Отчет по лабораторной работе №3

Дисциплина: Математическое моделирование

Выполнила: Афтаева Ксения Васильевна

Содержание

Список иллюстраций

Список таблиц

1 Цель работы

Рассмотреть некоторые простейшие модели боевых действий – модели Ланчестера. Выполнить задание согласно варианту: построить графики изменения численности войск армии Х и армии У для двух случаев.

2 Задание

Между страной Х и страной У идет война. Численность состава войск исчисляется от начала войны, и являются временными функциями $x(t)$ и $y(t)$. В начальный момент времени страна **X** имеет армию численностью **21 200** человек, а в распоряжении страны **Y** армия численностью в **9 800** человек. Для упрощения модели считаем, что коэффициенты a, b, c, h постоянны. Также считаем $P(t)$ и $Q(t)$ - непрерывные функции.

Построить графики изменения численности войск армии **X** и армии **Y** для следующих случаев: 1. Модель боевых действий между регулярными войсками

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -0.45x(t) - 0.86y(t) + \sin(t+1) \\ \frac{dy}{dt} = -0.49x(t) - 0.73y(t) + \cos(t+2) \end{cases}$$

2. Модель ведение боевых действий с участием регулярных войск и партизанских отрядов

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -0.44x(t) - 0.7y(t) + \sin(2t) \\ \frac{dy}{dt} = -0.33x(t)y(t) - 0.61y(t) + \cos(t) + 1 \end{cases}$$

3 Теоретическое введение

Уравнение Ланчестера - это система дифференциальных уравнений, которая описывает отношения между силами двух сторон во время битвы. Главной характеристикой соперников являются численности сторон, изменяющиеся в зависимости от различных факторов, как обусловленных действиями соперников, так и не связанных напрямую с военными действиями.

В лабораторной работе мы будем рассматривать два случая ведения боевых действий: 1. Боевые действия между регулярными войсками 2. Боевые действия с участием регулярных войск и партизанских отрядов

В первом случае численность регулярных войск определяется тремя факторами: - скорость уменьшения численности войск из-за причин, не связанных с боевыми действиями; - скорость потерь, обусловленных боевыми действиями противоборствующих сторон; - скорость поступления подкрепления

В этом случае модель боевых действий между регулярными войсками описывается следующим образом:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -a(t)x(t) - b(t)y(t) + P(t) \\ \frac{dy}{dt} = -c(t)x(t) - h(t)y(t) + Q(t) \end{cases}$$

Здесь члены $-a(t)x(t)$ и $-h(t)y(t)$ - потери, не связанные с боевыми действиями, $-b(t)y(t)$ и $-c(t)x(t)$ - потери на поле боя. Коэффициенты $b(t)$ и $c(t)$ указывают на эффективность боевых действий со стороны y и x соответственно, $a(t), h(t)$ - величины, характеризующие степень влияния различных факторов на потери. Функции $P(t), Q(t)$ учитывают возможность подхода подкрепления к войскам x и y в течение одного дня.

Во втором случае в борьбу добавляются партизанские отряды. Нерегулярные войска в отличии от постоянной армии менее уязвимы, так как действуют скрытно, в этом случае сопернику приходится действовать неизбирательно, по площадям, занимаемым партизанами. Поэтому считается, что тем потерь партизан, проводящих свои операции в разных местах на некоторой известной территории, пропорционален не только численности армейских соединений, но и численности самих партизан. В результате модель принимает вид:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -a(t)x(t) - b(t)y(t) + P(t) \\ \frac{dy}{dt} = -c(t)x(t)y(t) - h(t)y(t) + Q(t) \end{cases}$$

В этой системе все величины имеют тот же смысл, что и в системе первого случая [1].

4 Выполнение лабораторной работы

1. Задание в лабораторной работе выполняется по вариантам. Вариант расчитывается как номер остаток от деления номера студенческого билета на число заданий + 1. Таким образом, мой вариант **10**: 1032201739 % 70 + 1.

2. Разберем теоретичскую часть для первого случая. Мы будем рассматривать модель с упрощениями, поэтому она неприменима для реальной ситуации, но может использоваться для начального анализа.

   В простейшей модели борьбы двух противников коэффициенты $b(t)$ и $c(t)$ являются постоянными. Попросту говоря, предполагается, что каждый солдат армии x убивает за единицу времени c солдат армии y (и, соответственно, каждый солдат армии y убивает b солдат армии x). Также не учитываются потери, не связанные с боевыми действиями, и возможность подхода подкрепления. Состояние системы описывается точкой (x, y) положительного квадранта плоскости. Координаты этой точки, x и y - это численности противостоящих армий. Тогда модель принимает вид

   $$\begin{cases} \dot{x} = -by \\ \dot{y} = -cx \end{cases}$$

   Это жесткая модель, которая допускает точное решение:

   $$\begin{cases} \frac{dx}{dy} = \frac{by}{cx} \end{cases}$$

Продлелав нетрудные преобразования, получим $cx^2 - by^2 = C$.

Эволюция численностей армий x и y происходит вдоль гиперболы, заданной этим уравнением (рис. 4.1). По какой именно гиперболе пойдет война, зависит от начальной точки.

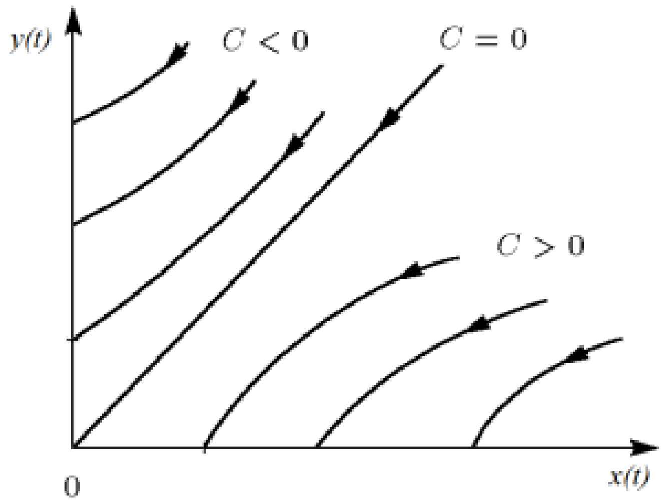

Рис. 4.1: Жесткая модель войны

Эти гиперболы разделены прямой $\sqrt{c}x = \sqrt{b}y$. Если начальная точка лежит выше этой прямой, то гипербола выходит на ось y. Это значит, что в ходе войны численность армии x уменьшается до нуля (за конечное время). Армия y выигрывает, противник уничтожен. Если начальная точка лежит ниже, то выигрывает армия x. В разделяющем эти случаи состоянии (на прямой) война заканчивается истреблением обеих армий.

3. Разберем теоретичскую часть для второго случая. Здесь будем учитывать те же упрощения, что и в первом случае. Так модель второго случая принимает следующий вид:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -by(t) \\ \frac{dy}{dt} = -cx(t)y(t) \end{cases}$$

Эта система приводится к уравнению

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{b}{2}x^2(t) - cy(t)\right) = 0$$

которое при заданных начальных условиях имеет единственное решение:

$$\frac{b}{2}x^2(t) - cy(t) = \frac{b}{2}x^2(0) - cy(0) = C_1$$

Из рис. 4.2 видно, что при $C_1 > 0$ побеждает регулярная армия, при $C_1 < 0$ побеждают партизаны. Аналогично противоборству регулярных войск, победа обеспечивается не только начальной численностью, но и боевой выучкой и качеством вооружения. При $C_1 > 0$ получаем соотношение $\frac{b}{2}x^2(0) > cy(0)$. Чтобы одержать победу партизанам необходимо увеличить коэффициент c и повысить свою начальную численность на соответствующую величину. Причем это увеличение, с ростом начальной численности регулярных войск $(x(0))$, должно расти не линейно, а пропорционально второй степени $x(0)$.

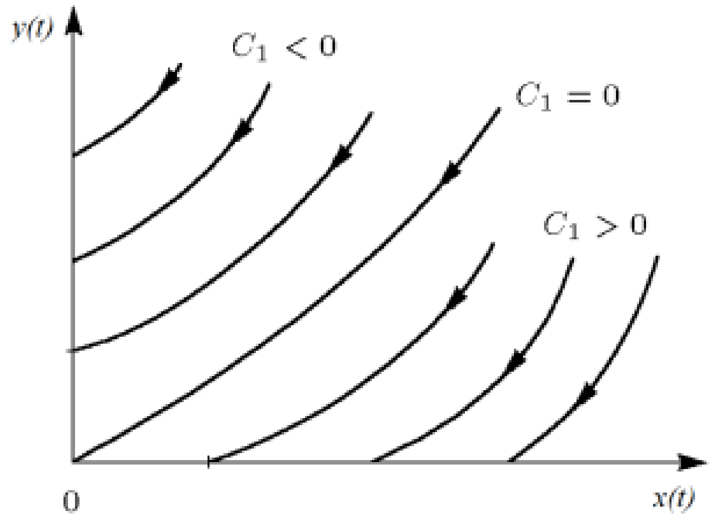

Рис. 4.2: Фазовые раектории системы для второго случая

4. Написала код на Julia для первого и второго случая:

```
#подключаем модули
using Plots
using DifferentialEquations

#задаем численность армий
const x0 = 21200
const y0 = 9800
#состояние системы (описывается точкой с численностями армий)
point0 = [x0, y0]
#отслеживаемый промежуток времени
time = [0.0, 5.0]

#задаем константы согласно варианту
#первая модель
a1 = 0.45
b1 = 0.86
c1 = 0.49
h1 = 0.73
#вторая модель
a2 = 0.44
b2 = 0.7
c2 = 0.33
h2 = 0.61

#функции (возможность подкрепления)
#первая модель
function P1(t)
    return sin(t+1)
```

```
end

function Q1(t)
    return cos(t+2)
end

#вторая модель
function P2(t)
    return sin(2t)
end

function Q2(t)
    return cos(t)+1
end

#сама система
#для первой модели
function F_M!(dp, point, p, t)
    dp[1] = -a1*point[1] - b1*point[2] + P1(t)
    dp[2] = -c1*point[1] - h1*point[2] + Q1(t)
end

#для  второй модели
function S_M!(dp, point, p, t)
    dp[1] = -a2*point[1] - b2*point[2] + P2(t)
    dp[2] = -c2*point[1]*point[2] - h2*point[2] + Q2(t)
end

t=collect(LinRange(0, 1, 100))
```

```
prob1 = ODEProblem(F_M!, point0, time)
solv1 = solve(prob1, saveat=t)
prob2 = ODEProblem(S_M!, point0, time)
solv2 = solve(prob2, saveat=t)

#построеоние графиков

#первая модель
plt1 = plot(
    solv1,
    vars =(0, 1),
    color =:red,
    label ="Численость войска армии X",
    title ="Модель боевых действий 1",
    xlabel ="Время",
    ylabel ="Численность войск"
)

plot!(
    solv1,
    vars =(0, 2),
    color =:blue,
    label ="Численость войска страны Y"
)

savefig(plt1, "first_j.png")

#вторая модель
plt2 = plot(
```

```
    solv2,
    vars =(0, 1),
    color =:red,
    label ="Численость войска страны X",
    title ="Модель боевых действий 2",
    xlabel ="Время",
    ylabel ="Численность войск"
)

plot!(
    solv2,
    vars =(0, 2),
    color =:blue,
    label ="Численость войска страны Y"
)

savefig(plt2, "second_j.png")
```

5. Написала код на OpenModelica для первого случая:

```
model lab3model1

constant Real a = 0.45;
constant Real b = 0.86;
constant Real c = 0.49;
constant Real h = 0.73;

Real P;
Real Q;

Real x(start=21200);
```

```
Real y(start=9800);

equation
P = sin(time+1);
Q = cos(time+2);
der(x) = - a * x - b * y + P;
der(y) = - c * x - h * y + Q;

end lab3model1;
```

6. Написала код на OpenModelica для второго случая (в один не получилось):

```
model lab3model1

constant Real a = 0.44;
constant Real b = 0.7;
constant Real c = 0.33;
constant Real h = 0.61;

Real P;
Real Q;

Real x(start=21200);
Real y(start=9800);

equation
P = sin(2*time);
Q = cos(time)+1;
der(x) = - a * x - b * y + P;
der(y) = - c * x * y - h * y + Q;
```

```
end lab3model1;
```

7. Посмотрим на график численности для первого случая, полученный с помощью Julia (рис. 4.3) и OpenModelica (рис. 4.4). Видим, что победа досталась стране **X** (так как численность армии страны **Y** стала равной 0, при том что численность армии противника положительна).

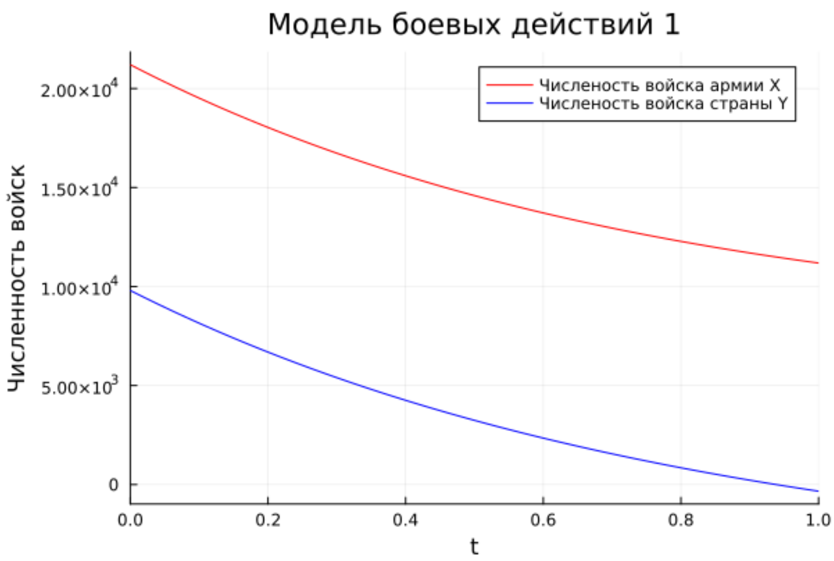

Рис. 4.3: Модель боевых действий между регулярными войсками (Julia)

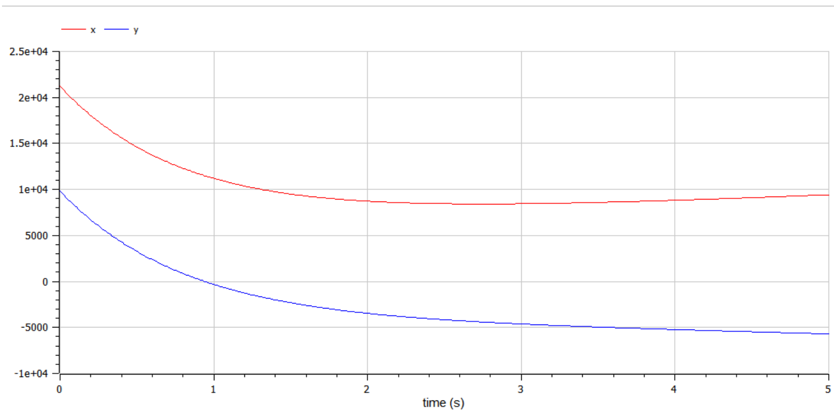

Рис. 4.4: Модель боевых действий между регулярными войсками (OpenModelica)

8. Посмотрим на график численности для второго случая, полученный с помо-

щью Julia (рис. 4.5) и OpenModelica (рис. 4.6). Видим, что победа досталась стране **X** (так как численность армии страны **Y** стала равной 0, при том что численность армии противника положительна).

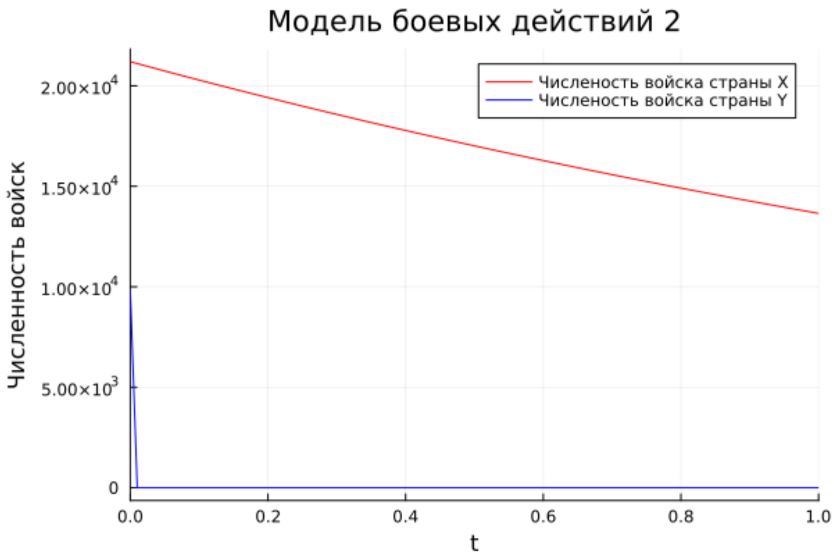

Рис. 4.5: Модель боевых действий с участием регулярных войск и партизанских отрядов (Julia)

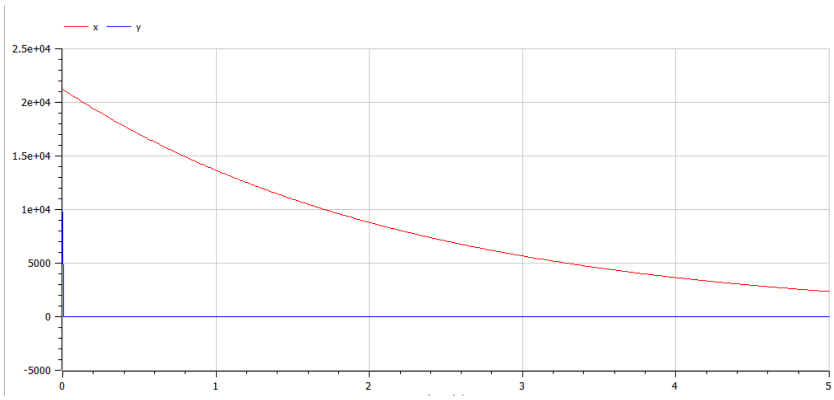

Рис. 4.6: Модель боевых действий с участием регулярных войск и партизанских отрядов (OpenModelica)

5 Выводы

Я рассмотрела некоторые простейшие модели боевых действий – модели Ланчестера. Выполнила задание согласно варианту: построила графики изменения численности войск армии Х и армии У для двух случаев, определила победителей.

Список литературы

1. Лабораторная работа №3 [Электронный ресурс]. Российский университет дружбы народов, 2023. URL: https://esystem.rudn.ru/pluginfile.php/1971725/mod_resource/content/2/Лабораторная%20работа%20№%202.pdf.