KUPC2019 C
てんびんばかり 解説

@SUGINAMIKU

問題概要

- N種類の重さの分銅をそれぞれK個ずつ用意して、1ｇから Mｇをてんびんばかりで量りたい
- そのような最小の種類数Nを求めたい

解説

- K=1の場合にN種類の分銅で何gの範囲を量れるか考えてみる
- 1種類目に1gの分銅を用意すると-1g ~ 1g が量れる
- 2種類目に3gの分銅を用意すると、-4g ~ 4g が量れる
  - 3gの分銅を右の皿に乗せた状態で1gの分銅をうまく乗せて-3-1g ~ -3+1g
  - 3gの分銅を乗せないと-1g ~ 1g
  - 3gの分銅を左の皿に乗せた状態で1gの分銅をうまく乗せて 3-1g ~ 3+1g
- 3種類目に9gの分銅を用意すると -13g ~ 13g が量れる
  - 同様に考えると良い

解説

- 同様にしてi (≦N) 種類目の分銅には3^{i-1}gの分銅を用意すると、

  $\sum_{i=1}^{N} 3^{i-1}$ = $\frac{3^N-1}{2}$ なので $-\frac{3^N-1}{2}$ g ~ $\frac{3^N-1}{2}$ g が量れる
- N種類の分銅の置き方は、(左の皿に置く) or (置かない) or (右の皿に置く) の3通りのN乗で、これは上の区間の整数の個数3^N個と一致する
  - つまりこの置き方が最大の範囲をカバーする
- K=1の場合はバシェの分銅の問題と呼ばれてます

解説

- Kを一般化する
- 1種類目に1gの分銅を用意すると$-K$g ~ Kg が量れる
- 2種類目に$2K+1$gの分銅を用意すると、$-(2K+1)K-K$ g ~ $(2K+1)K+K$ g が量れる
  - $2K+1$gの分銅をK個右の皿に乗せた状態で1gの分銅をうまく乗せて
    $-(2K+1)K-K$ g ~ $-(2K+1)K+K$ g

    :
  - $2K+1$gの分銅をK個左の皿に乗せた状態で1gの分銅をうまく乗せて
    $(2K+1)K-K$ g ~ $(2K+1)K+K$ g
- 3種類目に$(2K+1)^2$ gの分銅を用意すると
  $-(2K+1)^2K - (2K+1)K - K$ g ~ $(2K+1)^2K + (2K+1)K + K$ g が量れる

解説

- 同様にしてi (≦N) 種類目の分銅には$(2K+1)^{i-1}$gの分銅を用意すると、
  $\sum_{i=1}^{N}(2K+1)^{i-1}K$ = $\frac{(2K+1)^N-1}{2}$ なので $-\frac{(2K+1)^N-1}{2}$ g ~ $\frac{(2K+1)^N-1}{2}$ g が量れる
- ある種類の分銅の置き方は、(左の皿にK個置く) ~ (右の皿にK個置く) の(2K+1) 通りで、上の区間の整数の数は$(2K+1)^N$個なのでこれが最大
- $\frac{(2K+1)^N-1}{2}$ がM以上になるようなNを、ループを回して判定していくとO(log M)で答えがもとまる
  - オーバーフローに注意
  - Log関数で計算しても良い