KUPC 2015
コインゲーム
解法・解説

Writer: natsugiri

Tester: ichyo

問題

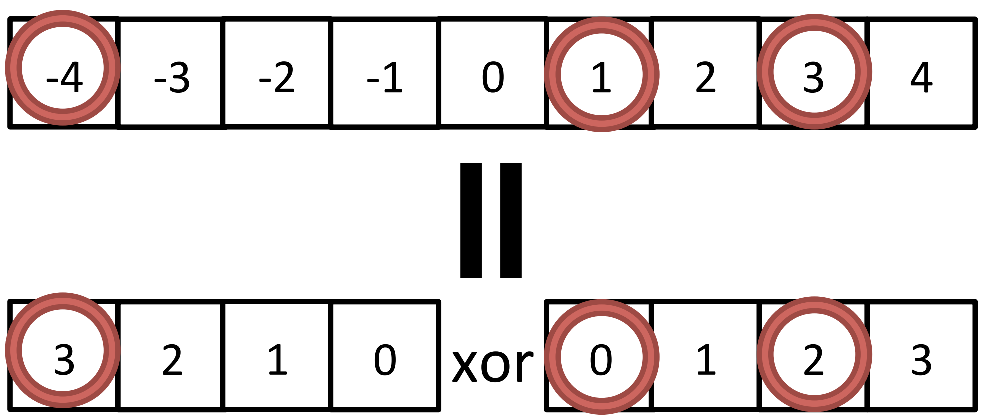
- -2000から2000の整数が一つづつセルに書かれている
- N個のコインがそれぞれ異なるセルに置かれている
- 2人ゲーム
  - 自分のターンにコインを一つ選んで，0に近づく，0を超えない，他のコインが無いセルに動かす
  - 0に置いたら負け

考察

- 「0に置いたら負け」=「0に置けない，動かせなくなったら負け」
- 0で左右の小ゲームに分断
- 左右それぞれのGrundy数を求めて2進和(xor)が0ならBenの勝ち

小ゲーム

- 左右に分断 (2つの小ゲーム)
- 1ずらす
- 以降全て1ずらした小ゲーム片方だけを考える
- N枚のコインの位置がD = (a1, ..., an)のGrundy数をF(D)と書く



部分点 (N <= 2)

- N = 1
  - 山1つのNimと同値
  - F(x) = x
- N=2
  - Grundy数F(x, y)のメモ化再帰はおそらくTLEする
  - 探索範囲2000x2000なのでローカルでは可能
  - F(x, y) = 0になるx, yは(2k, 2k+1)の場合のみであることが分かる

満点解法

- このゲームは
  - マヤ･ゲーム
  - 佐藤のゲーム
  - Welter’s game
  - などと呼ばれている

マヤ·ゲームの性質

- 0がある場合，長さnのゲームをn-1のゲームに帰着可能

$$F(0, a_2, \cdots, a_n) = F(a_2 - 1, \cdots, a_n - 1)$$

- 全てのコインに任意のkを2進和

$$\begin{aligned} F(a_1, \cdots, a_n) &= F(a_1 \oplus k, \cdots, a_n \oplus k) && \text{if } n \text{ is even} \\ F(a_1, \cdots, a_n) &= F(a_1 \oplus k, \cdots, a_n \oplus k) \oplus k && \text{if } n \text{ is odd} \end{aligned}$$

満点解法

- 0を作る，長さを1短くする，0を作る,... を繰り返すことでGrundy数を求めることができる

もう少し詳しく

- マヤ・ノルム
  - $M(x,y) = (x \oplus y - 1) \oplus x \oplus y$
  - 2進数x,yの初めて異なる桁をkとしてk桁以降全て1

- 結論だけ言うとGrundy数F(D)は

$$F(a_1, \cdots, a_n) = \bigoplus_i a_i \oplus \bigoplus_{i<j} M(a_i, a_j)$$

- 元ネタ
  - On Numbers and Games

統計

- TODO