

KUPC2020 spring N: 3 人協力ゲーム 解説

writer: drafear

2020 年 3 月 20 日

アリスとボブが整数の情報をチャーリーに伝えるときに 1000 ビットの整数 1 個あたり 30 ビットしか使えないため、乱択アルゴリズムを考える必要があります。この問題は通信複雑性に関する問題で、次のように解くことができます。

あらかじめ、1000 ビットのランダムな整数を 30 個用意し、3 人で共有しておきます*1。用意した整数を d_1, d_2, \dots, d_{30} とします。 $a_j \oplus b_k = c_i$ (\oplus はビットごとの排他的論理和を表します) であれば $a_j \oplus b_k \oplus c_i = 0$ なので、各ビットについて 1 の個数は偶数個です。したがって x と y の論理積を xy 、 x のビット数を $f(x)$ と表すことにすると、 $f(a_j d_1) + f(b_k d_1) + f(c_i d_1)$ は偶数です。

一方で、 $a_j \oplus b_k \neq c_i$ のとき、 $a_j \oplus b_k \oplus c_i \neq 0$ なので $a_j \oplus b_k \oplus c_i$ について 1 が立っているビットがあります。 d_1 においてそのビットが 1 であるか 0 であるかによって $f(a_j d_1) + f(b_k d_1) + f(c_i d_1)$ の値が反転するため、 $f(a_j d_1) + f(b_k d_1) + f(c_i d_1)$ の値は確率 0.5 で 1 になり、確率 0.5 で 0 になります。

以上より、 $x_1 = f(a_j d_1), y_1 = f(b_k d_1), z_1 = f(c_i d_1)$ と表すことにすると、次が成り立ちます。

- $x_1 \oplus y_1 = z_1$ が奇数なら $a_j \oplus b_k \neq c_i$ である。
- $x_1 \oplus y_1 = z_1$ が偶数なら確率 0.5 で $a_j \oplus b_k = c_i$ 、確率 0.5 で $a_j \oplus b_k \neq c_i$ である。

そこで、 d_2, \dots, d_{30} を使った場合も同様にして x_2, \dots, x_{30} を求め、 a_j に対応する 30 ビットのメモ X_j を $X_j = x_1 x_2 \dots x_{30}$ とします。これを並べて 3000 ビットのメモ $X = X_1 X_2 \dots X_{100}$ を作ります。メモ $Y = Y_1 Y_2 \dots Y_{100}$ も同様に作ります。チャーリーも (無駄に情報量を減らすことになりますが) 同様にメモ $Z = Z_1 Z_2 \dots Z_{100}$ を作ります。 $X_j \oplus Y_k = Z_i$ であれば確率 $1 - 0.5^{30} \simeq 1 - 10^{-9}$ で $a_j \oplus b_k = c_i$ が成り立つので j, k を出力します。

このアルゴリズムによって 100 個中 95 個以上の質問に正答することは容易にできます。どの程度の確率が計算すると、まず 1 つの j, k の組について約 $1 - 5 \times 10^{-8}$ の確率で正しく判定できます。100 × 100 通りの組み合わせ全てを正しく判定できる確率は、約 $1 - 5 \times 10^{-4}$ です。

*1 実装では、疑似乱数のシード値を固定すれば良いです。