

**Задание 1. Исследование Грамианов.** Придумайте матрицу  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  такую, что все её собственные числа имеют отрицательную вещественную часть, а также матрицы  $B \in \mathbb{R}^{2 \times 1}$  и  $C \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ . Найдите Грамианы управляемости  $P$  и наблюдаемости  $Q$  системы

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad y = Cx.$$

Постройте графическое изображение эллипсоида управляемости

$$\{x \in \mathbb{R}^2 \mid x^T P^{-1} x = 1\}.$$

Подайте на систему несколько (не менее четырёх) различных входных воздействий  $u(t)$  таких, что  $\|u\|_2 = 1$ , при этом положите  $x(0) = 0$ . Постройте графики траекторий вектора состояния системы поверх графического изображения эллипсоида управляемости. При выборе хотя бы одного из управляющих воздействий воспользуйтесь формулой для программного управления из первой лабораторной. Найдите собственные числа и собственные вектора матрицы  $P$ , продемонстрируйте их графический смысл.

Постройте графическое изображение ограничивающего эллипсоида по выходу

$$\{y \in \mathbb{R}^2 \mid y^T (CPC^T)^{-1} y = 1\}.$$

Для каждой из полученных ранее траекторий вектора состояния найдите соответствующую траекторию выхода и постройте её график поверх графического изображения эллипсоида. Найдите собственные числа и собственные вектора матрицы  $CPC^T$ , продемонстрируйте их графический смысл.

Постройте графическое изображение эллипсоида наблюдаемости

$$\{x \in \mathbb{R}^2 \mid x^T Q x = 1\}.$$

Выберите несколько (не менее четырёх) различных начальных условий  $x(0) = x_0$  таких, что  $x_0^T Q x_0 = 1$  при этом положите  $u \equiv 0$ . Для каждого начального условия постройте графики компонент выхода системы  $y(t)$  и найдите величину  $\|y\|_2$ . Найдите собственные числа и собственные вектора матрицы  $Q$ , продемонстрируйте их графический смысл.

Найдите  $\Gamma_{ie}$ ,  $\Gamma_{ep}$  и  $\Gamma_{ee}$  данной системы.

Найдите передаточную матрицу  $W(s)$  системы и вычислите (по определению, без использования матриц) нормы  $\|W\|_{\mathcal{H}_2}$  и  $\|W\|_{\mathcal{H}_\infty}$ . Затем вычислите эти же нормы с использованием матричных соотношений.

**Задание 2. Исследование передаточных матриц.** Придумайте две неквадратные передаточные матрицы по возможности большой размерности. Для каждой из матриц постройте графики АЧХ её компонент, а также график зависимости сингулярных чисел от частоты. Вычислите  $\mathcal{H}_2$  и  $\mathcal{H}_\infty$  нормы каждой из матриц.

**Задание 3. Синтез  $\mathcal{H}_2$ -регулятора по состоянию.** Постройте математическую модель простого тела (тележки). Задайте регулируемый выход в трёх различных вариантах. Для каждого из вариантов регулируемого выхода синтезируйте соответствующий  $\mathcal{H}_2$ -регулятор по состоянию. В каждом случае найдите передаточную функцию (матрицу) замкнутой системы от внешнего возмущения (действующего аддитивно с управлением) к регулируемому выходу, постройте для неё графики покомпонентных АЧХ и график сингулярных чисел, найдите её  $\mathcal{H}_2$  и  $\mathcal{H}_\infty$  нормы. Проведите моделирование замкнутой системы при внешних возмущениях.

**Задание 4. Синтез  $\mathcal{H}_2$ -регулятора по выходу.** Постройте математическую модель простого тела (тележки), в которой измеряемым выходом является её координата. Задайте регулируемый выход в трёх различных вариантах. Для каждого из вариантов регулируемого выхода синтезируйте соответствующий  $\mathcal{H}_2$ -регулятор по выходу, включающий в себя наблюдатель. В каждом случае найдите передаточную функцию (матрицу) замкнутой системы от внешних сигналов (возмущений и помех) к регулируемому выходу, постройте для неё графики покомпонентных АЧХ и график сингулярных чисел, найдите её  $\mathcal{H}_2$  и  $\mathcal{H}_\infty$  нормы. Проведите моделирование замкнутой системы при внешних возмущениях и помехах измерения.

**Задание 5. Синтез  $\mathcal{H}_\infty$ -регулятора по состоянию.** Возьмите модель тележки из задания 3. Самостоятельно выберите какой-то один вариант регулируемого выхода. Выберите четыре различных значения параметра  $\gamma > 0$ , и для каждого из значений синтезируйте соответствующий  $\mathcal{H}_\infty$ -регулятор по состоянию. В каждом случае найдите передаточную функцию (матрицу) замкнутой системы от внешнего возмущения к регулируемому выходу, постройте для неё графики покомпонентных АЧХ и график сингулярных чисел, найдите её  $\mathcal{H}_2$  и  $\mathcal{H}_\infty$  нормы. Для самого маленького из выбранных значений  $\gamma$  проведите моделирование замкнутой системы при синусоидальных внешних воздействиях различной частоты.

**Задание 6. Синтез  $\mathcal{H}_\infty$ -регулятора по выходу.** Возьмите модель тележки из задания 4. Самостоятельно выберите какой-то один вариант регулируемого выхода. Выберите четыре различных значения параметра  $\gamma > 0$ , и для каждого из значений синтезируйте соответствующий  $\mathcal{H}_\infty$ -регулятор по выходу, включающий в себя наблюдатель. В каждом случае найдите передаточную функцию (матрицу) замкнутой системы от внешних сигналов (возмущений и помех) к регулируемому выходу, постройте для неё графики покомпонентных АЧХ и график сингулярных чисел, найдите её  $\mathcal{H}_2$  и  $\mathcal{H}_\infty$  нормы. Для самого маленького из выбранных значений  $\gamma$  проведите моделирование замкнутой системы при синусоидальных внешних воздействиях различной частоты.

**Задание 7. Выводы.** Напишите содержательные выводы к каждому из заданий.