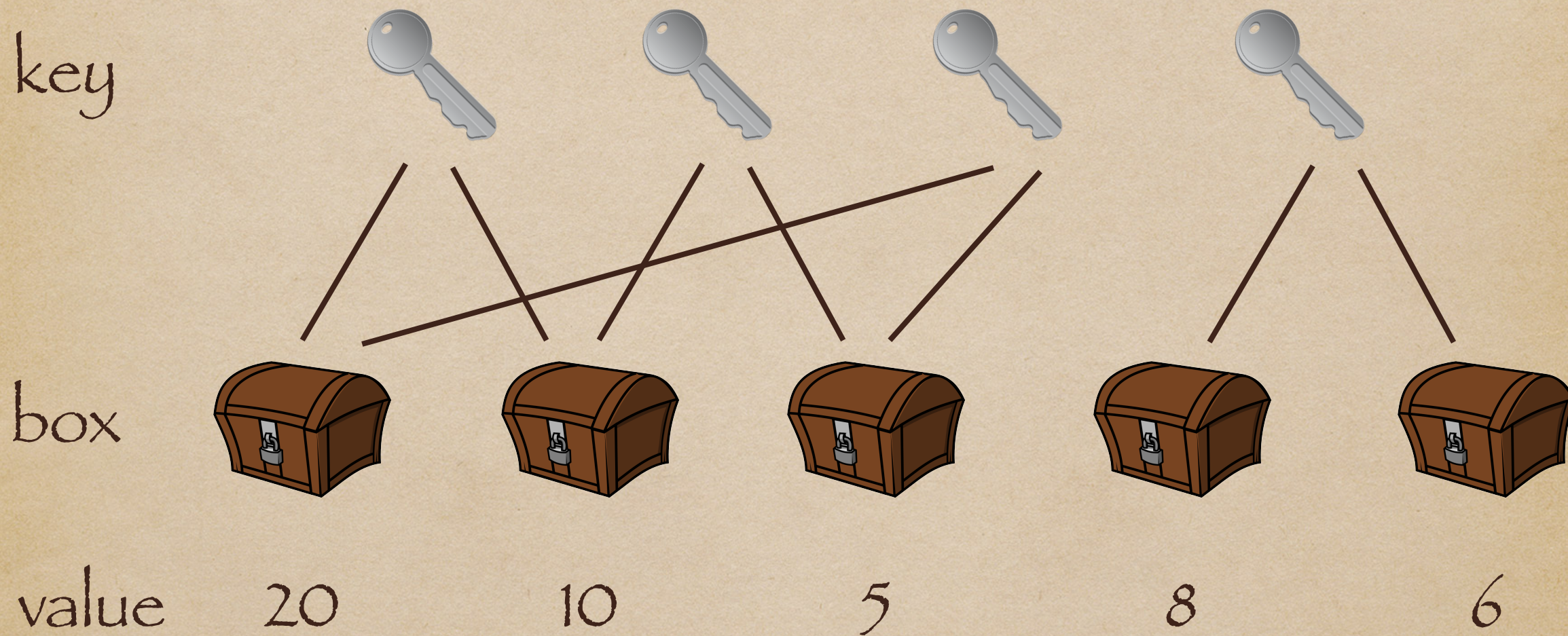
KUPC2017 - E
Treasure Hunt

drafeare

問題概要

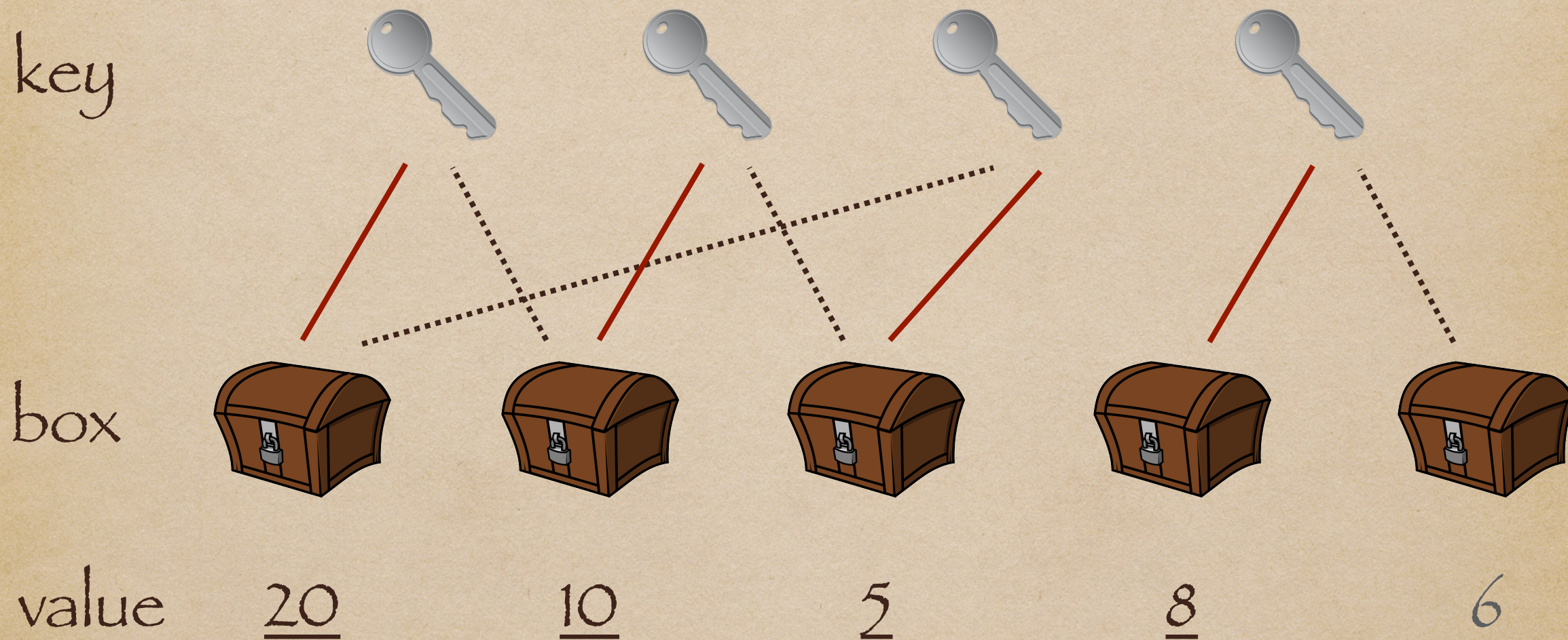
- ◆ n 個の宝箱と m 個の鍵がある
- ◆ 各宝箱には宝石が入っており価値が決まっている
- ◆ 各鍵は宝箱 x_i または宝箱 y_i を開けられる
- ◆ 得る宝石の合計価値を最大化せよ

例



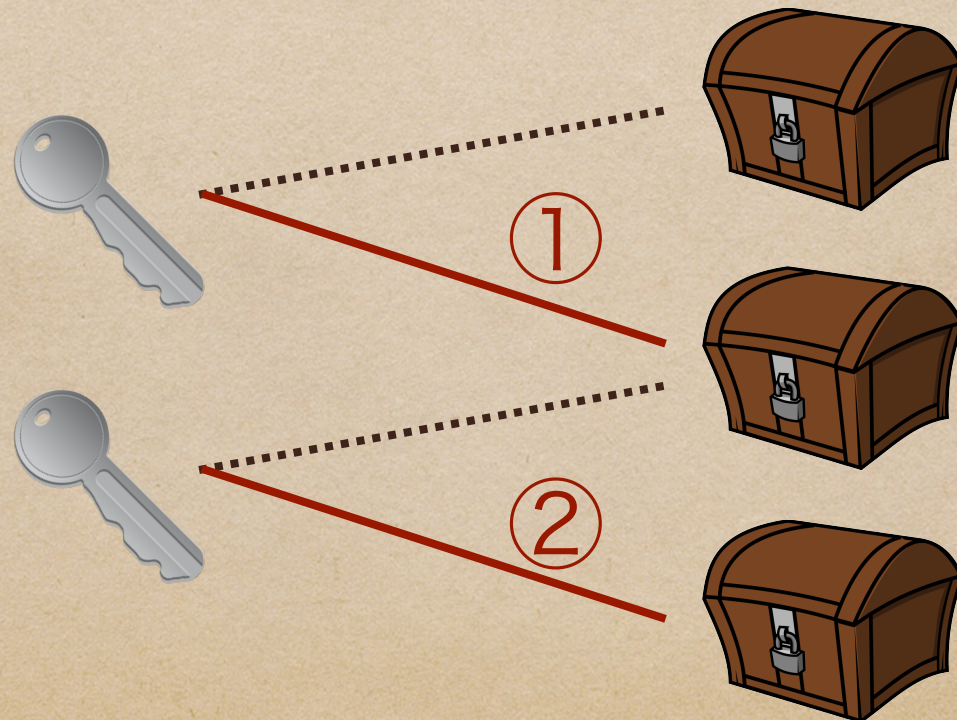
例

合計43が最大



考察

- ◆ 鍵と宝箱の最大重みマッチングを求めたい
- ◆ 1つの鍵で開けられる宝箱の種類は高々2種類
- ◆ ある鍵の使い方を決めると、一部の鍵の使い方が一意に定まる

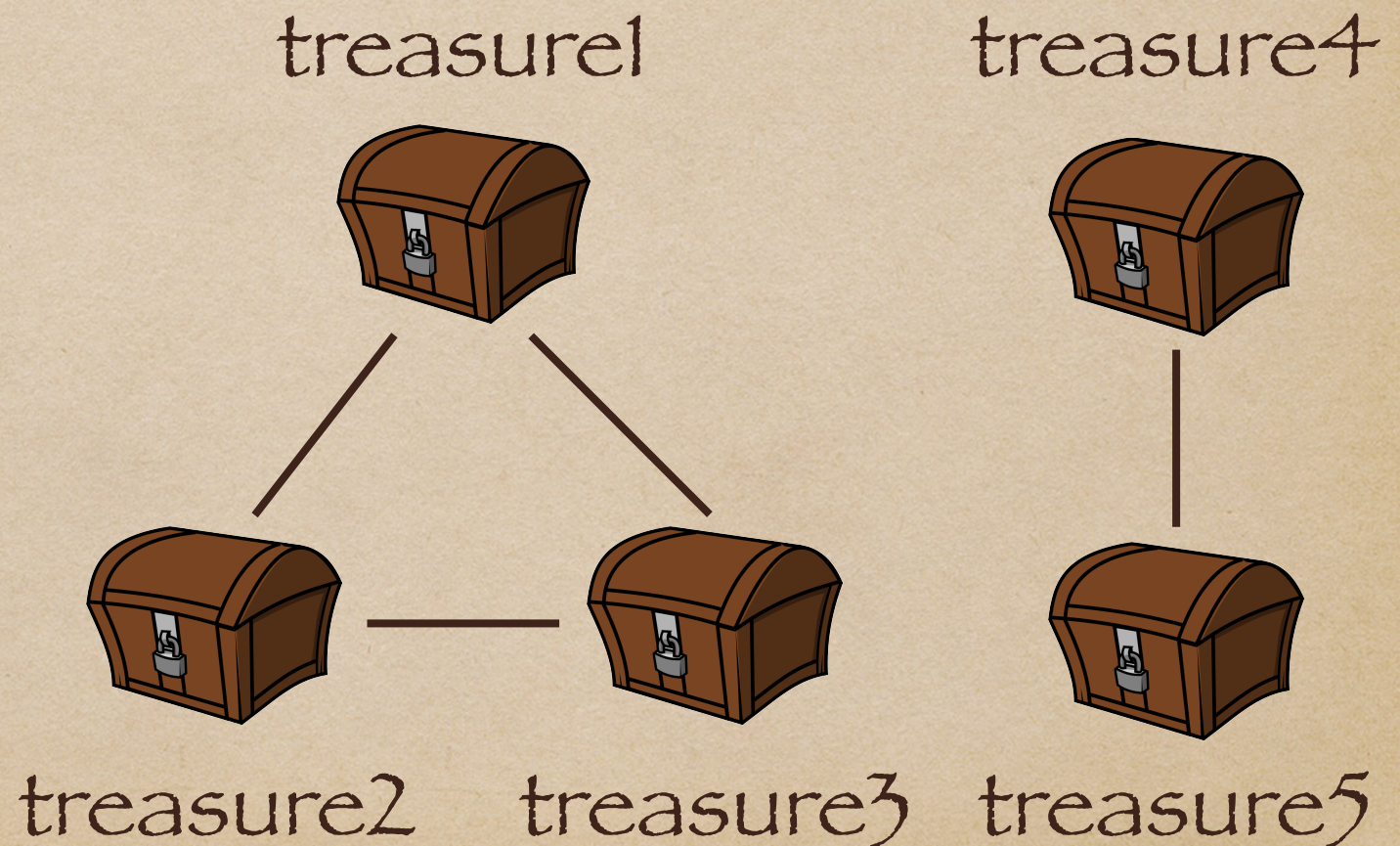


考察

- 次のグラフを考える
 - 宝箱 → 頂点
 - 鍵 → 辺

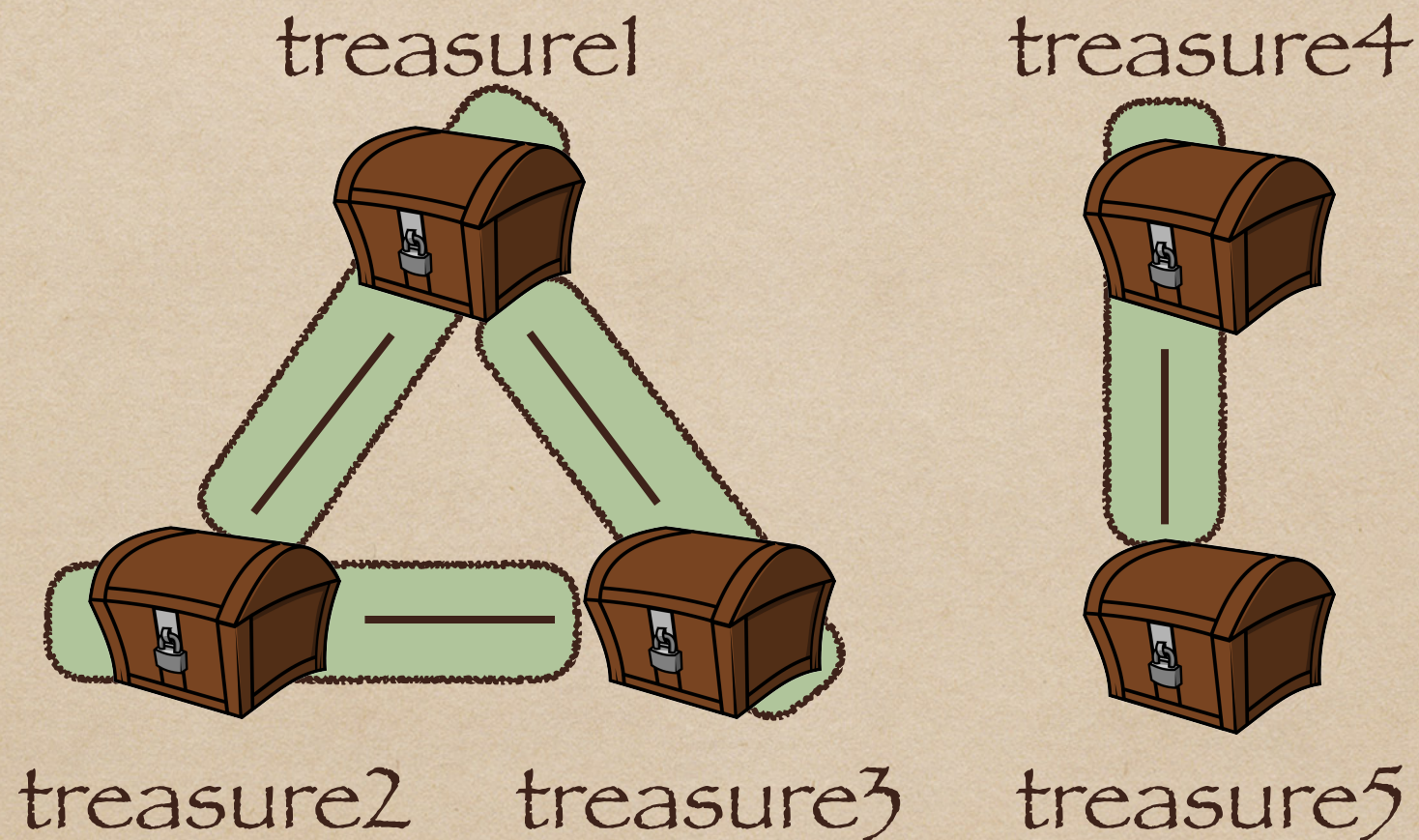
sample1

```
5 4
20 10 5 8 6
1 2
2 3
3 1
4 5
```



考察

- 辺と頂点をマッチングする問題になった



考察

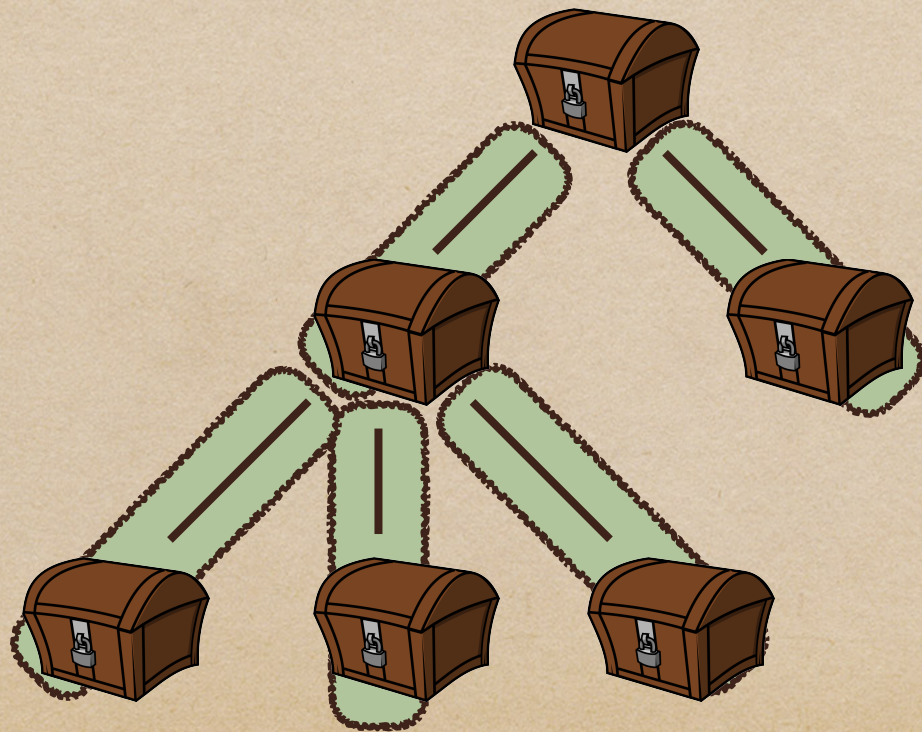
- ◆ 実は，各連結成分について
 - ◆ 木：任意の $|V|-1$ 個の宝箱を開けられる
 - ◆ 木でない：全ての宝箱を開けられる
- ◆ (後で証明します)

解法

- ◆ グラフの各連結成分について頂点数 $|V|$ と辺数 $|E|$ を数えて木である ($|E| = |V| - 1$) が判定する
- ◆ 木でない場合 V の宝箱全てを開けられる
- ◆ 木である場合, V の宝箱のうち価値の一番低いものを除いて全て開けるのが最適
- ◆ $O(|V| + |E|)$
- ◆ 以降証明

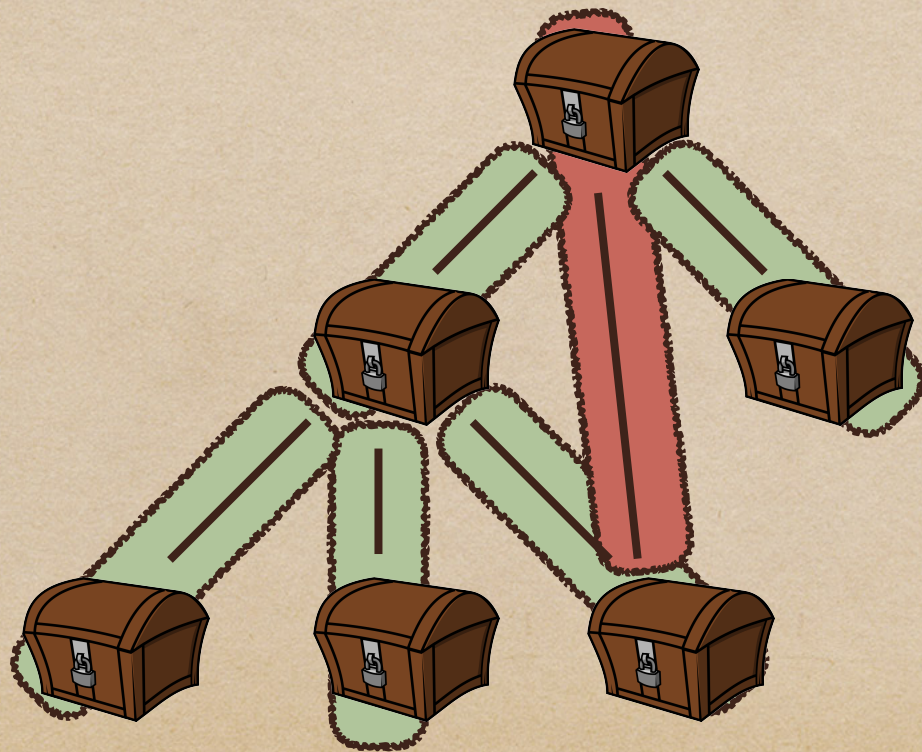
証明

- ◆ 木: 任意の $|V|-1$ 個の宝箱を開けられる
 - ◆ 開けない宝箱を根とする
 - ◆ 根以外の頂点について,
親との間の辺とマッチングさせることにする



証明

- ◆ 木でない：全ての宝箱を開けられる
- ◆ 橋でない辺 e に接続している頂点を根として木と同じことをする
- ◆ e と親をマッチングする



おまけ(原案)

- ◆ n 個の宝箱と m 個の鍵がある
- ◆ 各宝箱にはパーツAまたはパーツBが入っている
- ◆ 各鍵は宝箱 x_i または宝箱 y_i を開けられる
- ◆ 得られたパーツの中から
パーツAとパーツBの組はいくつ作れるか
- ◆ 最大流でも解けそうだったので改題した
 - ◆ s からパーツA, パーツBに流す
 - ◆ パーツAからパーツB(またはその逆)に流す