

KUPC2020 spring M: 文字列集合

原案: asi1024 作成: yamunaku

$N = 1$ のとき

$\{ "0" \}$ が条件を満たす中で要素数が最大となるものの 1 つである。

$N = 2$ のとき

$\{ "0", "11" \}$ が条件を満たす中で要素数が最大となるものの 1 つである。

$N \geq 3$ のとき

要素数の上界

$N - 1$ が S の要素数の上界であることが示せる。

S が長さ 1 の文字列を含むとき

S が含む長さ 1 の文字列を $"0"$ としても一般性を失わない。このとき、 $"0"$ 以外の S の要素は、文字 1 のみで構成された文字列でなければならない。 S はこのような文字列を 2 つ以上含むことができないから、 $|S| \leq 2$ が成立する。

S が長さ 1 の文字列を含まないとき

S に含まれるすべての文字列の長さは 2 以上 N 以下で、長さはそれぞれ異ならなければならないから、 $|S| \leq N - 1$ が成立する。

上界を達成する構成

要素数が $N - 1$ となるような、条件を満たす文字列集合を構成することができる。

$$S^* = \{ "00", "010", "0110", "01110", \dots, "01\dots10" \}$$

を考える。つまり S^* は、0 と、 k 個 ($0 \leq k \leq N - 2$) の 1 と、0 をこの順に連結したような文字列だけを含む。 S^* の要素数は $N - 1$ である。

S^* は条件を満たすことが示せる。 S^* のどの要素においても、文字 0 は先頭および末尾の 1 文字にしか現れないから、どの 2 つの要素についても、一方がもう一方の部分文字列となることはない。

以上より、 S^* が条件を満たす中で要素数が最大となるものの 1 つである。