Wiskunde

Gerwin van Dijken
(gerwin.vandijken@inholland.nl)

Wiskunde programma

- Blok 3:
  - Recursie (1)
  - Recursie (2)
  - **Markov keten**

- Blok 4:
  - Grafen
  - Minimum Spanning Tree algorithms (Prim, Kruskal)
  - Shortest path algorithms (Dijkstra, A*)
  - Proeftentamen / herhaling

‘Andrey Markov’

1856 - 1922

Markov keten

- Bepalen van statistische gegevens (eigenschappen) van een systeem (spel)
  - bv: hoe lang duurt een gemiddeld spel?

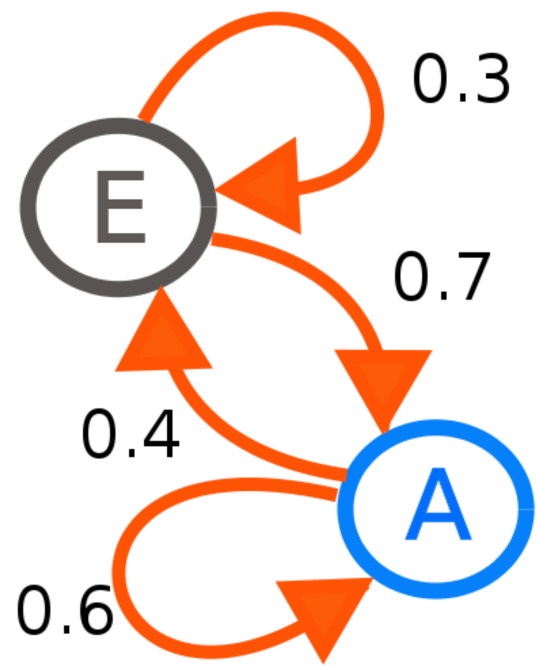
- Dat kan middels het bijhouden van gegevens van vele gebruikers (spelers)
  - kan bij alle systemen; kost veel tijd (via data)

- Dat kan via een Markov-keten
  - kan alleen bij systemen met duidelijke toestandsovergangen; kost weinig tijd (via model)

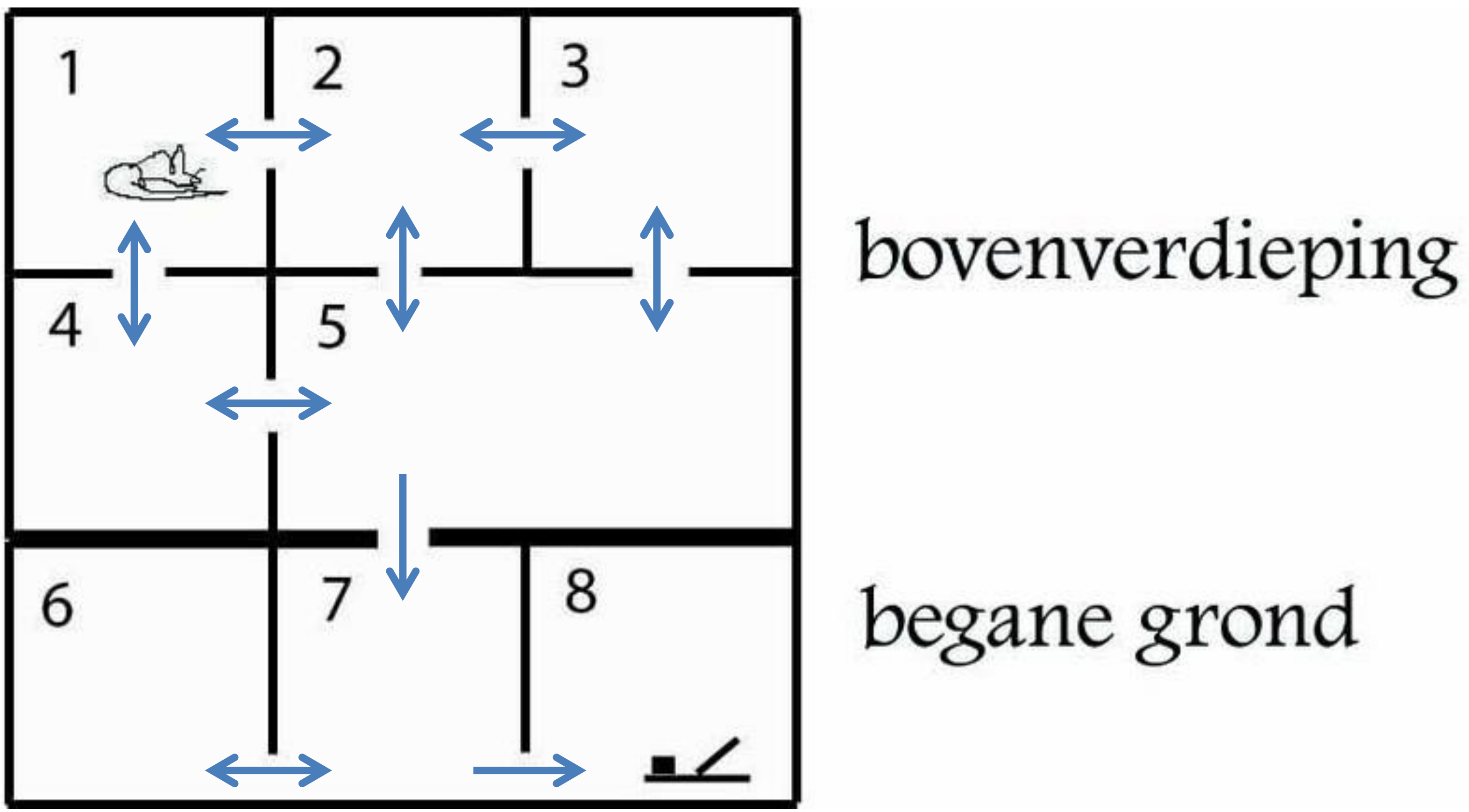
Markov keten

- Beschrijf de mogelijke toestandsovergangen van een systeem (bv een spel) in de tijd

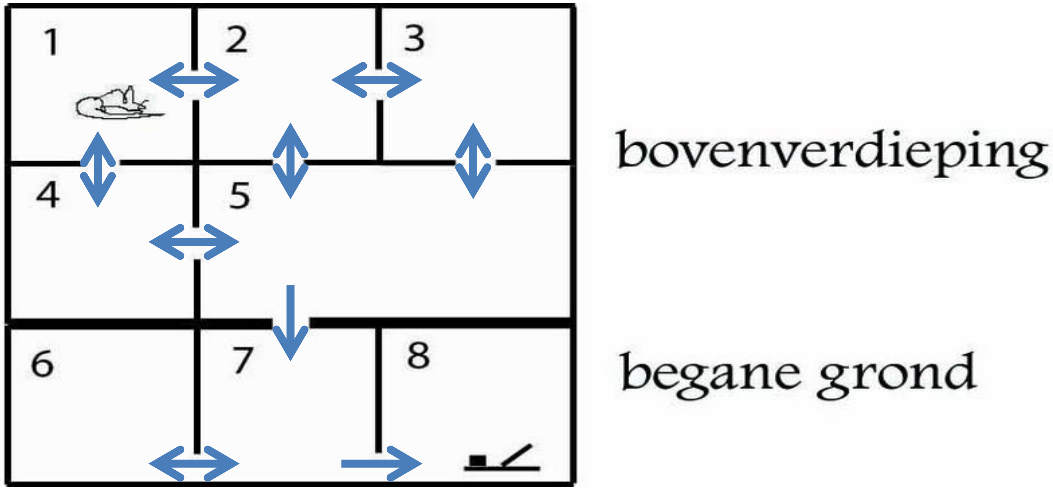
- Bepaal de kans van alle toestandsovergangen

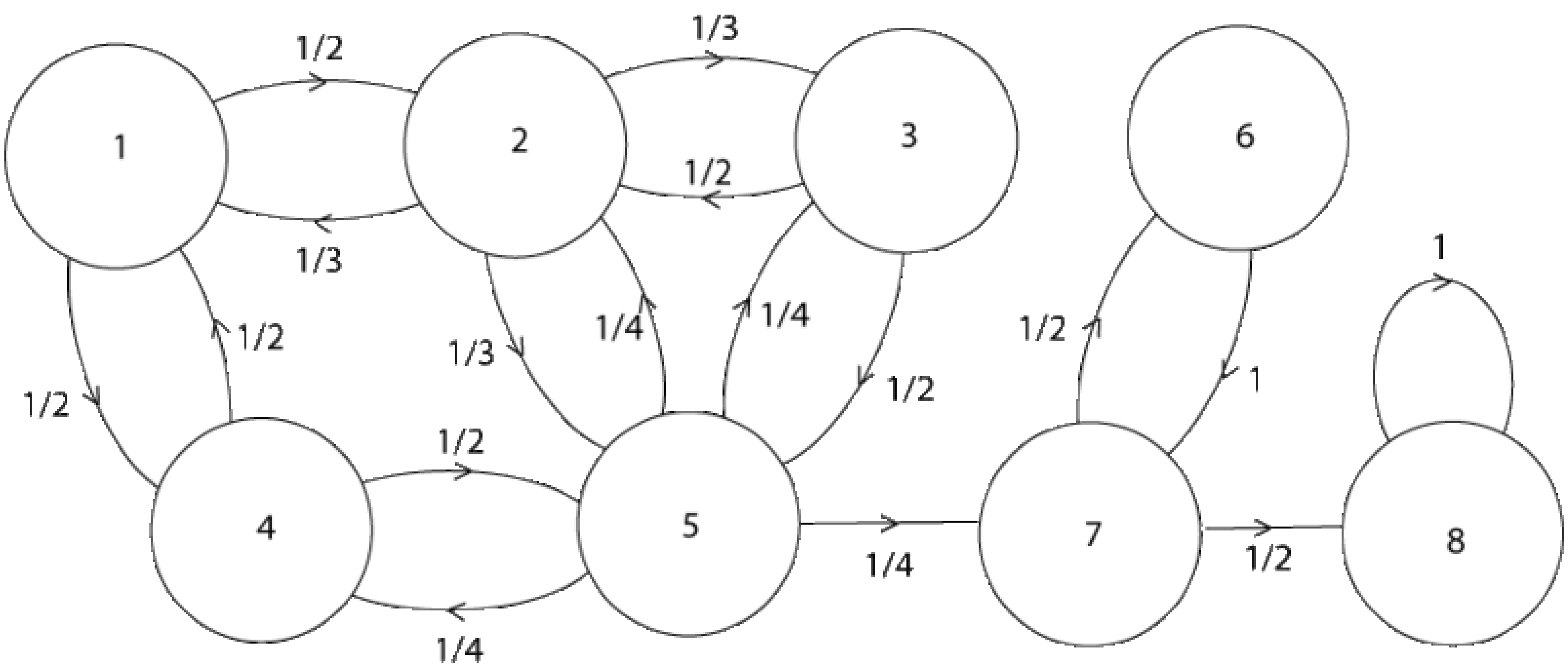


Voorbeeld 1 - 'Muis in huis'

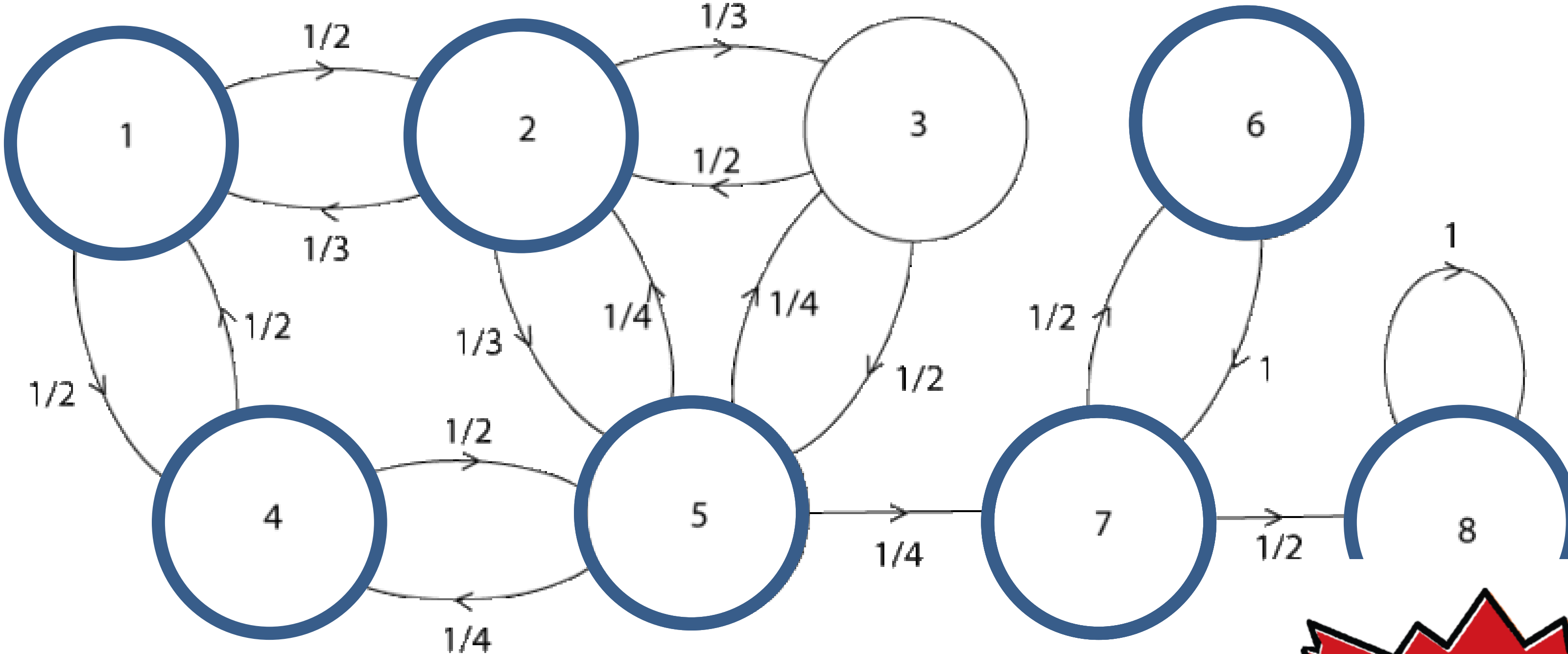


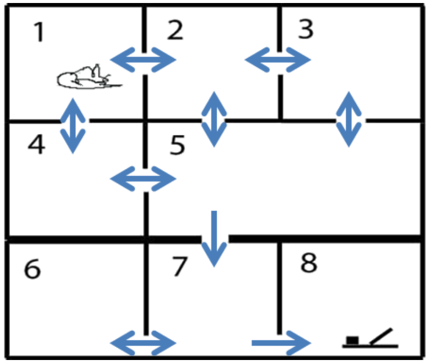
De muis blijft in beweging…


1
2
3
4
5
6
7
8
bovenverdieping
begane grond

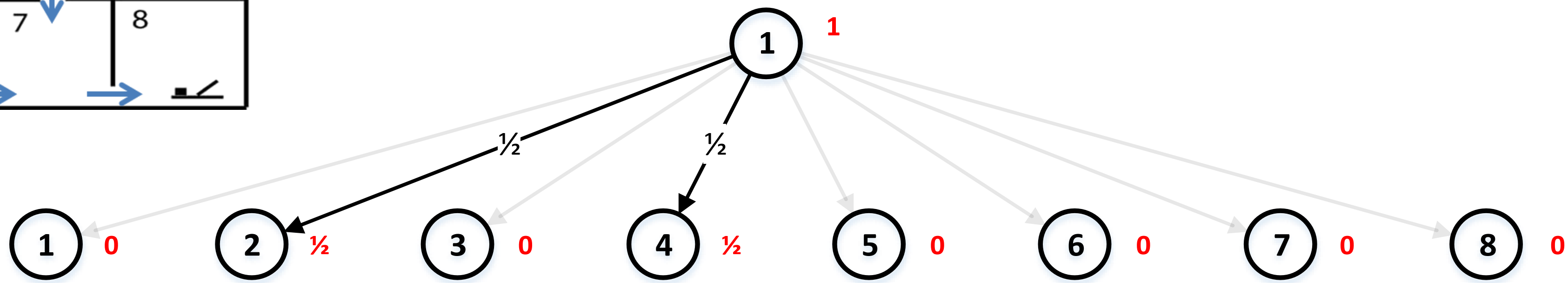

1
2
3
4
5
6
7
8
1/2
1/3
1/3
1/2
1/2
1/2
1/3
1/4
1/4
1/2
1/2
1/4
1/4
1/2
1
1/2
1

Een muis wandeling…

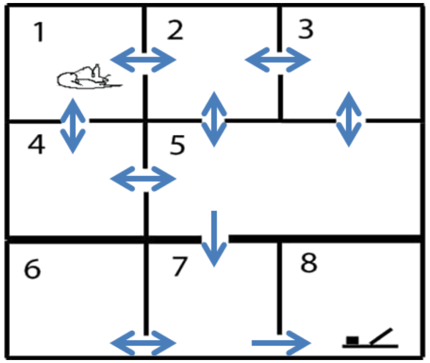




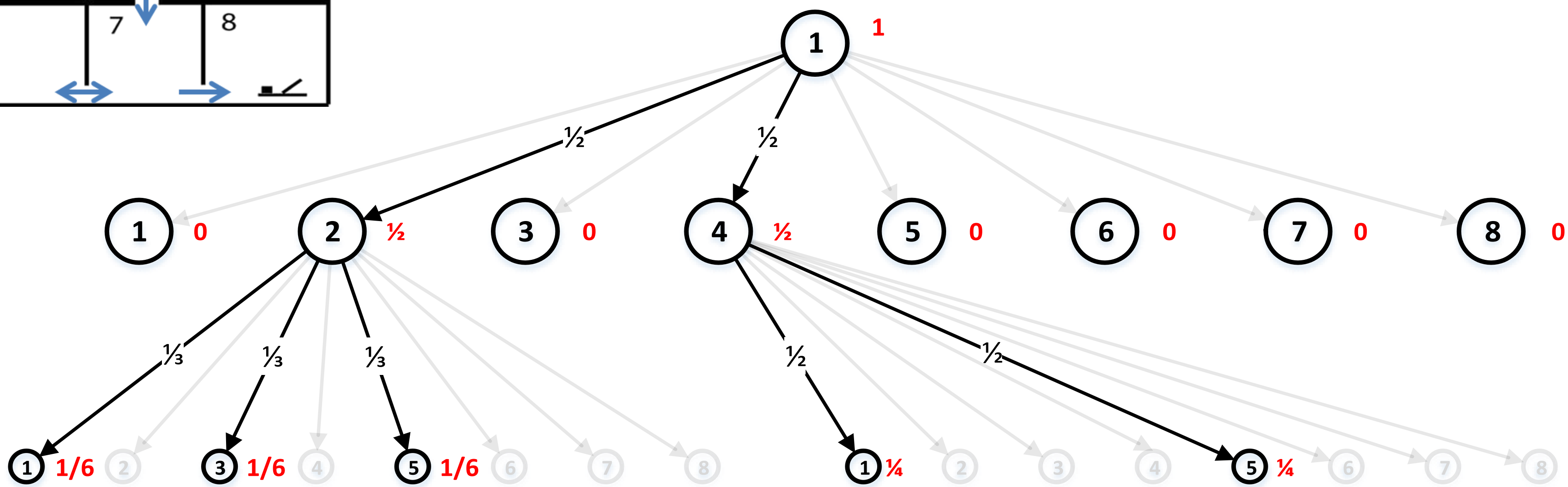
‘kamer-kansen’ na 1 stap



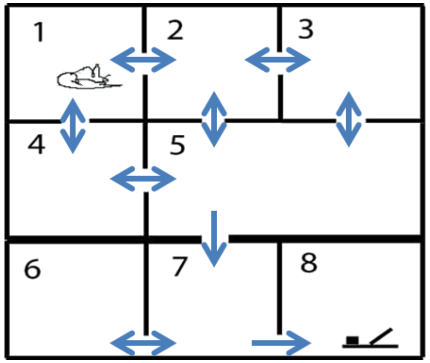
Waar zit de muis na 1 stap?



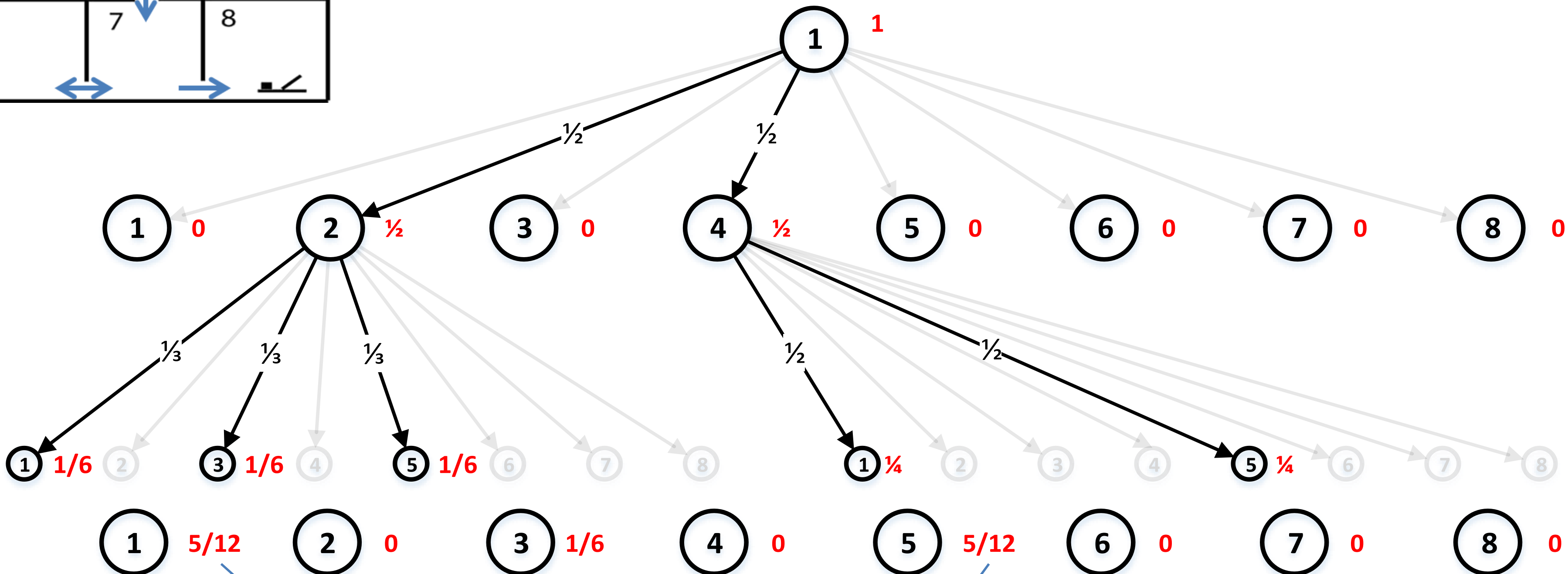
‘kamer-kansen’ na 2 stappen



Waar zit de muis na 2 stappen?



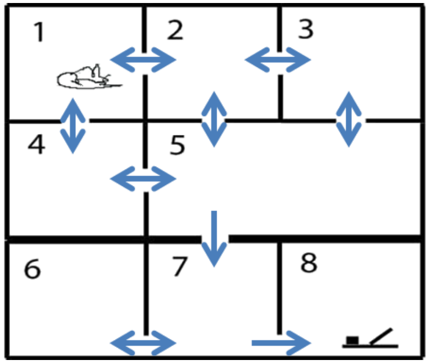
‘kamer-kansen’ na 2 stappen

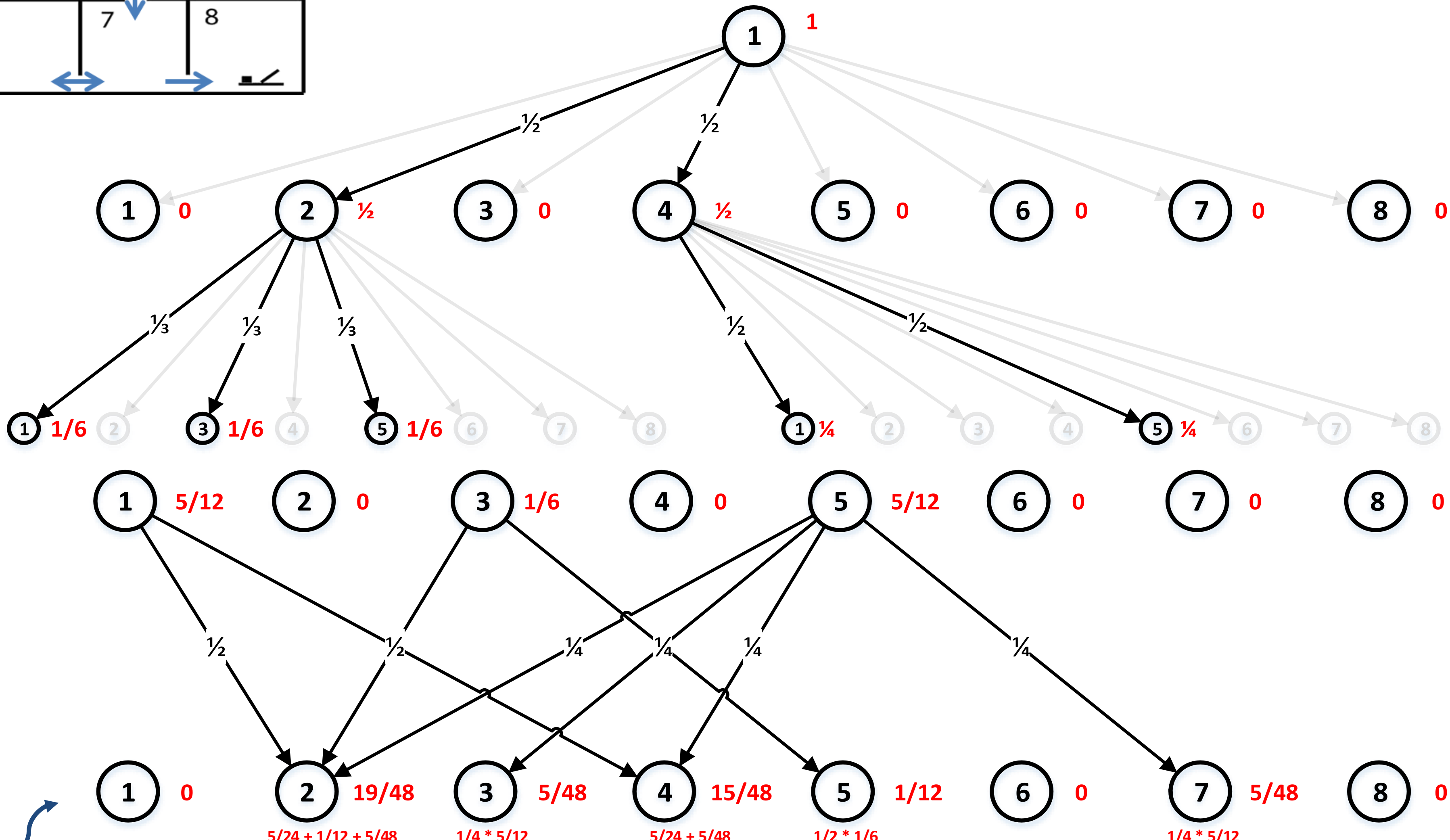


$$\frac{1}{6}+\frac{1}{4}=\frac{2}{12}+\frac{3}{12}=\frac{5}{12}$$

Waar zit de muis na 2 stappen?

‘kamer-kansen’ na 3 stappen





opgeteld altijd 1 ($\frac{19}{48} + \frac{5}{48} + \frac{15}{48} + \frac{4}{48} + \frac{5}{48}$)

Waar zit de muis na 3 stappen?

‘kamer-kans’ berekening

- Kans dat je in kamer *j* belandt (na een volgende stap) is de som van elke kamer-kans (*i*) maal de kans dat je van die kamer *i* naar kamer *j* gaat

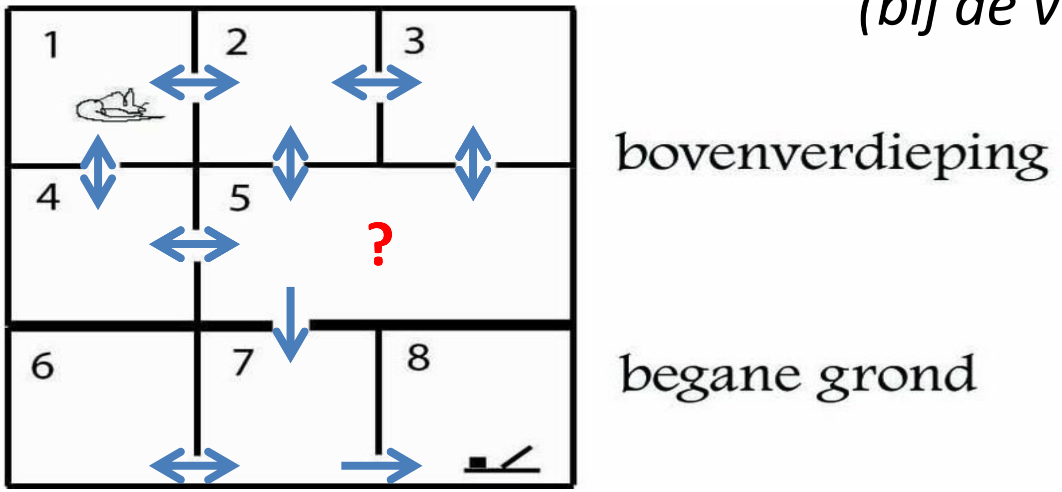
$$p(j) = \sum_{i=1}^{\mathrm{n}} p(i) \times p(i \to j)$$

n = 8 (aantal kamers)

$$p(5) = p(1) \times p(1 \to 5) + p(2) \times p(2 \to 5) + \ \dots + p(8) \times p(8 \to 5)$$

Kans dat muis in kamer 5 komt?

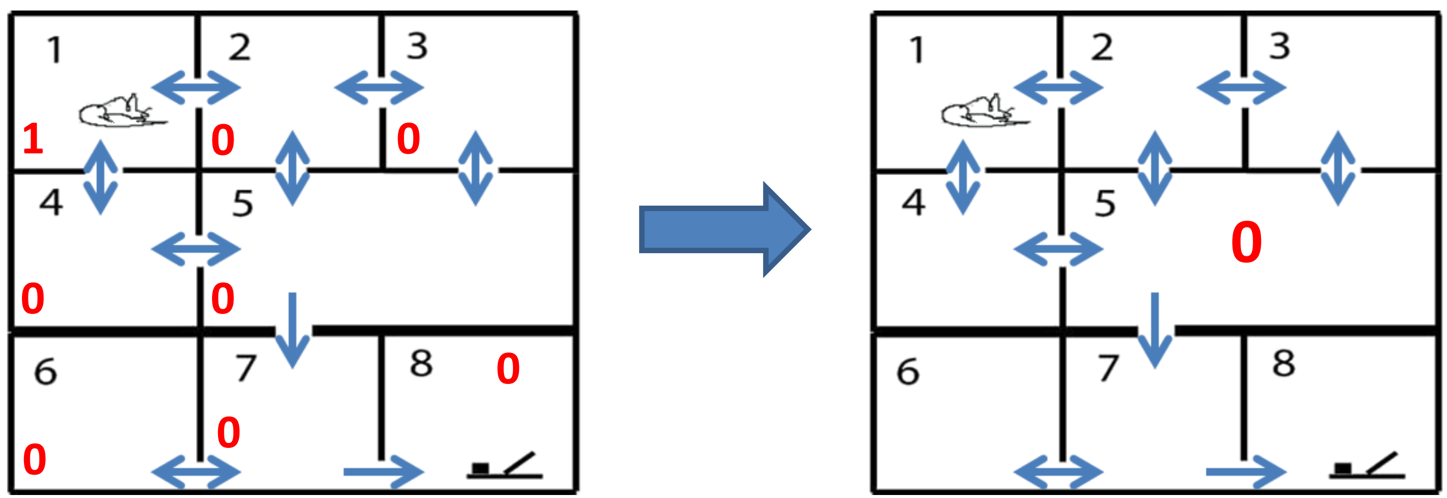
(bij de volgende stap)



Is afhankelijk van:

1. de huidige kamer-kansen;
2. de overgangskansen <u>van elke kamer</u> naar kamer 5;

Kans dat muis in kamer 5 komt? *(na 1 stap)*



$p(1) \times p(1 \rightarrow 5)$ + $\qquad$ 1×0 +

$p(2) \times p(2 \rightarrow 5)$ + $\qquad$ $0 \times ⅓$ +

$p(3) \times p(3 \rightarrow 5)$ + $\qquad$ $0 \times ½$ +

$p(4) \times p(4 \rightarrow 5)$ + $\qquad$ $0 \times ½$+

$p(5) \times p(5 \rightarrow 5)$ + $\qquad$ 0×0 +

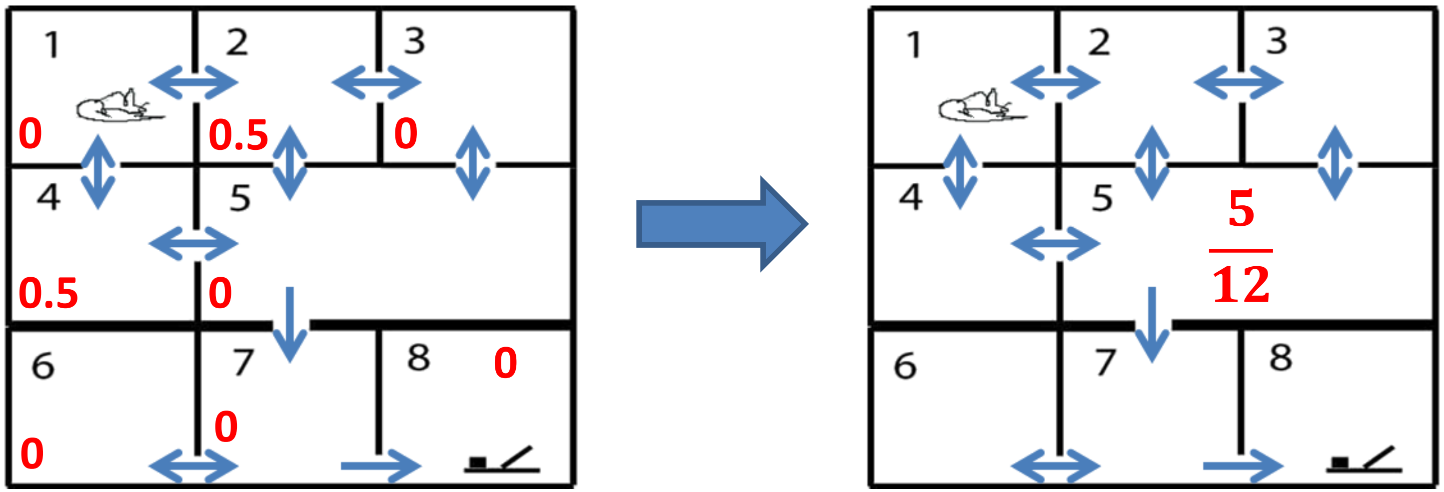
$p(6) \times p(6 \rightarrow 5)$ + $\qquad$ 0×0 +

$p(7) \times p(7 \rightarrow 5)$ + $\qquad$ 0×0 +

$p(8) \times p(8 \rightarrow 5)$ = … $\qquad$ $0 \times 0 \;= 0$

$$p(5) = \sum_{i=1}^{8} p(i) \times p(i \rightarrow 5)$$

Kans dat muis in kamer 5 komt? (na 2 stappen)



$$p(5) = \sum_{i=1}^{8} p(i) \times p(i \to 5)$$

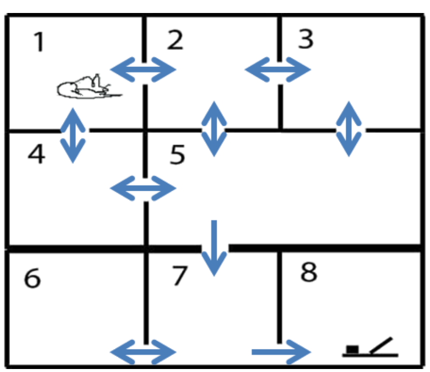
$p(1) \times p(1 \to 5)$ +	0×0 +
$p(2) \times p(2 \to 5)$ +	½ × ⅓ +
$p(3) \times p(3 \to 5)$ +	0 × ½ +
$p(4) \times p(4 \to 5)$ +	½ × ½+
$p(5) \times p(5 \to 5)$ +	0×0 +
$p(6) \times p(6 \to 5)$ +	0×0 +
$p(7) \times p(7 \to 5)$ +	0×0 +
$p(8) \times p(8 \to 5)$ = …	$0 \times 0 \;= \frac{5}{12} = \frac{1}{6} + \frac{1}{4}$

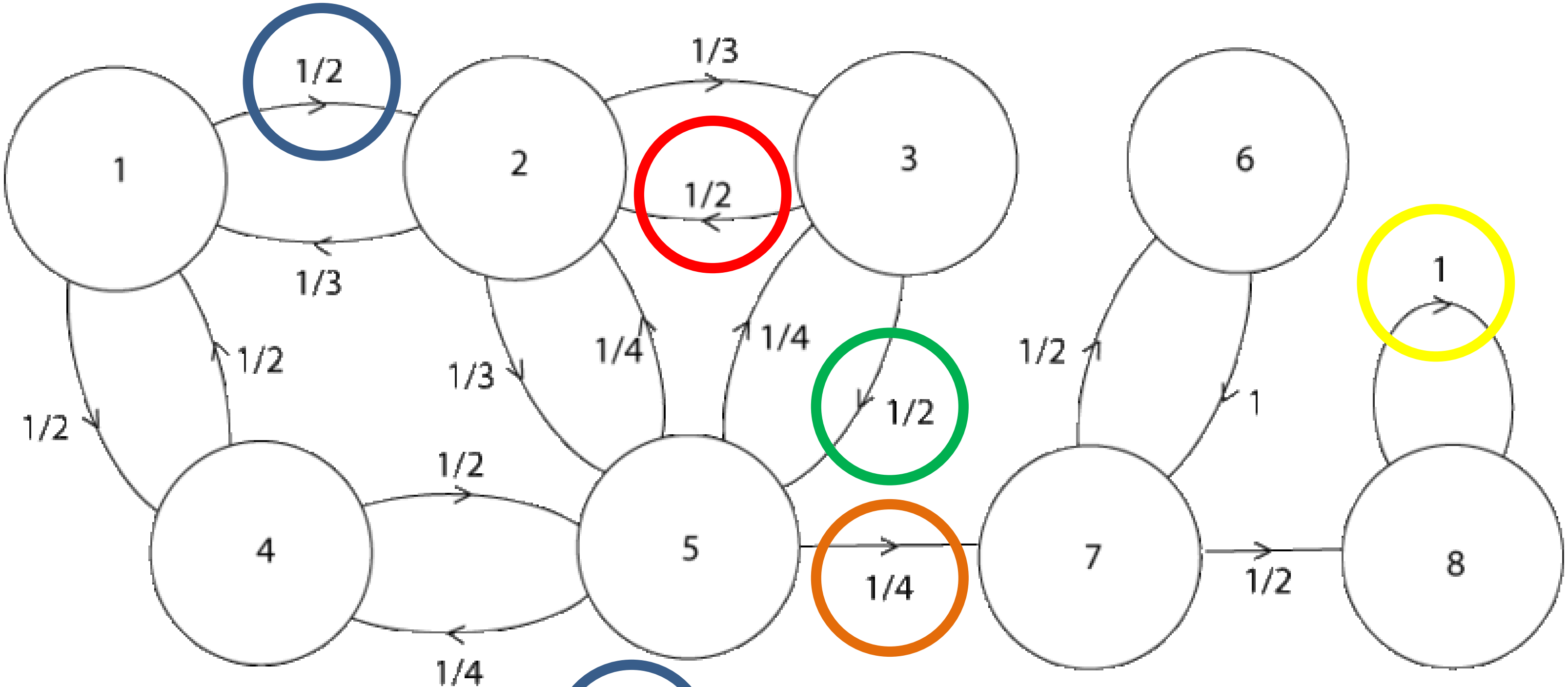
- *Transitie matrix P*
- *In P is het getal op rij i en kolom j de waarschijnlijkheid dat het systeem van toestand i naar toestand j overgaat.*

van (rij *i*)

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 1/4 & 1/4 & 0 & 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

naar (kolom *j*)





van

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 1/4 & 1/4 & 0 & 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

naar

- Begintoestand: *(muis in kamer 5)*

$$\pi_0 = [\boxed{0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0}]$$

- Verwachte toestand na 1 stap:

$$\pi_1 = \pi_0 * P = [\ 0\ \tfrac{1}{4}\ \tfrac{1}{4}\ \tfrac{1}{4}\ 0\ 0\ \tfrac{1}{4}\ 0\ ]$$

- Verwachte toestand na N stappen:

$$\pi_N = \pi_{N-1} * P$$

van ↓

naar →

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 1/4 & 1/4 & 0 & 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

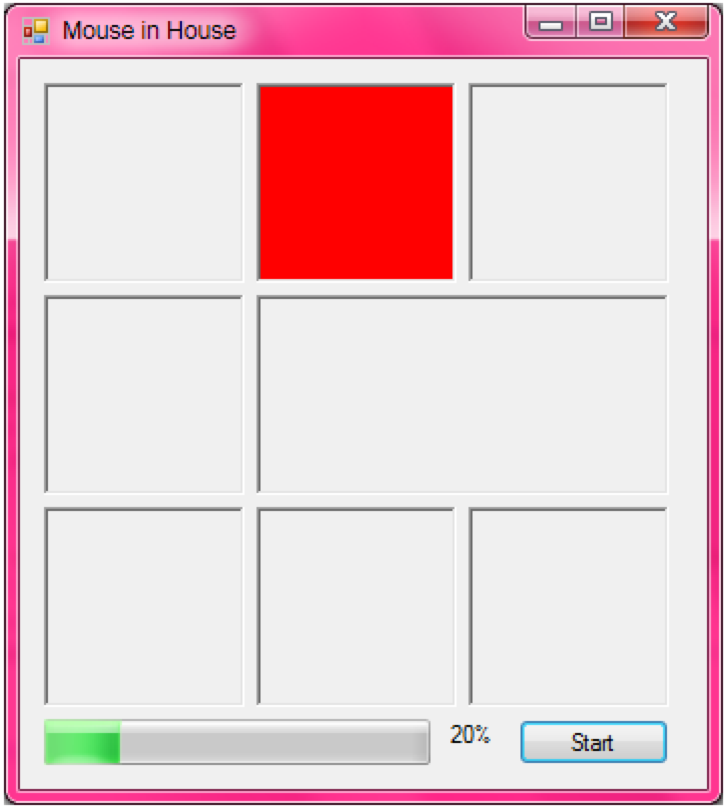
Kans van een doorlopen pad…

- Combinatie van overgangswaarschijnlijkheden
- P(12545767678) =
  $P_{12} \times P_{25} \times P_{54} \times P_{45} \times P_{57} \times P_{76} \times P_{67} \times P_{76} \times P_{67} \times P_{78}$

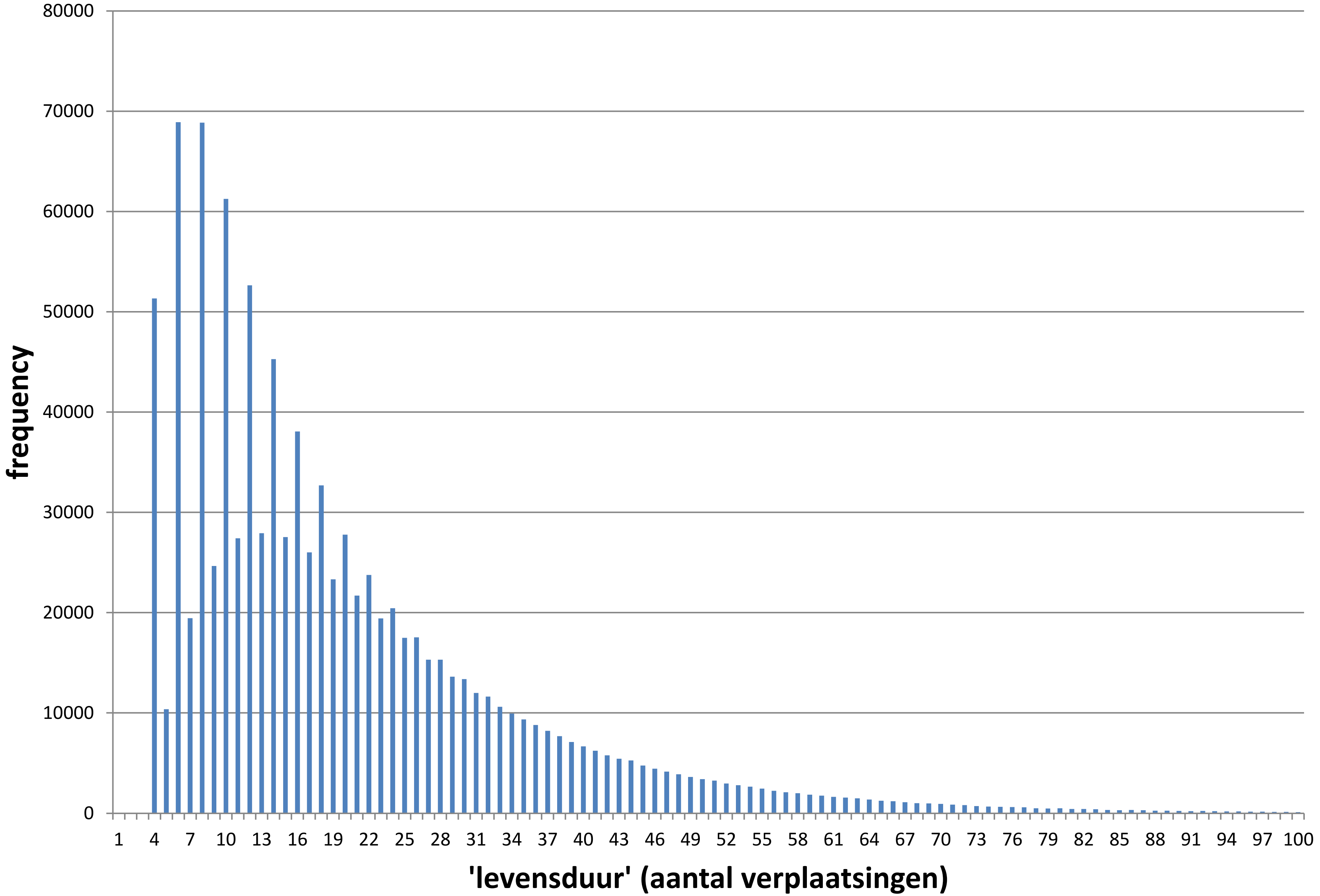
$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} \times 1 \times \frac{1}{2} \times 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{1536} \approx 0.00065104$$

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 1/4 & 1/4 & 0 & 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

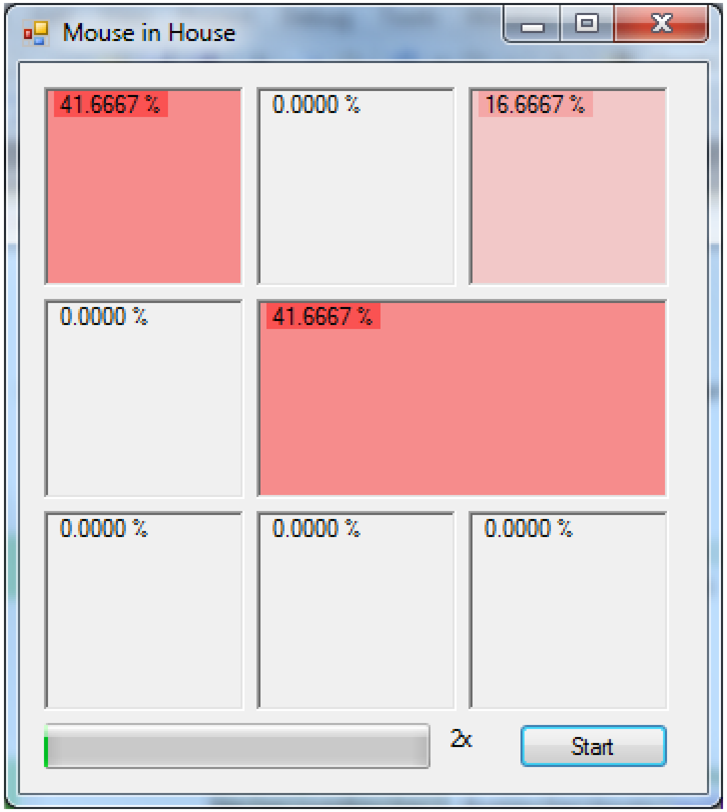
Monte Carlo - demo



Monte Carlo (1.000.000x) - resultaten

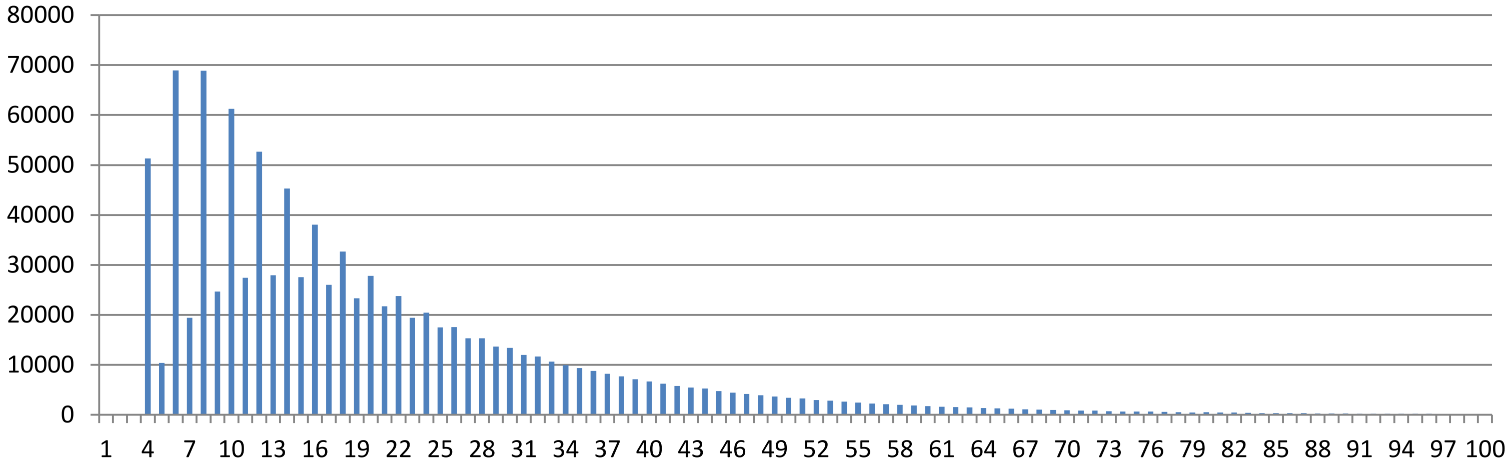


Markov keten - demo

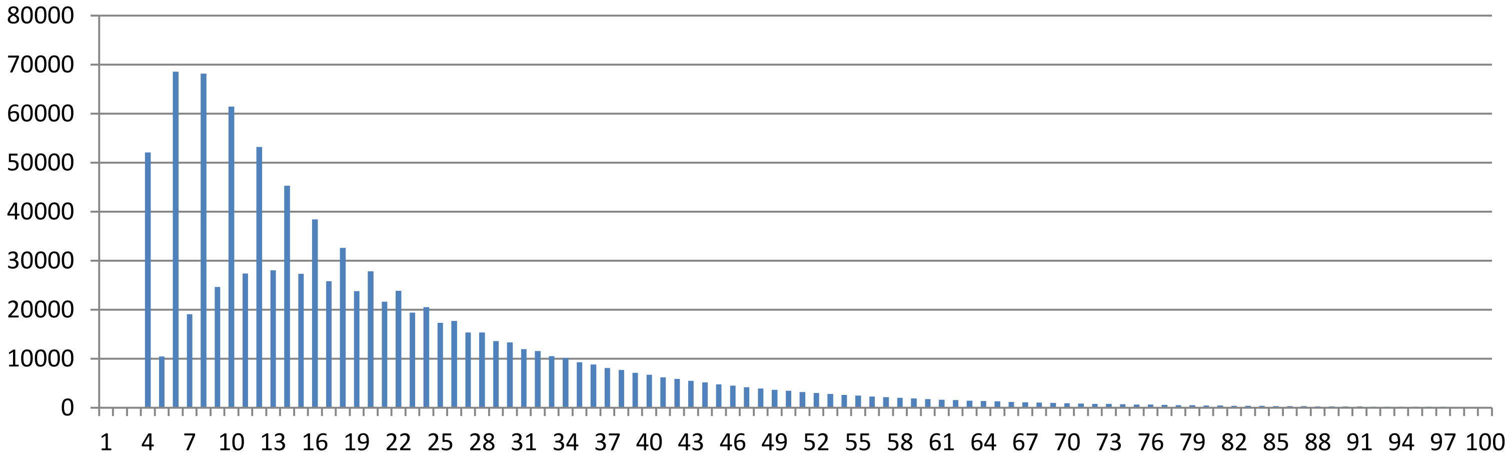


Zoek de verschillen…

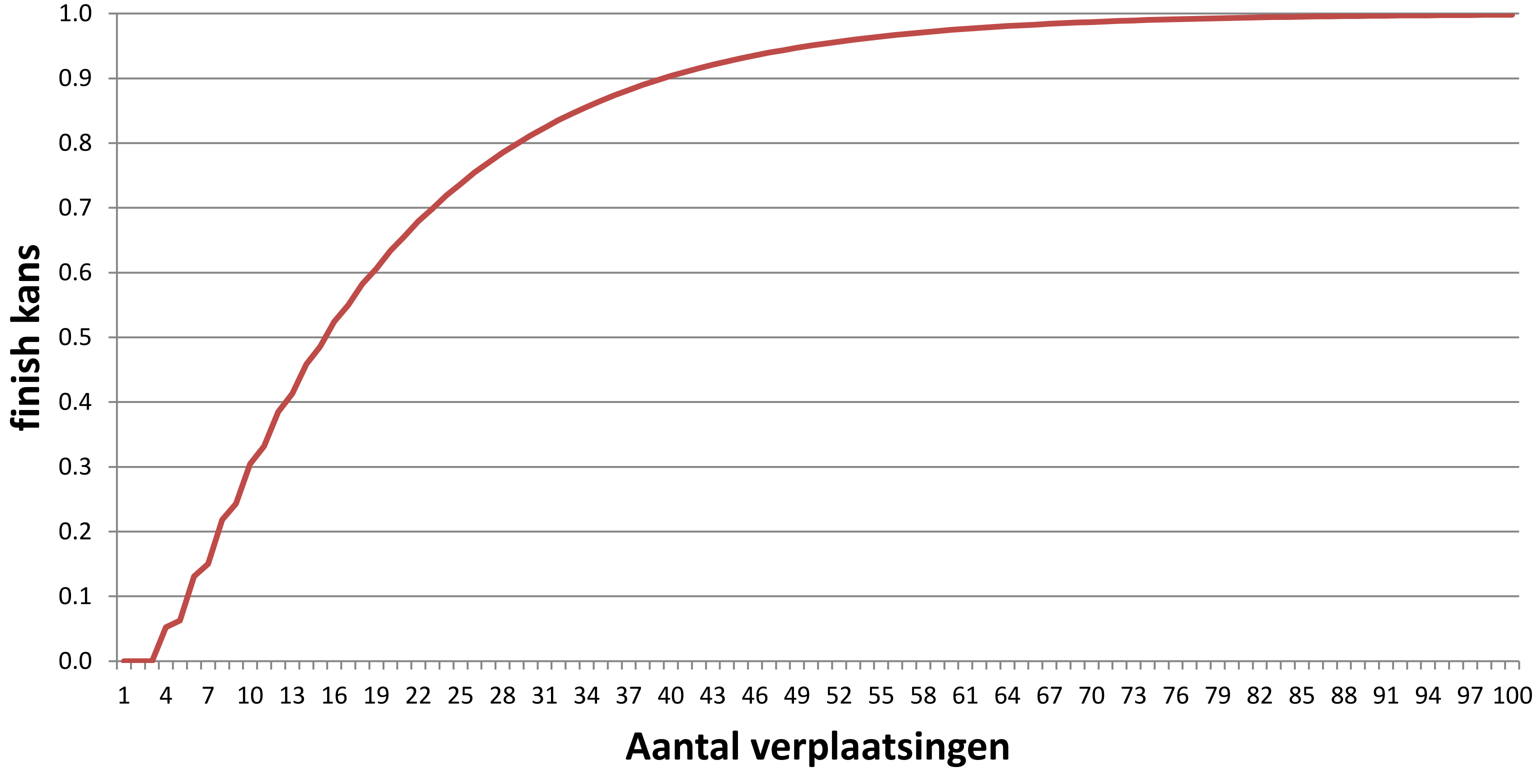
Monte Carlo
(1.000.000x)



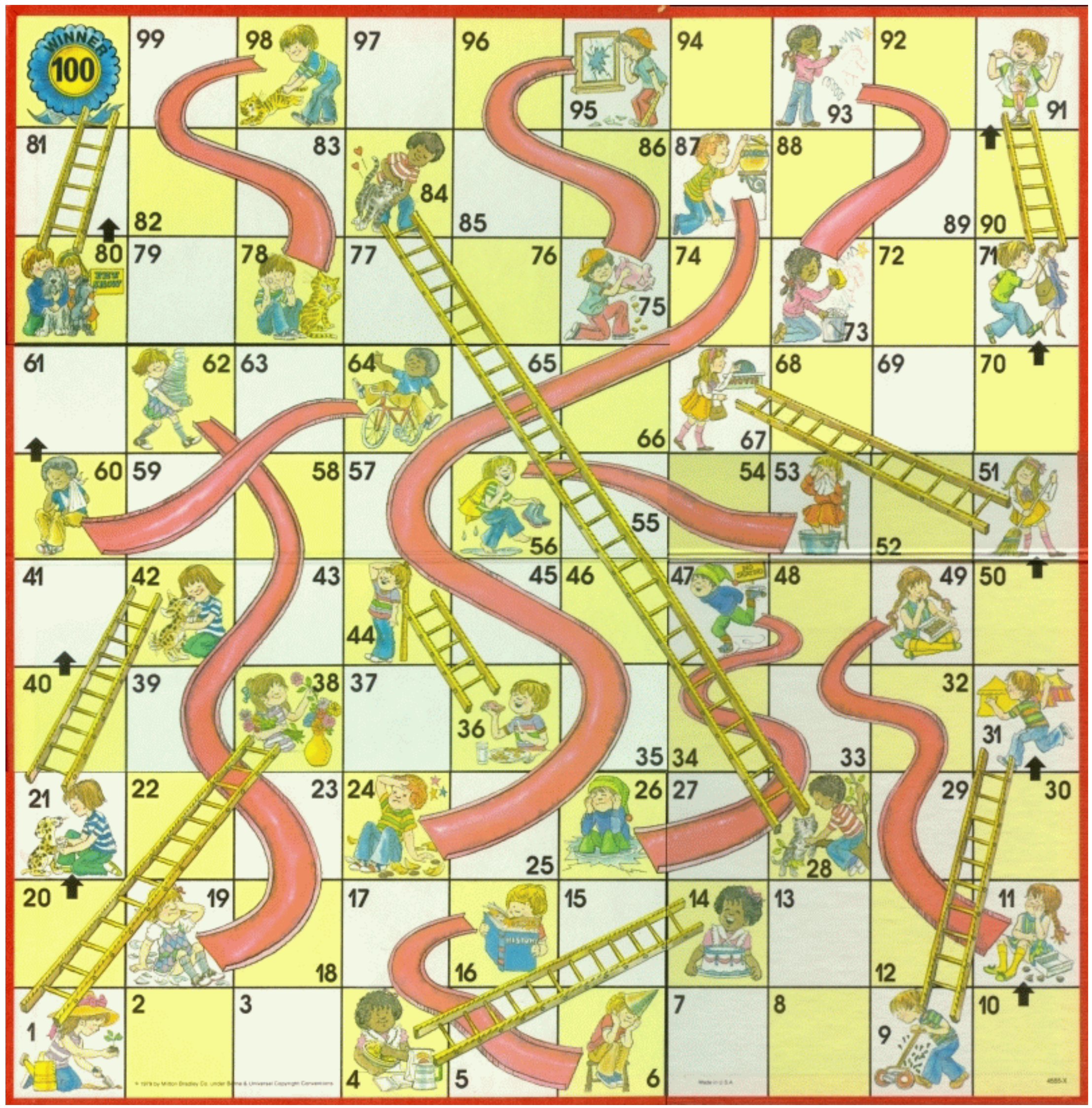
Markov keten
(kans * 1.000.000)



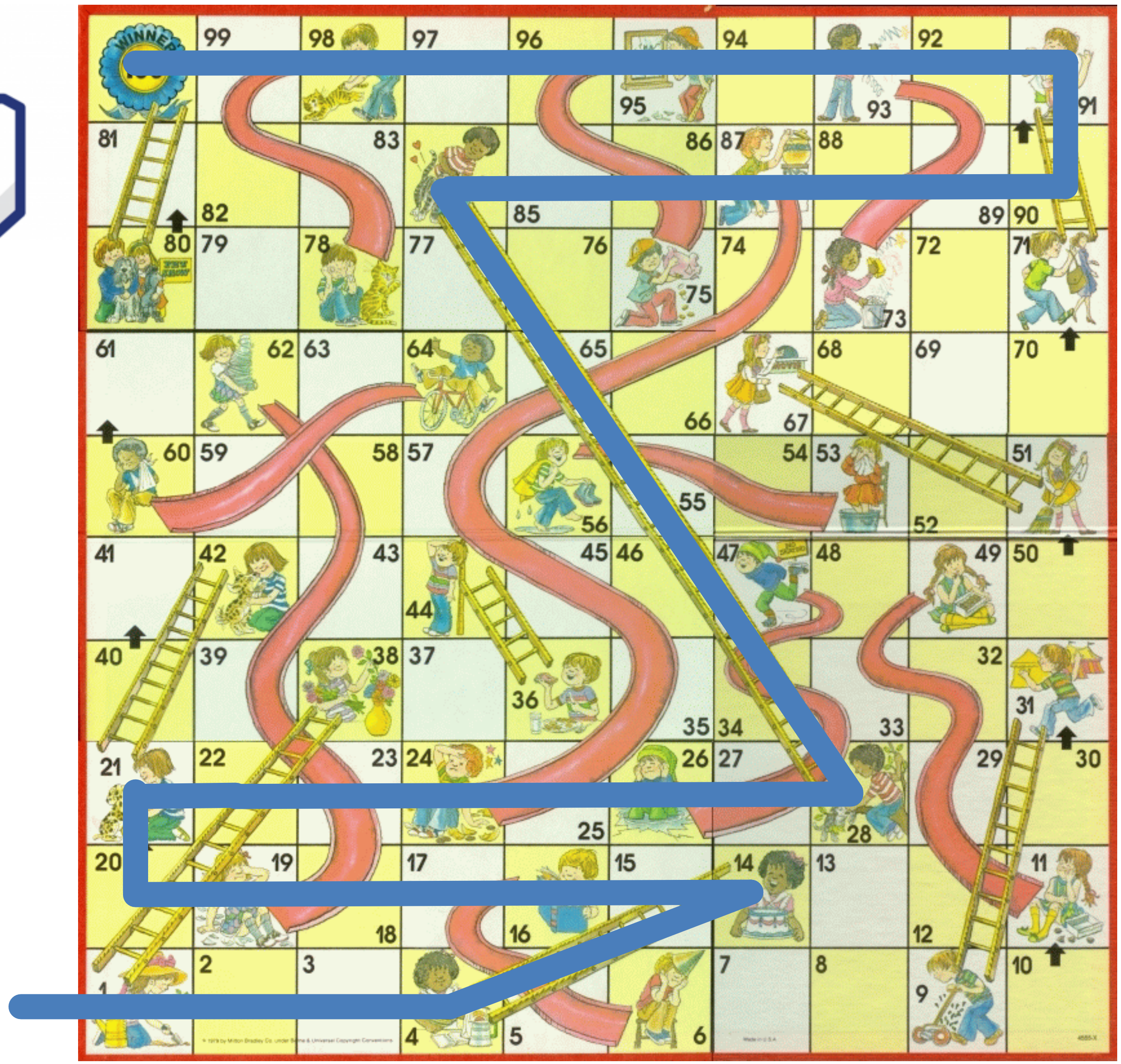
Markov keten



Voorbeeld 2 – ‘Chutes and Ladders’



Hoe lang duurt een (gemiddeld) spel?



4-6-2-6-6-4-6

Chutes and Ladders

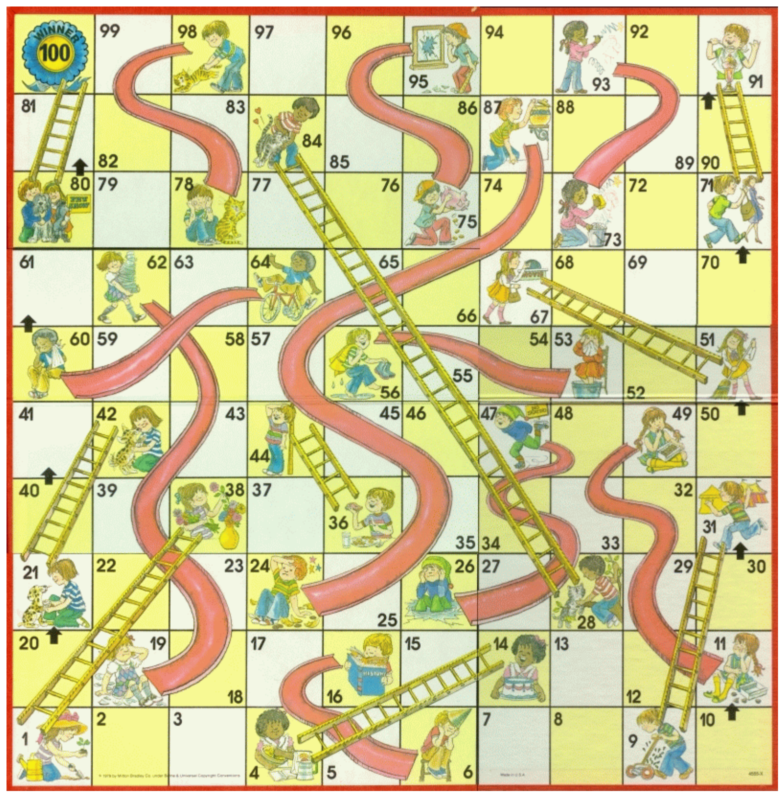
- Transitie matrix van 100 x 100

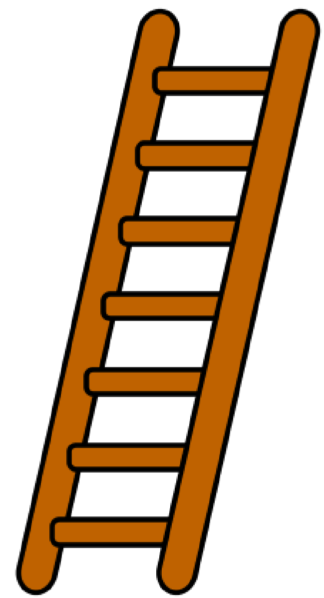
  (kans van elk vakje naar elk vakje)

$$
\begin{array}{c|cccccccccccc}
 & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{4} & \mathbf{5} & \mathbf{6} & \mathbf{7} & \mathbf{8} & \mathbf{9} & \mathbf{10} & \mathbf{11} & \mathbf{12} \\
\hline
\mathbf{1} & 0 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\mathbf{2} & 0 & 0 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\mathbf{3} & 0 & 0 & 0 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 0 & 0 & 0
\end{array}
$$

Transitie matrix (1/3)

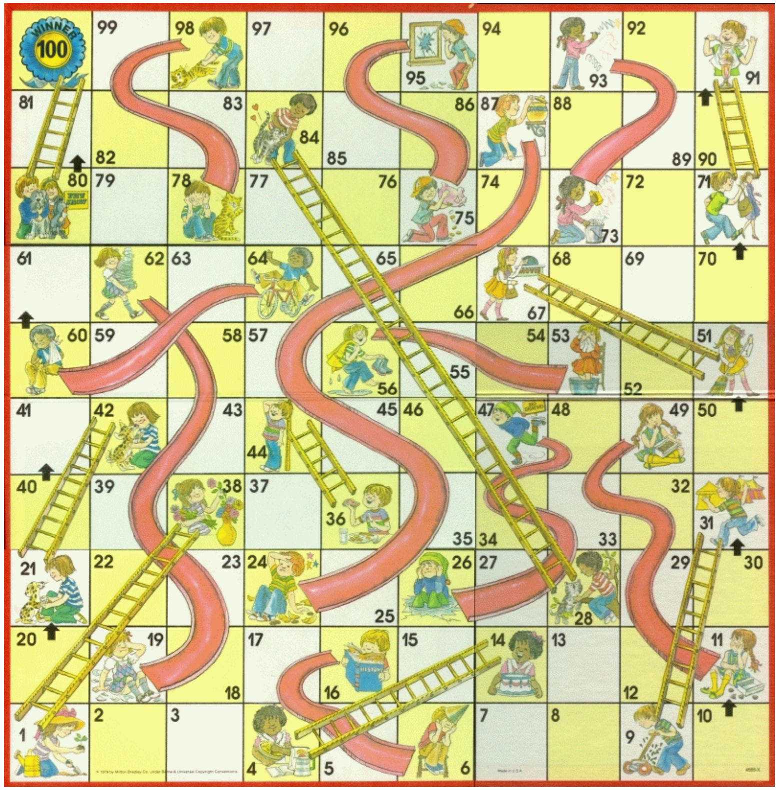
	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
32	0	0	0	1/6	1/6	1/6	0	1/6	1/6	0	0	0	0	0	1/6	0	0	0	0	0
33	0	0	0	0	1/6	1/6	0	1/6	1/6	1/6	0	0	0	0	1/6	0	0	0	0	0
34	0	0	0	0	0	1/6	0	1/6	1/6	1/6	1/6	0	0	0	1/6	0	0	0	0	0





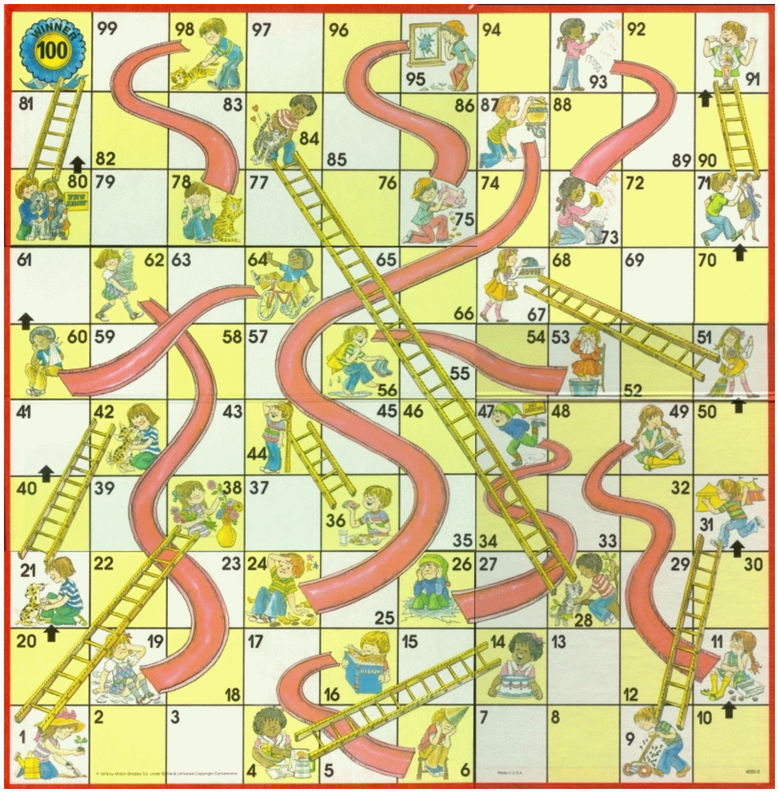
Transitie matrix (2/3)

	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
12	0	1/6	0	0	0	0	0	0	1/6	1/6	1/6	0	1/6	1/6	0	0	0	0	0	0	0
13	0	1/6	0	0	0	0	0	0	0	1/6	1/6	0	1/6	1/6	1/6	0	0	0	0	0	0
14	0	1/6	0	0	0	0	0	0	0	0	1/6	0	1/6	1/6	1/6	1/6	0	0	0	0	0

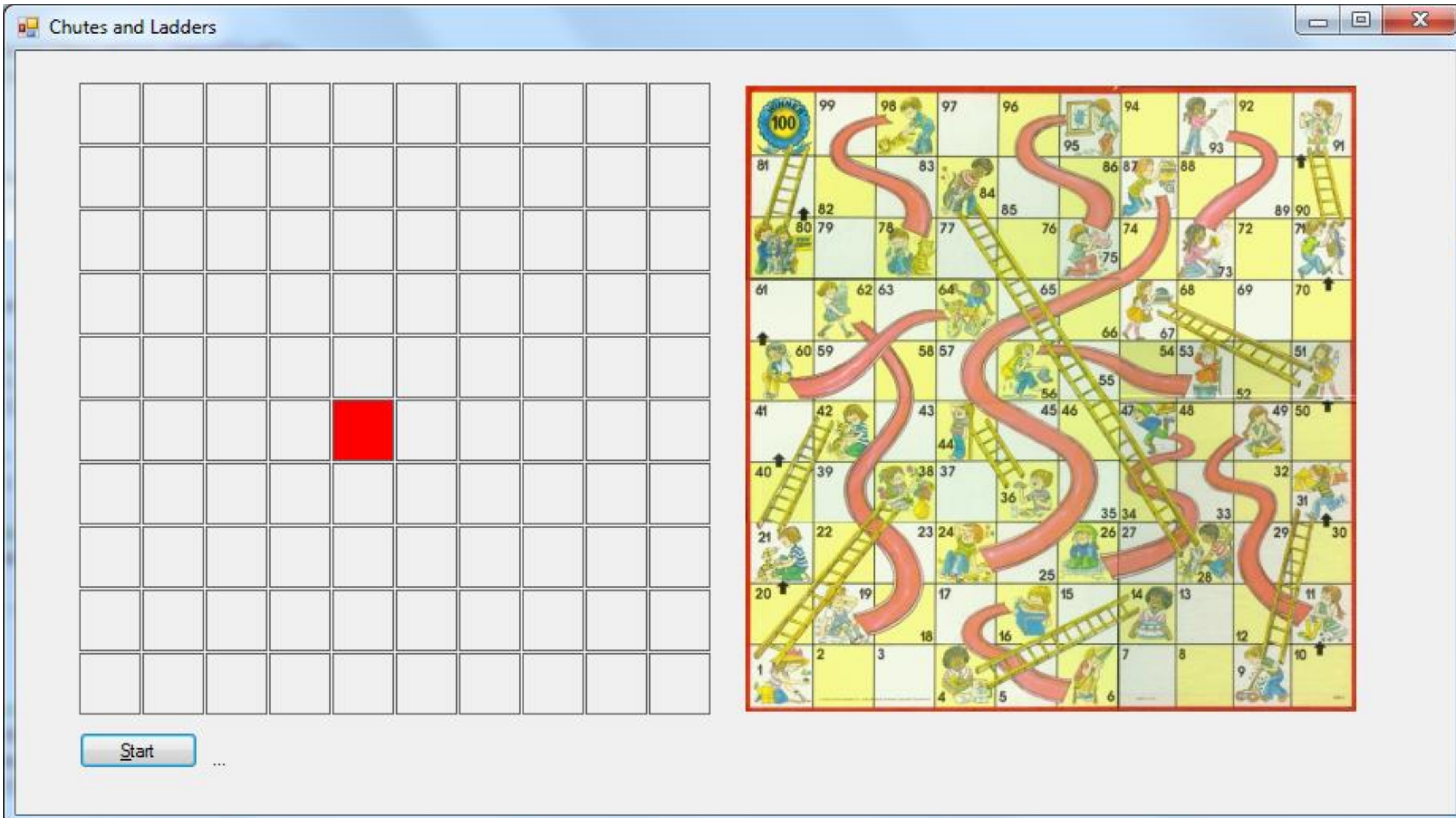


Transitie matrix (3/3)

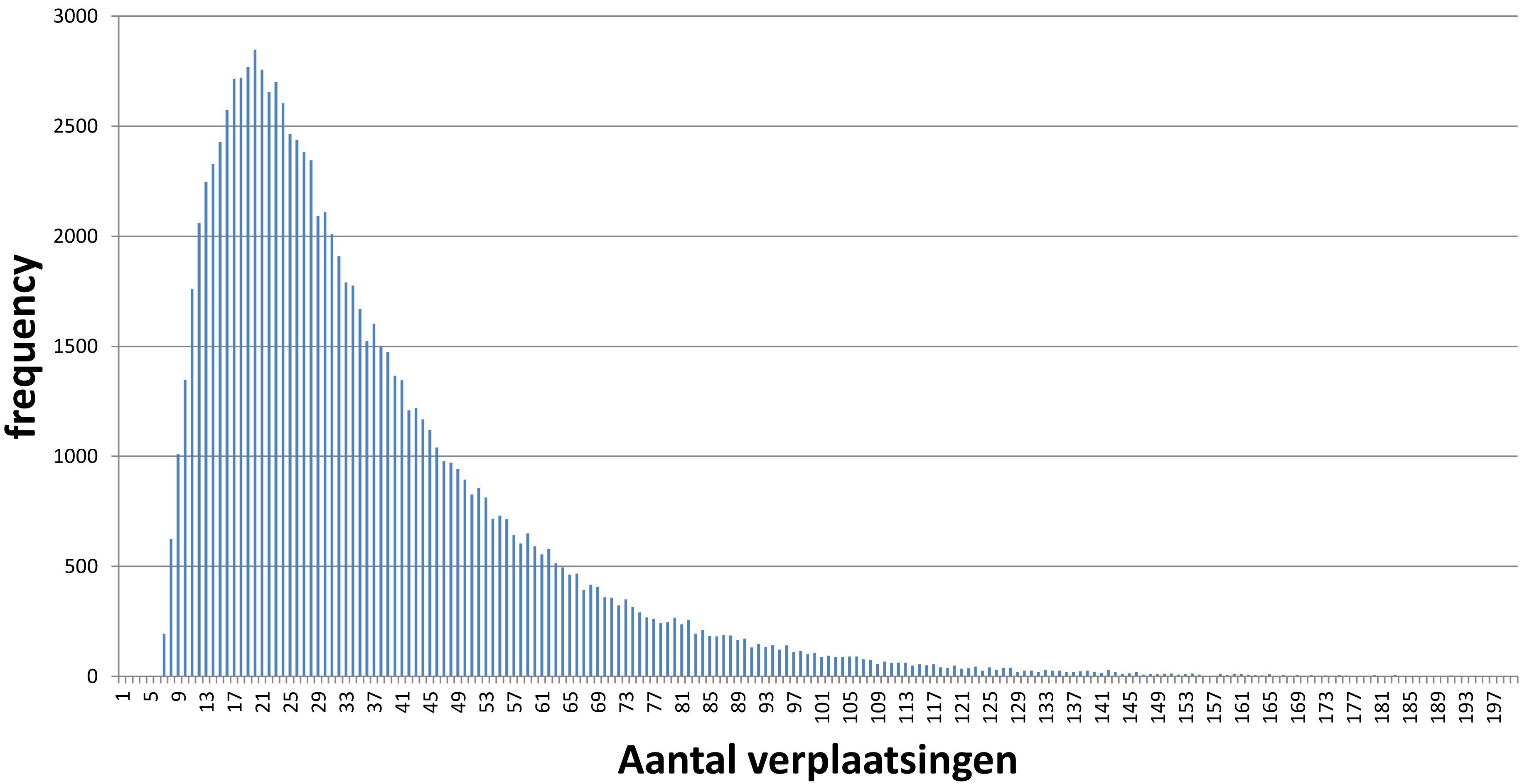
	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
96	0	1/6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1/6	0	1/6	3/6
97	0	1/6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1/6	4/6
98	0	1/6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1/6	5/6



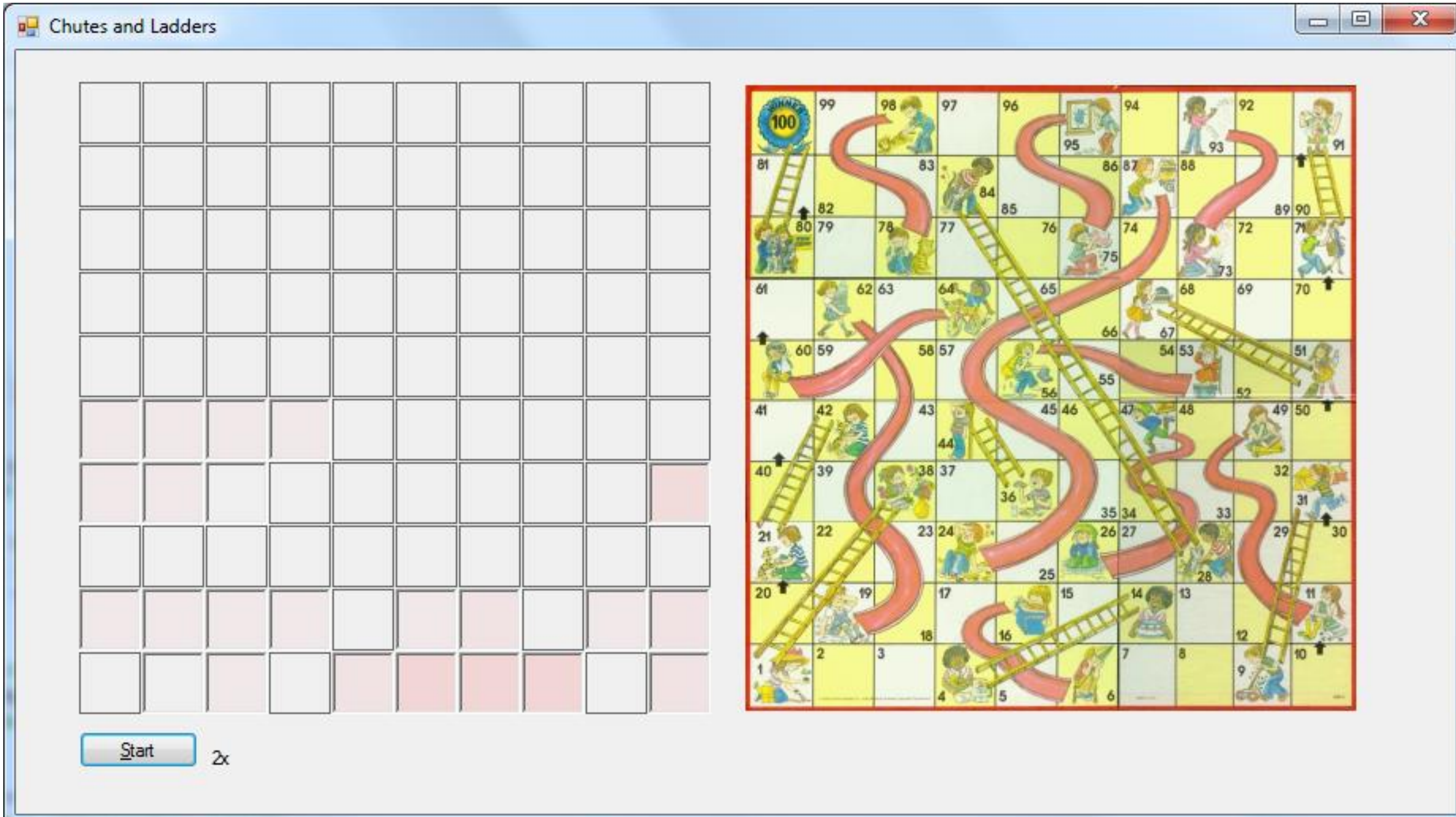
Monte Carlo - demo



Monte Carlo (100.000x) - resultaten

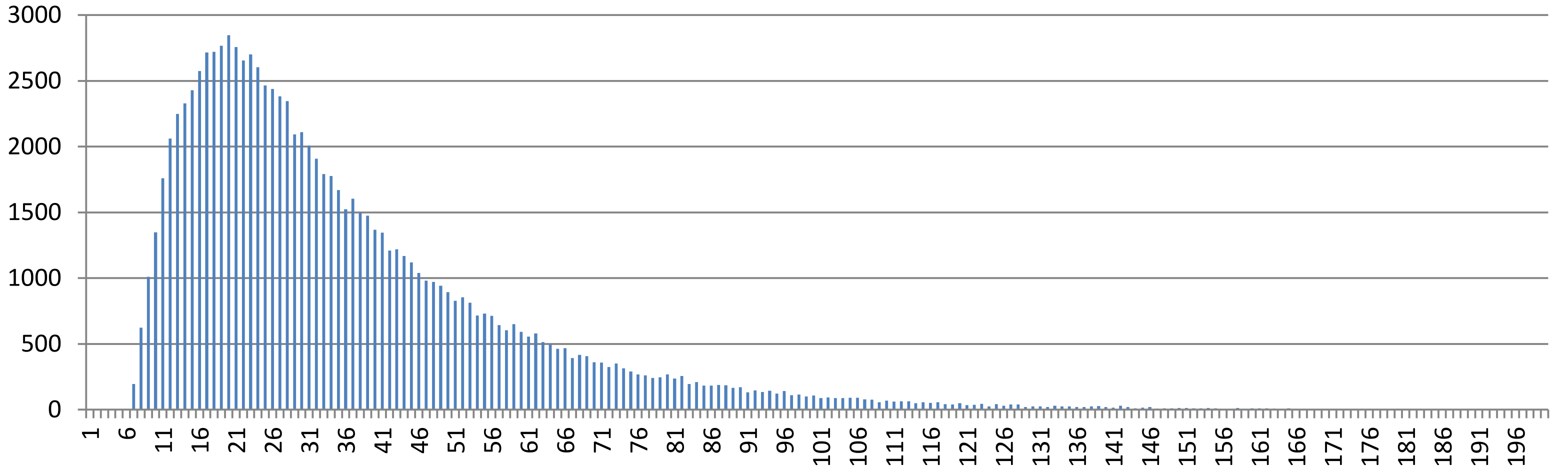


Markov keten - demo

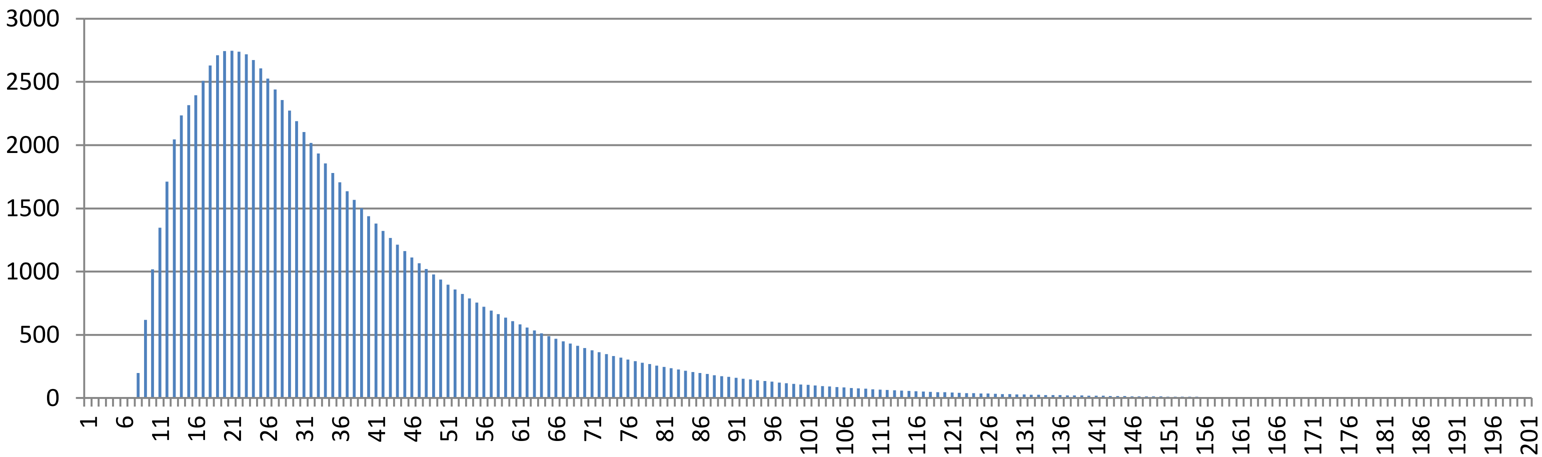


Zoek de verschillen…

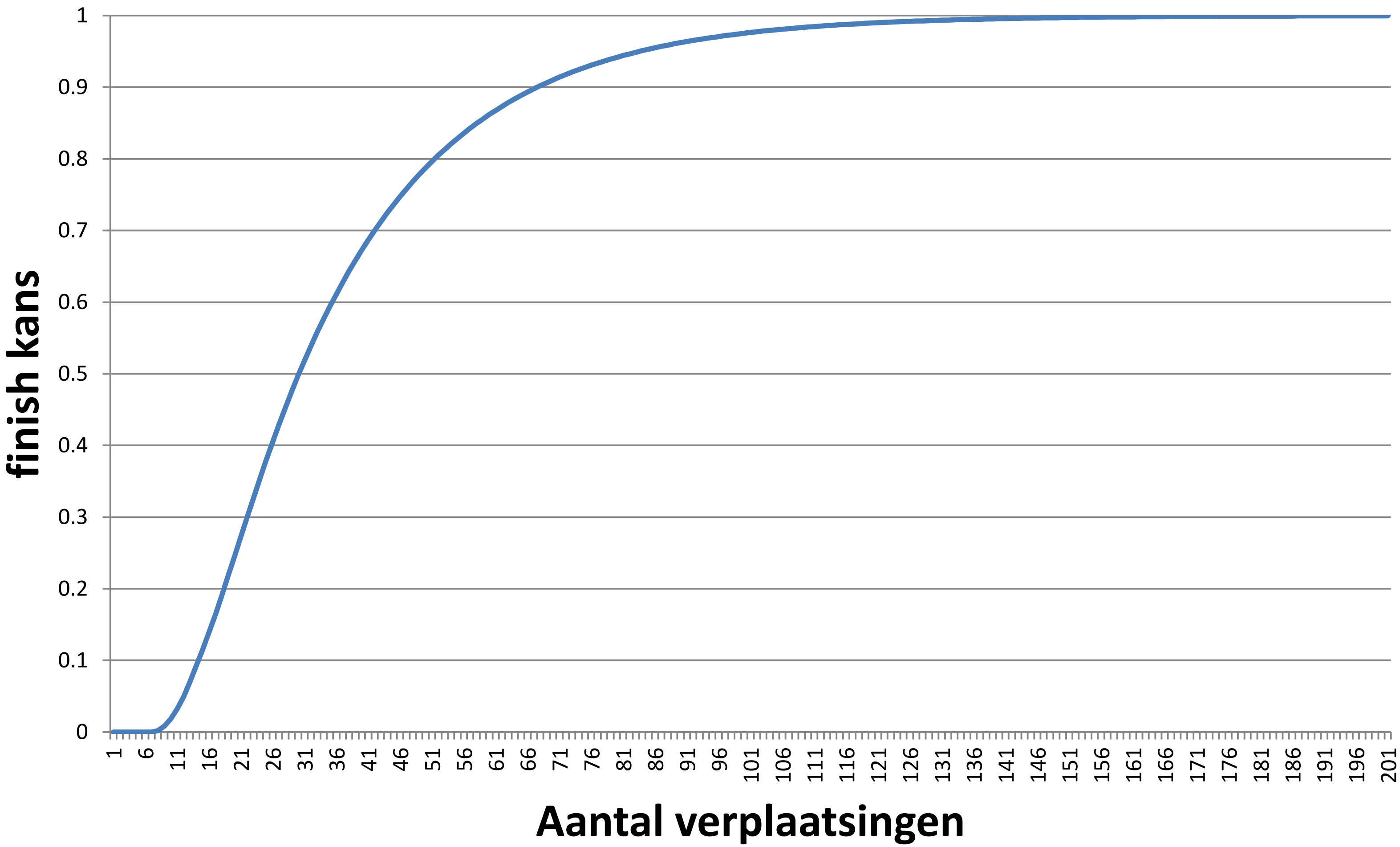
Monte Carlo
(100.000x)



Markov keten
(kans * 100.000)



Finish kans na N beurten



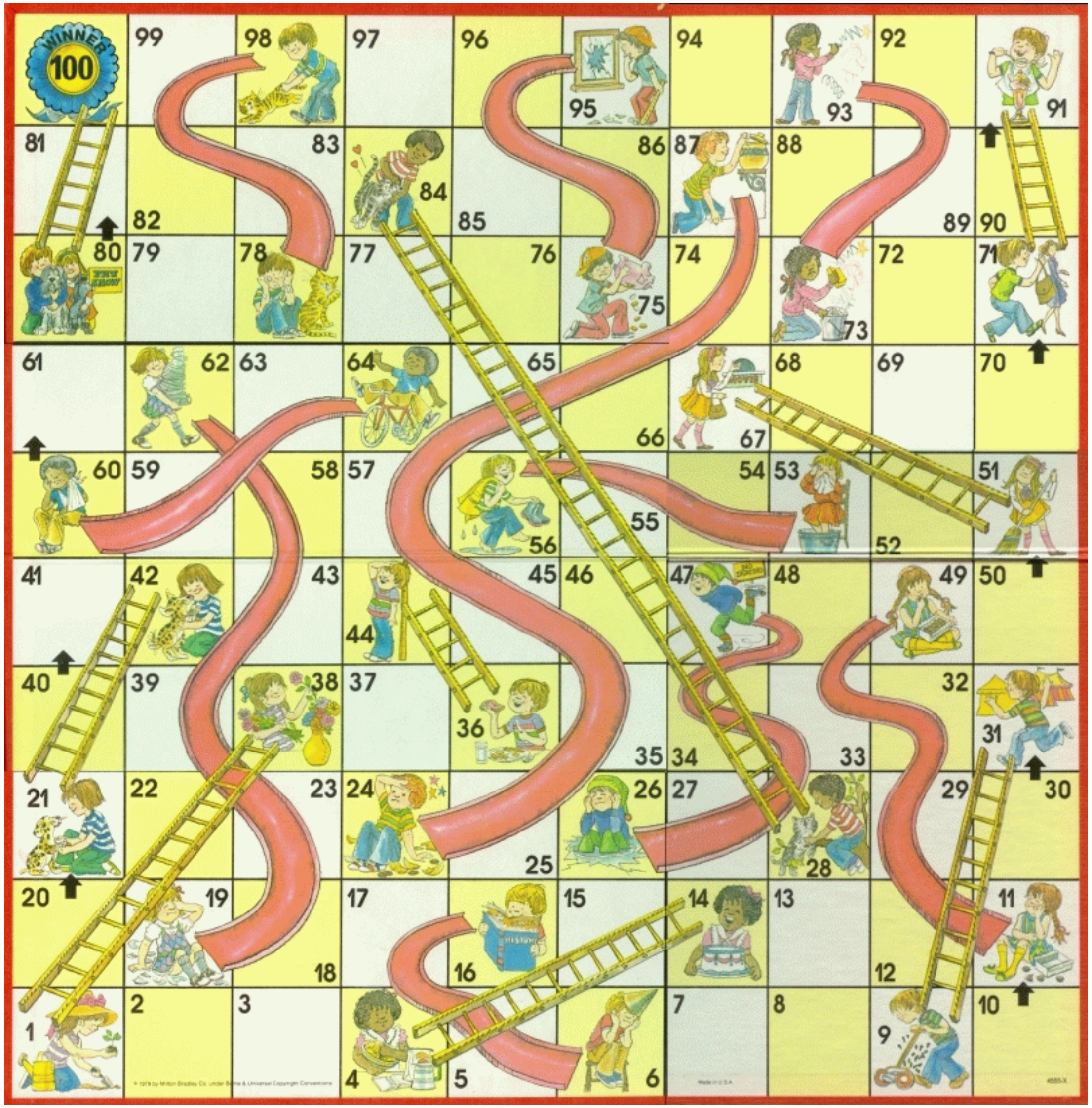
Welke informatie wil je?

- Modaal aantal beurten: 20
  (meest voorkomend aantal beurten om spel uit te spelen)

- Mediaan aantal beurten: 29
  (net zoveel spellen eindigen voor als na 29 beurten)

- Gemiddeld aantal beurten: 36.2
  (totaal aantal beurten / aantal spellen)

‘Chutes and Ladders’ – wijzigen?



Oefening

(geef de transitiematrix)