

問題H N and K

Writer: 今西

Tester: 今西、田村

問題

求められる数列の条件

1. どの要素も N 以下の正整数である
2. 狭義単調増加数列である
3. どの要素も他の一方の倍数にならない

このような数列として長さが最大となるものを考える

K 番目の要素の値の最小値は？

数列の長さの最大が K 未満のときは -1 を出力

補題

数列の長さの最大値 L は、 $(N+1)/2$ である

証明

非負整数 k について、以下のような集合 E_k を考える

$$E_k = \{x : x = (2k+1) \times 2^m, x \leq N, m \text{ は非負整数}\}$$

集合 E_k が空でないとき、 $2k+1 \leq N$ である

同じ集合の要素同士は一方が他方の倍数である

したがって、数列の最大の長さは $[(N+1)/2]$ である

また $\{[N/2]+1, \dots, N\}$ は長さ $[(N+1)/2]$ で条件を満たす数列

50点解法 その1

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
16														
8	24													
4	12	20	28											
2	6	10	14	18	22	26	30							
1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29

例えば $N=30$ のときは、
同じ集合の要素を縦に並べ、上のような表を作り、
各列から数列の要素とするものを1つずつ選んでいく

50点解法 その1

非負整数 a, b, c, d, e について、 $e < b$ であるとき、
 $(2a+1) \times 2^b$ が $(2c+1) \times 2^d$ の倍数でないならば、
 $(2a+1) \times 2^e$ は $(2c+1) \times 2^d$ の倍数でない

右から順に、選べる最も小さい値をGreedyに選べばよい

(右から順に現段階で可能な最小のものを選ぶことで、
今後選べる可能性のあるものが選べなくなることはない)

50点解法 その1

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
16														
8	24													
4	12	20	28											
2	6	10	14	18	22	26	30							
1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29

結果的に、全ての $1 \leq k \leq L$ について、 k 番目に小さい値が
求めるべき数列の k 番目の値として最小値となるような
集合が得られる $\cdots O(N^2)$

50点解法 その2

あらかじめNが50以下の場合について答えを手で計算しておいて、ソースコードに埋め込む ... $O(1)$

実際、この方法で部分点をとった人は多い

750点解法

求める数列の k 番目の要素の値で二分探索

問題の条件を満たす数列のうち、調べている値以下の要素の個数の最大値を求めることができればよい

750点解法

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
16														
8	24													
4	12	20	28											
2	6	10	14	18	22	26	30							
1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29

いかなる正整数 m についても、
 $2m$ は m と同じ行には存在せず、
 $3m \leq N$ であるなら、 $3m$ は m と同じ行に存在する

750点解法

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
16														
8	24													
4	12	20	28											
2	6	10	14	18	22	26	30							
1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29

下から順に、1行ずつ二分探索している値以下の数を
それぞれ $O(1)$ で求めることができる $\cdots O(\log N)$

これで二分探索するので $O(\log^2 N)$

余談

実は $O(\log N)$ でも求められる

$2^3 < 3^2$ であることを利用して、調べる行を絞る

定数倍が大きい

実行速度は $O(\log^2 N)$ の3倍程度しかない

ジャツジ解

- 今西
 - 21行 (548B)
- 田村
 - 75行 (1693B)

結果

- Accepted
 - kyulidenamida (75:08)
 - Komaki (147:21)
 - uwi (257:46)
- AC / Submit
 - 3 / 90 (3.3%)
- AC / Trying
 - 3 / 34 (8.8%)