Отчет по лабораторной работе №2

Дисциплина: Математическое моделирование

Выполнила: Афтаева Ксения Васильевна

Содержание

Список иллюстраций

Список таблиц

1 Цель работы

Рассмотреть один из примеров (задача о погоне) построения математических моделей для выбора правильной стратегии при решении задач поиска. Выполнить задание согласно варианту: провести анализ и вывод дифференциальных уравнений, смоделировать ситуацию.

2 Задание

На море в тумане катер береговой охраны преследует лодку браконьеров. Через определенный промежуток времени туман рассеивается, и лодка обнаруживается на расстоянии 6,7 км от катера. Затем лодка снова скрывается в тумане и уходит прямолинейно в неизвестном направлении. Известно, что скорость катера в 2,7 раза больше скорости браконьерской лодки. 1. Записать уравнение, описывающее движение катера, с начальными условиями для двух случаев (в зависимости от расположения катера относительно лодки в начальный момент времени). 2. Построить траекторию движения катера и лодки для двух случаев. 3. Найти точку пересечения траектории катера и лодки.

3 Теоретическое введение

Моделирование — это особый метод познания окружающего мира, который относится к общенаучным методам. Он может применяться как на эмпирическом, так и на теоретическом уровнях. В английском языке для понятия моделирования существует два термина: modeling и simulation. Первый означает моделирование, основанное главным образом на теоретических положениях, а второй — воспроизведение, имитацию состояния системы на основе анализа ее поведения (имитационное моделирование) [1].

Математической моделью называется совокупность уравнений или других математических соотношений, отражающих основные свойства изучаемого объекта или явления в рамках принятой умозрительной физической модели и особенности его взаимодействия с окружающей средой на пространственно-временных границах области его локализации. Математические модели различных процессов в континуальных системах строятся, как правило, на языке дифференциальных уравнений, позволяющих наиболее точно описать состояние процесса в любой точке пространства в произвольный момент времени. Основными свойствами математических моделей являются адекватность и простота, указывающие на степень соответствия модели изучаемому объекту и возможности ее реализации. Процесс формулировки математической модели уазывается постановкой задачи [2].

4 Выполнение лабораторной работы

1. Для выполнения нам потребовалось установить **Julia** и **OpenModelica**. Установка была произведена через менеджер пакетов **choco** с помощью команд `choco install julia` и `choco install openmodelica` соответственно. Кроме того, я расчитала вариант задания, который мне нужно выполнить. У меня вариант 9.

2. Приведем рассуждения, необходимые для вывода уравнения, описывающего движение катера.

   По условию у нас есть катер береговой охраны (преследователь) и лодка браконьеров (преследуемый). Катер должен поймать лодку, оказавшись физически с ней в одной точке (столкнувшись). Сначала катер обнаруживает лодку на расстоянии k (в моем варианте - 6,7 км). Затем лодка пропадает в тумане (становится невидимой) и начинает прямолинейное движение в неизвестном для катера направлении со скоростью V. Катер начинает догонять лодку двигаясь со скоростью $V = 2,7V$.

   При этом катер должен постоянно находиться на том же расстоянии от точки старта лодки (полюс полярной системы координат - $\theta = 0$), что и сама лодка, иначе он может обогнать или отстать от нее. Поэтому катер не может сразу начать движение по спирали. Перед этим ему необходимо двигаться прямолинейно по направлению к полюсу (точке старта лодки) до тех пор, пока он не окажется на том же расстоянии от полюса, что и лодка. После этого катер береговой охраны должен двигаться вокруг полюса удаляясь от него с той же скоростью, что и лодка браконьеров.

В данной задаче при движении катера прямолинейно возможны два случая:

- катер проходит расстояние $k - x$
- катер проходит расстояние $k + x$

Эти случаи отличаются тем, с какой стороны от полюса начнет движение по спирали катер (рис. 4.1).

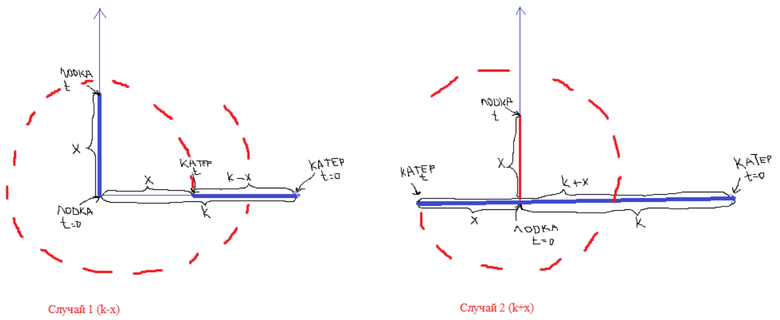

Рис. 4.1: Два случая (графическое представление)

Чтобы найти расстояние x (расстояние от полюса, после достижения которого катер начнет движение по спирали), нужно составить уравнение. Пусть через время t катер и лодка окажутся на одном расстоянии x от полюса. За это время лодка пройдет x, а катер $k - x$ или $k + x$ (в зависимости от начального положения катера относительно полюса). Тогда время, за которое они пройдут это расстояние, вычисляется как $\frac{x}{V}$ или $\frac{k-x}{V}$ (во втором случае $\frac{k+x}{V}$. Зная соотношение скоростей и то, что время одно и то же, можем составить уравнение для первого и второго случая: $\frac{x}{V} = \frac{6,7 \pm x}{2,7V}$

Отсюда выражаем x: $x_1 = \frac{6,7}{3,7}, x_2 = \frac{6,7}{1,7}$. Задачу будем решать для двух случаев.

Как мы уже описали выше, после того, как катер береговой охраны окажется на одном расстоянии от полюса, что и лодка, он должен сменить прямолинейную траекторию и начать двигаться вокруг полюса удаляясь от него со скоростью лодки V. Для этого скорость катера раскладываем на две составляющие: V_r - радиальная скорость, V_t - тангенциальная скорость (рис. 4.2). Радиальная скорость - это скорость, с которой катер удаляется от полюса: $V_r = \frac{dr}{dt}$. Нам нужно, чтобы эта скорость была равна скорости лодки, поэтому полагаем $V = \frac{dr}{dt}$. Тангенциальная скорость – это линейная скорость вращения катера относительно полюса. Она равна произведению угловой скорости на радиус: $V_t = r\frac{d\theta}{dt}$.

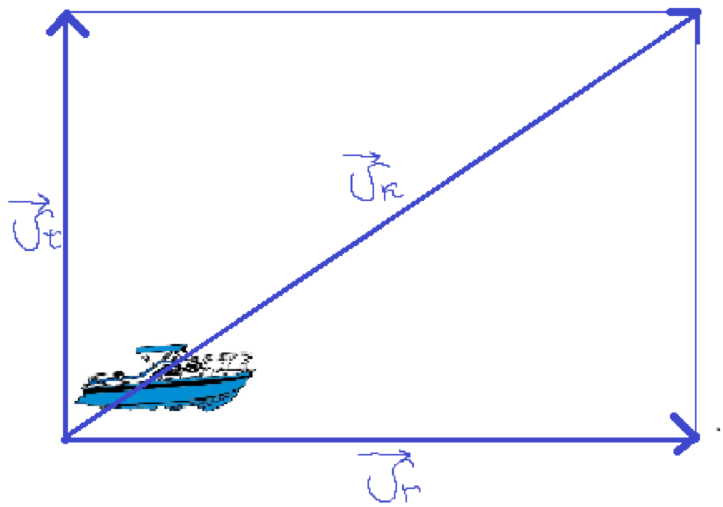

Рис. 4.2: Разложение скорости катера на тангенциальную и радиальную составляющие

Исходя из рисунка (рис. 4.2), теоремы Пифагора и известных значений, $V_t = \sqrt{(V)^2 - (V_r)^2} = \sqrt{(2,7V)^2 - V^2} = \sqrt{6,29}V$

Таким образом мы получаем два дифференциальных уравнения: $V = \frac{dr}{dt}$ и $\sqrt{6,29}V = r\frac{d\theta}{dt}$. Выразим из обоих dt: $dt = \frac{dr}{V} = r\frac{d\theta}{\sqrt{6,29}V}$. Сократим обе части на скорость лодки и разделим обе части на r. Получим $\frac{dr}{r} = \frac{d\theta}{\sqrt{6,29}}$.

Решив данное уравнение (рис. 4.3) получаем $r(\theta) = C * e^{\frac{\theta}{\sqrt{6,29}}}$.

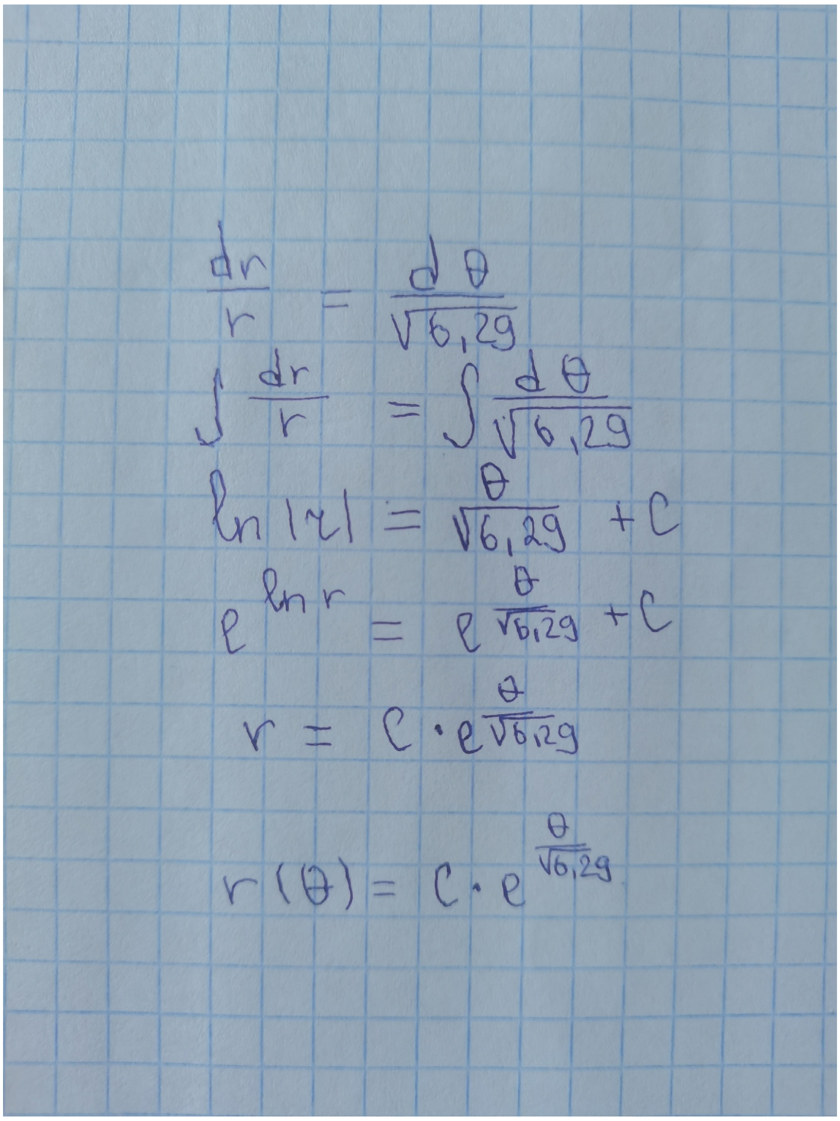

Рис. 4.3: Решение уравнения

В начальный момент ($\theta = 0$) $r_0 = C$, при этом $r_0 = x_1$. Поставляя значения получаем формуле: $r(\theta) = \frac{6,7}{3,7} * e^{\frac{\theta}{\sqrt{6,29}}}$ (первый случай). Для второго случая ($\theta = -\pi$, $r_0 = x_2$) $r(\theta) = C * e^{\frac{-\pi}{\sqrt{6,29}}} = r_0$. Следовательно

$$C * e^{\frac{-\pi}{\sqrt{6,29}}} = \frac{6,7}{1,7}$$. Получаем, что $C = \frac{6,7}{1,7e^{\frac{-\pi}{\sqrt{6,29}}}}$

3. Написала код на Julia:

```
# подключение модулей
using Plots


# расстояние между лодкой и катером
const k = 6.7


# для первого случая (k-x)
const x1 = k/3.7  # точка старта охотников (выведена в отчете)
const C1 = k/3.7  # значение константы C при тета=0


# для второго случая (k+x)
const x2 = -k/1.7  # точка старта охотников (выведена в отчете)
const C2 = k/(1.7*exp(-pi/sqrt(6.29))) # значение константы C при тета=-
pi


# массив углов отклонения для первого случая
theta1 = range(0, 2pi, 100)


# функция для первого случая
function r1(theta1)
    return C1*exp(theta1/sqrt(6.29))
end


# массив радиусов (длин) для первого случая
R1 = r1.(theta1)
```

```
# массив углов отклонения для второго случая
theta2 = range(-pi, pi, 100)

# функция для второго случая
function r2(theta2)
    return C2*exp(theta2/sqrt(6.29))
end

# массив радиусов (длин) для второго случая
R2 = r2.(theta2)

#вывод координат на экран
println("Координаты точки пересечения для 1 случая - длина (радиус) и угол")
println(R1[40])
println(theta1[40])
println("Координаты точки пересечения для 2 случая - длина (радиус) и угол")
println(R2[40])
println(theta2[40])

# График для первого случая
plt1 = plot(
    proj = :polar,
    aspect_ratio=:equal,
    dpi=200,
    title="Случай 1",
    legend=true)

plot!(
```

```
    plt1,
    theta1,
    R1,
    xlabel="theta",
    ylabel="r(theta)",
    label="Траектория движения катера",
    color=:red)

plot!(
    plt1,
    [0.0,0.0],
    [x1,6.7],
    color=:red,
    label="")

plot!(
    plt1,
    [0.0,theta1[40]],
    [0,40],
    xlabel="theta",
    ylabel="r(theta)",
    label="Траектория движения лодки",
    color=:blue)

scatter!(
    plt1,
    [theta1[40]],
    [R1[40]],
    label="Точка пересечения",
```

```
    ms=1.5)

savefig(plt1,"First.png")

# График для второго случая
plt2 = plot(
    proj = :polar,
    aspect_ratio=:equal,
    dpi=200,
    title="Случай 2",
    legend=true)

plot!(
    plt2,
    theta2,
    R2,
    xlabel="theta",
    ylabel="r(theta)",
    label="Траектория движения катера",
    color=:red)

plot!(
    plt2,
    [0.0,0.0],
    [x2,6.7],
    color=:red,
    label="")

plot!(
```

```
    plt2,
    [0.0,theta2[40]],
    [0,40],
    xlabel="theta",
    ylabel="r(theta)",
    label="Траектория движения лодки",
    color=:blue)

scatter!(
    plt2,
    [theta2[40]],
    [R2[40]],
    label="Точка пересечения",
    ms=1.5)

savefig(plt2,"Second.png")
```

4. В папке, где лежит файл с кодом, запустила **PowerShell** и ввела `julia lab02.jl` (рис. 4.4) для запуска скрипта (lab02.jl - название файла с кодом). В консоли вывелись точки пересечения для первого и второго случая (рис. 4.4). В папке появились изображения с графиками для первого (рис. 4.5) и второго случаев (рис. 4.6).

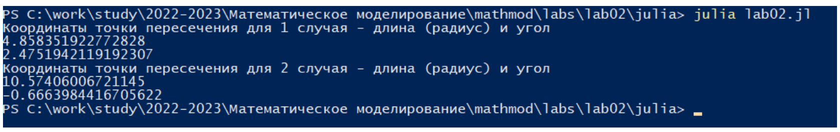

Рис. 4.4: Решение уравнения

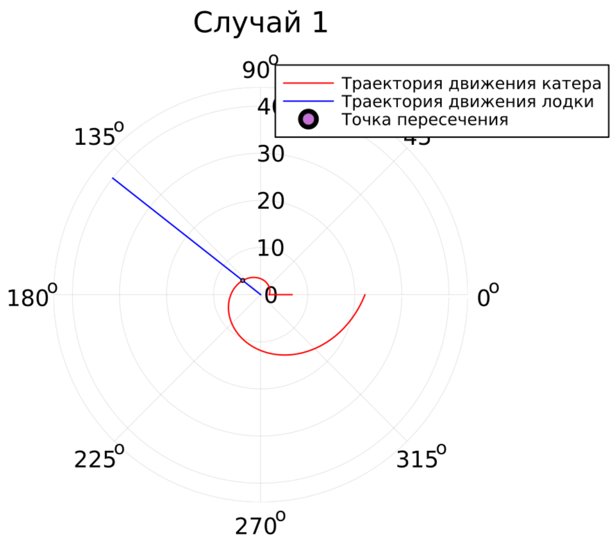

Рис. 4.5: График для случая 1

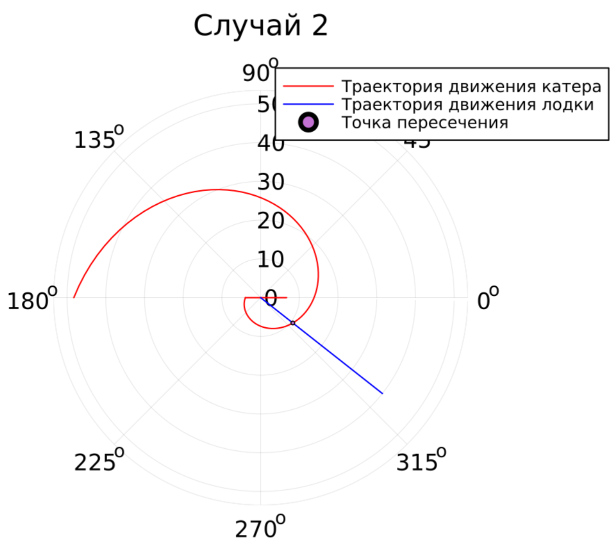

Рис. 4.6: График для случая 2

5. Для данной задачи нельзя построить решение с помощью базовых стредств OpenModelica, поэтому работу с ней мы пропускаем в данной лабораторной.

5 Выводы

Я рассмотрела один из примеров (задача о погоне) построения математических моделей для выбора правильной стратегии при решении задач поиска. Выполнила задание согласно варианту: провела анализ и вывод дифференциальных уравнений, смоделировала ситуацию, построила траекторию движения катера и лодки для двух случаев, нашла точку пересечения траектории катера и лодки.

Список литературы

1. Математическое моделирование как метод познания [Электронный ресурс]. Автор24, 2023. URL: https://spravochnick.ru/lektoriy/matematicheskoe-modelirovanie-kak-metod-poznaniya/#:~:text=Моделирование%20–%20метод%20познания%20окружающего,данного%20исследования%20типичные%20его%20черты.
2. Математическое моделирование [Электронный ресурс]. Студопедия.Нет, 2023. URL: https://studopedia.net/18_20178_matematicheskoe-modelirovanie.html.