Задание 1. Исследование LQR. Возьмите матрицы A и B из таблицы в конце настоящего файла в соответствии с вашим вариантом и рассмотрите систему

$$\dot{x} = Ax + Bu.$$

Начальные условия в системе выберите самостоятельно. Задайтесь несколькими различными парами матриц (Q, R), для каждой из них синтезируйте регулятор, минимизирующий функционал качества

$$J = \int_0^\infty \left(x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t) \right) dt.$$

Для каждого случая найдите соответствующее минимальное значение функционала качества по формуле $J = x_0^T P x_0$, где P – решение соответствующего уравнения Риккати. Выполните моделирование и найдите «экспериментальное» значение J в результате моделирования, сравните с рассчитанным. Постройте сравнительные графики компонент вектора состояния системы и управляющих воздействий при различных матрицах Q и R. Постарайтесь, чтобы ваше исследование влияния матриц Q и R на переходные процессы в замкнутой системе было настолько полным, насколько возможно.

Задание 2. Сравнение LQR с не-LQR. Возьмите какую-нибудь одну пару матриц (Q, R) из предыдущего задания и соответствующий регулятор. Задайте несколько других регуляторов, рассчитанных иным способом (методами модального управления или с помощью LMI). Проведите сравнение переходных процессов при использовании различных регуляторов. Приведите графики величины

$$J(t) = \int_0^t \left(x^T(\tau)Qx(\tau) + u^T(\tau)Ru(\tau) \right) d\tau$$

и найдите её установившееся значение для каждого случая. Действительно ли LQR даёт наилучший результат?

Задание 3. Исследование LQE (фильтра Калмана). Возьмите матрицы A и C из таблицы в конце настоящего файла в соответствии с вашим вариантом и рассмотрите систему

$$\dot{x} = Ax + f, \quad y = Cx + \xi,$$

где $f(t)$ и $\xi(t)$ – внешние возмущения. Начальные условия в системе выберите самостоятельно. Задайтесь несколькими различными парами матриц (Q, R), для каждой из них синтезируйте соответствующий LQE (фильтр Калмана). Выполните сравнение работы одного и того же наблюдателя при различных внешних возмущениях. Выполните сравнение работы различных наблюдателей при одинаковых внешних возмущениях. Рассмотрите случай, при котором внешние возмущения соответствуют критерию оптимальности. Постройте сравнительные графики интересующих вас величин для всех случаев.

Совет. *При моделировании белого шума используйте блок Random Number – в нём можно непосредственно задавать дисперсию.*

Задание 4. Синтез LQG. Возьмите матрицы A, B, C, D из таблицы в конце настоящего файла в соответствии с вашим вариантом и рассмотрите систему

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + f, \\ y = Cx + Du + \xi. \end{cases}$$

Задайте сигналы f и ξ как белый шум. Синтезируйте соответствующий LQG-регулятор, включающий в себя LQR и фильтр Калмана. Выполните моделирование работы полученной системы.

Задание 5. Маленькое исследование LQG. Измените сигналы f и ξ, однако не меняйте их математическое ожидание или дисперсию (для этого измените только значение Seed в свойствах соответствующего блока). Проделайте это несколько раз. Для каждого случая постройте график величины

$$J(t) = \int_0^t \left(x^T(\tau) Q x(\tau) + u^T(\tau) R u(\tau) \right) d\tau.$$

Можете дополнительно попробовать изменить дисперсию сигналов f и ξ и также посмотреть на функцию $J(t)$. В чём была допущена ошибка в лекции? Как правильно сформулировать критерий оптимальности LQG-регулятора?

Парочка идей для заданий на защиту:

1. Для скалярной системы $\dot{x} = u$ найдите такой регулятор, который будет минимизировать функционал качества
$$J = \int_0^\infty (2x^2 + 2xu + u^2)dt.$$

2. Найдите уравнения фильтра Калмана, который будет формировать оценку величины $\dot{x}$ для системы
$$\ddot{x} + x = u, \quad y = x + \xi,$$
в которой измеряемой (доступной для фильтра) является только величина y, а сигнал ξ представляет собой белый шум с корреляционной функцией
$$\mathbb{E}\left\{\xi(t)\xi(t+\tau)\right\} = \delta(\tau).$$

Таблица 1: Исходные данные

Вариант	Матрица A	Матрица B	Матрица C	Матрица D
№1	$A = \begin{bmatrix} 6 & 26 & 4 & 17 \\ 0 & 9 & 0 & 6 \\ -10 & -35 & -6 & -25 \\ 0 & -15 & 0 & -9 \end{bmatrix}$	$B = \begin{bmatrix} -7 & 0 \\ -2 & 0 \\ 10 & 0 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$	$C = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 6 & 0 & 3 \end{bmatrix}$	$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$
№2	$A = \begin{bmatrix} 9 & 19 & 6 & 13 \\ 0 & 6 & 0 & 4 \\ -15 & -25 & -9 & -20 \\ 0 & -10 & 0 & -6 \end{bmatrix}$	$B = \begin{bmatrix} -5 & 0 \\ -1 & 0 \\ 8 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$	$C = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$
№3	$A = \begin{bmatrix} -6 & 19 & 10 & -13 \\ 0 & -9 & 0 & 6 \\ -4 & 8 & 6 & -7 \\ 0 & -15 & 0 & 9 \end{bmatrix}$	$B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \\ 3 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$	$C = \begin{bmatrix} 3 & -9 & -3 & 6 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$	$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$
№4	$A = \begin{bmatrix} -9 & 31 & -22 & 15 \\ 0 & -6 & 4 & 0 \\ 0 & -10 & 6 & 0 \\ -6 & 17 & -13 & 9 \end{bmatrix}$	$B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 0 \\ -2 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$	$C = \begin{bmatrix} 2 & -6 & 4 & -2 \\ 0 & 4 & -2 & 0 \end{bmatrix}$	$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$
№5	$A = \begin{bmatrix} -6 & 19 & -13 & 10 \\ 0 & -9 & 6 & 0 \\ 0 & -15 & 9 & 0 \\ -4 & 8 & -7 & 6 \end{bmatrix}$	$B = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 2 & 0 \\ 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$	$C = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & -1 \\ 0 & 6 & -3 & 0 \end{bmatrix}$	$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$
№6	$A = \begin{bmatrix} -6 & -25 & -35 & -10 \\ 0 & -9 & -15 & 0 \\ 0 & 6 & 9 & 0 \\ 4 & 17 & 26 & 6 \end{bmatrix}$	$B = \begin{bmatrix} 16 & 0 \\ 6 & 0 \\ -3 & 0 \\ -11 & 0 \end{bmatrix}$	$C = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 6 & 0 \end{bmatrix}$	$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$
№7	$A = \begin{bmatrix} 6 & 7 & -4 & 8 \\ 0 & 9 & 0 & 15 \\ 10 & 13 & -6 & 19 \\ 0 & -6 & 0 & -9 \end{bmatrix}$	$B = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -2 & 0 \\ 3 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$	$C = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$	$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

Таблица 1: Исходные данные

Вариант	Матрица A	Матрица B	Матрица C	Матрица D
№8	$A = \begin{bmatrix} -6 & 19 & 10 & -13 \\ 0 & -9 & 0 & 6 \\ -4 & 8 & 6 & -7 \\ 0 & -15 & 0 & 9 \end{bmatrix}$	$B = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 0 \\ 6 & 0 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$	$C = \begin{bmatrix} -3 & 9 & 3 & -6 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$
№9	$A = \begin{bmatrix} -9 & 31 & -22 & 15 \\ 0 & -6 & 4 & 0 \\ 0 & -10 & 6 & 0 \\ -6 & 17 & -13 & 9 \end{bmatrix}$	$B = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ -2 & 0 \\ -4 & 0 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$	$C = \begin{bmatrix} -2 & 6 & -4 & 2 \\ 0 & -4 & 2 & 0 \end{bmatrix}$	$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$
№10	$A = \begin{bmatrix} -6 & 19 & -13 & 10 \\ 0 & -9 & 6 & 0 \\ 0 & -15 & 9 & 0 \\ -4 & 8 & -7 & 6 \end{bmatrix}$	$B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$	$C = \begin{bmatrix} 2 & -6 & 4 & -2 \\ 0 & 12 & -6 & 0 \end{bmatrix}$	$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$
№11	$A = \begin{bmatrix} -6 & -25 & -35 & -10 \\ 0 & -9 & -15 & 0 \\ 0 & 6 & 9 & 0 \\ 4 & 17 & 26 & 6 \end{bmatrix}$	$B = \begin{bmatrix} -16 & 0 \\ -6 & 0 \\ 3 & 0 \\ 11 & 0 \end{bmatrix}$	$C = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 0 & 8 \\ 0 & 6 & 12 & 0 \end{bmatrix}$	$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$
№12	$A = \begin{bmatrix} 6 & 7 & -4 & 8 \\ 0 & 9 & 0 & 15 \\ 10 & 13 & -6 & 19 \\ 0 & -6 & 0 & -9 \end{bmatrix}$	$B = \begin{bmatrix} -8 & 0 \\ 4 & 0 \\ -6 & 0 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$	$C = \begin{bmatrix} -3 & -6 & 3 & -9 \\ 0 & 3 & 0 & 6 \end{bmatrix}$	$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$
№13	$A = \begin{bmatrix} 6 & 26 & 4 & 17 \\ 0 & 9 & 0 & 6 \\ -10 & -35 & -6 & -25 \\ 0 & -15 & 0 & -9 \end{bmatrix}$	$B = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 2 & 0 \\ -10 & 0 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}$	$C = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 12 & 0 & 6 \end{bmatrix}$	$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$
№14	$A = \begin{bmatrix} 9 & 19 & 6 & 13 \\ 0 & 6 & 0 & 4 \\ -15 & -25 & -9 & -20 \\ 0 & -10 & 0 & -6 \end{bmatrix}$	$B = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 2 & 0 \\ -16 & 0 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}$	$C = \begin{bmatrix} -6 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & -2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$	$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$