

# KUPC2020 I: Coloring Paths

原案, 作成: yamunaku

## 1 方針

グラフが連結で、どの辺についてもその辺の迂回パスが存在することと、グラフ全体が 2 重連結であることは同値です。

頂点を 1 つ選んで根として、DFS 木を作ります。このとき、木に含まれない辺（後退辺と呼びます）が結ぶ 2 頂点は、先祖と子孫の関係にあります。

DFS 木の各辺を、次の条件 (☆) が満たされるように塗りたいです。

(☆) 木のどの葉についても、葉と根を結ぶパスは 7 種類以下の色で塗られている。

この条件を満たす塗り方ができれば、次のようにして、8 種類以下の色で塗られた迂回パスを各辺  $i$  について構築することができます。

- 辺  $i$  が後退辺であるとき、辺  $i$  が結ぶ 2 頂点を端点とするような DFS 木上のパスが、求めるものである。
- 辺  $i$  が後退辺でないとき、辺  $i$  が結ぶ 2 頂点を  $u, v$  とする。ただし  $u$  は  $v$  の親であるとする。 $u$  の先祖であるような頂点  $s$  と、 $v$  の子孫であるような頂点  $t$  で、 $s$  と  $t$  が後退辺で結ばれているようなものが存在する（グラフ全体が 2 重連結であるから）。 $u$  と  $s$  を端点とする DFS 木上のパスと、 $s$  と  $t$  を結ぶ後退辺、 $t$  と  $v$  を端点とする DFS 木上のパスを順につなげたものが、求めるものである。

## 2 色の塗り方

次のようにして DFS 木の各辺を塗ります。

- 根から DFS をする。
- DFS で現在訪れている頂点を  $v$  とする。 $v$  と  $v$  の子を結ぶ辺に色を塗りたい。
- まず、根と  $v$  を端点とするパスに使われている色で、 $v$  と  $v$  の親を結ぶ辺に使われていないものを列挙する。これらを色  $C_1, C_2, \dots, C_k$  とする。
- $v$  の子を、部分木の大きさの降順にソートする。
- 部分木の大きい最大  $k$  個の子への辺を、色  $C_1, C_2, \dots, C_k$  で塗る。
- それ以外の子への辺は、今まで使ったどの色とも異なる新しい色で塗る。

この塗り方は (☆) を満たすことが、次のように示されます。

根から葉に降りていくことを考える。今いる頂点を  $v$  として、根から  $v$  へのパスに使われている色の集合を  $T$  とする。 $|T| > 0$  であり、かつ次に向かう子  $w$  への辺の色が  $T$  に含まれていないとき、

$$(v \text{ を根とする部分木の大きさ}) \geq |T| \times (w \text{ を根とする部分木の大きさ}) + 1$$

が成立する。もし、根と葉を結ぶパスが 8 種類以上で塗られているならば、

$$N \geq 7! + 6! + \dots + 1! = 5913$$

だが、この問題での  $N$  は、 $N \leq 5555$  を満たす。したがって、根と葉を結ぶパスは 7 種類以下の色で塗られている。

以上より、条件を満たす色の塗り方と、各辺の迂回パスを 1 つ求めることができました。