

# KUPC2020 spring E: 数列ゲーム 解説

writer: gazelle

2020 年 3 月 20 日

$b_1 = (\sum a_i) \bmod 2$ ,  $b_2 = (\min a_i) \bmod 2$  と定めます.

$N$  が奇数の場合, 一回の操作で必ず  $b_1$  の偶奇が変わるので,  $b_1 = 1$  のとき先手必勝, そうでなければ後手必勝です.

$N$  が偶数の場合,  $(b_1, b_2) \neq (0, 0)$  のとき先手必勝, そうでなければ後手必勝です. なぜならば, 以下が成り立つからです.

- $(b_1, b_2) = (1, 0)$  のとき, ある奇数要素を 1 減らすと  $(b_1, b_2) = (0, 0)$  になる
- $(b_1, b_2) = (0, 1)$  のとき, 全要素を 1 減らすと  $(b_1, b_2) = (0, 0)$  になる
- $(b_1, b_2) = (1, 1)$  のとき, 最小要素を 1 減らすと  $(b_1, b_2) = (0, 0)$  になる
- $(b_1, b_2) = (0, 0)$  のとき, どう操作しても操作後に  $(b_1, b_2) \neq (0, 0)$  になる

このように,  $(b_1, b_2) \neq (0, 0)$  のときは, 必ず  $(b_1, b_2) = (0, 0)$  に持ち込む操作が存在するので, ゲームの最初に  $(b_1, b_2) \neq (0, 0)$  である場合, 先手は後手に  $(b_1, b_2) = (0, 0)$  の状態を押し付け続けることができます. 操作ができなくなる, つまりすべての  $a_i$  が 0 になるとき,  $(b_1, b_2) = (0, 0)$  が成り立つため, この状態を相手に押し付け続けられれば先手が負けることはありません. 逆にゲームの最初に  $(b_1, b_2) = (0, 0)$  である場合は, 最初のターンで先手は後手に  $(b_1, b_2) \neq (0, 0)$  の状態で手番を渡してしまうので, 同様の戦法を取ることで後手は必ず勝つことができます.