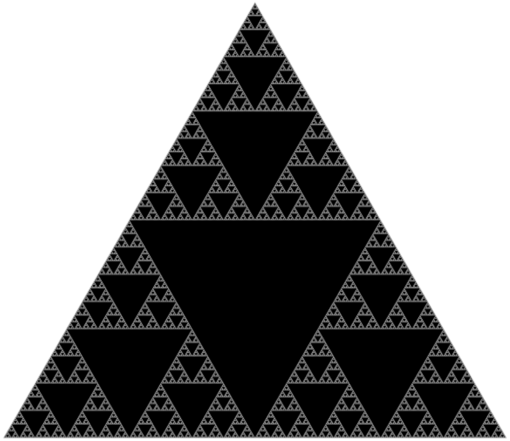
Wiskunde

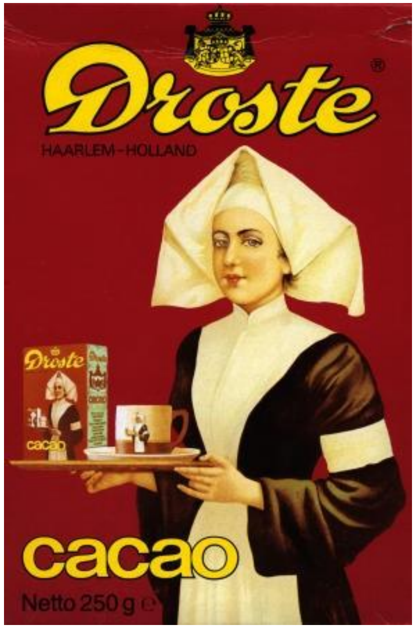
Gerwin van Dijken
(gerwin.vandijken@inholland.nl)

Wiskunde programma

- Blok 3:
  - Recursie (1)
  - **Recursie (2)**
  - Markov keten

- Blok 4:
  - Grafen
  - Minimum Spanning Tree algorithms (Prim, Kruskal)
  - Shortest path algorithms (Dijkstra, A*)
  - Proeftentamen / herhaling





Recurrente betrekkingen

(deel 2)

vorige les…

2, 3, 5, 9, 17, …

$$\begin{cases} (1)\ a_n = a_{(n-1)} * 2 - 1, \quad n>=2 \\ (2)\ a_1 = 2 \end{cases}$$

Algemene beschrijving recurrente betrekking:

$$\begin{cases} \text{(1) Recurrent deel, voorwaarde recurrent deel} \\ \text{(2) beginwaarde} \end{cases}$$

Enkele rekenregels

$a^k = a \times a \times \ \ldots \times a$ ← *k maal (*$3^4 = 3 \times 3 \times 3 \times 3$*)*

$a^n \times a^m = a^{n+m}$ → $3^2 \times 3^4 = (3 \times 3) \times (3 \times 3 \times 3 \times 3) = 3^{2+4} = 3^6$

$a(b + c) = ab + ac$ → $4(3 + 5) = 4 \cdot 3 + 4 \cdot 5 = 32 \ (= 4 \cdot 8)$

$2a + b + 3a \ - 4b = 5a - 3b$

$a^0 = 1$ $\qquad a^1 = a$

1. Oplossen / Algemene term bepalen

$$\begin{cases} b_n = 3 \times b_{(n-1)} + 2, \quad n >= 2 \\ b_1 = 5 \end{cases}$$

1. Aan de linkerkant alleen b_n laten staan
2. Aan de rechterkant alle b's weghalen

$n = 4$

$b_4 = 3 \times b_3 + 2$ $\qquad$ $b_3 = 3 \times b_2 + 2$

$b_4 = 3 \times (3 \times b_2 + 2) + 2$ $\qquad$ $= 9 \times b_2 + 6 + 2$

$b_4 = 9 \times (3 \times b_1 + 2) + 6 + 2$ $\qquad$ $= 27 \times b_1 + 18 + 6 + 2$

$b_4 = 27 \times 5 + 18 + 6 + 2$ $\qquad$ $= 161$

Opdracht: $n = 6$

$b_4 = 27 \times 5 + 18 + 6 + 2$

$b_6 = 243 \times 5 + 162 + 54 + 18 + 6 + 2$

$b_7 = \ldots\ldots \times 5 + \ldots\ldots + 162 + 54 + 18 + 6 + 2$

Opdracht: $n = 19$

We worden hier niet veel wijzer van, geen duidelijk patroon te herkennen…

1. Oplossen / Algemene term bepalen

$$\begin{cases} b_n = 3 \times b_{(n-1)} + 2, \quad n >= 2 \\ b_1 = 5 \end{cases}$$

1. Aan de linkerkant alleen b_n laten staan
2. Aan de rechterkant alle b's weghalen

$n = 5$

$b_5 = 3 \times b_4 + 2$

$b_5 = 3 \times (3 \times b_3 + 2) + 2$ $= 3^2 \times b_3 + (2x3) + 2$

$b_5 = 3^2 \times (3 \times b_2 + 2) + (2x3) + 2$ $= 3^3 \times b_2 + (2x3^2) +(2x3) + 2$

$b_5 = 3^3 \times (3 \times b_1 + 2) + (2x3^2) +(2x3) + 2$ $= 3^4 \times b_1 + (2x3^3) + (2x3^2) +(2x3) + 2$

$b_5 = 3^4 \times 5 + (2 \times 3^3) + (2x3^2) +(2x3) + 2$ $= 485$

$b_4 = 3^3 \times 5 + (2 \times 3^2) + (2 \times 3^1) + 2$

$b_5 = 3^4 \times 5 + (2 \times 3^3) + (2 \times 3^2) + (2 \times 3^1) + 2$

$b_6 = 3^5 \times 5 + (2 \times 3^4) + (2 \times 3^3) + (2 \times 3^2) + (2 \times 3^1) + 2$

$b_7 = \ldots.. \times 5 + \ldots.. + (2 \times 3^4) + (2 \times 3^3) + (2 \times 3^2) + (2 \times 3) + 2$

1. Oplossen / Algemene term bepalen

$$\begin{cases} b_n = 3 \times b_{(n-1)} + 2, \quad n >= 2 \\ b_1 = 5 \end{cases}$$

$$b_6 = 3^5 \times 5 + (2 \times 3^4) + (2 \times 3^3) + (2 \times 3^2) + (2 \times 3^1) + 2$$

Vervang de twee grootste waardes uit de reeks, en zet stippen ipv de middelste in de reeks

$$b_n = 3^{?} \times 5 + (2 \times 3^{?}) + (2 \times 3^{?}) + \ldots\ldots\ldots\ldots + (2 \times 3^1) + (2 \times 3^0)$$

Wat komt er op de vraagtekens?

$$b_n = 3^{(n-1)} \times 5 + (2 \times 3^{(n-2)}) + (2 \times 3^{(n-3)}) + \ldots\ldots\ldots\ldots + (2 \times 3^1) + (2 \times 3^0)$$

Opdracht: vind de algemene term voor deze recurrente betrekking

$$\begin{cases} c_n = C_{(n-1)} - (7+n), \quad n >= 2 \\ c_1 = 531 \end{cases}$$

1. Oplossen / Algemene term bepalen

$$\begin{cases} c_n = c_{(n-1)} - (7+n), \quad n >= 2 \\ c_1 = 531 \end{cases}$$

$n = 6$

$c_6 = c_5 - (7+6)$

$c_6 = c_4 - (7+5) - (7+6)$

$c_6 = c_3 - (7+4) - (7+5) - (7+6)$

$c_6 = c_2 - (7+3) - (7+4) - (7+5) - (7+6)$

$c_6 = c_1 - (7+2) - (7+3) - (7+4) - (7+5) - (7+6)$

$c_6 = 531 - (7+2) - (7+3) - (7+4) - (7+5) - (7+6)$

$c_6 = 531 - (7+2) - (7+3) - \ldots\ldots - (7+5) - (7+6)$

$\mathbf{c_n = 531 - (7+2) - (7+3) - \ldots\ldots - (7+(n-1)) - (7+n)}$

Los de 4 volgende recurrente betrekkingen op :

Opdracht 9

$$\begin{cases} f_n = f_{(n-1)} + 3, \quad n>0 \\ f_0 = 0 \end{cases}$$

Opdracht 10

$$\begin{cases} f_n = f_{(n-1)} + n, \quad n>0 \\ f_0 = 0 \end{cases}$$

Opdracht 11

$$\begin{cases} f_n = 2 \times f_{(n-1)} + 2, \quad n>1 \\ f_1 = 5 \end{cases}$$

Opdracht 12

$$\begin{cases} f_n = 3 \times f_{(n-1)} + 1, \quad n>0 \\ f_0 = 1 \end{cases}$$

Opdracht 9

$$\begin{cases} f_n = f_{(n-1)} + 3, \quad n>0 \\ f_0 = 0 \end{cases}$$

(index)	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
(waarde)	**0**	**3**	**6**	**9**	**12**	**15**

n = 5

$f_5 = f_4 + 3$

$f_5 = f_3 + 3 + 3$

$f_5 = f_2 + 3 + 3 + 3$

$f_5 = f_1 + 3 + 3 + 3 + 3$

$f_5 = f_0 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3$ $\qquad f_0 = 0$

$f_5 = 0 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3$

$f_5 = 3 * 5$

$\mathbf{f_n = 3 * n}$

Opdracht 10

$$\begin{cases} f_n = f_{(n-1)} + n, \quad n>0 \\ f_0 = 0 \end{cases}$$

(index)	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
(waarde)	**0**	**1**	**3**	**6**	**10**	**15**

n = 5

$f_5 = f_4 + 5$

$f_5 = f_3 + 4 + 5$

$f_5 = f_2 + 3 + 4 + 5$

$f_5 = f_1 + 2 + 3 + 4 + 5$

$f_5 = f_0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5$ $\qquad f_0 = 0$

$f_5 = 0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5$

$f_5 = 1 + 2 + \ldots + 4 + 5$

$\mathbf{f_n = 1 + 2 + 3 + \ldots + (n-2) + (n-1) + n}$

Opdracht 11

$$\begin{cases} f_n = 2 \times f_{(n-1)} + 2, \quad n>1 \\ f_1 = 5 \end{cases}$$

(index)	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
(waarde)	**5**	**12**	**26**	**54**	**110**	**222**

$n = 5$

$f_5 = 2 \text{ x } f_4 + 2$

$f_5 = 2 \text{ x } (2 \text{ x } f_3 + 2) + 2 \quad = 2^2 \text{ x } f_3 + 2^2 + 2$

$f_5 = 2^2 \text{ x } (2 \text{ x } f_2 + 2) + 2^2 + 2 \quad = 2^3 \text{ x } f_2 + 2^3 + 2^2 + 2$

$f_5 = 2^3 \text{ x } (2 \text{ x } f_1 + 2) + 2^3 + 2^2 + 2 \quad = 2^4 \text{ x } f_1 + 2^4 + 2^3 + 2^2 + 2$

$f_5 = 2^4 \text{ x } 5 + 2^4 + 2^3 + 2^2 + 2^1$

$\mathbf{f_n = 2^{(n-1)} \text{ x } 5 + 2^{(n-1)} + 2^{(n-2)} + \ldots + 2^2 + 2^1}$

Opdracht 12

$$\begin{cases} f_n = 3 \times f_{(n-1)} + 1, \quad n>0 \\ f_0 = 1 \end{cases}$$

(index)	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
(waarde)	**1**	**4**	**13**	**40**	**121**	**364**

$n = 5$

$f_5 = 3 \text{ x } f_4 + 1$

$f_5 = 3 \text{ x } (3 \text{ x } f_3 + 1) + 1 \qquad = 3^2 \text{ x } f_3 + 3 + 1$

$f_5 = 3^2 \text{ x } (3 \text{ x } f_2 + 1) + 3 + 1 \qquad = 3^3 \text{ x } f_2 + 3^2 + 3 + 1$

$f_5 = 3^3 \text{ x } (3 \text{ x } f_1 + 1) + 3^2 + 3 + 1 \qquad = 3^4 \text{ x } f_1 + 3^3 + 3^2 + 3 + 1$

$f_5 = 3^4 \text{ x } (3 \text{ x } f_0 + 1) + 3^3 + 3^2 + 3 + 1 \qquad = 3^5 \text{ x } f_0 + 3^4 + 3^3 + 3^2 + 3 + 1$

$f_5 = 3^5 \text{ x } 1 + 3^4 + 3^3 + 3^2 + 3 + 1$

$f_5 = 3^5 + 3^4 + \ldots + 3^2 + 3^1 + 3^0 \qquad (3 = 3^1,\ 1 = 3^0)$

$\mathbf{f_n = 3^n + 3^{(n-1)} + 3^{(n-2)} + \ldots + 3^2 + 3^1 + 3^0}$

Even iets tussendoor…

- Wat is de uitkomst van de volgende som?

$$\mathbf{1 + 2 + 3 + \cdots + 98 + 99 + 100}$$

- Je hebt 30 seconden de tijd…

$$\mathbf{1 + 2 + 3 + \cdots + 98 + 99 + 100}$$
$$\mathbf{100 + 99 + 98 + \cdots + 3 + 2 + 1}$$

$$\mathbf{\frac{100 \times 101}{2} = \frac{10100}{2} = 5050}$$

2.a Vereenvoudigen rekenkundige reeks

Een optelling waarbij twee opeenvolgende getallen uit de verschilrij steeds hetzelfde verschil hebben
Bijvoorbeeld de reeks: 1,3,6,10,15
Het verschil is 2, dan 3 en daarna 4; twee opeenvolgende getallen verschillen hetzelfde.

$$c_n = 531 - (7+2) - (7+3) - \ldots\ldots - (7+(n-1)) - (7+n)$$

$$\begin{cases} c_n = c_{(n-1)} - (7+n), \quad n >= 2 \\ c_1 = 531 \end{cases}$$

Vereenvoudigen in 3 stappen

1. Schrijf de reeks 2 keer op; een keer vlnr, de tweede vrnl.
2. Tel beide reeksen bij elkaar op
3. 2x de uitkomst = (het aantal paren) * (de som per paar)

Stap 1 en 2:

$$c_n = 531 - (7+2) - (7+3) - \ldots\ldots - (7+(n-1)) - (7+n)$$

$$c_n = 531 - (7+n) - (7+(n-1)) - \ldots\ldots - (7+3) - (7+2) \quad +$$

$$c_n + c_n = 1062 - (7+2+7+n) - (7+3+7+n-1) - \ldots\ldots - (7+n-1+7+3) - (7+2+7+n)$$

$$2 \times c_n = 1062 - (16+n) - (16+n) - \ldots\ldots - (16+n) - (16+n)$$

Stap 3:

$$c_6 = 531 - (7+2) - (7+3) - (7+4) - (7+5) - (7+6)$$

$$2 \times c_n = 1062 - (n-1) \times (16+n)$$

$$c_n = (1062 - (n-1) \times (16+n)) / 2$$

$$c_n = 531 - ((n-1) \times (16+n)) / 2$$

2.b Vereenvoudigen meetkundige reeks

Een optelling, waarbij twee opeenvolgende getallen steeds dezelfde factor verschillen.
Bijvoorbeeld de reeks: 1,4,13,40
Het verschil is 3, dan 9 en daarna 27; twee opeenvolgende getallen verschillen dezelfde factor.

$$b_n = 3^{(n-1)} \times 5 + (2 \times 3^{(n-2)}) + (2 \times 3^{(n-3)}) + \ldots\ldots\ldots\ldots + (2 \times 3^1) + (2 \times 3^0) \qquad \begin{cases} b_n = 3 \times b_{(n-1)} + 2, \; n >= 2 \\ b_1 = 5 \end{cases}$$

Vereenvoudigen in 2 stappen

1. Vermenigvuldig de reeks met de factor die blijkt uit de verschilrij
2. Trek van de vermenigvuldigde reeks het origineel af

Stap 1:

$$b_n = 3^{(n-1)} \times 5 + (2 \times 3^{(n-2)}) + (2 \times 3^{(n-3)}) + \ldots\ldots\ldots\ldots + (2 \times 3^1) + (2 \times 3^0)$$

$$3 \times b_n = 3x(3^{(n-1)} \times 5) + 3x(2 \times 3^{(n-2)}) + 3x(2 \times 3^{(n-3)}) + \ldots\ldots\ldots\ldots + 3x(2 \times 3^1) + 3x(2 \times 3^0)$$

$$3 \times b_n = 3^n \times 5 + (2 \times 3^{(n-1)}) + (2 \times 3^{(n-2)}) + \ldots\ldots\ldots\ldots + (2 \times 3^2) + (2 \times 3^1)$$

Stap 2:

$$\begin{array}{rl} 3 \times b_n = & 3^n \times 5 + (2 \times 3^{(n-1)}) + (2 \times 3^{(n-2)}) + \ldots\ldots\ldots\ldots + (2 \times 3^2) + (2 \times 3^1) \\ b_n = & 3^{(n-1)} \times 5 + \qquad (2 \times 3^{(n-2)}) + (2 \times 3^{(n-3)}) + \ldots\ldots\ldots + (2 \times 3^1) + (2 \times 3^0) \quad - \\ \hline 2 \times b_n = & 3^n \times 5 - 3^{(n-1)} \times 5 + (2 \times 3^{(n-1)}) \qquad - (2 \times 3^0) \end{array}$$

$$b_n = (3^n \times 5 - 3^{(n-1)} \times 5 + (2 \times 3^{(n-1)}) - (2 \times 3^0)) / 2$$

Vereenvoudig de algemene termen van de vorige opdrachten :

Opdracht 10

$$\begin{cases} f_n = f_{(n-1)} + n, \quad n>0 \\ f_0 = 0 \end{cases}$$

Opdracht 11

$$\begin{cases} f_n = 2 \times f_{(n-1)} + 2, \quad n>1 \\ f_1 = 5 \end{cases}$$

Opdracht 12

$$\begin{cases} f_n = 3 \times f_{(n-1)} + 1, \quad n>0 \\ f_0 = 1 \end{cases}$$

Opdracht 10

$$\begin{cases} f_n = f_{(n-1)} + n, \quad n>0 \\ f_0 = 0 \end{cases}$$

(index)	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
(waarde)	**0**	**1**	**3**	**6**	**10**	**15**

$f_n = 1 + 2 + 3 + ... + (n-2) + (n-1) + n$

(steeds 'zelfde' verschil, geen factor) => rekenkundige reeks)

1. schrijf de reeks tweemaal op onder elkaar, vlnr en vrnl;
2. tel de termen paarsgewijs op;
3. 2x de uitkomst = (aantal paren) * (som per paar)

(index)	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
(waarde)	**0**	**1**	**3**	**6**	**10**	**15**

$f_n = 1 + 2 + 3 + ... + (n-2) + (n-1) + n$

$f_n = 1 +$	$2 +$	$3 +$	$... +$	$(n-2) +$	$(n-1) +$	n
$f_n = n +$	$(n-1) +$	$(n-2) +$	$... +$	$3 +$	$2 +$	1

-- +

$2 \times f_n = (n+1) + (n+1) + (n+1) + ... + (n+1) + (n+1) + (n+1)$

$2 \times f_n = n \times (n+1)$

$\mathbf{f_n = \frac{1}{2} \times n \times (n+1)}$

(check)

$f_0 = \frac{1}{2} \times 0 \times 1 = 0$

$f_1 = \frac{1}{2} \times 1 \times 2 = 1$

$f_4 = \frac{1}{2} \times 4 \times 5 = 10$

(klopt!)

Opdracht 11

$$\begin{cases} f_n = 2 \times f_{(n-1)} + 2, \quad n>1 \\ f_1 = 5 \end{cases}$$

(index)	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
(waarde)	**5**	**12**	**26**	**54**	**110**	**222**

$f_n = 2^{(n-1)} \text{ x } 5 + 2^{(n-1)} + 2^{(n-2)} + \ldots + 2^2 + 2^1$

(steeds 'zelfde' factor verschil => meetkundige reeks)

1. vermenigvuldig de reeks met de factor;
2. trek van de nieuwe reeks de oorspronkelijke reeks af;

(index)	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
(waarde)	**5**	**12**	**26**	**54**	**110**	**222**

$f_n = 2^{(n-1)} \times 5 + 2^{(n-1)} + 2^{(n-2)} + \dots + 2^2 + 2^1$

(stap 1)

$2 \times f_n \quad = 2 \times (2^{(n-1)} \times 5 \quad + 2^{(n-1)} \quad + 2^{(n-2)} \quad + \dots + 2^2 + 2^1)$

$2 \times f_n \quad = 2^n \times 5 \quad + 2^n \quad + 2^{(n-1)} \quad + \dots + 2^3 + 2^2$

(stap 2)

$2 \times f_n \quad = 2^n \times 5 + 2^n + \quad 2^{(n-1)} + \dots \quad + 2^3 \quad + 2^2$

$f_n \quad = 2^{(n-1)} \times 5 + \quad 2^{(n-1)} + 2^{(n-2)} + \dots \quad + 2^2 \quad + 2^1$

-- -

$f_n \quad = 2^n \times 5 - 2^{(n-1)} \times 5 + 2^n \quad - 2^1$

$f_n = 5 \times (2^n - 2^{(n-1)}) + 2^n - 2^1$

$\mathbf{f_n = 5 \times 2^{(n-1)} + 2^n - 2}$

(check)

$f_1 = 5 \times 2^0 + 2^1 - 2 = 5 + 2 - 2 = 5$

$f_2 = 5 \times 2^1 + 2^2 - 2 = 10 + 4 - 2 = 12$

$f_4 = 5 \times 2^3 + 2^4 - 2 = 40 + 16 - 2 = 54$

(klopt!)

Opdracht 12

$$\begin{cases} f_n = 3 \times f_{(n-1)} + 1, \quad n>0 \\ f_0 = 1 \end{cases}$$

(index)	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
(waarde)	**1**	**4**	**13**	**40**	**121**	**364**

$f_n = 3^n + 3^{(n-1)} + 3^{(n-2)} + \ldots + 3^2 + 3^1 + 3^0$

(steeds 'zelfde' factor verschil => meetkundige reeks)

1. vermenigvuldig de reeks met de factor;
2. trek van de nieuwe reeks de oorspronkelijke reeks af;

(index)	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
(waarde)	**1**	**4**	**13**	**40**	**121**	**364**

$f_n = 3^n + 3^{(n-1)} + 3^{(n-2)} + ... + 3^2 + 3^1 + 3^0$

(stap 1)

$3 \times f_n \quad = 3 \times (3^n + 3^{(n-1)} + 3^{(n-2)} + ... + 3^2 + 3^1 + 3^0)$

$3 \times f_n \quad = 3^{(n+1)} + 3^n + 3^{(n-1)} + ... + 3^3 + 3^2 + 3^1$

(stap 2)

$$\begin{array}{llllll} 3 \times f_n & = 3^{(n+1)} + & 3^n + 3^{(n-1)} + ... + 3^3 + & & 3^2 + 3^1 & \\ f_n & = & 3^n + 3^{(n-1)} + 3^{(n-2)} + ... + & & 3^2 + 3^1 & + 3^0 \\ \hline 2 \times f_n & = 3^{(n+1)} & & & & - 3^0 \end{array} \quad -$$

$2 \times f_n = 3^{(n+1)} - 3^0$

$\mathbf{f_n = (3^{(n+1)} - 1) / 2}$

(check)

$f_0 = (3^1 - 1) / 2 = (3 - 1) / 2 = 2$

$f_1 = (3^2 - 1) / 2 = (9 - 1) / 2 = 8$

$f_4 = (3^5 - 1) / 2 = (243 - 1) / 2 = 121$

(klopt!)

Oefenen

Gegeven is de volgende recurrente betrekking voor rij d

$$\begin{cases} d_n = d_{(n-1)} - (n-3), \quad n >= 2 \\ d_1 = 10 \end{cases}$$

Los de recurrente betrekking voor de rij d op (je hoeft niet te vereenvoudigen).

Gegeven is de volgende oplossing van de recurrente betrekking voor rij e:

$$e_n = (n-1) + (n-2) + (n-3) + ... + 3 + 2 + 1 + 8$$

Vereenvoudig de oplossing van de recurrente betrekking voor de rij e.

Gegeven is de volgende oplossing van de recurrente betrekking voor rij f:

$$f_n = 5 \times 2^{(n-1)} + 2^1 + 2^2 + 2^3 + ... + 2^{(n-3)} + 2^{(n-2)} + 2^{(n-1)}$$

Vereenvoudig de oplossing van de recurrente betrekking voor de rij f.