数列を構成する問題

KUPC 2018 - G

原案: asi1024
テストケース, 解説: gazelle

問題概要

以下の 3 つの条件を満たす、大きさ N の数列 $a_1, \ldots, a_N$ を構成する。

- 数列の要素は 0 以上 10^{12} 以下の整数。
- いくつかの要素はあらかじめ 0 と指定されている。
- 添字の約数に対応する要素についての和で、数列 $b_1, \ldots, b_N$ を作ると、(狭義) 単調増加になる。

考察

ひとまず 3 つめの条件にだけ注目してみる。
結論から言えば、この場合、

「素数 p およびその冪を添え字にもつ要素に log p を割りふる (それ以外の添字をもつ要素には 0 を割りふる) 」

ことで、条件を満たす数列を構成することができる。
例えば $n = p^2 \times q \times r^3$ と素因数分解できる整数 n を考えてみる。
n は 24 個の約数をもつが、その中で非 0 の値を割りふられる添字は p, p^2, q, r, r^2, r^3 の 6 つである。そして、

$$\begin{aligned} b_n &= a_p + a_{p^2} + a_q + a_r + a_{r^2} + a_{r^3} \\ &= 2\log p + \log q + 3\log r \end{aligned}$$

のように b_n が定まる。この最右辺は log n に相当する。

考察

このように、上で述べたような方法で数列を構成すると、各 b_i の値が log i と一致する。よって $b_1, \ldots, b_N$ は明らかに単調増加になる。
この方法で構成された数列は整数列ではないが、十分大きな整数を掛けたのち小数点以下を切り捨てれば、性質を保ったまま整数列に変換できることが推測できる。この「十分大きな整数」は、最大ケース (N = 3 × 10^5) でもうまく働くように定めればよく、たとえば 10^7 程度あればいい。

数列を 2 つめの条件にも適応させるのは、整数列に変換するよりも難しく見える。しかし実際は単純で、素数 p またはその冪を添字にもつ要素 a_{p^k} (k は正整数) が 0 のとき、そのような数列が題意全ての条件を満たす数列になることはない。

考察

つまり、そのような値が 0 であると指定されたならば、条件を満たす数列は構成できないため ‘NO’ を出力すればよく、そうでないならば先で述べた数列を合法に出力することが可能である。

このことを示しておく。
例えば、ある素数 p について $a_p = 0$ であるとする。このとき、

$$b_p = a_1 = b_1$$

となり、b は単調増加になりえない。
また例えば、ある素数 p について $a_{p^k} = 0$ (k は 2 以上の正整数) であるとする。このとき、

$$b_{p^k} = a_{p^{k-1}} + \ldots + a_p + a_1 = b_{p^{k-1}}$$

となり、この場合も b は単調増加になりえない。

解法

上で述べたような数列を出力するプログラムを書けばいい。
実装において、各整数ごとに愚直な素因数分解を実行すると膨大な時間がかかってしまう。エラトステネスの篩の要領で、素数を見つけるたびに、それ自身およびその冪に数を割りふっていくような実装をすれば、高速 (O(NlogN)) に動作する。