J:タイル置き

- Writer:広瀬　Tester:花田

問題概要

- 縦H×横Wサイズの盤面に１×２のタイルをN個設置する方法は何通りあるか？
- タイルは互いに重なってはいけない。
- １≦N≦５
- １≦H,W≦１０００００００００

おおざっぱな解法まとめ

- 答えをf(W,H)とすると、W>=N,H>=Nのときf(W,H)は多項式で表される。（包除原理より）
- よってf(W,H)を全てのW,H≦２*Nについて計算すればf(W,H)は定まる。
- W,H≦１０の場合はBit DPで計算できる。
- おそらく、これだけだと通じないので、次ページからもう少し丁寧に解説。

解法

- それぞれのタイルを区別して数えることを考える。
- 最後に答えをN!で割ればいい。
- いきなり一般の解法を説明する前に、Nが小さい場合を考えてみる。

N=1の場合

- 横向きに置く場合と縦向きに置く場合がある。
- 横向きに置く方法は何通りあるか？
- W,H=0の場合も考える（説明の都合）
- MAX(W−1,0)*H通り
- 同様に縦向きはW*MAX(H-1,0)通り
- 場合の数はW=0,もしくはH=0の場合を例外として、多項式H,Wの多項式になっている。

N=2の場合

- タイルをそれぞれタイル１、タイル２とする。
- C(W,H)=#{タイル１とタイル２を重なってもいいから設置する方法の数}
- D(W,H)=#{タイル１とタイル２を重なるように設置する方法の数}
- C(W,H)-D(W,H)が求めたい方法の数。
- C(W,H)もD(W,H)も簡単に求まる。

Nが一般の場合

- 配置するタイルを$V=\{t_1,\ldots,t_N\}$とする。
- 重なりを許してタイルを設置することを考える
- タイルの配置Aに対し$Col(A)\subset V\times V$を次で定める。
  - $Col(A)=\{(t_1,t_2) \mid$ タイルt_1とタイルt_2は重なっている$\}$
- $E\subset V\times V$に対して、$S(E)=\#\{A \mid E=Col(A)\}$と置く。
- $S(\emptyset)$を求めたい。

Nが一般の場合

- 包除原理を用いる。
- S’(E)=#{A | E⊂Col(A)}と置く。
- S(∅)の計算はS’(E)の計算に帰着される。
- 各Eに対し、S(E)は各W,Hに対しO(1)で求まる式となる。
- 具体的にはMAX(W-X+1,0)*MAX(H-Y+1,0), (1≦X,Y≦N+1)の高々 n 次の多項式となる。

Nが一般の場合

- これで解けた？
- この方針をそのまま実装するのは困難。
- 実装は重そう。
- 実行時間が足りるのかどうかも不明。
- これまでの考察は無駄だった？
- そんな事はない。
- この解法から、ある重要な事実が従う。

Nが一般の場合

- f(H,W)を求める場合の数とする。
- f(H,W)はH≧Nのとき、Hに関してN次の多項式
- f(H,W)はW≧Nのとき、Wに関してN次の多項式
- N次多項式はN+1箇所での値により一意に定まる。

- １≦H,W≦２Nとなる全てのH,Wに対してf(H,W)を求めてやれば他は全て決定される！！！

実装方法

- 多項式関数の補完方法は何通りかあるが、そのうち一つを紹介。
- N次多項式fがf(a_i)=b_i (i=1,… N+1)を満たす時f(x)は次の式で与えられる

$$f(x)=\sum_{i=1}^{N+1} b_i \prod_{j=1, j\neq i}^{N+1} \frac{(x-a_j)}{a_i-a_j}$$

実装方法２

- あとはW,H≦2Nに対して、f(W,H)を求めればいい！
- N≦５なので、W,H≦１０に対して、f(W,H)を求める
- これはBit dpで計算できる。
- 左上から順に一列ずつ置いていく。
- dp[x座標][y座標][残りブロック数][ブロック配置]
- 計算量は10*10*5*(1<<10)=512000.
- ローカルで計算してソースコードに埋め込んでもいい。

出題動機とか

- 「答えの関数が、ある性質（今回は多項式）を満たすから小さい値だけ求めれば関数が一意に定まる」的なテクニックが好き。
- 実装をうまくサボるのに使える場合もある。
- しかし、コンテストでの出題例はあんまり見ない。
- 少しでも流行って欲しかったので出題した。

結果

- First　AC
  - kyulidenamida（３２分）
- AC/Submit
  - １/４４