

Rapport de Stage

Killian Vuillemot

8 juin 2021

Table des matières

1 Présentation de la méthode des éléments finis	3
1. 1. Problème considéré	3
1. 2. Description de la méthode	3
2 Convergence de la méthode des éléments finis	8
3 Introduction à l'élasticité linéaire	12
4 La notion d'hyper-élasticité	13
4. 1. Les déformations et tenseurs essentiels	13
4. 2. Matériaux hyperélastiques	19
4. 3. Quelques modèles importants	19
4. 4. Formulations variationnelles en hyperélasticité	21
5 La méthode ϕ-FEM pour le problème de Poisson-Dirichlet	21
5. 1. Définitions des espaces	22
5. 2. Description de la méthode	23
5. 3. Exemple pratique	24
5. 4. Convergence théorique	25
5. 5. Ordre de convergence numérique	30
5. 6. Comparaison avec une FEM standard	30
5. 7. Problème non-homogène	31
6 La méthode ϕ-FEM pour des conditions de Neumann	34
6. 1. Description de la méthode	34
6. 2. Comparaison avec une FEM standard	36

7 La ϕ-FEM pour des conditions Dirichlet-Neumann	37
7. 1. Présentation de la méthode	37
7. 2. Convergence et comparaison avec une FEM standard	40
7. 3. Nouvelle version de la méthode	42
7. 4. Nouveaux résultats	44
7. 5. Remarques et conclusions	44
8 Création de ϕ	46
8. 1. Méthode de construction	46
8. 2. Premiers résultats	49
8. 3. Application avec la méthode ϕ -FEM	50
8. 4. Adaptation au cadre tridimensionnel	53
9 La méthode ϕ-FEM en élasticité linéaire	54
9. 1. Conditions de Dirichlet homogènes	54
9. 2. Conditions de Dirichlet non homogènes	55
9. 3. Conditions de Neumann	57
9. 4. Conditions mixtes	59
10 La ϕ-FEM pour des problèmes avec interface	61

Introduction

1 Présentation de la méthode des éléments finis

1. 1. Problème considéré

Présentons tout d'abord le problème que nous considérerons dans cette partie. Nous travaillerons sur le problème de Poisson avec une condition de bord de type Dirichlet homogène :

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{sur } \Omega \\ u = u_D & \text{sur } \partial\Omega = \Gamma_D \end{cases} \quad (1.1)$$

où f est une fonction connue (on considérera $f \in L^2(\Omega)$), Δ est l'opérateur Laplacien, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ fermé, avec $N = 1, 2, 3$ et $\partial\Omega$ est la frontière du domaine Ω .

Remarque 1.1. Dans un premier temps, on se place dans le cadre d'une condition homogène, c'est-à-dire que l'on considérera $u_D = 0$ sur le bord Γ_D .

Nous verrons dans cette première partie comment trouver une solution à ce problème et comment s'assurer de l'existence d'une telle solution.

1. 2. Description de la méthode

L'idée générale de la méthode des éléments finis est d'obtenir un problème discréétisé qu'il sera possible de résoudre numériquement et dont la solution approche celle de (1.1). Pour cela, nous aurons tout d'abord besoin d'introduire quelques notions essentielles.

Dans les définitions suivantes, Ω est un fermé convexe de \mathbb{R}^n , de frontière Γ , considérée suffisamment régulière.

Définition 1.1 (Espace fonctionnel linéaire). Un espace fonctionnel linéaire est un ensemble E de fonctions de Ω vérifiant les deux propriétés suivantes :

- i. Soit $u \in E$ et soit $\alpha \in \mathbb{R}$, alors $\alpha u \in E$;
- ii. Soient $u, v \in E$ alors $u + v \in E$.

Définition 1.2 (Espace $L^2(\Omega)$). L'espace $L^2(\Omega)$ est défini par :

$$L^2(\Omega) := \left\{ u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid \int_{\Omega} u^2 dv < +\infty \right\}.$$

Autrement dit, il s'agit de l'espace des fonctions de carré intégrable.

Remarque 1.2. L'espace $L^2(\Omega)$ est un espace fonctionnel linéaire.

Définition 1.3 (Espace de Hilbert). Un espace fonctionnel complet muni d'un produit scalaire est un espace de Hilbert.

On suppose maintenant Ω toujours ouvert mais également borné.

Définition 1.4 (Espace $H^1(\Omega)$). L'espace fonctionnel linéaire $H^1(\Omega)$ est défini par :

$$H^1(\Omega) := \left\{ u \in L^2(\Omega) \mid \nabla u \in L^2(\Omega)^N \right\}$$

muni du produit scalaire $\langle u, v \rangle_{H^1(\Omega)}$, défini par :

$$\langle u, v \rangle_{H^1(\Omega)} = \int_{\Omega} uv + \nabla u \nabla v dx , \forall u, v \in H^1(\Omega).$$

Comme nous l'avons vu, le problème (1.1) est un problème à condition de Dirichlet homogène. On peut donc définir l'espace $H_0^1(\Omega)$, qui nous sera utile par la suite.

Définition 1.5 (Espace $H_0^1(\Omega)$). L'espace $H_0^1(\Omega)$ est défini comme la fermeture (pour la norme $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$ associée au produit scalaire $((\cdot, \cdot))_{H^1(\Omega)}$) de l'espace des fonctions infiniment différentiables sur Ω à support compact et inclus dans Ω .

On peut alors écrire :

$$H_0^1(\Omega) = \left\{ u \in H^1(\Omega) \mid u = 0 \text{ sur } \Gamma = \partial\Omega \right\}.$$

Remarque 1.3. On peut également définir sur le même principe les espaces $H^2(\Omega)$ et $H_0^2(\Omega)$ en ajoutant des conditions respectivement sur les dérivées secondes et sur la dérivée normale, donnée par :

$$\nabla u \cdot n \tag{1.2}$$

où n est le vecteur normal au domaine en chaque point de la frontière.

Maintenant que ces différentes notions sont introduites, nous allons pouvoir expliciter la formulation variationnelle associée au problème (1.1).

Pour déterminer la formulation variationnelle, nous utiliserons une fonction dite "test" w et une intégration par parties sur Ω à l'aide des formules de Green. Le but est ici de se ramener un à problème de la forme suivante :

Définition 1.6 (Formulation variationnelle).

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in H_0^1(\Omega) \text{ telle que} \\ a(u, v) = l(v) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \end{cases} \tag{1.3}$$

avec a une forme bilinéaire et l une forme linéaire.

En pratique, on obtiendra donc les étapes suivantes :

- 1) Problème initial ;
- 2) Multiplication par une fonction test w (ici dans $H_0^1(\Omega)$) et intégration sur Ω ;
- 3) "Intégration par parties" à l'aide des formules de Green ;
- 4) Détermination des formes linéaires et bilinéaires associées au problème initial.

Application pratique :

1) On considère le problème (1.1), trouver u telle que :

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{sur } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega = \Gamma_D. \end{cases}$$

2) Soit $w \in H_0^1(\Omega)$, on obtient le problème :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \text{ telle que :} \\ \int_{\Omega} -\Delta u \cdot w \, dv = \int_{\Omega} f \cdot w \, dv, \quad \forall w \in H_0^1(\Omega). \end{cases} \quad (1.4)$$

3) On utilise une formule de Green, et on obtient :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \text{ telle que :} \\ \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla w \, dv - \underbrace{\int_{\Gamma} \nabla u \cdot w \, dv}_{=0 \text{ car } w \in H_0^1(\Omega)} = \int_{\Omega} f \cdot w \, dv, \quad \forall w \in H_0^1(\Omega). \end{cases} \quad (1.5)$$

4) On se retrouve finalement avec le problème :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in H_0^1(\Omega) \text{ telle que :} \\ a(u, w) = l(w) \quad \forall w \in H_0^1(\Omega) \end{cases} \quad (1.6)$$

avec :

$$a(u, w) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla w \, dv \quad \text{et} \quad l(w) = \int_{\Omega} f \cdot w \, dv.$$

Maintenant que nous avons obtenu la formulation variationnelle, énonçons le résultat d'existence suivant :

Théorème 1.1 (Lax-Milgram). *Soit H un espace de Hilbert. Soient a une forme bilinéaire continue et coercive sur $H \times H$ et l une forme linéaire continue sur H . Alors il existe une unique solution u au problème variationnel :*

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in H \text{ telle que} \\ a(u, v) = l(v) \quad \forall v \in H. \end{cases} \quad (1.7)$$

Rappel (Rappels sur les formes linéaires et bilinéaires). • Une forme linéaire l sur un espace de Hilbert H est dite continue s'il existe une constante C telle que :

$$|l(w)| \leq C \|w\|_H \quad \forall w \in H.$$

- Une forme bilinéaire sur un espace de Hilbert H est continue s'il existe un constante C telle que :

$$|a(u, v)| \leq C \|u\|_H \|v\|_H, \quad \forall u, v \in H.$$

- Une forme bilinéaire sur un espace de Hilbert $H \times H$ est dite coercive s'il existe une constante $\alpha > 0$ telle que :

$$a(u, u) \geq \alpha \|u\|_H^2 \quad \forall u \in H.$$

Les formes linéaires et bilinéaires de l'équation (1.6) vérifiant les hypothèses du théorème de Lax-Milgram, on en conclue qu'il existe une unique solution au problème (1.6). La solution du problème (1.1) est solution du problème (1.6), on en conclue que (1.1) et (1.6) sont équivalents.

Le but va maintenant être de construire un espace discret $V_h \subset V$ de dimension finie. L'espace discret sera ici construit sur un maillage triangulaire du domaine (voir figure 1). On peut obtenir un nouveau problème variationnel sur $V_h \subset V$:

$$\begin{cases} \text{Trouver } u_h \in V_h \text{ telle que :} \\ a(u_h, w_h) = l(w_h) \quad \forall w_h \in V_h \end{cases} \quad (1.8)$$

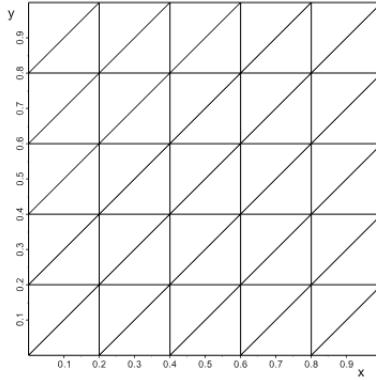


FIGURE 1 – Exemple de maillage triangulaire (grossier) sur le carré unité.

Définissons plus précisément cet espace V_h . On se place maintenant dans un espace de dimension 2, c'est-à-dire $\Omega \subset \mathbb{R}^2$.

Définition 1.7. Soit \mathcal{O} un ouvert de \mathbb{R}^2 . On définit l'espace des polynômes de degré 1 sur \mathcal{O} :

$$\mathbb{P}^1(\mathcal{O}) = \{p|_{\mathcal{O}} | \exists a, b, c \in \mathbb{C} | \forall (x, y) \in \mathcal{O}, p(x, y) = ax + by + c\}.$$

Nous pouvons maintenant définir l'espace V_h pour maillage triangulaire de Ω que l'on notera \mathcal{T}_h :

Définition 1.8. L'espace V_h des fonction \mathbb{P}^1 -Lagrange est défini par :

$$V_h = \left\{ v \in \mathcal{C}^0(\bar{\Omega}) | v|_T \in \mathbb{P}^1(T) \quad \forall T \in \mathcal{T}_h \right\}.$$

L'espace V_h est donc un espace de fonctions linéaires sur chaque triangle de \mathcal{T}_h .

Remarque 1.4. Il est important de noter que le problème admet toujours une unique solution. En effet, V_h étant un sous-espace de Hilbert de V , les différentes hypothèses du théorème de Lax-Milgram sont toujours vérifiées sur V_h .

Soit $N_S = \text{card } \mathcal{T}_h$, c'est-à-dire le nombre de nœuds du maillage. On peut introduire une base de l'espace V_h , de dimension N_S . Cette base est donnée par $(\phi_i)_{i=1,\dots,N_S}$ où les ϕ_i sont définies par :

$$\forall i, j = 1, \dots, N_S, \quad \phi_i(s_j) = \delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

avec s_j les sommets de \mathcal{T}_h .

On représente à la figure 2 une fonction de forme \mathbb{P}^1 , dite "hat-function", en dimension 2.

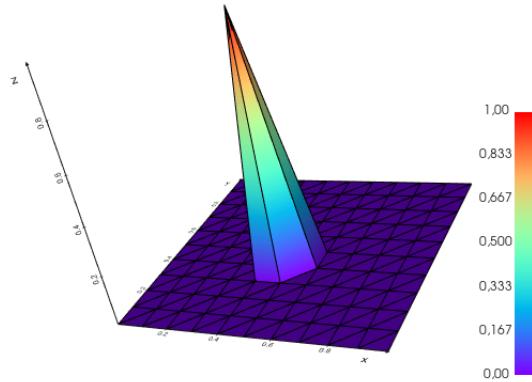


FIGURE 2 – Fonction de forme \mathbb{P}^1 en dimension 2.

Maintenant que nous avons déterminé une base de l'espace V_h , nous allons pouvoir déterminer la forme finale du problème, c'est-à-dire le système linéaire à résoudre. En effet, les fonctions u_h et w_h vivant dans l'espace V_h , il est maintenant possible de les exprimer grâce à la base $(\phi_i)_{i=1,\dots,N_S}$. On exprime donc la fonction u_h dans cette base, en utilisant les valeurs de u_h sur chacun des sommets du maillage et on fait une interpolation de u_h :

$$u_h = \sum_{i=1}^{N_S} u_h(s_i) \phi_i.$$

De plus, w_h devant appartenir à l'espace V_h , en particulier, on peut prendre $w_h = \phi_i$. On peut donc dès à présent transformer le problème variationnel (1.8) et obtenir le problème suivant :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u_h \in V_h \text{ telle que :} \\ \sum_{j=1}^{N_S} a(\phi_j, \phi_i) u_h(s_j) = l(\phi_i) \quad \forall i = 1, \dots, N_S. \end{cases} \quad (1.9)$$

Ce problème peut alors s'écrire :

$$\text{Trouver } U_h \in \mathbb{R}^{N_S} \text{ tel que : } A_h U_h = B_h, \quad (1.10)$$

avec :

$$\begin{cases} A_h &= (a(\phi_j, \phi_i))_{i,j=1,\dots,N_S} \\ U_h &= (u_j)_{j=1,\dots,N_S} = (u_h(s_j))_{j=1,\dots,N_S} \\ B_h &= (l(\phi_i))_{i=1,\dots,N_S}. \end{cases}$$

Maintenant que nous avons obtenu cette formulation, nous allons pouvoir étudier la convergence de cette méthode.

2 Convergence de la méthode des éléments finis

Commençons cette section avec un résultat primordial, le lemme de Céa.

Lemme 2.1. *Soit u la solution exacte (i.e. la solution de (1.1)) et soit u_h la solution approchée (i.e. la solution de (1.8)). Alors,*

$$\|u - u_h\|_V \leq \frac{M}{\alpha} \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_V, \quad (2.1)$$

avec M la constante de continuité de l'application bilinéaire $a(\cdot, \cdot)$ et α sa constante de coercivité.

Démonstration. Soit $v_h \in V_h$ et soient u et u_h vérifiant les hypothèses du lemme. Comme V_h est un espace fonctionnel linéaire, $u_h - v_h \in V_h$.

Alors, par bilinéarité de a :

$$\begin{aligned} a(u - u_h, u - u_h) &= a(u - u_h, u - v_h + v_h - u_h) \\ &= a(u - u_h, u - v_h) + a(u - u_h, v_h - u_h). \end{aligned}$$

Or, $v_h - u_h \in V_h$, on pose alors $w_h = v_h - u_h$. Comme u et u_h sont respectivement solution exacte et solution approchée, elles vérifient la propriété d'orthogonalité de Galerkin :

$$\begin{aligned} a(u - u_h, w_h) &= a(u, w_h) - a(u_h, w_h) \\ &= l(w_h) - l(w_h) \\ &= 0. \end{aligned}$$

On en déduit donc directement :

$$a(u - u_h, u - u_h) = a(u - u_h, u - v_h) \quad \forall v_h \in V_h.$$

Alors, par continuité et coercivité de a , on obtient :

$$\begin{aligned} \alpha \|u - u_h\|_V^2 &\leq M \|u - u_h\|_V \|u - v_h\|_V && \forall v_h \in V_h \\ \implies \|u - u_h\|_V &\leq \frac{M}{\alpha} \|u - v_h\|_V && \forall v_h \in V_h \\ \implies \|u - u_h\|_V &\leq \frac{M}{\alpha} \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_V. \end{aligned}$$

□

Remarque 2.1. Ici, lorsque l'on parlera de nœuds du maillage, on parlera des nœuds de calcul, c'est-à-dire les nœuds géométriques (sommets des éléments) et des points "ajoutés" par le degré k de l'espace \mathbb{P}^k . Les différents nœuds seront donc les sommets pour une interpolation linéaire (\mathbb{P}^1), les sommets ainsi que les points milieux pour une interpolation quadratique (\mathbb{P}^2), etc... On notera $(n_i)_{i=1,\dots,N_{dl}}$ la famille des nœuds du maillage de Ω .

Définition 2.1 (Interpolée). Soit $(n_i)_{i=1,\dots,N_{dl}}$ la famille des nœuds du maillage et soit $(\phi_i)_{i=1,\dots,N_{dl}}$ la base de V_h donnée par les fonctions de forme. On définit l'interpolée sur $H^{k+1}(\Omega)$ d'une fonction continue v par :

$$\Pi_h v = \sum_{i=1}^{N_{dl}} v(n_i) \phi_i.$$

Condition de Ciarlet. Soit $(\mathcal{T}_h)_{h>0}$ une suite de maillages de Ω . Un maillage vérifiant la condition de Ciarlet est tel qu'il existe une constante c_0 , telle que pour tout $h > 0$ et pour tout élément K du maillage \mathcal{T}_h :

$$\frac{\text{diam}(K)}{\rho(K)} \leq c_0,$$

où $\text{diam}(K) = \max_{x,y \in K} \|x - y\|$ et $\rho(K) = \max_{B_r \subset K} 2r$.

Théorème 2.1 (Erreur d'interpolation). Soit $(\mathcal{T}_h)_{h>0}$ une suite de maillages de Ω vérifiant la condition de Ciarlet et telle que la suite des $h = \max_{K \in \mathcal{T}_h} \text{diam} K$ tende vers 0.

On suppose $k + 1 > \frac{1}{2} \dim(\Omega)$. Alors, pour toute fonction v de $H^{k+1}(\Omega)$, l'interpolée $\Pi_h v$ est bien définie et il existe c_1 telle que :

$$\|v - \Pi_h v\|_{H^m(\Omega)} \leq c_1 h^{k+1-m} \|v\|_{H^{k+1}(\Omega)}.$$

Remarque 2.2. Un maillage vérifiant les hypothèses du théorème est dit régulier.

Lemme 2.2. On suppose $k + 1 > N/2$ et $\text{diam}(K) \leq 1$. Alors, il existe une constante c_2 indépendante de K telle que, pour tout $v \in H^{k+1}(K)$:

$$\|v - \Pi_h v\|_{H^m(K)} \leq c_2 \frac{\text{diam}(K)^{k+2-m}}{\rho(K)} |v|_{H^{k+1}(K)}. \quad (2.2)$$

Démonstration du théorème 2.1. Soit $v \in H^{k+1}(\Omega)$. Alors :

$$\begin{aligned} \|v - \Pi_h v\|_{H^m(\Omega)}^2 &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \|v - \Pi_K v\|_{H^m(K)}^2 \\ &\leq \sum_{K \in \mathcal{T}_h} c_2^2 \left(\frac{\text{diam}(K)^{k+2-m}}{\rho(K)} \right)^2 |v|_{H^{k+1}(K)}^2 \end{aligned}$$

Comme \mathcal{T}_h est supposé régulier, il existe c_0 telle que $c_0 \geq \frac{\text{diam}(K)}{\rho(K)}$ pour tout élément du maillage, alors :

$$\begin{aligned} \sum_{K \in \mathcal{T}_h} c_2^2 \left(\frac{\text{diam}(K)^{k+2-m}}{\rho(K)} \right)^2 |v|_{H^{k+1}(K)}^2 &\leq c_2^2 c_0^2 h^{2(k+1-m)} \sum_{K \in \mathcal{T}_h} |v|_{H^{k+1}(K)}^2 \\ &\leq c_1^2 h^{2(k+1-m)} \|v\|_{H^{k+1}(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

C'est-à-dire :

$$\|v - \Pi_h v\|_{H^m(\Omega)} \leq c_1 h^{k+1-m} \|v\|_{H^{k+1}(\Omega)}.$$

□

Nous allons maintenant pouvoir énoncer le théorème nous permettant de déterminer l'ordre de convergence d'une méthode éléments finis. Ce théorème sera démontré puis illustré sur un exemple par la figure 3.

Théorème 2.2 (Convergence). *Soit $(\mathcal{T}_h)_{h>0}$ une suite de maillages réguliers de Ω . Soit u la solution exacte du problème et u_h la solution approchée. On suppose que V_h est un sous-espace de $H^m(\Omega)$. Finalement, on suppose V_h tel que sa restriction à chaque élément du maillage contienne les polynômes de degré k . Alors la méthode converge :*

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|u - u_h\|_{H^m(\Omega)} = 0. \quad (2.3)$$

Si, de plus, $u \in H^{k+1}(\Omega)$ et si $k + 1 > \frac{1}{2} \dim(\Omega)$, il existe une constante C telle que :

$$\|u - u_h\|_{H^m(\Omega)} \leq C h^{k+1-m} \|u\|_{H^{k+1}(\Omega)}. \quad (2.4)$$

Remarque 2.3. L'hypothèse formulée sur V_h dans l'énoncé du théorème revient à dire que u_h est la solution approchée obtenue avec la méthodes éléments finis \mathbb{P}^k .

Démonstration du théorème 2.2. Soit $\mathcal{V} = \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$. Alors \mathcal{V} est dense dans $H_0^1(\Omega)$ et $\mathcal{V} \subset H^{k+1}(\Omega)$. Il existe κ telle que :

$$\|v - \Pi_h v\|_{H^m(\Omega)} \leq \kappa h^{k+1-m} \|v\|_{H^{k+1}(\Omega)}, \quad \forall v \in \mathcal{V}.$$

On a donc :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|v - \Pi_h v\|_{H^m(\Omega)} = 0, \quad \forall v \in \mathcal{V}.$$

Finalement, on a :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|u - u_h\|_{H^m(\Omega)} = 0.$$

La convergence est donc démontrée. Reste maintenant à montrer l'estimation de l'erreur de convergence. Pour cela, on utilise le lemme de Céa (2.1) :

$$\|u - u_h\|_{H^m(\Omega)} \leq \frac{M}{\alpha} \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_{H^m(\Omega)}$$

Si $\Pi_h u \in H^m(\Omega)$:

$$\begin{aligned} &\leq \frac{M}{\alpha} \|u - \Pi_h u\|_{H^m(\Omega)} \\ &\leq \frac{M}{\alpha} c_1 h^{k+1-m} \|u\|_{H^{k+1}(\Omega)}. \end{aligned}$$

On pose finalement $C = \frac{M}{\alpha} c_1$. □

Exemple 2.1. On se place dans le cadre du problème (1.1) avec conditions de Dirichlet non-homogènes :

$$\begin{cases} -\Delta u &= f \text{ sur } \Omega \\ u &= u_D \text{ sur } \Gamma_D = \partial\Omega. \end{cases} \quad (2.5)$$

On pose ici $u = \cos(x) \exp(y)$. On calcule $\Delta u = 0$ et on choisit de travailler sur le carré unité. On a donc le problème suivant :

$$\begin{cases} -\Delta u &= 0 \text{ sur } (0, 1)^2 \\ u &= u_D \text{ sur } \Gamma_D = \partial\Omega, \end{cases}$$

avec $u_D = \cos(x) \exp(y)$. En utilisant deux méthodes différentes (\mathbb{P}^1 et \mathbb{P}^2), et en étudiant l'erreur en norme H^1 et en norme L^2 , on obtient la figure 3.

On retrouve donc bien les résultats théoriques. En effet, si l'on prend le cas de l'utilisation de la méthode des éléments finis \mathbb{P}^1 , la théorie prévoit que l'on aura :

$$\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \leq Ch^1 \|u\|_{H^2(\Omega)}. \quad (2.6)$$

C'est-à-dire que pour une méthode éléments finis \mathbb{P}^1 on aura une convergence linéaire pour la norme H^1 . C'est bien ce que l'on voit sur la figure 3 : l'erreur suit en échelle logarithmique une droite de pente 1.

Prenons maintenant le cas d'une méthode éléments finis \mathbb{P}^2 pour la norme L^2 , c'est-à-dire la norme H^0 . La théorie prévoit ici une convergence cubique, en effet, si l'on utilise les mêmes calculs que précédemment, on trouve :

$$\|u - u_h\|_{L^2(\Omega)} \leq Ch^3 \|u\|_{H^3(\Omega)}.$$

Encore une fois, la théorie se retrouve en pratique sur l'exemple, l'erreur suivant une droite de pente 3.

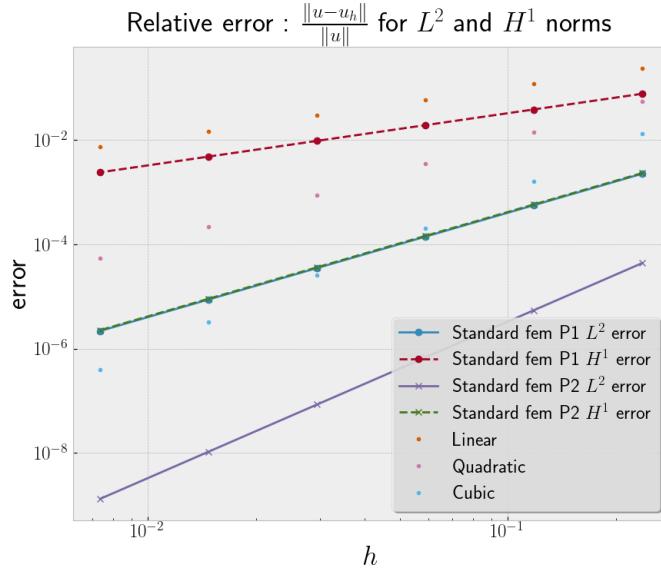


FIGURE 3 – Convergence de la méthode appliquée à l'exemple 2.1.

Remarque 2.4. On trouvera par la suite des conditions dites de Neumann de la forme $\frac{\partial u}{\partial n} = g$ sur le bord. Ces conditions sont dites naturelles contrairement aux conditions de Dirichlet dites essentielles. La différence entre les conditions essentielles et les conditions naturelles est la suivante : lorsque l'on travaille avec des conditions de Dirichlet, la condition est imposée sur l'espace fonctionnel. Lors de l'imposition de conditions de Neumann, on ne modifie pas l'espace fonctionnel mais on modifie la formulation variationnelle et on obtient un terme de bord non nul. La forme linéaire est alors modifiée et est de la forme :

$$l(w) = \int_{\Omega} f w dv + \int_{\partial\Omega} g w ds.$$

Ces conditions ont un sens physique : les conditions de Dirichlet imposent une valeur du déplacement à chaque point de la frontière. Le conditions de Neumann imposent elles une valeur de la force appliquée à chaque point de la frontière.

Remarque 2.5. Il est également possible de combiner conditions de Dirichlet et conditions de Neumann. On construit ainsi une (ou plusieurs) frontière(s) Γ_D où l'on applique les conditions essentielles et Γ_N où l'on impose les conditions de Neumann.

3 Introduction à l'élasticité linéaire

Il est également possible d'appliquer une méthode éléments finis dans le cas d'un problème d'élasticité. C'est ce que nous allons maintenant voir.

La différence avec le cadre vu précédemment est que l'on cherchera une solution sous forme vectorielle : on cherche à déterminer le déplacement d'un point x selon chacun des axes de l'espace. L'idée est la suivante : on prend un point $x = (x_1, x_2, x_3)$ de l'espace à 3 dimensions et on applique le vecteur force :

$$r(x) = (r_1(x_1, x_2, x_3), r_2(x_1, x_2, x_3), r_3(x_1, x_2, x_3)).$$

On cherche alors à déterminer le déplacement u du point (x_1, x_2, x_3) . Pour cela, on introduit le tenseur σ , symétrique et appelé tenseur des contraintes (de Cauchy). On peut écrire les équations d'équilibre avec la notation tensorielle :

$$-\nabla \cdot \sigma = r. \quad (3.1)$$

Remarque 3.1. Il est également possible d'écrire ces équations sans utiliser la notation tensorielle, cependant on obtient un système de 3 équations, moins lisible et plus lourd à écrire. De plus, on écrit également (pour des raisons de lisibilité),

$$-\operatorname{div} \sigma = r. \quad (3.2)$$

On introduit 2 notations :

$$\nabla u = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_3}{\partial x_1} & \frac{\partial u_3}{\partial x_2} & \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{bmatrix} \quad \gamma(u) = \frac{\nabla u + \nabla u^t}{2}.$$

On appelle ∇u tenseur gradient de déformation et $\gamma(u)$ tenseur de déformation.

Appliquons maintenant la méthode des éléments finis au problème (3.1). Soit une fonction test $w = (w_1, w_2, w_3)$ appartenant à $(H^1(\Omega))^3$. On obtient le problème :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} -\operatorname{div} \sigma \cdot w \, dv &= \int_{\Omega} r \cdot w \, dv \\ \iff \int_{\Omega} \sigma : \nabla w \, dv - \int_{\Gamma} (\sigma \cdot n) \cdot w \, ds &= \int_{\Omega} r \cdot w \, dv \end{aligned}$$

Grâce à la symétrie de σ on obtient :

$$\iff \int_{\Omega} \sigma : \gamma(w) \, dv - \int_{\Gamma} (\sigma \cdot n) \cdot w \, ds = \int_{\Omega} r \cdot w \, dv$$

On introduit finalement le tenseur d'élasticité, permettant de relier σ et $\gamma(u)$ et vérifiant :

$$\sigma = C : \gamma(u).$$

Finalement, on obtient le problème :

$$\iff \int_{\Omega} (C : \gamma(u)) : \nabla w \, dv - \int_{\Gamma} (\sigma \cdot n) \cdot w \, ds = \int_{\Omega} r \cdot w \, dv \quad (3.3)$$

Dans le cas qui nous intéressera le plus, c'est-à-dire le cas d'un matériau linéaire élastique isotrope, le tenseur d'élasticité C est défini par

$$C_{ijkl} = \lambda I_{ij} I_{kl} + \mu (I_{ik} I_{jl} + I_{il} I_{jk}), \quad (3.4)$$

avec I le tenseur identité et λ et μ des constantes dépendant du matériau étudié. On peut ainsi réécrire l'équation (3.1) sous la forme :

$$\int_{\Omega} \lambda(\operatorname{div} u)(\operatorname{div} w) + 2\mu\gamma(u) : \gamma(w) \, dv = \int_{\Omega} r \cdot w \, dv + \int_{\Gamma} t \cdot w \, ds \quad (3.5)$$

où l'on a introduit le vecteur de traction $t = \sigma \cdot n = \lambda(\operatorname{div} u)n + 2\mu\gamma(u) \cdot n$.

Maintenant que l'on a obtenu la formulation variationnelle (3.5), le principe reste similaire à ce qui a été vu précédemment. Cependant, on choisira ici des fonctions ϕ_i vectorielles. De plus, on posera sur chaque élément K :

$$\begin{cases} \alpha^K &= (U_1^K \ U_2^K \ U_3^K)^t \\ \Phi^K &= [(\phi^K_1, 0, 0), \dots, (\phi^K_{n_c^K}, 0, 0), (0, \phi^K_1, 0), \dots, (0, \phi^K_{n_c^K}, 0), (0, 0, \phi^K_1), \dots, (0, 0, \phi^K_{n_c^K})]^t \\ u^K(x) &= \sum_{j=1}^{3n_c^K} \alpha_j^K \phi_j^K(x) \end{cases}$$

où l'on a posé n_c^K le nombre de noeuds de calcul sur chaque élément et U_i^K les valeurs de la composante i de u aux noeuds de calcul.

On se retrouve finalement avec le système élémentaire suivant à résoudre :

$$A^K \alpha^K = F^K + S^K$$

où l'on a introduit :

$$\begin{cases} a_{ij}^K &= \int_K \lambda(\operatorname{div} \Phi_j^K)(\operatorname{div} \Phi_i^K) + 2\mu\gamma(\Phi_j^K) : \gamma(\Phi_i^K) \, dv \\ f_i^K &= \int_K r^K \cdot \Phi_i^K \, dv \\ s_i^K &= \int_{\partial K} t^K \cdot \Phi_i^K \, ds \end{cases}$$

Exemple 3.1. On prend l'exemple d'un pavé droit privé d'une sphère, auquel on applique un vecteur force nul et un déplacement initial au bord gauche $u = (-1, 0, 0)$ et au bord droit $u = (1, 0, 0)$. On représente les résultats obtenus aux figures 4 et 5.

4 La notion d'hyper-élasticité

4. 1. Les déformations et tenseurs essentiels

Nous allons à présent introduire la notion d'hyper-élasticité. Dans cette section nous allons établir la démarche à suivre pour résoudre un problème éléments finis en hyper-élasticité.

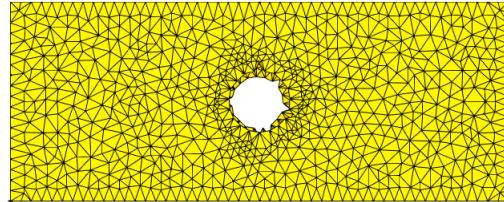


FIGURE 4 – *Maillage sur le domaine.*

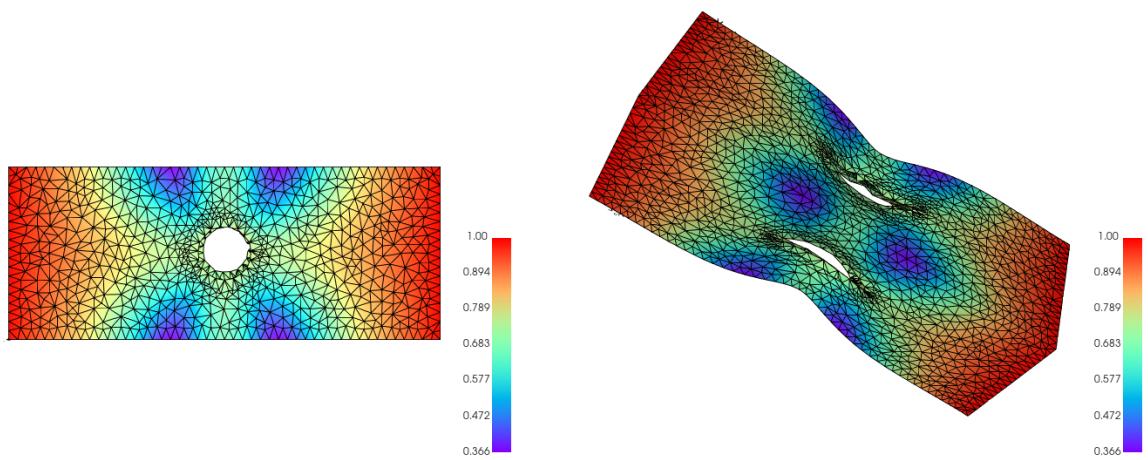


FIGURE 5 – *Déformation du domaine.*

Pour cela nous aurons besoin d'introduire un certain nombre de nouveaux tenseurs. Nous définirons donc tous ces tenseurs ainsi que les notations associées à chacun de ces tenseurs. Pour se simplifier la tâche, ces tenseurs seront introduits simultanément sous forme d'un tableau.

Ce cadre sera très différent de ce qui a été vu jusqu'à présent. En effet, pour l'instant, on disposait d'un domaine Ω qui restait inchangé au fil du temps. Cependant, dans cette section, le domaine sera évolutif au fil du temps. En effet, les forces appliquées sur le domaine seront telles que le domaine sera modifié et subira ces forces, ce qui impliquera un déplacement des différents points du domaine.

On considère donc au temps initial, un domaine initial noté Ω^0 . Le principe de la méthode sera, à chaque temps considéré de se ramener par un changement de variables au domaine Ω^0 . On notera à chaque temps t le nouveau domaine Ω^t et les points appartenant au domaine Ω^t seront notés $x(X, t) = (x_1(X, t), x_2(X, t), x_3(X, t))^t$ où X est un point de la configuration initiale Ω^0 (ici considérée de dimension 3).

On applique donc un déplacement au point X , qui peut être exprimé comme suit :

$$u(X, t) = x(X, t) - X. \quad (4.1)$$

On peut alors exprimer $x(X, t)$ sous la forme :

$$\begin{bmatrix} x_1(X, t) \\ x_2(X, t) \\ x_3(X, t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_1(X, t) \\ u_2(X, t) \\ u_3(X, t) \end{bmatrix}. \quad (4.2)$$

Introduisons tout d'abord une convention de notation qui sera utilisée tout au long de cette section. Comme dit précédemment, nous aurons besoin de faire des changements de variables. On notera donc désormais les mesures de la configuration initiale avec des lettres majuscules (dX) et des lettres minuscules pour les configurations déformées (dx). Ces transformations de mesures seront réalisées grâce aux différents tenseurs que nous allons maintenant introduire.

Un tenseur primordial pour ces transformations est le tenseur gradient de déformation, noté F et défini par :

$$F = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial X_1} & \frac{\partial x_1}{\partial X_2} & \frac{\partial x_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial X_1} & \frac{\partial x_2}{\partial X_2} & \frac{\partial x_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial X_1} & \frac{\partial x_3}{\partial X_2} & \frac{\partial x_3}{\partial X_3} \end{bmatrix}. \quad (4.3)$$

On supposera ici F toujours inversible d'inverse :

$$F^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\partial X_1}{\partial x_1} & \frac{\partial X_1}{\partial x_2} & \frac{\partial X_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial X_2}{\partial x_1} & \frac{\partial X_2}{\partial x_2} & \frac{\partial X_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial X_3}{\partial x_1} & \frac{\partial X_3}{\partial x_2} & \frac{\partial X_3}{\partial x_3} \end{bmatrix}. \quad (4.4)$$

On notera F_{ij} les composante de F et J son déterminant. Introduisons maintenant les formules permettant de relier les différents tenseurs, à l'aide du tableau 6. On introduit dans ce tableau une partie des tenseurs qui seront utilisés par la suite. On donnera ici seulement une expression de chaque tenseur et lorsque cela sera nécessaire, (pour certaines caractérisations notamment), d'autres expressions seront données plus tard.

Définition 4.1. On appelle jacobien surfacique le rapport entre l'aire d'un élément de surface déformée et un élément de surface déformée. Il est donné par :

$$J_S = \frac{da}{dA} = J \|F^{-t} \cdot N\| = J \sqrt{(C^{-1} \cdot N) \cdot N} = \frac{J}{\sqrt{(F \cdot F^{-t} \cdot n) \cdot n}} \quad (4.5)$$

Définition du tenseur	Notation	Expression
Tenseur gradient des déplacements	$\nabla_X u$	$(\nabla_X u)_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial X_j}$
Tenseur gradient de déformation	F	$F = I + \nabla_X u$
Partie symétrique de F	$\gamma_X(u)$	$\gamma_X(u) = \frac{\nabla_X u + \nabla_X u^t}{2}$
Tenseur de Cauchy-Green	C	$C = F^t \cdot F$
Tenseur de Green-Lagrange	E	$E = \frac{1}{2}(C - I)$

FIGURE 6 – Table des tenseurs utilisés.

Configuration initiale	Configuration déformée	Transformation utilisée
Élément de longueur $dX = (dX_1, dX_2, dX_3)^t$	Élément de longueur $dx = (dx_1, dx_2, dx_3)^t$	$dx = F \cdot dX$
Longueur dl de dX	Longueur $(dl)^2$ de dx	$(dl)^2 = (C \cdot dX) \cdot dX$
Élément de volume dV	Élément de volume dv	$dv = \det F dV = J dV$
Élément d'aire orientée dA	Élément d'aire orientée da	$da = J(X) F^{-t} \cdot dA$
Divergence de W	Divergence de w	$\operatorname{div} w = \frac{\nabla_X \cdot W}{J} = \frac{\nabla_X \cdot (J F^{-t} \cdot w)}{J}$
Divergence de T_0	Divergence de T	$\operatorname{div} T = \frac{\nabla_X \cdot T_0}{J} = \frac{\nabla_X \cdot (J T \cdot F^{-t})}{J}$
Masse volumique ρ_0	Masse volumique ρ	$\rho = \frac{\rho_0}{J}$

FIGURE 7 – Table des changements de variables.

où N et n sont respectivement la normale à la configuration initiale et la normale à la configuration déformée.

On peut donc exprimer (grâce à la formule de Nanson), la normale à la configuration déformée en fonction de la normale à la configuration initiale via la formule suivante :

$$n = JF^{-t} \cdot N \frac{dA}{da} = \frac{J}{J_S} (F^{-t} \cdot N). \quad (4.6)$$

Théorème 4.1 (de transport de Reynolds). *Soit Ω^t un domaine se déplaçant dans le temps à une vitesse \mathbf{v} et soit f une fonction régulière. Alors :*

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega^t} f(x, t) dv = \int_{\Omega^t} \frac{\partial f}{\partial t} + \operatorname{div}(f\mathbf{v}) dv. \quad (4.7)$$

Lemme 4.1. *Soient J , X , t et v comme introduit précédemment. On a :*

$$\frac{\partial J}{\partial t} J(X, t) = J \operatorname{div} v. \quad (4.8)$$

Démonstration du théorème 4.1. On se ramène tout d'abord à une intégrale sur le domaine initial, en utilisant les changements de variables du tableau 7 :

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega^t} f(x, t) dv = \frac{d}{dt} \int_{\Omega^0} f(x, t) J dV.$$

Alors :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Omega^0} f(x, t) J dV &= \int_{\Omega^0} \frac{d}{dt} (f(x, t) J) dV \\ &= \int_{\Omega^0} \frac{d}{dt} (f(x, t)) J + f(x, t) \frac{d}{dt} J dV \\ &= \int_{\Omega^0} \left(\frac{\partial}{\partial t} f(x, t) + \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} \right) J + f(x, t) \frac{d}{dt} J dV \\ &= \int_{\Omega^0} \left(\frac{\partial}{\partial t} f(x, t) + v \cdot \operatorname{div} f \right) J + f(x, t) \frac{d}{dt} J dV \\ &= \int_{\Omega^0} \left(\frac{\partial}{\partial t} f(x, t) + v \cdot \operatorname{div} f \right) J + f(x, t) J \operatorname{div} v dV \\ &= \int_{\Omega^0} \left(\frac{\partial}{\partial t} f(x, t) + v \cdot \operatorname{div} f + f(x, t) \cdot \nabla v \right) J dV \\ &= \int_{\Omega^0} \left(\frac{\partial}{\partial t} f(x, t) + \operatorname{div}(fv) \right) J dV. \end{aligned}$$

On considère finalement le domaine Ω^t en utilisant le même changement de variable et on obtient :

$$\int_{\Omega^0} \left(\frac{\partial}{\partial t} f(x, t) + \operatorname{div}(fv) \right) J dV = \int_{\Omega^t} \left(\frac{\partial}{\partial t} f(x, t) + \operatorname{div}(fv) \right) dv.$$

□

Remarque 4.1. De la dernière égalité de la démonstration 4.1. et à l'aide du théorème de la divergence, on déduit :

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega^t} f(x, t) dv = \int_{\Omega^t} \frac{\partial f}{\partial t} dv + \int_{\partial\Omega^t} (fv) \cdot n ds \quad (4.9)$$

Définition 4.2 (Tenseur de Cauchy). Soit df un élément de force agissant sur un élément de surface da de la configuration déformée Ω^t , de normale n . Le tenseur de Cauchy σ vérifie :

$$df = (\sigma \cdot n)da \text{ ou de façon équivalente } \frac{df}{da} = \sigma \cdot n. \quad (4.10)$$

Définition 4.3 (Premier tenseur de Piola-Kirchhoff). Soit df un élément de force agissant sur un élément de surface da de la configuration déformée Ω^t , de normale n . Le premier tenseur de Piola-Kirchhoff est défini Π est défini par :

$$df = \Pi \cdot N da. \quad (4.11)$$

Définition 4.4 (Deuxième tenseur de Piola-Kirchhoff). Soit df un élément de force agissant sur un élément de surface da de la configuration déformée Ω^t , de normale n . On associe à df un élément de force (fictif) sur un élément d'aire dA de la configuration non déformée, $df_0 = F^{-1} \cdot df$. On peut définir le deuxième tenseur de Piola-Kirchhoff sur la configuration initiale, noté S et vérifiant :

$$S \cdot N da = df_0. \quad (4.12)$$

Lemme 4.2 (Relations entre les tenseurs). *Soient Π , S , F et σ les tenseurs définis précédemment. On a les relations :*

$$\Pi = F \cdot S, \quad (4.13)$$

$$\sigma = \frac{1}{J} F \cdot S \cdot F^t, \quad (4.14)$$

et

$$\sigma = \frac{1}{J} \Pi \cdot F^t. \quad (4.15)$$

Démonstration. 1) On a par définition :

$$df = \Pi \cdot N da \text{ et } S \cdot N da = F^{-1} df.$$

Alors :

$$S \cdot N da = F^{-1} df \Leftrightarrow df = F \cdot S \cdot N da.$$

On combine les deux relations et on a finalement :

$$\Pi \cdot N da - F \cdot S \cdot N da \Leftrightarrow \Pi = F \cdot S. \quad (4.16)$$

2) On a :

$$(\sigma \cdot n)da = df = F df_0 = FS N da.$$

Or, par changement de variable entre la configuration originale et la configuration déformée, on a :

$$\sigma \cdot (nda) = \sigma J F^{-t} \cdot N da.$$

D'où :

$$\begin{aligned} \sigma J F^{-t} \cdot N da &= FS N da \\ \Leftrightarrow \sigma &= \frac{1}{J} F S F^t. \end{aligned}$$

3) Découle immédiatement de 1) et 2).

□

4. 2. Matériaux hyperélastiques

Maintenant que nous avons introduit les premiers points importants de cette section, nous allons maintenant aborder les matériaux hyperélastiques. Pour cela, il faut d'abord séparer les matériaux en trois cas. Ces cas sont définis par le coefficient de Poisson associé aux matériaux. Si le coefficient de Poisson *lambda* est inférieur à 0.5 alors le matériau est n'est pas incompressible, s'il est proche de 0.5 il est quasi incompressible et s'il est égal à 0.5 alors le matériau est incompressible.

Dans tous les cas, il est important de préciser qu'il existe un grand nombre de modèles pour les matériaux hyperélastiques, tels que les modèles néo-hookéen, de Saint-Venant-Kirchhoff ou d'Ogden. Ces modèles sont caractérisés par l'expression du potentiel considérée. En effet, dans le cas hyperélastique, on exprime le deuxième tenseur de Piola-Kirchhoff en fonction d'un potentiel d'énergie de déformation de la façon suivante :

$$S = \frac{\partial \Psi}{\partial E} = 2 \frac{\partial \Psi}{\partial C}, \quad (4.17)$$

où C est le tenseur de Cauchy-Green et E est le tenseur de Green-Lagrange.

On peut exprimer le potentiel en fonction des invariants du tenseur de Cauchy-green, donnés par :

$$\begin{cases} I_1 &= \text{tr}(C) \\ I_2 &= \frac{1}{2}(I_1^2 - \text{tr}(C \cdot C)) \\ I_3 &= \det(C). \end{cases} \quad (4.18)$$

On suppose une relation pour exprimer Ψ sous la forme :

$$\Psi = \Psi(I_1, I_2, I_3). \quad (4.19)$$

On obtient finalement une expression du deuxième tenseur de Piola-Kirchhoff donnée par :

$$S = 2 \left(\frac{\partial \Psi}{\partial I_1} I + \frac{\partial \Psi}{\partial I_2} (I_1 I - C) + \frac{\partial \Psi}{\partial I_3} I_3 C^{-1} \right). \quad (4.20)$$

Remarque 4.2. Cette formulation est obtenue en utilisant les dérivées des invariants définis par 4.18, données par :

$$\begin{cases} \frac{\partial I_1}{\partial C} &= I \\ \frac{\partial I_2}{\partial C} &= I_1 I - C \\ \frac{\partial I_3}{\partial C} &= I_3 C^{-t}. \end{cases} \quad (4.21)$$

4. 3. Quelques modèles importants

Nous allons maintenant présenter quelques modèles très utilisés en hyperélasticité. Par la suite, le but sera d'implémenter ces différents modèles sous *FEniCS* afin de comparer les résultats obtenus via ces modèles, notamment l'erreur obtenue en fonction du temps de calcul.

Modèle de Saint-Venant-Kirchhoff

Pour ce modèle, on posera ici pour le potentiel d'énergie :

$$\Psi = \frac{1}{2}\lambda(\text{tr } E)^2 + \mu(E : E). \quad (4.22)$$

Alors, le deuxième tenseur de Piola-Kirchoff est donné par :

$$S = \frac{\partial \Psi}{\partial E} = \lambda \text{tr}(E)I + 2\mu E. \quad (4.23)$$

Ce modèle est en fait une généralisation aux matériaux hyperélastiques, du modèle utuilisé en élasticité linéaire. Cela se remarque notamment lorsque l'on calcule le tenseur d'élasticité $C = \frac{\partial S}{\partial E}$:

$$C_{ijkl} = \lambda I_{ij} I_{kl} + \mu(I_{ik} I_{jl} + I_{il} I_{jk}). \quad (4.24)$$

On retrouve en effet ici le tenseur défini à l'équation (3.4) page 13.

Modèle néo-hookéen

Définissons maintenant un modèle légèrement plus complexe mais faisant toujours intervenir seulement les invariants de C , le modèle néo-hookéen. Ici, on écrit le potentiel d'énergie sous la forme :

$$\Psi = \frac{\mu}{2}(I_1 - 3) + \frac{\lambda}{2}(\ln J)^2 - \mu \ln J = \frac{\mu}{2}(I_1 - 3) + \frac{\lambda}{8}(\ln I_3)^2 - \frac{\mu}{2} \ln I_3. \quad (4.25)$$

On peut ainsi déterminer le tenseur d'élasticité S :

$$S = 2 \frac{\partial \Psi}{\partial C} = \mu(I - C^{-1}) + \frac{\lambda}{2}(\ln I_3)C^{-1}. \quad (4.26)$$

Modèle d'Ogden

Nous allons maintenant introduire un modèle beaucoup plus complexe que les précédents. Dans ce modèle, le potentiel Ψ ne sera pas exprimé en fonction des invariants mais des valeurs propres de C . Le potentiel s'écrit :

$$\Psi = \sum_{m=1}^N \frac{\mu_m}{\alpha_m} \left(L_1^{\frac{\alpha_m}{2}} + L_2^{\frac{\alpha_m}{2}} + L_3^{\frac{\alpha_m}{2}} - 3 \right), \quad (4.27)$$

où L_i sont les valeurs propres des invariants, $N = 3$ généralement et μ_m ainsi que α_m sont des paramètres dépendant du matériau considéré.

Il est nécessaire, pour dériver le potentiel par rapport aux invariants, d'exprimer ces derniers en fonction des valeurs propres de C :

$$\begin{cases} I_1 = \text{tr}(C) & = L_1 + L_2 + L_3 \\ I_2 = \frac{1}{2}(I_1^2 - \text{tr}(C \cdot C)) & = L_1 L_2 + L_1 L_3 + L_2 L_3 \\ I_3 = \det C & = L_1 L_2 L_3. \end{cases} \quad (4.28)$$

On peut dériver les invariants par rapports aux valeurs propres L_1 , L_2 et L_3 . On exprime ensuite S dans une base orthonormale de vecteurs propres N_i . On exprime également le

tenseur identité, le tenseur de Cauchy-Green et son inverse dans cette même base et on obtient :

$$I = \sum_{i=1}^3 N_i \otimes N_i \quad (4.29)$$

$$C = \sum_{i=1}^3 L_i N_i \otimes N_i \quad (4.30)$$

$$C^{-1} = \sum_{i=1}^3 \frac{1}{L_i} N_i \otimes N_i. \quad (4.31)$$

On peut remplacer dans l'expression (4.20), et on obtient :

$$S = 2 \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial \Psi}{\partial I_1} + \frac{\partial \Psi}{\partial I_2} (I_1 - L_i) + \frac{\partial \Psi}{\partial I_3} \frac{I_3}{L_1} \right) N_i \otimes N_i.$$

Puisque $\frac{\partial I_1}{\partial L_i} = 1$, $\frac{\partial I_2}{\partial L_i} = I_1 - L_i$ et $\frac{\partial I_3}{\partial L_i} = \frac{I_3}{L_i}$ pour $i = 1, 2, 3$, on a alors :

$$\begin{aligned} S &= 2 \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial \Psi}{\partial I_1} \frac{\partial I_1}{\partial L_i} + \frac{\partial \Psi}{\partial I_2} \frac{\partial I_2}{\partial L_i} + \frac{\partial \Psi}{\partial I_3} \frac{\partial I_3}{\partial L_i} \right) N_i \otimes N_i \\ &= 2 \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \Psi}{\partial L_i} N_i \otimes N_i. \end{aligned}$$

4. 4. Formulations variationnelles en hyperélasticité

Maintenant que nous avons introduit les différents points précédents, nous allons pouvoir introduire les formulations variationnelles à résoudre. On écrit tout d'abord l'équation d'équilibre de l'élasticité sur la configuration déformée Ω^t :

$$-\operatorname{div} \sigma(u) = r \text{ sur } \Omega^t. \quad (4.32)$$

On applique ensuite la méthode habituelle : on multiplie par une fonction test w puis on intègre par parties. On obtient ainsi la formulation :

$$\int_{\Omega^t} \sigma(u) : \nabla w - \int_{\Gamma^t} (\sigma(u) \cdot n) \cdot w = \int_{\Omega^t} r \cdot w. \quad (4.33)$$

On a donc donné ici une formulation variationnelle sur la configuration déformée Ω^t . Cependant, il est intéressant de donner également une formulation sur la configuration initiale Ω^0 , à l'aide d'un changement de variables. Cela permettra de passer de la configuration initiale à la configuration déformée facilement. On énonce la proposition suivante :

Proposition 4.1 (Changement de variables). *On a les égalités :*

$$\int_{\Omega^t} r \cdot w dv = \int_{\Omega^0} r \cdot w J dV \quad (4.34)$$

$$\int_{\Omega^t} \sigma(u) : \nabla w dv = \int_{\Omega^0} \Pi : \nabla_X w dV. \quad (4.35)$$

5 La méthode ϕ -FEM pour le problème de Poisson-Dirichlet

Maintenant que nous avons introduit la méthode des éléments finis, nous allons pouvoir introduire la méthode ϕ -FEM présentée dans [1].

On se place dans le cadre du problème de Poisson-Dirichlet :

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma. \end{cases} \quad (5.1)$$

On suppose ici que le domaine Ω est un ouvert de \mathbb{R}^d de frontière Γ , avec $d = 2$ ou $d = 3$. La méthode ϕ -FEM repose sur le principe suivant : on suppose que le domaine et sa frontière sont définis par une fonction ϕ dite "level-sets", telle que :

$$\Omega := \{\phi < 0\} \text{ et } \Gamma := \{\phi = 0\}, \quad (5.2)$$

puis, on résout le problème en cherchant une fonction w telle que $\phi w = u$ soit solution du problème initial.

5. 1. Définitions des espaces

Tout d'abord, nous allons construire un maillage sur le domaine Ω . Pour cela, on suppose que le domaine est inclus dans un domaine trivial \mathcal{D} (par exemple, en dimension 2, un rectangle). On introduit un maillage régulier du domaine \mathcal{D} , que l'on notera $\mathcal{T}_h^\mathcal{D}$.

On définit un "sous-maillage" de $\mathcal{T}_h^\mathcal{D}$ qui nous permettra d'avoir une meilleure approximation du domaine Ω . Pour cela, on définit le maillage \mathcal{T}_h qui contiendra tous les éléments de $\mathcal{T}_h^\mathcal{D}$ en intersection avec Ω_h où Ω_h est défini par l'interpolation de ϕ sur l'espace des fonctions \mathbb{P}^k -Lagrange sur \mathcal{D} . On travaille sur le maillage \mathcal{T}_h afin de définir deux nouveaux ensemble qui nous permettront d'appliquer les pénalités que nous verrons plus tard.

Définissons tout cela plus formellement :

- Soit $V_h^\mathcal{D}$ l'espace des fonctions \mathbb{P}^k -Lagrange sur \mathcal{D} défini par :

$$V_h^\mathcal{D} = \left\{ v \in H^1(\mathcal{D}) \mid v|_T \in \mathbb{P}^k(T) \quad \forall T \in \mathcal{T}_h^\mathcal{D} \right\}.$$

- Soit ϕ_h l'interpolée de la fonction ϕ sur l'espace $V_h^\mathcal{D}$.
- Soient Ω_h et Γ_h les domaines définis par la fonction ϕ_h :

$$\Omega_h := \{\phi_h < 0\} \quad \text{et} \quad \Gamma_h := \{\phi_h = 0\}.$$

- Soit \mathcal{T}_h , le sous-maillage, défini par :

$$\mathcal{T}_h := \{T \in \mathcal{T}_h^\mathcal{D} : T \cap \{\phi_h < 0\} \neq \emptyset\}.$$

On a alors $\Omega_h = \bigcup_{T \in \mathcal{T}_h^\mathcal{D}} T$.

- Soit maintenant l'espace fonctionnel V_h^k , espace des fonctions \mathbb{P}^k -Lagrange sur Ω_h , défini par :

$$V_h^k = \left\{ v_h \in H^1(\Omega_h) : v_h|_T \in \mathbb{P}^k(T) \quad \forall T \in \mathcal{T}_h \right\}.$$

- Soit \mathcal{T}_h^Γ l'ensemble des éléments du maillage en intersection avec la frontière discrète, c'est-à-dire :

$$\mathcal{T}_h^\Gamma := \{T \in \mathcal{T}_h : T \cap \Gamma_h \neq \emptyset\}.$$

- Finalement, on définit un ensemble de facettes internes du maillage \mathcal{T}_h :

$$\mathcal{F}_h^\Gamma := \{F : \exists T \in \mathcal{T}_h : T \cap \Gamma_h \neq \emptyset \text{ et } F \in \partial T\}.$$

5. 2. Description de la méthode

On rappelle que l'on travaille ici sur le problème de Poisson-Dirichlet. On multiplie le problème par ϕ (en supposant ϕ connue et suffisamment régulière) et on remplace alors dans l'équation (5.1). On intègre par parties et on obtient le problème :

$$\begin{cases} \text{Trouver } w \in H^1(\Omega) \text{ telle que ,} \\ \int_{\Omega} \nabla(\phi w) \cdot \nabla(\phi v) - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial}{\partial n}(\phi w)\phi v = \int_{\Omega} f\phi v, \quad \forall v \in H^1(\Omega). \end{cases} \quad (5.3)$$

Maintenant que le nouveau problème est introduit, on le discrétise et on se retrouve avec un problème éléments finis qui est le suivant :

$$\begin{cases} \text{Trouver } w_h \in V_h^k \text{ telle que,} \\ a(w_h, v_h) = l(v_h), \quad \forall v_h \in V_h^k, \end{cases} \quad (5.4)$$

où :

$$a(w_h, v_h) := \int_{\Omega_h} \nabla(\phi_h w_h) \cdot \nabla(\phi_h v_h) - \int_{\partial\Omega_h} \frac{\partial}{\partial n}(\phi_h w_h)\phi_h v_h + G_h(w_h, v_h) \quad (5.5)$$

$$l(v_h) := \int_{\Omega_h} f_h \phi_h v_h + G_h^{rhs}(v_h), \quad (5.6)$$

avec :

$$G_h(w_h, v_h) := \sigma h \sum_{F \in \mathcal{F}_h^\Gamma} \int_F \left[\frac{\partial}{\partial n}(\phi_h w_h) \right] \left[\frac{\partial}{\partial n}(\phi_h v_h) \right] + \sigma h^2 \sum_{T \in \mathcal{T}_h^\Gamma} \int_T \Delta(\phi_h w_h) \Delta(\phi_h v_h) \quad (5.7)$$

$$G_h^{rhs}(v_h) := -\sigma h^2 \sum_{T \in \mathcal{T}_h^\Gamma} \int_T f \Delta(\phi_h v_h), \quad (5.8)$$

où σ est le paramètre de stabilisation.

Explications des pénalités. Détaillons maintenant les termes des pénalités $G_h(w, v)$ et $G_h^{rhs}(v)$. On considère tout d'abord :

$$G_h(w_h, v_h) := \underbrace{\sigma h \sum_{F \in \mathcal{F}_h^\Gamma} \int_F \left[\frac{\partial}{\partial n}(\phi_h w_h) \right] \left[\frac{\partial}{\partial n}(\phi_h v_h) \right]}_{(1)} + \underbrace{\sigma h^2 \sum_{T \in \mathcal{T}_h^\Gamma} \int_T \Delta(\phi_h w_h) \Delta(\phi_h v_h)}_{(2)}.$$

- (1) Tout d'abord, on travaille sur la pénalité d'ordre 1. Pour déterminer cette pénalité, on utilise le principe de la pénalité fantôme (ghost penalty). On intègre sur les facettes du bord le produit des sauts des dérivées normales. On utilise ici la formulation variationnelle initiale. En effet, on reconnaît la dérivée normale de ϕw qui apparaît dans le terme de bord de la formulation (5.3). On pénalise donc le saut des dérivées normales de ϕw et de ϕv sur les facettes de bord. Cela revient donc à pénaliser la condition de bord.
- (2) Pour la pénalité d'ordre 2, on considère cette fois des cellules du maillage et plus seulement des facettes. On intègre donc ici sur l'ensemble des cellules appartenant au bord. Cependant, cette fois on considère une pénalité plus "globale". En effet, on reconnaît dans le terme la formulation initiale du problème pour les fonctions w et v . On intègre plus précisément le produit du laplacien de ϕw et du laplacien de ϕv , issus de la formulation (5.1).

Finalement, il reste le terme de droite, c'est-à-dire $G_h^{rhs}(v)$. On a ici une pénalité d'ordre 2, qui est déterminée comme précédemment. En effet, ici on intègre une nouvelle fois sur l'ensemble des cellules du bord, le produit de la fonction f du problème initial et le laplacien de ϕv , comme dans le terme d'ordre 2 de la pénalité G_h .

5. 3. Exemple pratique

Pour comprendre la méthode, on se permet de présenter un exemple pratique issu de [1]. On se place donc dans le cadre de l'équation de Poisson-Dirichlet, en prenant les différentes données suivantes :

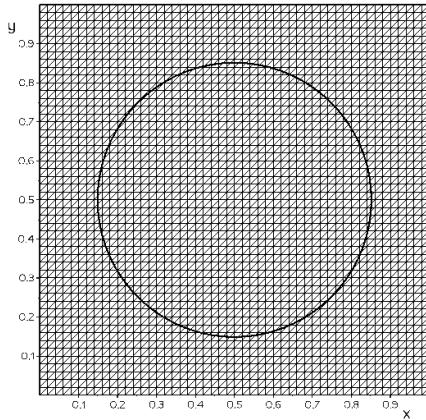
- Le domaine \mathcal{D} considéré est le carré unité $[0, 1]^2$;
- Le domaine Ω est le cercle de rayon $\frac{\sqrt{2}}{4}$ et de centre $(0.5, 0.5)$;
- La fonction ϕ est telle que $\phi(x, y) = -\frac{1}{8} + (x - 0.5)^2 + (y - 0.5)^2$;
- On travaille sur le problème ayant pour solution exacte la fonction :

$$u(x, y) = \phi(x, y) \times \exp(x) \times \sin(2\pi y);$$

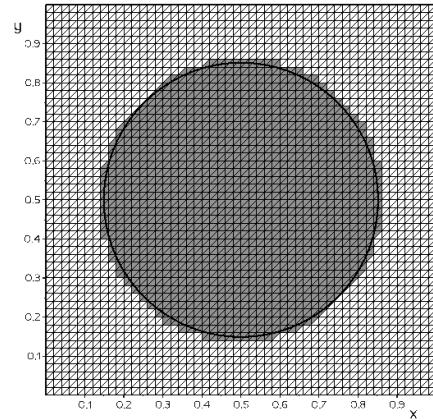
- On utilise une méthode éléments finis \mathbb{P}^1 -Lagrange ;
- On prend comme paramètre de stabilisation $\sigma = 20$.

Soit $\mathcal{T}_h^{\mathcal{D}}$ un maillage du domaine \mathcal{D} tel que représenté à la figure 8a.

On peut alors définir le maillage \mathcal{T}_h grâce à la fonction ϕ et on obtient la figure 8b.



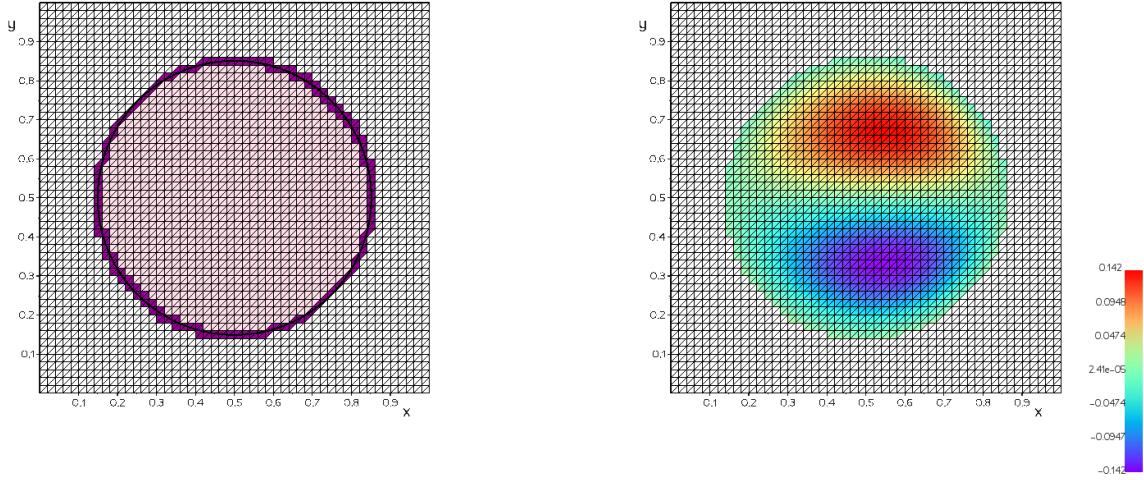
(a) Maillage du domaine \mathcal{D} et cercle.



(b) Maillage du domaine Ω .

FIGURE 8

La difficulté réside maintenant dans la définition des espaces utilisés pour appliquer la pénalité. On sélectionne donc les éléments qui sont en intersection avec le cercle (la frontière Γ_h) et on obtient la figure 9a. Cela revient alors à construire les ensembles \mathcal{T}_h^{Γ} et \mathcal{F}_h^{Γ} .



(a) En violet, éléments sur le bord.
En rose, éléments intérieurs.

(b) Solution approchée obtenue à l'aide de la ϕ -FEM.

FIGURE 9

5. 4. Convergence théorique

Nous allons maintenant établir le théorème de convergence énoncé dans [1]. Pour cela, nous aurons besoin de différents lemmes qui ne seront ici pas démontrés. Ces lemmes nous mèneront à la démonstration du théorème de convergence théorique énoncé ci-dessous.

Énonçons tout d'abord deux hypothèses importantes.

Hypothèse 5.1. On suppose que la frontière Γ peut être recouverte par des ouverts \mathcal{O}_i avec $i = 1, \dots, I$ sur lesquels on peut introduire des coordonnées locales ξ_1, \dots, ξ_d où d est la dimension ($d = 2, 3$), avec $\xi_d = \phi$ et telles que $\frac{\partial^\alpha \xi}{\partial x^\alpha}$ et $\frac{\partial^\alpha x}{\partial \xi^\alpha}$ soient majorées par une constante $C_0 > 0$ pour $\alpha = 1, \dots, k+1$.

Hypothèse 5.2. On suppose que la frontière discrète Γ_h peut être recouverte de patchs d'éléments $\{\Pi_i\}_{i=1,\dots,N_\Pi}$ tels que :

- i) chaque patch est composé d'éléments $T_i \in \mathcal{T}_h \setminus \mathcal{T}_h^\Gamma$ et d'éléments en intersection avec Γ_h . C'est-à-dire que $\Pi = T_i \cup \Pi_i^\Gamma$ où $\Pi_i^\Gamma \subset \mathcal{T}_h^\Gamma$ et est composé d'au moins M éléments ;
- ii) L'union de tous les patchs Π_h^Γ est égale à \mathcal{T}_h^Γ ;
- iii) Les patchs Π_i sont disjoints, c'est-à-dire $\Pi_i \cap \Pi_j = \emptyset$ si $i \neq j$.

Théorème 5.1 (Convergence de la méthode). *Sous les hypothèses 5.1 et 5.2, pour $l \geq k$, un maillage \mathcal{T}_h^Γ quasi-uniforme, une fonction $f \in H^k(\Omega_h \cup \Omega)$. Soient $u \in H^{k+2}(\Omega)$ solution exacte du problème (5.1) et w_h solution approchée du problème (5.3). Soit $u_h = \phi_h w_h$ (la solution approchée de (5.1)). Alors, il existe une constante positive C telle que :*

$$|u - u_h|_{H^1(\Omega_h \cap \Omega)} \leq Ch^k \|f\|_{H^k(\Omega \cup \Omega_h)}. \quad (5.9)$$

Si $\Omega \subset \Omega_h$, alors :

$$\|u - u_h\|_{L^2(\Omega)} \leq Ch^{k+\frac{1}{2}} \|f\|_{H^k(\Omega_h)}. \quad (5.10)$$

Remarque 5.1. La constante C du théorème 5.1 dépend de la constante C_0 de l'hypothèse 5.1, de M (hypothèse 5.2), de m (hypothèse 5.1), du maximum des dérivées de ϕ , de la régularité du maillage et des deux degrés k et l . Cependant, C est indépendante de h , de f et de u .

5. 4. 1) Lemmes et propositions

Introduisons maintenant différents lemmes qui seront utiles dans la démonstration du théorème.

Lemme 5.1. *On suppose que l'hypothèse 5.1 est vérifiée et que le domaine Ω est donné par la fonction level-sets ϕ . Alors, pour tout $u \in H^{k+1}(\mathcal{O})$ nulle sur Γ , il existe $C > 0$ dépendant des constantes de l'hypothèse 5.1, telle que :*

$$\left\| \frac{u}{\phi} \right\|_{H^k(\mathcal{O})} \leq C \|u\|_{H^{k+1}(\mathcal{O})}. \quad (5.11)$$

Lemme 5.2. *Soit T un triangle (si $d = 2$) ou un tétraèdre (si $d = 3$). Soit E un côté de T et soit p un polynôme sur T , de degré s , tel que $\frac{\partial p}{\partial n} = p = 0$ sur E et $\Delta p = 0$ sur T . Alors, p est nul sur T .*

Lemme 5.3. *On suppose l'hypothèse 5.2 vérifiée. Pour tous $\beta > 0$, $s \in \mathbb{N}^*$, il existe $\alpha \in]0, 1[$ dépendant uniquement de s , tel que, $\forall v_h \in V_h^{(s)}$:*

$$|v_h|_{H^1(\Omega_h^\Gamma)}^2 \leq \alpha |v_h|_{H^1(\Omega_h)}^2 + \beta h \sum_E \left\| \left[\frac{\partial v_h}{\partial n} \right] \right\|_{L^2(E)}^2 + \beta h^2 \sum_T \|\Delta v_h\|_{L^2(T)}^2. \quad (5.12)$$

Lemme 5.4. *Pour tout $v_h \in V_h^{(k)}$, il existe une constante dépendant de la régularité du maillage et du degré k telle que :*

$$\|\phi_h v_h\|_{L^2(\Omega_h^\Gamma)} \leq Ch |\phi_h v_h|_{H^1(\Omega_h^\Gamma)} \quad (5.13)$$

et :

$$\|\phi_h v_h\|_{L^2(\Omega_h \setminus \Omega)} \leq Ch |\phi_h v_h|_{H^1(\Omega_h)}. \quad (5.14)$$

Lemme 5.5. *Pour tout $v_h \in V_h^{(k)}$:*

$$\sum_E \|\phi_h v_h\|_{L^2(E)}^2 \leq Ch |\phi_h v_h|_{L^2(\Omega_h)}^2 \quad (5.15)$$

et :

$$\|\phi_h v_h\|_{L^2(\partial\Omega_h)}^2 \leq Ch |\phi_h v_h|_{L^2(\Omega_h)}^2. \quad (5.16)$$

Lemme 5.6. *On suppose l'hypothèse 5.1 vérifiée. Pour tout $v \in H^s(\Omega_h)$ avec $1 \leq s \leq k+1$ telle que $v = 0$ sur Ω :*

$$\|v\|_{L^2(\Omega_h \setminus \Omega)} \leq Ch^s \|v\|_{H^s(\Omega_h \setminus \Omega)}. \quad (5.17)$$

Proposition 5.1 (Coercivité de la forme bilinéaire). *On suppose l'hypothèse 5.2 vérifiée. La forme bilinéaire (5.5) est coercive pour la norme :*

$$|||v_h|||_h = \sqrt{|\phi_h v_h|_{H^1(\Omega_h)}^2 + G_h(v_h, v_h)}. \quad (5.18)$$

5. 4. 2) Démonstration

Maintenant que nous avons énoncé les différents lemmes importants, nous allons pouvoir démontrer le théorème. On choisit ici de ne démontrer que l'une des deux inégalités : on démontrera donc seulement l'inégalité pour l'erreur en norme H^1 .

Démonstration du théorème 5.1. Soit $f \in H^k(\Omega)$. La solution exacte $u \in H^{k+2}(\Omega)$ peut être prolongée sur \mathcal{O} par $\tilde{u} \in H^{k+2}(\mathcal{O})$ telle que $\tilde{u} = u$ sur Ω et il existe une constante C telle que :

$$\|\tilde{u}\|_{H^{k+2}(\Omega_h)} \leqslant \|\tilde{u}\|_{H^{k+2}(\mathcal{O})} \leqslant C \|u\|_{H^{k+2}(\Omega)} \leqslant C \|f\|_{H^k(\Omega)}. \quad (5.19)$$

On pose $w = \frac{\tilde{u}}{\phi}$. Par le lemme 5.1, il existe une constante $C > 0$ telle que :

$$|w|_{H^{k+1}(\Omega)} = \left\| \frac{\tilde{u}}{\phi} \right\|_{H^{k+1}(\Omega_h)} \leqslant C \|\tilde{u}\|_{H^{k+2}(\Omega_h)} \leqslant C \|f\|_{H^k(\Omega)}. \quad (5.20)$$

On introduit maintenant une nouvelle forme bilinéaire, \bar{a}_h , semblable à la forme a_h , mais en multipliant w par ϕ et non par ϕ_h . Tous les termes de (5.5) en $\phi_h w$ deviennent donc ϕw . Alors, on pose $\tilde{u} = \phi w$ et $-\Delta \tilde{u} = \tilde{f}$. En intégrant par parties, on obtient :

$$\bar{a}_h(w, v_h) = \int_{\Omega_h} \tilde{f} \phi_h v_h - \sigma h^2 \sum_F \int_F \tilde{f} \Delta \phi_h v_h.$$

On a ainsi :

$$a_h(w, v_h) - \bar{a}_h(w, v_h) = \int_{\Omega_h} f \phi_h v_h - \sigma h^2 \sum_F \int_F f \Delta \phi_h v_h - \int_{\Omega_h} \tilde{f} \phi_h v_h + \sigma h^2 \sum_F \int_F \tilde{f} \Delta \phi_h v_h \quad (5.21)$$

$$= \int_{\Omega_h} (f - \tilde{f}) \phi_h v_h - \sigma h^2 \sum_F \int_F (f - \tilde{f}) \Delta \phi_h v_h. \quad (5.22)$$

On pose maintenant $v_h = w_h - I_h w$ et $r_h = \phi w - \phi_h I_h w$ où I_h est l'opérateur d'interpolation nodale. Le but va maintenant être d'utiliser la coercivité de la forme bilinéaire $a_h(\cdot, \cdot)$. Pour cela, on écrit $a_h(v_h, v_h)$:

$$\begin{aligned} a_h(v_h, v_h) &= a_h(w_h - I_h w, v_h) \\ &= a_h(w_h, v_h) - a_h(I_h w, v_h) \\ &= \int_{\Omega_h} (f - \tilde{f}) \phi_h v_h - \sigma h^2 \sum_F \int_F (f - \tilde{f}) \Delta \phi_h v_h + \bar{a}_h(w, v_h) - a_h(I_h w, v_h). \end{aligned}$$

En remplaçant, on a :

$$\begin{aligned} a_h(v_h, v_h) &= \int_{\Omega_h} (f - \tilde{f}) \phi_h v_h - \sigma h^2 \sum_F \int_F (f - \tilde{f}) \Delta \phi_h v_h + \int_{\Omega_h} \nabla(\phi w) \cdot \nabla(\phi_h v_h) \\ &\quad - \int_{\partial\Omega_h} \frac{\partial}{\partial n}(\phi w) \phi_h v_h + \sigma h \sum_{F \in \mathcal{F}_h^\Gamma} \int_F \left[\frac{\partial}{\partial n}(\phi w) \right] \left[\frac{\partial}{\partial n}(\phi_h v_h) \right] + \sigma h^2 \sum_{T \in \mathcal{T}_h^\Gamma} \int_T \Delta(\phi w) \Delta(\phi_h v_h) \\ &\quad - \int_{\Omega_h} \nabla(\phi_h I_h w) \cdot \nabla(\phi_h v_h) + \int_{\partial\Omega_h} \frac{\partial}{\partial n}(\phi_h I_h w) \phi_h v_h \\ &\quad - \sigma h \sum_{F \in \mathcal{F}_h^\Gamma} \int_F \left[\frac{\partial}{\partial n}(\phi_h I_h w) \right] \left[\frac{\partial}{\partial n}(\phi_h v_h) \right] - \sigma h^2 \sum_{T \in \mathcal{T}_h^\Gamma} \int_T \Delta(\phi_h I_h w) \Delta(\phi_h v_h). \quad (5.23) \end{aligned}$$

On utilise la définition de r_h , et on obtient finalement :

$$\begin{aligned}
a_h(v_h, v_h) &= \underbrace{\int_{\Omega_h} (f - \tilde{f}) \phi_h v_h}_{(1)} - \underbrace{\sigma h^2 \sum_F \int_F (f - \tilde{f}) \Delta \phi_h v_h}_{(2)} + \underbrace{\int_{\Omega_h} \nabla(r_h) \cdot \nabla(\phi_h v_h)}_{(3)} \\
&\quad - \underbrace{\int_{\partial\Omega_h} \frac{\partial}{\partial n}(r_h) \phi_h v_h}_{(4)} + \underbrace{\sigma h \sum_{F \in \mathcal{F}_h^\Gamma} \int_F \left[\frac{\partial}{\partial n}(r_h) \right] \left[\frac{\partial}{\partial n}(\phi_h v_h) \right]}_{(5)} + \underbrace{\sigma h^2 \sum_{T \in \mathcal{T}_h^\Gamma} \int_T \Delta(r_h) \Delta(\phi_h v_h)}_{(6)} .
\end{aligned} \tag{5.24}$$

En utilisant la coercivité de la forme $a_h(\cdot, \cdot)$, on sait qu'il existe une constante $c > 0$ telle que $a_h(v_h, v_h) \geq c \|v_h\|_h^2$. De plus, comme $\tilde{f} = f$ sur Ω , on a :

$$\int_{\Omega_h} (f - \tilde{f}) \phi_h v_h = \int_{\Omega_h \setminus \Omega} (f - \tilde{f}) \phi_h v_h .$$

On utilise l'inégalité de Young sur les différents termes et on obtient :

$$\begin{aligned}
(1) &\leq \frac{1}{2\varepsilon} |r_h|_{H^1(\Omega_h)}^2 + \frac{\varepsilon}{2} \|\phi_h v_h\|_{H^1(\Omega_h)}^2 & (2) &\leq \frac{h}{2\varepsilon} \left\| \frac{\partial}{\partial n} r_h \right\|_{L^2(\partial\Omega_h)}^2 + \frac{\varepsilon}{2h} \|\phi_h v_h\|_{L^2(\partial\Omega_h)}^2 \\
(3) &\leq \frac{1}{2\varepsilon} \sigma^2 h \sum_{F \in \mathcal{F}_h^\Gamma} \left\| \frac{\partial}{\partial n} r_h \right\|_{L^2(F)}^2 + \frac{\varepsilon}{2} h \sum_{F \in \mathcal{F}_h^\Gamma} \left\| \frac{\partial}{\partial n} (\phi_h v_h) \right\|_{L^2(F)}^2 \\
(4) &\leq \frac{\sigma^2 h^2}{2\varepsilon} \sum_{T \in \mathcal{T}_h^\Gamma} \|\Delta r_h\|_{L^2(T)}^2 + \frac{\varepsilon}{2} h^2 \sum_{T \in \mathcal{T}_h^\Gamma} \|\Delta \phi_h v_h\|_{L^2(T)}^2 \\
(5) &\leq \frac{h^2}{2\varepsilon} \|f - \tilde{f}\|_{L^2(\Omega_h \setminus \Omega)}^2 + \frac{\varepsilon}{2h^2} \|\phi_h v_h\|_{L^2(\Omega_h \setminus \Omega)}^2 \\
(6) &\leq \frac{\sigma^2 h^2}{2\varepsilon} \|f - \tilde{f}\|_{L^2(\Omega_h \setminus \Omega)}^2 + \frac{\varepsilon}{2} h^2 \sum_{T \in \mathcal{T}_h^\Gamma} \|\Delta \phi_h v_h\|_{L^2(T)}^2 .
\end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned}
c \|v_h\|_h^2 &\leq \frac{1}{2\varepsilon} \left(|r_h|_{H^1(\Omega_h)}^2 + h \left\| \frac{\partial}{\partial n} r_h \right\|_{L^2(\partial\Omega_h)}^2 + \sigma^2 h \sum_{F \in \mathcal{F}_h^\Gamma} \left\| \frac{\partial}{\partial n} r_h \right\|_{L^2(F)}^2 \right. \\
&\quad \left. + \sigma^2 h^2 \sum_{T \in \mathcal{T}_h^\Gamma} \|\Delta r_h\|_{L^2(T)}^2 + (1 + \sigma^2) h^2 \|f - \tilde{f}\|_{L^2(\Omega_h \setminus \Omega)}^2 \right) \\
&\quad + \frac{\varepsilon}{2} \left(|\phi_h v_h|_{H^1(\Omega_h)}^2 + \frac{1}{h} \|\phi_h v_h\|_{L^2(\partial\Omega_h)}^2 + h \sum_{F \in \mathcal{F}_h^\Gamma} \left\| \frac{\partial}{\partial n} (\phi_h v_h) \right\|_{L^2(F)}^2 \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{h^2} \|\phi_h v_h\|_{L^2(\Omega_h \setminus \Omega)}^2 + 2h^2 \sum_{T \in \mathcal{T}_h^\Gamma} \|\Delta \phi_h v_h\|_{L^2(T)}^2 \right) . \tag{5.25}
\end{aligned}$$

□

On utilise alors les lemmes 5.4 et 5.5 ainsi que la proposition 5.1 et les termes en $\frac{\varepsilon}{2}$ sont contrôlés par $\|v\|_h$ et passent donc dans le terme de gauche. On a finalement qu'il existe

une constante $C > 0$ telle que :

$$\begin{aligned} |||v_h|||^2_h &\leq C \left(|r_h|_{H^1(\Omega_h)}^2 + h \left\| \frac{\partial}{\partial n} r_h \right\|_{L^2(\partial\Omega_h)}^2 + \sigma^2 h \sum_{F \in \mathcal{F}_h^\Gamma} \left\| \frac{\partial}{\partial n} r_h \right\|_{L^2(F)}^2 \right. \\ &\quad \left. + \sigma^2 h^2 \sum_{T \in \mathcal{T}_h^\Gamma} \|\Delta r_h\|_{L^2(T)}^2 + (1 + \sigma^2) h^2 \|f - \tilde{f}\|_{L^2(\Omega_h \setminus \Omega)}^2 \right). \end{aligned} \quad (5.26)$$

Il reste à estimer et à majorer chacun des termes restants. Tout d'abord, par l'inégalité triangulaire, on a :

$$\begin{aligned} |r_h|_{H^1(\Omega_h)} &= |\phi w - \phi_h I_h w|_{H^1(\Omega_h)} \\ &= |(\phi - \phi_h)w + \phi_h(w - I_h w)|_{H^1(\Omega_h)} \\ &\leq |(\phi - \phi_h)w|_{H^1(\Omega_h)} + |\phi_h(w - I_h w)|_{H^1(\Omega_h)} \end{aligned}$$

Alors,

$$\begin{aligned} |r_h|_{H^1(\Omega_h)} &\leq \|\nabla((\phi - \phi_h)w)\|_{L^\infty(\Omega_h)} + \|\nabla(\phi_h(w - I_h w))\|_{L^\infty(\Omega_h)} \\ &\leq \|\nabla(\phi - \phi_h)\|_{L^\infty(\Omega_h)} \|w\|_{L^2(\Omega_h)} + \|\phi - \phi_h\|_{L^\infty(\Omega_h)} \|\nabla w\|_{L^2(\Omega_h)} \\ &\quad + \|\nabla\phi_h\|_{L^\infty(\Omega_h)} \|w - I_h w\|_{L^2(\Omega_h)} + \|\phi_h\|_{L^\infty(\Omega_h)} \|\nabla(w - I_h w)\|_{L^2(\Omega_h)} \\ &\leq \|\nabla(\phi - \phi_h)\|_{L^\infty(\Omega_h)} \|w\|_{H^0(\Omega_h)} + \|\phi - \phi_h\|_{L^\infty(\Omega_h)} \|w\|_{H^1(\Omega_h)} \\ &\quad + \|\nabla\phi_h\|_{L^\infty(\Omega_h)} \|w - I_h w\|_{H^0(\Omega_h)} + \|\phi_h\|_{L^\infty(\Omega_h)} \|w - I_h w\|_{H^1(\Omega_h)} . \end{aligned}$$

On utilise la majoration de l'erreur d'interpolation (voir [2]) et on obtient :

$$\begin{aligned} |r_h|_{H^1(\Omega_h)} &\leq Ch^k \left(|\phi|_{W^{k+1,\infty}(\Omega_h)} \|w\|_{H^0(\Omega_h)} + |\phi|_{W^{k,\infty}(\Omega_h)} |w|_{H^1(\Omega_h)} \right. \\ &\quad \left. + |\phi|_{W^{1,\infty}(\Omega_h)} |w|_{H^k(\Omega_h)} + \|\phi\|_{L^\infty(\Omega_h)} \|w\|_{H^{k+1}(\Omega_h)} \right) \\ &\leq Ch^k \|\phi\|_{W^{k+1,\infty}(\Omega_h)} \|w\|_{H^{k+1}(\Omega_h)} . \end{aligned}$$

Sur le même principe, on a également :

$$h^2 \sum_{T \in \mathcal{T}_h^\Gamma} \|\Delta r_h\|_{L^2(T)}^2 \leq h^2 C \left(h^{k-1} \|\phi\|_{W^{k+1,\infty}(\Omega_h)} \|w\|_{H^{k+1}(\Omega_h)} \right)^2 .$$

et

$$h \left(\left\| \frac{\partial}{\partial n} r_h \right\|_{L^2(\partial\Omega_h)}^2 + \sum_{F \in \mathcal{F}_h^\Gamma} \left\| \frac{\partial}{\partial n} r_h \right\|_{L^2(F)}^2 \right) \leq h Ch^{2k-1} \|\phi\|_{W^{k+1,\infty}(\Omega_h)}^2 \|w\|_{H^{k+1}(\Omega_h)}^2 .$$

Pour le dernier terme, $\|f - \tilde{f}\|_{L^2(\Omega_h \setminus \Omega)}^2$, on applique le lemme 5.6, et on obtient :

$$h^2 \|f - \tilde{f}\|_{L^2(\Omega_h \setminus \Omega)}^2 \leq h^2 Ch^{2(k-1)} \|f - \tilde{f}\|_{H^{k-1}(\Omega_h \setminus \Omega)}^2 .$$

Alors, en utilisant le fait que $\tilde{f} = -\Delta \tilde{u}$,

$$h^2 \|f - \tilde{f}\|_{L^2(\Omega_h \setminus \Omega)}^2 \leq Ch^{2k} \|f + \Delta \tilde{u}\|_{H^{k-1}(\Omega_h \setminus \Omega)}^2 \leq Ch^{2k} \left(\|f\|_{H^{k-1}(\Omega_h)} + \|\tilde{u}\|_{H^{k+1}(\Omega_h)} \right)^2 .$$

On a finalement majoré les différents termes et on a :

$$\begin{aligned}
|||v_h|||^2_h &\leq Ch^{2k} \left(\|\phi\|_{W^{k+1,\infty}(\Omega_h)}^2 \|w\|_{H^{k+1}(\Omega_h)}^2 + \left(\|f\|_{H^{k-1}(\Omega_h)} + \|\tilde{u}\|_{H^{k+1}(\Omega_h)} \right)^2 \right) \\
\implies |||v_h|||_h &\leq Ch^k \left(\|\phi\|_{W^{k+1,\infty}(\Omega_h)} \|w\|_{H^{k+1}(\Omega_h)} + \|f\|_{H^{k-1}(\Omega_h)} + \|\tilde{u}\|_{H^{k+1}(\Omega_h)} \right) \\
&\leq Ch^k \left(\|w\|_{H^{k+1}(\Omega_h)} + \|f\|_{H^{k-1}(\Omega_h)} + \|\tilde{u}\|_{H^{k+1}(\Omega_h)} \right) \\
&\leq Ch^k \|f\|_{H^{k-1}(\Omega_h)},
\end{aligned}$$

en utilisant les majorations (5.19) et (5.20).

Il reste enfin à relier cette majoration à $|u - u_h|_{H^1(\Omega_h \cap \Omega)}$:

$$\begin{aligned}
|u - u_h|_{H^1(\Omega_h \cap \Omega)} &= |u - \phi_h w_h|_{H^1(\Omega_h \cap \Omega)} \leq |\tilde{u} - \phi_h w_h|_{H^1(\Omega_h)} \\
&\leq |\phi w - \phi_h w_h|_{H^1(\Omega_h)} \\
&\leq |\phi w - \phi_h I_h w + \phi_h I_h w - \phi_h w_h|_{H^1(\Omega_h)} \\
&\leq |\phi w - \phi_h I_h w|_{H^1(\Omega_h)} + |\phi_h I_h w - \phi_h w_h|_{H^1(\Omega_h)} \\
&\leq |\phi w - \phi_h I_h w|_{H^1(\Omega_h)} + |\phi_h(I_h w - w_h)|_{H^1(\Omega_h)} \\
&\leq |\phi w - \phi_h w + \phi_h w - \phi_h I_h w|_{H^1(\Omega_h)} + |\phi_h(I_h w - w_h)|_{H^1(\Omega_h)} \\
&\leq |(\phi - \phi_h)w|_{H^1(\Omega_h)} + |\phi_h(w - I_h w)|_{H^1(\Omega_h)} + |\phi_h(I_h w - w_h)|_{H^1(\Omega_h)} \\
&\leq Ch^k \|\phi\|_{W^{k+1,\infty}(\Omega_h)} \|w\|_{H^{k+1}(\Omega_h)} + |||v_h|||_h.
\end{aligned}$$

Finalement,

$$|u - u_h|_{H^1(\Omega_h \cap \Omega)} \leq Ch^k \|f\|_{H^k(\Omega_h \cup \Omega)} .$$

5. 5. Ordre de convergence numérique

On s'intéresse maintenant à la convergence de la méthode ϕ -FEM. Pour cela on utilise se place une nouvelle fois dans le cadre du problème de Poisson-Dirichlet homogène (nous verrons plus tard le cas non-homogène). Dans un premier temps, le but va être de se donner une idée de la vitesse de convergence de la méthode, grâce une représentation graphique de l'erreur commise par la méthode sur l'exemple 5. 3.. On obtient alors la figure 10a. Sur cette figure, on voit que la méthode semble suivre une convergence linéaire pour l'erreur H^1 et quadratique pour l'erreur L^2 , c'est-à-dire que la méthode semble vérifier le théorème 2.2 page 10.

5. 6. Comparaison avec une FEM standard

Il est maintenant intéressant de comparer cette méthode avec une méthode éléments finis standard. Pour cela, on se propose de faire une comparaison sur l'exemple 5. 3. entre la méthode ϕ -FEM et une FEM standard sur le cercle centré en $(0.5, 0.5)$ et de rayon $\frac{\sqrt{2}}{4}$. On compare plusieurs points essentiels sur les deux méthodes :

- Le temps d'assemblage des matrices ;
- Le temps de résolution des systèmes linéaires ;
- L'erreur relative obtenue (en normes L^2 et H^1).

On retrouve alors les résultats au figures 10a, 10b, 11a et 11b. Ces résultats nous montrent que sur ce simple exemple, la méthode ϕ -FEM semble extrêmement avantageuse en précision et tout autant coûteuse en temps que la méthode standard.

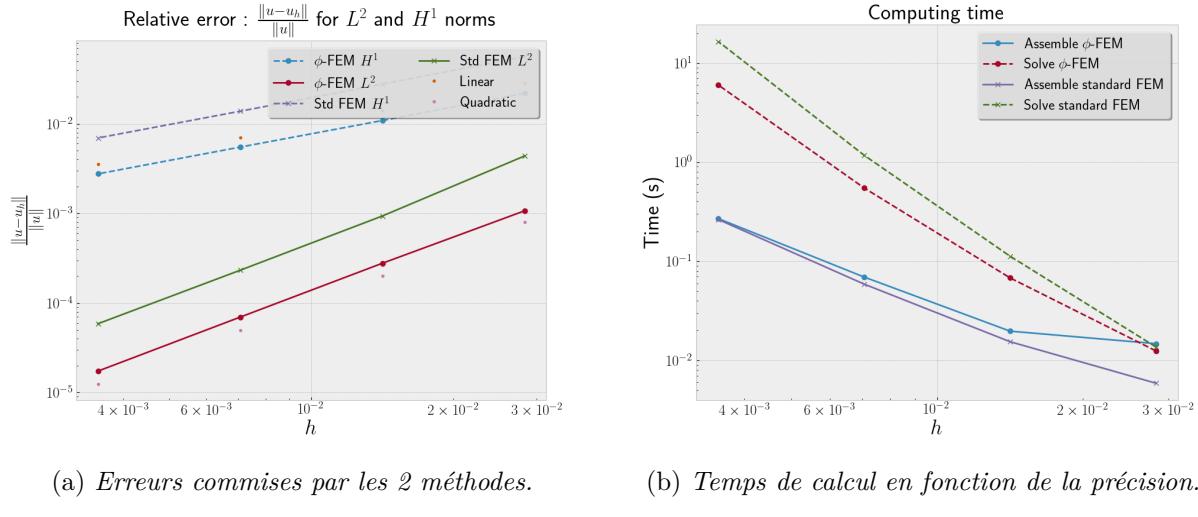


FIGURE 10

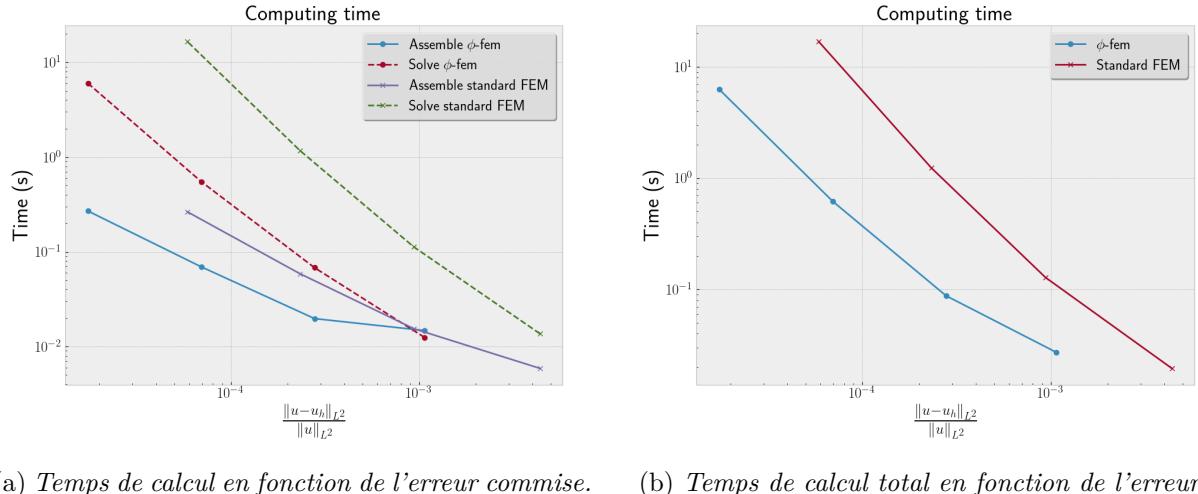


FIGURE 11

Remarque 5.2. Les temps de calcul mesurés ici sont les temps d'assemblage des matrices éléments finis et de résolution des systèmes linéaires, on ne prend pas en compte le temps de sélection des éléments du bord pour la méthode ϕ -FEM. En effet, cette étape pouvant être réalisée en parallèle, le temps de calcul en séquentiel n'a que peu de sens.

5. 7. Problème non-homogène

On se place maintenant dans un cadre légèrement différent de l'exemple précédent, c'est-à-dire :

- Le domaine \mathcal{D} considéré est le carré unité $[0, 1]^2$;

- Le domaine Ω est le cercle de rayon $\frac{\sqrt{2}}{4}$ et de centre $(0.5, 0.5)$;
- La fonction ϕ est telle que $\phi(x, y) = -\frac{1}{8} + (x - 0.5)^2 + (y - 0.5)^2$;
- On travaille sur le problème ayant pour solution exacte la fonction :

$$u(x, y) = \exp(x) \times \sin(2\pi y);$$

- On considère une condition de Dirichlet $u_D = (1 + \phi)u$;
- On utilise une méthode éléments finis \mathbb{P}^1 -Lagrange ;
- On prend comme paramètre de stabilisation $\sigma = 20$.

La formulation variationnelle est nécessairement modifiée. En effet, étant donné la nature du nouveau problème, lors du passage à la formulation variationnelle (multiplication par fonction test et intégration par parties), on obtient la formulation suivante :

$$\begin{cases} \text{Trouver } w \in H^1(\Omega) \text{ telle que :} \\ \int_{\Omega} \nabla(\phi w + u_D) \cdot \nabla(\phi v) - \int_{\Gamma} \partial_n(\phi w + u_D) \phi v = \int_{\Omega} f \phi v, \forall v \in H^1(\Omega). \end{cases} \quad (5.27)$$

Il est donc nécessaire de transformer cette expression afin d'obtenir une forme bilinéaire $a(w, v)$ et une forme linéaire $l(v)$. On développe tous les termes puis on passe tous les termes indépendants de w dans le membre de droite. On trouve finalement :

$$\begin{cases} a(w, v) &= \int_{\Omega} \nabla(\phi w) \cdot \nabla(\phi v) - \int_{\Gamma} \partial_n(\phi w) \phi v \\ l(v) &= \int_{\Omega} f \phi v - \int_{\Omega} \nabla(u_D) \cdot \nabla(\phi v) + \int_{\Gamma} \partial_n(u_D) \phi v \end{cases} \quad (5.28)$$

On discrétise ensuite le problème et il est nécessaire d'appliquer une deuxième modification : il faut développer les pénalités définies en 5.7 et 5.8. Après développement des différents termes, on obtient finalement les deux formules suivantes :

$$G_h(w_h, v_h) := \sigma h \sum_{F \in \mathcal{F}_h^{\Gamma}} \int_F \left[\frac{\partial}{\partial n}(\phi_h w_h) \right] \left[\frac{\partial}{\partial n}(\phi_h v_h) \right] + \sigma h^2 \sum_{T \in \mathcal{T}_h^{\Gamma}} \int_T \Delta(\phi_h w_h) \Delta(\phi_h v_h) \quad (5.29)$$

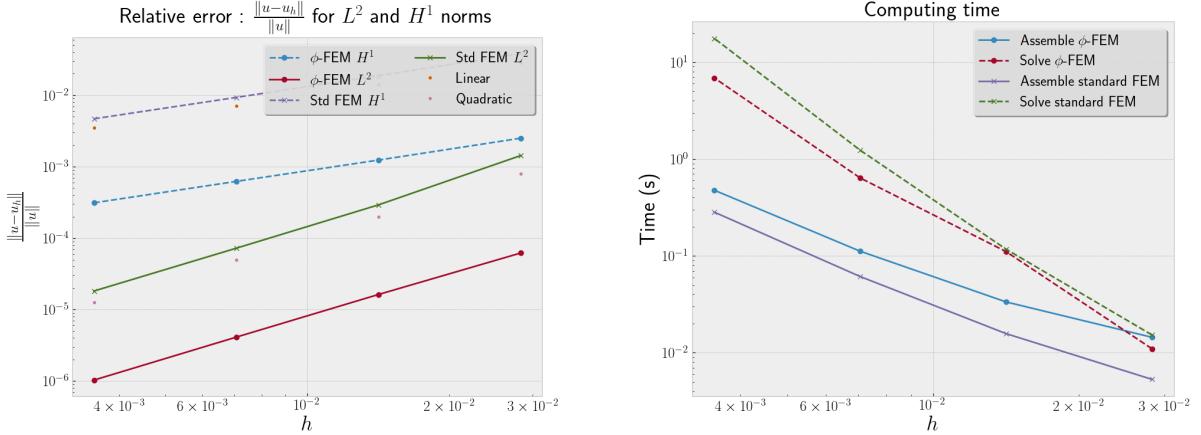
$$G_h^{rhs}(v_h) := -\sigma h^2 \sum_{T \in \mathcal{T}_h^{\Gamma}} \int_T (f \Delta(\phi_h v_h) + \Delta(\phi_h v_h) \Delta(u_D)) - \sigma h \sum_{F \in \mathcal{F}_h^{\Gamma}} \int_F \left[\frac{\partial}{\partial n}(u_D) \right] \left[\frac{\partial}{\partial n}(\phi_h v_h) \right]. \quad (5.30)$$

Remarque 5.3. Les pénalités données ici sont déterminées de la même façon que pour le problème homogène. Les explications page 23 sont donc valables ici également. La seule différence entre les deux méthodes est la présence de termes en u_D , issus seulement des développements des différents termes.

On réalise finalement comme précédemment différentes comparaisons entre cette méthode et la méthode standard appliquée au même problème. On obtient alors les figures 12a, 12b, 13a et 13b.

On remarque alors que la méthode ϕ -FEM est ici très avantageuse : l'erreur commise est bien plus faible, pour un temps de calcul équivalent.

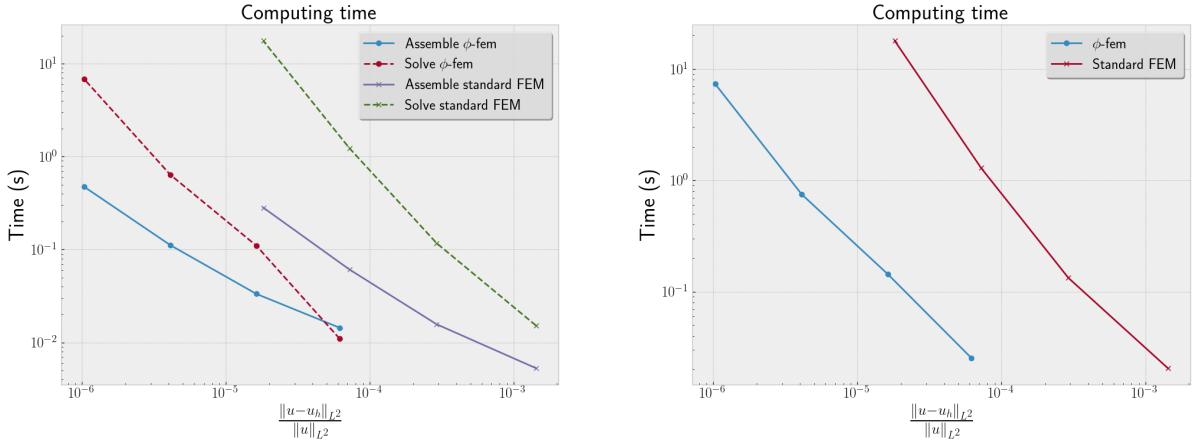
Remarque 5.4. On peut également réaliser une comparaison en utilisant une méthode \mathbb{P}^2 . On obtient les figures 14a et 14b.



(a) Erreurs commises par les 2 méthodes.

(b) Temps de calcul en fonction de la précision.

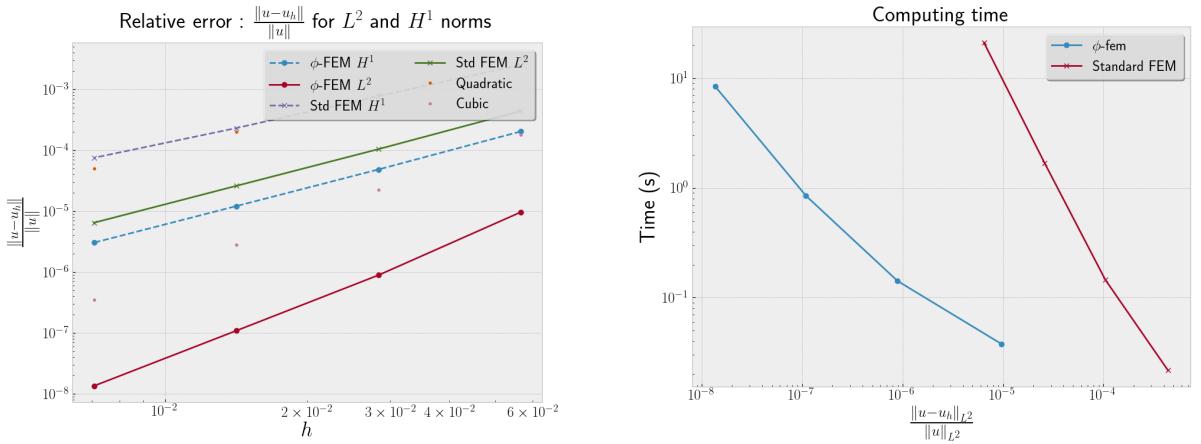
FIGURE 12



(a) Temps de calcul en fonction de l'erreur commise.

(b) Temps de calcul total en fonction de l'erreur.

FIGURE 13



(a) Erreurs commises par les 2 méthodes.

(b) Temps de calcul total en fonction de l'erreur.

FIGURE 14

6 La méthode ϕ -FEM pour des conditions de Neumann

Maintenant que nous avons vu une application de la méthode au problème de Poisson avec conditions de Dirichlet, homogènes ou non-homogènes, nous allons pouvoir étendre la méthode à un deuxième type de problèmes. Pour cela, nous considérerons une équation elliptique du second ordre, aux conditions de Neumann. On obtient le problème de référence suivant :

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f, & \text{sur } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} = g, & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (6.1)$$

On considère ici une fonction f suffisamment régulière et dans la majorité de la théorie suivante, on prendra une fonction g constante, nulle.

6. 1. Description de la méthode

Dans le cas de conditions de Neumann, la méthode vue précédemment sera modifiée. En effet, la résolution ne peut plus se baser sur la multiplication du problème par la fonction ϕ , de part le caractère naturel des conditions de Neumann (Remarque 2.4 page 11).

La première étape va donc être de modifier le problème pour réécrire une condition naturelle sous la forme d'une condition essentielle. Pour cela nous aurons besoin de deux fonctions supplémentaires : y et p . Soit donc y une fonction vectorielle de Ω_h^Γ (l'intérieur de la partie violette sur la figure 9a page 25) telle que $y = -\nabla u$. Alors, la condition de Neumann $\frac{\partial u}{\partial n}$ peut se réécrire $y \cdot n = 0$, qui est une condition essentielle. De plus, (u, y) vérifie bien la forme duale du problème initial, c'est-à-dire :

$$\begin{cases} y + \nabla u = 0, & \text{sur } \Omega_h^\Gamma \\ \operatorname{div} y + u = f & \end{cases} \quad (6.2)$$

On peut modifier une nouvelle fois la condition $y \cdot n = 0$. On a en effet la normale sur Γ qui est donnée par $\frac{1}{|\nabla\phi|}\nabla\phi$. Alors :

$$y \cdot n = 0 \Leftrightarrow y \cdot \frac{1}{|\nabla\phi|}\nabla\phi = 0 \Leftrightarrow y \cdot \nabla\phi = 0 \quad \text{sur } \Gamma.$$

On introduit une nouvelle variable p :

$$\Leftrightarrow y \cdot \nabla\phi + p\phi = 0 \quad \text{sur } \Omega_h^\Gamma. \quad (6.3)$$

On peut maintenant définir les différents espaces auxquels les fonctions auxiliaires appartiennent puis on pourra donner la formulation variationnelle associée au problème.

Remarque 6.1. On notera ici $\Omega_h^i = \Omega_h \setminus \Omega_h^\Gamma$ (partie rose de la figure 9a) et Γ_h^i la frontière de cette partie.

Introduisons tout d'abord l'espace $V_h^{(k)}$, qui est l'espace des polynômes \mathbb{P}^k Lagrange sur Ω_h , c'est-à-dire :

$$V_h^{(k)} := \left\{ v_h \in H^1(\Omega_h) : v_{h|T} \in \mathbb{P}^k(T) \quad \forall T \in \mathcal{T}_h \right\}.$$

On introduit ensuite deux nouveaux espaces fonctionnels : l'espace où vivra y et celui où vivra p . Pour celui on introduit donc un espace fonctionnel de vecteurs de dimension d :

$$Z_h^{(k)} := \left\{ z_h \in H^1(\Omega_h^\Gamma)^d : z_{h|T} \in \mathbb{P}^k(T)^d \quad \forall T \in \mathcal{T}_h^\Gamma \right\}.$$

Enfin, on introduit l'espace des fonctions \mathbb{P}_{k-1} sur les éléments de la frontière :

$$Q_h^{(k)} := \left\{ q_h \in L^2(\Omega_h^\Gamma) : q_h|_T \in \mathbb{P}^{k-1}(T) \quad \forall T \in \mathcal{T}_h^\Gamma \right\}.$$

On peut donc enfin définir l'espace $W_h^{(k)}$ comme le produit cartésien des 3 espaces précédents :

$$W_h^{(k)} = V_h^{(k)} \times Z_h^{(k)} \times Q_h^{(k)}.$$

Pour définir la formulation variationnelle à résoudre, nous passerons par plusieurs étapes : tout d'abord, on donnera la formulation variationnelle associée au problème initial (6.1) puis nous introduirons différents termes supplémentaires que nous détaillerons.

Tout d'abord, on multiplie (6.1) par une fonction test $v \in V_h^{(k)}$ puis on intègre par parties. On a alors la formulation variationnelle suivante :

$$\int_{\Omega_h} \nabla u \cdot \nabla v - \int_{\partial\Omega_h} \nabla u \cdot nv + \int_{\Omega_h} uv = \int_{\Omega_h} fv \quad (6.4)$$

On peut donc définir les formes suivantes :

$$\begin{cases} a(u, v) &= \int_{\Omega_h} \nabla u \cdot \nabla v - \int_{\partial\Omega_h} \nabla u \cdot nv + \int_{\Omega_h} uv, \quad u, v \in V_h^{(k)} \\ l(v) &= \int_{\Omega_h} fv, \quad v \in V_h^{(k)}. \end{cases} \quad (6.5)$$

Nous allons maintenant pouvoir introduire les équations (6.2) et (6.3) dans le problème variationnel et donc obtenir le problème à résoudre. Soient γ_{div} , γ_p et γ_u trois constantes et soit σ le paramètre de stabilisation, tous indépendants de h . Soient également $z \in Z_h^{(k)}$ et $q \in Q_h^{(k)}$ deux fonctions tests (correspondant aux variables y et p).

Remarque 6.2. Dans la formulation suivante, on considérera $\frac{1}{h}p\phi_h$ et $\frac{1}{h}q\phi_h$ au lieu de $p\phi_h$ et $q\phi_h$.

On peut introduire les deux équations avec une formulation à la manière des moindres carrés. On obtient finalement le problème suivant :

$$\begin{cases} \text{Trouver } (u_h, y_h, p_h) \in W_h^{(k)} \text{ telles que :} \\ a_h(u_h, y_h, p_h; v_h, z_h, q_h) = l_h(v_h, z_h, q_h), \quad \forall (v_h, z_h, q_h) \in W_h^{(k)}, \end{cases} \quad (6.6)$$

avec :

$$\begin{aligned} a_h(u, y, p; v, z, q) := & \int_{\Omega_h} \nabla u \cdot \nabla v + \int_{\partial\Omega_h} y \cdot nv + \int_{\Omega_h} uv \\ & + \gamma_{div} \int_{\Omega_h^\Gamma} (\operatorname{div} y + u)(\operatorname{div} z + v) + \gamma_u \int_{\Omega_h^\Gamma} (y + \nabla u) \cdot (z + \nabla v) \\ & + \frac{\gamma_p}{h^2} \int_{\Omega_h^\Gamma} (y \cdot \nabla \phi_h + \frac{1}{h}p\phi_h)(z \cdot \nabla \phi_h + \frac{1}{h}q\phi_h) + \sigma h \int_{\Gamma_h^i} \left[\frac{\partial u}{\partial n} \right] \left[\frac{\partial v}{\partial n} \right] \end{aligned} \quad (6.7)$$

et :

$$l_h(v, z, q) := \int_{\Omega_h} fv + \gamma_{div} \int_{\Omega_h^\Gamma} f(\operatorname{div} z + v). \quad (6.8)$$

Précisions sur les différents termes. On décide maintenant d'expliciter les différents termes présents dans la forme bilinéaire et dans la forme linéaire.

Détaillons tout d'abord les différents termes de la forme bilinéaire :

$$\begin{aligned} & \underbrace{\gamma_{div} \int_{\Omega_h^\Gamma} (\operatorname{div} y + u)(\operatorname{div} z + v)}_{(1)} + \underbrace{\gamma_u \int_{\Omega_h^\Gamma} (y + \nabla u) \cdot (z + \nabla v)}_{(2)} \\ & + \underbrace{\frac{\gamma_p}{h^2} \int_{\Omega_h^\Gamma} (y \cdot \nabla \phi_h + \frac{1}{h} p \phi_h)(z \cdot \nabla \phi_h + \frac{1}{h} q \phi_h)}_{(3)} + \sigma h \int_{\Gamma_h^i} \left[\frac{\partial u}{\partial n} \right] \left[\frac{\partial v}{\partial n} \right]. \quad (6.9) \end{aligned}$$

- (1) Le premier terme est issu directement de la formulation (6.2) que l'on reconnaît dans les deux facteurs : sur la partition Ω_h^Γ , on minimise $\operatorname{div} y + u - f$.
- (2) De même, on reconnaît ici la forme de la première ligne de (6.2). On intègre le produit des deux termes de bord correspondant à l'introduction de la variable auxiliaire y , en minimisant la différence entre y et $-\nabla u$ et entre z et $-\nabla v$.
- (3) On reconnaît ici la forme de l'équation (6.3) considérée pour les couples (y, p) et (z, q) . On cherche donc ici à avoir la condition de bord $(y \cdot \nabla \phi)$ le plus proche possible de $p \phi_h$.
- (4) Ici, on considère comme dans le cas de conditions de Dirichlet, une pénalité sur le saut du gradient sur la frontière.

6. 2. Comparaison avec une FEM standard

Nous allons maintenant comme pour les deux cas de conditions de Dirichlet, réaliser une comparaison entre une méthode de résolution standard et la ϕ -FEM. Pour cela nous aurons cette fois besoin d'utiliser un module un peu plus permissif que *FEniCS*. Nous utiliserons donc le package *multiphenics* combiné à *FEniCS*, ce qui nous permettra de faire les restrictions dont nous avons besoin (restrictions sur les bords). On réalise ensuite les mêmes comparaisons que précédemment, c'est-à-dire des comparaisons de précision et de temps de calcul entre les deux méthodes. Pour cela, on considère le problème (6.1), en considérant $u = \sin(x) \exp(y)$. On prendra ici une condition de bord non-nulle, définie par :

$$\tilde{g} = \nabla u \cdot n + u \phi. \quad (6.10)$$

En se souvenant que l'on a $n = \frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|}$, on obtient la condition de bord :

$$\tilde{g} = \frac{\nabla u \cdot \nabla \phi}{|\nabla \phi|} + u \phi. \quad (6.11)$$

On considère donc ici une condition de Neumann non-homogène. Comme dans le cas des conditions de Dirichlet non-homogènes, il est nécessaire de modifier légèrement le terme linéaire de la formulation variationnelle. On ajoute à la forme linéaire un terme qui prendra en compte cette condition, c'est-à-dire le terme :

$$-\frac{\gamma_p}{h^2} \int_{\Omega_h^\Gamma} \tilde{g} |\nabla \phi| (z \cdot \nabla \phi + \frac{1}{h} q \phi) \quad (6.12)$$

Remarque 6.3. Ce nouveau terme est bien évidemment issu du terme (3) de (6.9). En effet, lorsque l'on introduit une condition non-nulle g , on cherche à minimiser $y \cdot \frac{\nabla \phi_h}{|\nabla \phi_h|} - g$ au bord. Cela revient donc à modifier (3) par :

$$\frac{\gamma_p}{h^2} \int_{\Omega_h^\Gamma} (y \cdot \nabla \phi_h - g |\nabla \phi_h| + \frac{1}{h} p \phi_h) (z \cdot \nabla \phi_h + \frac{1}{h} q \phi_h).$$

En passant le terme ne dépendant pas de y dans la forme linéaire, on obtient bien le nouveau terme annoncé.

On travaille sur le même domaine que pour les comparaisons de la section 5.6., c'est-à-dire le cercle de rayon $\frac{\sqrt{2}}{4}$ et de centre $(0.5, 0.5)$. On obtient les résultats présentés en figures 15a, 15b, 16a et 16b.

On voit encore une fois que la méthode ϕ -FEM est très avantageuse sur un exemple simple. Ce gain en terme de précision se confirme lorsque l'on considère des domaines plus complexes.

Remarque 6.4. On représente également la comparaison entre les deux méthodes dans le cas d'une ellipse sur la figure 17.

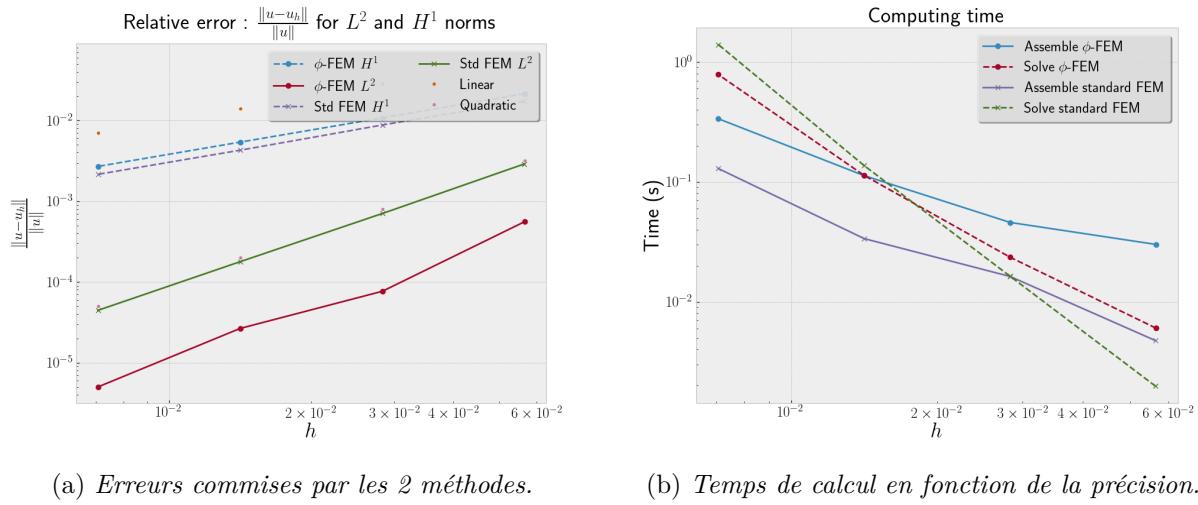


FIGURE 15

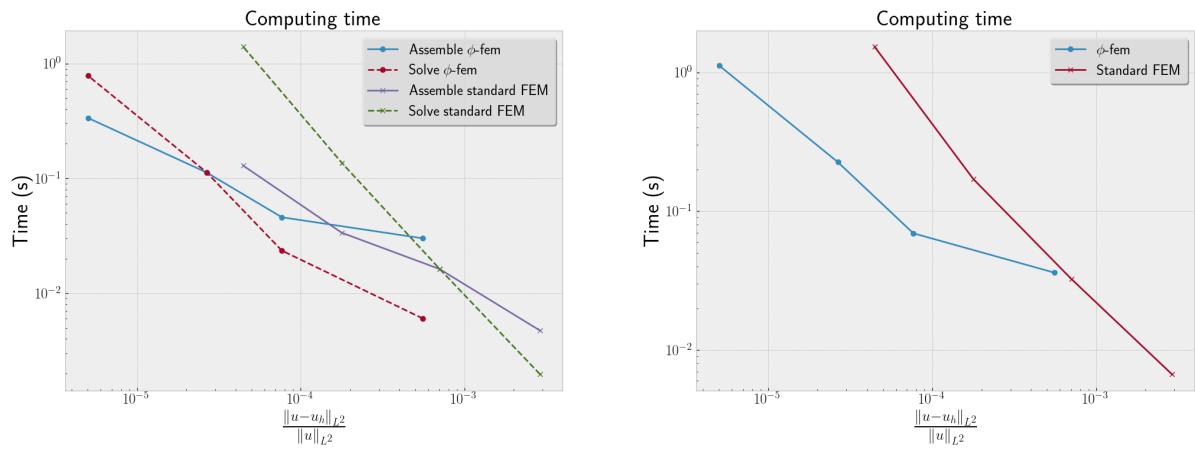
Remarque 6.5. On peut comme dans le cas des conditions de Dirichlet non-homogènes, réaliser une comparaison en utilisant une méthode \mathbb{P}^2 . On obtient les figures 18a et 18b.

7 La ϕ -FEM pour des conditions Dirichlet-Neumann

7. 1. Présentation de la méthode

On considère ici le problème suivant :

$$\begin{cases} -\Delta u &= f \text{ sur } \Omega \\ u &= u_D \text{ sur } \Gamma_D \\ \frac{\partial u}{\partial n} &= g \text{ sur } \Gamma_N \end{cases} \quad (7.1)$$



(a) Temps de calcul en fonction de l'erreur commise. (b) Temps de calcul total en fonction de l'erreur.

FIGURE 16

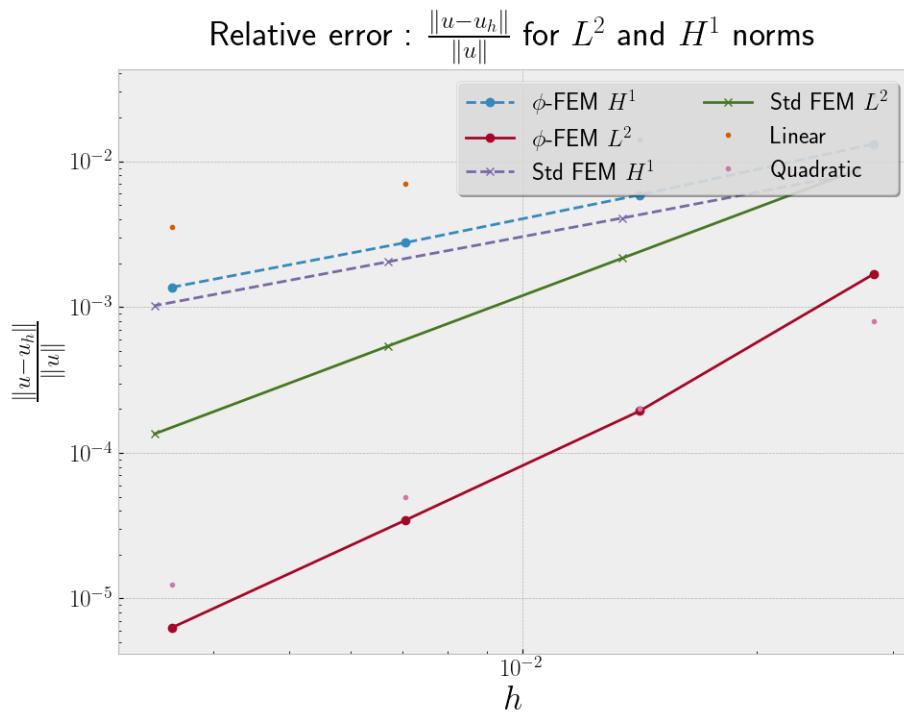
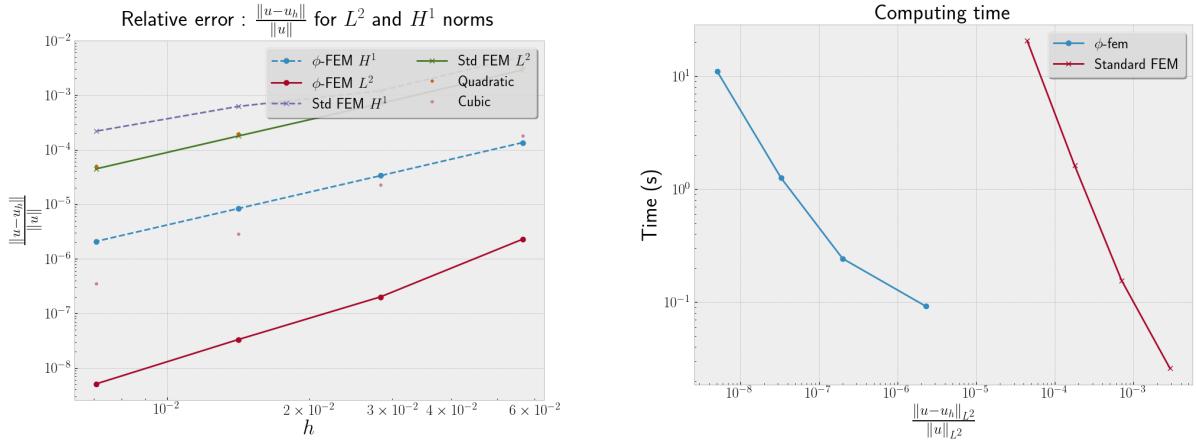


FIGURE 17 – Comparaison entre les deux méthodes dans le cas d'une ellipse (Remarque 6.4).



(a) *Erreurs commises par les 2 méthodes.*

(b) *Temps de calcul total en fonction de l'erreur.*

FIGURE 18

avec f et g suffisamment régulières et Ω le cercle de rayon $\frac{\sqrt{2}}{4}$ et de centre $(0.5, 0.5)$.

Le but va être ici de combiner la méthode ϕ -FEM vue pour un problème avec conditions de Dirichlet et celle pour un problème avec conditions de Neumann.

On notera par la suite $\Omega_h^i = \Omega_h \setminus \Omega_h^\Gamma$ et Γ_h^i la frontière de cette partie. De plus, on notera $\Gamma = \Gamma_D \cup \Gamma_N$. Pour l'exemple considéré, on prendra pour Γ_D la partie supérieure du cercle ($y > 0.5$) et pour Γ_N la partie inférieure. On aura donc un sous-maillage $\Omega_h^{\Gamma_D}$ pour les conditions de Dirichlet et un sous-maillage $\Omega_h^{\Gamma_N}$ pour les conditions de Neumann. Définissons maintenant les espaces fonctionnels que l'on utilisera.

Introduisons tout d'abord l'espace $V_h^{(k)}$, l'espace des polynômes \mathbb{P}^k Lagrange sur Ω_h , c'est-à-dire :

$$V_h^{(k)} := \left\{ v_h \in H^1(\Omega_h) : v_{h|T} \in \mathbb{P}^k(T) \quad \forall T \in \mathcal{T}_h \right\}.$$

On introduit ensuite l'espace où vivra y et celui où vivra p . On introduit donc un espace fonctionnel de vecteurs de dimension d :

$$Z_h^{(k)} := \left\{ z_h \in H^1(\Omega_h^{\Gamma_N})^d : z_{h|T} \in \mathbb{P}^k(T)^d \quad \forall T \in \mathcal{T}_h^\Gamma \right\}.$$

Enfin, on introduit l'espace des fonctions \mathbb{P}_{k-1} sur les éléments de la frontière :

$$Q_h^{(k)} := \left\{ q_h \in L^2(\Omega_h^{\Gamma_N}) : q_{h|T} \in \mathbb{P}^{k-1}(T) \quad \forall T \in \mathcal{T}_h^\Gamma \right\}.$$

On peut alors définir l'espace $W_h^{(k)}$ comme le produit cartésien des 3 espaces précédents :

$$W_h^{(k)} = V_h^{(k)} \times Z_h^{(k)} \times Q_h^{(k)}.$$

On aura ici besoin de définir une nouvelle fonction ϕ_D qui ne s'annulera pas sur le bord Γ_N , ce qui permettra de multiplier par ϕ_D (comme dans le cas de conditions de Dirichlet).

On définit la fonction ϕ_D comme suit :

$$\begin{cases} \phi_D(x, y) &= \phi(x, y), \text{ si } (x, y) \in \Gamma_D \\ \phi_D(x, y) &= \phi(x, y) - 0.5 + y, \text{ si } (x, y) \in \Gamma_N. \end{cases} \quad (7.2)$$

On peut maintenant construire la forme bilinéaire et la forme linéaire du problème variationnel. Pour cela, on multiplie le problème initial par ϕ_D , on utilise ensuite la même méthode que pour le cas Neumann, et on obtient les formes suivantes :

$$\begin{aligned} a(u, y, p; v, z, q) = & \int_{\Omega_h} \nabla(\phi_D u) \nabla(\phi_D v) - \int_{\Gamma_D} \nabla(\phi_D u) \cdot n \phi_D v + \int_{\Gamma_N} y \cdot nv \\ & + \gamma \int_{\Omega_h^{\Gamma_N}} (\nabla(\phi_D u) + y)(\nabla(\phi_D v) + z) + \frac{\gamma}{h^2} \int_{\Omega_h^{\Gamma_N}} (y \cdot \nabla \phi - \frac{p\phi}{h} + g)(z \cdot \nabla \phi - \frac{q\phi}{h}) + \gamma \int_{\Omega_h^{\Gamma_N}} (\operatorname{div} y)(\operatorname{div} z) \\ & + \sigma h \int_{\Gamma_h} \left[\frac{\partial(\phi_D u)}{\partial n} \right] \left[\frac{\partial(\phi_D v)}{\partial n} \right] \end{aligned} \quad (7.3)$$

et

$$\begin{aligned} l(v, z, q) = & \int_{\Omega_h} f \phi_D v + \gamma \int_{\Omega_h^{\Gamma_N}} f \operatorname{div} z - \int_{\Omega_h} \nabla(u_D) \nabla(\phi_D v) + \int_{\Gamma_D} \nabla(u_D) \cdot n \phi_D v \\ & - \gamma \int_{\Omega_h^{\Gamma_N}} (\nabla(u_D) + y)(\nabla(\phi_D v) + z) - \sigma h \int_{\Gamma_h} \left[\frac{\partial(u_D)}{\partial n} \right] \left[\frac{\partial(\phi_D v)}{\partial n} \right]. \end{aligned} \quad (7.4)$$

Remarque 7.1. En réalité, cette méthode revient à combiner les deux méthodes vues précédemment. On applique la méthode pour les conditions de Dirichlet sur Γ_D (en violet sur la figure 19) et la méthode pour les conditions de Neumann sur Γ_N (en cyan sur la figure 19).

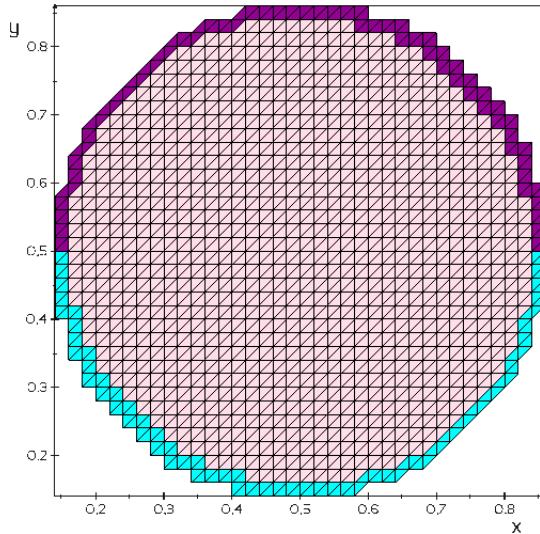


FIGURE 19 – En cyan, $\Omega_h^{\Gamma_N}$, en violet $\Omega_h^{\Gamma_D}$ et en rose Ω_h .

7. 2. Convergence et comparaison avec une FEM standard

Maintenant que nous avons présenté la méthode, nous allons pouvoir faire comme dans les sections précédentes : analyser la vitesse de convergence et comparer avec une méthode

standard. Pour cela, on considérera le problème (7.1), la fonction $\phi(x, y) = -\frac{1}{8} + (x - 0.5)^2 + (y - 0.5)^2$ et la fonction ϕ_D définie en 7.2. On travaillera sur le domaine représenté sur la figure 19. On considérera également les conditions suivantes :

$$u = \sin(x) \times \exp(y) \quad (7.5)$$

$$u_D = \sin(x) \times \exp(y) \times (1 + \phi) \quad (7.6)$$

$$g = \frac{\partial u}{\partial n} + u\phi. \quad (7.7)$$

On réalise maintenant les mêmes comparaisons que dans les sections précédentes, c'est-à-dire la précision et le temps de calcul. On représente les résultats obtenus sur les figures 20a, 20b, 21a et 21b.

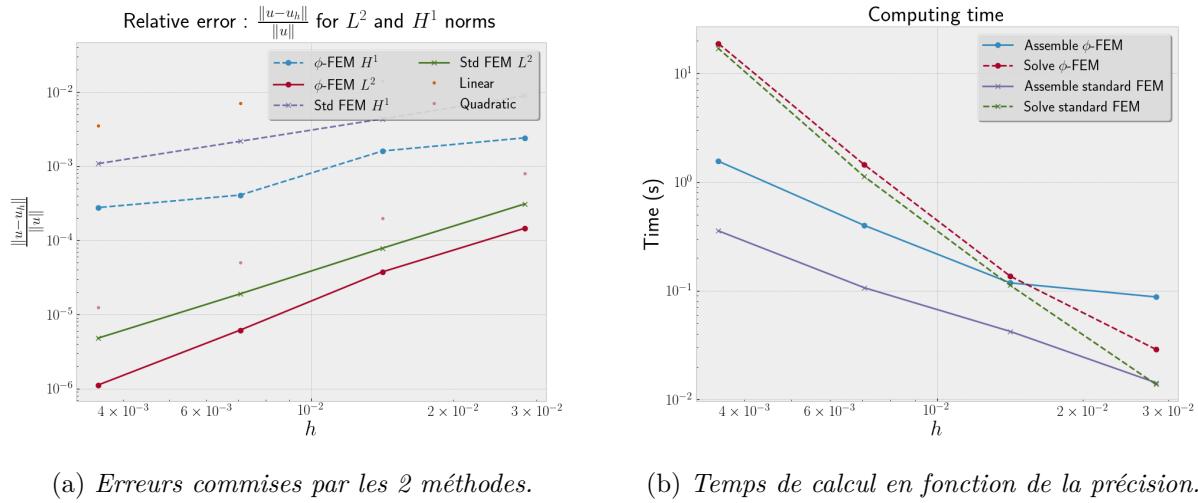


FIGURE 20

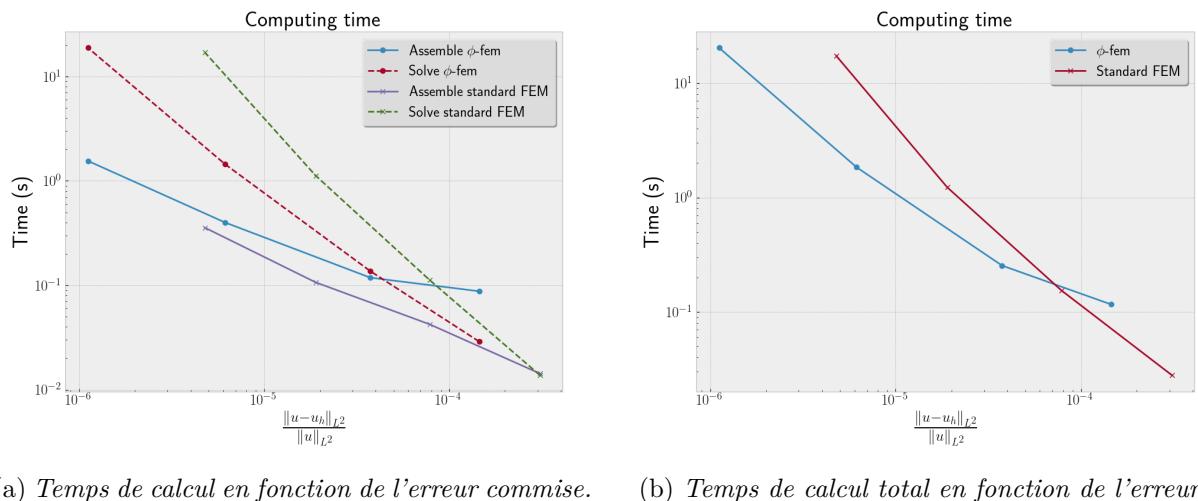


FIGURE 21

On voit donc sur ces graphiques que la méthode ϕ -FEM offre une nouvelle fois une meilleure précision que la méthode standard.

Problèmes. Malheureusement cette méthode présente un inconvénient majeur. En effet, comme nous l'avons expliqué, nous considérons une fonction ϕ_D nulle sur Γ_D et non nulle sur Γ_N . Cela revient à créer une discontinuité de la solution entre Γ_D et Γ_N . Nous allons maintenant essayer de trouver une nouvelle méthode pour palier à ce problème.

7. 3. Nouvelle version de la méthode

On choisit donc d'implémenter une nouvelle version de la méthode. Pour cela, on se base sur la version de la méthode pour des conditions de Neumann à laquelle on va ajouter un nouveau terme permettant de considérer les conditions de Dirichlet.

On considère le problème suivant (7.8) et les mêmes espaces que précédemment. Cependant, on ne définit pas ici de nouvelle fonction ϕ_D , on considère seulement l'expression initiale de ϕ .

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f & \text{sur } \Omega \\ u = u_D & \text{sur } \Gamma_D \\ \frac{\partial u}{\partial n} = g & \text{sur } \Gamma_N \end{cases} \quad (7.8)$$

On a donc la formulation variationnelle (6.5) :

$$\begin{cases} a(u, v) = \int_{\Omega_h} \nabla u \cdot \nabla v - \int_{\partial\Omega_h} \nabla u \cdot nv + \int_{\Omega_h} uv, & u, v \in V_h^{(k)} \\ l(v) = \int_{\Omega_h} fv, & v \in V_h^{(k)}, \end{cases} \quad (7.9)$$

où l'on considère $\partial\Omega_h = \Gamma_D \cup \Gamma_N$. On peut donc réécrire (7.9) sous la forme :

$$\begin{cases} a(u, v) = \int_{\Omega_h} \nabla u \cdot \nabla v - \int_{\Gamma_D} \nabla u \cdot nv - \int_{\Gamma_N} \nabla u \cdot nv + \int_{\Omega_h} uv, & u, v \in V_h^{(k)} \\ l(v) = \int_{\Omega_h} fv, & v \in V_h^{(k)}. \end{cases} \quad (7.10)$$

On se base donc sur les formes suivantes définies dans la section 6 et que l'on va maintenant modifier. On les rappelle tout d'abord :

$$\begin{cases} \text{Trouver } (u_h, y_h, p_h) \in W_h^{(k)} \text{ telles que :} \\ a_h^1(u_h, y_h, p_h; v_h, z_h, q_h) = l_h(v_h, z_h, q_h), \forall (v_h, z_h, q_h) \in W_h^{(k)}, \end{cases} \quad (7.11)$$

avec :

$$\begin{aligned} a_h^1(u, y, p; v, z, q) := & \int_{\Omega_h} \nabla u \cdot \nabla v + \int_{\Gamma_N} y \cdot nv + \int_{\Omega_h} uv \\ & + \gamma_{div} \int_{\Omega_h^{\Gamma_N}} (\operatorname{div} y + u)(\operatorname{div} z + v) + \gamma_u \int_{\Omega_h^{\Gamma_N}} (y + \nabla u) \cdot (z + \nabla v) \\ & + \frac{\gamma_p}{h^2} \int_{\Omega_h^{\Gamma_N}} (y \cdot \nabla \phi_h + \frac{1}{h} p \phi_h)(z \cdot \nabla \phi_h + \frac{1}{h} q \phi_h) + \sigma h \int_{\Gamma_N^i} \left[\frac{\partial u}{\partial n} \right] \left[\frac{\partial v}{\partial n} \right] \end{aligned} \quad (7.12)$$

et :

$$l_h(v, z, q) := \int_{\Omega_h} fv + \gamma_{div} \int_{\Omega_h^{\Gamma_N}} f(\operatorname{div} z + v). \quad (7.13)$$

On se base donc sur la formulation pour des conditions de Neumann pures. On introduit tout d'abord le terme de bord sur la frontière Dirichlet Γ_D dans la formulation variationnelle et on a donc dans un premier temps :

$$a_h^2(u, y, p; v, z, q) = a_h^1(u, y, p; v, z, q) - \int_{\Gamma_D} \nabla u \cdot nv. \quad (7.14)$$

Etant donnée la modification du terme de bord, il est tout d'abord nécessaire d'introduire deux nouvelles pénalités sur les sauts de gradient à la frontière. On introduit dans la forme bilinéaire un nouveau terme sur Γ_D^i donné par :

$$\sigma_D h \int_{\Gamma_D^i} \left[\frac{\partial u}{\partial n} \right] \left[\frac{\partial v}{\partial n} \right]. \quad (7.15)$$

Il nous reste à ajouter un terme semblable à ceux que l'on a vus lors de la construction de la forme bilinéaire du cas Neumann. On considère donc un terme qui prendra en compte le problème initial et les variables auxiliaires sur Γ_D ainsi que la condition de bord u_D . On introduit ainsi un terme de la forme :

$$\frac{1}{h^2} \int_{\Omega_h^{\Gamma_D}} (u - u_D - \frac{1}{h} p\phi)(v - \frac{1}{h} q\phi). \quad (7.16)$$

On décompose ce terme en fonction des inconnues et on ajoute à la forme bilinéaire les termes ne dépendant pas de u_D et à la forme linéaire les deux termes en u_D . On obtient finalement les deux formes suivantes :

$$\begin{aligned} a_h(u, y, p; v, z, q) := & \int_{\Omega_h} \nabla u \cdot \nabla v + \int_{\Gamma_N} y \cdot nv - \int_{\Gamma_D} \nabla u \cdot nv + \int_{\Omega_h} uv \\ & + \gamma_{div} \int_{\Omega_h^{\Gamma_N}} (\operatorname{div} y + u)(\operatorname{div} z + v) + \gamma_u \int_{\Omega_h^{\Gamma_N}} (y + \nabla u) \cdot (z + \nabla v) \\ & + \frac{\gamma_p}{h^2} \int_{\Omega_h^{\Gamma_N}} (y \cdot \nabla \phi_h + \frac{1}{h} p\phi_h)(z \cdot \nabla \phi_h + \frac{1}{h} q\phi_h) + \sigma h \int_{\Gamma_N^i} \left[\frac{\partial u}{\partial n} \right] \left[\frac{\partial v}{\partial n} \right] \\ & + \frac{\gamma_d}{h^2} \int_{\Omega_h^{\Gamma_D}} (u - \frac{1}{h} p\phi)(v - \frac{1}{h} q\phi) + \sigma_D h \int_{\Gamma_D^i} \left[\frac{\partial u}{\partial n} \right] \left[\frac{\partial v}{\partial n} \right] \end{aligned} \quad (7.17)$$

et :

$$l_h(v, z, q) := \int_{\Omega_h} fv + \gamma_{div} \int_{\Omega_h^{\Gamma_N}} f(\operatorname{div} z + v) + \frac{\gamma_d}{h^2} \int_{\Omega_h^{\Gamma_D}} u_D(v - \frac{1}{h} q\phi), \quad (7.18)$$

où γ_d est une constante ne dépendant pas de h .

Remarque 7.2. On ajoute également une pénalité d'ordre 2 sur la frontière Dirichlet. On ajoute donc un terme sous la forme :

$$\sigma_D h^2 \int_{\Omega_h^{\Gamma_D}} (-\Delta u + u - f)(-\Delta v + v).$$

Remarque 7.3. Dans cette partie, nous avons considéré le problème de Poisson modifié, afin d'avoir un problème bien posé même lors de conditions de Neumann pures. Cela permettra par la suite différentes comparaisons. On donne cependant les formes linéaires et bilinéaires correspondant au problème de Poisson :

$$\begin{aligned} a_h(u, y, p; v, z, q) := & \int_{\Omega_h} \nabla u \cdot \nabla v + \int_{\Gamma_N} y \cdot nv - \int_{\Gamma_D} \nabla u \cdot nv \\ & + \gamma_{div} \int_{\Omega_h^{\Gamma_N}} (\operatorname{div} y)(\operatorname{div} z) + \gamma_u \int_{\Omega_h^{\Gamma_N}} (y + \nabla u) \cdot (z + \nabla v) \\ & + \frac{\gamma_p}{h^2} \int_{\Omega_h^{\Gamma_N}} (y \cdot \nabla \phi_h + \frac{1}{h} p\phi_h)(z \cdot \nabla \phi_h + \frac{1}{h} q\phi_h) + \sigma h \int_{\Gamma_N^i} \left[\frac{\partial u}{\partial n} \right] \left[\frac{\partial v}{\partial n} \right] \\ & + \frac{\gamma_d}{h^2} \int_{\Omega_h^{\Gamma_D}} (u - \frac{1}{h} p\phi)(v - \frac{1}{h} q\phi) + \sigma_D h \int_{\Gamma_D^i} \left[\frac{\partial u}{\partial n} \right] \left[\frac{\partial v}{\partial n} \right] \\ & + \sigma_D h^2 \int_{\Omega_h^{\Gamma_D}} \Delta u \Delta v \end{aligned} \quad (7.19)$$

et :

$$l_h(v, z, q) := \int_{\Omega_h} f v + \gamma_{div} \int_{\Omega_h^{\Gamma_N}} f \operatorname{div} z + \frac{\gamma_d}{h^2} \int_{\Omega_h^{\Gamma_D}} u_D(v - \frac{1}{h} q \phi) - \sigma_D h^2 \int_{\Omega_h^{\Gamma_D}} f \Delta v, \quad (7.20)$$

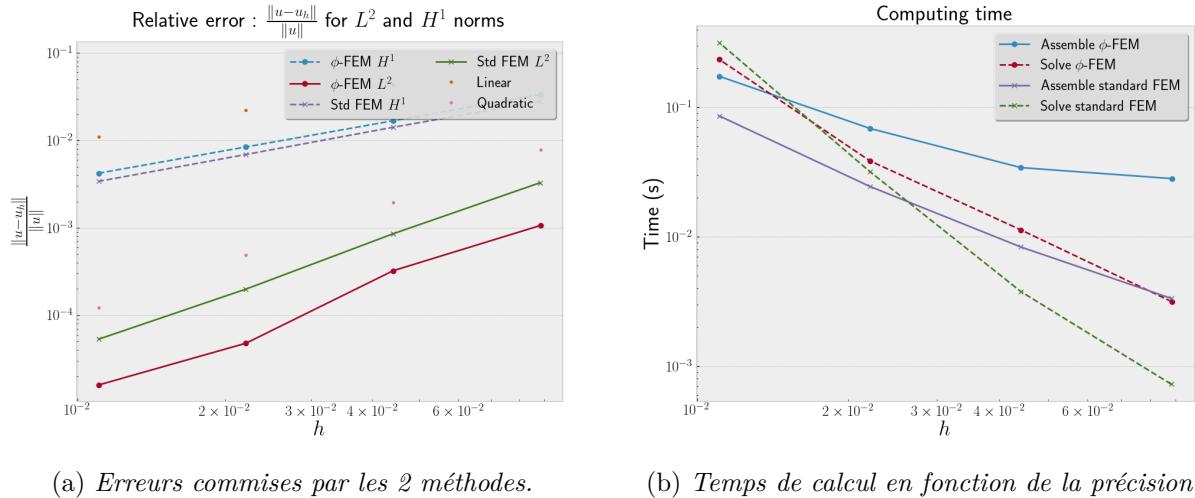
7. 4. Nouveaux résultats

On considère ici une fois de plus le même problème que dans le cas précédent, en choisissant comme solution exacte exacte :

$$u_{ex} = \sin(x) \exp(y). \quad (7.21)$$

On prend également $\Gamma_D = \{(x, y) \in \partial\Omega, x \geq 0.5\}$ et $\Gamma_N = \partial\Omega \setminus \Gamma_D$. On présente ici encore les mêmes résultats que pour les autres méthodes : comparaisons de l'erreur et du temps de calcul (assemblage des matrices éléments finis et résolution des systèmes).

On pose ici pour les différents paramètres : $\sigma = 0.01$, $\gamma_u = \gamma_p = \gamma_{div} = 1.0$ et $\gamma_d = 20.0$. On obtient les résultats présentés aux figures 22a, 22b, 23a et 23b.



(a) Erreurs commises par les 2 méthodes.

(b) Temps de calcul en fonction de la précision.

FIGURE 22

On voit sur la figure 22a que l'erreur obtenue est proche de celle obtenue avec la méthode précédente, bien que légèrement supérieure si l'on compare avec la figure 20a. Cependant, cette erreur (notamment en norme H^1 , semble beaucoup plus "stable". Cela est dû à la continuité de la solution approchée, ce qui n'était pas le cas avec la méthode précédente. L'ordre de convergence numérique correspond alors à l'ordre de convergence annoncé par la théorie.

7. 5. Remarques et conclusions

On voit donc sur les précédents graphiques que la méthode est intéressante en terme de gain de précision lorsqu'elle est utilisée dans le cadre de conditions mixtes. En raison de la définition des formes utilisées, elle vérifie évidemment le même gain dans le cas de conditions de Neumann que la méthode définie justement dans le cas de conditions de Neumann seules (voir figure 24a). Cependant le temps de calcul peut être légèrement augmenté lors de la sélection des cellules et de la construction des mesures utilisées, puisqu'il faudra vérifier une

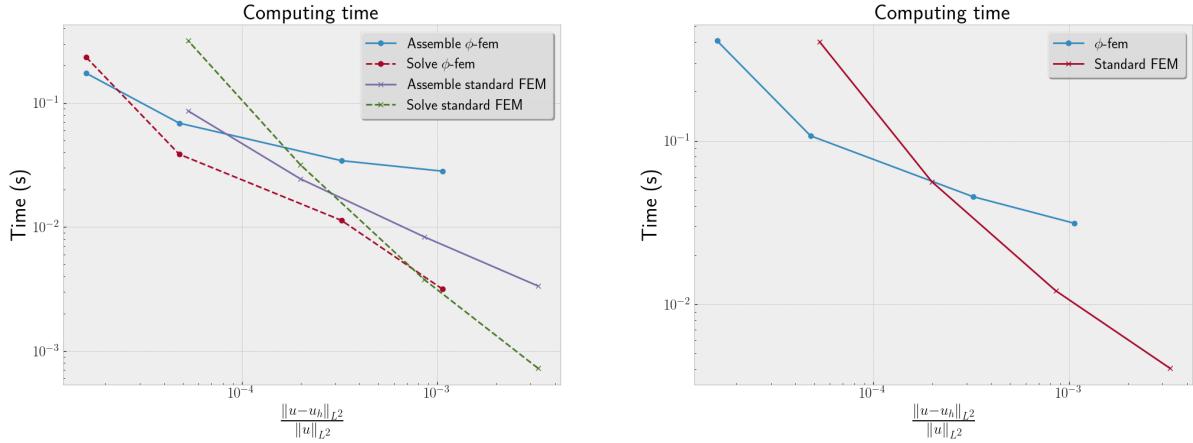


FIGURE 23

condition d'appartenance à la frontière Neumann ou à la frontière Dirichlet (qui dans le cas Neumann strict sera vide).

En revanche, étant donnée la nouvelle version de la méthode, il est important de vérifier si son utilisation dans le cas de seules conditions de Dirichlet peut-être aussi intéressante que la méthode présentée dans la section 5. On décide donc de faire une comparaison de l'erreur en fonction de la précision sur le problème (7.8), en considérant $\Gamma_D = \partial\Omega$ et $\Gamma_N = \emptyset$. On obtient alors la figure 24b.

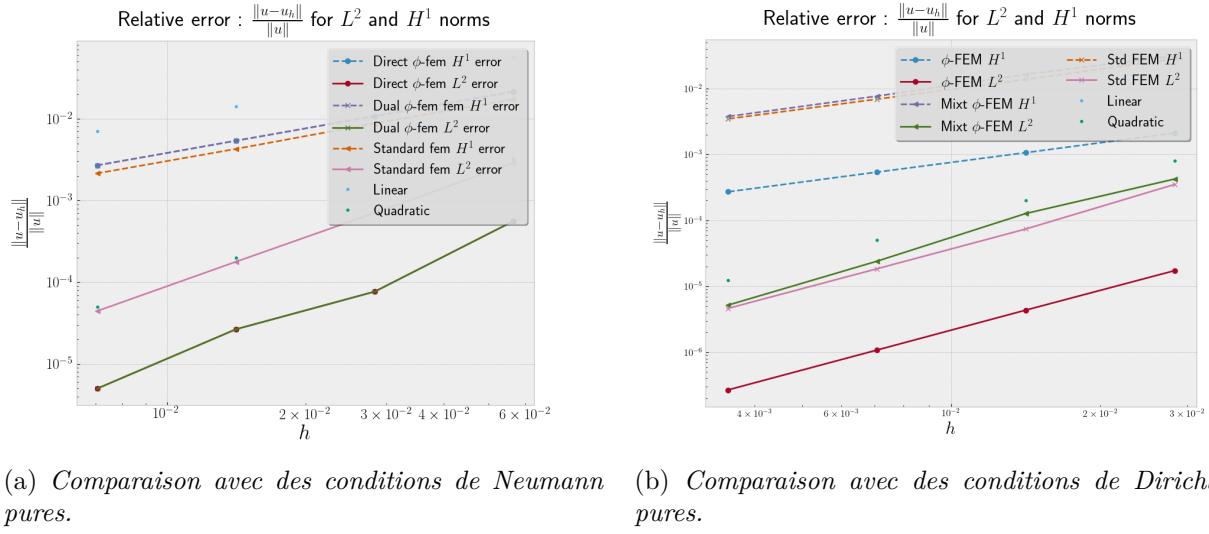


FIGURE 24

On voit donc que dans la pratique, il sera vraiment important de différencier les cas et s'utiliser une méthode correspondant à la situation considérée. En effet, lors de conditions de Dirichlet pures, il sera essentiel de considérer la méthode définie en 5 étant donné le gain de précision apporté par son utilisation. Il sera donc essentiel dans la pratique de réaliser un programme permettant d'appliquer la bonne méthode en fonction du nombre d'éléments présents sur la frontière Dirichlet et sur la frontière Neumann :

- si $\Gamma_D \neq \emptyset$ et $\Gamma_N \neq \emptyset$, on applique la méthode pour des conditions mixtes ;
- si $\Gamma_D = \Gamma$, on applique la méthode pour Dirichlet pur définie en 5 ;
- si $\Gamma_N = \Gamma$, on applique de préférence la méthode définie en 6.

8 Creation de ϕ

On s'interesse maintenant a la construction de la fonction ϕ . En effet, jusqu'à présent, on a considéré une forme exacte de la fonction ϕ puis on a construit les différents domaines d'études a partir de cette fonction. Cependant, dans la pratique, on ne connaît pas l'expression exacte de cette fonction, on dispose uniquement d'un nuage de points composant la frontière du domaine.

Une étape importante de la méthode est donc le passage du nuage de point a la création du domaine grâce a la fonction level-sets. Pour cela on considère l'exemple d'un cercle centré en $(0.5, 0.5)$ et de rayon $\frac{\sqrt{2}}{4}$, que l'on discrtisera pour construire ϕ .

Rappel. La fonction ϕ étant une fonction level-sets, elle doit vriﬁer les trois conditions suivantes :

- tre positive en dehors du domaine ;
- tre nulle sur la frontière du domaine ;
- tre négative a l'intérieur du domaine.

8. 1. Méthode de construction

Dans le cas de notre exemple on cherche donc une fonction négative a l'intérieur du cercle, nulle sur le cercle et positive ailleurs. Une fonction qui semble correspondre a ce critère serait la distance signée.

Nous allons donc chercher a construire la distance signée (notée ϕ) aux points du nuage initial. C'est-a-dire que ϕ vriera :

- Pour tout point $A(x, y)$ du nuage, $\phi(x, y) = 0$;
- Pour tout point $A(x, y)$ n'appartenant pas au nuage, $\phi(x, y) = \pm \|AH\|$ où H est le projeté orthogonal de A sur le nuage.

Nous allons maintenant décrire toutes les étapes menant du nuage de points a la construction de ϕ puis a l'application de la ϕ -FEM.

- i. Création du nuage de points $M = \{m_i\}$;
- ii. Création d'un polygone P de sommets m_i ;
- iii. Génération d'un maillage (non régulier en général) \mathcal{T}_h sur le polygone P ;
- iv. Génération d'un maillage sur la frontière de \mathcal{T}_h , notée \mathcal{T}_h^F ;
- v. Génération d'un maillage de fond (par exemple carré unité autour du cercle), régulier, notée \mathcal{T} ;
- vi. Détermination de ϕ pour tout sommet A de \mathcal{T} :
 - Récupération des coordonnées des deux points les plus proches de A , situés sur le cercle et consécutifs ;

- Calcul des coordonnées (x_H, y_H) de H , projeté orthogonal de A sur le segment reliant les deux points déterminés précédemment ;
- Vérification de l'appartenance de A au maillage \mathcal{T}_h ;
- Calcul de la distance entre A et H ;
- Changement du signe si A est sur le maillage \mathcal{T}_h ;

vii. Création du nouveau domaine en utilisant ϕ sur le maillage \mathcal{T} .

Détaillons à présent la construction dans le cadre de l'exemple du cercle. On dispose d'un nuage de points formant un cercle (voir figure 25a). On choisit de relier tous les points consécutifs par des segments pour construire un polygone et obtenir la figure 25b.

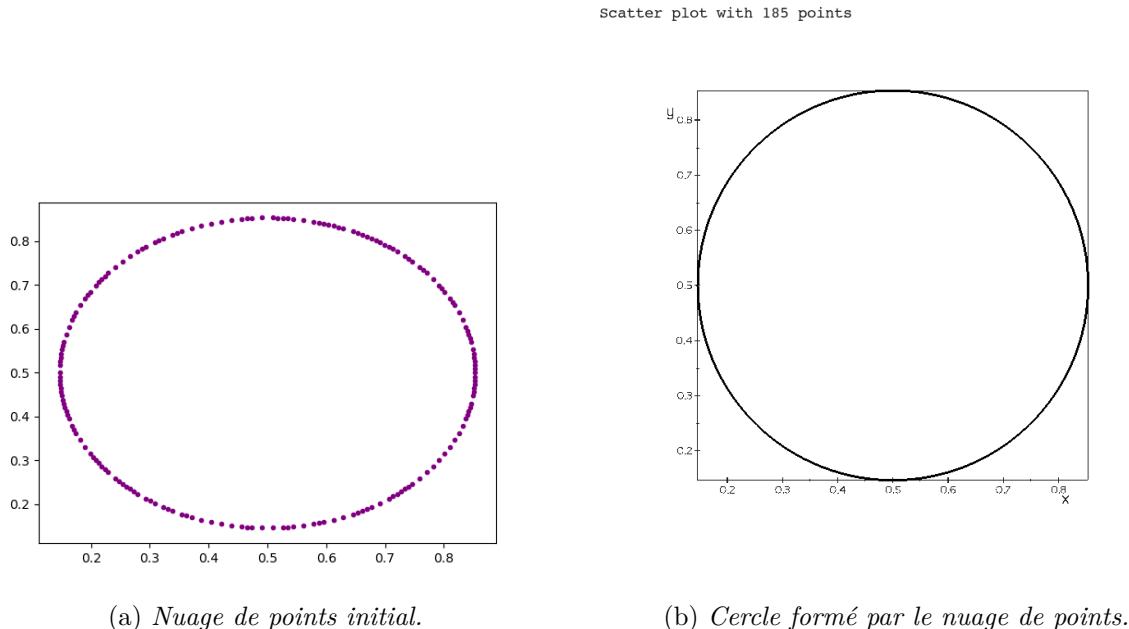


FIGURE 25

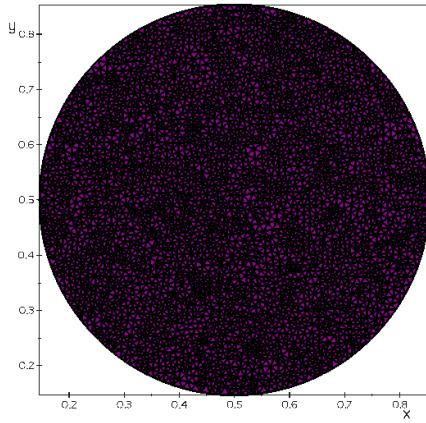
On dispose alors d'un polygone (fermé) et on construit un maillage \mathcal{T}_h sur ce polygone (à l'aide de *mshr* par exemple ou bien du logiciel *GMSH*). On obtient la figure 26a. On utilise ensuite une fonction implémentée directement dans le package *FEniCS*, qui nous permet d'extraire un maillage de la frontière de \mathcal{T}_h . On obtient un maillage du bord du cercle, que l'on notera \mathcal{T}_h^Γ .

On a maintenant besoin d'un nouveau maillage, qui sera utilisé pour les calculs et pour la résolution du problème éléments finis. On construit donc un maillage de fond, sur un rectangle (plus grand que le cercle), régulier et plus grossier que le maillage \mathcal{T}_h . On obtient la figure 40. On dispose maintenant de tous les points nécessaires à la construction de ϕ : les sommets du maillage de la frontière (c'est-à-dire les points du nuage de points) et les sommets du maillage grossier.

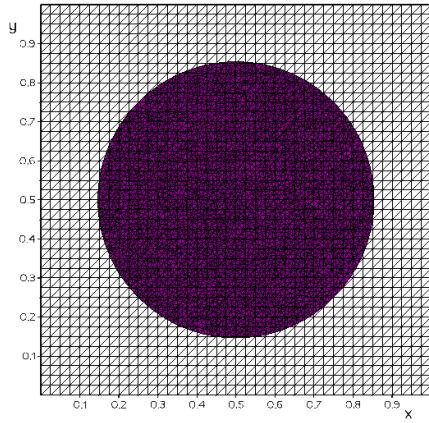
Soit maintenant $A(x, y)$, un sommet du maillage \mathcal{T} . A l'aide de *FEniCS*, on récupère l'élément de \mathcal{T}_h^Γ le plus proche de A , c'est-à-dire un segment. On peut extraire les coordonnées des deux extrémités de ce segment et on obtient ainsi p_1 et p_2 qui sont les deux points de \mathcal{T}_h^Γ les plus proches de A .

Mesh on the scatter plot with 6251 cells

3200 elements of size 0.03535533905932741 on the white mesh
6251 elements of size 0.01767594800694842 on the purple mesh



(a) *Maillage initial.*



(b) *Maillages \mathcal{T}_h et \mathcal{T} .*

FIGURE 26

Pour calculer la distance entre A et le nuage de points il reste donc à projeter A sur le segment $[p_1, p_2]$. On construit le vecteur p_1p_2 et on calcule :

$$p_1H = \frac{\langle p_1p_2, p_1A \rangle}{\|p_1p_2\|^2} \times p_1p_2. \quad (8.1)$$

On détermine les coordonnées du projeté H qui sont données par :

$$\begin{cases} x_H &= x + p_1H \\ y_H &= y + p_1H. \end{cases} \quad (8.2)$$

On calcule la distance entre A et H et on obtient la distance de A au nuage de points. Finalement, on détermine à l'aide de *FEniCS* si le point A est à l'intérieur de \mathcal{T}_h puis on change le signe de la distance si c'est le cas. On obtient ainsi la distance signée de A au nuage de points.

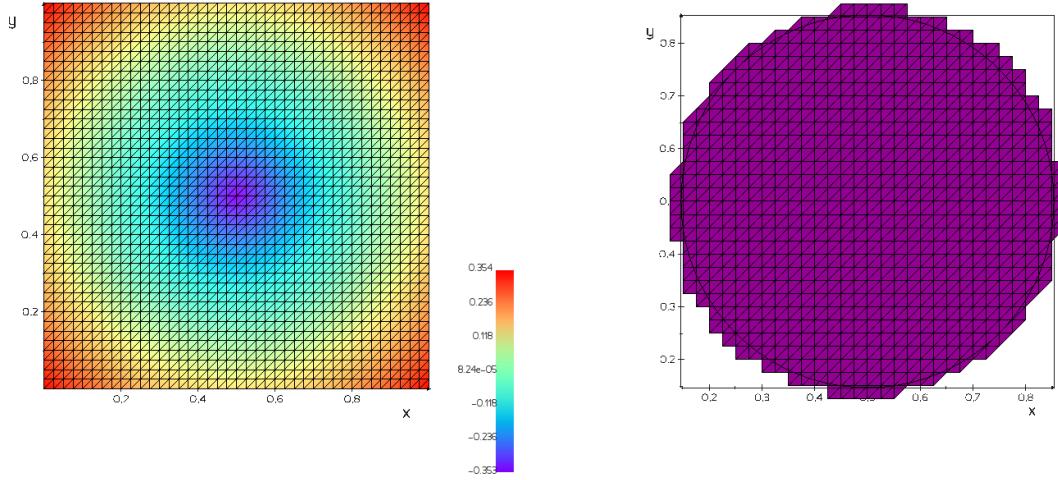
On répète cela pour tout point du maillage \mathcal{T} et on obtient une discrétisation de la fonction ϕ recherchée. La figure 27a représente les valeurs de la fonction ϕ pour l'exemple du cercle.

On peut finalement construire le sous-maillage de \mathcal{T} sur lequel on travaillera par la suite en appliquant la méthode habituelle et on obtient la figure 27b.

Remarque 8.1. En pratique on sélectionne les points que l'on projette : si p est déjà sur le maillage \mathcal{T}_h^T , on ne fait pas de projection, la distance signée est nulle.

Remarque 8.2. Dans la pratique, il sera nécessaire d'effectuer certaines vérifications supplémentaires et d'ajouter certaines conditions. En effet, il se peut que le projeté orthogonal d'un point ne soit pas sur le segment entre les deux plus proches voisins. Il sera nécessaire de modifier cela. Deux méthodes sont envisageables :

- si le projeté n'est pas sur le segment, on modifie l'un des deux voisins pour que le projeté soit alors sur ce segment ;

Values of ϕ on the background meshDomain builded from ϕ with 1390 cells(a) Valeurs de la fonction ϕ sur \mathcal{T} .

(b) Sous-maillage créé à partir de la fonction level-sets.

FIGURE 27

- si le projeté n'est pas sur le segment, on impose alors une valeur au projeté : l'un des deux sommets du segment.

La méthode retenue après différents tests est de modifier le projeté par l'un des deux sommets du segments. Pour cela, on paramétrise le segment $[p_1, p_2]$ et on vérifie si H appartient au segment. On utilise que tout point du segment $[p_1, p_2]$ s'exprime sous la forme $(1-t)p_1 + tp_2$. On détermine alors la valeur de t pour le projeté H et en fonction de la valeur de t , on applique :

- si $t \in [0, 1]$ alors $H \in [p_1, p_2]$ et donc le projeté est bien H ;
- si $t < 0$, alors $H \notin [p_1, p_2]$ et H "dépasse" du côté de p_1 . On pose alors $H = p_1$;
- si $t > 1$, alors H "dépasse" du côté de p_2 et on pose $H = p_2$.

8. 2. Premiers résultats

Pour vérifier la précision de la méthode, on compare tout d'abord la fonction ϕ déterminée par cette méthode et l'expression exacte que l'on connaît pour le cas du cercle, c'est-à-dire :

$$\phi_{ex}(x, y) = -\sqrt{\frac{1}{8} + \sqrt{(x - 0.5)^2 + (y - 0.5)^2}}. \quad (8.3)$$

On décide de réaliser une représentation graphique de la différence entre la fonction construite et ϕ_{ex} . Pour cela, on considère une taille fixe de maillage sur le cercle (i.e. un nombre fixe de points égal à 1884) et on fait varier la taille du maillage de fond. On voit sur la figure 28 que même avec peu de points donnés et un maillage relativement grossier, on arrive à obtenir une précision élevée lors de la construction. Cependant, il faut également noter que pour obtenir une très bonne précision, il est important que le maillage de fond soit bien plus grossier que le maillage initial du cercle.

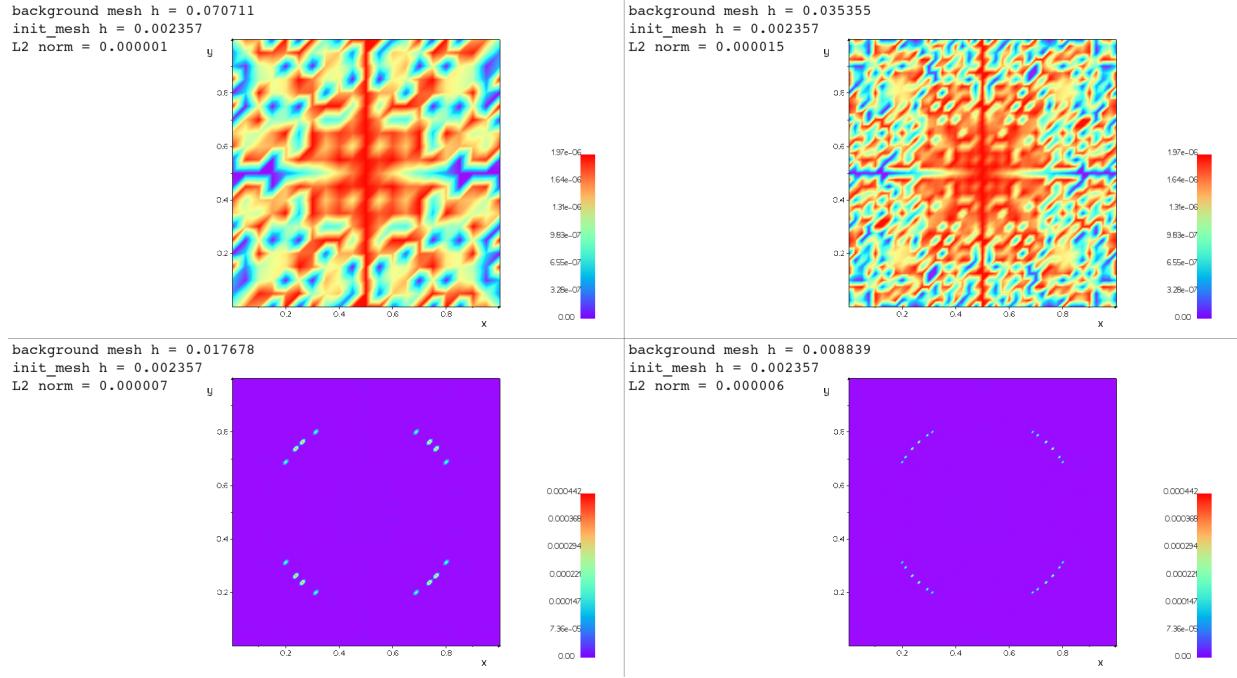


FIGURE 28 – Erreur obtenue en construisant ϕ avec 1884 points et un maillage grossier de différentes tailles.

On représente maintenant l'erreur de construction en faisant varier la taille du maillage initial et en faisant varier en même temps le maillage initial et le maillage de fond. On obtient les figures 29 et 30.

On remarque encore une fois sur ces représentations que la taille du maillage de fond a une importance sur la précision. Il ne faut pas choisir un maillage trop grossier mais il est important de prendre tout de même un maillage plus grossier que le maillage initial. Une remarque également importante est qu'il faut faire attention à l'ordre de grandeur sur les représentations graphiques. En effet, ici on a l'impression de grandes variations. Cependant, les variations sont de l'ordre de 10^{-5} , ce qui reste très faible.

Par la suite, on décide comparer le temps nécessaire à la construction et à l'interpolation sur V de la fonction ϕ avec le temps nécessaire lors de l'utilisation de l'expression exacte. On obtient la figure 31.

Finalement, on crée un domaine plus complexe (sous la forme d'un requin) et l'on essaie de construire la fonction ϕ sur ce domaine. Cela permet de voir que la fonction est bien construite, de façon relativement précise et continue. On représente les résultats de la construction de ϕ ainsi que la reconstruction du domaine à la figure 32.

8. 3. Application avec la méthode ϕ -FEM

On peut maintenant représenter l'erreur de la méthode ϕ -FEM sur cet exemple, en comparant avec une méthode standard où l'on augmentera la précision de discréétisation du cercle, ce qui réduira la taille des éléments du maillage \mathcal{T}_h . Pour réaliser une comparaison correcte, on fera en sorte d'avoir la même taille de cellule pour le maillage \mathcal{T}_h et pour le maillage de fond. On considère pour cela l'exemple du problème de Poisson à conditions de Dirichlet non-homogènes, comme à la section 5. 6..

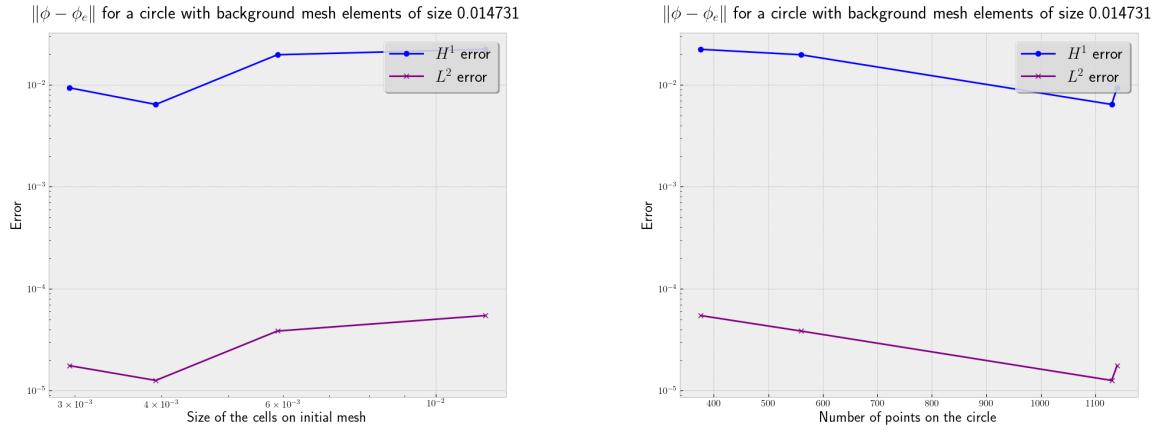


FIGURE 29

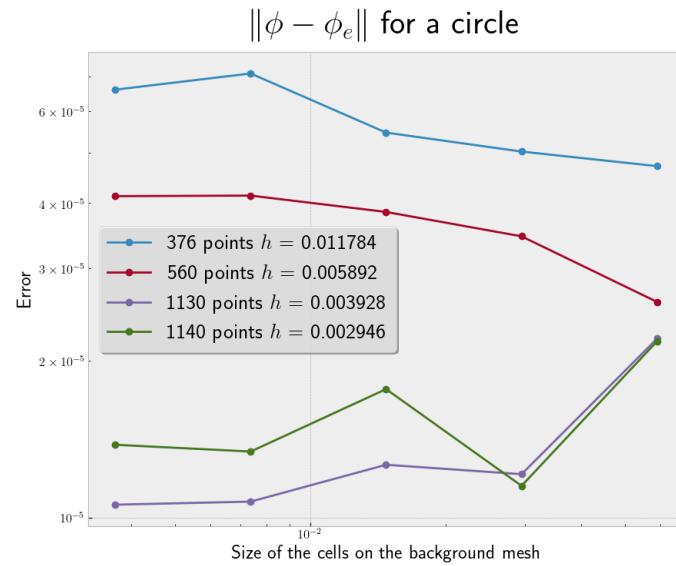


FIGURE 30 – Erreur de construction (en norme L^2) pour différentes tailles de maillage initial en fonction de la taille du maillage de fond.

Computing time for the creation and the interpolation of ϕ

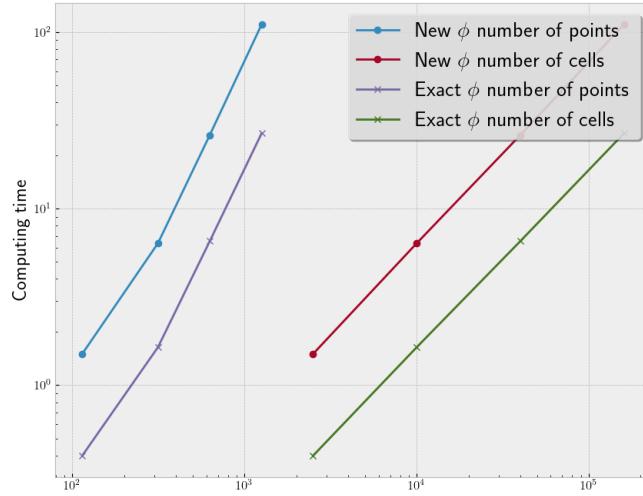


FIGURE 31 – Temps de calcul nécessaire en fonction du nombre de points sur le cercle et de la taille du maillage de fond. Le nombre de points correspond au nombre de points sur la frontière du cercle et le nombre de cellules correspond au nombre de cellules sur le maillage de fond.

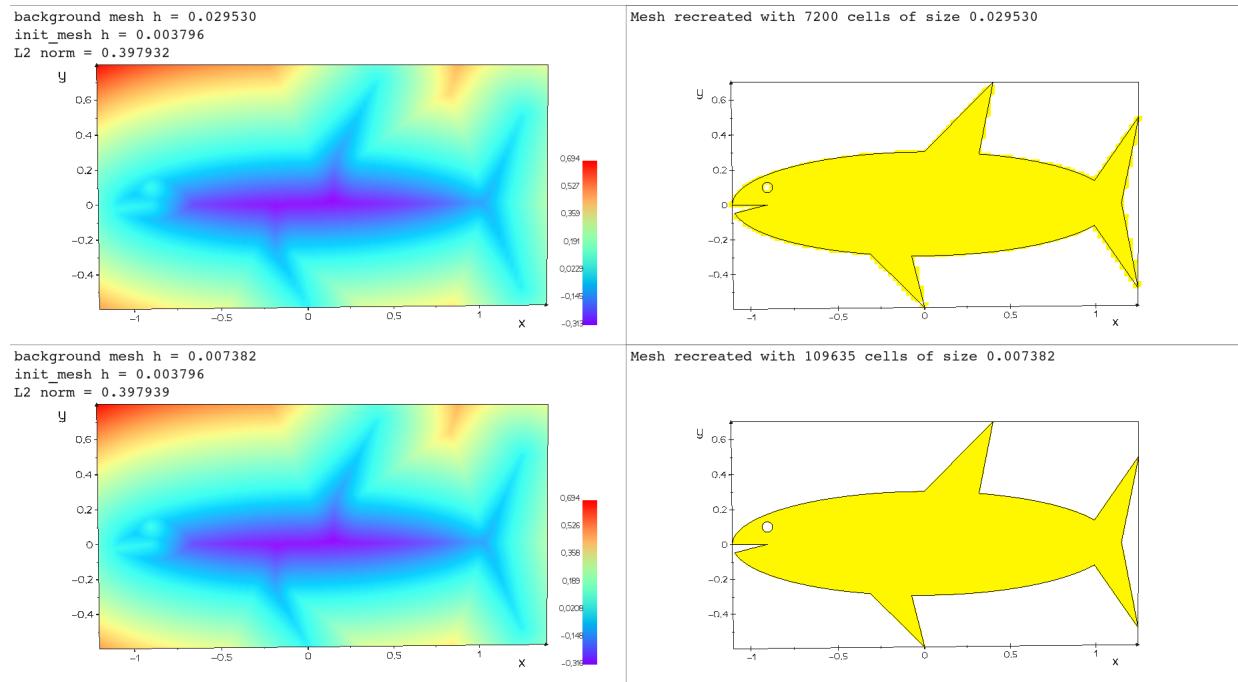
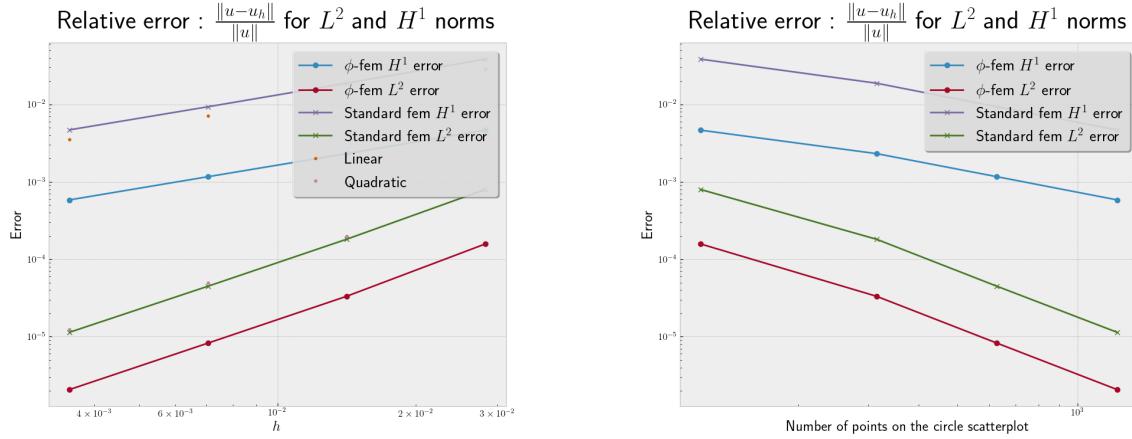


FIGURE 32 – Construction de ϕ sur un domaine complexe.

On représente l'erreur obtenue sur la figure 33 en comparant la méthode standard où l'on utilise l'expression exacte de ϕ pour donner la condition de bord et la méthode ϕ -FEM où l'on utilise la construction décrite précédemment.



(a) Erreur des 2 méthodes en fonction de la taille des éléments. (b) Erreur des 2 méthodes en fonction du nombre de points sur le cercle.

FIGURE 33

8. 4. Adaptation au cadre tridimensionnel

On souhaite maintenant construire ϕ dans le cas de domaines 3D. Pour cela, on suivra la même méthode que précédemment. Les modifications interviendront surtout à différents moments que nous allons maintenant détailler. Tout d'abord, on utilisera un nuage de points 3D, par exemple un nuage de points formant une sphère ou un foie comme nous le verrons dans les exemples pratiques. Tout d'abord, une première modification intervient au moment de sélectionner les points les plus proches : on considère ici les trois points les plus proches et on a donc p_1, p_2 et p_3 qui forment un triangle T sur lequel on va projeter notre point A . Pour cela, on calcule le produit vectoriel entre les vecteurs p_1p_2 et p_1p_3 , qui nous donne un vecteur normal au triangle T formé par les trois points. On peut alors déterminer les coordonnées du projeté H de A :

$$\begin{cases} x_H = x_A + \frac{\langle p_1A, n \rangle}{\|n\|^2} \times n \\ y_H = y_A + \frac{\langle p_1A, n \rangle}{\|n\|^2} \times n \\ z_H = z_A + \frac{\langle p_1A, n \rangle}{\|n\|^2} \times n. \end{cases} \quad (8.4)$$

On a alors les coordonnées du projeté. Cependant, le même problème que dans le cas 2D peut se poser : dans certains cas, il arrive que le projeté H ne soit pas sur le triangle T . Dans ces cas là, on utilise la méthode suivante : on détermine les deux sommets de T les plus proches et on projette H sur le segment entre les deux points les plus proches. Si le projeté est cette fois en dehors du segment on applique la remarque 8.2.

On fait un premier test de la méthode sur un maillage de foie issu des scènes disponibles dans les fichiers du logiciel *SOFA framework*. On obtient la figure 34 sur laquelle on a utilisé la méthode pour différentes tailles de maillage de fond.

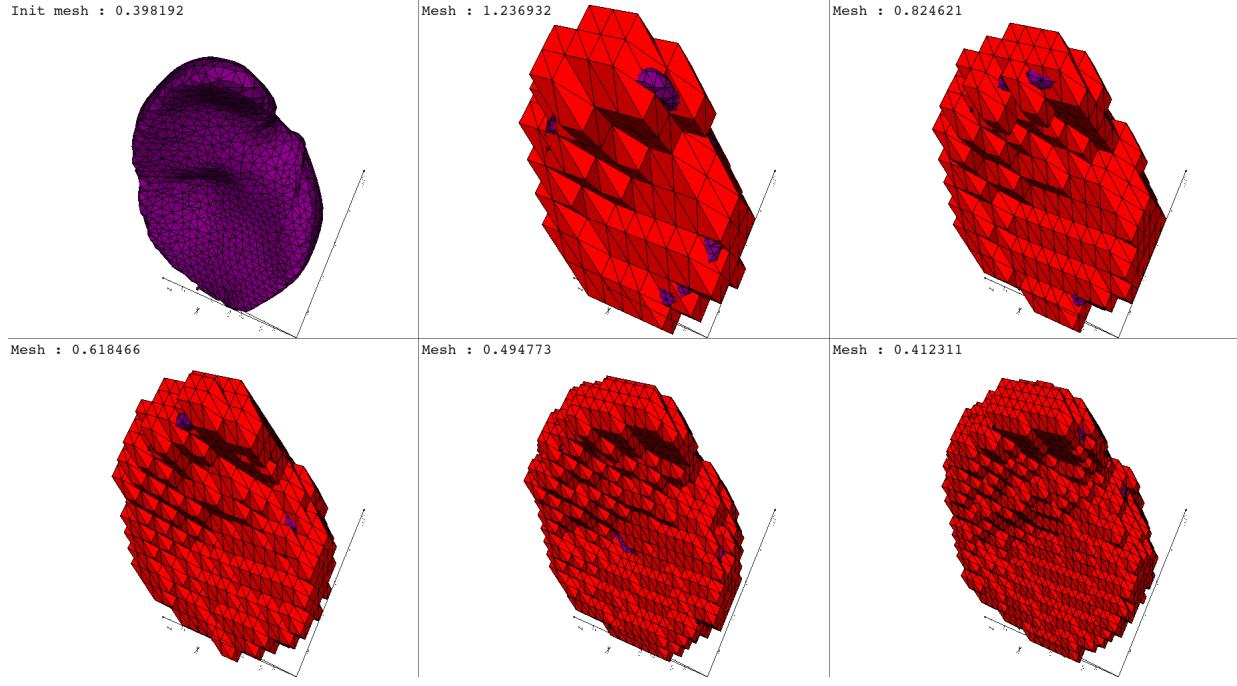


FIGURE 34 – Reconstruction du domaine à l'aide de la fonction ϕ construite.

9 La méthode ϕ -FEM en élasticité linéaire

9. 1. Conditions de Dirichlet homogènes

On se place tout d'abord dans le cadre de conditions de Dirichlet au bord, telles que $u = (0, 0)$ sur la frontière Γ_D . On considère donc le problème suivant :

$$\begin{cases} -\operatorname{div} \sigma(u) &= f, \text{ sur } \Omega \\ u &= 0, \text{ sur } \Gamma_D. \end{cases} \quad (9.1)$$

Remarque 9.1. On rappelle que :

$$\sigma(u) = \lambda \operatorname{tr}(\gamma(u)) \times \mathbf{I} + 2\mu \times \gamma(u) \quad (9.2)$$

où λ et μ sont des constantes et :

$$\gamma(u) = \frac{\nabla u + \nabla u^t}{2}. \quad (9.3)$$

On choisit ici de poser pour la solution exacte :

$$u = (\sin(x) \exp(y), \sin(y) \exp(x)). \quad (9.4)$$

On calcule f en appliquant directement $-\operatorname{div} \sigma(u)$ avec u définie en (9.4).

On décide donc d'utiliser la ϕ -fem pour la résolution de ce problème. On procède tout d'abord comme dans le cas standard, c'est-à-dire que l'on pose $u = \phi w$ puis on multiplie le problème par une fonction test avant d'intégrer par parties. On obtient ainsi la formulation variationnelle (non pénalisée), trouver $w \in V$ telle que :

$$\int_{\Omega} \sigma(\phi w) : \gamma(\phi v) - \int_{\Gamma_D} (\sigma(\phi w) \cdot n) \cdot \phi v = \int_{\Omega} f \cdot \phi v, \quad \forall v \in V. \quad (9.5)$$

On introduit ensuite les mêmes espaces que dans le cas standard, en considérant ici pour V_h^k un espace de vecteurs de \mathbb{R}^2 . On modifie ensuite les pénalités utilisées. Pour la pénalité d'ordre 1, on travaille sur l'intégrale de bord et on obtient comme terme d'ordre 1 :

$$\sigma_p h \sum_{F \in \mathcal{F}_h^\Gamma} \int_F [\sigma(\phi_h w) \cdot n] [\sigma(\phi_h v) \cdot n]. \quad (9.6)$$

Ensuite, on calcule la pénalité d'ordre 2 à appliquer sur le terme de gauche et le terme de droite. Pour cela, on pénalise le problème initial sur \mathcal{T}_h^Γ . On obtient la pénalité d'ordre 2 de la forme bilinéaire donnée par :

$$\sigma_p h^2 \sum_{T \in \mathcal{T}_h^\Gamma} \int_T (\operatorname{div} \sigma(\phi_h w)) \cdot (\operatorname{div} \sigma(\phi_h v)). \quad (9.7)$$

Finalement, en travaillant sur le terme de droite du problème initial, on obtient la pénalité :

$$-\sigma_p h^2 \sum_{T \in \mathcal{T}_h^\Gamma} \int_T f \cdot (\operatorname{div} \sigma(\phi_h v)). \quad (9.8)$$

On a donc les pénalités :

$$G_h(w, v) = \sigma_p h \sum_{F \in \mathcal{F}_h^\Gamma} \int_F [\sigma(\phi_h w) \cdot n] [\sigma(\phi_h v) \cdot n] + \sigma_p h^2 \sum_{T \in \mathcal{T}_h^\Gamma} \int_T (\operatorname{div} \sigma(\phi_h w)) \cdot (\operatorname{div} \sigma(\phi_h v)) \quad (9.9)$$

$$G_h^{rhs}(v) = -\sigma_p h^2 \sum_{T \in \mathcal{T}_h^\Gamma} \int_T f \cdot (\operatorname{div} \sigma(\phi_h v)). \quad (9.10)$$

Finalement, on obtient les formes bilinéaire et linéaire suivantes :

$$a(w, v) = \int_{\Omega_h} \sigma(\phi_h w) : \gamma(\phi_h v) - \int_{\Gamma_D} (\sigma(\phi_h w) \cdot n) \cdot \phi_h v + G_h(w, v) \quad (9.11)$$

et

$$l(v) = \int_{\Omega_h} f \cdot \phi_h v + G_h^{rhs}(v). \quad (9.12)$$

On présente maintenant les résultats obtenus lors de la comparaison entre cette méthode et une méthode standard appliquées au problème (9.1). On obtient les résultats présentés à la figure 35a, 35b, 36a et 36b. On voit sur ces résultats que l'intérêt de la méthode dans le cas de conditions homogènes est très limité au niveau de l'erreur. Cependant, on remarque un gain de temps déjà relativement élevé au moment de la résolution du système linéaire lors de l'utilisation de la ϕ -FEM.

On choisit également de réaliser des comparaisons en utilisant cette fois des méthodes \mathbb{P}^2 au lieu de \mathbb{P}^1 . On obtient les résultats présentés aux figures 37a, 37b.

9. 2. Conditions de Dirichlet non homogènes

On veut maintenant considérer un cas plus général, le cas de conditions de Dirichlet non-homogènes. Pour cela, comme dans le cas de la section 5. 7., nous allons devoir modifier le problème et la formulation variationnelle en faisant apparaître la condition de bord que l'on notera u_D .

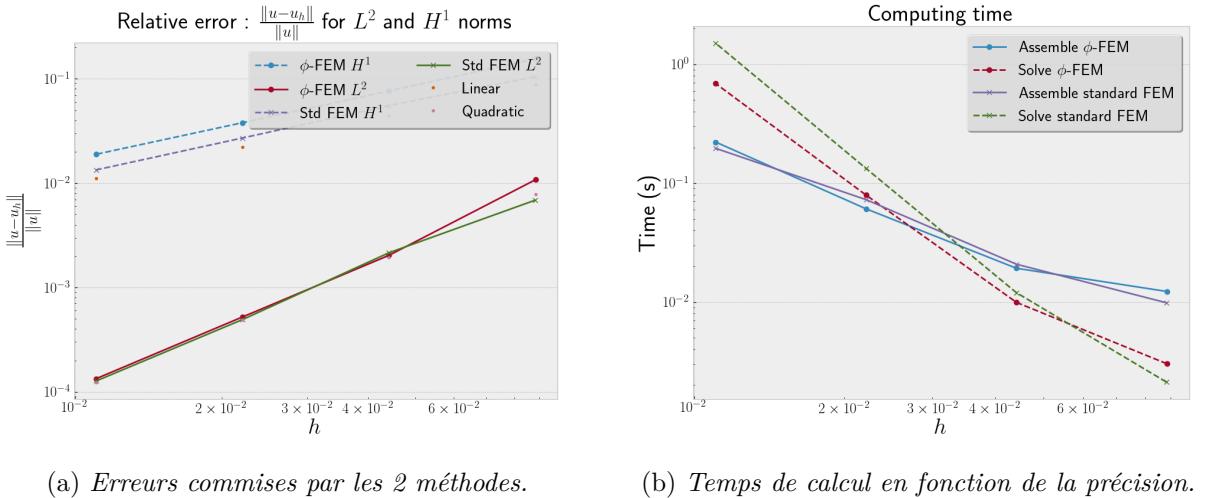


FIGURE 35

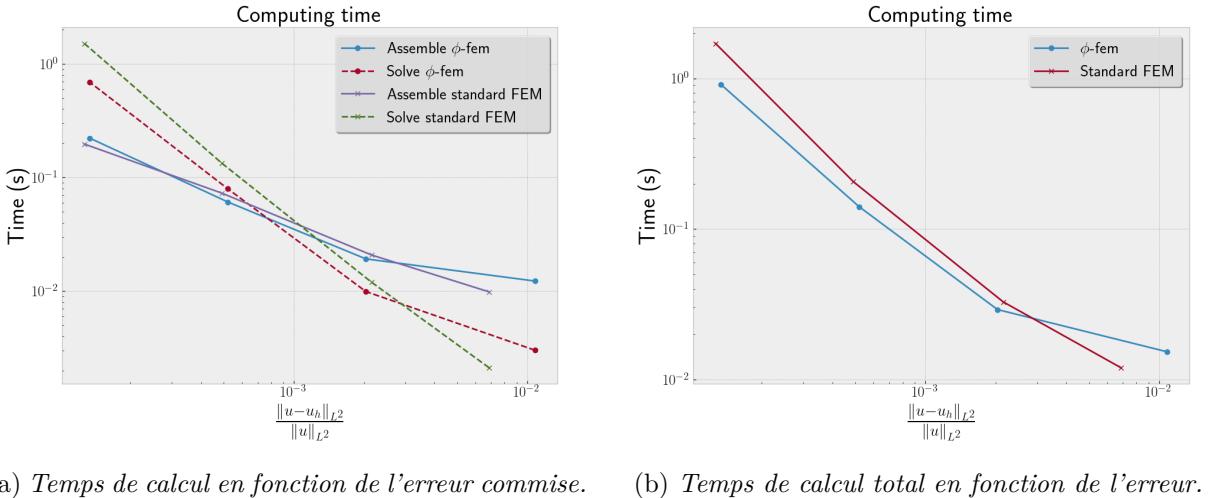


FIGURE 36

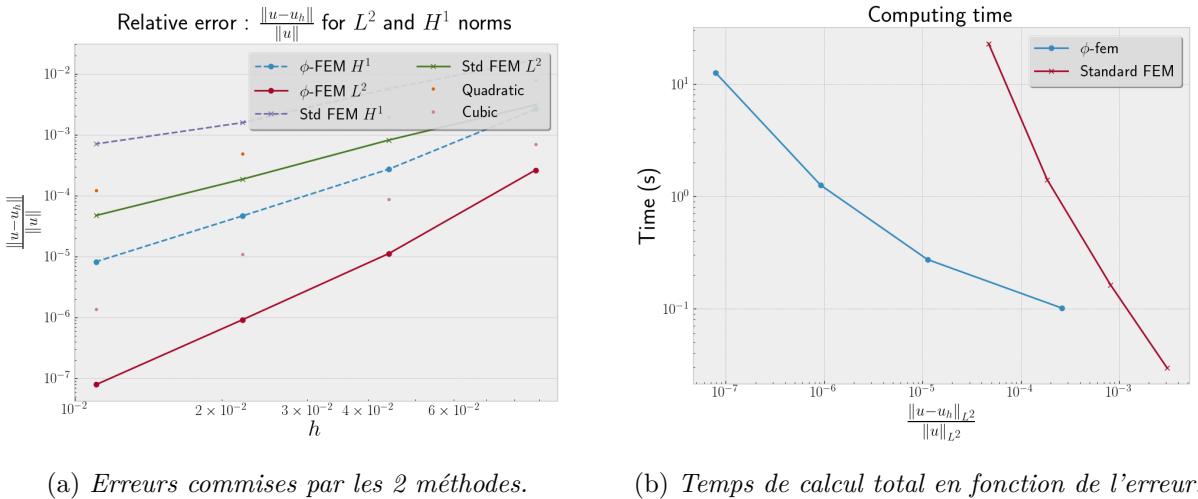


FIGURE 37

Comme dans le cas vu en 5.7., on modifie tout d'abord l'expression de u en posant $u = \phi w + u_D$. A partir de là, les étapes sont approximativement les mêmes (aux calculs près), on décide donc de ne pas décrire à nouveau les modifications à réaliser et on se permet de seulement donner la nouvelle forme linéaire en se rappelant que la forme bilinéaire n'est pas modifiée.

On obtient la forme :

$$l(v) = \int_{\Omega_h} f \cdot \phi_h v - \int_{\Omega_h} \sigma(u_D) \cdot \gamma(\phi_h v) + \int_{\Gamma_D} (\sigma(u_D) \cdot n) \cdot \phi_h v + G_h^{rhs}(v) \quad (9.13)$$

où :

$$\begin{aligned} G_h^{rhs}(v) = & -\sigma_p h^2 \sum_{T \in \mathcal{T}_h^\Gamma} \int_T f \cdot (\operatorname{div} \sigma(\phi_h v)) - \sigma_p h \sum_{F \in \mathcal{F}_h^\Gamma} \int_F [\sigma(u_D) \cdot n] [\sigma(\phi_h v) \cdot n] \\ & - \sigma_p h^2 \sum_{T \in \mathcal{T}_h^\Gamma} \int_T (\operatorname{div} \sigma(u_D)) \cdot (\operatorname{div} \sigma(\phi_h v)). \end{aligned} \quad (9.14)$$

On représente sur les figures 38a, 38b, 39a et 39b, une comparaison de l'erreur obtenue pour cette méthode et une méthode standard.

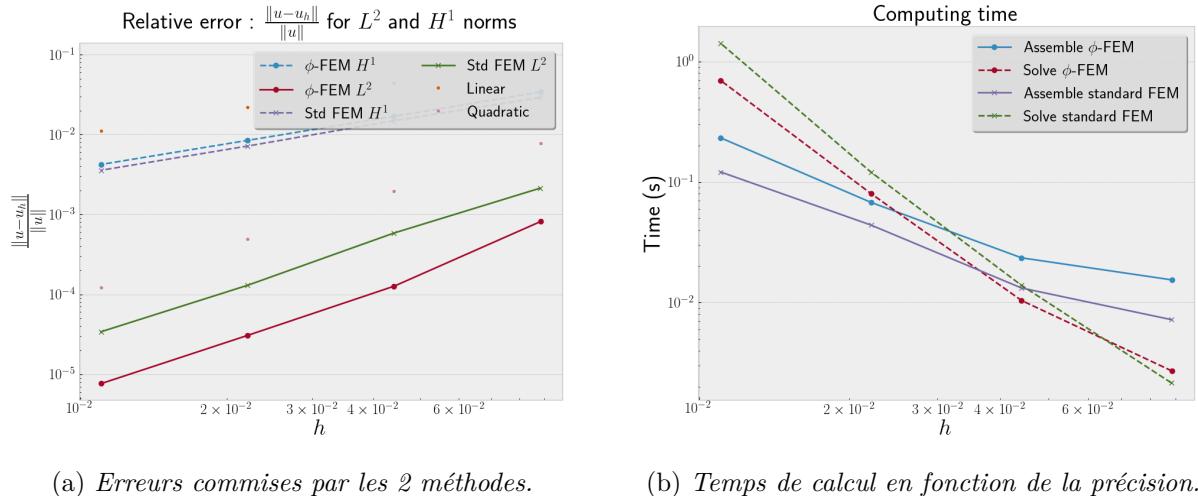


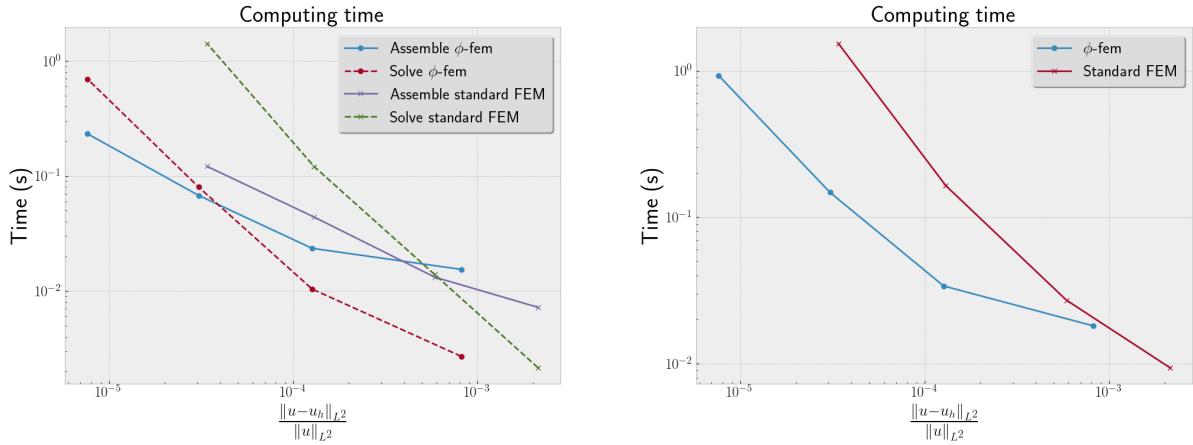
FIGURE 38

On voit une nouvelle fois sur ces représentations que la méthode ϕ -FEM offre une meilleure précision pour une taille de maillage équivalente ainsi qu'un temps de résolution plus faible.

9. 3. Conditions de Neumann

Maintenant que nous avons introduit la méthode pour des conditions de Dirichlet, il est nécessaire d'introduire une méthode de résolution dans le cas de condition de Neumann. Pour cela, on se basera sur la méthode présentée à la section 6. on considérera ici le problème suivant :

$$\begin{cases} -\operatorname{div} \sigma(u) + u = f, & \text{sur } \Omega \\ \sigma(u) \cdot n = g, & \text{sur } \Gamma. \end{cases} \quad (9.15)$$



(a) Temps de calcul en fonction de l'erreur commise. (b) Temps de calcul total en fonction de l'erreur.

FIGURE 39

Nous allons maintenant introduire des variables auxiliaires comme dans la section 6. Tout d'abord, on introduit $y = -\sigma(u)$. Alors, on obtient :

$$\begin{cases} y + \sigma(u) = 0, & \text{sur } \Omega_h^\Gamma, \\ \operatorname{div} y + u = f, & \end{cases} \quad (9.16)$$

Ensuite, en rappelant que $n = \frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi_h|}$, on introduit une fonction p telle que :

$$y \cdot \nabla \phi_h + p \phi_h = 0, \quad \text{sur } \Omega_h^\Gamma. \quad (9.17)$$

On peut introduire la formulation variationnelle en introduisant les nouvelles variables auxiliaires sous la même forme que dans la section 6. On obtient donc les formes :

$$\begin{aligned} a(u, y, p; v, z, q) = & \int_{\Omega_h} \sigma(u) : \gamma(v) + \int_{\Gamma_h} (y \cdot n) \cdot v \\ & + \gamma_{\operatorname{div}} \int_{\Omega_h^\Gamma} (\operatorname{div} y + u)(\operatorname{div} z + v) + \gamma_u \int_{\Omega_h^\Gamma} (y + \sigma(u)) \cdot (z + \sigma(v)) \\ & + \frac{\gamma_p}{h^2} \int_{\Omega_h^\Gamma} \left(y \cdot \nabla \phi_h + \frac{p \phi}{h} \right) \left(z \cdot \nabla \phi_h + \frac{q \phi}{h} \right) + \sigma_p h \int_{\Gamma_i} [\sigma(u) \cdot n] [\sigma(v) \cdot n] \end{aligned} \quad (9.18)$$

et :

$$l(v, z, q) = \int_{\Omega_h} f \cdot v + \gamma_{\operatorname{div}} \int_{\Omega_h^\Gamma} f \cdot (\operatorname{div} z + v). \quad (9.19)$$

Remarque 9.2. Ici, il est nécessaire de modifier légèrement les espaces définis à la section 6. En effet, les dimensions sont modifiées. On considère donc ici :

$$\begin{aligned} V_h^{(k)} &:= \left\{ v_h \in H^1(\Omega_h)^d : v_{h|T} \in \mathbb{P}^k(T)^d \quad \forall T \in \mathcal{T}_h \right\}, \\ Z_h^{(k)} &:= \left\{ z_h \in H^1(\Omega_h^\Gamma)^{d \times d} : z_{h|T} \in \mathbb{P}^k(T)^{d \times d} \quad \forall T \in \mathcal{T}_h^\Gamma \right\}, \\ Q_h^{(k)} &:= \left\{ q_h \in L^2(\Omega_h^\Gamma)^d : q_{h|T} \in \mathbb{P}^{k-1}(T)^d \quad \forall T \in \mathcal{T}_h^\Gamma \right\}, \\ W_h^{(k)} &:= V_h^{(k)} \times Z_h^{(k)} \times Q_h^{(k)}. \end{aligned}$$

9. 4. Conditions mixtes

We now consider the case of mixed conditions on the boundary $\Gamma = \Gamma_N \cup \Gamma_D$. Assuming one more time that \mathbf{u} can be extended from Ω to Ω_h as the solution of the governing equations, we introduce a new scheme, combining the Dual ϕ -FEM Dirichlet and the Neumann ϕ -FEM schemes.

As we saw before, we denote by Ω_h^Γ the domain covered by the mesh \mathcal{T}_h^Γ . We need to introduce two new meshes : $\mathcal{T}_h^{\Gamma_N}$ and $\mathcal{T}_h^{\Gamma_D}$ for the Neumann and the Dirichlet parts of the boundary. Then, we introduce $\Omega_h^{\Gamma_N}$ and $\Omega_h^{\Gamma_D}$ the domains covered by $\mathcal{T}_h^{\Gamma_N}$ and $\mathcal{T}_h^{\Gamma_D}$.

We then get the following scheme : find $\mathbf{u}_h \in V_h$, $\mathbf{y}_h \in Z_h$ and $\mathbf{p}_h \in Q_h$ such that

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_h} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_h) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_h) + \int_{\Gamma_{h,N}} (\mathbf{y}_h \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{v}_h - \int_{\Gamma_{h,D}} (\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_h) \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{v}_h + \gamma_{div} \int_{\Omega_h^{\Gamma_N}} \operatorname{div} \mathbf{y}_h \cdot \operatorname{div} \mathbf{z}_h \\ & + \gamma_u \int_{\Omega_h^{\Gamma_N}} (\mathbf{y}_h + \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_h)) \cdot (\mathbf{z}_h + \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{v}_h)) + \frac{\gamma_p}{h^2} \int_{\Omega_h^{\Gamma_N}} (\mathbf{y}_h \cdot \nabla \phi_h + \mathbf{p}_h \phi_h) (\mathbf{z}_h \cdot \nabla \phi_h + \mathbf{q}_h \phi_h) \\ & + \frac{\gamma}{h^2} \int_{\Omega_h^{\Gamma_D}} (\mathbf{u}_h - \phi_h \mathbf{p}_h) \cdot (\mathbf{v}_h - \phi_h \mathbf{q}_h) + G_h^{lhs}(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) \\ & = \int_{\Omega_h} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}_h + \int_{\Omega_h^{\Gamma_N}} \mathbf{f} \cdot \operatorname{div} \mathbf{z}_h + \frac{\gamma}{h^2} \int_{\Omega_h^{\Gamma_D}} \mathbf{u}_h^g \cdot (v_h - \phi_h q_h) \\ & - \frac{\gamma_p}{h^2} \int_{\Omega_h^{\Gamma_N}} \mathbf{g} \cdot |\nabla \phi_h| (\mathbf{z}_h \cdot \nabla \phi_h + \mathbf{q}_h \phi_h) + G_h^{rhs}(v_h), \quad \forall \mathbf{v}_h \text{ on } \Omega_h, \mathbf{z}_h \text{ on } \Omega_h^\Gamma, q_h \text{ on } \Omega_h^\Gamma, \end{aligned} \quad (9.20)$$

where G_h^{lhs} and G_h^{rhs} stand for :

$$G_h^{lhs}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := \sigma h \sum_{E \in \mathcal{F}_h^\Gamma} \int_E [\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n}] \cdot [\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{n}] + \sigma h^2 \int_{\Omega_h^{\Gamma_D}} (\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})) \cdot (\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{v}))$$

and

$$G_h^{rhs}(\mathbf{v}) := -\sigma h^2 \int_{\Omega_h^{\Gamma_D}} f \cdot (\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{v})).$$

Now that we have introduced the method, we are going to present some numerical results. With these results, our purpose is to compare the ϕ -FEM and a standard finite element method.

Test case Let \mathcal{O} be the square $[0, 1] \times [0, 1]$ and $\mathcal{T}_h^\mathcal{O}$ a uniform mesh on \mathcal{O} . Then, let Ω be the circle centered at the point $(0.5, 0.5)$ of radius $\frac{\sqrt{2}}{4}$. Hence, the level-sets function ϕ is given by $\phi(x, y) = \frac{-1}{8} + (x - 0.5)^2 + (y - 0.5)^2$. Finally, we choose as exact solution :

$$\mathbf{u}_{ex} = (\sin(x) \times \exp(y), \sin(y) \times \exp(x))$$

and boundary conditions :

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^g &= \mathbf{u}_{ex} \times (1 + \phi), \quad \text{on } \Omega_h^{\Gamma_D} = \Omega_h^\Gamma \cap \{x \geq 0.5\} \\ \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} &= \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_{ex}) \times \frac{\nabla \phi}{\|\nabla \phi\|} + \mathbf{u}_{ex} \times \phi, \quad \text{on } \Omega_h^{\Gamma_N} = \Omega_h^\Gamma \cap \{x < 0.5\}. \end{aligned}$$

where we used $\mathbf{u}_{ex} \times \phi$ to add a little perturbation to the exact solution on the boundaries. Before presenting numerical results, we illustrate the described situation. We thus compare on the figure 40 the two considered domains, used for the ϕ -FEM and the standard FEM,

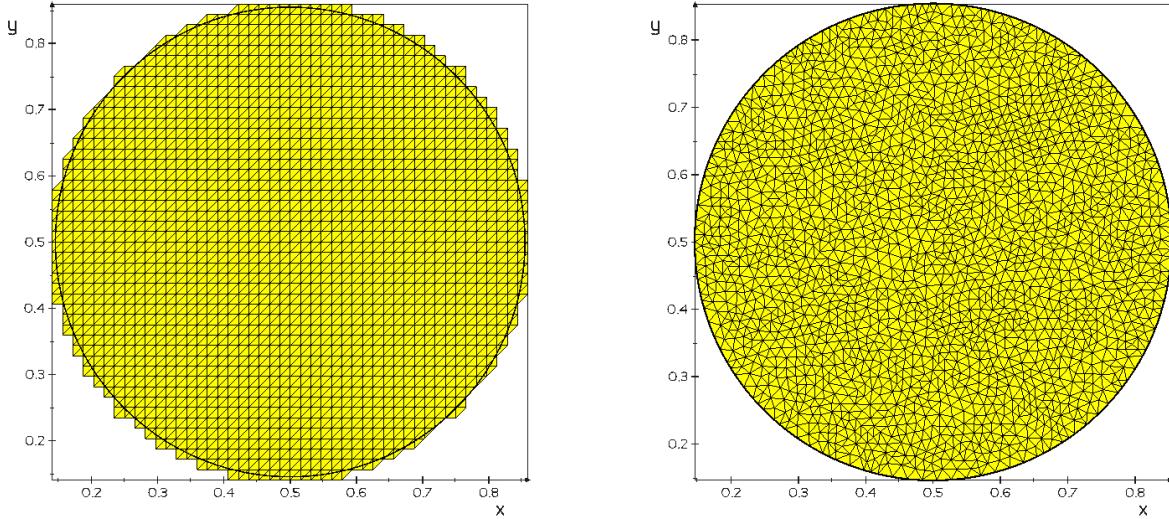


FIGURE 40 – Left : mesh built using the level-set function ϕ . Right : mesh built using the circle mesh creating function from *mshr*.

for the same value of h . We first illustrate the numerical convergence order for L^2 and H^1 norms. We see on figure 41 that the method is following theoretical convergence for these two norms. In the case of \mathbb{P}^1 -Lagrange polynomials, the ϕ -FEM errors are a little higher than the standard FEM errors. We also use \mathbb{P}^2 -Lagrange polynomials to compare the two methods and we see this time that there is a gap between the ϕ -FEM and the standard FEM errors.

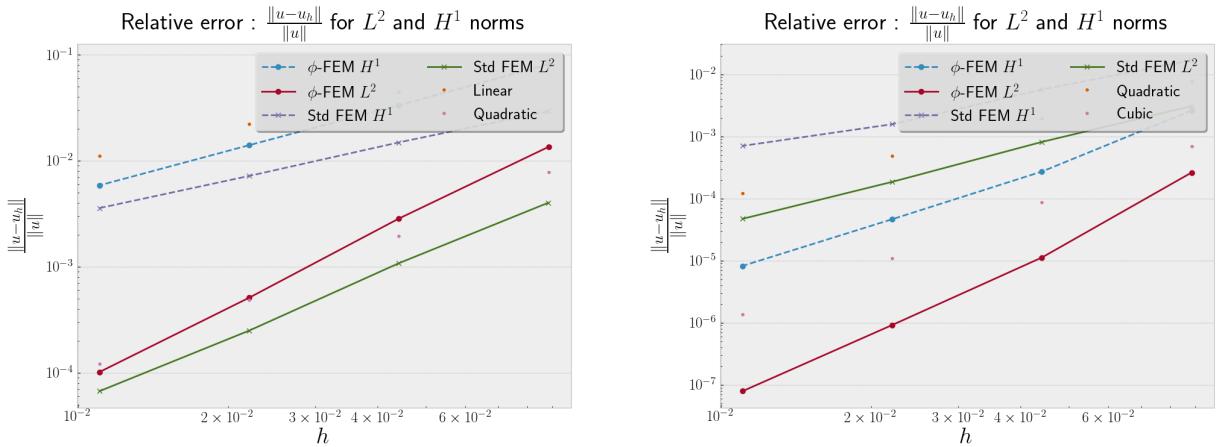


FIGURE 41 – Left : L^2 and H^1 errors of the two methods using \mathbb{P}^1 -Lagrange polynomials. Right : L^2 and H^1 errors of the two methods using \mathbb{P}^2 -Lagrange polynomials.

We also represent the total computing time, considering the assembly time of the FE matrix and the resolution of the FE system, in relation with the L^2 error on the figure 42.

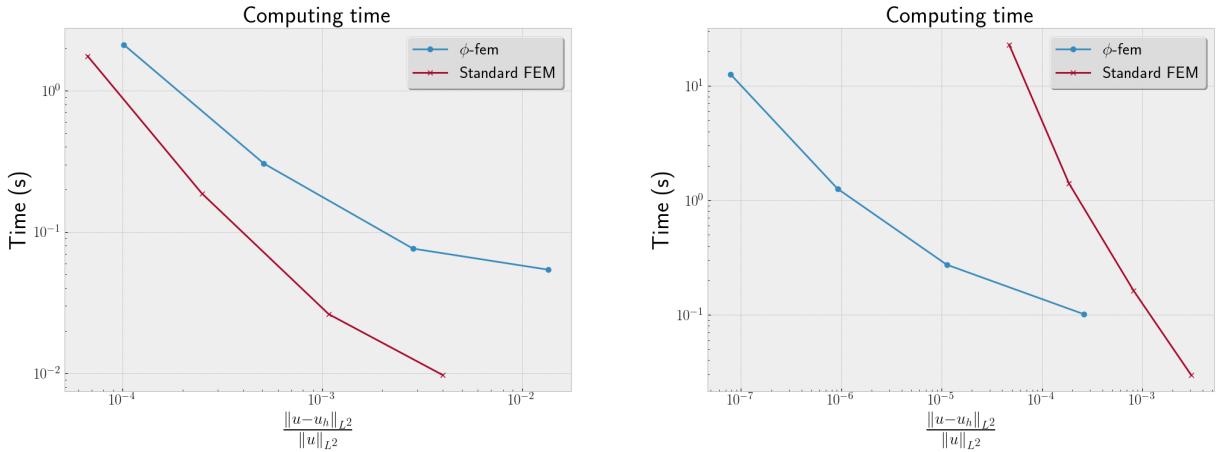


FIGURE 42 – Left : Total computing time of the methods in relation with L^2 errors using \mathbb{P}^1 -Lagrange polynoms. Right : Total computing time of the methods in relation with L^2 errors using \mathbb{P}^2 -Lagrange polynoms.

10 La ϕ -FEM pour des problèmes avec interface

We now consider the case of interfaces problems. To do this, we take a domain Ω divided in two subdomains Ω_1 and Ω_2 delimited by a boundary Γ , as illustrated on 43. We choose to solve the following problem

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(k_i \nabla u_i) = f, & \text{on } \Omega_i, i = 1, 2 \\ u_i = u_D, & \text{on } \partial\Omega \end{cases}, \quad (10.1)$$

with $k_1 = k_2 = 1$ on Ω in a first time, that is equivalent to :

$$\begin{cases} -k_i \Delta u_i = f, & \text{on } \Omega_i \\ u_i = u_D, & \text{on } \partial\Omega \\ u_1 = u_2, & \text{on } \Gamma \\ k_1 \partial_n u_1 = k_2 \partial_n u_2, & \text{on } \Gamma \end{cases}. \quad (10.2)$$

We then consider $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$, with Ω_1 and Ω_2 such as :

$$\Omega_1 = \{\phi > 0\} \quad \Omega_2 = \{\phi < 0\} \quad \Gamma = \{\phi = 0\}.$$

We denote by $V_{1,h}^{(k)}$ and $V_{2,h}^{(k)}$:

$$V_{i,h}^{(k)} := \left\{ v_h \in H^1(\Omega_{i,h}) : v_{h|T} \in \mathbb{P}^k(T) \quad \forall T \in \mathcal{T}_h \right\}.$$

Using the same idea as in the Neumann case, we introduce some auxiliary functions $y_1 \in Z_h^{(k)}$, $y_2 \in Z_h^{(k)}$, $p \in Q_h^{(k)}$, and $P \in Q_h^{(k)}$ such that :

$$y_i = -k_i \nabla u_i, \quad \text{on } \Omega_h^\Gamma, \quad (10.3)$$

$$u_1 - u_2 + p\phi = 0, \quad \text{on } \Omega_h^\Gamma, \quad (10.4)$$

$$k_1 y_1 \cdot \nabla \phi - k_2 y_2 \cdot \nabla \phi + P\phi = 0, \quad \text{on } \Omega_h^\Gamma, \quad (10.5)$$

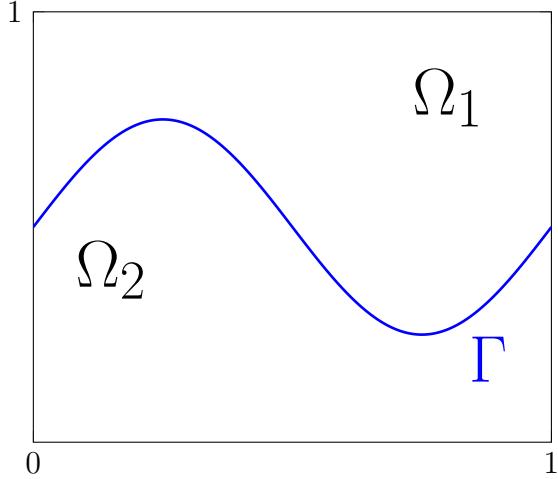


FIGURE 43 – Illustration of the situation.

were Ω_h^Γ is the strip of cells containing Γ_h .

We finally denote by $W_h^{(k)} = V_{1,h}^{(k)} \times V_{2,h}^{(k)} \times Z_h^{(k)} \times Z_h^{(k)} \times Q_h^{(k)} \times Q_h^{(k)}$.

We thus consider the following scheme : find $(u_1, u_2, y_1, y_2, p, P) \in W_h^{(k)}$, such that

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega_{i,h}} k_i \nabla u_i \nabla v_i + \int_{\Gamma_{1,h}} (y_1 \cdot n_1) \cdot v_1 + \int_{\Gamma_{2,h}} (y_2 \cdot n_2) \cdot v_2 + \sum_{i=1}^2 \gamma_{div} \int_{\Omega_h^\Gamma} \operatorname{div} y_i \operatorname{div} z_i \\
& + \frac{1}{h^2} \int_{\Omega_h^\Gamma} \left(u_1 - u_2 - \frac{1}{h} p \phi \right) \left(v_1 - v_2 - \frac{1}{h} q \phi \right) + \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega_h^\Gamma} (k_i \nabla u_i + y_i) (k_i \nabla v_i + z_i) \\
& + \frac{1}{h^2} \int_{\Omega_h^\Gamma} \left(y_1 \cdot \nabla \phi - y_2 \cdot \nabla \phi + \frac{1}{h} P \phi \right) \left(z_1 \cdot \nabla \phi - z_2 \cdot \nabla \phi + \frac{1}{h} Q \phi \right) \\
& = \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega_{i,h}} f v_i + \sum_{i=1}^2 \gamma_{div} \int_{\Omega_h^\Gamma} f \operatorname{div} z_i, \quad \forall \quad (v_1, v_2, z_1, z_2, q, Q) \in W_h^{(k)}. \quad (10.6)
\end{aligned}$$

Conclusion

Références

- [1] Michel Duprez and Alexei Lozinski. ϕ -FEM : a finite element method on domains defined by level-sets. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 2020.
- [2] S. Brenner and L. Scott. The mathematical theory of finite element methods. 15(3) :108–109, 2008.
- [3] Michel Duprez, Vanessa Lleras, and Alexei Lozinski. A new ϕ -FEM approach for problems with natural boundary conditions. working paper or preprint, March 2020.
- [4] André Fortin and André Garon. Les éléments finis : de la théorie à la pratique. https://giref.ulaval.ca/afortin/elements_finis.pdf, 1999.
- [5] Hans Petter Langtangen and Anders Logg. *Solving PDEs in Python*. Springer, 2017.
- [6] Anders Logg, Kent-Andre Mardal, Garth N. Wells, et al. *Automated Solution of Differential Equations by the Finite Element Method*. Springer, 2012.
- [7] Grégoire Allaire and François Alouges. Analyse variationnelle des équations aux dérivées partielles, polycopié du cours map 431. <http://www.cmap.polytechnique.fr/~alouges/polycopie2.pdf>, 2015-2016.
- [8] Grégoire Allaire. *Analyse numérique et optimisation*. 2012.