Отчет по лабораторной работе №5

Дисциплина: Математическое моделирование

Выполнила: Афтаева Ксения Васильевна

Содержание

Список иллюстраций

Список таблиц

1 Цель работы

Рассмотреть простейшую модель взаимодействия двух видов типа «хищник — жертва» - модель Лотки-Вольтерры. Выполнить задание согласно варианту: построить график зависимости численности хищников от численности жертв, а также графики изменения численности хищников и численности жертв при заданных начальных условиях, найти стационарное сосотояние системы.

2 Задание

Вариант № 10:

Для модели «хищник-жертва»:

$$
\begin{cases}
\frac{dx}{dt} = -0.22x(t) + 0.051x(t)y(t) \\
\frac{dy}{dt} = 0.33y(t) - 0.041x(t)y(t)
\end{cases}
\tag{2.1}
$$

Постройте график зависимости численности хищников от численности жертв, а также графики изменения численности хищников и численности жертв при следующих начальных условиях: $x_0 = 3, y_0 = 8$. Найдите стационарное состояние системы.

3 Теоретическое введение

Впервые модель «хищник – жертва» была получена А. Лоткой в 1925 году, который использовал ее для описания динамики взаимодействующих биологических популяций. В 1926 году независимо от Лотки аналогичные (к тому же более сложные) модели были разработаны итальянским математиком В. Вольтерра [1].

В 1931 году Вито Вольтеррой были выведены следующие законы отношения хищник-жертва:

- закон периодического цикла – процесс уничтожения жертвы хищником нередко приводит к периодическим колебаниям численности популяций обоих видов, зависящим только от скорости роста плотоядных и растительноядных, и от исходного соотношения их численности;

- закон сохранения средних величин – средняя численность каждого вида постоянна, независимо от начального уровня, при условии, что специфические скорости увеличения численности популяций, а также эффективность хищничества постоянны;

- закон нарушения средних величин – при сокращении обоих видов пропорционально их числу, средняя численность популяции жертвы растет, а хищников – падает [2].

Модель хищник-жертва – это особая взаимосвязь хищника с жертвой, в результате которой выигрывают оба. Выживают наиболее здоровые и приспособленные особи к условиям среды обитания, т.е. все это происходит благодаря естественному отбору. В той среде где нет возможности для размножения, хищник рано или поздно уничтожит популяцию жертвы, в последствии чего вымрет и сам.

Данная двувидовая модель основывается на следующих предположениях:

- численность популяции жертв y и хищников x зависят только от времени (модель не учитывает пространственное распределение популяции на занимаемой территории);
- в отсутствии взаимодействия численность видов изменяется по модели Мальтуса, при этом число жертв увеличивается, а число хищников падает;
- естественная смертность жертвы и естественная рождаемость хищника считаются несущественными;
- эффект насыщения численности обеих популяций не учитывается;
- скорость роста численности жертв уменьшается пропорционально численности хищников [3].

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -ax(t) + bx(t)y(t) \\ \frac{dy}{dt} = cy(t) - dx(t)y(t) \end{cases} \tag{3.1}$$

В этой модели x – число хищников, y - число жертв. Коэффициент c описывает скорость естественного прироста числа жертв в отсутствие хищников, a - естественное вымирание хищников, лишенных пищи в виде жертв. Вероятность взаимодействия жертвы и хищника считается пропорциональной как количеству жертв, так и числу самих хищников (xy). Каждый акт взаимодействия уменьшает популяцию жертв, но способствует увеличению популяции хищников (члены dxy и $-bxy$ в правой части уравнения) [3].

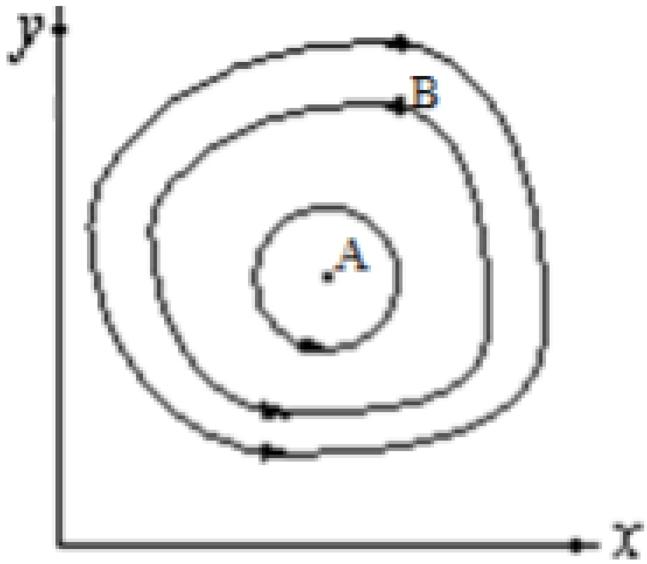

Рис. 3.1: Эволюция популяции жертв и хищников в модели Лотки-Вольтерры

Математический анализ этой (жесткой) модели показывает, что имеется стационарное состояние (A на рис. 3.1), всякое же другое начальное состояние (B) приводит к периодическому колебанию численности как жертв, так и хищников, так что по прошествии некоторого времени система возвращается в состояние B. Стационарное состояние системы (-3.1) (положение равновесия, не зависящее от времени решение) будет в точке: $x_0 = \frac{c}{d}, y_0 = \frac{a}{b}$.Если начальные значения задать в стационарном состоянии $x(0) = x_0, y(0) = y_0$, в любой момент времени численность популяций изменяться не будет. При малом отклонении от положения равновесия численности как хищника, так и жертвы с течением времени не возвращаются к равновесным значениям, а совершают периодические колебания вокруг стационарной точки [3].

4 Выполнение лабораторной работы

1. Задание в лабораторной работе выполняется по вариантам. Вариант расчитывается как номер остаток от деления номера студенческого билета на число заданий + 1. Таким образом, мой вариант **10**: 1032201739 % 70 + 1.

2. По моему варианту x - число хищников, а y - число жертв, a, d - коэффициенты смертности, b, c - коэффициенты прироста популяции. Сопоставляя общий вид системы(-3.1) и систему из моего варианта (-2.1) можем определть коэффициенты: $a = 0.22, b = 0.051, c = 0.33, d = 0.041$.

3. Напишем код для построения графика зависимости численности хищников от численности жертв, а также графиков изменения численности хищников и численности жертв на Julia:

```
#подключаем модули
using Plots
using DifferentialEquations

#задаем начальные условия
const x0 = 3
const y0 = 8

#состояние системы
u0 = [x0, y0]
#отслеживаемый промежуток времени
```

```
time = [0.0, 30.0]

#задаем константы согласно варианту
a = 0.22
b = 0.051
c = 0.33
d = 0.041

#сама система
function M!(du, u, p, t)
    du[1] = -a*u[1]+b*u[1]*u[2]
    du[2] = c*u[2]-d*u[1]*u[2]
end

prob = ODEProblem(M!, u0, time)
sol = solve(prob, saveat=0.05)

const X = Float64[]
const Y = Float64[]

for u in sol.u
    x, y = u
    push!(X,x)
    push!(Y,y)
end

#постреоние графиков
plt1 = plot(
    dpi = 300,
```

```
    size = (700,500),
    title ="Изменение численности хищников и численности жертв"
)

plot!(
    plt1,
    sol.t,
    X,
    color =:red,
    label ="Численность хищников"
)

plot!(
    plt1,
    sol.t,
    Y,
    color =:blue,
    label ="Численность жертв"
)

savefig(plt1, "first.png")

plt2 = plot(
    dpi = 300,
    size = (700,500),
    title ="График зависимости численностей"
)

plot!(
```

```
    plt2,
    Y,
    X,
    color =:red,
    label ="Зависимость численности хищников от численности жертв"
)

savefig(plt2, "first_php.png")
```

4. Напишем код ддля построения графика зависимости численности хищников от численности жертв, а также графиков изменения численности хищников и численности жертв на OpenModelica:

```
model lab05

 Real x(start=3.0);
 Real y(start=8.0);
 constant Real a = 0.22;
 constant Real b = 0.051;
 constant Real c = 0.33;
 constant Real d = 0.041;

equation
  der(x) = -a*x+b*x*y;
  der(y) = c*y-d*x*y;

end lab05;
```

5. Видим результаты, полученные с помощью Julia: график зависимости численности хищников от численности жертв (рис. 4.1) и графики изменения численности хищников и численности жертв (рис. 4.2).

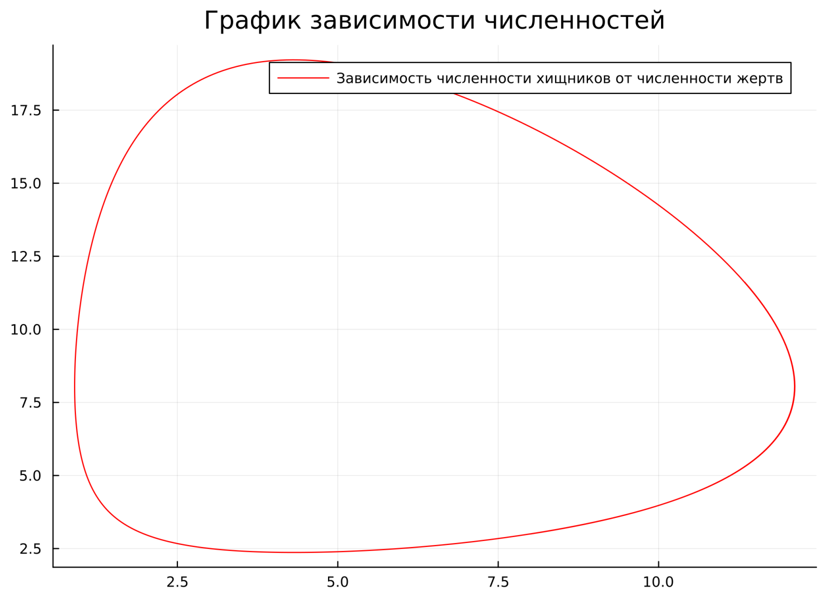

Рис. 4.1: График зависимости численности хищников от численности жертв (Julia)

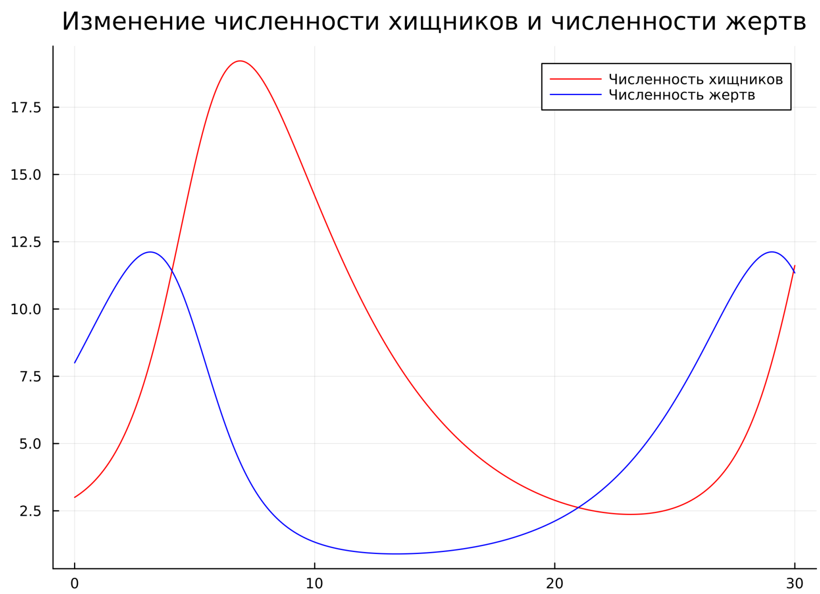

Рис. 4.2: График изменения численности хищников и численности жертв (Julia)

6. Видим результаты, полученные с помощью OpenModelica: график зависимости численности хищников от численности жертв (рис. 4.3) и графики

изменения численности хищников и численности жертв (рис. 4.4).

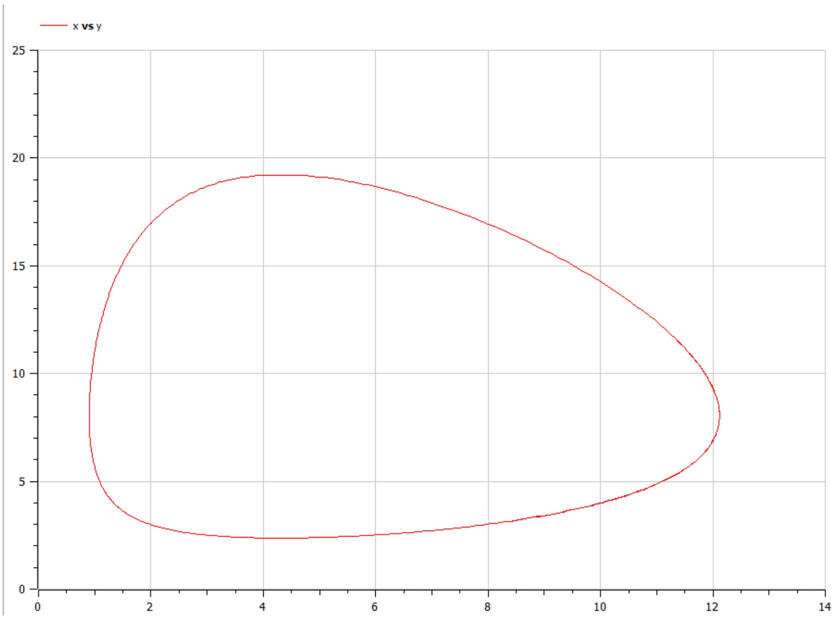

Рис. 4.3: График зависимости численности хищников от численности жертв (OpenModelica)

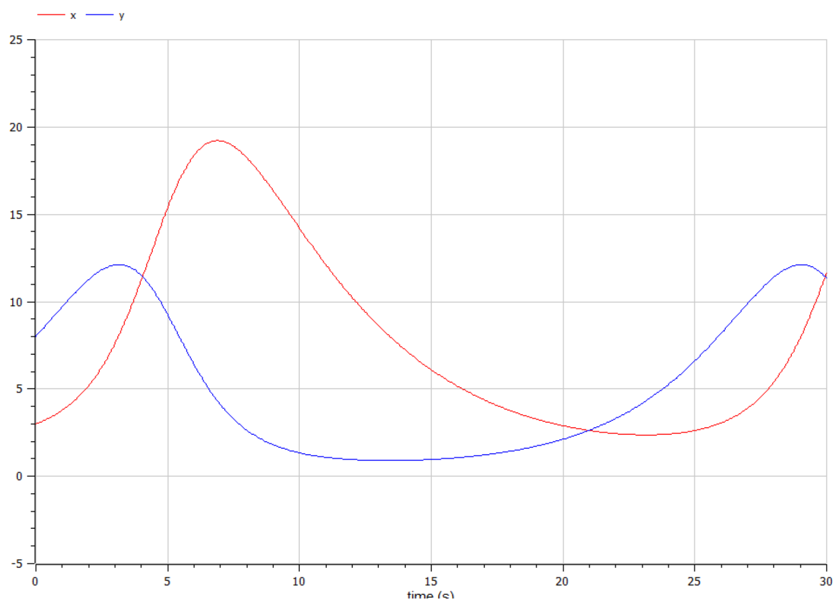

Рис. 4.4: График изменения численности хищников и численности жертв (OpenModelica)

7. Теперь на нужно найти стационарное сосотояние. Оно, как уже было описано выше, находится как $x_0 = \frac{a}{b}, y_0 = \frac{c}{d}$. Удобнее всего будет сразу посчитать его в Julia, поэтому напишем код на Julia, в котором будет считаться и выводиться на экран стационарное состоояние. Кроме того, если стационарное состояние посчитано верно и подставлено в начальные значения численности хищников и жертв, графики изменения численности хищников и численности жертв будут выглядеть как две параллельные прямые. Для проверки правильности подставим полученное стационарное в наш код на Julia.

8. Напишем код для расчета и проверки стационарного состояния на Julia:

```
#подключаем модули
using Plots
using DifferentialEquations


#задаем коэффициенты согласно варианту
a = 0.22
b = 0.051
c = 0.33
d = 0.041


#задаем начальные условия
x0 = c / d
y0 = a / b


#состояние системы
u0 = [x0, y0]
#отслеживаемый промежуток времени
time = [0.0, 120.0]
```

```
print("x0 = ")
println(x0)
print("y0 = ")
println(y0)

#сама система
function M!(du, u, p, t)
    du[1] = -a*u[1]+b*u[1]*u[2]
    du[2] = c*u[2]-d*u[1]*u[2]
end

prob = ODEProblem(M!, u0, time)
sol = solve(prob, saveat=0.05)

const X = Float64[]
const Y = Float64[]

for u in sol.u
    x, y = u
    push!(X,x)
    push!(Y,y)
end

#построение графиков
plt1 = plot(
    dpi = 300,
    size = (700,500),
    title ="Изменение численности хищников и численности жертв"
)
```

```
plot!(
    plt1,
    sol.t,
    X,
    color =:red,
    label ="Численность хищников"
)

plot!(
    plt1,
    sol.t,
    Y,
    color =:blue,
    label ="Численность жертв"
)

savefig(plt1, "second.png")
```

9. Посмотрим на результаты, полученные с помощью Julia для расчета (рис. 4.5) и проверки (рис. 4.6) стационарного состояния. Видим, что полученный результат верен.

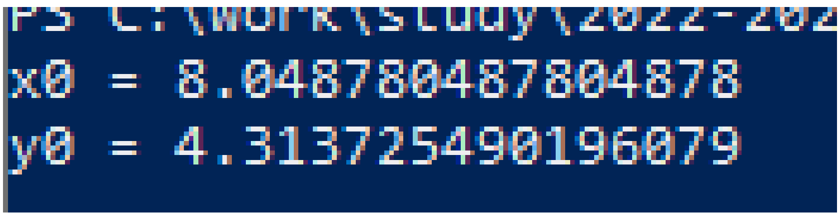

Рис. 4.5: Стационарное состояние

Рис. 4.6: Графики изменения численности жертв с начальными состояниями в стационарных точках

5 Выводы

Я рассмотрела простейшую модель взаимодействия двух видов типа «хищник — жертва» - модель Лотки-Вольтерры. Выполнила задание согласно варианту: построила график зависимости численности хищников от численности жертв, а также графики изменения численности хищников и численности жертв при заданных начальных условиях, нашла стационарное сосотояние системы.

Список литературы

1. Уравнение Лотки-Вольтерры для моделирования хищничества [Электронный ресурс]. Про уравнения - легко, 2023. URL: https://al-shell.ru/articles/uravnenie-lotki-volterry-dlya-modelirovaniya-hischnichestva/.
2. Компьютерная модель ”хищник-жертва” [Электронный ресурс]. Электронный научно-практический журнал «Современные научные исследования и инновации», 2017. URL: https://web.snauka.ru/issues/2017/01/77530.
3. Лабораторная работа №5 [Электронный ресурс]. Российский университет дружбы народов, 2023. URL: https://esystem.rudn.ru/pluginfile.php/1971733/mod_resource/content/2/Лабораторная%20работа%20№%204.pdf.