KUPC2018 - L

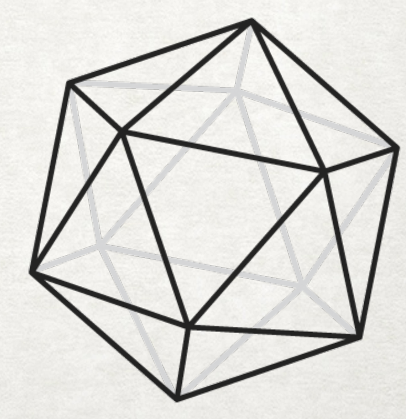
凸包が映し出される平面

原案: asi1024

解説: drafear

問題概要

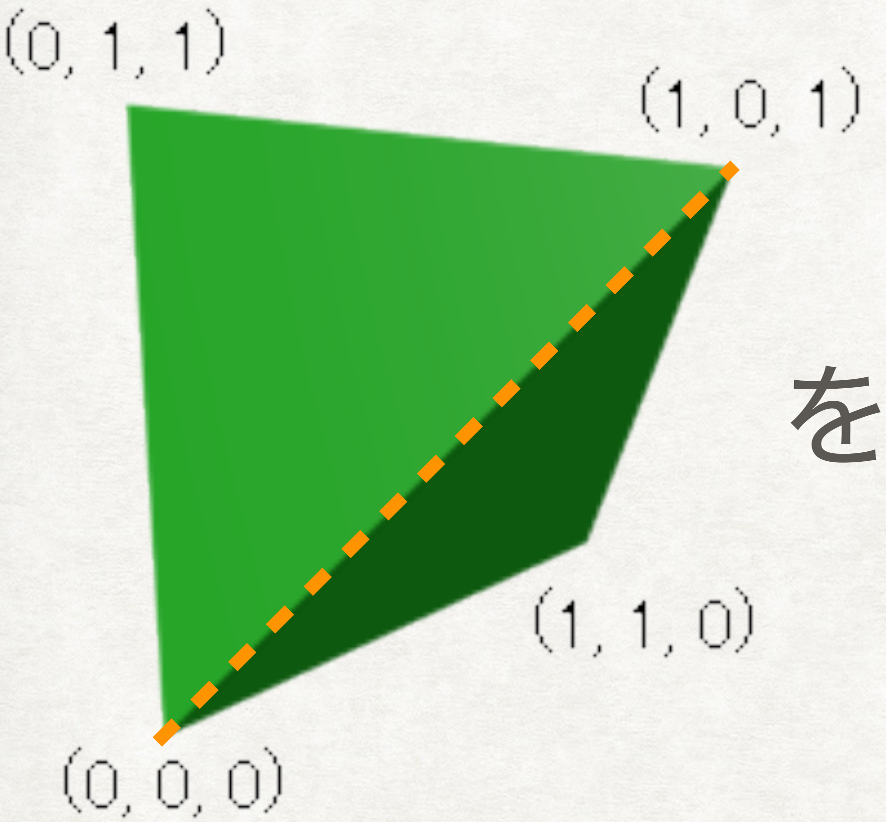
- 3次元上のN点が与えられる
- 原点を通る平面Fを選ぶ
- 各点からFへの垂線の足たちが作る
  凸包の面積を最大化したい
- (また、そのような平面は何通りあるか)



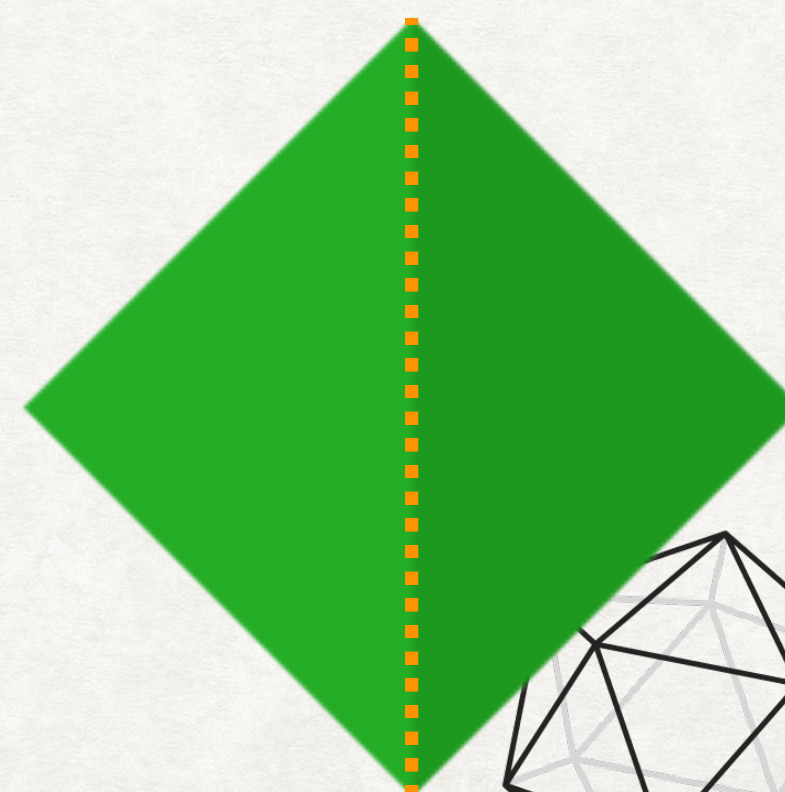
考察

- N点からなる3次元凸包を作ってみる
- すると、F上にできる凸包は…
    - Fの法線方向から見たときの2次元図形になる

例 (入力例2)



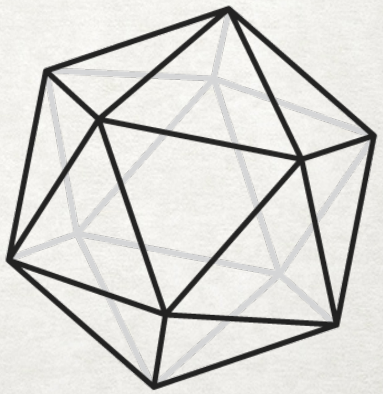
をこの方向から見たとき↓が最大



考察

- すなわち面積は…
  - 3次元凸包の各面F_iについて
    面積と同じ長さかつ外向きの法線ベクトルを
    n_iとする
  - 選んだ平面Fの単位法線ベクトルをvとする
  - vの方向に見て
    表に見える面: $f_i = -1$
    裏に見える面: $f_i = 1$
  - このとき

$$S = \frac{1}{2}\sum_i \boldsymbol{v} \cdot (f_i \boldsymbol{n}_i)$$



考察

$$S = \frac{1}{2}\sum_i \boldsymbol{v}\cdot(f_i\boldsymbol{n}_i) = \frac{1}{2}\ \boldsymbol{v}\cdot(\sum_i f_i\boldsymbol{n}_i)$$

なので逆にf_iを決めればSを最大にする単位ベクトルvは

$\sum_i f_i\boldsymbol{v}_i$ と同じ方向 ($\cos\theta$ =1)

$$S = \frac{1}{2}\ |\boldsymbol{v}||\sum_i f_i\boldsymbol{n}_i|\cos\theta = \frac{1}{2}|\sum_i f_i\boldsymbol{n}_i|$$

想定解

1. 3次元凸包Pを求める (N≦60なので雑でOK)

2. あり得るf_iの組を求める

3. 各f_iの組に対して最適なvをとれば面積Sは

$$S = \frac{1}{2}\left|\sum_i f_i \boldsymbol{n}_i\right|$$

あり得る f_i の組を求める

- 前提:
  あり得ない f_i の組を選んでも
  Sが答えより真に小さくなるので問題ない

- TLE解:
  f_i を全探索する → $O(2^k)$ (kは面の数)

ありうる f_i の組を求める

- 面F_iと面F_jの表裏だけが切り替わる境界を考える
  - $v' = F_i \times F_j$ (外積) から見た方向が境界
  - v' から見たときの他の面の裏表をそのままに面F_i, F_jの裏表を全探索する:

    (表, 表) (裏, 表)

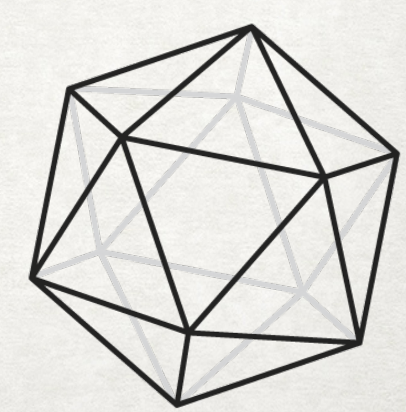
    (表, 裏) (裏, 裏)

    → $v' = F_{i'} \times F_{j'}$ と境界が同じになる (i', j') が複数(m個)あった場合 2^m 通り試す必要あり

    → TLE

満点解法

- 面F_iと面F_jの表裏だけが切り替わる境界を考える
  - $v' = F_i \times F_j$ (外積) から見た方向が境界
  - $v' = F_{i'} \times F_{j'}$ と境界が同じになる (i', j') が
    が複数(m個)あった場合
  - m個の各面の法線はv'に垂直
  - 法線をv'からの角度順にソートすると
    表になる部分は区間になるので
    $O(m^2)$ 通り試せばOK



想定解 $O(N^3)$

1. 3次元凸包Pを求める ($O(N^4)$かけてもよい)

2. あり得るf_iの組を列挙する

   (a) $v' = F_i \times F_j$ を列挙する

   (b) 同じv'になる面 $F_{i_1}, ..., F_{i_m}$ を法線について
   v'からの角度順ソートにすると
   表になる面は区間になる
   (関係のない面のf_iはv'から見たときのまま)

3. 各f_iの組に対して最適なvをとれば面積Sは

$$S = \frac{1}{2} \left| \sum_i f_i \boldsymbol{n}_i \right|$$ となるので解を更新する

計算量に関する注意

- 3次元凸包の面数Mはオイラーの多面体定理よりO(N)
  - N≦60 のとき M≦116

誤差に関する注意

- 最後の出力の手前まで整数で処理できる