問題H : あばれうなぎ

Writer : 楠本, 吉田

Tester : 平澤

問題概要 1/2

- 比熱の異なる鉄のプレートが$2T+1$枚並んでいる．
- 合計でEのエネルギーを使ってプレートにエネルギーを与え，加熱する．
- うなぎがプレート全体の真ん中に置かれる．うなぎはTターン次の行動をする
  - うなぎは今自分がいるプレートの熱だけ加熱され，その後1マスだけとなりのプレートに移動するか同じマスに居続ける．

問題概要 2/2

- うなぎが自分に加わる熱を最小化するように動くとき，うなぎに加わる熱を最大にするようにプレートに熱を加えよ．
- $T \leq 10^5$

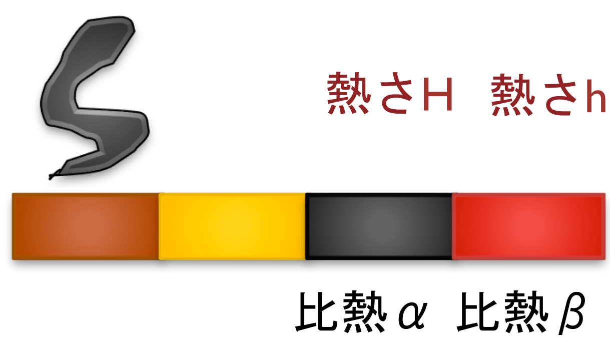
簡単な観察

- うなぎにとって一度行ったプレートにまた戻るのは利点がない.
- また，動かない行動を取った後に左右に動く行動を取るのも利点がない.
- よってうなぎは最初に左右どちらに動くかを決めて動き，特定のマスに止まったらあとはそこでじっとしているという行動を取る.

解法 1/5

- とりあえず右側だけを考えることにする.
- i番のプレートの比熱をC(i), i番のプレートに加える熱をheat(i)とする.

- 端2つのプレート(T-1,T番目のプレート)に使うエネルギーの和が一定のとき，どうすれば解を最良にできるか考える.
- これは，　α := C(T-1), β := C(T), H := heat(T-1), h := heat(T) としたとき，　$\alpha H + \beta h$ = e(ある固定された値) で，Min(2H, h +H) を最大化することに相当する.　(T-1番目にstayする or T番目までいく，の2通り)



解法 2/5

- これは1変数の最大化問題になるので解くことが出来る.
  - $\alpha < \beta$ のとき，H=e/α, h=0 (つまりT番目のプレートを全く熱さない) が最良.
  - $\alpha > \beta$ のとき，H=h とするのが最良.

- つまり，$\alpha < \beta$ ならば 後ろのプレートには全く熱を加えず，　$\alpha > \beta$ ならば 比H:hが1:1になるような熱を加えるのが良い.

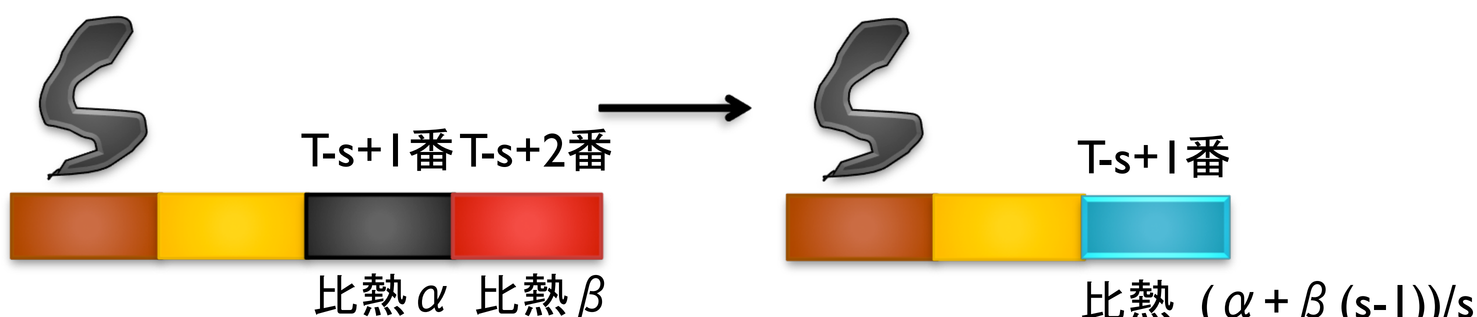
- 前者の場合は単に後ろのプレートを捨てれば良い.　後者のときは2枚のプレートをマージして1枚のプレートであるかのように見なせる(後述).

解法 3/5

- より一般的に考える.
- T-s+1, T-s+2番目のプレートを考える. heat(T-s+3) =...=heat(T)=0とする.
- α := C(T-s+1), β := C(T-s+2), H := heat(T-s+1), h := heat(T-s+2) としたとき, αH+βh = e(ある固定された値) で, Min(sH, h+H) を最大化することに相当する. (T-1番目にsターンstayする or T番目までいく, の2通り)
- 解析によって, $\alpha < \beta$ ならh=0が最良で, $\alpha > \beta$ なら h/H = s-1 が最良 となる.

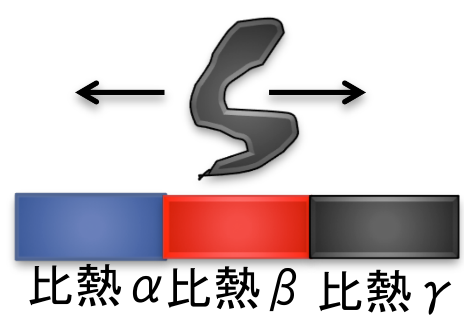
解法 4/5

- $\alpha < \beta$ のときは単に後ろのプレートを無視すればいい.
- $\alpha > \beta$ のときを考える
  - eのエネルギーがあるとき, $\alpha H + \beta h = \alpha H + \beta (s-1)H = e$ なので $H = e/(\alpha + \beta (s-1))$ である.
  - したがってT-s+1番目のプレートを訪れるとしたときのダメージは $sH = se/(\alpha + \beta (s-1))$ である.
  - eのエネルギーでダメージが $se/(\alpha + \beta (s-1))$ なので, プレートの合成比熱として $(\alpha + \beta (s-1))/s$ を使うことが出来る.



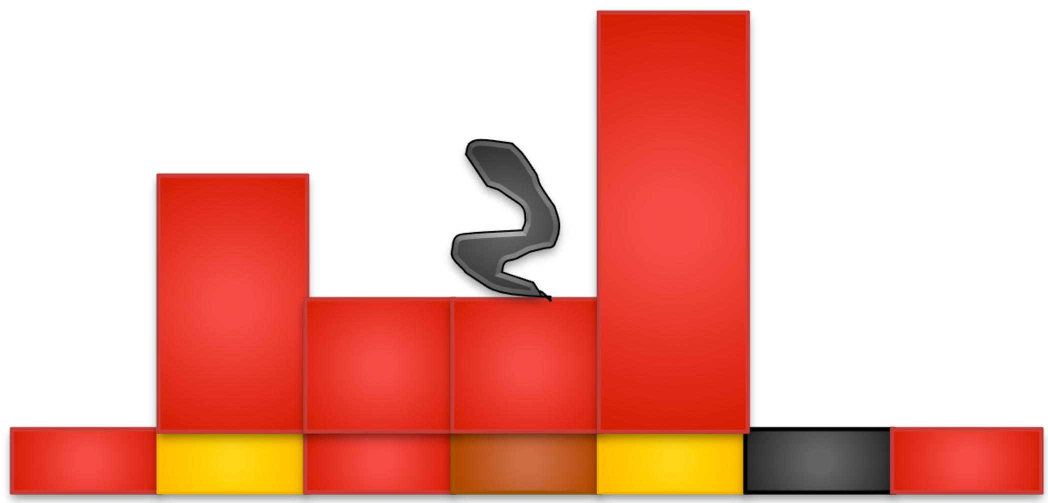
解法 5/5

- マージ or 捨てる を繰り返すことでプレートは最終的に3枚になる.
- -1,0,1番目のプレートの比熱をα, β, γ, 熱さをh_1,h_2,h_3とする.
- $h_1=h_3$であるのがよい.
- 問題は結局 maximize $\mathrm{Min}\{Th_2, h_2+h_1\}$
  s.t. $(\alpha+\gamma)h_1 + \beta h_2 = E$ となる.
- 結局1変数の最大化問題に帰結されるので解くことができる.



解の構造

- ところでプレートのマージによって最適値を求めたが，これはもとに戻すと下のように熱が“凹”の形になるように加えるのが最適であることがわかる.
  - 壁を作り，中に居続けることで受ける熱と中から脱出するのにかかる熱が等しくなるようにする.



- 細かい解析をせずに最適解の構造を上のようなものであると類推して解法を考えるのもよい.

統計

- First Accepted: hos.lyric (107:00)
- 正解者: 6人
- 挑戦者: 8人
- 投稿数: 24
- 正答率: 25%