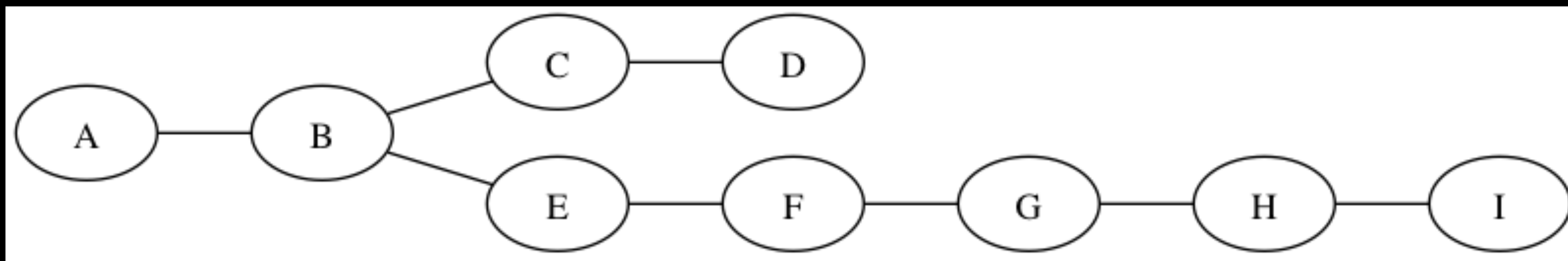
K:encode/decode

Writer:広瀬 Tester:花田

問題



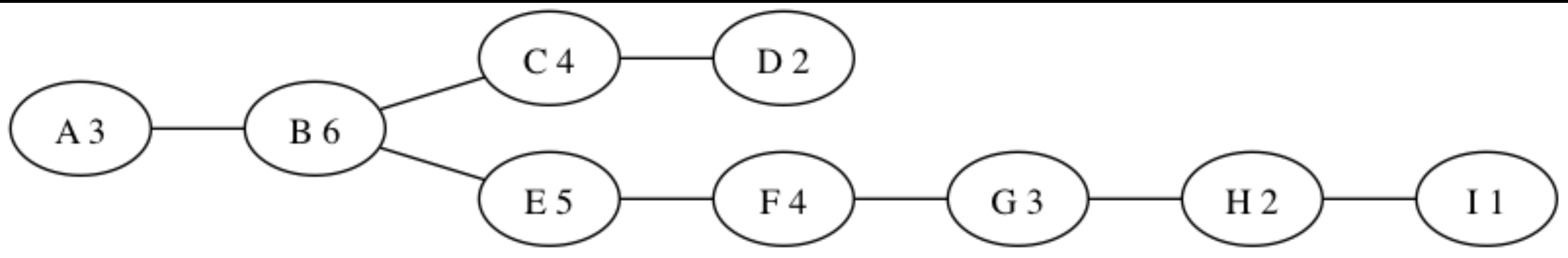
- 上の図のグラフをGとする
- 長さNの01列をG上のパスへencodeする
- パスの長さの上限はN+10
- encodeされたG上のパスを、元の01列へdecodeする関数も実装する。
- N≦300000

予備的考察

- そもそも、G上の長さNのパスは、何個ぐらいある？
- 一般に有限グラフGに対し、G上の長さNのパスはO(α^N)個ぐらいあることが分かっている。（αはGの隣接行列の最大固有値）
- 今回のグラフはα＝２
- 定数倍という意味では全く余裕が無い。
- パスの長さをN+10まで許しているので、定数差という意味では結構余裕がある。

解法

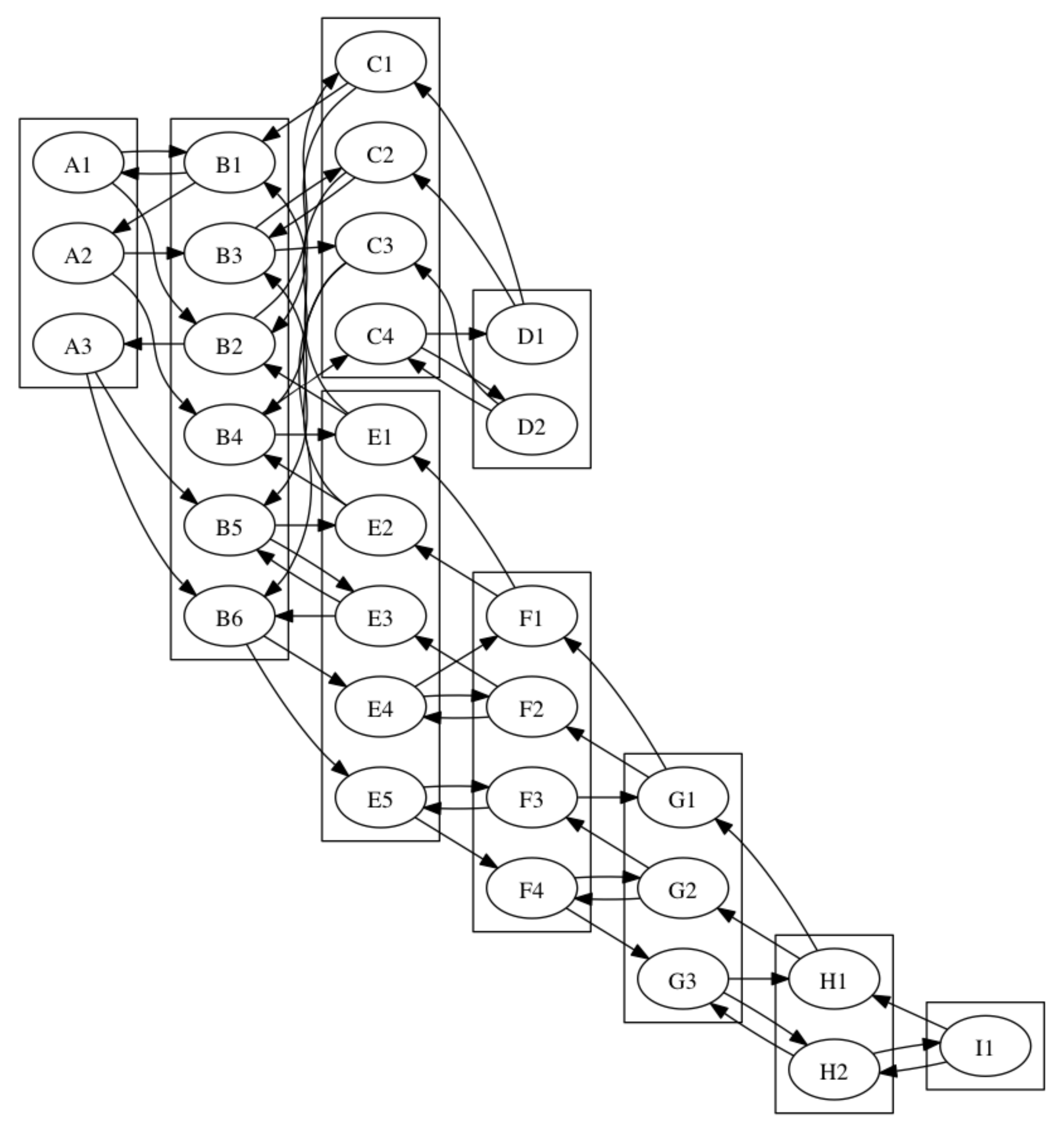
- Gの各頂点vに自然数e(v)を以下を満たすように割り当てる
- 2*e(v)=(vと隣接する全ての頂点v’に渡るe(v’)の和)
- 線形代数の言葉を使うなら、Gの隣接行列の固有値2の固有ベクトル
- 具体的には下図のようになる。



解法

- Gの頂点集合をV(G),辺集合をE(G)と書く
- $v \in V(G)$に対し、$L(v)=\{(v,n) \mid 1 \leqq n \leqq e(v)\}$ とおく。
- $\#L(v) * 2 = \#\{x \in L(v') \mid v$はv'と隣接$\}$となる。
- 全単射 $F:L(v)\times\{0,1\}\rightarrow\{x \in L(v') \mid v$はv'と隣接$\}$を何でもいいので適当に決める。
- 有向グラフG'を次のように定める
- $V(G')=\{(v,n) \mid v \in V(G), 1 \leqq n \leqq e(v)\}$
- $E(G')=\{ (x,F(x,t)) \mid t \in \{0,1\} \}$.

グラフG’



C1
C2
C3
C4
A1
B1
A2
B3
A3
B2
D1
D2
B4
E1
B5
E2
B6
E3
F1
E4
F2
E5
F3
G1
F4
G2
G3
H1
H2
I1

有向グラフG'の特徴

- 有向グラフG'の特徴
  - G'の各頂点wに対し、wから出ていく辺の数は丁度２本
  - G'の各頂点w=(v,n)とvに隣接する頂点v'に対し、G'の頂点w'=(v',m)とw'から出てwに入る辺が丁度一つ存在する
- これらの性質を使うと求めるencoder, decoderが作れる！

Encoderの作り方1

- 01列S=S_1…S_Nが与えられたとする。
- G’の頂点w=(v,n)を適当に選ぶ。
- G’上のパスw_0,w_1,w_2,…,w_Nを以下で決める
  - w_0 = w
  - w_i=F(w_(i-1),S_t)
- w_i=(v_i,n_i)とする。
- Encode後の文字列T=encode(S)をT’_i=v_iで定める
- T’はG上のパスになっている

Encoderの作り方２

- T'だと、まだ情報が足りていない。
- 最終位置v_N=(v_N, n_N)のn_Nの情報が不足している。
- T'の先頭に、数文字加えてn_Nの情報を埋め込む。（方法は何でもいい）。これをTとする。
- encode(S)=Tとする。これが望みのencoderとなる。
- encodeは単射
- 計算量はO(N)

Decoderの作り方

- Encode後のG上の列Tが与えられたとする。
- Tの先頭部分の情報を使ってn_Nを求める。残った部分をT’=T_1…T_Nとする
- Encoderの作り方より、encode(S)=TとなるSがS_Nから順にS_0まで自動的に決まっていく。
- ポイントはw=(v,n)とvの隣接点v’に対しF((v’,m),t)=wとなるmとtが一意に決まる事。
- 計算量はO(N)

結果

- First AC
  - nhirokinet（２８２：４９）
- AC/Submit
  - １/７５