問題D: 列の構成

Writer: 楠本, 吉田

問題

- 配列$c_i[j]$ ($1 \leqq i \leqq K$, $1 \leqq j \leqq N/2$)が与えられる。
- 以下を満たす長さNの0/1列sを作れ:
  - $S_i = s[c_i[1]] + \ldots + s[c_i[N/2]]$とおく。
  - $N/8 \leqq S_i \leqq 3N/8$が各$i = 1 \ldots K$で成り立つ。

- 分かりやすさの為、$n = N/2$とおく。

乱択アルゴリズム

* 乱数を用いたアルゴリズム
* 乱数を用いるので
  * 計算時間にバラつきがある
  * 正答する確率が1ではない
* といったことが起こるが、その代わり
  * 決定性アルゴリズムよりシンプル
  * 計算量が良い
* となることが多い。

想定アルゴリズム

```
while (1) {
  s = ランダムなの0/1列
  if (sが条件を満たす) sを出力
}
```

- $E[S_i] = n/2$なので平均は条件を満たす。
- S_iが[N/4, 3N/4]から外れる確率は？
  - コンテスト中は低いと信じる。

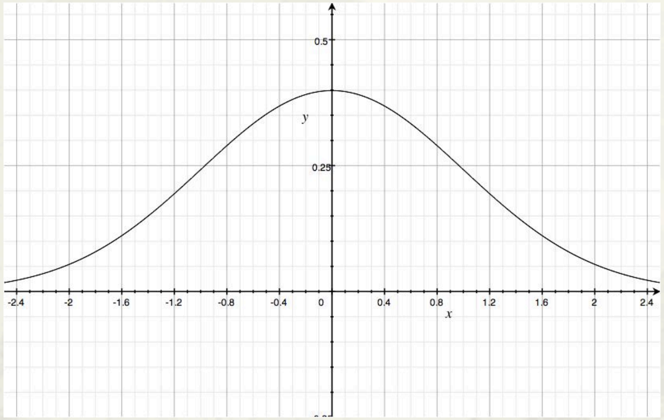
確率計算

- A_iを$n/4 \leqq S_i \leqq 3n/4$を表す確率事象とする。
- $\Pr[\overline{A}_1 \cup \dots \cup \overline{A}_K]$が小さいことを言いたい。
- $\Pr[\overline{A}_1 \cup \dots \cup \overline{A}_K] \leqq \Pr[\overline{A}_1] + \dots + \Pr[\overline{A}_K]$なので、$\Pr[\overline{A}_1]$が小さいことを示せばよい。

- S_iは二項分布に従う。
  - nが小さい時は、残念ながら$\Pr[A_i]$を直に計算するしか正確に見積もれなさそう。

確率計算

- nが大きい時、S_iは平均0, 分散n/4の正規分布で近似できる。



- イメージ: 分散がO(n)の正規分布では、平均からω(√n)値がずれることは殆ど無い。
  - ω(√n): √nより真に大きい

Chernoff Bound

- Chernoff Boundを用いると、

$$\Pr[\overline{A}_i] \leqq 2\exp[-(n/2)^2/2n] \ll 1$$

- と計算出来る。

- Chernoff Boundの詳細は以下を参照
  - http://en.wikipedia.org/wiki/Chernoff_bound

その他の乱択アルゴリズム

```
s = ランダムな0/1列
while (1) {
  if (sが条件を満たす) sを出力
  else {
    S_iが制約を満たさないとする
    s[c_i[j]]の値をランダムに書き換える
  }
}
```

研究課題

- 先のアルゴリズムはAlgorithmic Lovasz Local Lemmaという手法から、計算時間の期待値が抑えられる？
  - http://en.wikipedia.org/wiki/Algorithmic_Lov%C3%A1sz_local_lemma
- Algorithmic Lovasz Local Lemmaは乱数を使わないように出来るので、最終的には決定性アルゴリズムも得られるかも？

貪欲法

* 制約が緩いので色々な貪欲法で正解となるようです。

* 皆さんの様々な工夫が見れて楽しかったです。

統計

* First acceptance: wata (25:37)
* **正解者**: 41**人**
* **挑戦者**: 53**人**
* **投稿数**: 177
* **正答率**: 23%