Problem D : Stick Conbination

本解説で説明する方法は解法の一つにすぎず，他の解法も存在する．

$1, 3, 5, \cdots, 2N-1$ の棒の長さの和は N^2 であるため，M 本になるように棒を接着して棒の長さを揃えようとする場合，各棒の長さが N^2/M となるようにしなければならない．

N が素数の場合　手で小さいケースを構築しようとすると，N が素数であるとき構築できないことが推測できる．M は N^2 の約数であるから，N が素数であるとき，$M = 1, N, N^2$ となるが，問題の制約からどのケースも明らかに解が構築できない．

N が偶数の場合　残っている中で最も短い棒と長い棒の二つを順に接着していくことで，（各 $k(1 \leq k \leq N/2)$ について，長さ k と $2N-k$ の二つの棒を接着することで）$M/2$ 本の長さ $2N$ の棒を作ることができ，解となる．

$N = p \times p$ の場合 $(3 \leq p)$　例えば，$N = 25 = 5 \times 5$ であるとき，$1, 3, \cdots, 49$ の棒を以下のように A, B, C, D, E の p グループに分けて接着する．

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 11 & 13 & 15 & 17 & 19 \\ 21 & 23 & 25 & 27 & 29 \\ 31 & 33 & 35 & 37 & 39 \\ 41 & 43 & 45 & 47 & 49 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B & C & D & E \\ B & C & D & E & A \\ C & D & E & A & B \\ D & E & A & B & C \\ E & A & B & C & D \end{pmatrix}$$

このように $1, 3, \cdots, 2p^2-1$ を $p \times p$ の形に並べ，各行各列で各グループが丁度一つ存在するようにグループ分けをすると各グループの棒の長さの和が $1+19+27+35+43 = 3+11+29+37+45 = 5+13+21+39+47 = 7+15+23+31+49 = 9+17+25+33+41$ と等しくなる．

$N = p \times q$ の場合 $(3 \leq p \leq q$, p, q は奇数$)$　$N = p \times p$ の場合と N が偶数の場合の手順を組み合わせて構築する．$1, 3, \cdots, 2p^2-1$ までを $N = p \times p$ の場合の手法で p グループに棒を分ける．その後，グループに振り分けていない棒の中で最も短い棒と長い棒の二つを順に組にしていくことで，$p \times (q-p)/2$ 個の総長が等しい棒の組を作ることができ，これらの組を p グループに振り分けることができる．

例えば，$N = 21 = 3 \times 7$ であるとき，$1, 3, \cdots, 41$ の棒を以下のように A, B, C の p グループに分けて接着できる．

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 7 & 9 & 11 \\ 13 & 15 & 17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B & C \\ B & C & A \\ C & A & B \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 19 & 21 & 23 & 25 & 27 & 29 \\ 41 & 39 & 37 & 35 & 33 & 31 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B & C & A & B & C \\ A & B & C & A & B & C \end{pmatrix}$$

この例では (19,41),(21,39),(23,37),(25,35),(27,33),(29,31) の組をそれぞれ A,B,C,A,B,C と振り分けている．