Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ, МЕХАНИКИ И ОПТИКИ

Факультет систем управления и робототехники

Отчет по лабораторной работе №1 «Управляемость и наблюдаемость» по дисциплине «Теория автоматического управления»

Выполнил: студенты гр. R3238
Курчавый В.В.

Преподаватель: Перегудин А.А.,
ассистент фак. СУиР

Санкт-Петербург 2022

1. **Цель работы.** Исследование управляемость и наблюдаемость систем.
2. **Материалы работ.**

Задание 1.

Система:

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -2 & 3\\ 2 & -3 & 2\\ -2 & 1 & -4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-3\\ -1\\ 3\end{bmatrix}u,\qquad x_1=\begin{bmatrix}4\\ 3\\ -3\end{bmatrix}$$

Матрица управляемости и её ранг:

$$U=[B\quad AB\quad A^2B]=\begin{bmatrix}-3 & 8 & -19\\ -1 & 3 & -7\\ 3 & -7 & 15\end{bmatrix},\ rank(U)=3.$$

Матрица управляемости имеет полный строчный ранг, значит система полностью управляема по критерию Калмана.

Собственные числа матрицы A: $\lambda_1=-2+i,\qquad \lambda_2=-2-i,\qquad \lambda_3=-2$

Система в жордановом базисе:

$$A=\begin{bmatrix}-2+i & 0 & 0\\ 0 & -2-i & 0\\ 0 & 0 & -2\end{bmatrix},\qquad B=\begin{bmatrix}-0.6708\ -\ 1.3416i\\ -0.6708\ +\ 1.3416i\\ 2.8284\end{bmatrix},$$

$$P=\begin{bmatrix}0.7454 & 0.7454 & -0.7071\\ 0.4472\ -\ 0.1491i & 0.4472\ +\ 0.1491i & 0\\ -0.4472\ +\ 0.1491i & -0.4472\ -\ 0.1491i & 0.7071\end{bmatrix}.$$

Система в жордановом базисе и “вещественной форме”:

$$A=\begin{bmatrix}-2 & 1 & 0\\ -1 & -2 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{bmatrix},\qquad B=\begin{bmatrix}-1.3416\\ 2.6833\\ 2.8284\end{bmatrix},\qquad P=\begin{bmatrix}0.7454 & 0 & -0.7071\\ 0.4472 & -0.1491 & 0\\ -0.4472 & 0.1491 & 0.7071\end{bmatrix}.$$

Управляемость собственных чисел:

На основе жордановой формы:

Каждое собственное число управляемо, так как каждая жорданова клетка принадлежит разным собственным числам. И соответствующие последним строкам жордановых клеток элементы матрицы B не равны нулю.

На основу рангового критерия:

Для $\lambda_1=-2+i$:

$$[A-\lambda_1 I\quad B]=\begin{bmatrix}3-i & -2 & 3 & -3\\ 2 & -1-i & 2 & -1\\ -2 & 1 & -2-i & 3\end{bmatrix},\qquad rank([A-\lambda_1 I\quad B])=3.$$

Собственное число $\lambda_1=-2+i$ управляемо так как матрица Хаутуса имеет ранг равный 3.

Для $\lambda_2=-2-i$:

$$[A-\lambda_2 I \quad B] = \begin{bmatrix} 3+i & -2 & 3 & -3 \\ 2 & -1+i & 2 & -1 \\ -2 & 1 & -2+i & 3 \end{bmatrix}, \quad rank([A-\lambda_2 I \quad B]) = 3.$$

Собственное число $\lambda_2 = -2 - i$ управляемо так как матрица Хаутуса имеет ранг равный 3.

Для $\lambda_3 = -2$:

$$[A-\lambda_3 I \quad B] = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 3 & -3 \\ 2 & -1 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}, rank([A-\lambda_3 I \quad B]) = 3.$$

Собственное число $\lambda_3 = -2$ управляемо так как матрица Хаутуса имеет ранг равный 3.

$x_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ -3 \end{bmatrix}$ принадлежит управляемому подпространству системы, так как система полностью управляема и её управляемое подпространство совпадает с R^3.

Грамиан управляемости относительно времени $t_1 = 3$:

$$Gr_3 = \int_0^3 e^{At}BB^Te^{A^Tt}dt = \begin{bmatrix} 1.5956 & 0.4779 & -1.7132 \\ 0.4779 & 0.1500 & -0.5029 \\ -1.7132 & -0.5029 & 1.8559 \end{bmatrix}$$

Собственные числа Грамиана: $\lambda_1 = 3.5841$, $\lambda_2 = 0.0002$, $\lambda_3 = 0.0172$

Управление, переводящее систему из $x(0) = 0$ в $x(t_1) = x_1$.

$$u(t) = B^Te^{A^T(t_1-t)}(Gr_{t1})^{-1}x_1 = e^{2t-6}(669sin(t-3) - 1579cos(t-3) + 1643)$$

Графики:

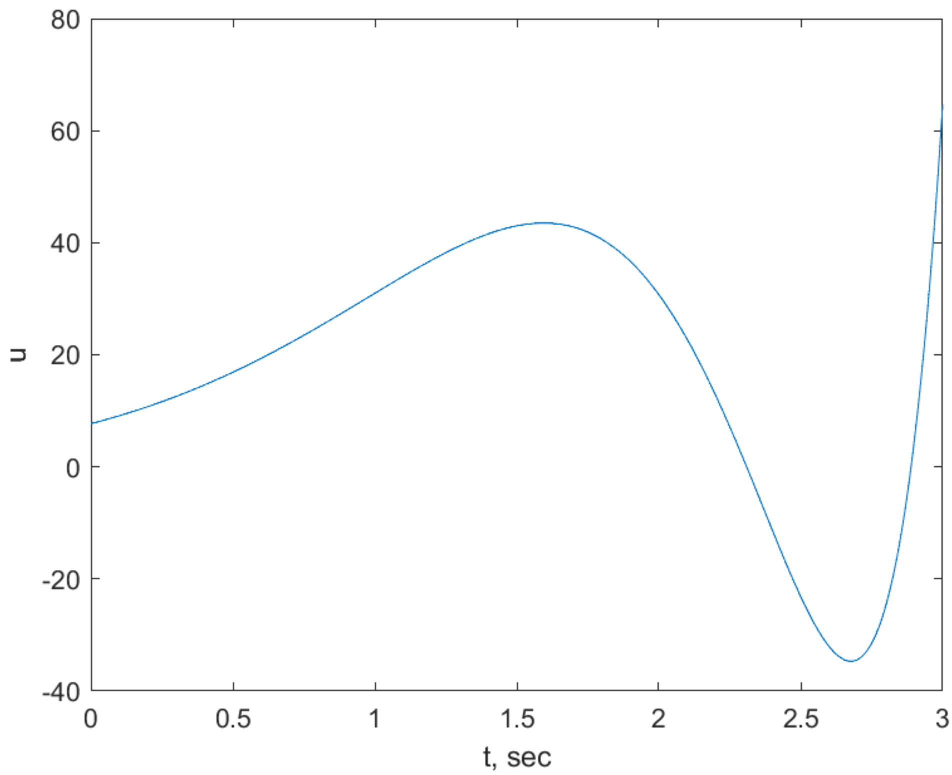

Figure 1. Сигнал управления

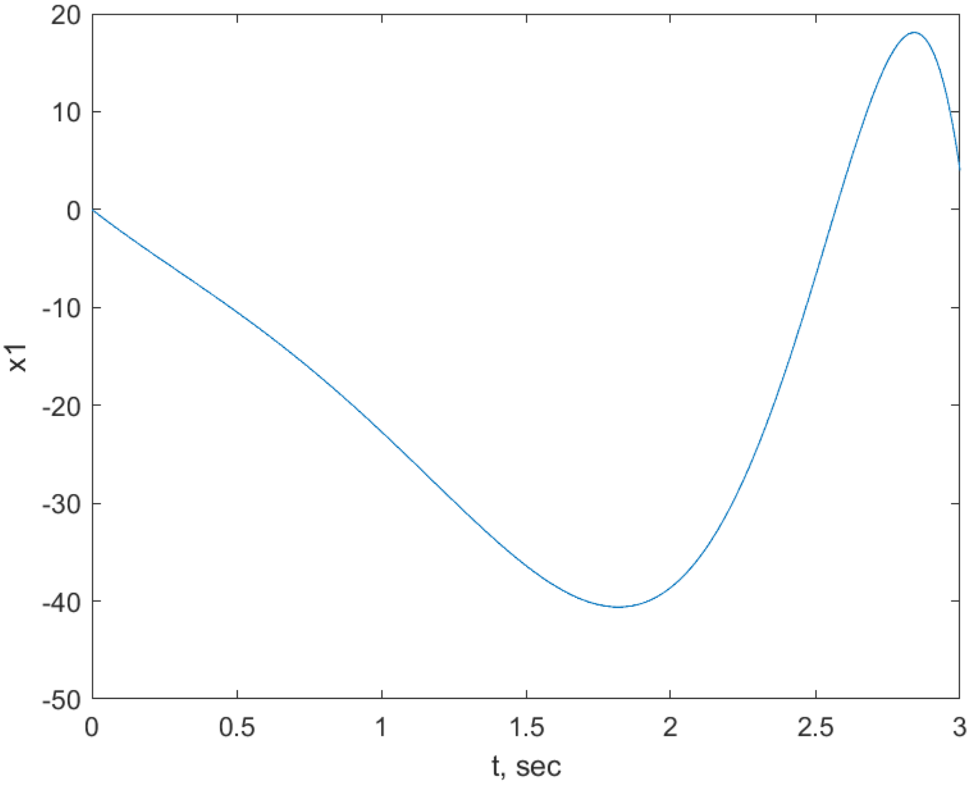

Figure 2. Первая компонента вектора состояния.

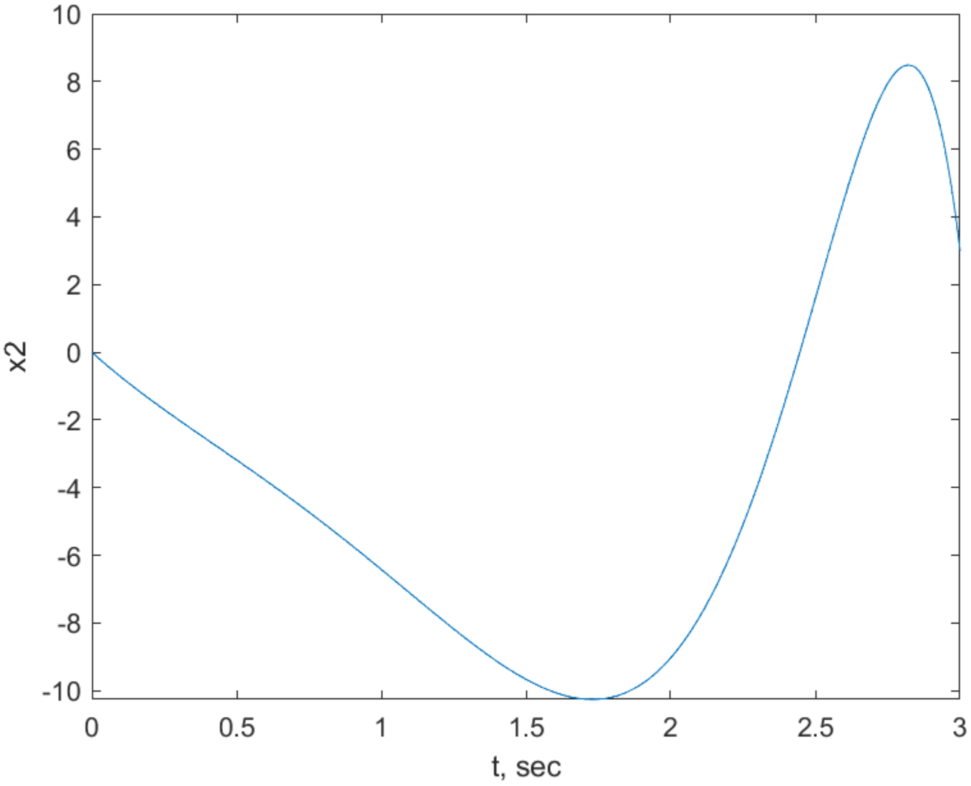

Figure 3. Вторя компонента вектора состояния.

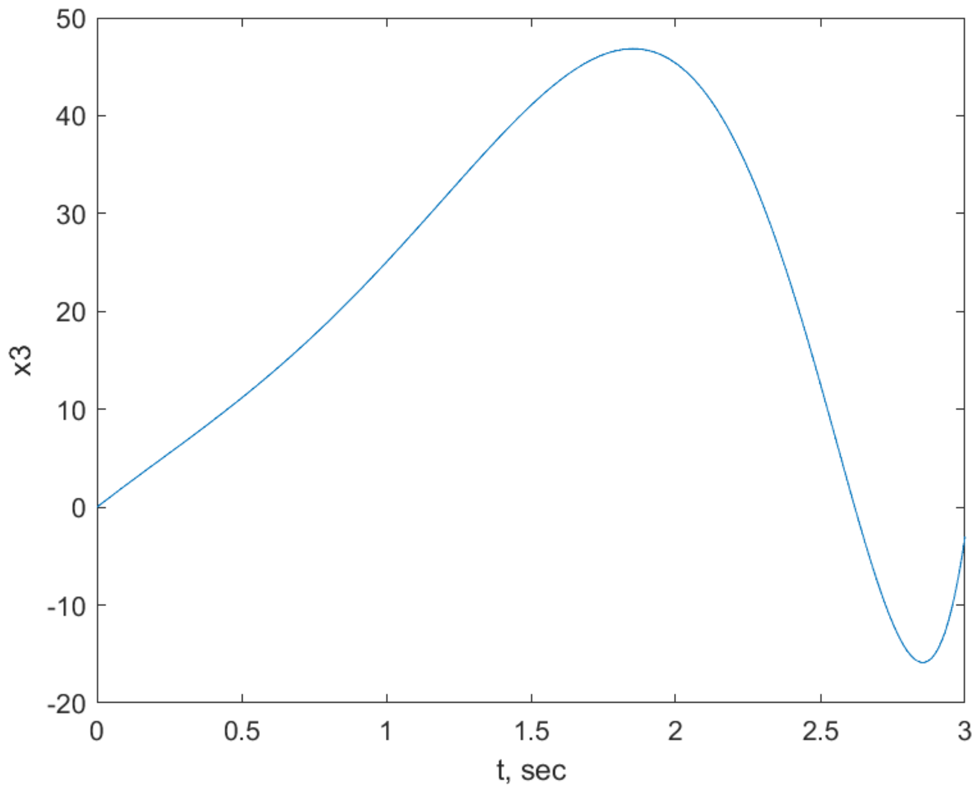

Figure 4. Третья компонента вектора состояния

Задание 2.

Система:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -3 & 2 \\ -2 & 1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} u, \quad x_1' = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ -3 \end{bmatrix}, x_1'' = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

$$U = [B \quad AB \quad A^2B] = \begin{bmatrix} -3 & -2 & -7 \\ 1 & 1 & -9 \\ -1 & -1 & 9 \end{bmatrix}, \quad rank(U) = 2.$$

Значит система не полностью управляема.

Проверка принадлежности вектора x_1' и x_1'' к подпространству управляемости:

$$rank(|U \quad x_1'|) = rank\left(\begin{bmatrix} -3 & -2 & -7 & 4 \\ 1 & 1 & -9 & 3 \\ -1 & -1 & 9 & -3 \end{bmatrix}\right) = 2 = rank(U),$$

Значит x_1' принадлежит подпространству управляемости системы.

$$rank(|U \quad x_1'|) = rank(\begin{bmatrix} -3 & -2 & -7 & 3 \\ 1 & 1 & -9 & 3 \\ -1 & -1 & 9 & -2 \end{bmatrix}) = 3 \neq rank(U) = 2,$$

Значит x_1'' не принадлежит подпространству управляемости системы.

Собственные числа матрицы А: $\lambda_1 = -2 + i$, $\lambda_2 = -2 - i$, $\lambda_3 = -2$

Система в жордановом базисе:

$$A = \begin{bmatrix} -2+i & 0 & 0 \\ 0 & -2-i & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 2.0125 - 2.6833i \\ 2.0125 + 2.6833i \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$P = \begin{bmatrix} 0.7454 & 0.7454 & -0.7071 \\ 0.4472 - 0.1491i & 0.4472 + 0.1491i & 0 \\ -0.4472 + 0.1491i & -0.4472 - 0.1491i & 0.7071 \end{bmatrix}.$$

Система в жордановом базисе и “вещественной форме”:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 2.8460 \\ 3.7947 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad P = \begin{bmatrix} 1.0541 & 0 & -0.7071 \\ 0.6325 & -0.2108 & 0 \\ -0.6325 & 0.2108 & 0.7071 \end{bmatrix}.$$

На основе Жордановой формы:

Собственные числа $\lambda_1 = -2+i$ и $\lambda_2 = -2-i$ управляемы, так как каждая жорданова клетка принадлежит разным собственным числам. И соответствующий последней строке жордановой клетки элемент матрицы B не равен нулю.

Собственное число $\lambda_3 = -2$ неуправляема, так как соответствующий последней строке жордановой клетки элемент матрицы B равен нулю.

На основе рангового критерия:

Для $\lambda_1 = -2+i$:

$$[A - \lambda_1 I \quad B] = \begin{bmatrix} 3-i & -2 & 3 & 3 \\ 2 & -1-i & 2 & 1 \\ -2 & 1 & -2-i & -1 \end{bmatrix}, \qquad rank([A - \lambda_1 I \quad B]) = 3.$$

Собственное число $\lambda_1 = -2+i$ управляемо так как матрица Хаутуса имеет ранг равный 3.

Для $\lambda_2 = -2-i$:

$$[A - \lambda_2 I \quad B] = \begin{bmatrix} 3+i & -2 & 3 & 3 \\ 2 & -1+i & 2 & 1 \\ -2 & 1 & -2+i & -1 \end{bmatrix}, \qquad rank([A - \lambda_2 I \quad B]) = 3.$$

Собственное число $\lambda_2 = -2-i$ управляемо так как матрица Хаутуса имеет ранг равный 3.

Для $\lambda_3 = -2$:

$$[A - \lambda_3 I \quad B] = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 3 & 3 \\ 2 & -1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 & -1 \end{bmatrix}, \qquad rank([A - \lambda_3 I \quad B]) = 2.$$

Собственное число $\lambda_3 = -2$ неуправляемо так как матрица Хаутуса имеет ранг равный 2.

Грамиан управляемости относительно времени $t_1 = 3$:

$$Gr_3 = \int_0^3 e^{At} B B^T e^{A^T t} dt = \begin{bmatrix} 3.6250 & 1.6250 & -1.6250 \\ 1.6250 & 0.7500 & -0.7500 \\ -1.6250 & -0.7500 & 0.7500 \end{bmatrix}$$

Собственные числа Грамиана: $\lambda_1 = 0, \qquad \lambda_2 = 0.0307, \qquad \lambda_3 = 5.0943$

Управление, переводящее систему из $x(0) = 0$ в $x(t_1) = x_1$.

$u(t) = B^T e^{A^T(t_1 - t)} (Gr_{t1})^{-1} x_1 = -e^{2t-6}\big(16cos(t - 3) + 72sin(t - 3)\big).$

Графики:

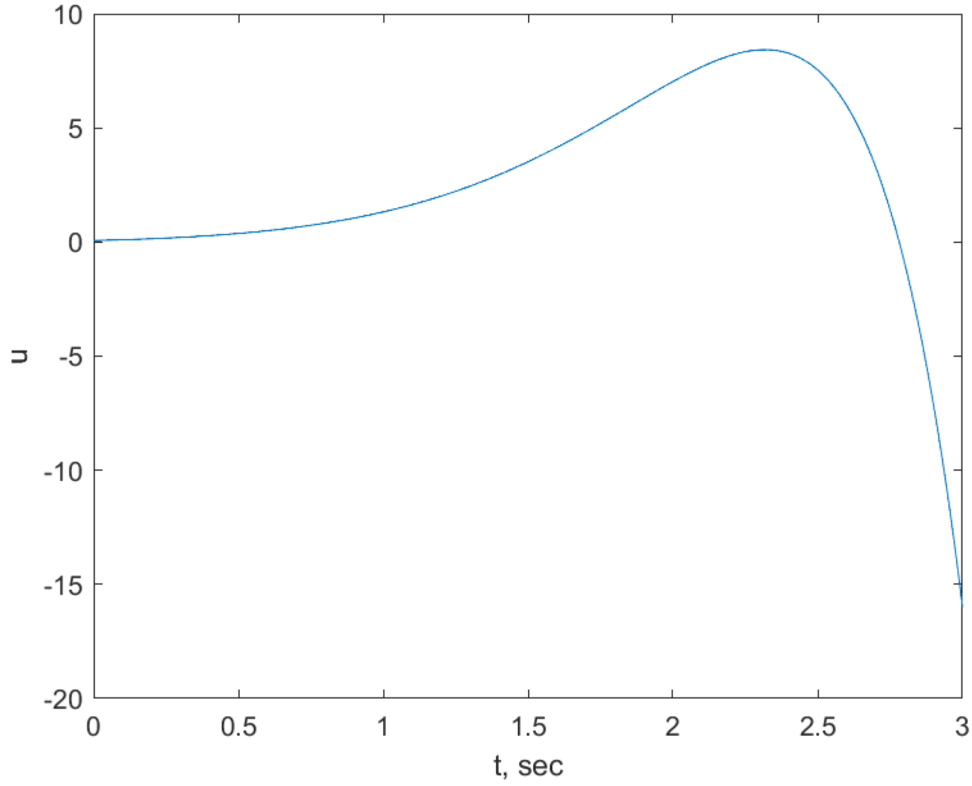

Figure 5. Сигнал управления.

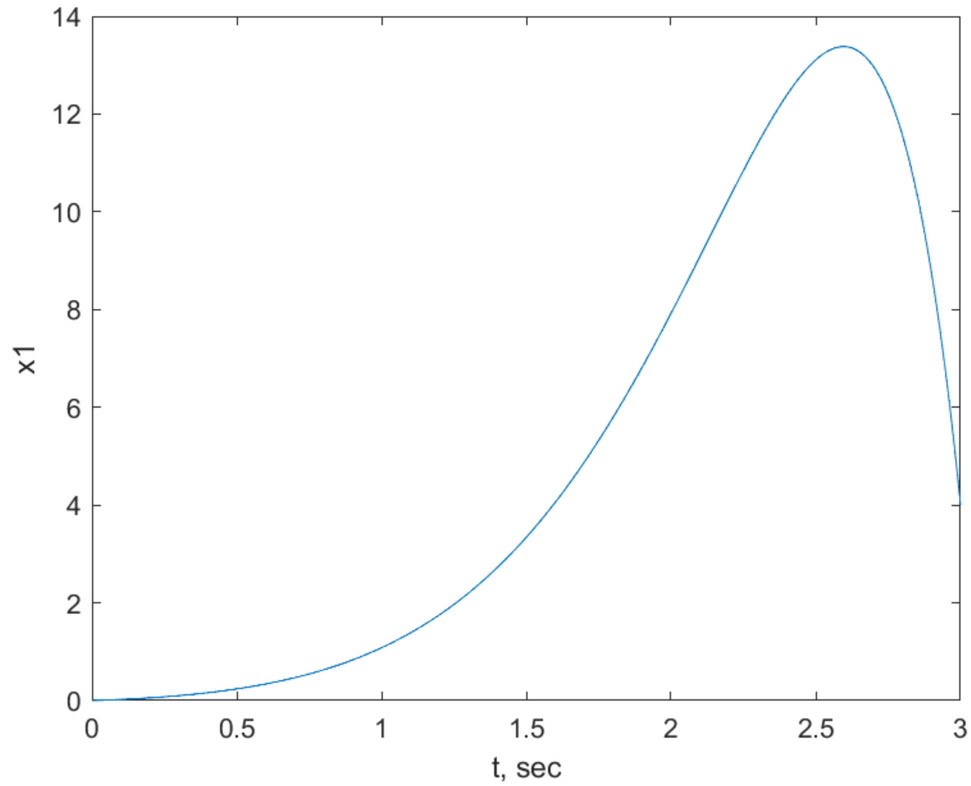

Figure 6. Первая компонента вектора состояния

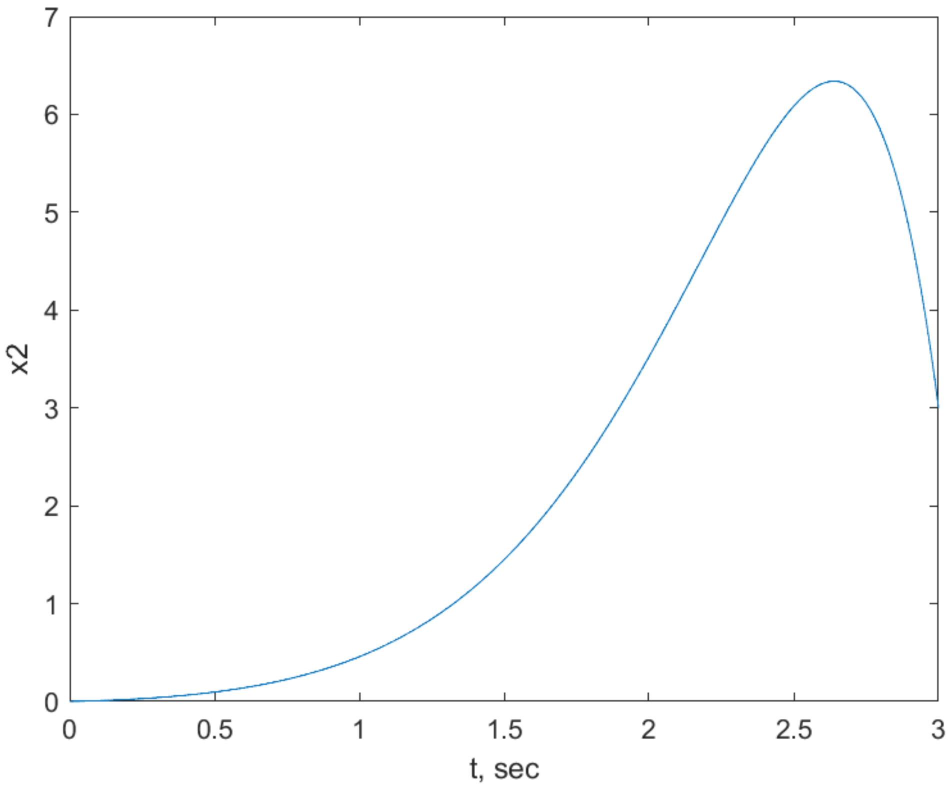

Figure 7. Вторя компонента вектора состояния.

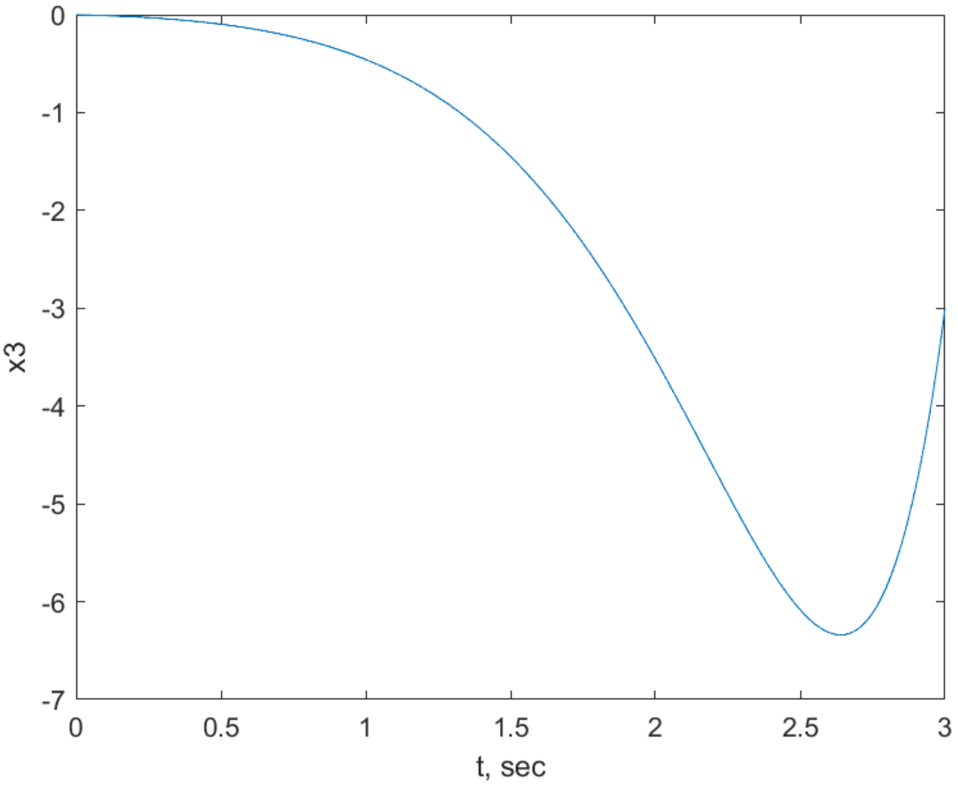

Figure 8. Третья компонента вектора состояния.

Задание 3.

Система:

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-8 & -3 & -12\\ -3 & -2 & -6\\ 6 & 0 & 7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}, \qquad y = \begin{bmatrix}1 & 0 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}$$

$$O = \begin{bmatrix}C\\ CA\\ CA^2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\ 4 & -3 & 2\\ -11 & 6 & -16\end{bmatrix}, \quad rank(U) = 3.$$

Матрица наблюдаемости имеет полный столбцовый ранг, значит система наблюдаема управляема по критерию Калмана.

Собственные числа матрицы А: $\lambda_1 = -2 + 3i$, $\lambda_2 = -2 - 3i$, $\lambda_3 = 1$.

Система в жордановом базисе:

$$A = \begin{bmatrix}-2+3i & 0 & 0\\ 0 & -2-3i & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}, \qquad C^T = \begin{bmatrix}-0.1581 - 0.3162\\ -0.1581 + 0.3162i\\ 0.5774\end{bmatrix},$$

$$P = \begin{bmatrix}0.7906 & 0.7906 & -0.5774\\ 0.3162 - 0.1581i & 0.3162 + 0.1581i & -0.5774\\ -0.4743 - 0.1581i & -0.4743 + 0.1581i & 0.5774\end{bmatrix}.$$

Система в жордановом базисе и “вещественной форме”:

$$A = \begin{bmatrix}-2 & 3 & 0\\ -3 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}, \quad C^T = \begin{bmatrix}-0.2236\\ -0.4472\\ 0.5774\end{bmatrix}, \qquad P = \begin{bmatrix}1.1180 & 0. & -0.5774\\ 0.4472 & -0.2236 & -0.5774\\ -0.6708 & -0.2236 & 0.5774\end{bmatrix}.$$

Наблюдаемость собственных чисел:

На основе жордановой формы:

Каждое собственное число наблюдаемо, так как каждая жорданова клетка принадлежит разным собственным числам. И соответствующие первым столбцам жордановых клеток элементы матрицы С не равны нулю.

На основу рангового критерия:

Для $\lambda_1 = -2 + 3i$:

$$\begin{bmatrix}A - \lambda_1 I\\ \mathrm{C}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-6-3i & -3 & -12\\ -3 & -3i & -6\\ 6 & 0 & 9-3i\\ 1 & 0 & 2\end{bmatrix}, \qquad rank\left(\begin{bmatrix}A - \lambda_1 I\\ \mathrm{C}\end{bmatrix}\right) = 3.$$

Собственное число $\lambda_1 = -2 + 3i$ наблюдаемо так как матрица Хаутуса имеет ранг равный 3.

Для $\lambda_2 = -2 - 3i$:

$$\begin{bmatrix}A - \lambda_2 I\\ \mathrm{C}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-6+3i & -3 & -12\\ -3 & 3i & -6\\ 6 & 0 & 9+3i\\ 1 & 0 & 2\end{bmatrix}, \qquad rank\left(\begin{bmatrix}A - \lambda_2 I\\ \mathrm{C}\end{bmatrix}\right) = 3.$$

Собственное число $\lambda_2 = -2 - 3i$ наблюдаемо так как матрица Хаутуса имеетранг равный 3.

Для $\lambda_3 = 1$:

$$\begin{bmatrix} A - \lambda_3 I \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 & -3 & -12 \\ -3 & -3 & -6 \\ 6 & 0 & 6 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \qquad rank\left(\begin{bmatrix} A - \lambda_3 I \\ C \end{bmatrix}\right) = 3.$$

Собственное число $\lambda_3 = 1$наблюдаемо так как матрица Хаутуса имеет ранг равный 3.

$$Gr_3 = \int_0^3 e^{A^T t} C C^T e^{At} dt = \begin{bmatrix} 201.9240 & -201.3576 & 202.0924 \\ -201.3576 & 201.1565 & -201.3048 \\ 202.0924 & -201.3048 & 202.4243 \end{bmatrix}$$

Собственные числа Грамиана: $\lambda_1 = 0.0073$, $\lambda_2 = 0.4915$, $\lambda_3 = 605.0060$

Поиск начальный условий по известной траектории выхода $y(t)$:

$$y(t) = e^{-2t}\big(2cos(3t) + \ sin(3t)\big).$$

$$x(0) = \ Gr_3^{-1} \int_0^3 e^{A^T} C^T y(t) dt = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Система не могла иметь других начальных состояний, так как она является полностью наблюдаемой, а по по определению наблюдаемости, если время и траектория совпадают, то и совпадают начальные состояния системы.

Графики:

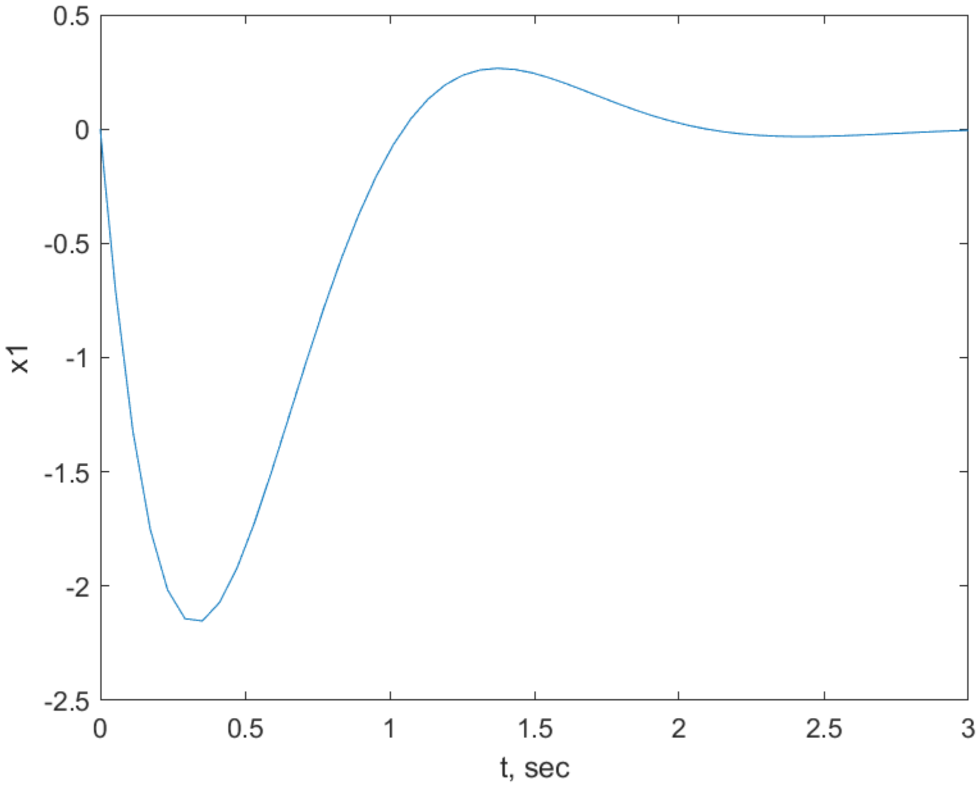

Figure 9. Первая компонента вектора.

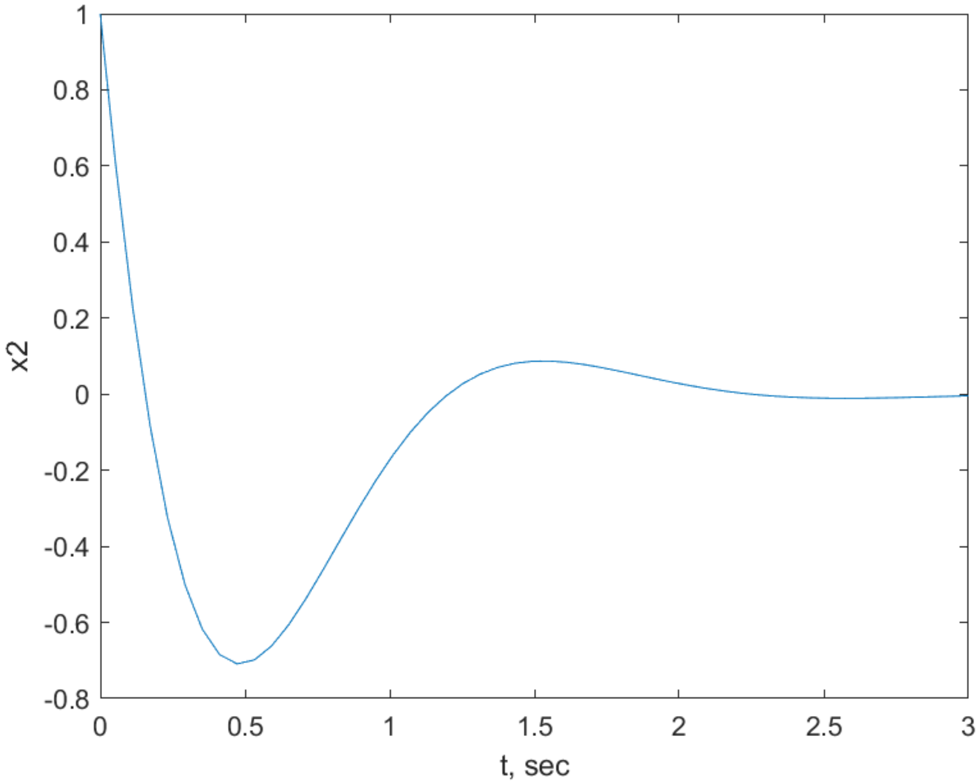

Figure 10. Вторая компонента вектора.

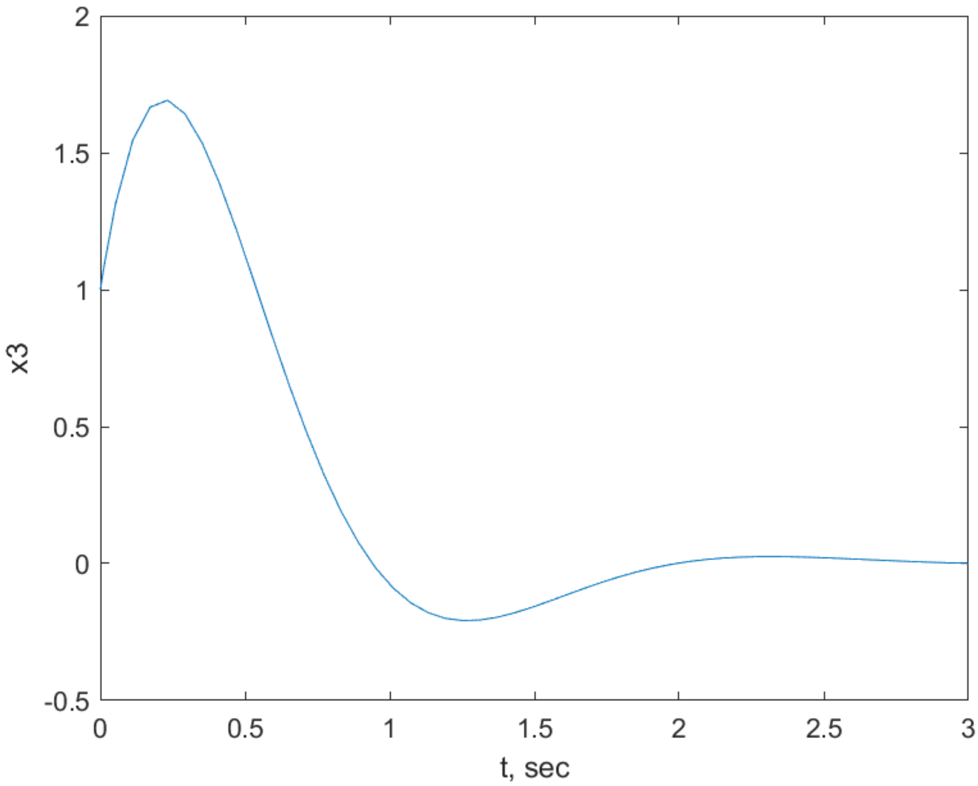

Figure 11. Траться компонента вектора.

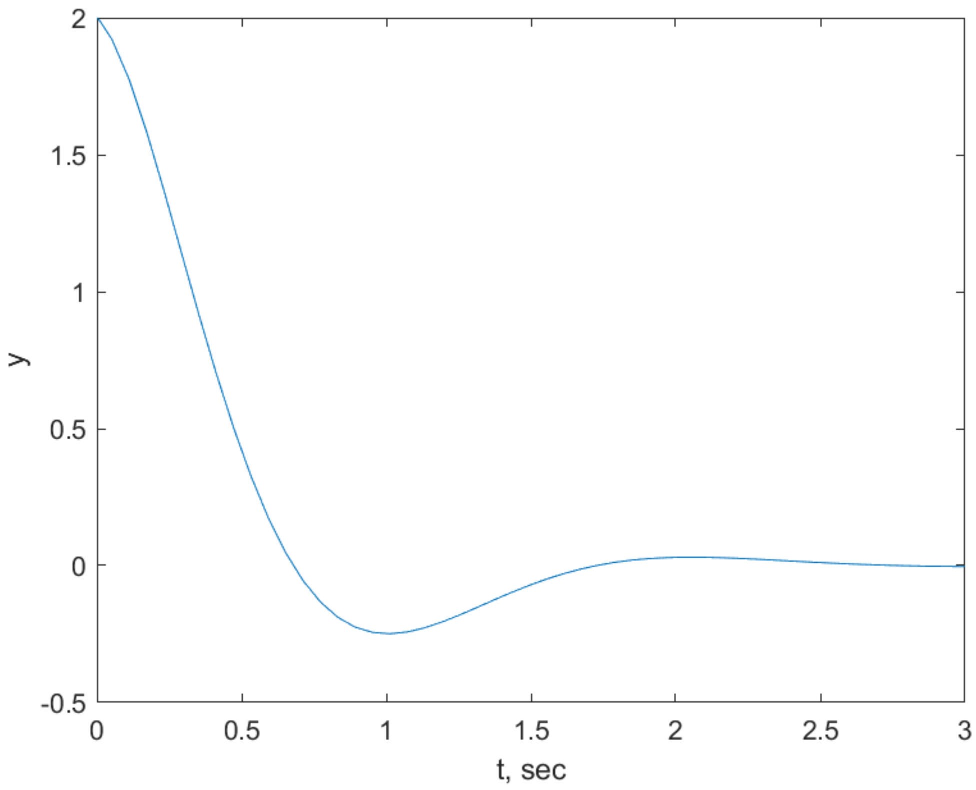

Figure 12. Выход.

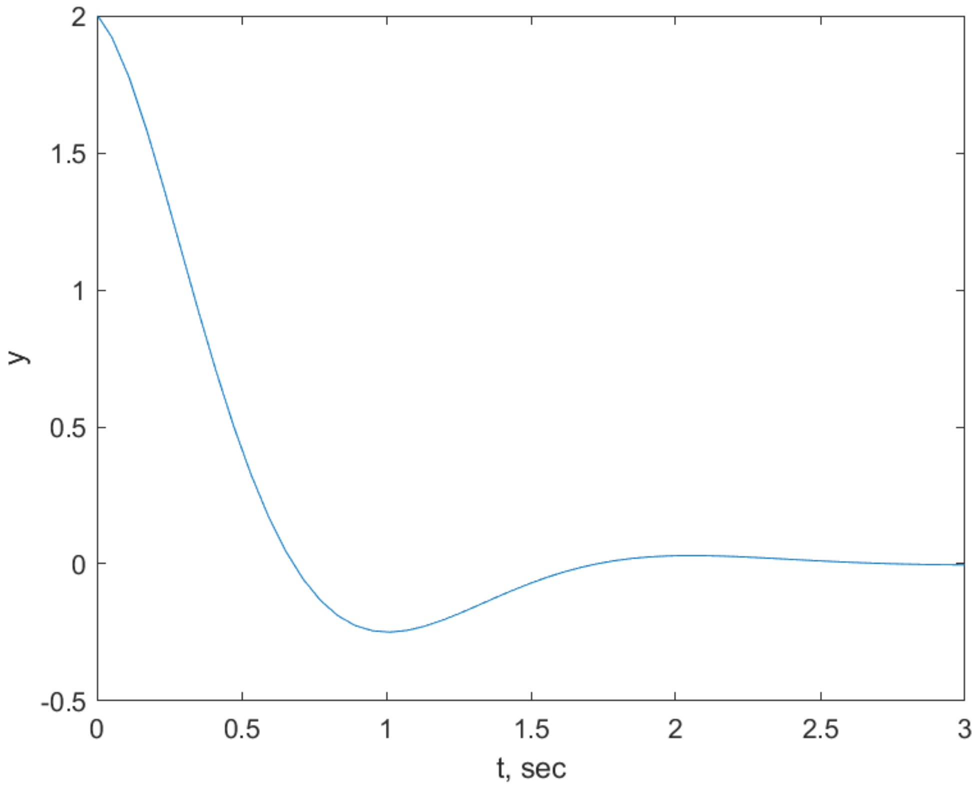

*Figure 13. exp(-2*t)*(2*cos(3*t) + sin(3*t))*

Выход и предполагаемая траектория совпадают, значит все рассчитано верно.

Задание 4.

Система:

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-8 & -3 & -12\\ -3 & -2 & -6\\ 6 & 0 & 7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix}0 & 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}$$

$$O = \begin{bmatrix}C\\ CA\\ CA^2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1 & 1\\ 3 & -2 & 1\\ -12 & -5 & -17\end{bmatrix}, \quad rank(U) = 2.$$

Ранг матрицы управляемости равен двум, значит система не полностью наблюдаема по критерию Калмана.

Собственные числа матрицы А: $\lambda_1 = -2 + 3i,$ $\lambda_2 = -2 - 3i,$ $\lambda_3 = 1.$

Система в жордановом базисе:

$$A = \begin{bmatrix}-2+3i & 0 & 0\\ 0 & -2-3i & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}, \quad C^T = \begin{bmatrix}-0.1581 - 0.3162i\\ -0.1581 + 0.3162i\\ 0\end{bmatrix},$$

$$P = \begin{bmatrix}0.7906 & 0.7906 & -0.5774\\ 0.3162 - 0.1581i & 0.3162 + 0.1581i & -0.5774\\ -0.4743 - 0.1581i & -0.4743 + 0.1581i & 0.5774\end{bmatrix}.$$

Система в жордановом базисе и “вещественной форме”:

$$A = \begin{bmatrix}-2 & 3 & 0\\ -3 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}, \quad C^T = \begin{bmatrix}-0.2236\\ -0.4472\\ 0\end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix}1.1180 & 0. & -0.5774\\ 0.4472 & -0.2236 & -0.5774\\ -0.6708 & -0.2236 & 0.5774\end{bmatrix}.$$

Наблюдаемость собственных чисел:

На основе жордановой формы:

Собственные числа λ_1 и λ_2 наблюдаемы, так как каждая жорданова клетка принадлежит разным собственным числам. И соответствующий первому столбцу жордановой клетки элемент матрицы С не равен нулю.

Собственное число λ_3ненаблюдаемо, так как соответствующий первому столбцу жордановой клетки элемент матрицы С равен нулю.

На основу рангового критерия:

Для $\lambda_1 = -2 + 3i$:

$$\begin{bmatrix}A - \lambda_1 I\\ \mathrm{C}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-6-3i & -3 & -12\\ -3 & -3i & -6\\ 6 & 0 & 9-3i\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}, \qquad rank\left(\begin{bmatrix}A - \lambda_1 I\\ \mathrm{C}\end{bmatrix}\right) = 3.$$

Собственное число $\lambda_1 = -2 + 3i$ наблюдаемо так как матрица Хаутуса имеет ранг равный 3.

Для $\lambda_2 = -2 - 3i$:

$$\begin{bmatrix} A - \lambda_2 I \\ \mathrm{C} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6+3i & -3 & -12 \\ -3 & 3i & -6 \\ 6 & 0 & 9+3i \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad rank\left(\begin{bmatrix} A - \lambda_2 I \\ \mathrm{C} \end{bmatrix}\right) = 3.$$

Собственное число $\lambda_2 = -2 - 3i$ наблюдаемо так как матрица Хаутуса имеет ранг равный 3.

Для $\lambda_3 = 1$:

$$\begin{bmatrix} A - \lambda_3 I \\ \mathrm{C} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 & -3 & -12 \\ -3 & -3 & -6 \\ 6 & 0 & 6 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad rank\left(\begin{bmatrix} A - \lambda_3 I \\ \mathrm{C} \end{bmatrix}\right) = 2.$$

Собственное число $\lambda_3 = 1$ не наблюдаемо так как матрица Хаутуса имеет ранг равный 2.

$$Gr_3 = \int_0^3 e^{A^T t} C C^T e^{At} dt = \begin{bmatrix} 0.0865 & 0.0577 & 0.1442 \\ 0.0577 & 0.1635 & 0.2212 \\ 0.1442 & 0.2212 & 0.3654 \end{bmatrix}$$

Собственные числа Грамиана: $\lambda_1 = 0, \qquad \lambda_2 = 0.0582, \qquad \lambda_3 = 0.5571.$

Поиск начальный условий по известной траектории выхода $y(t)$:

$$y(t) = e^{-2t}\big(2cos(3t) + \ sin(3t)\big).$$

$$x(0) = \ Gr_3^{-1} \int_0^3 e^{A^T}\, C^T y(t) dt = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Найдем вектор x_0 из уравнения $Oo = 0, o \neq 0$, такой вектор существует, потому что система не полностью наблюдаема:

$$o = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Тогда другие начальные векторы можно будет найти исходя из $Ox(0) = \ Ox_k(0)$:

k – параметр.

$$Ox(0) = Ox(0) + k0 = \ Ox(0) + kOo = O(x(0) + ko)$$

$$x_1(0) = x(0) + o = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$x_2(0) = x(0) + 2o = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$x_3(0) = x(0) + 3o = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Графики:

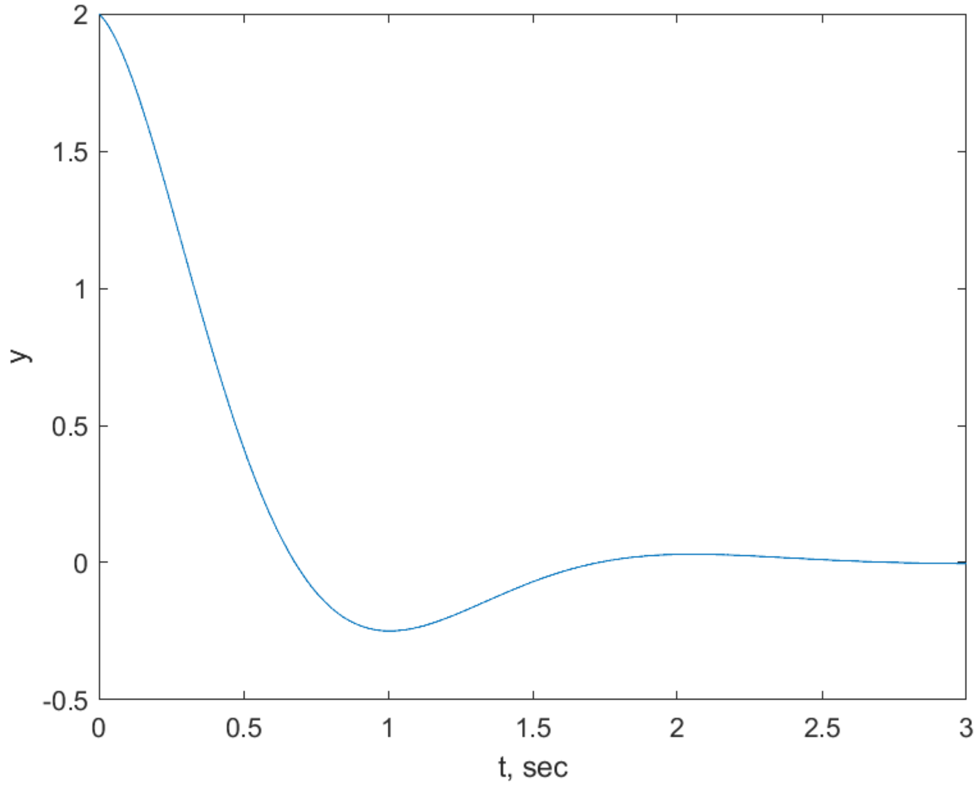

Figure 14. Выход для различных начальный условий.

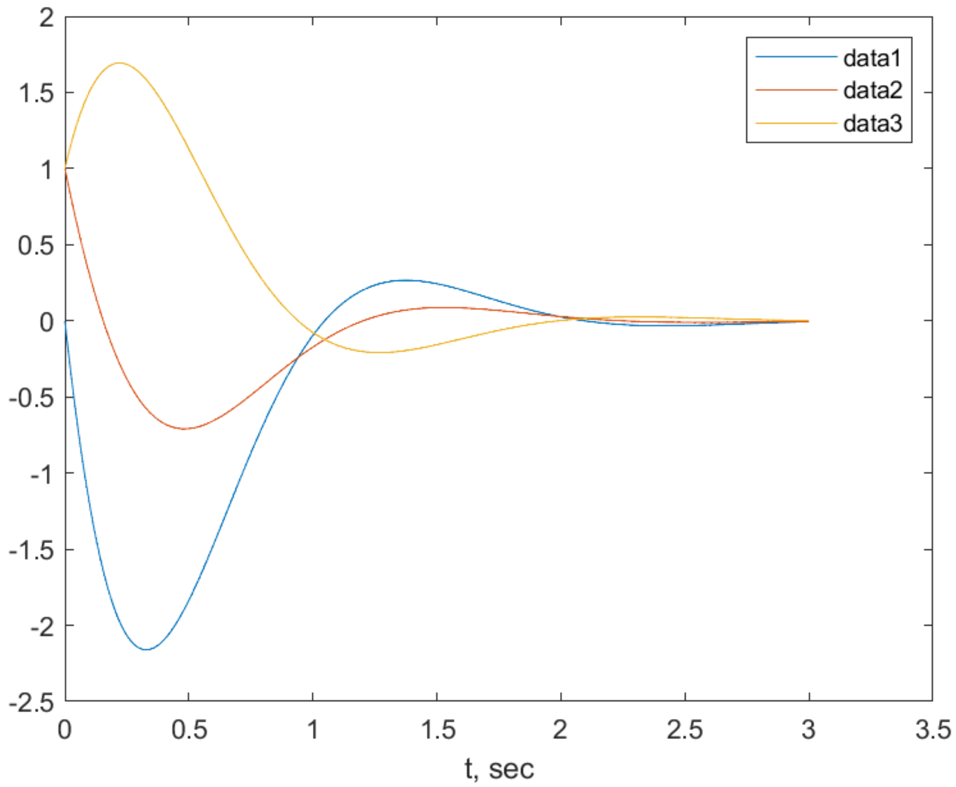

Figure 15. Компоненты вектора x00.

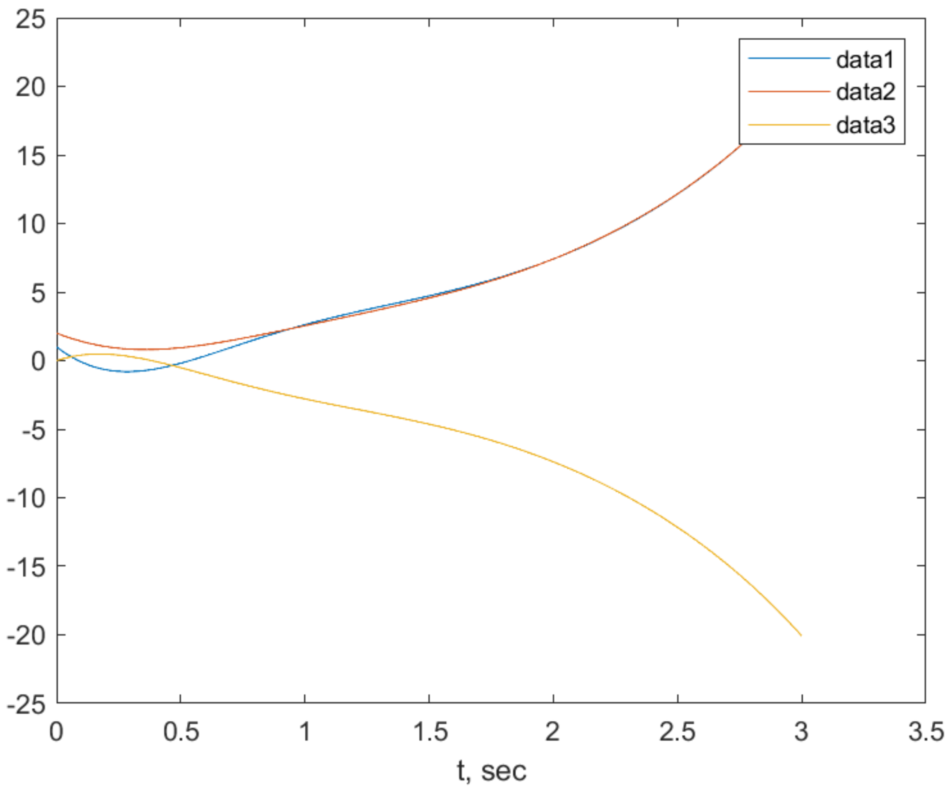

Figure 16. Компоненты вектора x01.

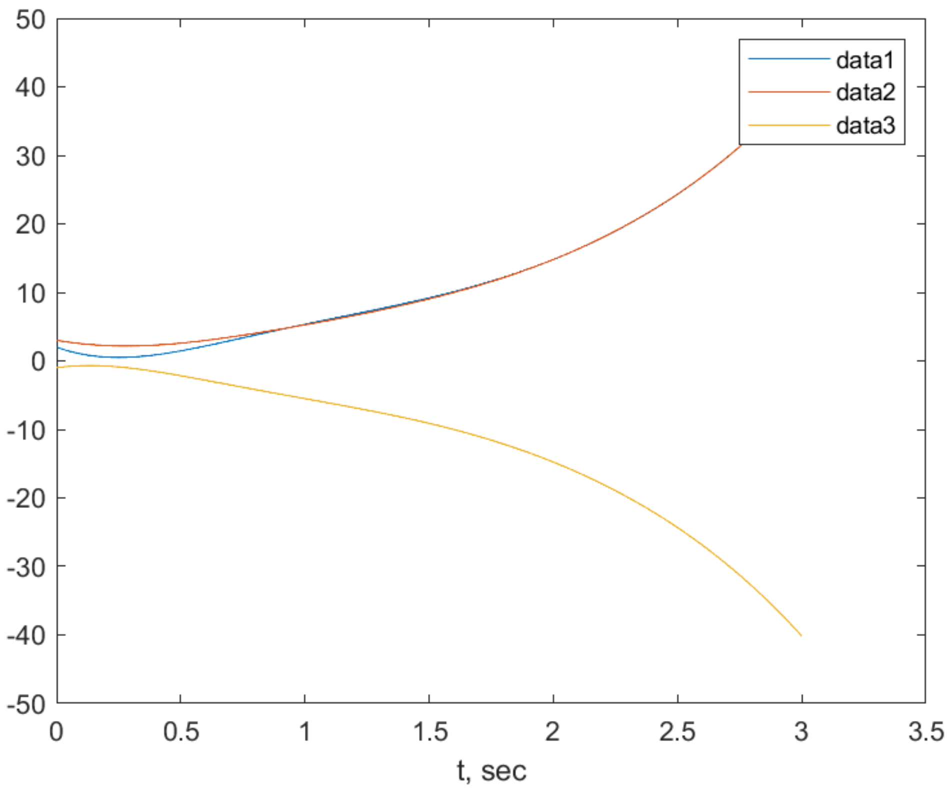

Figure 17. Компоненты вектора x02.

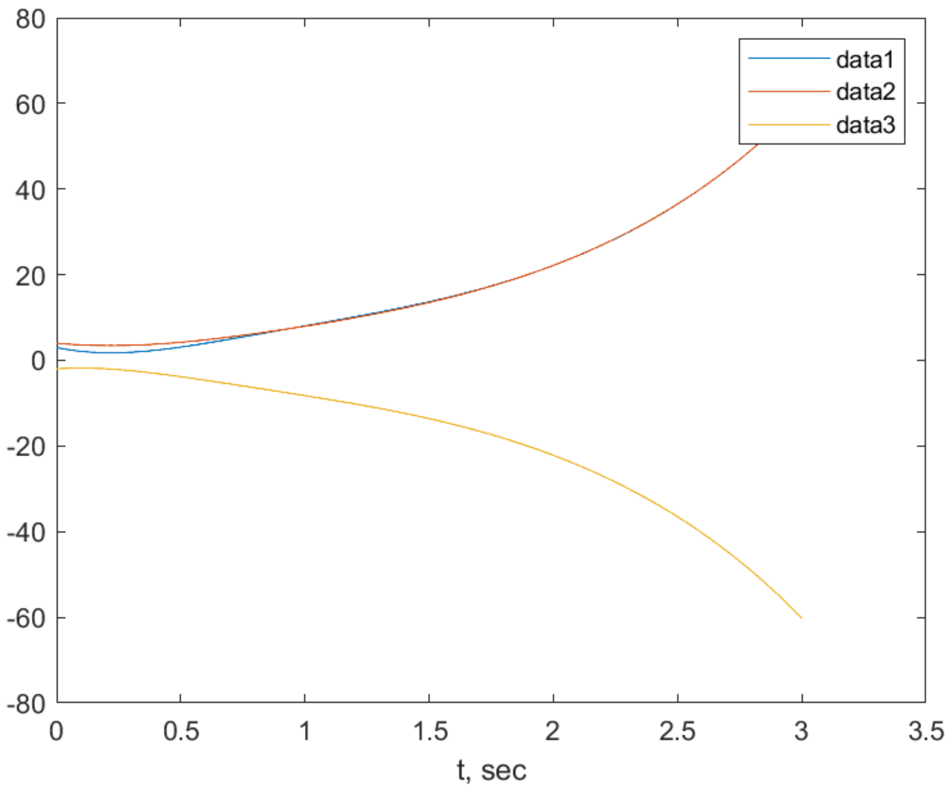

Figure 18. Компоненты вектора x03.

Выход одинаков при любых $x_k(0)$, однако компоненты векторов различны .Это связано с тем, что к начальным условиям прибавляется вектор из подпространства ненаблюдаемости, который не влияет на выход, но влияет на вектор состояния.

3. **Выводы**: В ходе лабораторной работы были исследованы системы на управляемость и наблюдаемость и был произведен расчет управляющего воздействия для управляемых систем и расчет начальных условий для наблюдаемых систем.