Modélisation du problème du voyageur de commerce

18 janvier 2015

1 Le problème

On se donne un ensemble $V = \{1, \ldots, n\}$ de n villes. On dispose d'une matrice D qui indique pour chaque couple (i, j) de villes une "‘distance"’ $d_{ij} \geq 0$ (mais cette distance n'en est pas forcément une : cela peut mesurer de nombreuses autre choses). On cherche un ordre de passage dans chacune des villes (un tour), partant de la ville 1, de sorte que la distance parcourue jusqu'au retour vers la ville 1 (somme des distances entre les ville successives) soit la plus courte possible.

2 Modèle 1

On choisit de définir une variable z_{ik} pour chaque ville i et chaque position k (de 1 à n). Cette variable vaut 1 lorsque la ville i est en position k dans le tour, et 0 sinon.

Les contraintes s'expriment de la manière suivante : Chaque ville est dans une unique position :

$$\forall i \in V, \quad \sum_{k=1}^{n} z_{ik} = 1$$

La ville 1 est en position 1 :

$$z_{11} = 1$$

Chaque position est occupée par une ville :

$$\forall k \in \{1, \ldots, n\}, \quad \sum_{i=1}^{n} z_{ik} = 1$$

les variables sont des variables binaires :

$$\forall i, k \in \{1, \ldots, n\}, \quad z_{ik} \in \{0, 1\}$$

Pour l'objectif, on doit simplement décrire la distance parcourue lors d'un tour. On construit cela à partir de la quantité élémentaire suivante :

$z_{ik}z_{j(k+1)}$ représente une quantité qui vaut 1 lorque la ville i est en position k et la ville j est en position suivante.

Ainsi, $d_{ij}z_{ik}z_{j(k+1)}$ représente la distance entre la ville i et la ville j lorsque i est en position k et j en position $k+1$ et vaut 0 sinon.

Par conséquent, pour une position k,

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} d_{ij}z_{ik}z_{j(k+1)}$$

représente la distance entre la ville qui se trouve en position k et celle qui se trouve en position $k+1$.

On en déduit que la distance du tour est la somme de ces distances pour chaque position k, ainsi que la dernière distance (celle de la ville en position n vers la ville en position 1)

On a donc l'objectif :

$$Min \quad \sum_{k=1}^{n-1}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} d_{ij}z_{ik}z_{j(k+1)} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} d_{ij}z_{in}z_{j1}$$

3 Modèle 2

Dans ce modèle, on considère les variables binaires y_{ij} où i et j sont des villes. y_{ij} vaut 1 lorsque la ville j suit immédiatement la ville i dans le tour, et 0 sinon.

L'objectif est alors très simple à représenter :

$$Min \quad sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} d_{ij}y_{ij}$$

On peut facilement exprimer les contraintes suivantes :

d'une ville on ne part que vers une seule autre ville :

$$\forall i \in V \quad \sum_{j=1}^{n} y_{ij} = 1$$

On arrive à une ville depuis une seule ville :

$$\forall j \in V \quad \sum_{i=1}^{n} y_{ij} = 1$$

Malheureusement, ces contraintes ne sont pas suffisantes pour représenter un tour : car il est possible d'avoir deux cycles distincts par exemple.

Pour avoir un modèle complet, on doit ajouter des contraintes qui empêchent ces cycles isolés les uns des autres. Par exemplen en ajoutant une contrainte pour chaque sous-ensemble de villes S qui indique qu'il y a au moins une voie de sortie du sous ensemble, donc au moins un $y_{ij} > 0$ avec $i \in S$ et $j \notin S$.

C'est tout à fait possible, mais alors le modèle comporte un nombre exponentiel de contraintes (une par sous-ensemble, et il y a 2^n tels sous-ensembles.