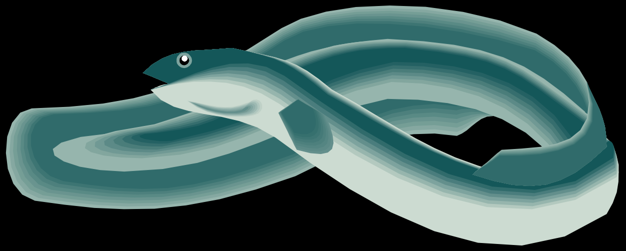
問題 J: 刺身

原案 : 楠本

解答 : 楠本, 花田

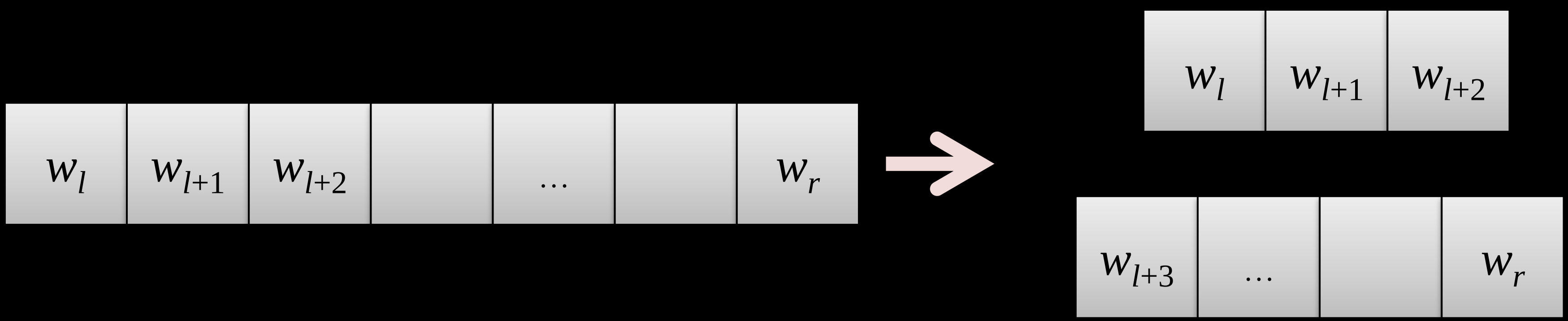
問題文 : 楠本

解説 : 楠本

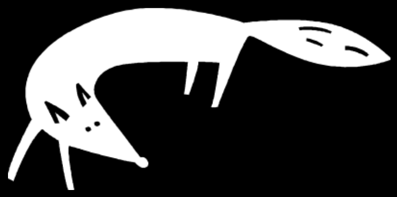


概要

- 1×N のセルがあり, i 番目のセルの重さは w_i である.
- セル [w_l w_{l+1} … w_r] をコスト $w_l + w_{l+1} + \dots + w_r$ で任意の位置で切断できる.



- 各セルを全部 1×1 のセルに分解したい.
- 最小コストを求めよ.
- $N \le 4{,}000$, $w_i \le 10^{12}$
- 部分点(3点) : $N \le 100$

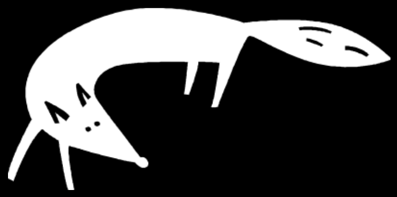


部分点解法

- dp[i, j] := セル i , i+1,…, j を分解する最小コストと置くと以下が成り立つ

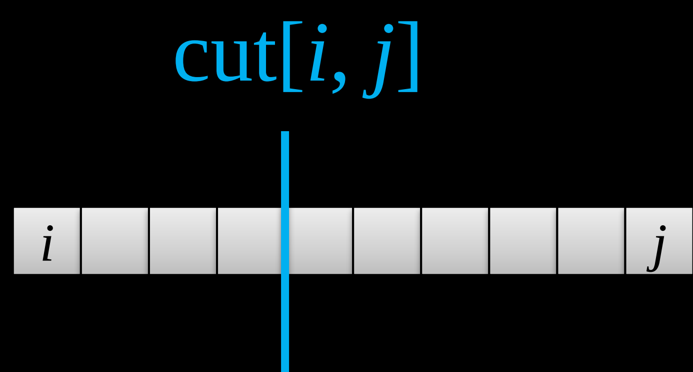
- dp[i, j] = w_i + … + w_j + min{ dp[i, k] + dp[k+1, j] | $i \le k < j$ }
- dp[i, i] = 0

- そのまま計算すると $O(N^3)$ のオーダー
- $N \le 100$ なら間に合う. これで 3 点



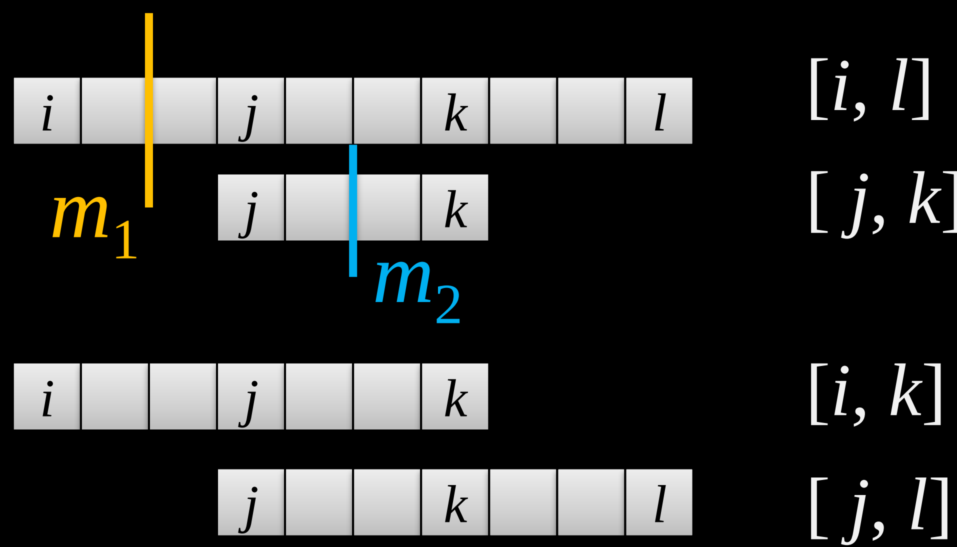
想定解法

- cut[i, j] := min { k | dp[i,k] + dp[k+1, j] = dp[i, j]} とおく.
- [i, j] を切ると良い位置



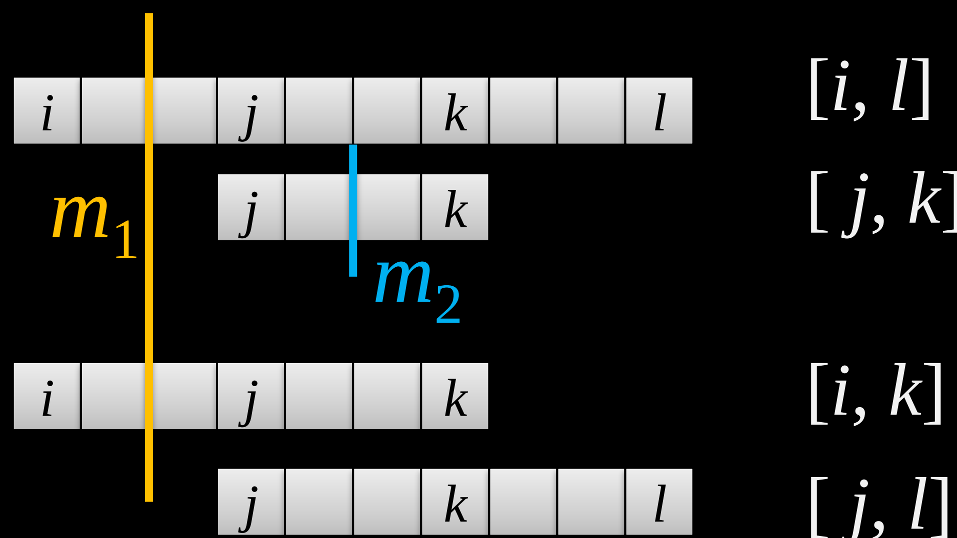
想定解法

- 補題． $i \le j \le k \le l$ に対して $\mathrm{dp}[i, l]+\mathrm{dp}[j, k] \ge \mathrm{dp}[i, k]+\mathrm{dp}[j, l]$
- 証明．
  - 帰納法による． $i = j = k = l$ のときは自明．
  - $l - i < s$ のとき成立すると仮定．
  - $\boldsymbol{m_1} = \mathrm{cut}[i, l]$, $\boldsymbol{m_2} = \mathrm{cut}[j, k]$ とおく．



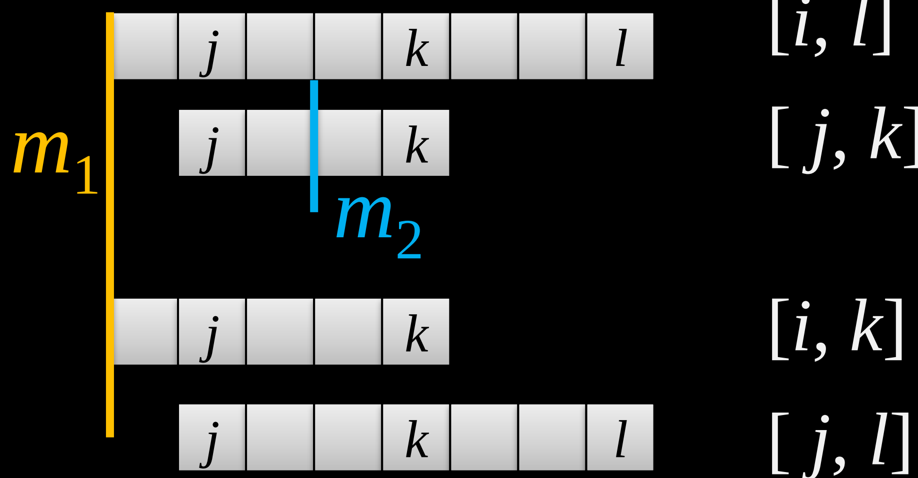
想定解法

- 補題. $i \leq j \leq k \leq l$ に対して $\mathrm{dp}[i, l]+\mathrm{dp}[j, k] \geq \mathrm{dp}[i, k]+\mathrm{dp}[j, l]$
- 証明.
  - $\boldsymbol{m_1}$ が $[j, k]$ からはみ出ているとき :
  - $[i, l]$ と $[i, k]$ を $\boldsymbol{m_1}$ で切断してみる



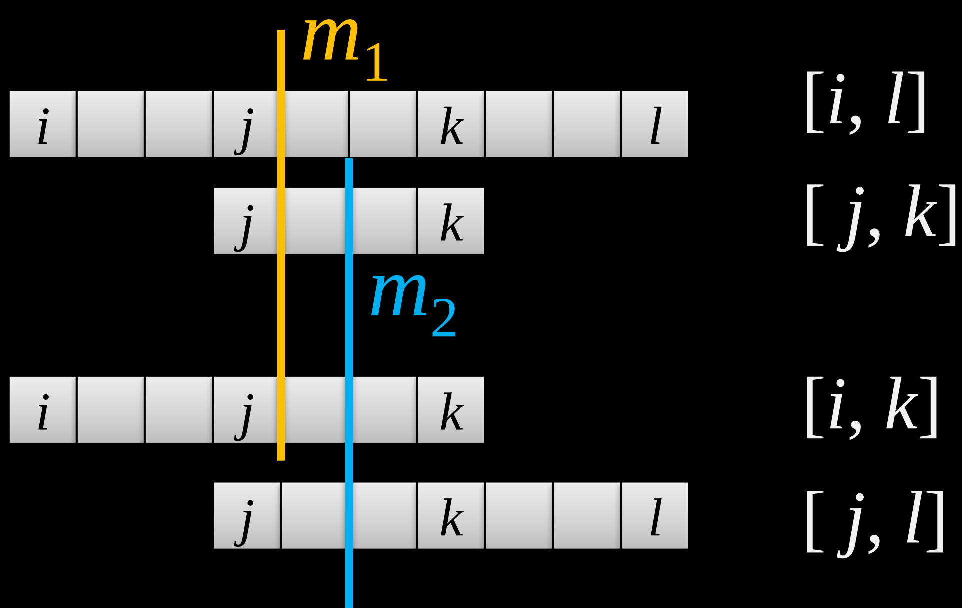
想定解法

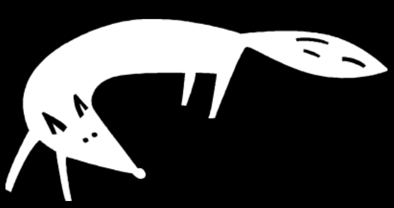
- 補題. $i \le j \le k \le l$ に対して $\mathrm{dp}[i, l] + \mathrm{dp}[j, k] \ge \mathrm{dp}[i, k] + \mathrm{dp}[j, l]$
- 証明.
  - すると帰納法の過程の状態に帰結される.
  - $\mathrm{dp}[i, l] + \mathrm{dp}[j, k]$
    $= \mathrm{dp}[i, \boldsymbol{m_1}] + \mathrm{dp}[\boldsymbol{m_1}+1, l] + \mathrm{dp}[j, k]$ ($\boldsymbol{m_1}$ は最適な切断)
    $\ge \mathrm{dp}[i, \boldsymbol{m_1}] + \mathrm{dp}[\boldsymbol{m_1}+1, k] + \mathrm{dp}[j, l]$ (帰納法の仮定)
    $\ge \mathrm{dp}[i, k] + \mathrm{dp}[j, l]$



想定解法

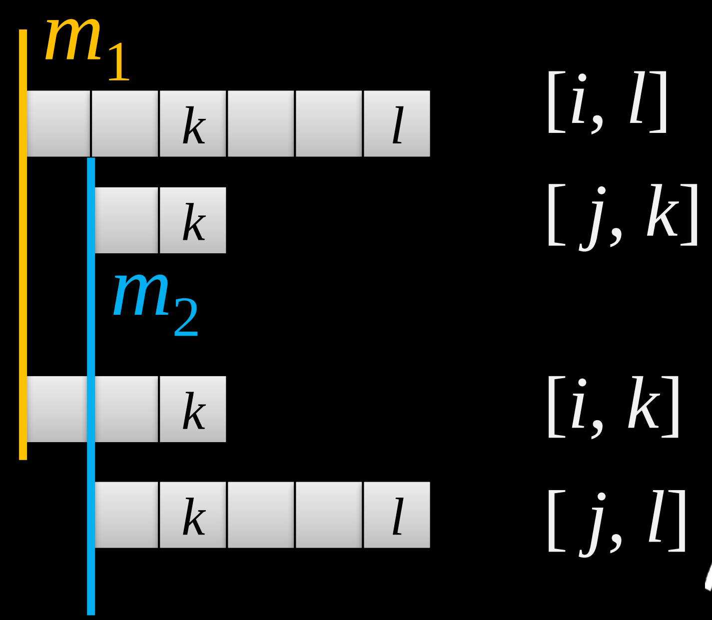
- 補題.　$i \le j \le k \le l$ に対して $\mathrm{dp}[i, l]+\mathrm{dp}[j, k] \ge \mathrm{dp}[i, k]+\mathrm{dp}[j, l]$
- 証明.
  - m1 が [j, k] 内に収まっているとき
  - [i, k], [j, l] を良い感じに切る





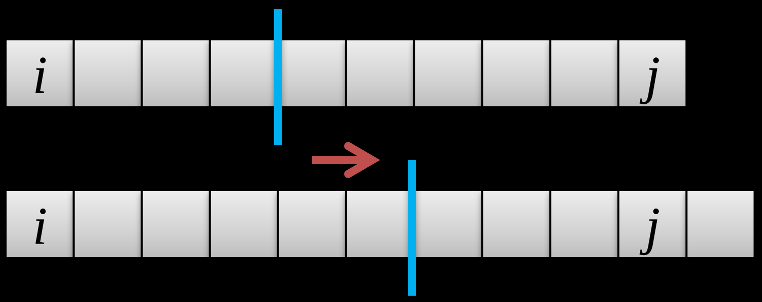
想定解法

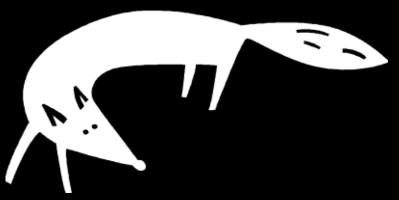
- 補題. $i \le j \le k \le l$ に対して $\mathrm{dp}[i, l]+\mathrm{dp}[j, k] \ge \mathrm{dp}[i, k]+\mathrm{dp}[j, l]$
- 証明.
  - m1 が $[j, k]$ 内に収まっているとき
  - $[i, k], [j, l]$ を良い感じに切る
  - 同じ議論が成立する. ■



想定解法

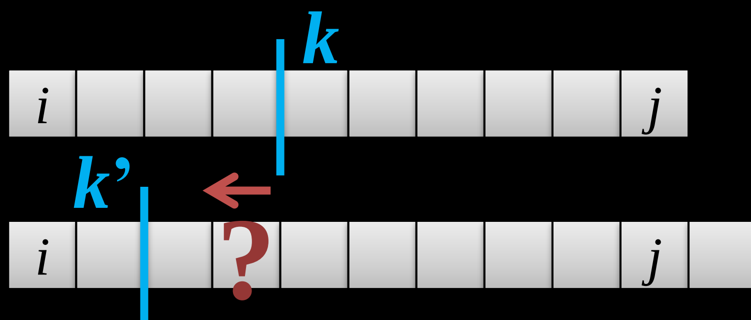
- 補題. $i \le j \le k \le l$ に対して dp[i, l]+dp[j, k] $\ge$ dp[i, k]+dp[j, l]
- 補題. cut[i, j] $\le$ cut[i, j+1]





想定解法

- 補題. $i \leq j \leq k \leq l$ に対して $\mathrm{dp}[i, l]+\mathrm{dp}[j, k] \geq \mathrm{dp}[i, k]+\mathrm{dp}[j, l]$
- 補題. $\mathrm{cut}[i, j] \leq \mathrm{cut}[i, j+1]$



- 証明.
  - 背理法. $k = \mathrm{cut}[i, j]$, $k' = \mathrm{cut}[i, j+1]$ として $k > k'$ を仮定.
  - $\mathrm{dp}[i, k']+\mathrm{dp}[k', k] < \mathrm{dp}[i, k]+\mathrm{dp}[k, j+1]$ (仮定)
  - $\mathrm{dp}[i, k']+\mathrm{dp}[k', j] \geq \mathrm{dp}[i, k]+\mathrm{dp}[k, j]$ (cutの定義)
  - $\therefore\ \mathrm{dp}[k', j+1]+\mathrm{dp}[k, j] < \mathrm{dp}[k', j]+\mathrm{dp}[k, j+1]$
  - さっきの補題に矛盾 !!!!!! ■

想定解法

- 補題. $i \leq j \leq k \leq l$ に対して $\mathrm{dp}[i, l]+\mathrm{dp}[j, k] \geq \mathrm{dp}[i, k]+\mathrm{dp}[j, l]$
- 補題. $\mathrm{cut}[i, j] \leq \mathrm{cut}[i, j+1]$
- 同様に $\mathrm{cut}[i, j] \leq \mathrm{cut}[i+1, j]$

- よって…

i ＼ j	0	1	2	3
0	cut[0, 0]	cut[0, 1]	cut[0, 2]	cut[0, 3]
1	×	cut[1, 1]	cut[1, 2]	cut[1, 3]
2	×	×	cut[2, 2]	cut[2, 3]
3	×	×	×	cut[3, 3]

想定解法

- 補題. $i \le j \le k \le l$ に対して $\mathrm{dp}[i, l]+\mathrm{dp}[j, k] \ge \mathrm{dp}[i, k]+\mathrm{dp}[j, l]$
- 補題. $\mathrm{cut}[i, j] \le \mathrm{cut}[i, j+1]$
- 同様に $\mathrm{cut}[i, j] \le \mathrm{cut}[i+1, j]$

- よって…

これは　この間の数

i ＼ j	0	1	2	3
0	cut[0, 0]	cut[0, 1]	cut[0, 2]	cut[0, 3]
1	×	cut[1, 1]	cut[1, 2]	cut[1, 3]
2	×	×	cut[2, 2]	cut[2, 3]
3	×	×	×	cut[3, 3]

想定解法

- 補題. $i \le j \le k \le l$ に対して $\mathrm{dp}[i, l]+\mathrm{dp}[j, k] \ge \mathrm{dp}[i, k]+\mathrm{dp}[j, l]$
- 補題. $\mathrm{cut}[i, j] \le \mathrm{cut}[i, j+1]$
- 同様に $\mathrm{cut}[i, j] \le \mathrm{cut}[i+1, j]$

- よって… 対角線状のセルの cut[*,*] の候補は $O(N)$ 個しか無い. → 対角線は全部で $O(N)$ 個 なので $O(N^2)$ で計算可.

i ＼ j	0	1	2	3
0	cut[0, 0]	cut[0, 1]	cut[0, 2]	cut[0, 3]
1	×	cut[1, 1]	cut[1, 2]	cut[1, 3]
2	×	×	cut[2, 2]	cut[2, 3]
3	×	×	×	cut[3, 3]

結果

- First Accepted : hos.lyric* (10:55)
- 挑戦者数 : 58
- 正解者数 : 9 (7 %)
- 提出数 : 124

余談

- 「最適2分探索木問題」という名前の有名な問題だったらしいです
  - 参考:
  - http://topcoder.g.hatena.ne.jp/iwiwi/20120701/1341149838