



MIMESIS



# Développement de Méthodes Éléments Finis non-conformes adaptées à la chirurgie assistée par ordinateur

Killian Vuillemot

*Encadrants : Michel Duprez et Stéphane Cotin*

*Enseignant référent : Franz Chouly*

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Présentation de la méthode des éléments finis</b>	<b>5</b>
1. 1.	Problème considéré . . . . .	5
1. 2.	Description de la méthode . . . . .	5
1. 3.	Convergence de la méthode . . . . .	10
<b>2</b>	<b>Introduction à l'élasticité linéaire</b>	<b>14</b>
<b>3</b>	<b>La méthode <math>\phi</math>-FEM pour le problème de Poisson-Dirichlet</b>	<b>15</b>
3. 1.	Définitions des espaces . . . . .	16
3. 2.	Description de la méthode . . . . .	17
3. 3.	Exemple pratique . . . . .	18
3. 4.	Convergence théorique . . . . .	19
3. 5.	Ordre de convergence numérique . . . . .	24
3. 6.	Comparaison avec une FEM standard . . . . .	25
3. 7.	Problème non homogène . . . . .	25
<b>4</b>	<b>La méthode <math>\phi</math>-FEM pour des conditions de Neumann</b>	<b>27</b>
4. 1.	Description de la méthode . . . . .	28
4. 2.	Comparaison avec une FEM standard . . . . .	30
<b>5</b>	<b>La <math>\phi</math>-FEM pour des conditions Dirichlet-Neumann</b>	<b>32</b>
5. 1.	Présentation de la première méthode . . . . .	32
5. 2.	Convergence et comparaison avec une FEM standard . . . . .	33
5. 3.	Nouvelle version de la méthode . . . . .	34
5. 4.	Nouveaux résultats . . . . .	36
5. 5.	Remarques et conclusions . . . . .	37
<b>6</b>	<b>Création de <math>\phi</math></b>	<b>38</b>
6. 1.	Méthode de construction . . . . .	38
6. 2.	Application avec la méthode $\phi$ -FEM . . . . .	42
6. 3.	Adaptation au cadre tridimensionnel . . . . .	44
<b>7</b>	<b>La <math>\phi</math>-FEM en élasticité linéaire</b>	<b>45</b>
7. 1.	Conditions de Dirichlet homogènes . . . . .	45
7. 2.	Conditions de Dirichlet non homogènes . . . . .	46
7. 3.	Conditions de Neumann . . . . .	48

<b>8</b>	<b>Some discussions about linear elasticity problems</b>	<b>49</b>
8. 1.	Mixed conditions . . . . .	49
8. 2.	Linear elasticity with multiple materials . . . . .	55
8. 3.	Fracture for the linear elasticity . . . . .	59

# Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier M. Duprez pour son accompagnement, sa gentillesse et son aide tout au long de ce stage. J'ai appris énormément à ses côtés, autant sur le plan théorique que sur le plan pratique. Grâce à lui, j'ai pu découvrir plus en détails la recherche mathématique, un domaine aussi vaste qu'intéressant, dans lequel je serais ravi de continuer à travailler.

Je tiens également à remercier M. Chouly pour son accompagnement dans la recherche de ce stage. Je le remercie pour m'avoir fait prendre conscience de mes capacités à évoluer dans le monde de la recherche mathématique.

Enfin, je remercie l'intégralité de l'équipe MIMESIS, pour son accueil lors de mes brefs séjours au laboratoire.

# Introduction

L'idée de ce stage, réalisé au sein de l'équipe MIMESIS<sup>1</sup>, était de participer au développement d'une nouvelle méthode éléments finis appliquée à des modèles élastiques. Les modèles éléments finis sont en effet de plus en plus utilisés dans la chirurgie afin de simuler les mécanismes des tissus mous et élastiques du corps humain (par exemple le foie). Les modèles existants sont des outils très importants dans ce domaine, qui permettent de développer de nouveaux dispositifs médicaux et d'améliorer des stratégies de planification et d'assistance chirurgicale. L'idée est donc que ces méthodes puissent être utilisées par des logiciels de simulation en temps réel, en l'occurrence, SOFA<sup>2</sup> [7].

Les deux premières parties de ce rapport seront consacrées à une présentation de la méthode des éléments finis (MEF ou FEM) puis à une brève introduction à la notion d'élasticité linéaire. Ces deux parties ont été rédigées en grande partie à l'aide de [8], [2] et [1].

L'un des objectifs de ce stage était de découvrir une nouvelle méthode de résolution de problèmes éléments finis, la méthode  $\phi$ -FEM et de développer différentes variantes de cette méthodes. L'étude de  $\phi$ -FEM sera décomposée en différentes parties : une description de la méthode définie dans [6] (pour des conditions de Dirichlet) ainsi qu'une présentation de la convergence théorique et pratique de cette méthode. Nous verrons ensuite la méthode présentée en [5] (pour des conditions de Neumann). Puis nous aborderons une partie présentant une nouvelle méthode permettant de combiner les deux parties précédentes pour le problème de Poisson.

Enfin, nous nous intéresserons à deux autres points : la méthode de création de la fonction  $\phi$  pour tout problème (nous reviendrons plus tard sur la définition exacte de cette fonction) et l'adaptation de  $\phi$ -FEM à des problèmes d'élasticité linéaire.

Durant ce stage, j'ai également eu le plaisir de participer à la rédaction d'un chapitre portant sur  $\phi$ -FEM dans un ouvrage rassemblant différentes méthodes éléments finis. La dernière section est issue directement de la partie que j'ai écrite dans ce chapitre et est rédigée en anglais.

Les différentes méthodes présentées dans ce rapport ont été implémentées sous python avec les packages *FEniCS*<sup>3</sup> [10], [9] et *multiPhenics*<sup>4</sup> [3]. La plupart des programmes utilisés sont disponibles sur GitHub<sup>5</sup>.

---

1. <https://mimesis.inria.fr/>

2. <https://www.sofa-framework.org>

3. <https://fenicsproject.org/>

4. <https://mathlab.sissa.it/multiphenics>

5. [https://github.com/KVuillemot/Stage\\_M1](https://github.com/KVuillemot/Stage_M1)

# 1 Présentation de la méthode des éléments finis

## 1. 1. Problème considéré

Présentons tout d'abord le problème que nous considérerons dans cette partie. Nous travaillerons sur le problème de Poisson avec une condition de bord de type Dirichlet homogène

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{sur } \Omega \\ u = u_D & \text{sur } \partial\Omega = \Gamma_D \end{cases} \quad (1.1)$$

où  $f$  est une fonction connue (on considérera  $f \in L^2(\Omega)$ ),  $\Delta$  est l'opérateur Laplacien,  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  ouvert, avec  $N = 1, 2, 3$  et  $\partial\Omega$  est la frontière du domaine  $\Omega$ .

*Remarque 1.1.* Dans un premier temps, on se place dans le cadre d'une condition homogène, c'est-à-dire que l'on considérera  $u_D = 0$  sur le bord  $\Gamma_D$ .

Nous verrons dans cette première partie comment trouver une solution à ce problème et comment s'assurer de l'existence d'une telle solution.

## 1. 2. Description de la méthode

L'idée générale de la méthode des éléments finis est d'obtenir un problème discrétisé qu'il sera possible de résoudre numériquement et dont la solution approche la solution exacte de (1.1). Pour cela, nous avons tout d'abord besoin d'introduire quelques notions essentielles.

Dans les définitions suivantes,  $\Omega$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^N$ , de frontière  $\Gamma$ , considérée suffisamment régulière.

**Définition 1.1** (Espace fonctionnel linéaire). Un espace fonctionnel linéaire est un ensemble  $E$  de fonctions de  $\Omega$  vérifiant les deux propriétés suivantes :

- i. Soit  $u \in E$  et soit  $\alpha \in \mathbb{R}$ , alors  $\alpha u \in E$  ;
- ii. Soient  $u, v \in E$  alors  $u + v \in E$ .

**Définition 1.2** (Espace  $L^2(\Omega)$ ). L'espace  $L^2(\Omega)$  est défini par :

$$L^2(\Omega) := \left\{ u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid \int_{\Omega} u^2 dv < +\infty \right\} .$$

Autrement dit, il s'agit de l'espace des fonctions de carré intégrable.

*Remarque 1.2.* L'espace  $L^2(\Omega)$  est un espace fonctionnel linéaire.

**Définition 1.3** (Espace de Hilbert). Un espace fonctionnel complet muni d'un produit scalaire est un espace de Hilbert.

On suppose maintenant  $\Omega$  également borné.

**Définition 1.4** (Espace  $H^1(\Omega)$ ). L'espace fonctionnel linéaire  $H^1(\Omega)$  est défini par :

$$H^1(\Omega) := \left\{ u \in L^2(\Omega) \mid \nabla u \in L^2(\Omega)^N \right\}$$

muni du produit scalaire  $\langle u, v \rangle_{H^1(\Omega)}$ , défini par :

$$\langle u, v \rangle_{H^1(\Omega)} = \int_{\Omega} uv + \nabla u \cdot \nabla v, \forall u, v \in H^1(\Omega) .$$

Comme nous l'avons vu, le problème (1.1) est un problème à conditions de Dirichlet homogène. On peut ainsi définir l'espace  $H_0^1(\Omega)$  qui nous sera utile par la suite.

**Définition 1.5** (Espace  $H_0^1(\Omega)$ ). L'espace  $H_0^1(\Omega)$  est défini comme la fermeture (pour la norme  $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$  associée au produit scalaire  $((\cdot, \cdot))_{H^1(\Omega)}$ ) de l'espace des fonctions infiniment différentiables sur  $\Omega$  à support compact et inclus dans  $\Omega$ .

On peut écrire

$$H_0^1(\Omega) = \left\{ u \in H^1(\Omega) \mid u = 0 \text{ sur } \Gamma = \partial\Omega \right\}.$$

*Remarque 1.3.* On peut également définir sur le même principe les espaces  $H^2(\Omega)$  et  $H_0^2(\Omega)$  en ajoutant des conditions respectivement sur les dérivées secondes et sur la dérivée normale, donnée par  $\nabla u \cdot n$  où  $n$  est le vecteur normal (unitaire extérieur) au domaine, en chaque point de la frontière.

Maintenant que ces différentes notions sont introduites, nous allons pouvoir expliciter la formulation variationnelle associée au problème (1.1).

Pour déterminer la formulation variationnelle, nous utiliserons une fonction dite "test"  $w$  et une intégration par parties sur  $\Omega$  à l'aide des formules de Green. Le but est ici de se ramener à un problème de la forme suivante.

**Définition 1.6** (Formulation variationnelle).

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in H_0^1(\Omega) \text{ telle que} \\ a(u, w) = l(w) \quad \forall w \in H_0^1(\Omega) \end{cases} \quad (1.2)$$

avec  $a$  une forme bilinéaire et  $l$  une forme linéaire.

En pratique, on obtiendra les étapes suivantes :

- 1) Problème initial;
- 2) Multiplication par une fonction test  $w$  (ici dans  $H_0^1(\Omega)$ ) et intégration sur  $\Omega$ ;
- 3) "Intégration par parties" à l'aide des formules de Green;
- 4) Détermination des formes linéaires et bilinéaires associées au problème initial.

**Application pratique :**

- 1) On considère le problème (1.1), trouver  $u$  telle que

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{sur } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega = \Gamma_D. \end{cases}$$

- 2) Soit  $w \in H_0^1(\Omega)$ , on obtient le problème

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \text{ telle que :} \\ \int_{\Omega} -\Delta u \cdot w dv = \int_{\Omega} f w dv, \quad \forall w \in H_0^1(\Omega). \end{cases} \quad (1.3)$$

- 3) On utilise une formule de Green, et on obtient

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \text{ telle que :} \\ \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla w dv - \underbrace{\int_{\Gamma} \nabla u \cdot n \cdot w dv}_{=0 \text{ car } w \in H_0^1(\Omega)} = \int_{\Omega} f w dv, \quad \forall w \in H_0^1(\Omega). \end{cases} \quad (1.4)$$

4) On se retrouve finalement avec le problème

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in H_0^1(\Omega) \text{ telle que :} \\ a(u, w) = l(w) \quad \forall w \in H_0^1(\Omega) \end{cases} \quad (1.5)$$

avec

$$a(u, w) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla w \, dv \quad \text{et} \quad l(w) = \int_{\Omega} f w \, dv.$$

Maintenant que nous avons obtenu la formulation variationnelle, énonçons le résultat d'existence suivant (voir [4] pages 62-63 pour une démonstration) :

**Théorème 1.1** (Lax-Milgram). *Soit  $H$  un espace de Hilbert. Soient  $a$  une forme bilinéaire continue et coercive sur  $H \times H$  et  $l$  une forme linéaire continue sur  $H$ . Alors il existe une unique solution  $u$  au problème variationnel :*

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in H \text{ telle que} \\ a(u, w) = l(w) \quad \forall w \in H. \end{cases} \quad (1.6)$$

*Rappel* (continuité et coercivité). Une forme :

- linéaire  $l$  sur un espace de Hilbert  $H$  est dite continue s'il existe une constante  $C$  telle que :

$$|l(w)| \leq C \|w\|_H \quad \forall w \in H.$$

- bilinéaire sur un espace de Hilbert  $H$  est continue s'il existe une constante  $C$  telle que :

$$|a(u, v)| \leq C \|u\|_H \|v\|_H, \quad \forall u, v \in H.$$

- bilinéaire sur un espace de Hilbert  $H \times H$  est dite coercive s'il existe une constante  $\alpha > 0$  telle que :

$$a(u, u) \geq \alpha \|u\|_H^2 \quad \forall u \in H.$$

Les formes linéaires et bilinéaires de l'équation (1.5) vérifiant les hypothèses du théorème de Lax-Milgram, on en conclue qu'il existe une unique solution au problème (1.5). La solution du problème (1.1) est solution du problème (1.5), on en conclue que (1.1) et (1.5) sont équivalents.

Le but va maintenant être de construire un espace discret  $V_h \subset V$  de dimension finie. L'espace discret sera ici construit sur un maillage triangulaire du domaine (voir figure 1). On obtient alors un nouveau problème variationnel sur  $V_h \subset V$  :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u_h \in V_h \text{ telle que} \\ a(u_h, w_h) = l(w_h) \quad \forall w_h \in V_h. \end{cases} \quad (1.7)$$



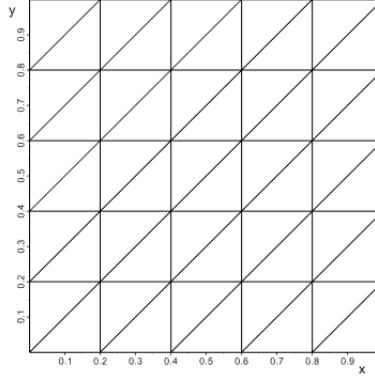


FIGURE 1 – Exemple de maillage triangulaire sur le carré unité.

Définissons plus précisément cet espace  $V_h$ . On se place maintenant dans un espace de dimension 2, c'est-à-dire  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ .

**Définition 1.7.** Soit  $\mathcal{O}$  un ouvert de  $\mathbb{R}^2$ . On définit l'espace des polynômes de degré 1 sur  $\mathcal{O}$  :

$$\mathbb{P}^1(\mathcal{O}) = \{p|_{\mathcal{O}} \mid \exists a, b, c \in \mathbb{C}, \forall (x, y) \in \mathcal{O}, p(x, y) = ax + by + c\}.$$

Nous pouvons maintenant définir l'espace  $V_h$  pour maillage triangulaire de  $\Omega$  que l'on notera  $\mathcal{T}_h$  :

**Définition 1.8.** L'espace  $V_h$  des fonction  $\mathbb{P}^1$ -Lagrange est défini par :

$$V_h = \left\{ v \in \mathcal{C}^0(\overline{\Omega}) \mid v|_T \in \mathbb{P}^1(T) \quad \forall T \in \mathcal{T}_h \right\}.$$

L'espace  $V_h$  est donc un espace de fonctions linéaires sur chaque triangle de  $\mathcal{T}_h$ .

*Remarque 1.4.* Sur le même principe, on peut introduire l'espace  $\mathbb{P}^2(\mathcal{O})$ , l'espace des polynômes de degré  $k$  sur  $\mathcal{O}$ . En pratique, on utilise surtout les espaces  $\mathbb{P}^1$  et  $\mathbb{P}^2$ .

*Remarque 1.5.* Il est important de noter que le problème admet toujours une unique solution. En effet,  $V_h$  étant un sous-espace de Hilbert de  $V$ , les différentes hypothèses du théorème de Lax-Milgram sont toujours vérifiées sur  $V_h$ .

Soit  $N_S = \text{card } \mathcal{T}_h$ , le nombre de nœuds du maillage. On peut introduire une base de l'espace  $V_h$ , de dimension  $N_S$ . Cette base est donnée par  $(\phi_i)_{i=1, \dots, N_S}$  où les  $\phi_i$  sont définies par :

$$\forall i, j = 1, \dots, N_S, \quad \phi_i(s_j) = \delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

avec  $s_j$  les sommets de  $\mathcal{T}_h$ .

On représente à la figure 2 une fonction de forme  $\mathbb{P}^1$ , dite "hat-function", en dimension 2.

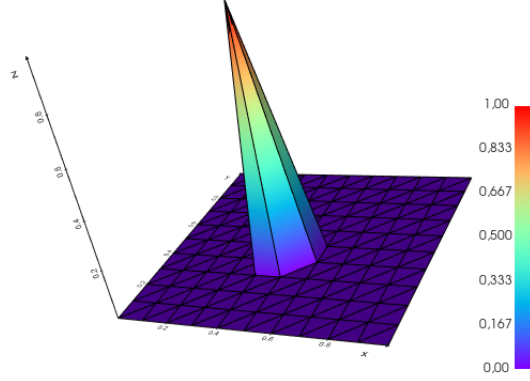


FIGURE 2 – Fonction de forme  $\mathbb{P}^1$  en dimension 2.

Maintenant que nous avons une base de l'espace  $V_h$ , nous allons pouvoir déterminer la forme finale du problème, c'est-à-dire le système linéaire à résoudre. En effet, les fonctions  $u_h$  et  $w_h$  vivant dans l'espace  $V_h$ , il est maintenant possible de les exprimer grâce à la base  $(\phi_i)_{i=1,\dots,N_S}$ . On exprime donc la fonction  $u_h$  dans cette base, en utilisant les valeurs de  $u_h$  sur chacun des sommets du maillage et on fait une interpolation de  $u_h$  :

$$u_h = \sum_{j=1}^{N_S} u_h(s_j) \phi_j.$$

De plus,  $w_h$  devant appartenir à l'espace  $V_h$ , on peut en particulier prendre  $w_h = \phi_i$ . On peut alors transformer le problème variationnel (1.7) et obtenir le problème suivant :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u_h \in V_h \text{ telle que} \\ \sum_{j=1}^{N_S} a(\phi_j, \phi_i) u_h(s_j) = l(\phi_i) \quad \forall i = 1, \dots, N_S. \end{cases} \quad (1.8)$$

Ce problème peut finalement s'écrire :

$$\text{Trouver } U_h \in \mathbb{R}^{N_S} \text{ tel que : } A_h U_h = B_h, \quad (1.9)$$

avec :

$$\begin{cases} A_h &= (a(\phi_j, \phi_i))_{i,j=1,\dots,N_S} \\ U_h &= (u_j)_{j=1,\dots,N_S} = (u_h(s_j))_{j=1,\dots,N_S} \\ B_h &= (l(\phi_i))_{i=1,\dots,N_S}. \end{cases}$$

Maintenant que nous avons obtenu cette formulation, nous allons pouvoir étudier la convergence de cette méthode.

### 1. 3. Convergence de la méthode

Commençons cette section avec un résultat primordial, le lemme de C  a.

**Lemme 1.1.** *Soit  $u$  la solution exacte (i.e. la solution de (1.1)) et soit  $u_h$  la solution approchée (i.e. la solution de (1.7)). Alors,*

$$\|u - u_h\|_V \leq \frac{M}{\alpha} \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_V, \quad (1.10)$$

avec  $M$  la constante de continuité de l'application bilinéaire  $a(\cdot, \cdot)$  et  $\alpha$  sa constante de coercivité.

*Démonstration.* Soit  $v_h \in V_h$  et soient  $u$  et  $u_h$  vérifiant les hypothèses du lemme. Comme  $V_h$  est un espace fonctionnel linéaire,  $u_h - v_h \in V_h$ .

Alors, par bilinéarité de  $a$  :

$$\begin{aligned} a(u - u_h, u - u_h) &= a(u - u_h, u - v_h + v_h - u_h) \\ &= a(u - u_h, u - v_h) + a(u - u_h, v_h - u_h). \end{aligned}$$

Or,  $v_h - u_h \in V_h$ , on pose alors  $w_h = v_h - u_h$ . Comme  $u$  et  $u_h$  sont respectivement solution exacte et solution approchée, elles vérifient la propriété d'orthogonalité de Galerkin :

$$\begin{aligned} a(u - u_h, w_h) &= a(u, w_h) - a(u_h, w_h) \\ &= l(w_h) - l(w_h) \\ &= 0. \end{aligned}$$

On en déduit directement :

$$a(u - u_h, u - u_h) = a(u - u_h, u - v_h) \quad \forall v_h \in V_h.$$

Alors, par continuité et coercivité de  $a$ , on obtient

$$\begin{aligned} \alpha \|u - u_h\|_V^2 &\leq M \|u - u_h\|_V \|u - v_h\|_V && \forall v_h \in V_h \\ \implies \|u - u_h\|_V &\leq \frac{M}{\alpha} \|u - v_h\|_V && \forall v_h \in V_h \\ \implies \|u - u_h\|_V &\leq \frac{M}{\alpha} \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_V. \end{aligned}$$

□

*Remarque 1.6.* Ici, lorsque l'on parlera de nœuds du maillage, on parlera des nœuds de calcul, c'est-à-dire les nœuds géométriques (sommets des éléments) et des points "ajoutés" par le degré  $k$  de l'espace  $\mathbb{P}^k$ . Les différents nœuds seront donc les sommets pour une interpolation linéaire ( $\mathbb{P}^1$ ), les sommets ainsi que les points milieux pour une interpolation quadratique ( $\mathbb{P}^2$ ), etc... On notera  $(n_i)_{i=1, \dots, N_{dl}}$  la famille des nœuds du maillage de  $\Omega$ .

**Définition 1.9** (Interpolée). Soit  $(n_i)_{i=1, \dots, N_{dl}}$  la famille des nœuds du maillage et soit  $(\phi_i)_{i=1, \dots, N_{dl}}$  la base de  $V_h$  donnée par les fonctions de forme. On définit l'interpolée sur  $H^{k+1}(\Omega)$  d'une fonction continue  $v$  par :

$$\Pi_h v = \sum_{i=1}^{N_{dl}} v(n_i) \phi_i.$$

**Condition de Ciarlet.** Soit  $(\mathcal{T}_h)_{h>0}$  une suite de maillages de  $\Omega$ . Un maillage vérifiant la condition de Ciarlet est tel qu'il existe une constante  $c_0$ , telle que pour tout  $h > 0$  et pour tout élément  $K$  du maillage  $\mathcal{T}_h$  :

$$\frac{\text{diam}(K)}{\rho(K)} \leq c_0,$$

où  $\text{diam}(K) = \max_{x,y \in K} \|x - y\|$  et  $\rho(K) = \max_{B_r \subset K} 2r$ .

**Théorème 1.2** (Erreur d'interpolation). *Soit  $(\mathcal{T}_h)_{h>0}$  une suite de maillages de  $\Omega$  vérifiant la condition de Ciarlet et telle que la suite des  $h = \max_{K \in \mathcal{T}_h} \text{diam} K$  tende vers 0.*

*On suppose  $k + 1 > \frac{1}{2} \dim(\Omega)$ . Alors, pour toute fonction  $v$  de  $H^{k+1}(\Omega)$ , l'interpolée  $\Pi_h v$  est bien définie et il existe  $c_1$  telle que :*

$$\|v - \Pi_h v\|_{H^m(\Omega)} \leq c_1 h^{k+1-m} \|v\|_{H^{k+1}(\Omega)}.$$

*Remarque 1.7.* Un maillage vérifiant les hypothèses du théorème est dit régulier.

**Lemme 1.2.** *On suppose  $k + 1 > N/2$  et  $\text{diam}(K) \leq 1$ . Alors, il existe une constante  $c_2$  indépendante de  $K$  telle que, pour tout  $v \in H^{k+1}(K)$  :*

$$\|v - \Pi_h v\|_{H^m(K)} \leq c_2 \frac{\text{diam}(K)^{k+2-m}}{\rho(K)} |v|_{H^{k+1}(K)}. \quad (1.11)$$

*Démonstration du théorème 1.2.* Soit  $v \in H^{k+1}(\Omega)$ . Alors :

$$\begin{aligned} \|v - \Pi_h v\|_{H^m(\Omega)}^2 &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \|v - \Pi_K v\|_{H^m(K)}^2 \\ &\leq \sum_{K \in \mathcal{T}_h} c_2^2 \left( \frac{\text{diam}(K)^{k+2-m}}{\rho(K)} \right)^2 |v|_{H^{k+1}(K)}^2. \end{aligned}$$

Comme  $\mathcal{T}_h$  est supposé régulier, il existe  $c_0$  telle que  $c_0 \geq \frac{\text{diam}(K)}{\rho(K)}$  pour tout élément du maillage, alors :

$$\begin{aligned} \sum_{K \in \mathcal{T}_h} c_2^2 \left( \frac{\text{diam}(K)^{k+2-m}}{\rho(K)} \right)^2 |v|_{H^{k+1}(K)}^2 &\leq c_2^2 c_0^2 h^{2(k+1-m)} \sum_{K \in \mathcal{T}_h} |v|_{H^{k+1}(K)}^2 \\ &\leq c_1^2 h^{2(k+1-m)} \|v\|_{H^{k+1}(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

C'est-à-dire :

$$\|v - \Pi_h v\|_{H^m(\Omega)} \leq c_1 h^{k+1-m} \|v\|_{H^{k+1}(\Omega)}.$$

□

Nous allons maintenant énoncer le théorème permettant de déterminer l'ordre de convergence d'une méthode éléments finis. Ce théorème sera démontré puis illustré sur un exemple par la figure 3.

**Théorème 1.3** (Convergence). *Soit  $(\mathcal{T}_h)_{h>0}$  une suite de maillages réguliers de  $\Omega$ . Soit  $u$  la solution exacte du problème et  $u_h$  la solution approchée. On suppose que  $V_h$  est un sous-espace de  $H^m(\Omega)$ . Finalement, on suppose  $V_h$  tel que sa restriction à chaque élément du maillage contienne les polynômes de degré  $k$ . Alors la méthode converge :*

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|u - u_h\|_{H^m(\Omega)} = 0. \quad (1.12)$$

Si, de plus,  $u \in H^{k+1}(\Omega)$  et si  $k+1 > \frac{1}{2} \dim(\Omega)$ , il existe une constante  $C$  telle que :

$$\|u - u_h\|_{H^m(\Omega)} \leq Ch^{k+1-m} \|u\|_{H^{k+1}(\Omega)}. \quad (1.13)$$

*Remarque 1.8.* L'hypothèse formulée sur  $V_h$  dans l'énoncé du théorème revient à dire que  $u_h$  est la solution approchée obtenue avec la méthode des éléments finis  $\mathbb{P}^k$ .

*Démonstration du théorème 1.3.* Soit  $\mathcal{V} = \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ . Alors  $\mathcal{V}$  est dense dans  $H_0^1(\Omega)$  et  $\mathcal{V} \subset H^{k+1}(\Omega)$ . Il existe  $\kappa$  telle que :

$$\|v - \Pi_h v\|_{H^m(\Omega)} \leq \kappa h^{k+1-m} \|v\|_{H^{k+1}(\Omega)}, \quad \forall v \in \mathcal{V}.$$

On a donc :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|v - \Pi_h v\|_{H^m(\Omega)} = 0, \quad \forall v \in \mathcal{V}.$$

Finalement, on a :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|u - u_h\|_{H^m(\Omega)} = 0.$$

La convergence est donc démontrée. Reste maintenant à montrer l'estimation de l'erreur de convergence. Pour cela, on utilise le lemme de Céa (1.1) :

$$\|u - u_h\|_{H^m(\Omega)} \leq \frac{M}{\alpha} \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_{H^m(\Omega)}.$$

Si  $\Pi_h u \in H^m(\Omega)$  :

$$\begin{aligned} &\leq \frac{M}{\alpha} \|u - \Pi_h u\|_{H^m(\Omega)} \\ &\leq \frac{M}{\alpha} c_1 h^{k+1-m} \|u\|_{H^{k+1}(\Omega)}. \end{aligned}$$

On pose finalement  $C = \frac{M}{\alpha} c_1$  et on obtient le résultat souhaité.  $\square$

**Exemple 1.1.** On se place dans le cadre du problème (1.1) avec des conditions de Dirichlet non homogènes

$$\begin{cases} -\Delta u &= f \text{ sur } \Omega, \\ u &= u_D \text{ sur } \Gamma_D = \partial\Omega. \end{cases} \quad (1.14)$$

On pose ici  $u = \cos(x) \exp(y)$ . On calcule  $\Delta u = 0$  et on choisit de travailler sur le carré unité. On a donc le problème suivant :

$$\begin{cases} -\Delta u &= 0 \text{ sur } (0,1)^2, \\ u &= u_D \text{ sur } \Gamma_D = \partial\Omega, \end{cases}$$

avec  $u_D = \cos(x) \exp(y)$ . En utilisant deux méthodes différentes ( $\mathbb{P}^1$  et  $\mathbb{P}^2$ ), et en étudiant l'erreur en norme  $H^1$  et en norme  $L^2$ , on obtient la figure 3.

On retrouve donc bien les résultats théoriques. En effet, si l'on prend le cas de l'utilisation de la méthode des éléments finis  $\mathbb{P}^1$ , la théorie prévoit que l'on aura :

$$\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \leq Ch^1 \|u\|_{H^2(\Omega)}. \quad (1.15)$$

C'est-à-dire que pour une méthode éléments finis  $\mathbb{P}^1$  on aura une convergence linéaire pour la norme  $H^1$ . C'est bien ce que l'on voit sur la figure 3 : l'erreur suit en échelle logarithmique une droite de pente 1.

Prenons maintenant le cas d'une méthode éléments finis  $\mathbb{P}^2$  pour la norme  $L^2$ , c'est-à-dire la norme  $H^0$ . La théorie prévoit ici une convergence cubique, en effet, si l'on utilise les mêmes calculs que précédemment, on trouve :

$$\|u - u_h\|_{L^2(\Omega)} \leq Ch^3 \|u\|_{H^3(\Omega)}.$$

Encore une fois, la théorie se retrouve en pratique sur l'exemple, l'erreur suivant une droite de pente 3.

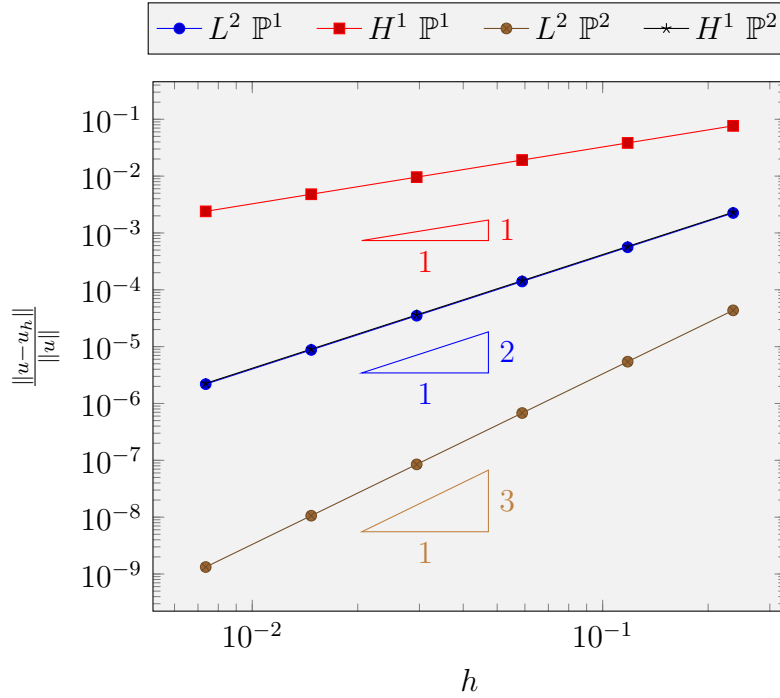


FIGURE 3 – Convergence de la méthode appliquée à l'exemple 1.1.

*Remarque 1.9.* On trouvera par la suite des conditions dites de Neumann de la forme  $\frac{\partial u}{\partial n} = g$  sur le bord. Ces conditions sont dites naturelles contrairement aux conditions de Dirichlet dites essentielles. La différence entre les conditions essentielles et les conditions naturelles est la suivante : lorsque l'on travaille avec des conditions de Dirichlet, la condition est imposée sur l'espace fonctionnel. Lors de l'imposition de conditions de Neumann, on ne modifie pas l'espace fonctionnel mais on modifie la formulation variationnelle et on obtient un terme de bord non nul. La forme linéaire est alors modifiée et est de la forme :

$$l(w) = \int_{\Omega} f w dv + \int_{\partial\Omega} g w ds.$$

*Remarque 1.10.* Il est également possible de combiner conditions de Dirichlet et conditions de Neumann. On construit ainsi une (ou plusieurs) frontière(s)  $\Gamma_D$  où l'on applique les conditions essentielles et  $\Gamma_N$  où l'on impose les conditions de Neumann.

On trouve aussi des conditions de Robin, telles que  $au + b\partial_n u = g$  sur la frontière, avec  $a, b$  et  $g$  des fonctions définies sur  $\partial\Omega$ .

## 2 Introduction à l'élasticité linéaire

Nous allons maintenant aborder le sujet de l'élasticité linéaire. La différence avec le cadre vu précédemment est que l'on cherchera une solution sous forme vectorielle : on veut déterminer le déplacement d'un point  $x$  selon chacun des axes de l'espace. L'idée est la suivante : on prend un point  $x = (x_1, x_2, x_3)$  de l'espace à 3 dimensions et on applique le vecteur force :

$$\mathbf{r}(x) = (r_1(x_1, x_2, x_3), r_2(x_1, x_2, x_3), r_3(x_1, x_2, x_3)).$$

On cherche alors à déterminer le déplacement  $u$  du point  $(x_1, x_2, x_3)$ . Pour cela, on introduit le tenseur  $\boldsymbol{\sigma}$ , symétrique appelé tenseur des contraintes (de Cauchy). On peut écrire les équations d'équilibre avec la notation tensorielle :

$$-\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{r}. \quad (2.1)$$

*Remarque 2.1.* Il est également possible d'écrire ces équations sans utiliser la notation tensorielle, cependant on obtient un système de 3 équations, moins lisible et plus lourd à écrire. De plus, on écrit également (pour des raisons de lisibilité),

$$-\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{r}. \quad (2.2)$$

On introduit 2 notations :

$$\nabla \mathbf{u} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_3}{\partial x_1} & \frac{\partial u_3}{\partial x_2} & \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\gamma}(\mathbf{u}) = \frac{\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^t}{2}.$$

On appelle  $\nabla \mathbf{u}$  tenseur gradient de déformation et  $\boldsymbol{\gamma}(\mathbf{u})$  tenseur de déformation.

Appliquons maintenant la méthode des éléments finis au problème (2.1). Soit une fonction test  $\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3)$  appartenant à  $(H^1(\Omega))^3$ . On obtient le problème :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} -\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{w} dv &= \int_{\Omega} \mathbf{r} \cdot \mathbf{w} dv \\ \iff \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \nabla \mathbf{w} dv - \int_{\Gamma} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{w} ds &= \int_{\Omega} \mathbf{r} \cdot \mathbf{w} dv. \end{aligned}$$

Grâce à la symétrie de  $\boldsymbol{\sigma}$  on obtient :

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\gamma}(\mathbf{w}) dv - \int_{\Gamma} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{w} ds = \int_{\Omega} \mathbf{r} \cdot \mathbf{w} dv.$$

On introduit finalement le tenseur d'élasticité, permettant de relier  $\boldsymbol{\sigma}$  et  $\boldsymbol{\gamma}(\mathbf{u})$  et vérifiant :

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} : \boldsymbol{\gamma}(\mathbf{u}).$$

Finalement, on obtient le problème :

$$\iff \int_{\Omega} (\mathbf{C} : \boldsymbol{\gamma}(\mathbf{u})) : \nabla \mathbf{w} dv - \int_{\Gamma} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{w} ds = \int_{\Omega} \mathbf{r} \cdot \mathbf{w} dv. \quad (2.3)$$

Dans le cas qui nous intéressera le plus, c'est-à-dire le cas d'un matériau linéaire élastique isotrope, le tenseur d'élasticité  $\mathbf{C}$  est défini par

$$C_{ijkl} = \lambda I_{ij} I_{kl} + \mu (I_{ik} I_{jl} + I_{il} I_{jk}), \quad (2.4)$$

avec  $I$  le tenseur identité et  $\lambda$  et  $\mu$  des constantes dépendant du matériau étudié. On peut ainsi réécrire l'équation (2.1) sous la forme :

$$\int_{\Omega} \lambda(\operatorname{div} \mathbf{u})(\operatorname{div} \mathbf{w}) + 2\mu \boldsymbol{\gamma}(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\gamma}(\mathbf{w}) dv = \int_{\Omega} \mathbf{r} \cdot \mathbf{w} dv + \int_{\Gamma} \mathbf{t} \cdot \mathbf{w} ds \quad (2.5)$$

où l'on a introduit le vecteur de traction  $\mathbf{t} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \lambda(\operatorname{div} \mathbf{u})\mathbf{n} + 2\mu \boldsymbol{\gamma}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n}$ .

Maintenant que l'on a obtenu la formulation variationnelle (2.5), le principe reste similaire à ce qui a été vu précédemment. Cependant, on choisira ici des fonctions  $\phi_i$  vectorielles. De plus, on posera sur chaque élément  $K$  :

$$\begin{cases} \alpha^K &= (U_1^K \ U_2^K \ U_3^K)^t \\ \boldsymbol{\Phi}^K &= [(\phi_1^K, 0, 0), \dots, (\phi_{n_c^K}^K, 0, 0), (0, \phi_1^K, 0), \dots, (0, \phi_{n_c^K}^K, 0), (0, 0, \phi_1^K), \dots, (0, 0, \phi_{n_c^K}^K)]^t \\ u^K(x) &= \sum_{j=1}^{3n_c^K} \alpha_j^K \phi_j^K(x) \end{cases}$$

où l'on a posé  $n_c^K$  le nombre de nœuds de calcul sur chaque élément et  $U_i^K$  les valeurs de la composante  $i$  de  $\mathbf{u}$  aux nœuds de calcul.

On se retrouve finalement avec le système élémentaire suivant à résoudre :

$$A^K \alpha^K = F^K + S^K$$

où l'on a introduit :

$$\begin{cases} a_{ij}^K &= \int_K \lambda(\operatorname{div} \boldsymbol{\Phi}_j^K)(\operatorname{div} \boldsymbol{\Phi}_i^K) + 2\mu \boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{\Phi}_j^K) : \boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{\Phi}_i^K) dv \\ f_i^K &= \int_K \mathbf{r}^K \cdot \boldsymbol{\Phi}_i^K dv \\ s_i^K &= \int_{\partial K} \mathbf{t}^K \cdot \boldsymbol{\Phi}_i^K ds. \end{cases}$$

**Exemple 2.1.** On prend l'exemple d'un pavé droit élastique privé d'une sphère, auquel on applique un vecteur force nul et un déplacement initial au bord gauche  $\mathbf{u} = (-1, 0, 0)$  et au bord droit  $\mathbf{u} = (1, 0, 0)$ . On représente les résultats obtenus aux figures 4 et 5.

### 3 La méthode $\phi$ -FEM pour le problème de Poisson-Dirichlet

Maintenant que nous avons introduit la méthode des éléments finis, nous allons pouvoir introduire la méthode  $\phi$ -FEM présentée dans [6].

On se place dans le cadre du problème de Poisson-Dirichlet

$$\begin{cases} -\Delta u &= f & \text{dans } \Omega, \\ u &= 0 & \text{sur } \Gamma. \end{cases} \quad (3.1)$$

On suppose ici que le domaine  $\Omega$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^d$  de frontière  $\Gamma$ , avec  $d = 2$  ou  $d = 3$ . La méthode  $\phi$ -FEM repose sur le principe suivant : on suppose que le domaine et sa frontière sont définis par une fonction  $\phi$  dite "level-sets", telle que :

$$\Omega := \{\phi < 0\} \quad \text{et} \quad \Gamma := \{\phi = 0\}, \quad (3.2)$$

puis, on résout le problème en cherchant une fonction  $w$  telle que  $\phi w = u$  soit solution du problème initial.



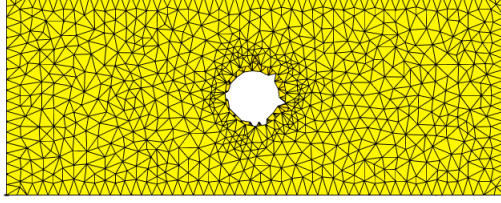


FIGURE 4 – Maillage sur le domaine.

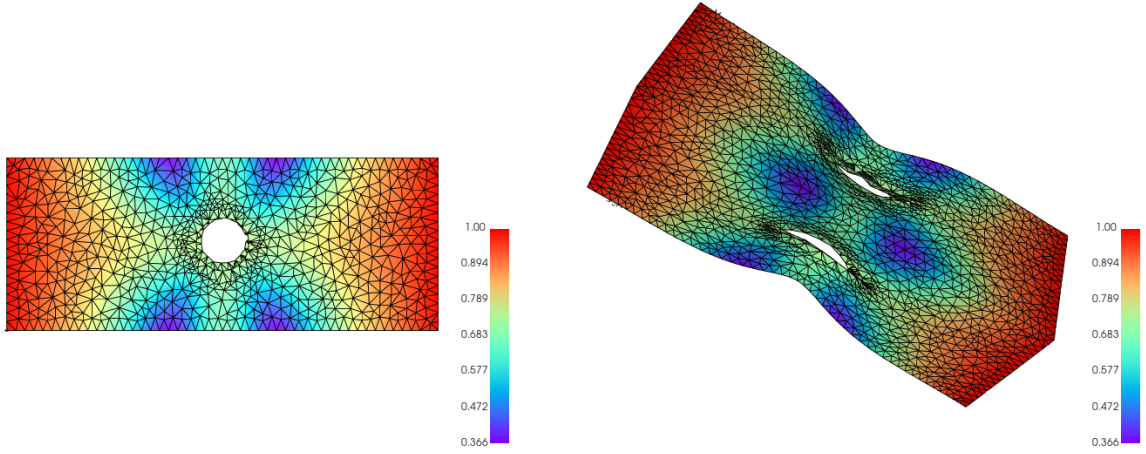


FIGURE 5 – Déformation du domaine.

### 3. 1. Définitions des espaces

Tout d'abord, nous allons construire un maillage sur le domaine  $\Omega$ . Pour cela, on suppose que le domaine est inclus dans un domaine trivial  $\mathcal{D}$  (par exemple, en dimension 2, un rectangle). On introduit un maillage régulier du domaine  $\mathcal{D}$ , que l'on notera  $\mathcal{T}_h^{\mathcal{D}}$ .

On définit un "sous-maillage" de  $\mathcal{T}_h^{\mathcal{D}}$  qui nous permettra d'avoir une meilleure approximation du domaine  $\Omega$ . Pour cela, on définit le maillage  $\mathcal{T}_h$  qui contiendra tous les éléments de  $\mathcal{T}_h^{\mathcal{D}}$  en intersection avec  $\Omega_h$  où  $\Omega_h$  est défini par l'interpolation de  $\phi$  sur l'espace des fonctions  $\mathbb{P}^k$ -Lagrange sur  $\mathcal{D}$ . On travaille sur le maillage  $\mathcal{T}_h$  afin de définir deux nouveaux ensembles qui nous permettront d'appliquer les pénalités que nous verrons plus tard.

Définissons tout cela plus formellement :

- Soit  $V_h^{\mathcal{D}}$  l'espace des fonctions  $\mathbb{P}^k$ -Lagrange sur  $\mathcal{D}$  défini par :

$$V_h^{\mathcal{D}} = \left\{ v \in H^1(\mathcal{D}) \mid v|_T \in \mathbb{P}^k(T) \quad \forall T \in \mathcal{T}_h^{\mathcal{D}} \right\} .$$

- Soit  $\phi_h$  l'interpolée de la fonction  $\phi$  sur l'espace  $V_h^{\mathcal{D}}$ .
- Soient  $\Omega_h$  et  $\Gamma_h$  les domaines définis par la fonction  $\phi_h$  :

$$\Omega_h := \{\phi_h < 0\} \quad \text{et} \quad \Gamma_h := \{\phi_h = 0\}.$$

- Soit  $\mathcal{T}_h$ , le sous-maillage, défini par :

$$\mathcal{T}_h := \{T \in \mathcal{T}_h^{\mathcal{D}} : T \cap \{\phi_h < 0\} \neq \emptyset\}.$$

On a alors  $\Omega_h = \bigcup_{T \in \mathcal{T}_h^{\mathcal{D}}} T$ .

- Soit maintenant l'espace fonctionnel  $V_h^k$ , espace des fonctions  $\mathbb{P}^k$ -Lagrange sur  $\Omega_h$ , défini par

$$V_h^k = \left\{ v_h \in H^1(\Omega_h) : v_h|_T \in \mathbb{P}^k(T) \quad \forall T \in \mathcal{T}_h \right\}.$$

- Soit  $\mathcal{T}_h^{\Gamma}$  l'ensemble des éléments du maillage en intersection avec la frontière discrète, c'est-à-dire

$$\mathcal{T}_h^{\Gamma} := \{T \in \mathcal{T}_h : T \cap \Gamma_h \neq \emptyset\}.$$

- Finalement, on définit un ensemble de facettes internes du maillage  $\mathcal{T}_h$  :

$$\mathcal{F}_h^{\Gamma} := \{F : \exists T \in \mathcal{T}_h : T \cap \Gamma_h \neq \emptyset \text{ et } F \in \partial T\}.$$

### 3. 2. Description de la méthode

On rappelle que l'on travaille ici sur le problème de Poisson-Dirichlet. On multiplie le problème par  $\phi$  (en supposant  $\phi$  connue et suffisamment régulière) et on remplace alors dans l'équation (3.1). On intègre par parties et on obtient le problème

$$\begin{cases} \text{Trouver } w \in H^1(\Omega) \text{ telle que,} \\ \int_{\Omega} \nabla(\phi w) \cdot \nabla(\phi v) - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial}{\partial n}(\phi w) \phi v = \int_{\Omega} f \phi v, \quad \forall v \in H^1(\Omega). \end{cases} \quad (3.3)$$

Maintenant que le nouveau problème est introduit, on le discrétise et on se retrouve avec un problème éléments finis qui est le suivant :

$$\begin{cases} \text{Trouver } w_h \in V_h^k \text{ telle que,} \\ a(w_h, v_h) = l(v_h), \quad \forall v_h \in V_h^k, \end{cases} \quad (3.4)$$

où

$$a(w_h, v_h) := \int_{\Omega_h} \nabla(\phi_h w_h) \cdot \nabla(\phi_h v_h) - \int_{\partial\Omega_h} \frac{\partial}{\partial n}(\phi_h w_h) \phi_h v_h + G_h(w_h, v_h) \quad (3.5)$$

$$l(v_h) := \int_{\Omega_h} f_h \phi_h v_h + G_h^{rhs}(v_h), \quad (3.6)$$

avec

$$G_h(w_h, v_h) := \sigma h \sum_{F \in \mathcal{F}_h^{\Gamma}} \int_F \left[ \frac{\partial}{\partial n}(\phi_h w_h) \right] \left[ \frac{\partial}{\partial n}(\phi_h v_h) \right] + \sigma h^2 \sum_{T \in \mathcal{T}_h^{\Gamma}} \int_T \Delta(\phi_h w_h) \Delta(\phi_h v_h) \quad (3.7)$$

$$G_h^{rhs}(v_h) := -\sigma h^2 \sum_{T \in \mathcal{T}_h^{\Gamma}} \int_T f \Delta(\phi_h v_h), \quad (3.8)$$

où  $\sigma$  est le paramètre de stabilisation.

**Explication des pénalités.** Détaillons maintenant les termes des pénalités  $G_h(w, v)$  et  $G_h^{rhs}(v)$  appliquées sur le bord du domaine. On considère tout d'abord :

$$G_h(w_h, v_h) := \underbrace{\sigma h \sum_{F \in \mathcal{F}_h^\Gamma} \int_F \left[ \frac{\partial}{\partial n}(\phi_h w_h) \right] \left[ \frac{\partial}{\partial n}(\phi_h v_h) \right]}_{(1)} + \underbrace{\sigma h^2 \sum_{T \in \mathcal{T}_h^\Gamma} \int_T \Delta(\phi_h w_h) \Delta(\phi_h v_h)}_{(2)} .$$

- (1) Tout d'abord, on travaille sur la pénalité d'ordre 1. Pour déterminer cette pénalité, on utilise le principe de la pénalité fantôme (ghost penalty). On intègre sur les facettes du bord le produit des sauts des dérivées normales. On utilise ici la formulation variationnelle initiale. En effet, on reconnaît la dérivée normale de  $\phi w$  qui apparaît dans le terme de bord de la formulation (3.3). On pénalise donc le saut des dérivées normales de  $\phi w$  et de  $\phi v$  sur les facettes de bord. Cela revient donc à pénaliser la condition de bord.
- (2) Pour la pénalité d'ordre 2, on considère cette fois des cellules du maillage et plus seulement des facettes. On intègre donc ici sur l'ensemble des cellules appartenant au bord. Cependant, on considère désormais une pénalité plus "globale". En effet, on reconnaît dans le terme la formulation initiale du problème pour les fonctions  $w$  et  $v$ . On intègre plus précisément le produit du laplacien de  $\phi w$  et du laplacien de  $\phi v$ , issus de la formulation (3.1).

Finalement, il reste le terme de droite, c'est-à-dire  $G_h^{rhs}(v)$ . On a ici une pénalité d'ordre 2, qui est déterminée comme précédemment. En effet, ici on intègre une nouvelle fois sur l'ensemble des cellules du bord, le produit de la fonction  $f$  du problème initial et le laplacien de  $\phi v$ , comme dans le terme d'ordre 2 de la pénalité  $G_h$ .

### 3. 3. Exemple pratique

Pour comprendre la méthode, on se permet de présenter un exemple pratique issu de [6]. On se place donc dans le cadre de l'équation de Poisson-Dirichlet, en prenant les différentes données suivantes :

- Le domaine  $\mathcal{D}$  considéré est le carré unité  $[0, 1]^2$  ;
- Le domaine  $\Omega$  est le cercle de rayon  $\frac{\sqrt{2}}{4}$  et de centre  $(0.5, 0.5)$  ;
- La fonction  $\phi$  est telle que  $\phi(x, y) = -\frac{1}{8} + (x - 0.5)^2 + (y - 0.5)^2$  ;
- On travaille sur le problème ayant pour solution exacte la fonction :

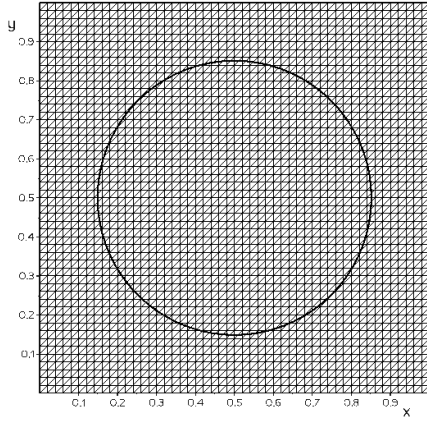
$$u(x, y) = \phi(x, y) \times \exp(x) \times \sin(2\pi y);$$

- On utilise une méthode éléments finis  $\mathbb{P}^1$ -Lagrange ;
- On prend comme paramètre de stabilisation  $\sigma = 20$ .

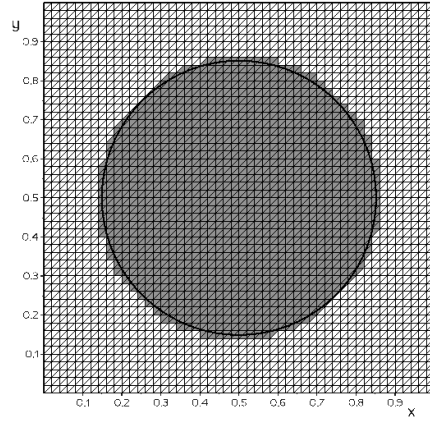
Soit  $\mathcal{T}_h^\mathcal{D}$  un maillage du domaine  $\mathcal{D}$  tel que représenté à la figure 6a.

On peut alors définir le maillage  $\mathcal{T}_h$  grâce à la fonction  $\phi$  et on obtient la figure 6b.

La difficulté réside maintenant dans la définition des espaces utilisés pour appliquer la pénalité. On sélectionne donc les éléments qui sont en intersection avec le cercle (la frontière  $\Gamma_h$ ) et on obtient la figure 7a. Cela revient alors à construire les ensembles  $\mathcal{T}_h^\Gamma$  et  $\mathcal{F}_h^\Gamma$ .



(a) Maillage du domaine  $\mathcal{D}$  et cercle.



(b) Maillage du domaine  $\Omega$ .

FIGURE 6

### 3. 4. Convergence théorique

Nous allons maintenant établir le théorème de convergence énoncé dans [6]. Pour cela, nous aurons besoin de différents lemmes qui ne seront pas démontrés (voir [6] pour les preuves). Ces lemmes nous mèneront à la démonstration du théorème de convergence théorique énoncé ci-dessous.

Énonçons tout d'abord deux hypothèses importantes.

*Hypothèse 3.1.* On suppose que la frontière  $\Gamma$  peut être recouverte par des ouverts  $\mathcal{O}_i$  avec  $i = 1, \dots, I$  sur lesquels on peut introduire des coordonnées locales  $\xi_1, \dots, \xi_d$  où  $d$  est la dimension ( $d = 2, 3$ ), avec  $\xi_d = \phi$  et telles que  $\frac{\partial^\alpha \xi}{\partial x^\alpha}$  et  $\frac{\partial^\alpha x}{\partial \xi^\alpha}$  soient majorées par une constante  $C_0 > 0$  pour  $\alpha = 1, \dots, k+1$ .

*Hypothèse 3.2.* On suppose que la frontière discrète  $\Gamma_h$  peut être recouverte de patches d'éléments  $\{\Pi_i\}_{i=1, \dots, N_\Pi}$  tels que :

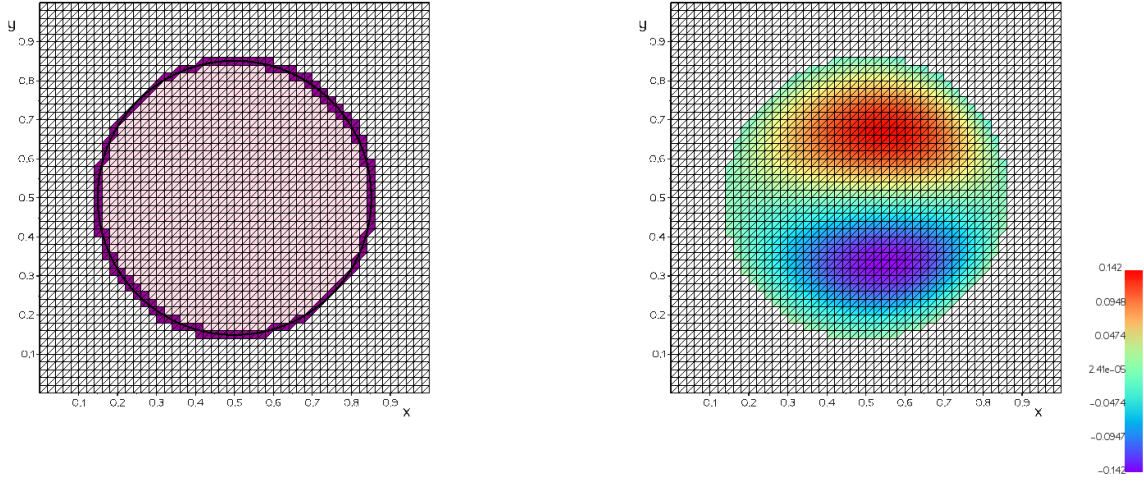
- i) chaque patch est composé d'éléments  $T_i \in \mathcal{T}_h \setminus \mathcal{T}_h^\Gamma$  et d'éléments en intersection avec  $\Gamma_h$ . C'est-à-dire que  $\Pi = T_i \cup \Pi_i^\Gamma$  où  $\Pi_i^\Gamma \subset \mathcal{T}_h^\Gamma$  et est composé d'au moins  $M$  éléments ;
- ii) L'union de tous les patches  $\Pi_i^\Gamma$  est égale à  $\mathcal{T}_h^\Gamma$  ;
- iii) Les patches  $\Pi_i$  sont disjoints, c'est-à-dire  $\Pi_i \cap \Pi_j = \emptyset$  si  $i \neq j$ .

**Théorème 3.1** (Convergence de la méthode). *Sous les hypothèses 3.1 et 3.2, pour  $l \geq k$ , un maillage  $\mathcal{T}_h^\Gamma$  quasi-uniforme, une fonction  $f \in H^k(\Omega_h \cup \Omega)$ . Soient  $u \in H^{k+2}(\Omega)$  solution exacte du problème (3.1) et  $w_h$  solution approchée du problème (3.3). Soit  $u_h = \phi_h w_h$  (la solution approchée de (3.1)). Alors, il existe une constante positive  $C$  telle que :*

$$|u - u_h|_{H^1(\Omega_h \cap \Omega)} \leq Ch^k \|f\|_{H^k(\Omega \cup \Omega_h)}. \quad (3.9)$$

Si  $\Omega \subset \Omega_h$ , alors :

$$\|u - u_h\|_{L^2(\Omega)} \leq Ch^{k+\frac{1}{2}} \|f\|_{H^k(\Omega_h)}. \quad (3.10)$$



(a) En violet, éléments sur le bord.  
En rose, éléments intérieurs.

(b) Solution approchée obtenue à l'aide de la  $\phi$ -FEM.

FIGURE 7

*Remarque 3.1.* La constante  $C$  du théorème 3.1 dépend de la constante  $C_0$  de l'hypothèse 3.1, de  $M$  (hypothèse 3.2), de  $m$  (hypothèse 3.1), du maximum des dérivées de  $\phi$ , de la régularité du maillage et des deux degrés  $k$  et  $l$ . Cependant,  $C$  est indépendante de  $h$ , de  $f$  et de  $u$ .

### 3. 4. 1) Lemmes et propositions

Introduisons maintenant différents lemmes qui seront utiles dans la démonstration du théorème.

**Lemme 3.1.** *On suppose que l'hypothèse 3.1 est vérifiée et que le domaine  $\Omega$  est donné par la fonction level-sets  $\phi$ . Alors, pour tout  $u \in H^{k+1}(\mathcal{O})$  nulle sur  $\Gamma$ , il existe  $C > 0$  dépendant des constantes de l'hypothèse 3.1, telle que :*

$$\left\| \frac{u}{\phi} \right\|_{H^k(\mathcal{O})} \leq C \|u\|_{H^{k+1}(\mathcal{O})}. \quad (3.11)$$

**Lemme 3.2.** *Soit  $T$  un triangle (si  $d = 2$ ) ou un tétraèdre (si  $d = 3$ ). Soit  $E$  un côté de  $T$  et soit  $p$  un polynôme sur  $T$ , de degré  $s$ , tel que  $\frac{\partial p}{\partial n} = p = 0$  sur  $E$  et  $\Delta p = 0$  sur  $T$ . Alors,  $p$  est nul sur  $T$ .*

**Lemme 3.3.** *On suppose l'hypothèse 3.2 vérifiée. Pour tous  $\beta > 0$ ,  $s \in \mathbb{N}^*$ , il existe  $\alpha \in ]0, 1[$  dépendant uniquement de  $s$ , tel que,  $\forall v_h \in V_h^{(s)}$  :*

$$|v_h|_{H^1(\Omega_h^\Gamma)}^2 \leq \alpha |v_h|_{H^1(\Omega_h)}^2 + \beta h \sum_E \left\| \left[ \frac{\partial v_h}{\partial n} \right] \right\|_{L^2(E)}^2 + \beta h^2 \sum_T \|\Delta v_h\|_{L^2(T)}^2. \quad (3.12)$$

**Lemme 3.4.** *Pour tout  $v_h \in V_h^{(k)}$ , il existe une constante dépendant de la régularité du maillage et du degré  $k$  telle que :*

$$\|\phi_h v_h\|_{L^2(\Omega_h^\Gamma)} \leq Ch |\phi_h v_h|_{H^1(\Omega_h^\Gamma)} \quad (3.13)$$

et :

$$\|\phi_h v_h\|_{L^2(\Omega_h \setminus \Omega)} \leq Ch |\phi_h v_h|_{H^1(\Omega_h)}. \quad (3.14)$$

**Lemme 3.5.** *Pour tout  $v_h \in V_h^{(k)}$  :*

$$\sum_E \|\phi_h v_h\|_{L^2(E)}^2 \leq Ch |\phi_h v_h|_{L^2(\Omega_h)}^2 \quad (3.15)$$

et :

$$\|\phi_h v_h\|_{L^2(\partial\Omega_h)}^2 \leq Ch |\phi_h v_h|_{L^2(\Omega_h)}^2. \quad (3.16)$$

**Lemme 3.6.** *On suppose l'hypothèse 3.1 vérifiée. Pour tout  $v \in H^s(\Omega_h)$  avec  $1 \leq s \leq k+1$  telle que  $v = 0$  sur  $\Omega$  :*

$$\|v\|_{L^2(\Omega_h \setminus \Omega)} \leq Ch^s \|v\|_{H^s(\Omega_h \setminus \Omega)}. \quad (3.17)$$

**Proposition 3.1** (Coercivité de la forme bilinéaire). *On suppose l'hypothèse 3.2 vérifiée. La forme bilinéaire (3.5) est coercive pour la norme :*

$$|||v_h|||_h = \sqrt{|\phi_h v_h|_{H^1(\Omega_h)}^2 + G_h(v_h, v_h)}. \quad (3.18)$$

### 3. 4. 2) Démonstration

Maintenant que nous avons énoncé les différents lemmes importants, nous allons pouvoir démontrer le théorème. On choisit ici de ne démontrer que l'une des deux inégalités : l'inégalité pour l'erreur en norme  $H^1$ .

*Démonstration du théorème 3.1.* Soit  $f \in H^k(\Omega)$ . La solution exacte  $u \in H^{k+2}(\Omega)$  peut être prolongée sur  $\mathcal{O}$  par  $\tilde{u} \in H^{k+2}(\mathcal{O})$  telle que  $\tilde{u} = u$  sur  $\Omega$  et il existe une constante  $C$  telle que :

$$\|\tilde{u}\|_{H^{k+2}(\Omega_h)} \leq \|\tilde{u}\|_{H^{k+2}(\mathcal{O})} \leq C \|u\|_{H^{k+2}(\Omega)} \leq C \|f\|_{H^k(\Omega)}. \quad (3.19)$$

On pose  $w = \frac{\tilde{u}}{\phi}$ . Par le lemme 3.1, il existe une constante  $C > 0$  telle que :

$$|w|_{H^{k+1}(\Omega)} = \left\| \frac{\tilde{u}}{\phi} \right\|_{H^{k+1}(\Omega_h)} \leq C \|\tilde{u}\|_{H^{k+2}(\Omega_h)} \leq C \|f\|_{H^k(\Omega)}. \quad (3.20)$$

On introduit maintenant une nouvelle forme bilinéaire,  $\bar{a}_h$ , semblable à la forme  $a_h$ , mais en multipliant  $w$  par  $\phi$  et non par  $\phi_h$ . Tous les termes de (3.5) en  $\phi_h w$  deviennent donc  $\phi w$ . Alors, on pose  $\tilde{u} = \phi w$  et  $-\Delta \tilde{u} = \tilde{f}$ . En intégrant par parties, on obtient :

$$\bar{a}_h(w, v_h) = \int_{\Omega_h} \tilde{f} \phi_h v_h - \sigma h^2 \sum_F \int_F \tilde{f} \Delta \phi_h v_h.$$

On a ainsi :

$$a_h(w, v_h) - \bar{a}_h(w, v_h) = \int_{\Omega_h} f \phi_h v_h - \sigma h^2 \sum_F \int_F f \Delta \phi_h v_h - \int_{\Omega_h} \tilde{f} \phi_h v_h + \sigma h^2 \sum_F \int_F \tilde{f} \Delta \phi_h v_h \quad (3.21)$$

$$= \int_{\Omega_h} (f - \tilde{f}) \phi_h v_h - \sigma h^2 \sum_F \int_F (f - \tilde{f}) \Delta \phi_h v_h. \quad (3.22)$$

On pose maintenant  $v_h = w_h - I_h w$  et  $r_h = \phi w - \phi_h I_h w$  où  $I_h$  est l'opérateur d'interpolation nodale. Le but va maintenant être d'utiliser la coercivité de la forme bilinéaire  $a_h(\cdot, \cdot)$ . Pour cela, on écrit  $a_h(v_h, v_h)$  :

$$\begin{aligned} a_h(v_h, v_h) &= a_h(w_h - I_h w, v_h) \\ &= a_h(w_h, v_h) - a_h(I_h w, v_h) \\ &= \int_{\Omega_h} (f - \tilde{f}) \phi_h v_h - \sigma h^2 \sum_F \int_F (f - \tilde{f}) \Delta \phi_h v_h + \bar{a}_h(w, v_h) - a_h(I_h w, v_h). \end{aligned}$$

En remplaçant, on a :

$$\begin{aligned} a_h(v_h, v_h) &= \int_{\Omega_h} (f - \tilde{f}) \phi_h v_h - \sigma h^2 \sum_F \int_F (f - \tilde{f}) \Delta \phi_h v_h + \int_{\Omega_h} \nabla(\phi w) \cdot \nabla(\phi_h v_h) \\ &\quad - \int_{\partial\Omega_h} \frac{\partial}{\partial n}(\phi w) \phi_h v_h + \sigma h \sum_{F \in \mathcal{F}_h^\Gamma} \int_F \left[ \frac{\partial}{\partial n}(\phi w) \right] \left[ \frac{\partial}{\partial n}(\phi_h v_h) \right] + \sigma h^2 \sum_{T \in \mathcal{T}_h^\Gamma} \int_T \Delta(\phi w) \Delta(\phi_h v_h) \\ &\quad - \int_{\Omega_h} \nabla(\phi_h I_h w) \cdot \nabla(\phi_h v_h) + \int_{\partial\Omega_h} \frac{\partial}{\partial n}(\phi_h I_h w) \phi_h v_h \\ &\quad - \sigma h \sum_{F \in \mathcal{F}_h^\Gamma} \int_F \left[ \frac{\partial}{\partial n}(\phi_h I_h w) \right] \left[ \frac{\partial}{\partial n}(\phi_h v_h) \right] - \sigma h^2 \sum_{T \in \mathcal{T}_h^\Gamma} \int_T \Delta(\phi_h I_h w) \Delta(\phi_h v_h). \quad (3.23) \end{aligned}$$

On utilise la définition de  $r_h$ , et on obtient finalement :

$$\begin{aligned} a_h(v_h, v_h) &= \underbrace{\int_{\Omega_h} (f - \tilde{f}) \phi_h v_h}_{(1)} - \underbrace{\sigma h^2 \sum_F \int_F (f - \tilde{f}) \Delta \phi_h v_h}_{(2)} + \underbrace{\int_{\Omega_h} \nabla(r_h) \cdot \nabla(\phi_h v_h)}_{(3)} \\ &\quad - \underbrace{\int_{\partial\Omega_h} \frac{\partial}{\partial n}(r_h) \phi_h v_h}_{(4)} + \underbrace{\sigma h \sum_{F \in \mathcal{F}_h^\Gamma} \int_F \left[ \frac{\partial}{\partial n}(r_h) \right] \left[ \frac{\partial}{\partial n}(\phi_h v_h) \right]}_{(5)} + \underbrace{\sigma h^2 \sum_{T \in \mathcal{T}_h^\Gamma} \int_T \Delta(r_h) \Delta(\phi_h v_h)}_{(6)}. \quad (3.24) \end{aligned}$$

En utilisant la coercivité de la forme  $a_h(\cdot, \cdot)$ , on sait qu'il existe une constante  $c > 0$  telle que  $a_h(v_h, v_h) \geq c \|v_h\|_h^2$ . De plus, comme  $\tilde{f} = f$  sur  $\Omega$ , on a :

$$\int_{\Omega_h} (f - \tilde{f}) \phi_h v_h = \int_{\Omega_h \setminus \Omega} (f - \tilde{f}) \phi_h v_h.$$

On utilise l'inégalité de Young sur les différents termes et on obtient :

$$\begin{aligned} (1) &\leq \frac{1}{2\varepsilon} |r_h|_{H^1(\Omega_h)}^2 + \frac{\varepsilon}{2} |\phi_h v_h|_{H^1(\Omega_h)}^2 & (2) &\leq \frac{h}{2\varepsilon} \left\| \frac{\partial}{\partial n} r_h \right\|_{L^2(\partial\Omega_h)}^2 + \frac{\varepsilon}{2h} \|\phi_h v_h\|_{L^2(\partial\Omega_h)}^2 \\ (3) &\leq \frac{1}{2\varepsilon} \sigma^2 h \sum_{F \in \mathcal{F}_h^\Gamma} \left\| \frac{\partial}{\partial n} r_h \right\|_{L^2(F)}^2 + \frac{\varepsilon}{2} h \sum_{F \in \mathcal{F}_h^\Gamma} \left\| \frac{\partial}{\partial n}(\phi_h v_h) \right\|_{L^2(F)}^2 \\ (4) &\leq \frac{\sigma^2 h^2}{2\varepsilon} \sum_{T \in \mathcal{T}_h^\Gamma} \|\Delta r_h\|_{L^2(T)}^2 + \frac{\varepsilon}{2} h^2 \sum_{T \in \mathcal{T}_h^\Gamma} \|\Delta \phi_h v_h\|_{L^2(T)}^2 \\ (5) &\leq \frac{h^2}{2\varepsilon} \|f - \tilde{f}\|_{L^2(\Omega_h \setminus \Omega)}^2 + \frac{\varepsilon}{2h^2} \|\phi_h v_h\|_{L^2(\Omega_h \setminus \Omega)}^2 \\ (6) &\leq \frac{\sigma^2 h^2}{2\varepsilon} \|f - \tilde{f}\|_{L^2(\Omega_h \setminus \Omega)}^2 + \frac{\varepsilon}{2} h^2 \sum_{T \in \mathcal{T}_h^\Gamma} \|\Delta \phi_h v_h\|_{L^2(T)}^2. \end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned}
c|||v_h|||_h^2 &\leq \frac{1}{2\varepsilon} \left( |r_h|_{H^1(\Omega_h)}^2 + h \left\| \frac{\partial}{\partial n} r_h \right\|_{L^2(\partial\Omega_h)}^2 + \sigma^2 h \sum_{F \in \mathcal{F}_h^\Gamma} \left\| \frac{\partial}{\partial n} r_h \right\|_{L^2(F)}^2 \right. \\
&\quad \left. + \sigma^2 h^2 \sum_{T \in \mathcal{T}_h^\Gamma} \|\Delta r_h\|_{L^2(T)}^2 + (1 + \sigma^2) h^2 \|f - \tilde{f}\|_{L^2(\Omega_h \setminus \Omega)}^2 \right) \\
&\quad + \frac{\varepsilon}{2} \left( |\phi_h v_h|_{H^1(\Omega_h)}^2 + \frac{1}{h} \|\phi_h v_h\|_{L^2(\partial\Omega_h)}^2 + h \sum_{F \in \mathcal{F}_h^\Gamma} \left\| \frac{\partial}{\partial n} (\phi_h v_h) \right\|_{L^2(F)}^2 \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{h^2} \|\phi_h v_h\|_{L^2(\Omega_h \setminus \Omega)}^2 + 2h^2 \sum_{T \in \mathcal{T}_h^\Gamma} \|\Delta \phi_h v_h\|_{L^2(T)}^2 \right). \quad (3.25)
\end{aligned}$$

□

On utilise alors les lemmes 3.4 et 3.5 ainsi que la proposition 3.1 et les termes en  $\frac{\varepsilon}{2}$  sont contrôlés par  $|||v|||_h$  et passent donc dans le terme de gauche. On a finalement qu'il existe une constante  $C > 0$  telle que :

$$\begin{aligned}
|||v_h|||_h^2 &\leq C \left( |r_h|_{H^1(\Omega_h)}^2 + h \left\| \frac{\partial}{\partial n} r_h \right\|_{L^2(\partial\Omega_h)}^2 + \sigma^2 h \sum_{F \in \mathcal{F}_h^\Gamma} \left\| \frac{\partial}{\partial n} r_h \right\|_{L^2(F)}^2 \right. \\
&\quad \left. + \sigma^2 h^2 \sum_{T \in \mathcal{T}_h^\Gamma} \|\Delta r_h\|_{L^2(T)}^2 + (1 + \sigma^2) h^2 \|f - \tilde{f}\|_{L^2(\Omega_h \setminus \Omega)}^2 \right). \quad (3.26)
\end{aligned}$$

Il reste à estimer et à majorer chacun des termes restants. Tout d'abord, par l'inégalité triangulaire, on a :

$$\begin{aligned}
|r_h|_{H^1(\Omega_h)} &= |\phi w - \phi_h I_h w|_{H^1(\Omega_h)} \\
&= |(\phi - \phi_h)w + \phi_h(w - I_h w)|_{H^1(\Omega_h)} \\
&\leq |(\phi - \phi_h)w|_{H^1(\Omega_h)} + |\phi_h(w - I_h w)|_{H^1(\Omega_h)}.
\end{aligned}$$

Alors,

$$\begin{aligned}
|r_h|_{H^1(\Omega_h)} &\leq \|\nabla((\phi - \phi_h)w)\|_{L^\infty(\Omega_h)} + \|\nabla(\phi_h(w - I_h w))\|_{L^\infty(\Omega_h)} \\
&\leq \|\nabla(\phi - \phi_h)\|_{L^\infty(\Omega_h)} \|w\|_{L^2(\Omega_h)} + \|\phi - \phi_h\|_{L^\infty(\Omega_h)} \|\nabla w\|_{L^2(\Omega_h)} \\
&\quad + \|\nabla \phi_h\|_{L^\infty(\Omega_h)} \|w - I_h w\|_{L^2(\Omega_h)} + \|\phi_h\|_{L^\infty(\Omega_h)} \|\nabla(w - I_h w)\|_{L^2(\Omega_h)} \\
&\leq \|\nabla(\phi - \phi_h)\|_{L^\infty(\Omega_h)} \|w\|_{H^0(\Omega_h)} + \|\phi - \phi_h\|_{L^\infty(\Omega_h)} \|w\|_{H^1(\Omega_h)} \\
&\quad + \|\nabla \phi_h\|_{L^\infty(\Omega_h)} \|w - I_h w\|_{H^0(\Omega_h)} + \|\phi_h\|_{L^\infty(\Omega_h)} \|w - I_h w\|_{H^1(\Omega_h)}.
\end{aligned}$$

On utilise la majoration de l'erreur d'interpolation (voir [4] pages 108-109) et on obtient :

$$\begin{aligned}
|r_h|_{H^1(\Omega_h)} &\leq Ch^k \left( |\phi|_{W^{k+1,\infty}(\Omega_h)} \|w\|_{H^0(\Omega_h)} + |\phi|_{W^{k,\infty}(\Omega_h)} |w|_{H^1(\Omega_h)} \right. \\
&\quad \left. + |\phi|_{W^{1,\infty}(\Omega_h)} |w|_{H^k(\Omega_h)} + \|\phi\|_{L^\infty(\Omega_h)} \|w\|_{H^{k+1}(\Omega_h)} \right) \\
&\leq Ch^k \|\phi\|_{W^{k+1,\infty}(\Omega_h)} \|w\|_{H^{k+1}(\Omega_h)}.
\end{aligned}$$



Sur le même principe, on a également :

$$h^2 \sum_{T \in \mathcal{T}_h^\Gamma} \|\Delta r_h\|_{L^2(T)}^2 \leq h^2 C \left( h^{k-1} \|\phi\|_{W^{k+1,\infty}(\Omega_h)} \|w\|_{H^{k+1}(\Omega_h)} \right)^2 .$$

et

$$h \left( \left\| \frac{\partial}{\partial n} r_h \right\|_{L^2(\partial\Omega_h)}^2 + \sum_{F \in \mathcal{F}_h^\Gamma} \left\| \frac{\partial}{\partial n} r_h \right\|_{L^2(F)}^2 \right) \leq h C h^{2k-1} \|\phi\|_{W^{k+1,\infty}(\Omega_h)}^2 \|w\|_{H^{k+1}(\Omega_h)}^2 .$$

Pour le dernier terme,  $\|f - \tilde{f}\|_{L^2(\Omega_h \setminus \Omega)}^2$ , on applique le lemme 3.6, et on obtient :

$$h^2 \|f - \tilde{f}\|_{L^2(\Omega_h \setminus \Omega)}^2 \leq h^2 C h^{2(k-1)} \|f - \tilde{f}\|_{H^{k-1}(\Omega_h \setminus \Omega)}^2 .$$

Alors, en utilisant le fait que  $\tilde{f} = -\Delta \tilde{u}$ ,

$$h^2 \|f - \tilde{f}\|_{L^2(\Omega_h \setminus \Omega)}^2 \leq C h^{2k} \|f + \Delta \tilde{u}\|_{H^{k-1}(\Omega_h \setminus \Omega)}^2 \leq C h^{2k} \left( \|f\|_{H^{k-1}(\Omega_h)} + \|\tilde{u}\|_{H^{k+1}(\Omega_h)} \right)^2 .$$

On a finalement majoré les différents termes et on a :

$$\begin{aligned} |||v_h|||_h^2 &\leq C h^{2k} \left( \|\phi\|_{W^{k+1,\infty}(\Omega_h)}^2 \|w\|_{H^{k+1}(\Omega_h)}^2 + \left( \|f\|_{H^{k-1}(\Omega_h)} + \|\tilde{u}\|_{H^{k+1}(\Omega_h)} \right)^2 \right) \\ \implies |||v_h|||_h &\leq C h^k \left( \|\phi\|_{W^{k+1,\infty}(\Omega_h)} \|w\|_{H^{k+1}(\Omega_h)} + \|f\|_{H^{k-1}(\Omega_h)} + \|\tilde{u}\|_{H^{k+1}(\Omega_h)} \right) \\ &\leq C h^k \left( \|w\|_{H^{k+1}(\Omega_h)} + \|f\|_{H^{k-1}(\Omega_h)} + \|\tilde{u}\|_{H^{k+1}(\Omega_h)} \right) \\ &\leq C h^k \|f\|_{H^{k-1}(\Omega_h)} , \end{aligned}$$

en utilisant les majorations (3.19) et (3.20).

Il reste enfin à relier cette majoration à  $|u - u_h|_{H^1(\Omega_h \cap \Omega)}$  :

$$\begin{aligned} |u - u_h|_{H^1(\Omega_h \cap \Omega)} &= |u - \phi_h w_h|_{H^1(\Omega_h \cap \Omega)} \leq |\tilde{u} - \phi_h w_h|_{H^1(\Omega_h)} \\ &\leq |\phi w - \phi_h w_h|_{H^1(\Omega_h)} \\ &\leq |\phi w - \phi_h I_h w + \phi_h I_h w - \phi_h w_h|_{H^1(\Omega_h)} \\ &\leq |\phi w - \phi_h I_h w|_{H^1(\Omega_h)} + |\phi_h I_h w - \phi_h w_h|_{H^1(\Omega_h)} \\ &\leq |\phi w - \phi_h I_h w|_{H^1(\Omega_h)} + |\phi_h (I_h w - w_h)|_{H^1(\Omega_h)} \\ &\leq |\phi w - \phi_h w + \phi_h w - \phi_h I_h w|_{H^1(\Omega_h)} + |\phi_h (I_h w - w_h)|_{H^1(\Omega_h)} \\ &\leq |(\phi - \phi_h) w|_{H^1(\Omega_h)} + |\phi_h (w - I_h w)|_{H^1(\Omega_h)} + |\phi_h (I_h w - w_h)|_{H^1(\Omega_h)} \\ &\leq C h^k \|\phi\|_{W^{k+1,\infty}(\Omega_h)} \|w\|_{H^{k+1}(\Omega_h)} + |||v_h|||_h . \end{aligned}$$

Finalement,

$$|u - u_h|_{H^1(\Omega_h \cap \Omega)} \leq C h^k \|f\|_{H^k(\Omega_h \cup \Omega)} .$$

### 3. 5. Ordre de convergence numérique

On s'intéresse maintenant à la convergence numérique de la méthode  $\phi$ -FEM. Pour cela on se place une nouvelle fois dans le cadre du problème de Poisson-Dirichlet homogène (nous verrons plus tard le cas non homogène). Le but va être d'estimer numériquement la vitesse de convergence de la méthode, grâce une représentation graphique de l'erreur commise par la méthode sur l'exemple 3. 3.. On obtient alors la figure 8.

### 3. 6. Comparaison avec une FEM standard

Il est maintenant intéressant de comparer cette méthode avec une méthode éléments finis standard. Pour cela, on se propose de faire une comparaison sur l'exemple 3. 3. entre la méthode  $\phi$ -FEM et une FEM standard sur le cercle centré en  $(0.5, 0.5)$  et de rayon  $\frac{\sqrt{2}}{4}$ . On compare plusieurs points essentiels sur les deux méthodes :

- Le temps d'assemblage des matrices ;
- Le temps de résolution des systèmes linéaires ;
- L'erreur relative obtenue (en normes  $L^2$  et  $H^1$ ).

On retrouve alors les résultats aux figures 8 et 9. Ces résultats nous montrent que sur ce simple exemple, la méthode  $\phi$ -FEM semble avantageuse en précision et tout aussi coûteuse en temps que la méthode standard.

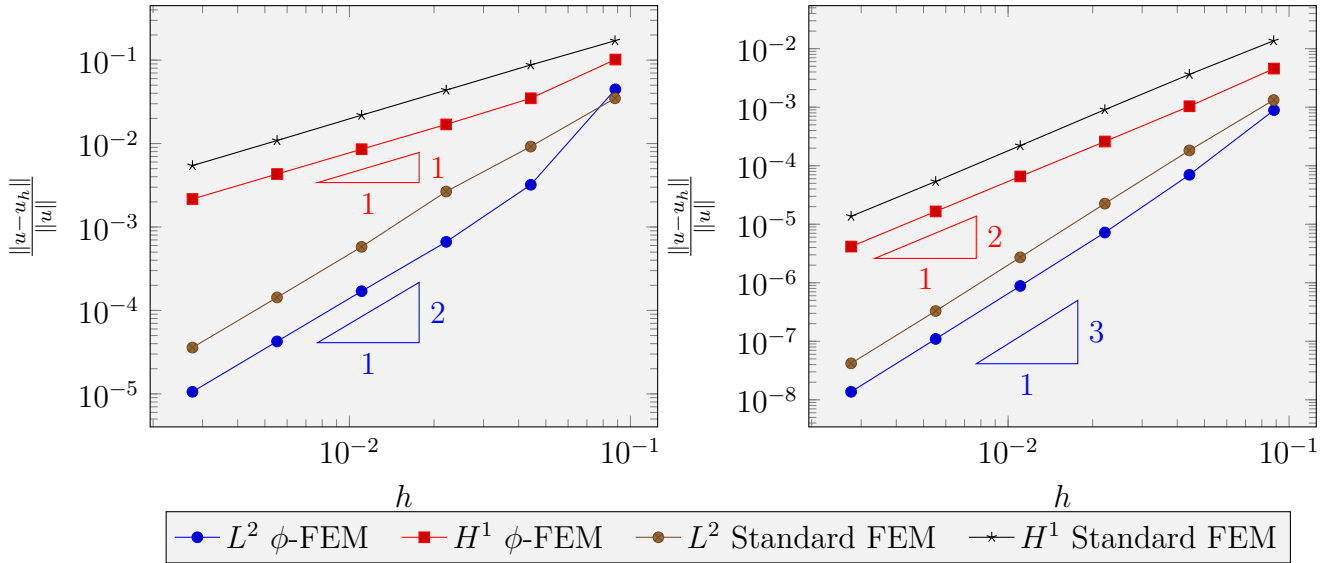


FIGURE 8 – Erreurs commises par les 2 méthodes. Gauche : méthodes  $\mathbb{P}^1$ . Droite : méthodes  $\mathbb{P}^2$ .

*Remarque 3.2.* Les temps de calcul mesurés ici sont les temps d'assemblage des matrices éléments finis et de résolution des systèmes linéaires, on ne prend pas en compte le temps de sélection des éléments du bord pour la méthode  $\phi$ -FEM. On représente ainsi le temps total, c'est-à-dire la somme du temps d'assemblage et du temps de résolution sur les différents graphiques.

### 3. 7. Problème non homogène

On se place maintenant dans un cadre légèrement différent de l'exemple précédent :

- Le domaine  $\mathcal{D}$  considéré est le carré unité  $[0, 1]^2$  ;
- Le domaine  $\Omega$  est le cercle de rayon  $\frac{\sqrt{2}}{4}$  et de centre  $(0.5, 0.5)$  ;
- La fonction  $\phi$  est telle que  $\phi(x, y) = -\frac{1}{8} + (x - 0.5)^2 + (y - 0.5)^2$  ;
- On travaille sur le problème ayant pour solution exacte la fonction :

$$u(x, y) = \exp(x) \times \sin(2\pi y) ;$$

- On considère une condition de Dirichlet  $u_D = (1 + \phi)u$  ;
- On utilise une méthode éléments finis  $\mathbb{P}^1$ -Lagrange ;
- On prend comme paramètre de stabilisation  $\sigma = 20$ .

La formulation variationnelle est nécessairement modifiée. En effet, étant donné la nature du nouveau problème, lors du passage à la formulation variationnelle (multiplication par une fonction test et intégration par parties), on obtient la formulation suivante :

$$\begin{cases} \text{Trouver } w \in H^1(\Omega) \text{ telle que :} \\ \int_{\Omega} \nabla(\phi w + u_D) \cdot \nabla(\phi v) - \int_{\Gamma} \partial_n(\phi w + u_D) \phi v = \int_{\Omega} f \phi v, \forall v \in H^1(\Omega). \end{cases} \quad (3.27)$$

Il est donc nécessaire de transformer cette expression afin d'obtenir une forme bilinéaire  $a(w, v)$  et une forme linéaire  $l(v)$ . On développe tous les termes puis on passe tous les termes indépendants de  $w$  dans le membre de droite. On trouve finalement :

$$\begin{cases} a_h(w_h, v_h) &= \int_{\Omega_h} \nabla(\phi_h w_h) \cdot \nabla(\phi_h v_h) - \int_{\Gamma} \partial_n(\phi_h w_h) \phi_h v_h + G_h(w_h, v_h) \\ l_h(v_h) &= \int_{\Omega_h} f \phi_h v_h - \int_{\Omega_h} \nabla(u_D) \cdot \nabla(\phi_h v_h) + \int_{\Gamma} \partial_n(u_D) \phi_h v_h + G_h^{rhs}(v_h), \end{cases} \quad (3.28)$$

où l'on a développé les termes de pénalisation pour obtenir :

$$G_h(w_h, v_h) := \sigma h \sum_{F \in \mathcal{F}_h^{\Gamma}} \int_F \left[ \frac{\partial}{\partial n}(\phi_h w_h) \right] \left[ \frac{\partial}{\partial n}(\phi_h v_h) \right] + \sigma h^2 \sum_{T \in \mathcal{T}_h^{\Gamma}} \int_T \Delta(\phi_h w_h) \Delta(\phi_h v_h) \quad (3.29)$$

$$G_h^{rhs}(v_h) := -\sigma h^2 \sum_{T \in \mathcal{T}_h^{\Gamma}} \int_T (f \Delta(\phi_h v_h) + \Delta(\phi_h v_h) \Delta(u_D)) - \sigma h \sum_{F \in \mathcal{F}_h^{\Gamma}} \int_F \left[ \frac{\partial}{\partial n}(u_D) \right] \left[ \frac{\partial}{\partial n}(\phi_h v_h) \right]. \quad (3.30)$$

*Remarque 3.3.* Les pénalités données ici sont déterminées de la même façon que pour le problème homogène. Les explications page 18 sont donc valables ici également. La seule différence entre les deux méthodes est la présence de termes en  $u_D$ , issus des développements des différents termes.

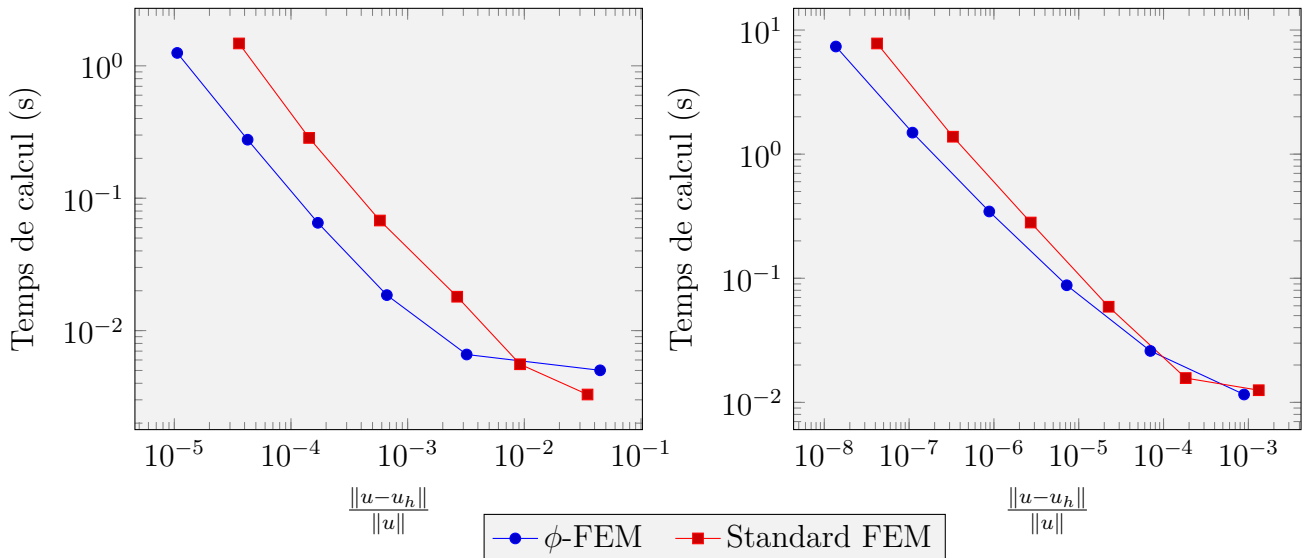


FIGURE 9 – Temps de calcul en fonction de l'erreur  $L^2$ . Gauche : méthodes  $\mathbb{P}^1$ . Droite : méthodes  $\mathbb{P}^2$ .

On réalise de nouveau différentes comparaisons entre cette méthode et la méthode standard appliquée au même problème. On obtient alors les figures 10 et 11.

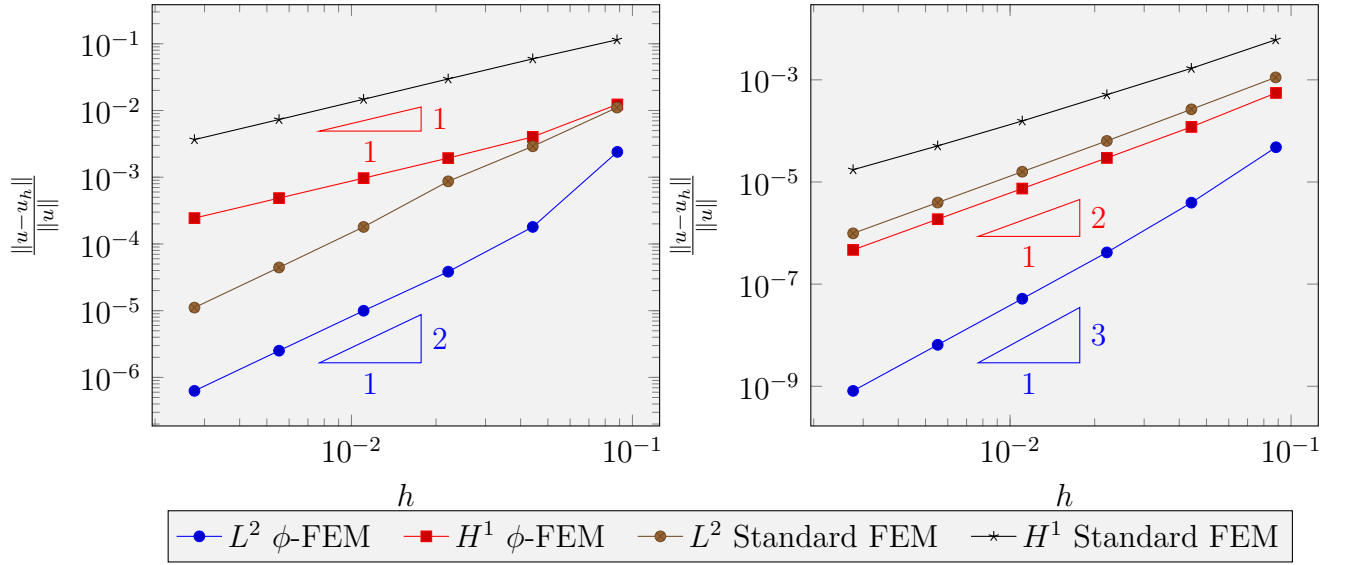


FIGURE 10 – Erreurs commises par les 2 méthodes. Gauche : méthodes  $\mathbb{P}^1$ . Droite : méthodes  $\mathbb{P}^2$ .

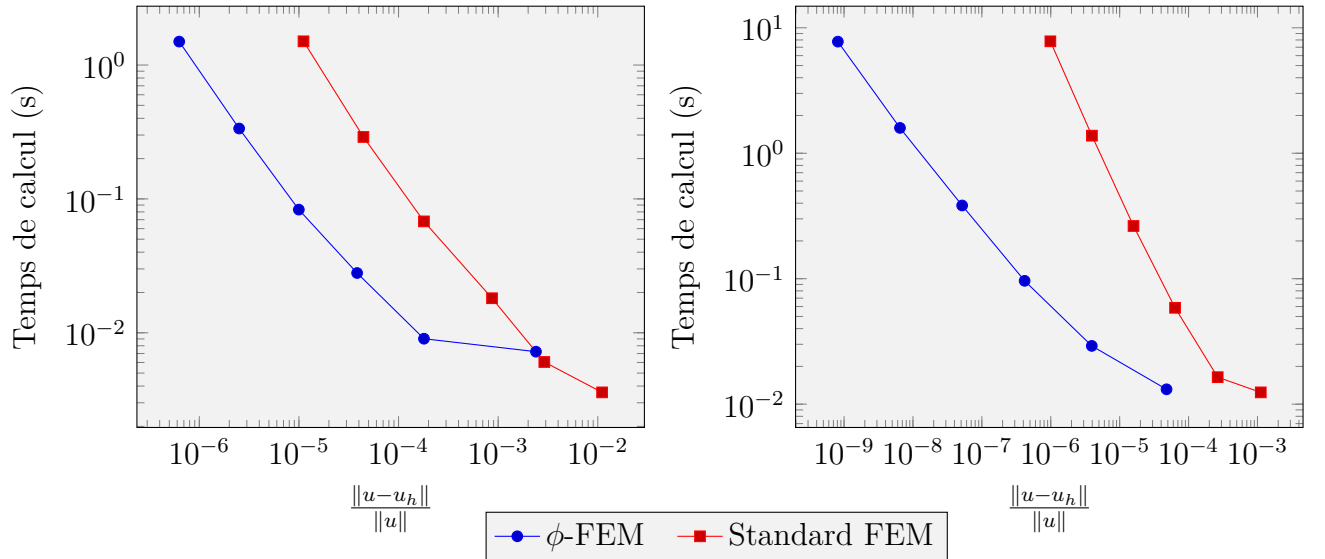


FIGURE 11 – Temps de calcul en fonction de l'erreur  $L^2$ . Gauche : méthodes  $\mathbb{P}^1$ . Droite : méthodes  $\mathbb{P}^2$ .

On remarque alors que la méthode  $\phi$ -FEM est ici très avantageuse : l'erreur commise est bien plus faible, pour un temps de calcul équivalent, notamment en utilisant une méthode  $\mathbb{P}^2$ .

## 4 La méthode $\phi$ -FEM pour des conditions de Neumann

Maintenant que nous avons vu une application de la méthode au problème de Poisson avec conditions de Dirichlet, homogènes ou non homogènes, nous allons pouvoir étendre la méthode à un deuxième type de problème. Pour cela, nous considérerons une équation

elliptique du second ordre, aux conditions de Neumann. On obtient le problème de référence suivant :

$$\begin{cases} -\Delta u + u &= f, \text{ sur } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} &= g, \text{ sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (4.1)$$

On considère ici une fonction  $f$  suffisamment régulière et dans la majorité de la théorie suivante, on prendra une fonction  $g$  constante, nulle.

## 4. 1. Description de la méthode

Dans le cas de conditions de Neumann, la méthode vue précédemment sera modifiée. En effet, la résolution ne peut plus se baser sur la multiplication du problème par la fonction  $\phi$ , à cause du caractère naturel des conditions de Neumann (Remarque 1.9 page 13).

Nous allons utiliser la forme duale du problème (4.1). Pour cela, nous aurons besoin de deux fonctions supplémentaires :  $y$  et  $p$ . Soit donc  $y$  une fonction vectorielle sur  $\Omega_h^\Gamma$  (l'intérieur de la partie violette sur la figure 7a page 20) telle que  $y = -\nabla u$ . Alors, la condition de Neumann  $\frac{\partial u}{\partial n}$  peut se réécrire  $y \cdot n = 0$ . De plus,  $(u, y)$  doit vérifier :

$$\begin{cases} y + \nabla u &= 0, \\ \operatorname{div} y + u &= f \end{cases} \quad \text{sur } \Omega_h^\Gamma. \quad (4.2)$$

On peut modifier une nouvelle fois la condition  $y \cdot n = 0$ . On a en effet la normale sur  $\Gamma$  qui est donnée par  $\frac{1}{|\nabla\phi|} \nabla\phi$ . Alors, on introduit l'équation :

$$y \cdot \nabla\phi + p\phi = 0 \quad \text{sur } \Omega_h^\Gamma. \quad (4.3)$$

Le problème (4.1) peut alors être reformulé en un système de 3 équations :

$$\begin{cases} y + \nabla u &= 0, & \text{sur } \Omega_h^\Gamma, \\ \operatorname{div} y + u &= f, & \text{sur } \Omega_h^\Gamma, \\ y \cdot \nabla\phi + p\phi &= 0, & \text{sur } \Omega_h^\Gamma. \end{cases} \quad (4.4)$$

On peut maintenant définir les différents espaces auxquels les fonctions auxiliaires appartiennent puis on pourra donner la formulation variationnelle associée au problème.

*Remarque 4.1.* On notera ici  $\Omega_h^i = \Omega_h \setminus \Omega_h^\Gamma$  (partie rose de la figure 7a) et  $\Gamma_h^i$  la frontière de cette partie.

Introduisons tout d'abord l'espace  $V_h^{(k)}$  qui est l'espace des polynômes  $\mathbb{P}^k$  Lagrange sur  $\Omega_h$ , c'est-à-dire

$$V_h^{(k)} := \left\{ v_h \in H^1(\Omega_h) : v_h|_T \in \mathbb{P}^k(T) \quad \forall T \in \mathcal{T}_h \right\}.$$

On introduit ensuite deux nouveaux espaces fonctionnels : l'espace où vivra  $y$  et celui où vivra  $p$ . Pour celui  $y$ , on introduit un espace fonctionnel de vecteurs de dimension  $d$  :

$$Z_h^{(k)} := \left\{ z_h \in H^1(\Omega_h^\Gamma)^d : z_h|_T \in \mathbb{P}^k(T)^d \quad \forall T \in \mathcal{T}_h^\Gamma \right\}.$$

Enfin, on introduit l'espace des fonctions  $\mathbb{P}_{k-1}$  sur les éléments de la frontière :

$$Q_h^{(k)} := \left\{ q_h \in L^2(\Omega_h^\Gamma) : q_h|_T \in \mathbb{P}^{k-1}(T) \quad \forall T \in \mathcal{T}_h^\Gamma \right\}.$$

On peut ainsi définir l'espace  $W_h^{(k)}$  comme le produit cartésien des 3 espaces précédents :

$$W_h^{(k)} = V_h^{(k)} \times Z_h^{(k)} \times Q_h^{(k)}.$$

Pour définir la formulation variationnelle à résoudre, nous passerons par plusieurs étapes : tout d'abord, on donnera la formulation variationnelle associée au problème initial (4.1) puis nous introduirons différents termes supplémentaires que nous détaillerons.

Tout d'abord, on multiplie (4.1) par une fonction test  $v \in V_h^{(k)}$  puis on intègre par parties. On a alors la formulation variationnelle

$$\int_{\Omega_h} \nabla u \cdot \nabla v - \int_{\partial\Omega_h} \nabla u \cdot nv + \int_{\Omega_h} uv = \int_{\Omega_h} fv. \quad (4.5)$$

On peut donc définir les formes

$$\begin{cases} a(u, v) &= \int_{\Omega_h} \nabla u \cdot \nabla v - \int_{\partial\Omega_h} \nabla u \cdot nv + \int_{\Omega_h} uv, \quad u, v \in V_h^{(k)} \\ l(v) &= \int_{\Omega_h} fv, \quad v \in V_h^{(k)}. \end{cases} \quad (4.6)$$

Nous allons maintenant pouvoir introduire le système (4.4) dans le problème variationnel et donc obtenir le problème à résoudre.

Soient  $\gamma_{div}$ ,  $\gamma_p$  et  $\gamma_u$  trois constantes et soit  $\sigma$  le paramètre de stabilisation, tous indépendants de  $h$ . Soient également  $z \in Z_h^{(k)}$  et  $q \in Q_h^{(k)}$  deux fonctions tests (correspondant aux variables  $y$  et  $p$ ).

*Remarque 4.2.* Dans la formulation suivante, on considérera  $\frac{1}{h}p\phi_h$  et  $\frac{1}{h}q\phi_h$  au lieu de  $p\phi_h$  et  $q\phi_h$  pour des raisons de conditionnement de la matrice éléments finis.

On peut alors introduire (4.4) dans l'idée des moindres carrés. On obtient finalement le problème

$$\begin{cases} \text{Trouver } (u_h, y_h, p_h) \in W_h^{(k)} \text{ telles que :} \\ a_h(u_h, y_h, p_h; v_h, z_h, q_h) = l_h(v_h, z_h, q_h), \quad \forall (v_h, z_h, q_h) \in W_h^{(k)}, \end{cases} \quad (4.7)$$

avec

$$\begin{aligned} a_h(u, y, p; v, z, q) &:= \int_{\Omega_h} \nabla u \cdot \nabla v + \int_{\partial\Omega_h} y \cdot nv + \int_{\Omega_h} uv \\ &+ \gamma_{div} \int_{\Omega_h^\Gamma} (\operatorname{div} y + u) \cdot (\operatorname{div} z + v) + \gamma_u \int_{\Omega_h^\Gamma} (y + \nabla u) \cdot (z + \nabla v) \\ &+ \frac{\gamma_p}{h^2} \int_{\Omega_h^\Gamma} (y \cdot \nabla \phi_h + \frac{1}{h} p \phi_h) \cdot (z \cdot \nabla \phi_h + \frac{1}{h} q \phi_h) + \sigma h \int_{\Gamma_h^i} \left[ \frac{\partial u}{\partial n} \right] \left[ \frac{\partial v}{\partial n} \right] \end{aligned} \quad (4.8)$$

et

$$l_h(v, z, q) := \int_{\Omega_h} fv + \gamma_{div} \int_{\Omega_h^\Gamma} f \cdot (\operatorname{div} z + v). \quad (4.9)$$

**Précisions sur les différents termes.** On décide maintenant d'explicitier les différents termes présents dans la forme bilinéaire et dans la forme linéaire.

Détaillons tout d'abord les différents termes de la forme bilinéaire

$$\begin{aligned}
& \underbrace{\gamma_{div} \int_{\Omega_h^\Gamma} (\operatorname{div} y + u) \cdot (\operatorname{div} z + v)}_{(1)} + \underbrace{\gamma_u \int_{\Omega_h^\Gamma} (y + \nabla u) \cdot (z + \nabla v)}_{(2)} \\
& + \underbrace{\frac{\gamma_p}{h^2} \int_{\Omega_h^\Gamma} (y \cdot \nabla \phi_h + \frac{1}{h} p \phi_h) \cdot (z \cdot \nabla \phi_h + \frac{1}{h} q \phi_h)}_{(3)} + \underbrace{\sigma h \int_{\Gamma_h^i} \left[ \frac{\partial u}{\partial n} \right] \left[ \frac{\partial v}{\partial n} \right]}_{(4)}. \quad (4.10)
\end{aligned}$$

- (1) Le premier terme est issu directement de la formulation (4.2) que l'on reconnaît dans les deux facteurs : sur la partition  $\Omega_h^\Gamma$ , on minimise  $\operatorname{div} y + u - f$ .
- (2) De même, on reconnaît ici la forme de la première ligne de (4.2). On intègre le produit des deux termes de bord correspondant à l'introduction de la variable auxiliaire  $y$ , en minimisant la différence entre  $y$  et  $-\nabla u$  et entre  $z$  et  $-\nabla v$ .
- (3) On reconnaît la forme de l'équation (4.3) considérée pour les couples  $(y, p)$  et  $(z, q)$ . On cherche donc à avoir la condition de bord  $(y \cdot \nabla \phi)$  le plus proche possible de  $p \phi_h$ .
- (4) Ici, on considère comme dans le cas de conditions de Dirichlet, une pénalité sur le saut du gradient sur la frontière.

## 4. 2. Comparaison avec une FEM standard

Comme pour les cas de conditions de Dirichlet, nous allons réaliser une comparaison entre une méthode de résolution standard et la  $\phi$ -FEM. Pour cela nous aurons besoin d'utiliser un package un peu plus permissif que *FEniCS*. Nous utiliserons donc le package *multiphenics* combiné à *FEniCS*, ce qui nous permettra de faire les restrictions dont nous avons besoin (restrictions sur les bords). On réalise ensuite les mêmes comparaisons que précédemment, c'est-à-dire des comparaisons de précision et de temps de calcul entre les deux méthodes. Pour cela, on considère le problème (4.1), en considérant  $u = \sin(x) \exp(y)$ . On prendra ici une condition de bord non-nulle, définie par :

$$\tilde{g} = \nabla u \cdot n + u \phi. \quad (4.11)$$

En se souvenant que l'on a  $n = \frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|}$ , on obtient la condition de bord :

$$\tilde{g} = \frac{\nabla u \cdot \nabla \phi}{|\nabla \phi|} + u \phi. \quad (4.12)$$

On considère donc ici une condition de Neumann non nulle. Comme dans le cas des conditions de Dirichlet non homogènes, il est nécessaire de modifier légèrement le terme linéaire de la formulation variationnelle. On ajoute à la forme linéaire un terme qui prendra en compte cette condition, c'est-à-dire le terme :

$$- \frac{\gamma_p}{h^2} \int_{\Omega_h^\Gamma} \tilde{g} |\nabla \phi| (z \cdot \nabla \phi + \frac{1}{h} q \phi). \quad (4.13)$$

*Remarque 4.3.* Ce nouveau terme est bien évidemment issu du terme (3) de (4.10). En effet, lorsque l'on introduit une condition non-nulle  $g$ , on cherche à minimiser  $y \cdot \frac{\nabla \phi_h}{|\nabla \phi_h|} + g + p \frac{\phi}{|\nabla \phi|}$  au bord  $(\nabla u \cdot n - g)$ . Cela revient donc à modifier (3) par :

$$\frac{\gamma_p}{h^2} \int_{\Omega_h^\Gamma} (y \cdot \nabla \phi_h + g |\nabla \phi_h| + \frac{1}{h} p \phi_h) \cdot (z \cdot \nabla \phi_h + \frac{1}{h} q \phi_h).$$

En passant le terme ne dépendant pas de  $y$  dans la forme linéaire, on obtient bien (4.13).

On travaille sur le même domaine que pour les comparaisons de la section 3. 6., c'est-à-dire le cercle de rayon  $\frac{\sqrt{2}}{4}$  et de centre  $(0.5, 0.5)$ . On considère  $\sigma = 0.01$ . On obtient les résultats présentés en figures 12 et 13.

On voit encore une fois que la méthode  $\phi$ -FEM est très avantageuse sur un exemple simple. Ce gain en terme de précision se confirme lorsque l'on considère des méthodes  $\mathbb{P}^2$ .

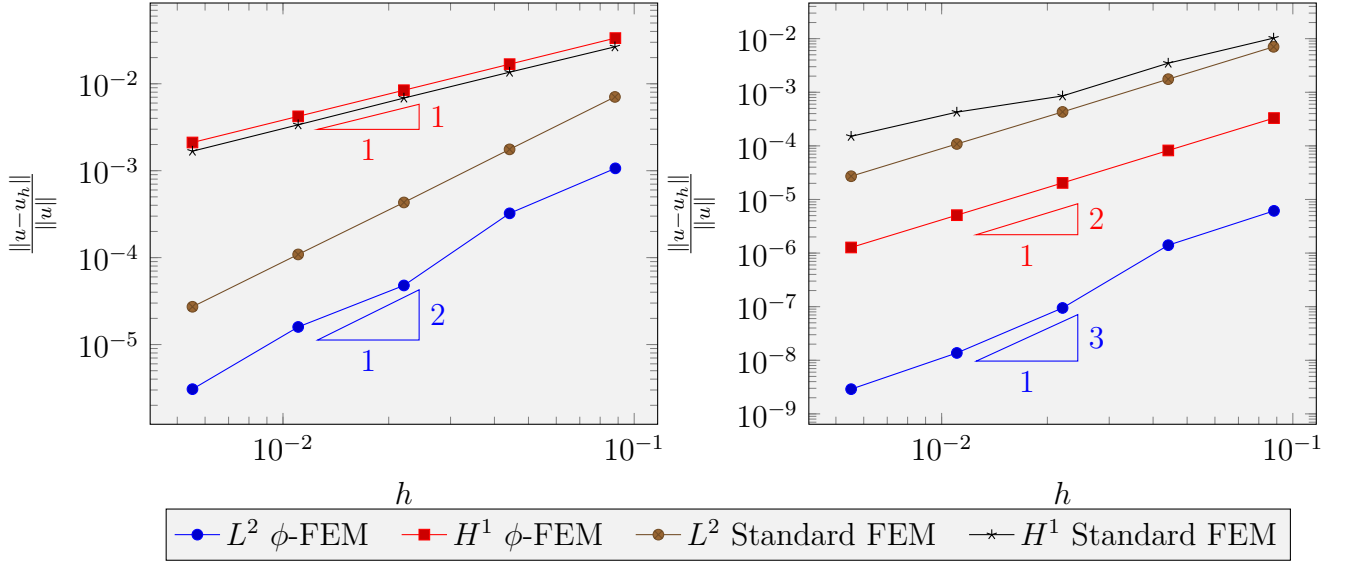


FIGURE 12 – Erreurs commises par les 2 méthodes. Gauche : méthodes  $\mathbb{P}^1$ . Droite : méthodes  $\mathbb{P}^2$ .

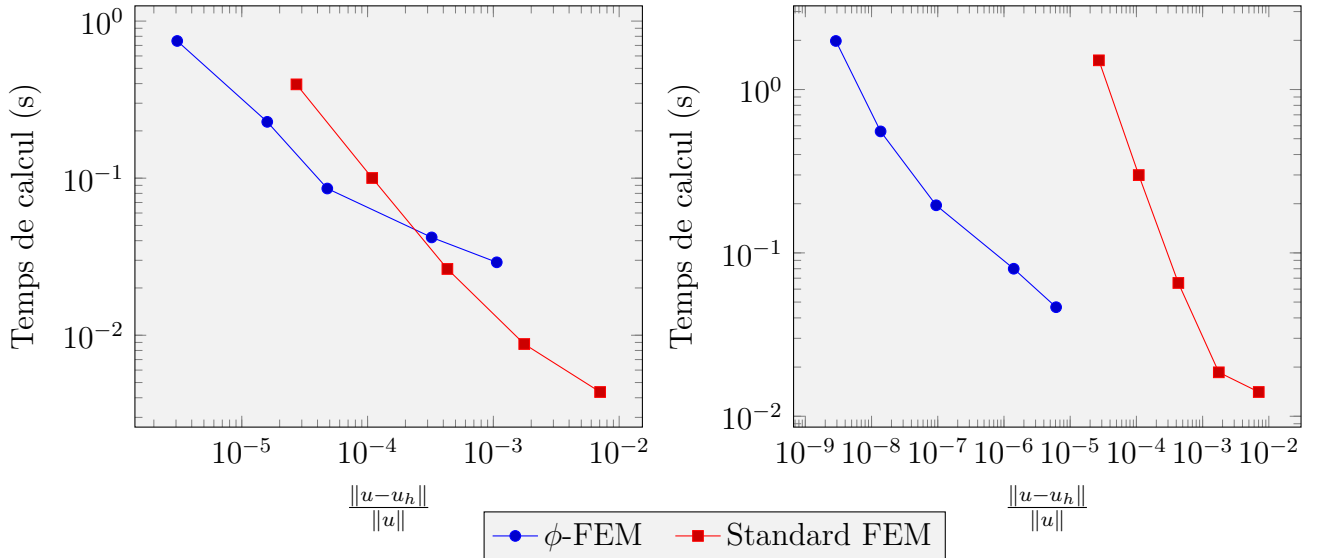


FIGURE 13 – Temps de calcul en fonction de l'erreur  $L^2$ . Gauche : méthodes  $\mathbb{P}^1$ . Droite : méthodes  $\mathbb{P}^2$ .



## 5 La $\phi$ -FEM pour des conditions Dirichlet-Neumann

### 5.1. Présentation de la première méthode

On considère ici le problème

$$\begin{cases} -\Delta u &= f \text{ sur } \Omega \\ u &= u_D \text{ sur } \Gamma_D \\ \frac{\partial u}{\partial n} &= g \text{ sur } \Gamma_N \end{cases} \quad (5.1)$$

avec  $f$  et  $g$  suffisamment régulières,  $\Gamma_D \neq \emptyset$  et  $\Omega$  le cercle de rayon  $\frac{\sqrt{2}}{4}$  et de centre  $(0.5, 0.5)$ .

Le but va être ici de combiner la méthode  $\phi$ -FEM vue pour un problème avec conditions de Dirichlet et celle pour un problème avec conditions de Neumann.

On notera par la suite  $\Omega_h^i = \Omega_h \setminus \Omega_h^\Gamma$  et  $\Gamma_h^i$  la frontière de cette partie. De plus, on notera  $\Gamma = \Gamma_D \cup \Gamma_N$ . Pour l'exemple considéré, on prendra pour  $\Gamma_D$  la partie supérieure du cercle ( $y > 0.5$ ) et pour  $\Gamma_N$  la partie inférieure. On aura donc un sous-maillage  $\Omega_h^{\Gamma_D}$  pour les conditions de Dirichlet et un sous-maillage  $\Omega_h^{\Gamma_N}$  pour les conditions de Neumann. Définissons maintenant les espaces fonctionnels que l'on utilisera.

Introduisons tout d'abord l'espace  $V_h^{(k)}$ , l'espace des polynômes  $\mathbb{P}^k$  Lagrange sur  $\Omega_h$ , c'est-à-dire :

$$V_h^{(k)} := \{v_h \in H^1(\Omega_h) : v_h|_T \in \mathbb{P}^k(T) \quad \forall T \in \mathcal{T}_h\}.$$

On introduit ensuite l'espace où vivra  $y$  et celui où vivra  $p$ . On introduit donc un espace fonctionnel de vecteurs de dimension  $d$  :

$$Z_h^{(k)} := \{z_h \in H^1(\Omega_h^{\Gamma_N})^d : z_h|_T \in \mathbb{P}^k(T)^d \quad \forall T \in \mathcal{T}_h^\Gamma\}.$$

Enfin, on introduit l'espace des fonctions  $\mathbb{P}_{k-1}$  sur les éléments de la frontière :

$$Q_h^{(k)} := \{q_h \in L^2(\Omega_h^{\Gamma_N}) : q_h|_T \in \mathbb{P}^{k-1}(T) \quad \forall T \in \mathcal{T}_h^\Gamma\}.$$

On peut alors définir l'espace  $W_h^{(k)}$  comme le produit cartésien des 3 espaces précédents :

$$W_h^{(k)} = V_h^{(k)} \times Z_h^{(k)} \times Q_h^{(k)}.$$

On aura ici besoin de définir une nouvelle fonction  $\phi_D$  qui ne s'annulera pas sur le bord  $\Gamma_N$ , ce qui permettra de multiplier par  $\phi_D$  (comme dans le cas de conditions de Dirichlet).

On définit la fonction  $\phi_D$  comme suit :

$$\begin{cases} \phi_D(x, y) &= \phi(x, y), \text{ si } (x, y) \in \Gamma_D, \\ \phi_D(x, y) &= \phi(x, y) - 0.5 + y, \text{ si } (x, y) \in \Gamma_N. \end{cases} \quad (5.2)$$

On peut maintenant construire la forme bilinéaire et la forme linéaire du problème variationnel. Pour cela, on multiplie le problème initial par  $\phi_D$ , on utilise ensuite la même méthode que pour le cas Neumann, et on obtient les formes suivantes :

$$\begin{aligned} a(u, y, p; v, z, q) &= \int_{\Omega_h} \nabla(\phi_D u) \cdot \nabla(\phi_D v) - \int_{\Gamma_D} \nabla(\phi_D u) \cdot n \phi_D v + \int_{\Gamma_N} y \cdot n v \\ &+ \gamma \int_{\Omega_h^{\Gamma_N}} (\nabla(\phi_D u) + y) \cdot (\nabla(\phi_D v) + z) + \frac{\gamma}{h^2} \int_{\Omega_h^{\Gamma_N}} (y \cdot \nabla \phi - \frac{p \phi}{h} + g) \cdot (z \cdot \nabla \phi - \frac{q \phi}{h}) \\ &+ \gamma \int_{\Omega_h^{\Gamma_N}} \operatorname{div} y \cdot \operatorname{div} z + \sigma h \int_{\Gamma_h} \left[ \frac{\partial(\phi_D u)}{\partial n} \right] \left[ \frac{\partial(\phi_D v)}{\partial n} \right] \end{aligned} \quad (5.3)$$

et

$$l(v, z, q) = \int_{\Omega_h} f \phi_D v + \gamma \int_{\Omega_h^{\Gamma_N}} f \cdot \operatorname{div} z - \int_{\Omega_h} \nabla(u_D) \cdot \nabla(\phi_D v) + \int_{\Gamma_D} \nabla(u_D) \cdot n \phi_D v \\ - \gamma \int_{\Omega_h^{\Gamma_N}} (\nabla(u_D) + y) \cdot (\nabla(\phi_D v) + z) - \sigma h \int_{\Gamma_h} \left[ \frac{\partial(u_D)}{\partial n} \right] \left[ \frac{\partial(\phi_D v)}{\partial n} \right]. \quad (5.4)$$

*Remarque 5.1.* En réalité, cette méthode revient à combiner les deux méthodes vues précédemment. On applique la méthode pour les conditions de Dirichlet sur  $\Gamma_D$  (en violet sur la figure 14) et la méthode pour les conditions de Neumann sur  $\Gamma_N$  (en cyan sur la figure 14).

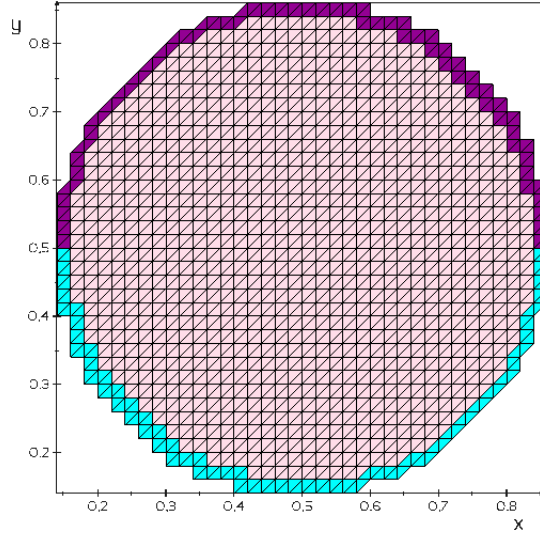


FIGURE 14 – En cyan,  $\Omega_h^{\Gamma_N}$ , en violet  $\Omega_h^{\Gamma_D}$  et en rose  $\Omega_h$ .

## 5. 2. Convergence et comparaison avec une FEM standard

Maintenant que nous avons présenté la méthode, nous allons pouvoir faire comme dans les sections précédentes : analyser la vitesse de convergence et comparer avec une méthode standard.

Pour cela, on considérera le problème (5.1), la fonction  $\phi(x, y) = -\frac{1}{8} + (x - 0.5)^2 + (y - 0.5)^2$  et la fonction  $\phi_D$  définie en (5.2). On travaillera sur le domaine représenté sur la figure 14. On considérera également les conditions suivantes :

$$u = \sin(x) \times \exp(y), \quad (5.5)$$

$$u_D = \sin(x) \times \exp(y) \times (1 + \phi), \quad (5.6)$$

$$g = \frac{\partial u}{\partial n} + u\phi. \quad (5.7)$$

Soit également  $\sigma = \gamma_u = \gamma_p = \gamma_{div} = 1.0$ . On réalise maintenant les mêmes comparaisons que dans les sections précédentes, c'est-à-dire la précision et le temps de calcul. On représente les résultats obtenus sur la figure 15.

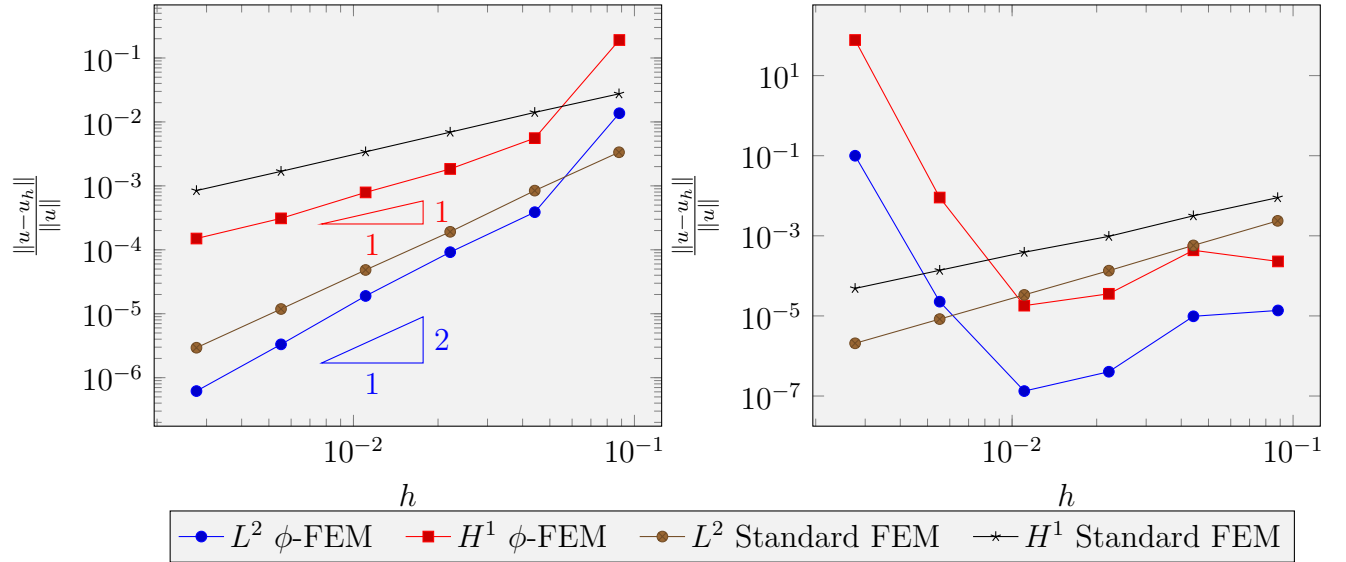


FIGURE 15 – Erreurs commises par les 2 méthodes. Gauche : méthodes  $\mathbb{P}^1$ . Droite : méthodes  $\mathbb{P}^2$ .

**Problème.** Malheureusement, cette méthode présente un inconvénient majeur. En effet, comme nous l'avons expliqué, nous considérons une fonction  $\phi_D$  nulle sur  $\Gamma_D$  et non nulle sur  $\Gamma_N$ . Cela revient à créer une discontinuité de la solution entre  $\Gamma_D$  et  $\Gamma_N$ , ce qui se retrouve sur la figure 15. Nous allons maintenant essayer de trouver une nouvelle méthode pour pallier ce problème.

### 5. 3. Nouvelle version de la méthode

On choisit donc de définir une nouvelle version de la méthode. Pour cela, on se base sur la version de la méthode pour des conditions de Neumann, à laquelle on va ajouter un nouveau terme permettant de considérer les conditions de Dirichlet.

On considère le problème

$$\begin{cases} -\Delta u &= f \text{ sur } \Omega \\ u &= u_D \text{ sur } \Gamma_D \\ \frac{\partial u}{\partial n} &= g \text{ sur } \Gamma_N, \end{cases} \quad (5.8)$$

et les mêmes espaces que précédemment. Cependant, on ne définit pas ici de nouvelle fonction  $\phi_D$ , on considère seulement l'expression initiale de  $\phi$ .

On a donc la formulation variationnelle :

$$\begin{cases} a(u, v) &= \int_{\Omega_h} \nabla u \cdot \nabla v - \int_{\partial\Omega_h} \nabla u \cdot nv, \quad u, v \in V_h^{(k)} \\ l(v) &= \int_{\Omega_h} f v, \quad v \in V_h^{(k)}, \end{cases} \quad (5.9)$$

où l'on considère  $\partial\Omega_h = \Gamma_D \cup \Gamma_N$ . On peut donc réécrire (5.9) sous la forme :

$$\begin{cases} a(u, v) &= \int_{\Omega_h} \nabla u \cdot \nabla v - \int_{\Gamma_D} \nabla u \cdot nv - \int_{\Gamma_N} \nabla u \cdot nv, \quad u, v \in V_h^{(k)} \\ l(v) &= \int_{\Omega_h} f v, \quad v \in V_h^{(k)}. \end{cases} \quad (5.10)$$

On se base donc sur les formes définies dans la section 4. On a tout d'abord :

$$\begin{cases} \text{Trouver } (u_h, y_h, p_h) \in W_h^{(k)} \text{ telles que} \\ a_h^1(u_h, y_h, p_h; v_h, z_h, q_h) = l_h(v_h, z_h, q_h), \quad \forall (v_h, z_h, q_h) \in W_h^{(k)}, \end{cases} \quad (5.11)$$

avec

$$\begin{aligned} a_h^1(u, y, p; v, z, q) &:= \int_{\Omega_h} \nabla u \cdot \nabla v + \int_{\Gamma_N} y \cdot nv \\ &\quad + \gamma_{div} \int_{\Omega_h^{\Gamma_N}} \operatorname{div} y \cdot \operatorname{div} z + \gamma_u \int_{\Omega_h^{\Gamma_N}} (y + \nabla u) \cdot (z + \nabla v) \\ &\quad + \frac{\gamma_p}{h^2} \int_{\Omega_h^{\Gamma_N}} (y \cdot \nabla \phi_h + \frac{1}{h} p \phi_h) \cdot (z \cdot \nabla \phi_h + \frac{1}{h} q \phi_h) + \sigma h \int_{\Gamma_N^i} \left[ \frac{\partial u}{\partial n} \right] \left[ \frac{\partial v}{\partial n} \right] \end{aligned} \quad (5.12)$$

et

$$l_h(v, z, q) := \int_{\Omega_h} f v + \gamma_{div} \int_{\Omega_h^{\Gamma_N}} f \cdot \operatorname{div} z. \quad (5.13)$$

On introduit tout d'abord le terme de bord sur la frontière Dirichlet  $\Gamma_D$  dans la formulation variationnelle et on a donc

$$a_h^2(u, y, p; v, z, q) = a_h^1(u, y, p; v, z, q) - \int_{\Gamma_D} \nabla u \cdot nv. \quad (5.14)$$

Etant donné la modification du terme de bord, il est tout d'abord nécessaire d'introduire une nouvelle pénalité sur le saut de gradient à la frontière. On introduit dans la forme bilinéaire un nouveau terme sur  $\Gamma_D^i$  donné par

$$\sigma_D h \int_{\Gamma_D^i} \left[ \frac{\partial u}{\partial n} \right] \left[ \frac{\partial v}{\partial n} \right]. \quad (5.15)$$

Il nous reste à ajouter un terme semblable à ceux que l'on a vus lors de la construction de la forme bilinéaire du cas Neumann. On considère donc un terme qui prendra en compte le problème initial et les variables auxiliaires sur  $\Gamma_D$  ainsi que la condition de bord  $u_D$ . On introduit ainsi un terme de la forme

$$\frac{1}{h^2} \int_{\Omega_h^{\Gamma_D}} (u - u_D - \frac{1}{h} p \phi_h) (v - \frac{1}{h} q \phi_h). \quad (5.16)$$

On décompose ce terme en fonction des variables et on ajoute à la forme bilinéaire les termes ne dépendant pas de  $u_D$  et à la forme linéaire les deux termes en  $u_D$ . On obtient finalement les deux formes

$$\begin{aligned} a_h(u, y, p; v, z, q) &:= \int_{\Omega_h} \nabla u \cdot \nabla v + \int_{\Gamma_N} y \cdot nv - \int_{\Gamma_D} \nabla u \cdot nv \\ &\quad + \gamma_{div} \int_{\Omega_h^{\Gamma_N}} \operatorname{div} y \cdot \operatorname{div} z + \gamma_u \int_{\Omega_h^{\Gamma_N}} (y + \nabla u) \cdot (z + \nabla v) \\ &\quad + \frac{\gamma_p}{h^2} \int_{\Omega_h^{\Gamma_N}} (y \cdot \nabla \phi_h + \frac{1}{h} p \phi_h) \cdot (z \cdot \nabla \phi_h + \frac{1}{h} q \phi_h) + \sigma h \int_{\Gamma_N^i} \left[ \frac{\partial u}{\partial n} \right] \left[ \frac{\partial v}{\partial n} \right] \\ &\quad + \frac{\gamma_D}{h^2} \int_{\Omega_h^{\Gamma_D}} (u - \frac{1}{h} p \phi_h) (v - \frac{1}{h} q \phi_h) + \sigma_D h \int_{\Gamma_D^i} \left[ \frac{\partial u}{\partial n} \right] \left[ \frac{\partial v}{\partial n} \right] \end{aligned} \quad (5.17)$$

et :

$$l_h(v, z, q) := \int_{\Omega_h} f v + \gamma_{div} \int_{\Omega_h^{\Gamma_N}} f \cdot \operatorname{div} z + \frac{\gamma_D}{h^2} \int_{\Omega_h^{\Gamma_D}} u_D (v - \frac{1}{h} q \phi_h), \quad (5.18)$$

où  $\gamma_D$  est une constante ne dépendant pas de  $h$ .

*Remarque 5.2.* On ajoute également une pénalité d'ordre 2 sur la partie Dirichlet sous la forme

$$\sigma_D h^2 \int_{\Omega_h \Gamma_D} (-\Delta u + u - f) (-\Delta v) .$$

*Remarque 5.3.* On considère ici le problème (5.8) pour des conditions mixtes. Il est important de prendre  $\Gamma_D \neq \emptyset$ , afin que le problème soit bien posé.

*Remarque 5.4.* On a en réalité ici introduit un nouveau schéma de façon implicite : un schéma que l'on pourra appeler schéma dual, permettant de traiter les conditions de Dirichlet dans la même idée que les conditions de Neumann. Ce schéma est également stable numériquement parlant mais un peu plus compliqué à introduire et plus coûteux en terme de résolution numérique, puisque l'on ajoute des variables auxiliaires (ce qui implique une augmentation de la dimension de la matrice éléments finis).

## 5. 4. Nouveaux résultats

On considère ici une fois de plus le même problème que dans le cas précédent, en choisissant comme solution exacte

$$u_{ex} = \sin(x) \exp(y) . \quad (5.19)$$

On prend également  $\Gamma_D = \{(x, y) \in \partial\Omega, x \geq 0.5\}$  et  $\Gamma_N = \partial\Omega \setminus \Gamma_D$ . On présente les mêmes résultats que pour les autres méthodes : comparaisons de l'erreur et du temps de calcul (assemblage des matrices éléments finis et résolution des systèmes).

On pose pour les différents paramètres :  $\sigma = 0.01$ ,  $\gamma_u = \gamma_p = \gamma_{div} = 1.0$  et  $\gamma_D = \sigma_D = 20.0$ . On obtient les résultats présentés aux figures 16 et 17.

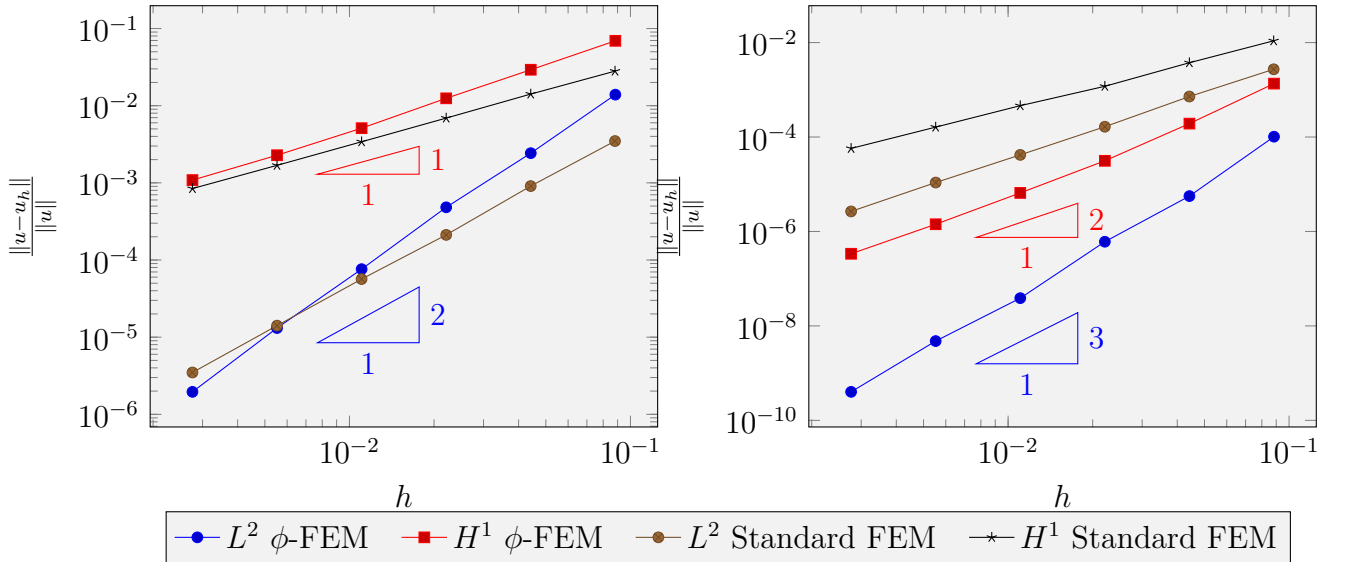


FIGURE 16 – Erreurs commises par les 2 méthodes. Gauche : méthodes  $\mathbb{P}^1$ . Droite : méthodes  $\mathbb{P}^2$ .

On voit sur la figure 16 que l'erreur obtenue en  $\mathbb{P}^1$  est proche de celle obtenue avec la méthode précédente, bien que légèrement supérieure si l'on compare avec la figure 15. Cependant, cette erreur (notamment en norme  $H^1$ ), est beaucoup plus "stable", ce qui se voit très bien lors de l'utilisation d'une méthode  $\mathbb{P}^2$  Lagrange. Cela est dû à la continuité de la solution approchée, ce qui n'était pas le cas avec la méthode précédente. L'ordre de convergence numérique correspond alors à l'ordre de convergence annoncé par la théorie.

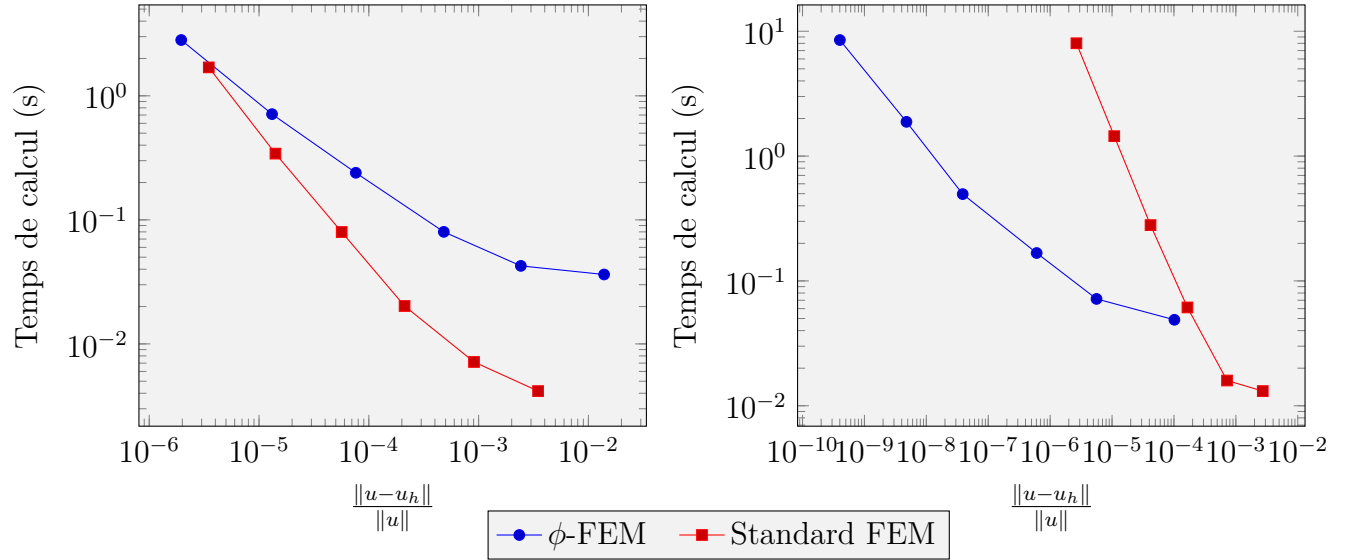


FIGURE 17 – Temps de calcul en fonction de l’erreur  $L^2$ . Gauche : méthodes  $\mathbb{P}^1$ . Droite : méthodes  $\mathbb{P}^2$ .

## 5. 5. Remarques et conclusions

On suppose maintenant que l’on modifie le problème (5.8) par le problème

$$\begin{cases} -\Delta u + u &= f \text{ sur } \Omega \\ u &= u_D \text{ sur } \Gamma_D \\ \frac{\partial u}{\partial n} &= g \text{ sur } \Gamma_N, \end{cases} \quad (5.20)$$

afin d’obtenir un problème bien posé même pour des conditions de Neumann pures. Il est alors nécessaire de modifier légèrement le schéma mais nous n’explicitons pas les formes utilisées.

En raison de la définition du schéma, la méthode vérifie évidemment le même gain dans le cas de conditions de Neumann pures que la méthode définie en 4. Cependant, le temps de calcul peut être légèrement augmenté lors de la sélection des cellules et de la construction des mesures utilisées, puisqu’il faudra vérifier une condition d’appartenance à la frontière Neumann ou à la frontière Dirichlet (qui dans le cas Neumann strict sera vide).

Il est important de vérifier si son utilisation dans le cas de conditions de Dirichlet pures peut être aussi intéressante que la méthode présentée dans la section 3. On décide donc de faire une comparaison de l’erreur en fonction de la précision sur le problème (5.20), en considérant  $\Gamma_D = \partial\Omega$  et  $\Gamma_N = \emptyset$ . On obtient alors la figure 18.

On voit donc que, dans la pratique, il sera intéressant de différencier les cas et d’utiliser une méthode correspondant à la situation considérée :

- si  $\Gamma_D \neq \emptyset$  et  $\Gamma_N \neq \emptyset$ , on applique la méthode pour des conditions mixtes ;
- si  $\Gamma_D = \Gamma$ , on applique plutôt la méthode pour conditions de Dirichlet pures, définie en 3, pour des raisons de temps de calcul ;
- si  $\Gamma_N = \Gamma$ , on applique de préférence la méthode définie en 4.

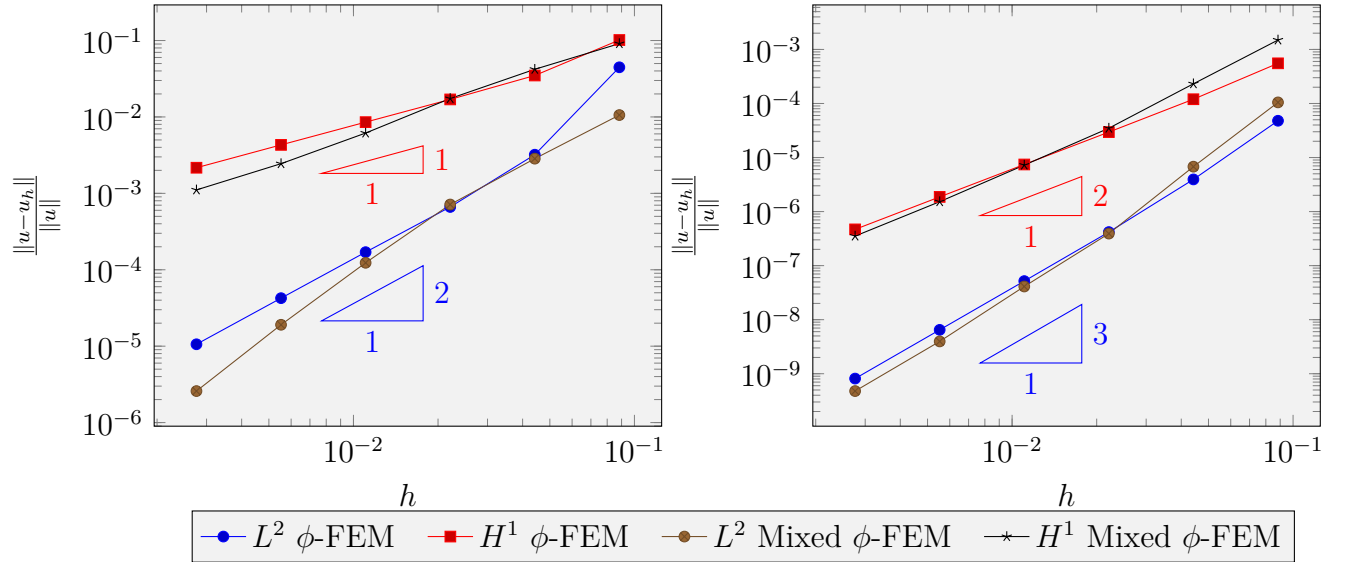


FIGURE 18 – Erreurs commises par les 2 méthodes pour des conditions de Dirichlet pures. Gauche :  $\mathbb{P}^1$ . Droite :  $\mathbb{P}^2$ .

## 6 Création de $\phi$

On s'intéresse maintenant à la construction de la fonction  $\phi$ . En effet, jusqu'à présent, nous avons considéré une forme exacte de la fonction  $\phi$  puis construit les différents domaines à partir de cette fonction. Cependant, dans la pratique, on ne connaît pas l'expression exacte de cette fonction, on dispose en général uniquement d'un nuage de points composant la frontière du domaine.

Une étape importante de la méthode est donc le passage du nuage de points à la création du domaine grâce à la fonction level-sets. Pour cela, on considère l'exemple d'un cercle centré en  $(0.5, 0.5)$  et de rayon  $\frac{\sqrt{2}}{4}$ , que l'on discrétisera pour construire  $\phi$ .

*Rappel.* La fonction  $\phi$  étant une fonction level-sets, elle doit vérifier les trois conditions suivantes :

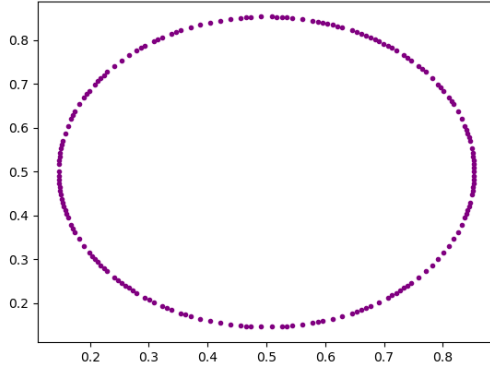
- être positive en dehors du domaine ;
- être nulle sur la frontière du domaine ;
- être négative à l'intérieur du domaine.

### 6. 1. Méthode de construction

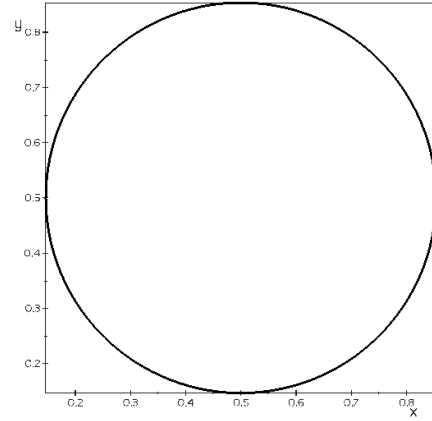
Dans le cas de notre exemple on cherche donc une fonction négative à l'intérieur du cercle, nulle sur le cercle et positive ailleurs. Une fonction qui semble correspondre à ce critère serait la distance signée.

Nous allons donc chercher à construire la distance signée (notée  $\phi$ ) aux points du nuage initial. C'est-à-dire que  $\phi$  vérifiera :

- Pour tout point  $A(x, y)$  du nuage,  $\phi(x, y) = 0$  ;
- Pour tout point  $A(x, y)$  n'appartenant pas au nuage,  $\phi(x, y) = \pm \|AH\|$  où  $H$  est le projeté orthogonal de  $A$  sur le nuage.



(a) Nuage de points initial.



(b) Cercle formé par le nuage de points.

FIGURE 19

Nous allons maintenant décrire toutes les étapes menant du nuage de points à la construction de  $\phi$  puis à l'application de la  $\phi$ -FEM.

- i. Création du nuage de points  $M = \{m_i\}$  ;
- ii. Création d'un polygone  $P$  de sommets  $m_i$  ;
- iii. Génération d'un maillage (non régulier en général)  $\mathcal{T}_h$  sur le polygone  $P$  ;
- iv. Génération d'un maillage sur la frontière de  $\mathcal{T}_h$ , noté  $\mathcal{T}_h^\Gamma$  ;
- v. Génération d'un maillage de fond (par exemple carré unité autour du cercle), régulier, noté  $\mathcal{T}$  ;
- vi. Détermination de  $\phi$  pour tout sommet  $A$  de  $\mathcal{T}$  :
  - Récupération des coordonnées des deux points les plus proches de  $A$ , situés sur le cercle et consécutifs ;
  - Calcul des coordonnées  $(x_H, y_H)$  de  $H$ , projeté orthogonal de  $A$  sur le segment reliant les deux points déterminés précédemment ;
  - Vérification de l'appartenance de  $A$  au maillage  $\mathcal{T}_h$  ;
  - Calcul de la distance entre  $A$  et  $H$  ;
  - Changement du signe si  $A$  est sur le maillage  $\mathcal{T}_h$  ;
- vii. Création du nouveau domaine en utilisant  $\phi$  sur le maillage  $\mathcal{T}$ .

Détaillons à présent la construction dans le cadre de l'exemple du cercle. On dispose d'un nuage de points formant un cercle (voir figure 19a). On choisit de relier tous les points consécutifs par des segments pour construire un polygone et obtenir la figure 19b.

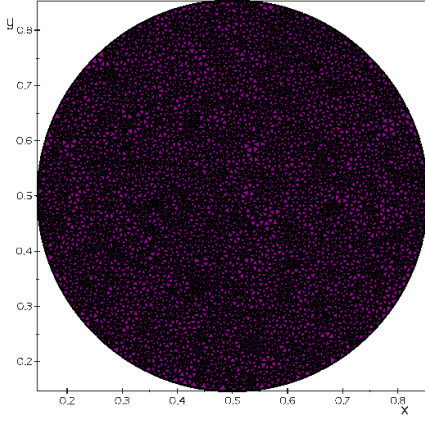
On dispose alors d'un polygone (fermé) et on construit un maillage  $\mathcal{T}_h$  sur ce polygone (à l'aide de *mshr* par exemple ou bien du logiciel GMSH). On obtient la figure 20a. On utilise ensuite une fonction implémentée directement dans le package *FEniCS*, qui nous permet d'extraire un maillage de la frontière de  $\mathcal{T}_h$ . On obtient un maillage du bord du cercle, que l'on notera  $\mathcal{T}_h^\Gamma$ .



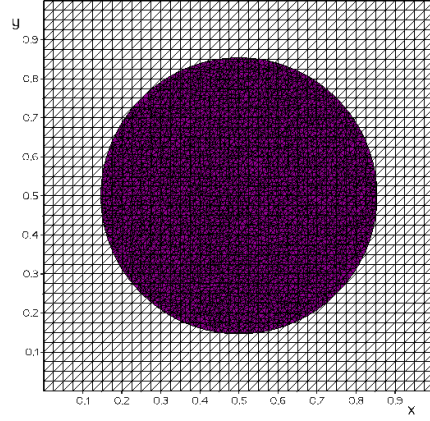
Mesh on the scatter plot with 6251 cells

3200 elements of size 0.03535533905932741 on the white mesh

6251 elements of size 0.01767594800694842 on the purple mesh



(a) Maillage initial.



(b) Maillages  $\mathcal{T}_h$  et  $\mathcal{T}$ .

FIGURE 20

On a maintenant besoin d'un nouveau maillage, qui sera utilisé pour les calculs et pour la résolution du problème éléments finis. On construit donc un maillage de fond, sur un rectangle (plus grand que le cercle), régulier et plus grossier que le maillage  $\mathcal{T}_h$ . On obtient la figure 20b. On dispose maintenant de tous les points nécessaires à la construction de  $\phi$  : les sommets du maillage de la frontière (c'est-à-dire les points du nuage de points) et les sommets du maillage grossier.

Soit maintenant  $A(x, y)$ , un sommet du maillage  $\mathcal{T}$ . A l'aide de *FEniCS*, on récupère l'élément de  $\mathcal{T}_h^\Gamma$  le plus proche de  $A$ , c'est-à-dire un segment. On peut extraire les coordonnées des deux extrémités de ce segment et on obtient ainsi  $p_1$  et  $p_2$  qui sont les deux points de  $\mathcal{T}_h^\Gamma$  les plus proches de  $A$ .

Pour calculer la distance entre  $A$  et le nuage de points, il reste donc à projeter  $A$  sur le segment  $[p_1, p_2]$ . On construit le vecteur  $p_1 p_2$  et on calcule :

$$p_1 H = \frac{\langle p_1 p_2, p_1 A \rangle}{\|p_1 p_2\|^2} \times p_1 p_2. \quad (6.1)$$

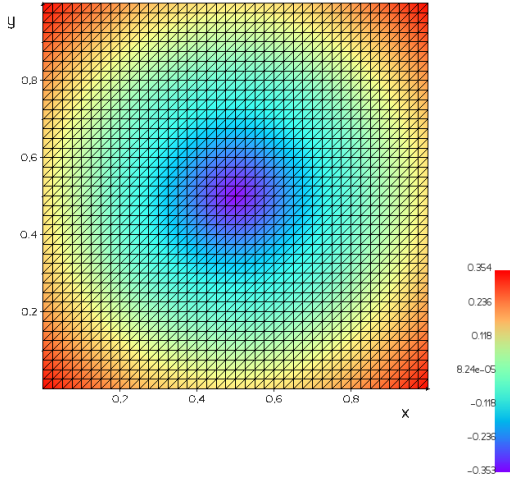
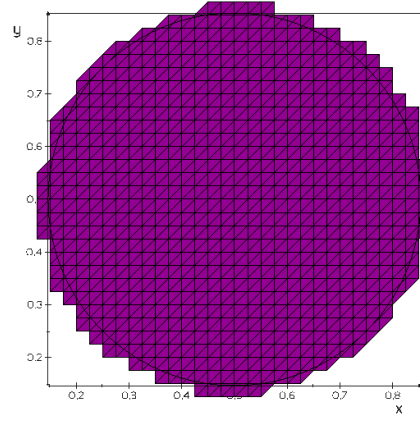
On détermine les coordonnées du projeté  $H$  qui sont données par :

$$\begin{cases} x_H &= x + p_1 H \\ y_H &= y + p_1 H. \end{cases} \quad (6.2)$$

On calcule la distance entre  $A$  et  $H$  et on obtient la distance de  $A$  au nuage de points. Finalement, on détermine à l'aide de *FEniCS* si le point  $A$  est à l'intérieur de  $\mathcal{T}_h$  puis on change le signe de la distance si c'est le cas. On obtient ainsi la distance signée de  $A$  au nuage de points.

On répète cela pour tout point du maillage  $\mathcal{T}$  et on obtient une discrétisation de la fonction  $\phi$  recherchée. La figure 21a représente les valeurs de la fonction  $\phi$  pour l'exemple du cercle.

On peut finalement construire le sous-maillage de  $\mathcal{T}$  sur lequel on travaillera par la suite en appliquant la méthode habituelle et on obtient la figure 21b.

(a) Valeurs de la fonction  $\phi$  sur  $\mathcal{T}$ .

(b) Sous-maillage créé à partir de la fonction level-sets.

FIGURE 21

*Remarque 6.1.* En pratique, on sélectionne les points que l'on projette : si  $p$  est déjà sur le maillage  $\mathcal{T}_h^\Gamma$ , on ne fait pas de projection, la distance signée est nulle.

*Remarque 6.2.* Dans la pratique, il sera nécessaire d'effectuer certaines vérifications supplémentaires et d'ajouter certaines conditions. En effet, il se peut que le projeté orthogonal d'un point ne soit pas sur le segment entre les deux plus proches voisins. Il sera nécessaire de modifier cela. Deux méthodes sont envisageables :

- on modifie l'un des deux voisins pour que le projeté soit alors sur ce segment ;
- on impose alors une valeur au projeté : l'un des deux sommets du segment.

La méthode retenue après différents tests est de modifier le projeté par l'un des deux sommets du segment. Pour cela, on paramétrise le segment  $[p_1, p_2]$  et on vérifie si  $H$  appartient au segment. On utilise le fait que tout point du segment  $[p_1, p_2]$  s'exprime sous la forme  $(1 - t)p_1 + tp_2$ . On détermine alors la valeur de  $t$  pour le projeté  $H$  et en fonction de la valeur de  $t$ , on applique :

- si  $t \in [0, 1]$  alors  $H \in [p_1, p_2]$  et donc le projeté est bien  $H$  ;
- si  $t < 0$ , alors  $H \notin [p_1, p_2]$  et  $H$  "dépassé" du côté de  $p_1$ . On pose alors  $H = p_1$  ;
- si  $t > 1$ , alors  $H$  "dépassé" du côté de  $p_2$  et on pose  $H = p_2$ .

Pour vérifier la précision de la méthode, on compare tout d'abord la fonction  $\phi$  déterminée par cette méthode et l'expression exacte que l'on connaît pour le cas du cercle, c'est-à-dire :

$$\phi_{ex}(x, y) = -\sqrt{\frac{1}{8}} + \sqrt{(x - 0.5)^2 + (y - 0.5)^2}. \quad (6.3)$$

On décide de réaliser une représentation graphique de la différence entre la fonction construite et  $\phi_{ex}$ . Pour cela, on considère une taille fixe de maillage sur le cercle (i.e. un nombre fixe de points égal à 1884) et on fait varier la taille du maillage de fond. On voit sur la figure 22 que même avec peu de points donnés et un maillage relativement grossier, on arrive à obtenir une

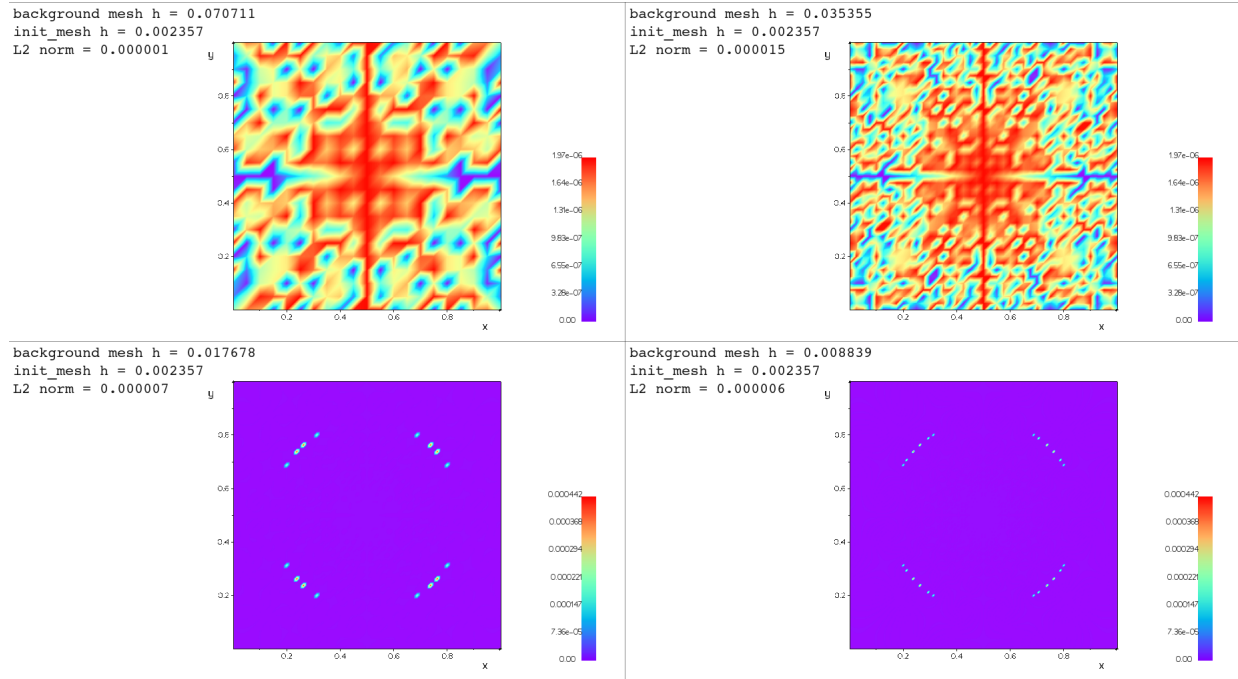


FIGURE 22 – Erreur obtenue en construisant  $\phi$  avec 1884 points et un maillage grossier de différentes tailles.

précision élevée lors de la construction. Cependant, il faut également noter que pour obtenir une très bonne précision, il est important que le maillage de fond soit bien plus grossier que le maillage initial du cercle.

On représente maintenant l'erreur de construction sur la figure 23.

On remarque encore une fois sur ces représentations que la taille du maillage de fond a une importance sur la précision. Il ne faut pas choisir un maillage trop grossier mais il est important de prendre tout de même un maillage plus grossier que le maillage initial.

Par la suite, on décide de comparer le temps nécessaire à la construction et à l'interpolation sur  $V$  de la fonction  $\phi$  avec le temps nécessaire lors de l'utilisation de l'expression exacte. On obtient la figure 23.

Finalement, on crée un domaine plus complexe (représentant approximativement un requin) et l'on essaie de construire la fonction  $\phi$  sur ce domaine. Cela permet de voir que la fonction est bien construite, de façon relativement précise et continue. On représente les résultats de la construction de  $\phi$  ainsi que la reconstruction du domaine à la figure 24.

## 6. 2. Application avec la méthode $\phi$ -FEM

On peut maintenant représenter l'erreur de la méthode  $\phi$ -FEM sur cet exemple, en comparant avec une méthode standard où l'on augmentera la précision de discrétisation du cercle, ce qui réduira la taille des éléments du maillage  $\mathcal{T}_h$ . Pour réaliser une comparaison correcte, on fera en sorte d'avoir la même taille de cellule pour le maillage  $\mathcal{T}_h$  et pour le maillage de fond. On considère pour cela l'exemple du problème de Poisson à conditions de Dirichlet non homogènes, comme à la section 3. 6..

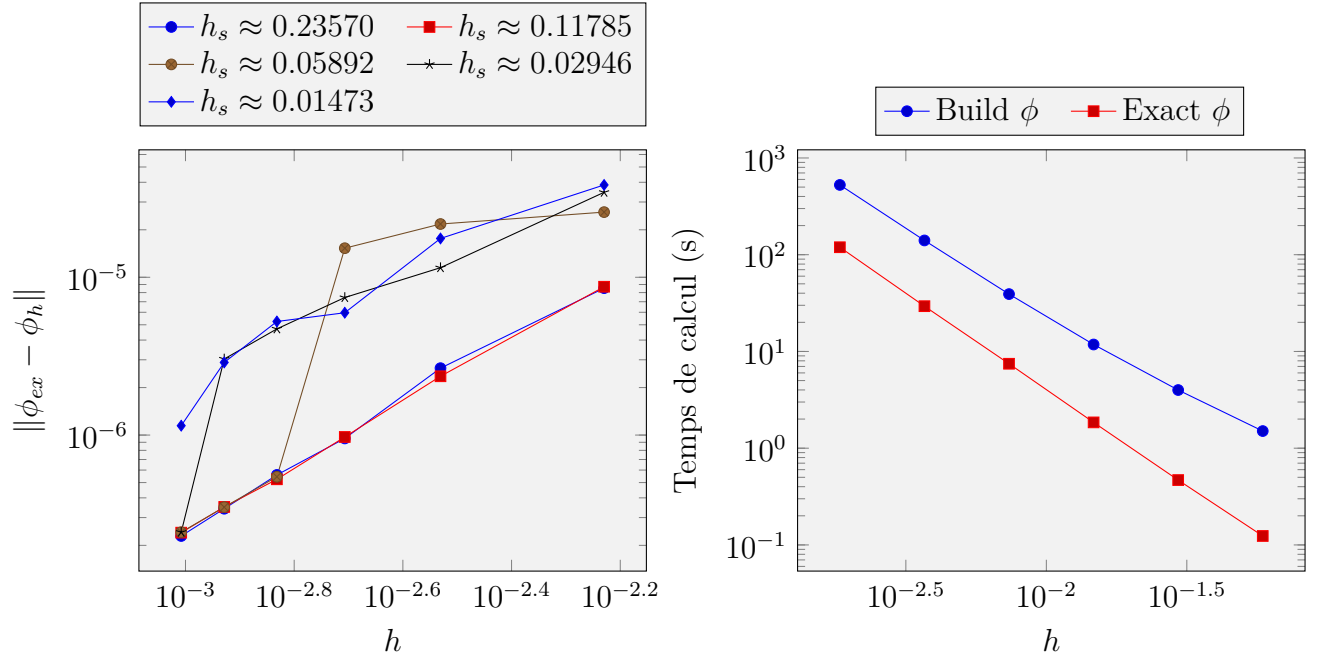


FIGURE 23 – Gauche : erreur de construction pour différentes tailles d’éléments du maillage de fond, en fonction de la taille des éléments du maillage initial. Droite : temps de calcul en fonction de la taille des éléments du maillage de fond.

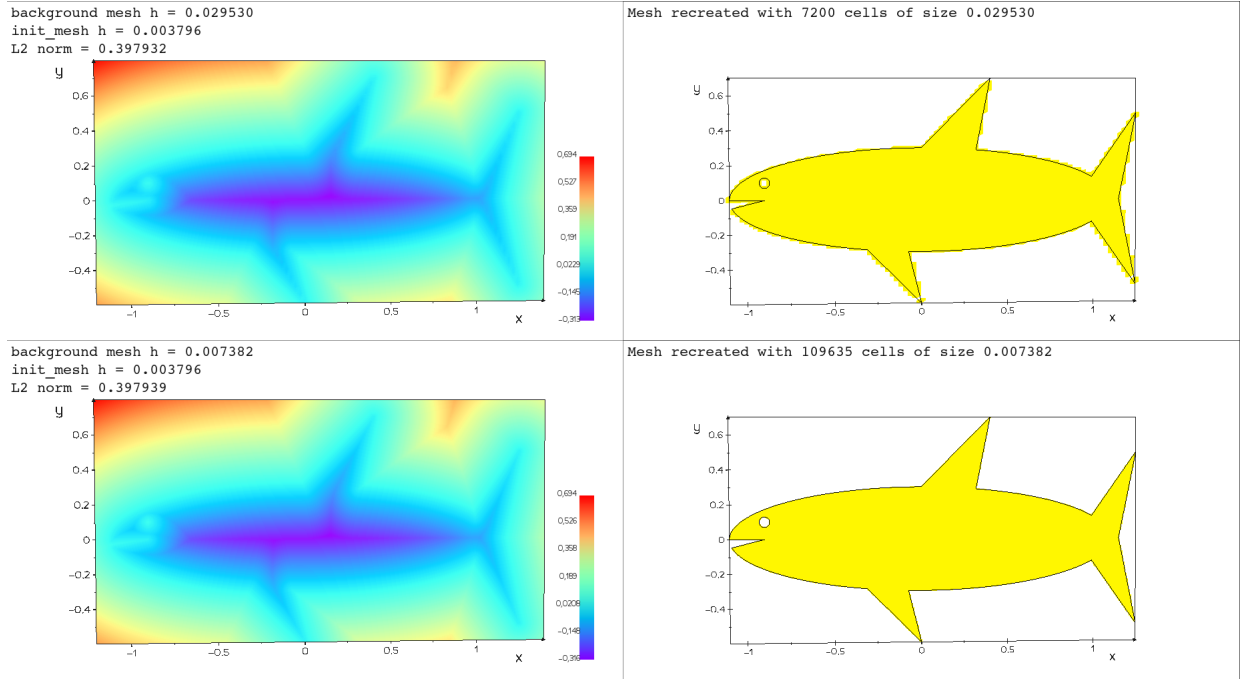


FIGURE 24 – Construction de  $\phi$  sur un domaine complexe.

On représente l’erreur obtenue sur la figure 25 en comparant la méthode standard où l’on utilise l’expression exacte de  $\phi$  pour donner la condition de bord et la méthode  $\phi$ -FEM où l’on utilise la construction décrite précédemment.

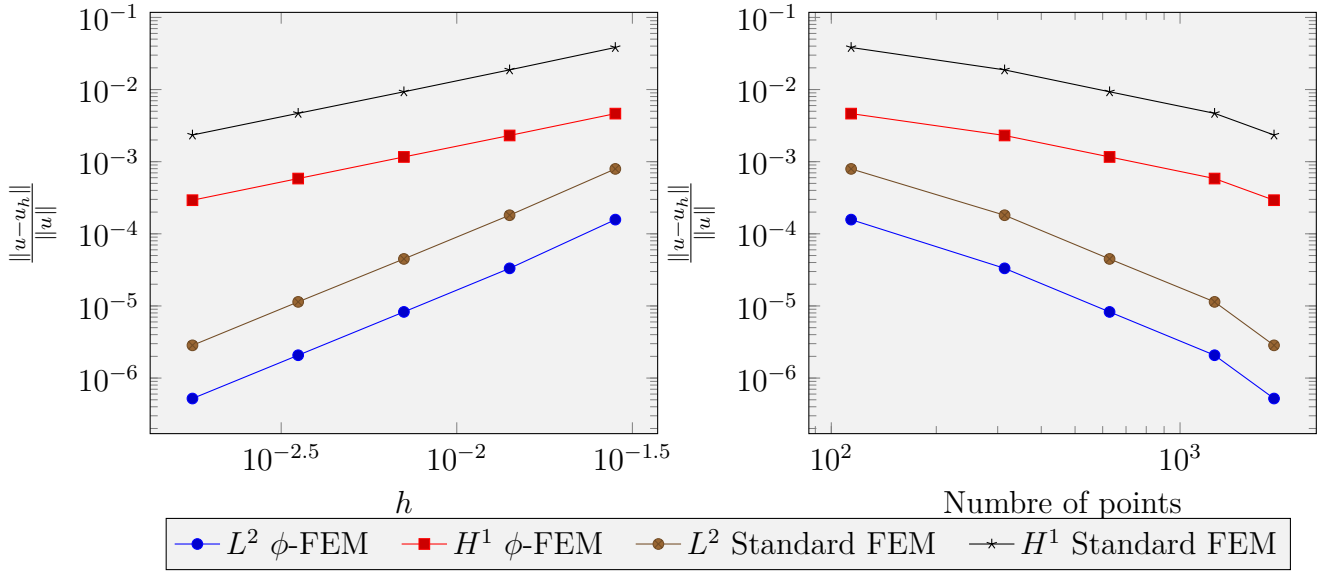


FIGURE 25 – Erreurs commises par les 2 méthodes ( $\mathbb{P}^1$ ). Gauche : erreur en fonction de la taille des éléments. Droite : erreur en fonction du nombre de points sur le nuage de points.

### 6. 3. Adaptation au cadre tridimensionnel

On souhaite maintenant construire  $\phi$  dans le cas de domaines 3D. Pour cela, on suivra la même méthode que précédemment mais avec quelques modifications. Tout d'abord, on utilisera un nuage de points 3D, par exemple un nuage de points formant une sphère ou un foie comme nous le verrons dans les exemples pratiques. Une première modification intervient au moment de sélectionner les points les plus proches : on considère ici les trois points les plus proches et on a donc  $p_1$ ,  $p_2$  et  $p_3$  qui forment un triangle  $T$  sur lequel on va projeter notre point  $A$ . Pour cela, on calcule le produit vectoriel entre les vecteurs  $p_1p_2$  et  $p_1p_3$ , qui nous donne un vecteur normal au triangle  $T$  formé par les trois points. On peut alors déterminer les coordonnées du projeté  $H$  de  $A$  :

$$\begin{cases} x_H &= x_A + \frac{\langle p_1A, n \rangle}{\|n\|^2} \times n \\ y_H &= y_A + \frac{\langle p_1A, n \rangle}{\|n\|^2} \times n \\ z_H &= z_A + \frac{\langle p_1A, n \rangle}{\|n\|^2} \times n. \end{cases} \quad (6.4)$$

On a alors les coordonnées du projeté. Cependant, le même problème que dans le cas 2D peut se poser : il arrive que le projeté  $H$  ne soit pas sur le triangle  $T$ . On détermine alors les deux sommets de  $T$  les plus proches et on projette  $H$  sur le segment entre les deux points les plus proches. Si le projeté est cette fois en dehors du segment on applique la remarque 6.2.

On fait un premier test de la méthode sur un maillage de foie issu des scènes disponibles dans le logiciel *SOFA framework*[7]. On obtient la figure 26 sur laquelle on a utilisé la méthode pour différentes tailles de maillage de fond.

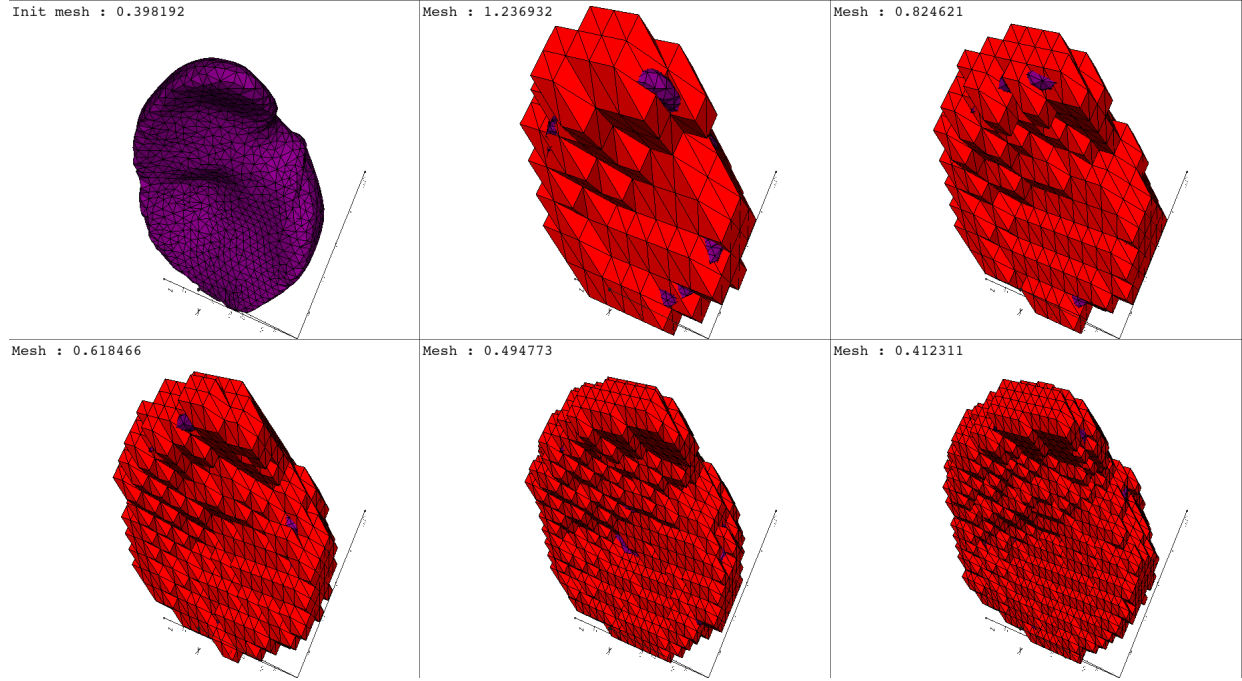


FIGURE 26 – Reconstruction du domaine à l'aide de la fonction  $\phi$  construite.

## 7 La $\phi$ -FEM en élasticité linéaire

### 7.1. Conditions de Dirichlet homogènes

On se place tout d'abord dans le cadre de conditions de Dirichlet au bord, telles que  $\mathbf{u} = (0, 0)$  sur la frontière  $\Gamma_D$ . On considère donc le problème

$$\begin{cases} -\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) &= \mathbf{f} , \text{ sur } \Omega \\ \mathbf{u} &= 0 , \text{ sur } \Gamma_D . \end{cases} \quad (7.1)$$

*Remarque 7.1.* On rappelle que

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) = \lambda \operatorname{tr}(\boldsymbol{\gamma}(\mathbf{u})) \times \mathbf{I} + 2\mu \times \boldsymbol{\gamma}(\mathbf{u}) \quad (7.2)$$

où  $\lambda$  et  $\mu$  sont des constantes (coefficients de Lamé) et

$$\boldsymbol{\gamma}(\mathbf{u}) = \frac{\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^t}{2} . \quad (7.3)$$

On choisit ici de poser pour solution exacte

$$\mathbf{u} = (\sin(x) \exp(y), \sin(y) \exp(x)) . \quad (7.4)$$

On calcule  $\mathbf{f}$  en appliquant directement  $-\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})$  avec  $\mathbf{u}$  définie en (7.4).

On décide donc d'utiliser la  $\phi$ -FEM pour la résolution de ce problème. On procède tout d'abord comme dans le cas standard, c'est-à-dire que l'on pose  $\mathbf{u} = \phi \mathbf{w}$  puis on multiplie le problème par une fonction test avant d'intégrer par parties. On obtient ainsi le problème variationnel, trouver  $\mathbf{w} \in V$  telle que

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}(\phi \mathbf{w}) : \boldsymbol{\gamma}(\phi \mathbf{v}) - \int_{\Gamma_D} (\boldsymbol{\sigma}(\phi \mathbf{w}) \cdot \mathbf{n}) \cdot \phi \mathbf{v} = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \phi \mathbf{v} , \quad \forall \mathbf{v} \in V . \quad (7.5)$$

On introduit ensuite les mêmes espaces que dans le cas standard, en considérant ici pour  $V_h^k$  un espace de vecteurs de  $\mathbb{R}^2$ . On modifie ensuite les pénalités utilisées. Pour la pénalité d'ordre 1, on travaille sur l'intégrale de bord et on obtient

$$\sigma_p h \sum_{F \in \mathcal{F}_h^\Gamma} \int_F [\boldsymbol{\sigma}(\phi_h \mathbf{w}) \cdot \mathbf{n}] [\boldsymbol{\sigma}(\phi_h \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n}] . \quad (7.6)$$

Ensuite, on calcule la pénalité d'ordre 2 à appliquer sur le terme de gauche et le terme de droite. Pour cela, on pénalise le problème initial sur  $\mathcal{T}_h^\Gamma$ . On obtient la pénalité d'ordre 2 de la forme bilinéaire donnée par

$$\sigma_p h^2 \sum_{T \in \mathcal{T}_h^\Gamma} \int_T (\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}(\phi_h \mathbf{w})) \cdot (\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}(\phi_h \mathbf{v})) . \quad (7.7)$$

Finalement, en travaillant sur le terme de droite du problème initial, on obtient la pénalité

$$- \sigma_p h^2 \sum_{T \in \mathcal{T}_h^\Gamma} \int_T \mathbf{f} \cdot (\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}(\phi_h \mathbf{v})) . \quad (7.8)$$

On a donc :

$$G_h(\mathbf{w}, \mathbf{v}) = \sigma_p h \sum_{F \in \mathcal{F}_h^\Gamma} \int_F [\boldsymbol{\sigma}(\phi_h \mathbf{w}) \cdot \mathbf{n}] [\boldsymbol{\sigma}(\phi_h \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n}] + \sigma_p h^2 \sum_{T \in \mathcal{T}_h^\Gamma} \int_T (\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}(\phi_h \mathbf{w})) \cdot (\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}(\phi_h \mathbf{v})) \quad (7.9)$$

$$G_h^{rhs}(\mathbf{v}) = -\sigma_p h^2 \sum_{T \in \mathcal{T}_h^\Gamma} \int_T \mathbf{f} \cdot (\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}(\phi_h \mathbf{v})) . \quad (7.10)$$

Finalement, on obtient les formes bilinéaire et linéaire

$$a(\mathbf{w}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega_h} \boldsymbol{\sigma}(\phi_h \mathbf{w}) : \boldsymbol{\gamma}(\phi_h \mathbf{v}) - \int_{\Gamma_D} (\boldsymbol{\sigma}(\phi_h \mathbf{w}) \cdot \mathbf{n}) \cdot \phi_h \mathbf{v} + G_h(\mathbf{w}, \mathbf{v}) \quad (7.11)$$

et

$$l(\mathbf{v}) = \int_{\Omega_h} \mathbf{f} \cdot \phi_h \mathbf{v} + G_h^{rhs}(\mathbf{v}) . \quad (7.12)$$

On présente maintenant les résultats obtenus lors de la comparaison entre cette méthode avec  $\sigma = 20$  et une méthode standard appliquées au problème (7.1) avec comme solution exacte (7.4) et  $(\lambda, \mu) = (1, 1.25)$  sur les figures 27 et 28.

## 7. 2. Conditions de Dirichlet non homogènes

On veut maintenant considérer un cas plus général, le cas de conditions de Dirichlet non homogènes. Pour cela, comme dans le cas de la section 3. 7., nous allons devoir modifier le problème et la formulation variationnelle en faisant apparaître la condition de bord que l'on notera  $\mathbf{u}_D$ .

Comme dans le cas vu en 3. 7., on modifie tout d'abord l'expression de  $\mathbf{u}$  en posant  $\mathbf{u} = \phi \mathbf{w} + \mathbf{u}_D$ . A partir de là, les étapes sont approximativement les mêmes (aux calculs près), on décide donc de ne pas décrire à nouveau les modifications à réaliser et on se permet de seulement donner la nouvelle forme linéaire en se rappelant que la forme bilinéaire n'est pas modifiée.



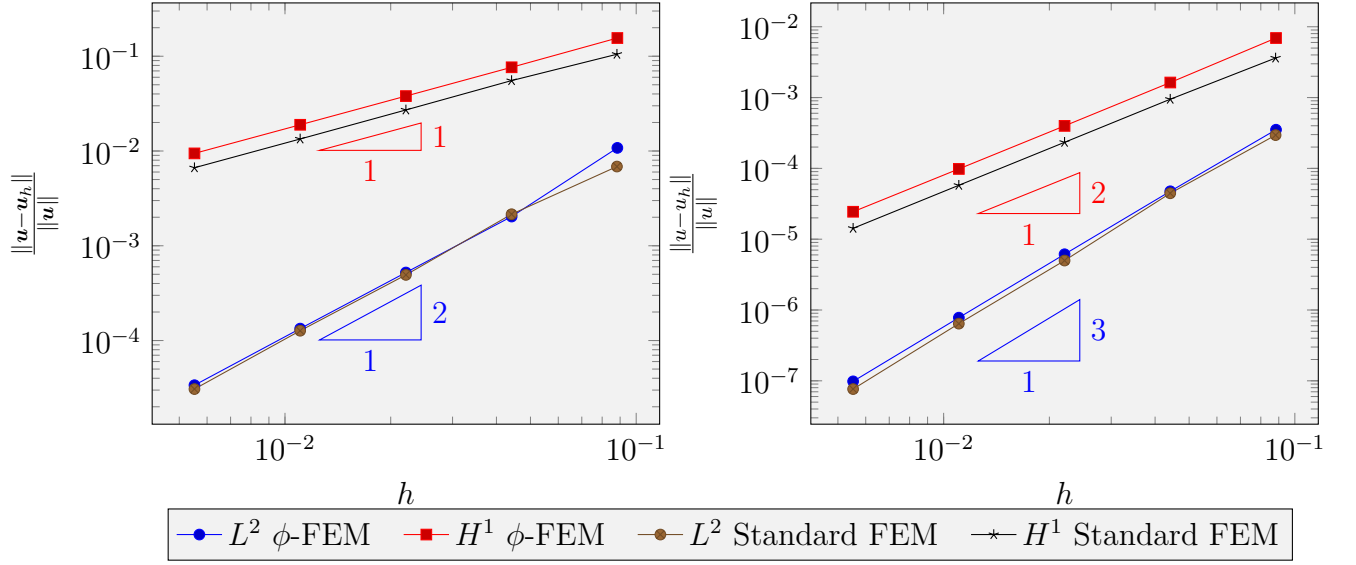


FIGURE 27 – Erreurs commises par les 2 méthodes. Gauche : méthodes  $\mathbb{P}^1$ . Droite : méthodes  $\mathbb{P}^2$ .

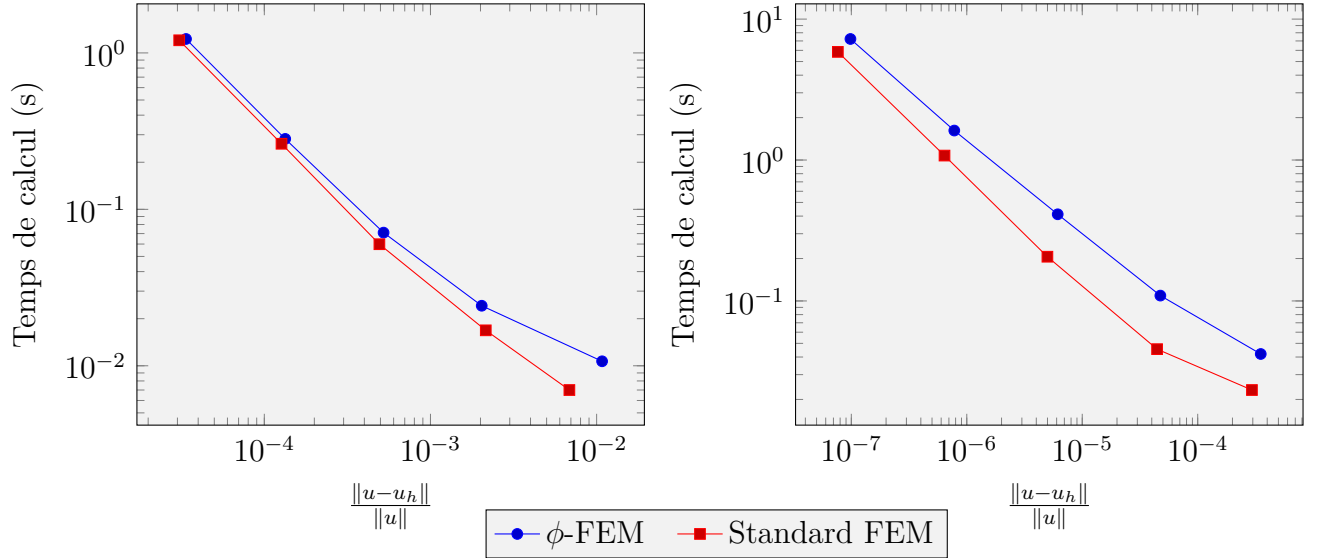


FIGURE 28 – Temps de calcul en fonction de l'erreur  $L^2$ . Gauche : méthodes  $\mathbb{P}^1$ . Droite : méthodes  $\mathbb{P}^2$ .

On obtient

$$l(\mathbf{v}) = \int_{\Omega_h} \mathbf{f} \cdot \phi_h \mathbf{v} - \int_{\Omega_h} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_D) \cdot \boldsymbol{\gamma}(\phi_h \mathbf{v}) + \int_{\Gamma_D} (\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_D) \cdot \mathbf{n}) \cdot \phi_h \mathbf{v} + G_h^{rhs}(\mathbf{v}) \quad (7.13)$$

où

$$\begin{aligned} G_h^{rhs}(\mathbf{v}) = & -\sigma_p h^2 \sum_{T \in \mathcal{T}_h^\Gamma} \int_T \mathbf{f} \cdot (\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}(\phi_h \mathbf{v})) - \sigma_p h \sum_{F \in \mathcal{F}_h^\Gamma} \int_F [\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_D) \cdot \mathbf{n}] [\boldsymbol{\sigma}(\phi_h \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n}] \\ & - \sigma_p h^2 \sum_{T \in \mathcal{T}_h^\Gamma} \int_T (\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_D)) \cdot (\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}(\phi_h \mathbf{v})). \end{aligned} \quad (7.14)$$

On représente sur les figures 29 et 30, une comparaison entre cette méthode et une méthode standard appliquées au problème (7.1), avec  $\mathbf{u}_D = \mathbf{u}_{ex}$  sur  $\Gamma_D$ ,  $\mathbf{u}_{ex}$  définie en (7.4) et  $\sigma_p = 20$ .



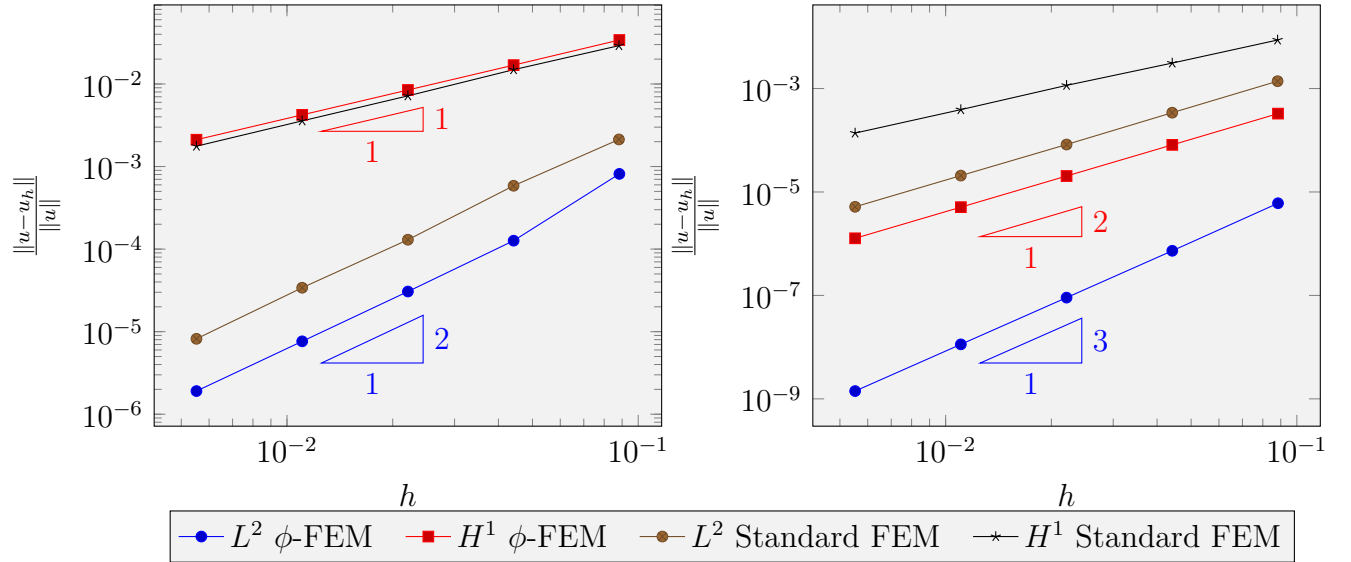


FIGURE 29 – Erreurs commises par les 2 méthodes. Gauche : méthodes  $\mathbb{P}^1$ . Droite : méthodes  $\mathbb{P}^2$ .

On voit une nouvelle fois sur ces représentations que la méthode  $\phi$ -FEM offre une meilleure précision pour une taille de maillage équivalente ainsi qu'un temps de résolution plus faible.

### 7. 3. Conditions de Neumann

Maintenant que nous avons introduit la méthode pour des conditions de Dirichlet, il est nécessaire d'introduire une méthode de résolution dans le cas de conditions de Neumann. Pour cela, on se basera sur la méthode présentée à la section 4, en considérant le problème

$$\begin{cases} -\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) + \mathbf{u} &= \mathbf{f}, & \text{sur } \Omega \\ \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} &= \mathbf{g}, & \text{sur } \Gamma. \end{cases} \quad (7.15)$$

Nous allons maintenant introduire des variables auxiliaires comme dans la section 4. On introduit alors  $\mathbf{y}$  et  $\mathbf{p}$  telles que le problème (7.15) puisse s'écrire sous la forme du système d'équations

$$\begin{cases} \mathbf{y} + \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) &= 0, & \text{sur } \Omega_h^\Gamma, \\ \operatorname{div} \mathbf{y} + \mathbf{u} &= \mathbf{f}, & \text{sur } \Omega_h^\Gamma, \\ \mathbf{y} \cdot \nabla \phi_h + \mathbf{p} \phi_h - |\nabla \phi_h| \mathbf{g} &= 0, & \text{sur } \Omega_h^\Gamma. \end{cases} \quad (7.16)$$

On peut maintenant écrire  $a$  et  $l$  en introduisant (7.16) à la manière des moindres carrés :

$$\begin{aligned} a(\mathbf{u}, \mathbf{y}, \mathbf{p}; \mathbf{v}, \mathbf{z}, \mathbf{q}) &= \int_{\Omega_h} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\gamma}(\mathbf{v}) + \int_{\Gamma_h} (\mathbf{y} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{v} \\ &+ \gamma_{\operatorname{div}} \int_{\Omega_h^\Gamma} (\operatorname{div} \mathbf{y} + \mathbf{u})(\operatorname{div} \mathbf{z} + \mathbf{v}) + \gamma_u \int_{\Omega_h^\Gamma} (\mathbf{y} + \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})) \cdot (\mathbf{z} + \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{v})) \\ &+ \frac{\gamma_p}{h^2} \int_{\Omega_h^\Gamma} \left( \mathbf{y} \cdot \nabla \phi_h + \frac{\mathbf{p} \phi_h}{h} - |\nabla \phi_h| \mathbf{g} \right) \left( \mathbf{z} \cdot \nabla \phi_h + \frac{\mathbf{q} \phi_h}{h} \right) \\ &+ \sigma_p h \int_{\Gamma^i} [\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n}] [\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{n}] \end{aligned} \quad (7.17)$$

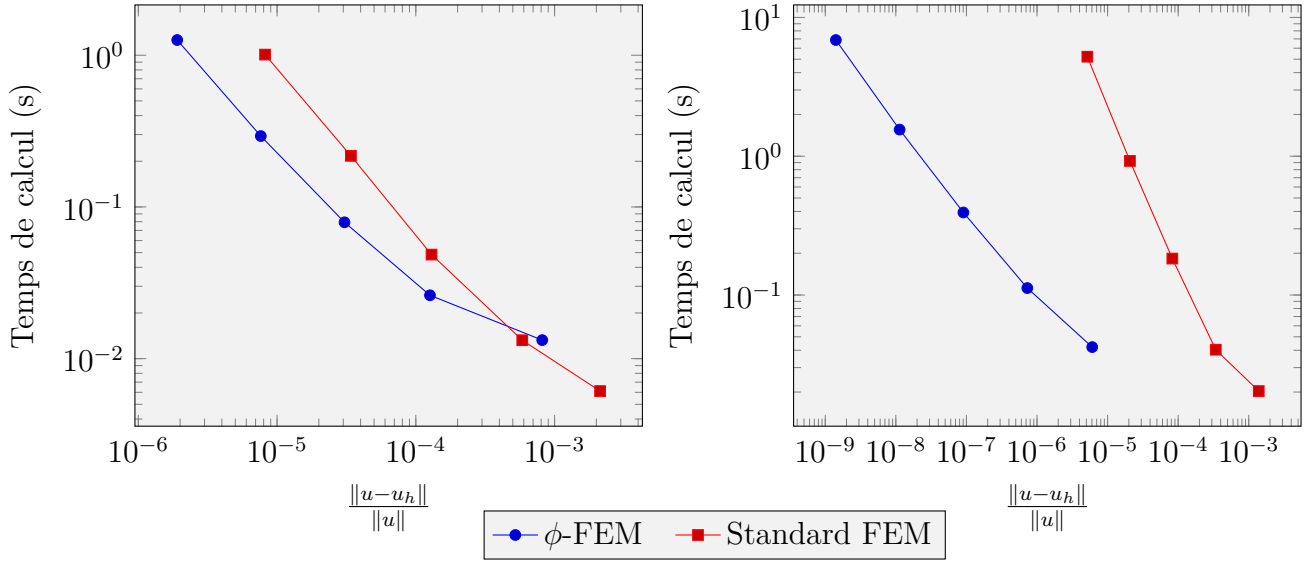


FIGURE 30 – Temps de calcul en fonction de l’erreur  $L^2$ . Gauche : méthodes  $\mathbb{P}^1$ . Droite : méthodes  $\mathbb{P}^2$ .

et :

$$l(\mathbf{v}, \mathbf{z}, \mathbf{q}) = \int_{\Omega_h} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} + \gamma_{div} \int_{\Omega_h^\Gamma} \mathbf{f} \cdot (\operatorname{div} \mathbf{z} + \mathbf{v}). \quad (7.18)$$

*Remarque 7.2.* Il est nécessaire de modifier légèrement les espaces définis à la section 4. En effet, les dimensions sont modifiées, on considère donc :

$$\begin{aligned} V_h^{(k)} &:= \left\{ \mathbf{v}_h \in H^1(\Omega_h)^d : \mathbf{v}_h|_T \in \mathbb{P}^k(T)^d \quad \forall T \in \mathcal{T}_h \right\}, \\ Z_h^{(k)} &:= \left\{ \mathbf{z}_h \in H^1(\Omega_h^\Gamma)^{d \times d} : \mathbf{z}_h|_T \in \mathbb{P}^k(T)^{d \times d} \quad \forall T \in \mathcal{T}_h^\Gamma \right\}, \\ Q_h^{(k)} &:= \left\{ \mathbf{q}_h \in L^2(\Omega_h^\Gamma)^d : \mathbf{q}_h|_T \in \mathbb{P}^{k-1}(T)^d \quad \forall T \in \mathcal{T}_h^\Gamma \right\}, \\ W_h^{(k)} &:= V_h^{(k)} \times Z_h^{(k)} \times Q_h^{(k)}. \end{aligned}$$

On présente les résultats obtenus pour la résolution de (7.15), en considérant comme solution exacte  $\mathbf{u}_{ex} = (\sin(x) \exp(y), \exp(x) \sin(y))$ , comme condition de bord  $\mathbf{g} = \frac{\sigma(\mathbf{u}_{ex}) \cdot \nabla \phi}{|\nabla \phi|} + \mathbf{u}_{ex} \phi$ ,  $\gamma_u = \gamma_p = \gamma_{div} = 1.0$  et  $\sigma_p = 0.01$  sur les figures 31 et 32.

## 8 Some discussions about linear elasticity problems

We now discuss about some interesting cases. This part is wrote in english because soon it will be available in a chapter of a book exit about some new FE methods. This chapter was wrote in collaboration with Stéphane Cotin, Michel Duprez, Vanessa Lleras and Alexei Lozinski. The following parts are the sections that i wrote with their help, during my internship.

### 8.1. Mixed conditions

We now consider the case of mixed conditions on the boundary  $\Gamma = \Gamma_N \cup \Gamma_D$  with  $\Gamma_D \neq \emptyset$  and  $\Gamma_N \neq \emptyset$  such that the junction point between the boundaries  $\Gamma_N$  and  $\Gamma_D$  is on a node of the mesh.

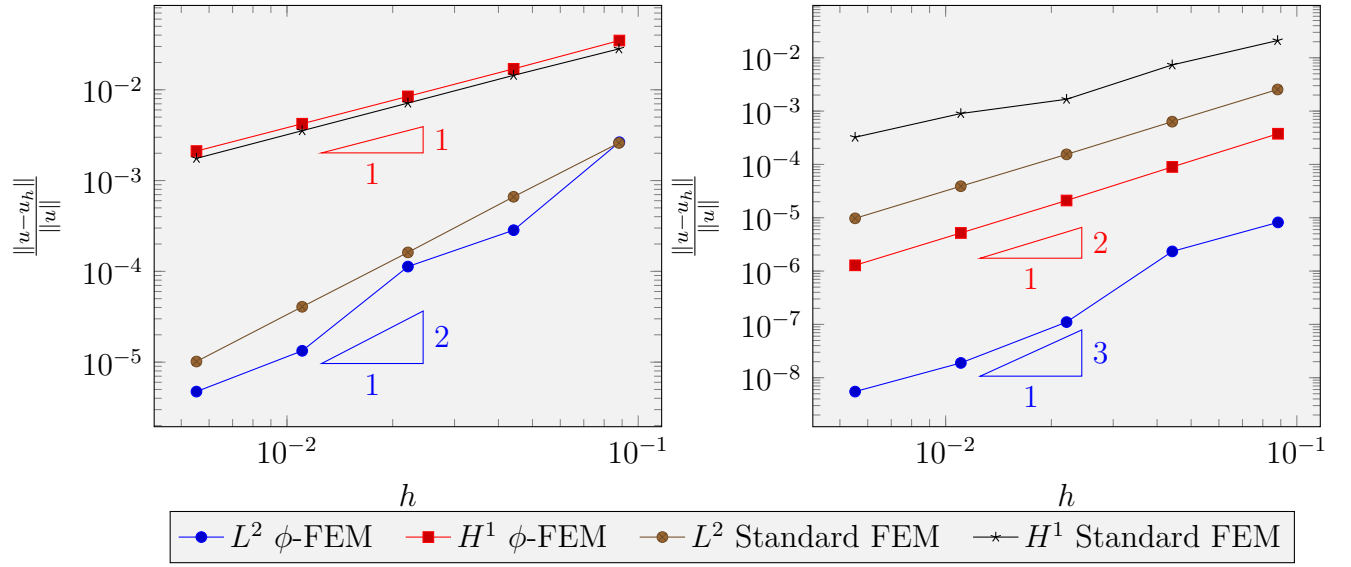


FIGURE 31 – Erreurs commises par les 2 méthodes. Gauche : méthodes  $\mathbb{P}^1$ . Droite : méthodes  $\mathbb{P}^2$ .

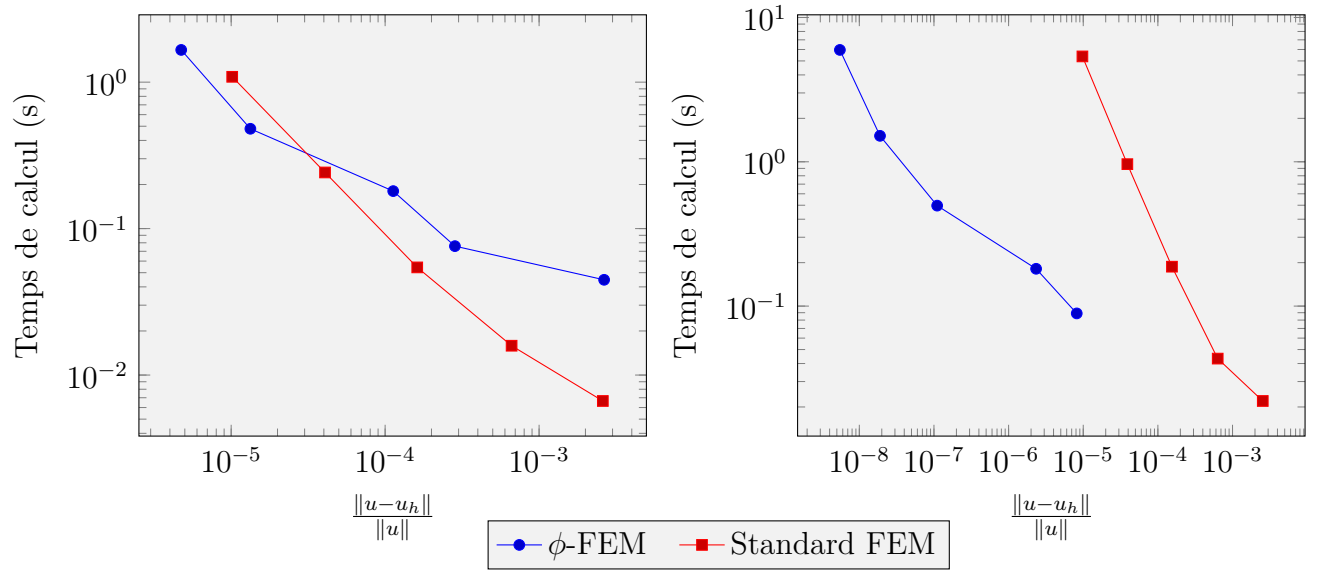


FIGURE 32 – Temps de calcul en fonction de l'erreur  $L^2$ . Gauche : méthodes  $\mathbb{P}^1$ . Droite : méthodes  $\mathbb{P}^2$ .

Assuming one more time that  $\mathbf{u}$  can be extended from  $\Omega$  to  $\Omega_h$  as the solution of the governing equations, we introduce a new scheme, combining the Dual  $\phi$ -FEM Dirichlet and the Neumann  $\phi$ -FEM schemes.

As we saw before, we denote by  $\Omega_h^\Gamma$  the domain covered by the mesh  $\mathcal{T}_h^\Gamma$ . We need to introduce two new submeshes :  $\mathcal{T}_h^{\Gamma_N}$  and  $\mathcal{T}_h^{\Gamma_D}$  for the Neumann and the Dirichlet parts of the boundary, defined by :

$$\mathcal{T}_h^{\Gamma_D} := \{T \in \mathcal{T}_h^\Gamma : T \cap \Gamma_{h,D} \neq \emptyset\} \quad \text{and} \quad \mathcal{T}_h^{\Gamma_N} := \{T \in \mathcal{T}_h^\Gamma : T \cap \Gamma_{h,N} \neq \emptyset\},$$

where

$$\Gamma_{h,D} := \{\phi_h = 0 \cap \Gamma_D\} \quad \text{and} \quad \Gamma_{h,N} := \{\phi_h = 0 \cap \Gamma_N\}.$$

Then, we introduce  $\Omega_h^{\Gamma_N}$  and  $\Omega_h^{\Gamma_D}$  the domains covered by  $\mathcal{T}_h^{\Gamma_N}$  and  $\mathcal{T}_h^{\Gamma_D}$ .

Finally, we introduce the different finite element spaces :

$$\begin{aligned} V_h^{(k)} &:= \left\{ \mathbf{v}_h \in H^1(\Omega_h) : \mathbf{v}_h|_T \in \mathbb{P}^k(T)^d \quad \forall T \in \mathcal{T}_h \right\}, \\ Z_h^{(k)} &:= \left\{ \mathbf{z}_h \in H^1(\Omega_h^{\Gamma_N}) : \mathbf{z}_h|_T \in \mathbb{P}^k(T)^{(d \times d)} \quad \forall T \in \mathcal{T}_h^{\Gamma_N} \right\}, \\ Q_{h,N}^{(k)} &:= \left\{ \mathbf{q}_h \in H^1(\Omega_h^{\Gamma_N}) : \mathbf{q}_h|_T \in \mathbb{P}^{k-1}(T)^d \quad \forall T \in \mathcal{T}_h^{\Gamma_N} \right\}. \end{aligned}$$

and

$$Q_{h,D}^{(k)} := \left\{ \mathbf{q}_h \in H^1(\Omega_h^{\Gamma_D}) : \mathbf{q}_h|_T \in \mathbb{P}^k(T)^d \quad \forall T \in \mathcal{T}_h^{\Gamma_D} \right\}.$$

We then get the following scheme : find  $\mathbf{u}_h \in V_h^{(k)}$ ,  $\mathbf{y}_h \in Z_h^{(k)}$ ,  $\mathbf{p}_{h,D} \in Q_{h,D}^{(k)}$  and  $\mathbf{p}_{h,N} \in Q_{h,N}^{(k)}$  such that

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_h} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_h) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_h) + \int_{\Gamma_{h,N}} (\mathbf{y}_h \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{v}_h - \int_{\Gamma_{h,D}} (\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_h) \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{v}_h + \gamma_{div} \int_{\Omega_h^{\Gamma_N}} \operatorname{div} \mathbf{y}_h \cdot \operatorname{div} \mathbf{z}_h \\ & + \gamma_u \int_{\Omega_h^{\Gamma_N}} (\mathbf{y}_h + \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_h)) \cdot (\mathbf{z}_h + \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{v}_h)) + \frac{\gamma_p}{h^2} \int_{\Omega_h^{\Gamma_N}} \left( \mathbf{y}_h \cdot \nabla \phi_h + \frac{1}{h} \mathbf{p}_{h,N} \phi_h \right) \left( \mathbf{z}_h \cdot \nabla \phi_h + \frac{1}{h} \mathbf{q}_{h,N} \phi_h \right) \\ & + \frac{\gamma}{h^2} \int_{\Omega_h^{\Gamma_D}} (\mathbf{u}_h - \frac{1}{h} \phi_h \mathbf{p}_{h,D}) \cdot (\mathbf{v}_h - \frac{1}{h} \phi_h \mathbf{q}_{h,D}) + G_h^{lhs}(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) \\ & = \int_{\Omega_h} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}_h + \gamma_{div} \int_{\Omega_h^{\Gamma_N}} \mathbf{f} \cdot \operatorname{div} \mathbf{z}_h + \frac{\gamma}{h^2} \int_{\Omega_h^D} \mathbf{u}_h^g \cdot (\mathbf{v}_h - \frac{1}{h} \phi_h \mathbf{q}_{h,D}) \\ & - \frac{\gamma_p}{h^2} \int_{\Omega_h^{\Gamma_N}} \mathbf{g} \cdot |\nabla \phi_h| (\mathbf{z}_h \cdot \nabla \phi_h + \frac{1}{h} \mathbf{q}_{h,N} \phi_h) + G_h^{rhs}(\mathbf{v}_h), \quad \forall \mathbf{v}_h \text{ on } \Omega_h, \mathbf{z}_h \text{ on } \Omega_h^\Gamma, \mathbf{q}_{h,D} \text{ on } \Omega_h^{\Gamma_D}, \mathbf{q}_{h,N} \text{ on } \Omega_h^{\Gamma_N}, \end{aligned} \tag{8.1}$$

where  $G_h^{lhs}$  and  $G_h^{rhs}$  stand for :

$$\begin{aligned} G_h^{lhs}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &:= \sigma h \sum_{E \in \mathcal{F}_h^{\Gamma_N}} \int_E [\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n}] \cdot [\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{n}] + \sigma_D h \sum_{E \in \mathcal{F}_h^{\Gamma_D}} \int_E [\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n}] \cdot [\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{n}] \\ & + \sigma_D h^2 \int_{\Omega_h^{\Gamma_D}} (\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})) \cdot (\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{v})) \end{aligned}$$

and

$$G_h^{rhs}(\mathbf{v}) := -\sigma_D h^2 \int_{\Omega_h^{\Gamma_D}} f \cdot (\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{v})).$$

Now that we have introduced the method, we are going to present some numerical results. With these results, our purpose is to highlight the optimal convergence of  $\phi$ -FEM and compare it with a standard finite element method.

**First test case : manufactured solution** Let  $\mathcal{O}$  be the square  $[0, 1] \times [0, 1]$  and  $\mathcal{T}_h^{\mathcal{O}}$  a uniform mesh on  $\mathcal{O}$ . Then, let  $\Omega$  be the circle centered at the point  $(0.5, 0.5)$  of radius  $\frac{\sqrt{2}}{4}$ . Our level-sets function  $\phi$  will be given by  $\phi(x, y) = \frac{-1}{8} + (x - 0.5)^2 + (y - 0.5)^2$ . We take the Lamé parameters  $\lambda = 100 \text{ kPa}$  and  $\nu = 0.3$  and the scheme parameters  $\gamma_{div} = \gamma_u = \gamma_p = 1.0$ ,  $\sigma = 0.01$  and  $\gamma = \sigma_D = 20.0$ .

We finally choose as exact solution

$$u_{ex} = (\sin(x) \times \exp(y), \sin(y) \times \exp(x))$$

and boundary conditions

$$\begin{cases} \mathbf{u}^g = \mathbf{u}_{ex} \times (1 + \phi), & \text{on } \Omega_h^{\Gamma_D} = \Omega_h^{\Gamma} \cap \{x \geq 0.5\}, \\ \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_{ex}) \times \frac{\nabla \phi}{\|\nabla \phi\|} + \mathbf{u}_{ex} \times \phi, & \text{on } \Omega_h^{\Gamma_N} = \Omega_h^{\Gamma} \cap \{x < 0.5\}. \end{cases}$$

where we used  $\mathbf{u}_{ex} \times \phi$  to add a little perturbation to the exact solution on the boundaries.

Before presenting numerical results, we illustrate the described situation. We thus compare on the figure 33 the two considered domains, used for the  $\phi$ -FEM and the standard FEM, for approximately the same values of  $h$  and represent the situation on the figure 34

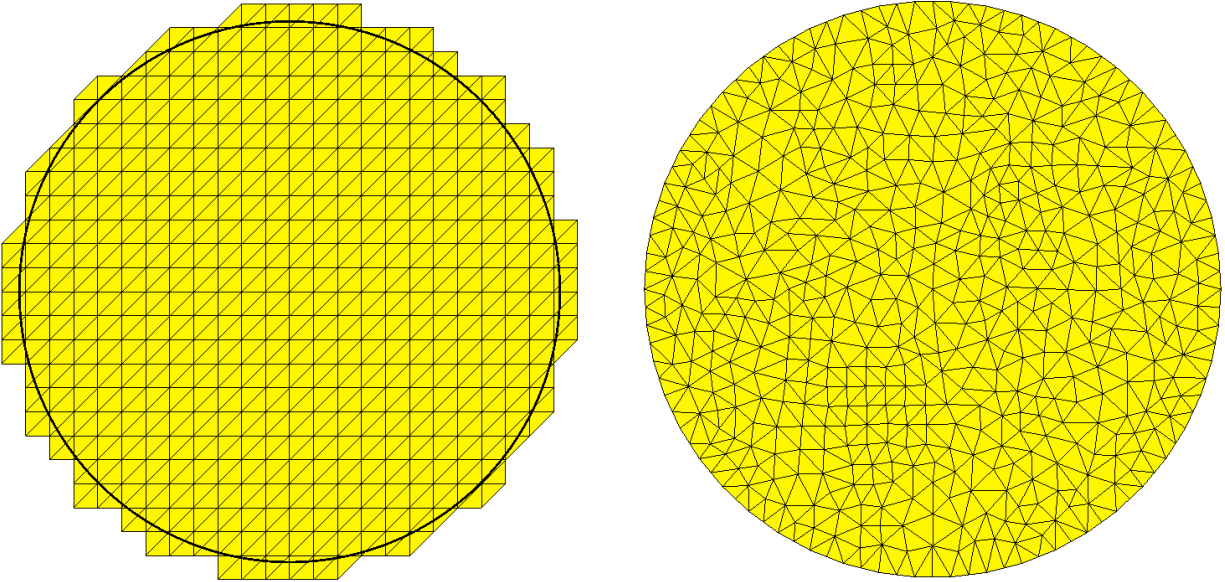


FIGURE 33 – Left : mesh built using the level-sets function  $\phi$ . Right : mesh built using the circle mesh creating function from *mshr*.

We first illustrate the numerical convergence order for  $L^2$  and  $H^1$  norms. We see on figure 35 that the method is following theoretical convergence for these two norms. We use  $\mathbb{P}^2$ -Lagrange polynomials to compare the two methods and we see that there is a gap between the  $\phi$ -FEM and the standard FEM errors.

We also represent the total computing time, considering the assembly time of the FE matrix and the resolution of the FE system, in relation with the relative  $L^2$  error on the figure 35.

**Second test case : domain with holes.** We now want to consider a new type of problem. Imagine that we have a domain  $\Omega \in \mathbb{R}^d$  ( $d = 2, 3$ ) with two holes inside (for example a circle

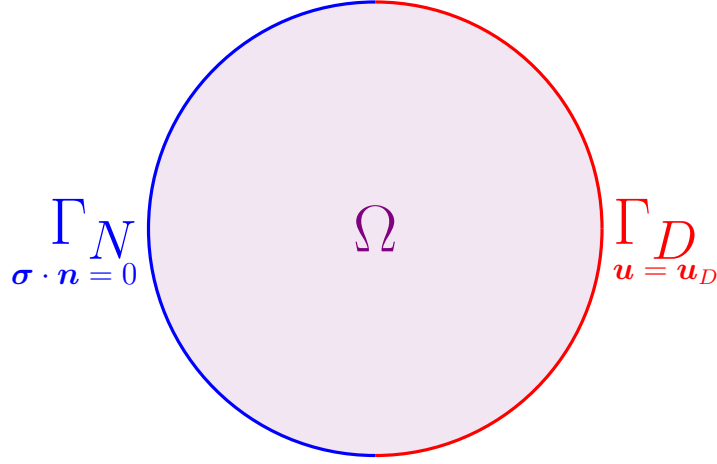


FIGURE 34 – First test case : manufactured solution.

or a sphere depending on  $d$ ). The problem is the following one :

$$\begin{cases} -\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) &= \mathbf{f} , \text{ on } \Omega , \\ \mathbf{u} &= 0 , \text{ on } \Gamma_D = \partial\Omega \cap \{y = 0\} , \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} &= 0 , \text{ on } \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup (\partial\Omega \setminus \{y = 0\}) . \end{cases} \quad (8.2)$$

The goal is to test if  $\phi$ -FEM could be stable when the holes are very close. To do this, we first consider two distant holes of radius 0.15 and we will then try to bring them closer.

We consider the situation illustrated at Fig 36, which represents the case of a plate  $\Omega = (0, 1)^2$  fixed at the bottom (no displacement) and with no constraint on the other boundaries. The idea is to illustrate the deformation of an elastic material on which one we apply a force  $\mathbf{f} = (0, -0.9)$ . We will thus use  $\phi$ -FEM to determine the solution of the problem on the boundaries for the two holes.

The main idea here is to apply a standard FEM on the whole domain  $(\Omega)$ , with usual boundary conditions on  $\partial\Omega \setminus \{\Gamma_1 \cup \Gamma_2\}$  where  $\Gamma_1$  and  $\Gamma_2$  are the boundaries for the two holes. We denote by  $\Gamma$  the boundary for the two holes :  $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ .

We then need to define two functions  $\phi_1$  and  $\phi_2$  respectively for the first and the second hole, such that :

$$\Gamma_1 := \{\phi_1 = 0 \text{ and } \phi_2 \neq 0\} \quad \Gamma_2 := \{\phi_2 = 0 \text{ and } \phi_1 \neq 0\}$$

and

$$\Omega := \{\phi_1 < 0 \text{ and } \phi_2 < 0\} .$$

In facts, we want to use only one level set function. We thus can define  $\phi$  such that  $\phi = -\phi_1 \times \phi_2$ . We then define  $\Omega$  and  $\Gamma$  :

$$\Omega := \{\phi < 0\} \quad \Gamma := \{\phi = 0\} .$$

We denote by  $\phi_h$  the finite element approximation to  $\phi$  on the mesh  $\mathcal{T}_h$  defined on  $\Omega$ . We then introduce  $\mathcal{T}_h^\Gamma$ , a mesh on the boundary  $\Gamma$  and finally denote  $\Omega_h$  and  $\Omega_h^\Gamma$  the domains covered by  $\mathcal{T}_h$  and  $\mathcal{T}_h^\Gamma$ .

We also denote

$$W_h^{(k)} := V_h^{(k)} \times Z_h^{(k)} \times Q_h^{(k)} ,$$

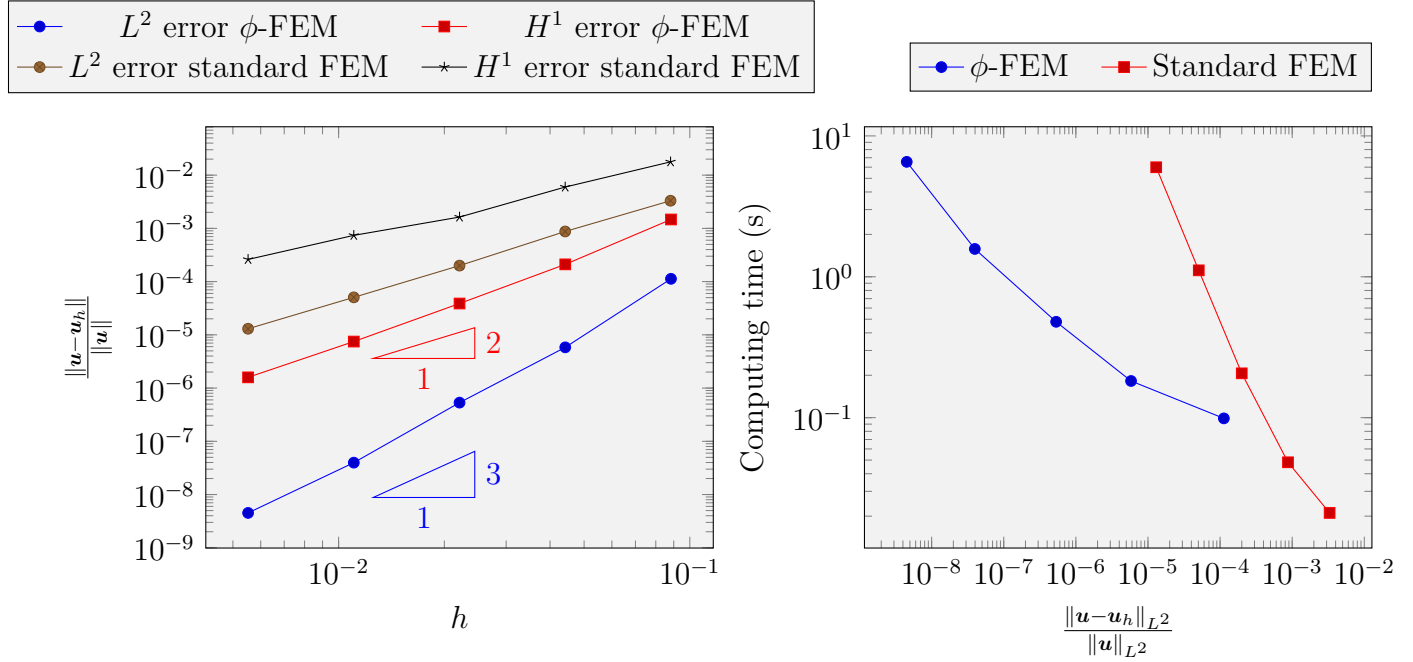


FIGURE 35 – Left :  $L^2$  and  $H^1$  relative errors for the first test case. Right : Total computing time of the methods in relation with  $L^2$  errors.

where

$$\begin{aligned} V_h^{(k)} &:= \left\{ \mathbf{v}_h \in H^1(\Omega_h) : \mathbf{v}_h|_T \in \mathbb{P}^k(T)^d \quad \forall T \in \mathcal{T}_h \text{ and } \mathbf{v}_h = 0 \text{ on } \Gamma_D \right\}, \\ Z_h^{(k)} &:= \left\{ \mathbf{z}_h \in H^1(\Omega_h^\Gamma) : \mathbf{z}_h|_T \in \mathbb{P}^k(T)^{(d \times d)} \quad \forall T \in \mathcal{T}_h^\Gamma \right\}, \\ Q_h^{(k)} &:= \left\{ \mathbf{q}_h \in H^1(\Omega_h^\Gamma) : \mathbf{q}_h|_T \in \mathbb{P}^{k-1}(T)^d \quad \forall T \in \mathcal{T}_h^\Gamma \right\}. \end{aligned}$$

We define the following scheme : find  $(\mathbf{u}_h, \mathbf{y}_h, \mathbf{p}_h) \in W_h^{(k)}$  such that,

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega_h} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_h) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_h) + \int_{\Gamma_h} (\mathbf{y}_h \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{v}_h + \gamma_{div} \int_{\Omega_h^\Gamma} \operatorname{div} \mathbf{y}_h \operatorname{div} \mathbf{z}_h \\ &\quad + \gamma_u \int_{\Omega_h^\Gamma} (\mathbf{y}_h + \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_h)) \cdot (\mathbf{z}_h + \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{v}_h)) \\ &\quad + \frac{\gamma_p}{h^2} \int_{\Omega_h^\Gamma} \left( \mathbf{y}_h \cdot \nabla \phi_h + \frac{\mathbf{p}_h \phi_h}{h} \right) \left( \mathbf{z}_h \cdot \nabla \phi_h + \frac{\mathbf{q}_h \phi_h}{h} \right) + \sigma_p h \int_{\Gamma_i} [\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_h) \cdot \mathbf{n}] [\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{v}_h) \cdot \mathbf{n}] \\ &= \int_{\Omega_h} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}_h + \gamma_{div} \int_{\Omega_h^\Gamma} \mathbf{f} \cdot \operatorname{div} \mathbf{z}_h, \quad \forall (\mathbf{v}_h, \mathbf{z}_h, \mathbf{q}_h) \in W_h^{(k)}. \quad (8.3) \end{aligned}$$

We then illustrate on Figure 37 the convergence by computing the  $L^2$  error of our method for different distances between the two holes, with  $\gamma_{div} = \gamma_p = \gamma_u = 1.0$  and  $\sigma_p = 0.01$  and using

$$\phi_1 = 0.15^2 - (x - 0.75)^2 - (y - 0.75)^2,$$

and

$$\phi_2 = 0.15^2 - (x - (0.5 - 0.1 \times j))^2 - (y - (0.5 - 0.1 \times j))^2, \quad j = 0, 1, 2.$$

We here see that the numerical convergence is very interesting on the first iterations. But in this case the last iterations are not following the same numerical order of convergence. It's important to notice that the error is here calculated is comparison with a standard FEM

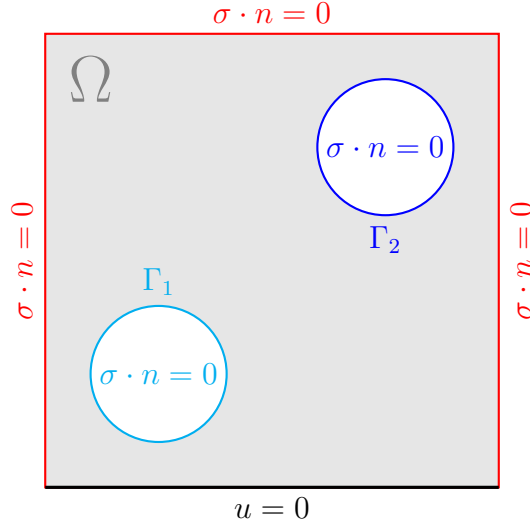


FIGURE 36 – Second test case : domain with holes.

computed on a fine mesh with the same size of the background mesh used to compute the last iteration of  $\phi$ -FEM.

## 8. 2. Linear elasticity with multiple materials

We now consider the case of interfaces problems. To do this, we take a domain  $\Omega$  divided in two subdomains  $\Omega_1$  included in  $\Omega_2$ , delimited by a smooth boundary  $\Gamma = \Omega_1 \cap \Omega_2$ , as illustrated on Figure 38. We then consider the problem :

$$\begin{cases} -\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) &= \mathbf{f}, \text{ on } \Omega, \\ \mathbf{u} &= \mathbf{u}_D, \text{ on } \partial\Omega, \\ [\mathbf{u}] &= 0, \text{ on } \Gamma, \\ [\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n}] &= 0, \text{ on } \Gamma, \end{cases} \quad (8.4)$$

where  $\mathbf{n}$  is the unit normal pointing from  $\Omega_1$  to  $\Omega_2$ . Assuming  $\mathbf{u}|_{\Omega_i} = \mathbf{u}_i$  and denoting  $\boldsymbol{\sigma}_i$  the stress tensor on  $\Omega_i$ , this problem is equivalent to the following one :

$$\begin{cases} -\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}_i(\mathbf{u}_i) &= \mathbf{f}, \text{ on } \Omega_i, \\ \mathbf{u}_2 &= \mathbf{u}_D, \text{ on } \partial\Omega, \\ \mathbf{u}_1 &= \mathbf{u}_2, \text{ on } \Gamma, \\ \boldsymbol{\sigma}_1(\mathbf{u}_1) \cdot \mathbf{n} &= \boldsymbol{\sigma}_2(\mathbf{u}_2) \cdot \mathbf{n}, \text{ on } \Gamma, \end{cases} \quad (8.5)$$

where

$$\boldsymbol{\sigma}_i(\mathbf{u}) = 2\mu_i \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{u} + \lambda_i (\operatorname{div} \mathbf{u}) \mathbf{I},$$

with  $\lambda_i$  and  $\mu_i$  the Lamé parameters and  $\boldsymbol{\varepsilon}$  the strain tensor.

We here consider  $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$ , with  $\Omega_1$  and  $\Omega_2$  such that :

$$\Omega_1 = \{\phi > 0\} \quad \Omega_2 = \{\phi < 0\} \quad \Gamma = \{\phi = 0\}.$$

We introduce  $\mathcal{T}_h$  and  $\mathcal{T}_h^\Gamma$  the meshes on  $\Omega$  and  $\Gamma$ . We also introduce  $\Omega_h$  and  $\Omega_h^\Gamma$  the domains covered by these two meshes. We denote by  $V_{h,1}^{(k)}$  and  $V_{h,2}^{(k)}$  :

$$V_{h,i}^{(k)} := \left\{ \mathbf{v}_h \in H^1(\Omega_{h,i}) : \mathbf{v}_h|_T \in \mathbb{P}^k(T)^d \quad \forall T \in \mathcal{T}_h \text{ and } \mathbf{v}_h = \mathbf{u}_D \text{ on } \partial\Omega \right\}.$$



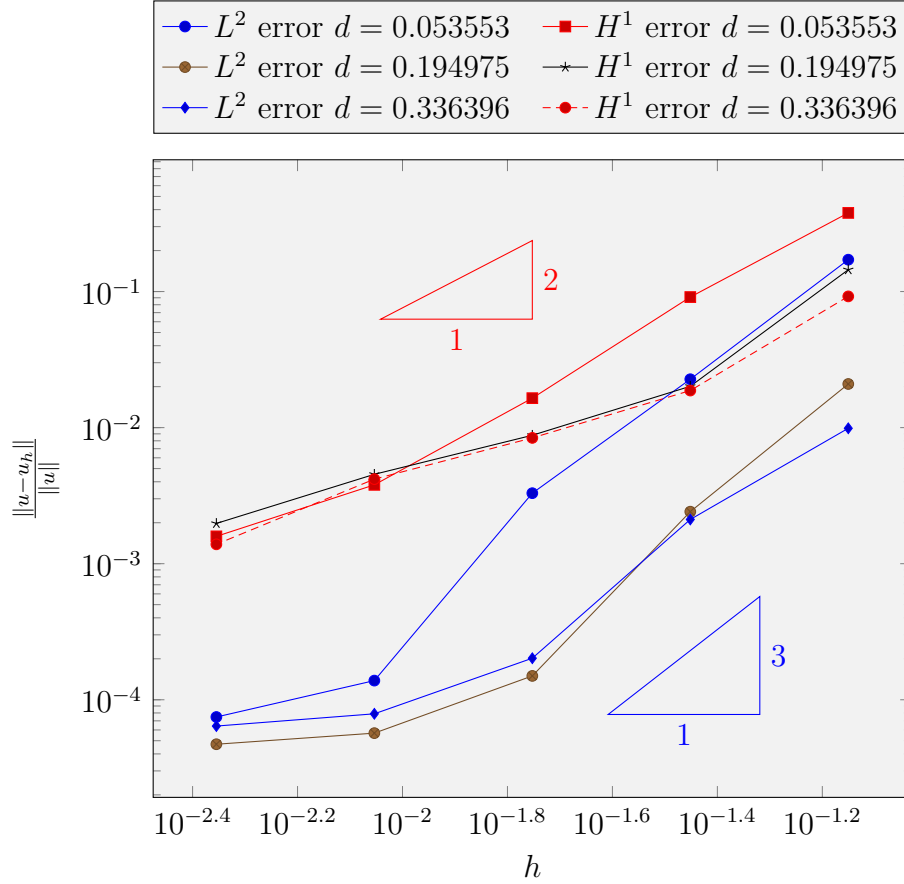


FIGURE 37 –  $L^2$  and  $H^1$  relative errors for the second test case, for  $k = 2$ .

We also introduce  $Z_h^{(k)}$  and  $Q_h^{(k)}$  such that :

$$Z_h^{(k)} := \left\{ \mathbf{z}_h \in H^1(\Omega_h^\Gamma) : \mathbf{z}_{h|T} \in \mathbb{P}^k(T)^{(d \times d)} \quad \forall T \in \mathcal{T}_h^\Gamma \right\},$$

and

$$Q_h^{(k)} := \left\{ \mathbf{q}_h \in H^1(\Omega_h^\Gamma) : \mathbf{q}_{h|T} \in \mathbb{P}^{k-1}(T)^d \quad \forall T \in \mathcal{T}_h^\Gamma \right\}.$$

We now decide to introduce two new schemes : one using an auxiliary function  $\mathbf{p}$  for the jump of the solution on the boundary and one using  $\mathbf{p}$  and  $\mathbf{P}$  for the two jump conditions.

**First scheme.** Using the same idea as in the Neumann case, we introduce two auxiliary functions  $\mathbf{y}_i \in Z_{h,i}^{(k)}$  and  $\mathbf{p} \in Q_h^{(k)}$  such that the problem (8.5) could be reformulated as the system of equations :

$$\mathbf{y}_i = -\boldsymbol{\sigma}_i(\mathbf{u}_i), \quad \text{on } \Omega_h^\Gamma, \quad (8.6)$$

$$\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2 + p\phi = 0, \quad \text{on } \Omega_h^\Gamma, \quad (8.7)$$

$$\mathbf{y}_1 \cdot \nabla \phi - \mathbf{y}_2 \cdot \nabla \phi = 0, \quad \text{on } \Omega_h^\Gamma. \quad (8.8)$$

We denote by  $W_h^{(k)} = V_{1,h}^{(k)} \times V_{2,h}^{(k)} \times Z_h^{(k)} \times Z_h^{(k)} \times Q_h^{(k)}$ . Using the scheme introduced for linear elasticity with Neumann conditions, we get the following one : find  $(\mathbf{u}_{h,1}, \mathbf{u}_{h,2}, \mathbf{y}_{h,1}, \mathbf{y}_{h,2}, \mathbf{p}_h) \in$

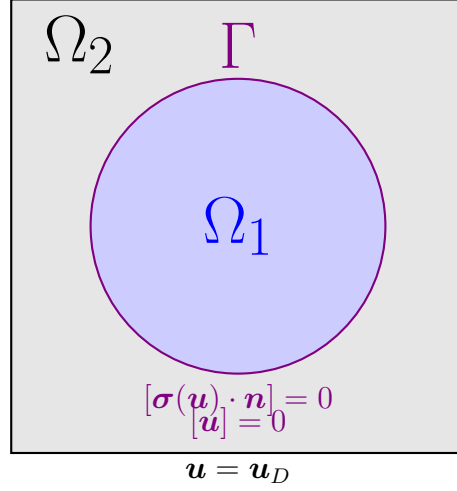


FIGURE 38 – Linear elasticity with multiple materials.

$W_h^{(k)}$  such that,

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega_{h,i}} \boldsymbol{\sigma}_i(\mathbf{u}_{h,i}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_{h,i}) + \frac{1}{h^2} \int_{\Omega_h^\Gamma} (\mathbf{u}_{h,1} - \mathbf{u}_{h,2} - \frac{1}{h} \mathbf{p} \phi_h) (\mathbf{v}_{h,1} - \mathbf{v}_{h,2} - \frac{1}{h} \mathbf{q}_h \phi_h) \\
& + \sum_{i=1}^2 \gamma_{div} \int_{\Omega_h^\Gamma} \operatorname{div} \mathbf{y}_{h,i} \cdot \operatorname{div} \mathbf{z}_{h,i} + \gamma_u \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega_h^\Gamma} (\mathbf{y}_{h,i} + \boldsymbol{\sigma}_i(\mathbf{u}_{h,i})) \cdot (\mathbf{z}_{h,i} + \boldsymbol{\sigma}_i(\mathbf{v}_{h,i})) \\
& + \sum_{i=1}^2 \int_{\Gamma_{h,i}} (\mathbf{y}_{h,i} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{v}_h + \sigma_p h \sum_{i=1}^2 \int_{\Gamma^i} [\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_{h,i}) \cdot \mathbf{n}] [\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{v}_{h,i}) \cdot \mathbf{n}] \\
& + \frac{\gamma_p}{h^2} \int_{\Omega_h^\Gamma} (\mathbf{y}_{h,1} \cdot \nabla \phi_h - \mathbf{y}_{h,2} \cdot \nabla \phi_h) (\mathbf{z}_{h,1} \cdot \nabla \phi_h - \mathbf{z}_{h,2} \cdot \nabla \phi_h) \\
& = \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega_{h,i}} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}_{h,i} + \gamma_{div} \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega_h^\Gamma} \mathbf{f} \cdot \operatorname{div} \mathbf{z}_{h,i}, \quad \forall (\mathbf{v}_{h,1}, \mathbf{v}_{h,2}, \mathbf{z}_{h,1}, \mathbf{z}_{h,2}, \mathbf{q}_h) \in W_h^{(k)}. \quad (8.9)
\end{aligned}$$

**Second scheme.** We denote  $W_h^{(k)} = V_{1,h}^{(k)} \times V_{2,h}^{(k)} \times Z_h^{(k)} \times Z_h^{(k)} \times Q_h^{(k)} \times Q_h^{(k)}$ . We now introduce  $\mathbf{y}_i \in Z_{h,i}^{(k)}$ ,  $\mathbf{p} \in Q_h^{(k)}$ , and  $\mathbf{P} \in Q_h^{(k)}$  such that the problem (8.5) could this time be reformulated as the system of equations :

$$\mathbf{y}_i = -\boldsymbol{\sigma}_i(\mathbf{u}_i), \quad \text{on } \Omega_h^\Gamma, \quad (8.10)$$

$$\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2 + p\phi = 0, \quad \text{on } \Omega_h^\Gamma, \quad (8.11)$$

$$\mathbf{y}_1 \cdot \nabla \phi - \mathbf{y}_2 \cdot \nabla \phi + \mathbf{P}\phi = 0, \quad \text{on } \Omega_h^\Gamma. \quad (8.12)$$

Using the scheme introduced before for linear elasticity with Neumann conditions, we obtain the following scheme : find  $(\mathbf{u}_{h,1}, \mathbf{u}_{h,2}, \mathbf{y}_{h,1}, \mathbf{y}_{h,2}, \mathbf{p}_h, \mathbf{P}_h) \in W_h^{(k)}$  such that,

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega_{h,i}} \boldsymbol{\sigma}_i(\mathbf{u}_{h,i}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_{h,i}) + \frac{1}{h^2} \int_{\Omega_h^\Gamma} (\mathbf{u}_{h,1} - \mathbf{u}_{h,2} - \frac{1}{h} \mathbf{p} \phi_h)(\mathbf{v}_{h,1} - \mathbf{v}_{h,2} - \frac{1}{h} \mathbf{q}_h \phi_h) \\
& + \sum_{i=1}^2 \gamma_{div} \int_{\Omega_h^\Gamma} \operatorname{div} \mathbf{y}_{h,i} \cdot \operatorname{div} \mathbf{z}_{h,i} + \gamma_u \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega_h^\Gamma} (\mathbf{y}_{h,i} + \boldsymbol{\sigma}_i(\mathbf{u}_{h,i})) \cdot (\mathbf{z}_{h,i} + \boldsymbol{\sigma}_i(\mathbf{v}_{h,i})) \\
& + \sum_{i=1}^2 \int_{\Gamma_{h,i}} (\mathbf{y}_{h,i} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{v}_h + \sigma_p h \sum_{i=1}^2 \int_{\Gamma_i} [\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_{h,i}) \cdot \mathbf{n}] [\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{v}_{h,i}) \cdot \mathbf{n}] \\
& + \frac{\gamma_p}{h^2} \int_{\Omega_h^\Gamma} (\mathbf{y}_{h,1} \cdot \nabla \phi_h - \mathbf{y}_{h,2} \cdot \nabla \phi_h + \frac{1}{h} \mathbf{P}_h \phi_h)(\mathbf{z}_{h,1} \cdot \nabla \phi_h - \mathbf{z}_{h,2} \cdot \nabla \phi_h + \frac{1}{h} \mathbf{Q}_h \phi_h) \\
& = \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega_{h,i}} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}_{h,i} + \gamma_{div} \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega_h^\Gamma} \mathbf{f} \cdot \operatorname{div} \mathbf{z}_{h,i}, \quad \forall (\mathbf{v}_{h,1}, \mathbf{v}_{h,2}, \mathbf{z}_{h,1}, \mathbf{z}_{h,2}, \mathbf{q}_h, \mathbf{Q}_h) \in W_h^{(k)}. \quad (8.13)
\end{aligned}$$

Considering the situation illustrated on Figure 38, we want to solve (8.4) for the exact solution

$$\mathbf{u}_{ex} = (\cos(x) \exp(y), \sin(y) \exp(x)).$$

For this case, the level-sets  $\phi$  is given by

$$\phi(x, y) = -0.3^2 + (x - 0.5)^2 + (y - 0.5)^2.$$

We then represent the error of the method with the two schemes described before on Figure 39. We here see that  $\phi$ -FEM is really interesting for the first case. When considering two materials with different parameters, the convergence of  $\phi$ -FEM is slower but still interesting.

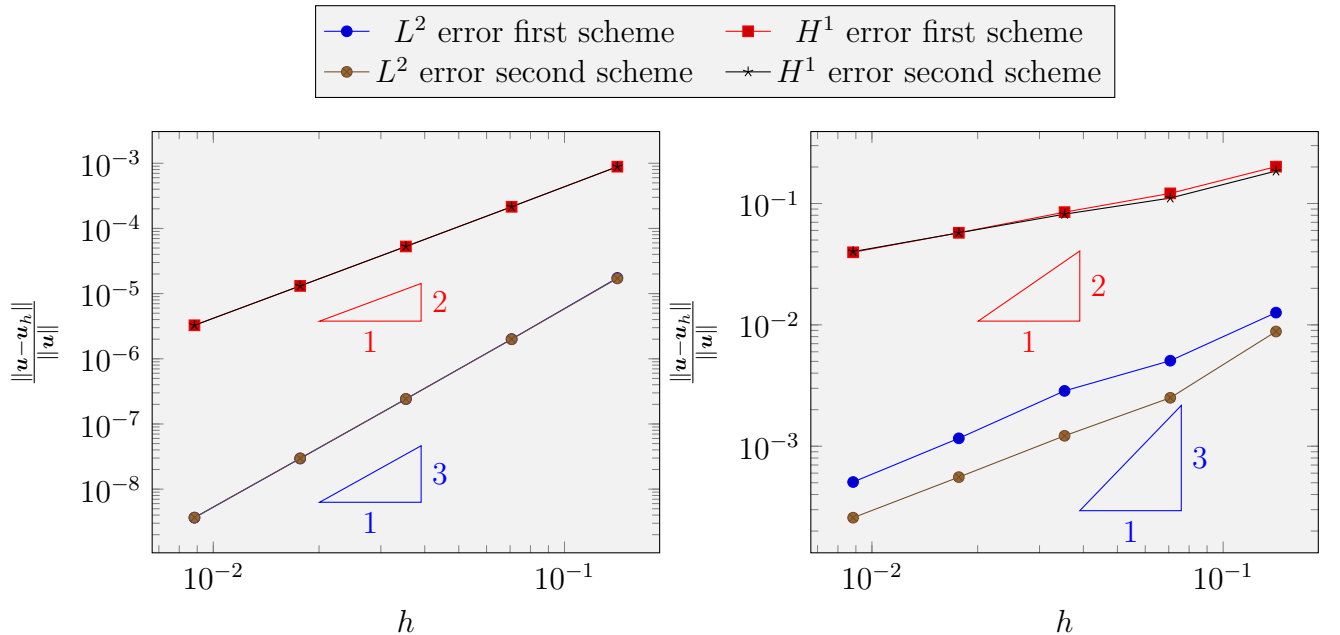


FIGURE 39 –  $H^1$  and  $L^2$  relative error for interface problem for the two schemes. Left :  $E_1 = E_2 = 7 \text{ kPa}$  and  $\nu_1 = \nu_2 = 0.3$ . Right :  $E_1 = 7 \text{ kPa}$ ,  $E_2 = 2.28 \text{ kPa}$  and  $\nu_1 = \nu_2 = 0.3$ .

### 8. 3. Fracture for the linear elasticity

We now want to consider the case of fractures. We illustrate the type of situation that we are going to talk about on the figure 40. Let  $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$  be the unit square. We assume that  $\Omega_1$  and  $\Omega_2$  are delimited by a boundary  $\Gamma = \Omega_1 \cap \Omega_2$  such that  $\Gamma = \Gamma_f \cup \Gamma_{int}$  where

$$\Gamma_{int} := (\Omega_1 \cap \Omega_2) \cap \{x \leq 0.5\} \quad \text{and} \quad \Gamma_f := (\Omega_1 \cap \Omega_2) \cap \{x > 0.5\}.$$

Let  $\phi$  be the level-sets such that :

$$\Omega_1 := \{\phi < 0\}, \quad \Omega_2 := \{\phi > 0\}, \quad \Gamma := \{\phi = 0\}.$$

For the case of Figure 40,  $\phi$  is given by

$$\phi(x, y) = y - \frac{1}{4} \sin(2\pi x) - \frac{1}{2}.$$

We choose to solve a linear elasticity problem, on two materials. To solve this type of problem, we will use one of the schemes introduced for interface problems. The way to solve this is very similar : we just have to introduce a new boundary condition on the fracture. We will then use the scheme introduced for Neumann conditions on the fracture. The considered problem is :

$$\begin{cases} -\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}_i(\mathbf{u}_i) &= \mathbf{f}, \text{ on } \Omega_i, \\ \mathbf{u}_i &= \mathbf{u}_D, \text{ on } \partial\Omega, \\ [\mathbf{u}] &= 0, \text{ on } \Gamma_{int}, \\ [\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n}] &= 0, \text{ on } \Gamma_{int}, \\ \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} &= \mathbf{g}, \text{ on } \Gamma_f. \end{cases} \quad (8.14)$$

We also decide to add a representation of the situation when computing  $\phi$ -FEM on this example, on the figure 40. Thanks to this representation, we can illustrate the spaces  $\Omega_h^{\Gamma_{int}}$  and  $\Omega_h^{\Gamma_f}$ .

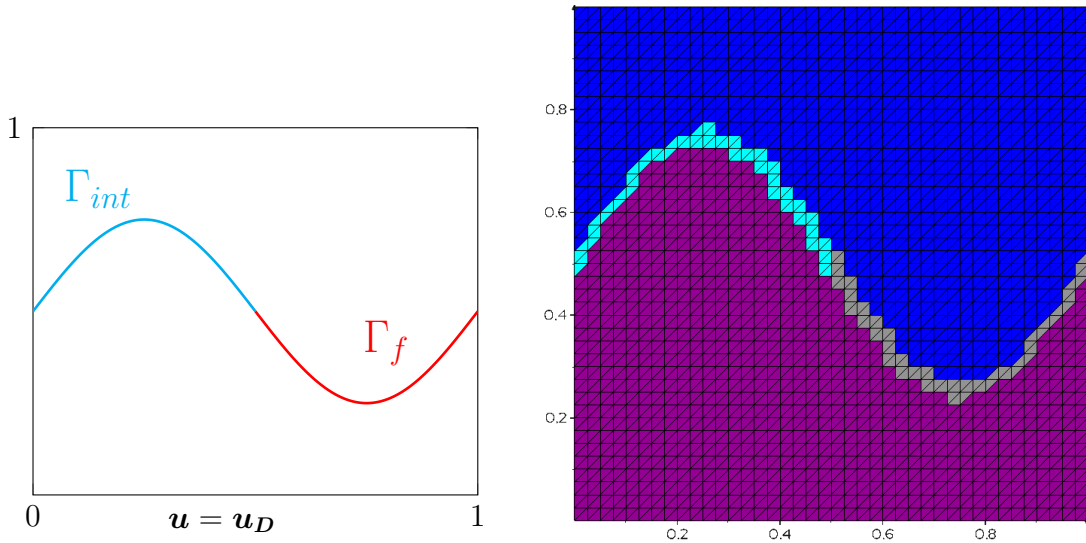


FIGURE 40 – Left : Representation of the situation. Right : blue :  $\Omega_{h,1}$ , purple :  $\Omega_{h,2}$ , cyan :  $\Omega_h^{\Gamma_{int}}$ , Gray :  $\Omega_h^{\Gamma_f}$ .

We denote :

$$W_h^{(k)} = V_{1,h}^{(k)} \times V_{2,h}^{(k)} \times Z_h^{(k)} \times Z_h^{(k)} \times Q_h^{(k)} \times Z_{h,N}^{(k)} \times Q_{h,N}^{(k)} \times Z_{h,N}^{(k)} \times Q_{h,N}^{(k)},$$

where

$$\begin{aligned} V_{h,i}^{(k)} &:= \left\{ \mathbf{v}_h \in H^1(\Omega_{h,i}) : \mathbf{v}_{h|T} \in \mathbb{P}^k(T)^d \quad \forall T \in \mathcal{T}_h \text{ and } \mathbf{v}_h = \mathbf{u}_D \text{ on } \partial\Omega \right\}, \\ Z_h^{(k)} &:= \left\{ \mathbf{z}_h \in H^1(\Omega_h^{\Gamma_{int}}) : \mathbf{z}_{h|T} \in \mathbb{P}^k(T)^{(d \times d)} \quad \forall T \in \mathcal{T}_h^{\Gamma_{int}} \right\}, \\ Q_h^{(k)} &:= \left\{ \mathbf{q}_h \in H^1(\Omega_h^{\Gamma_{int}}) : \mathbf{q}_{h|T} \in \mathbb{P}^{k-1}(T)^d \quad \forall T \in \mathcal{T}_h^{\Gamma_{int}} \right\}, \\ Z_{h,N}^{(k)} &:= \left\{ \mathbf{z}_h \in H^1(\Omega_h^{\Gamma_N}) : \mathbf{z}_{h|T} \in \mathbb{P}^k(T)^{(d \times d)} \quad \forall T \in \mathcal{T}_h^{\Gamma_N} \right\}, \end{aligned}$$

and

$$Q_{h,N}^{(k)} := \left\{ \mathbf{q}_h \in H^1(\Omega_h^{\Gamma_N}) : \mathbf{q}_{h|T} \in \mathbb{P}^{k-1}(T)^d \quad \forall T \in \mathcal{T}_h^{\Gamma_N} \right\}.$$

We introduce  $\mathbf{y}_i \in Z_h^{(k)}$  and  $\mathbf{p} \in Q_h^{(k)}$  such that the problem (8.14) could be reformulated on the interface as the system of equations :

$$\mathbf{y}_i = -\boldsymbol{\sigma}_i(\mathbf{u}_i), \quad \text{on } \Omega_h^{\Gamma_{int}}, \quad (8.15)$$

$$\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2 + \mathbf{p}\phi = 0, \quad \text{on } \Omega_h^{\Gamma_{int}}, \quad (8.16)$$

$$\mathbf{y}_1 \cdot \nabla \phi - \mathbf{y}_2 \cdot \nabla \phi = 0, \quad \text{on } \Omega_h^{\Gamma_{int}}. \quad (8.17)$$

To impose the Neumann condition on  $\Gamma_f$ , we also introduce  $\mathbf{y}_i^N \in Z_{h,N}^{(k)}$  and  $\mathbf{p}_i^N \in Q_{h,N}^{(k)}$  such that the problem (8.14) could be reformulated on the fracture as the system of equations :

$$\mathbf{y}_i^N = -\boldsymbol{\sigma}_i(\mathbf{u}_i), \quad \text{on } \Omega_h^{\Gamma_f}, \quad (8.18)$$

$$\mathbf{y}_i^N \nabla \phi + \mathbf{p}_i^N \phi + \mathbf{g}|\nabla \phi| = 0, \quad \text{on } \Omega_h^{\Gamma_f}. \quad (8.19)$$

Using the scheme introduced before for linear elasticity with Neumann conditions, we obtain the following scheme : find  $(\mathbf{u}_{h,1}, \mathbf{u}_{h,2}, \mathbf{y}_{h,1}, \mathbf{y}_{h,2}, \mathbf{p}_h, \mathbf{y}_{h,1}^N, \mathbf{p}_{h,1}^N, \mathbf{y}_{h,2}^N, \mathbf{p}_{h,2}^N) \in W_h^{(k)}$  such that,

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega_{h,i}} \boldsymbol{\sigma}_i(\mathbf{u}_{h,i}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_{h,i}) + \frac{\gamma_p}{h^2} \int_{\Omega_h^{\Gamma_{int}}} (\mathbf{u}_{h,1} - \mathbf{u}_{h,2} - \frac{1}{h} \mathbf{p}\phi_h)(\mathbf{v}_{h,1} - \mathbf{v}_{h,2} - \frac{1}{h} \mathbf{q}_h\phi_h) \\ & + \sum_{i=1}^2 \gamma_{div} \int_{\Omega_h^{\Gamma_{int}}} \operatorname{div} \mathbf{y}_{h,i} \cdot \operatorname{div} \mathbf{z}_{h,i} + \gamma_u \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega_h^{\Gamma_{int}}} (\mathbf{y}_{h,i} + \boldsymbol{\sigma}_i(\mathbf{u}_{h,i})) \cdot (\mathbf{z}_{h,i} + \boldsymbol{\sigma}_i(\mathbf{v}_{h,i})) \\ & + \sum_{i=1}^2 \int_{\Gamma_{h,int}} (\mathbf{y}_{h,i} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{v}_h + \sigma_p h \sum_{i=1}^2 \int_{\Gamma_{h,int}} [\boldsymbol{\sigma}_i(\mathbf{u}_{h,i}) \cdot \mathbf{n}] [\boldsymbol{\sigma}_i(\mathbf{v}_{h,i}) \cdot \mathbf{n}] \\ & + \gamma_{u,N} \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega_h^{\Gamma_f}} (\mathbf{y}_{h,i}^N + \boldsymbol{\sigma}_i(\mathbf{u}_i)) \cdot (\mathbf{z}_{h,i}^N + \boldsymbol{\sigma}_i(\mathbf{v}_i)) + \gamma_{div,N} \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega_h^{\Gamma_f}} \operatorname{div} \mathbf{y}_{h,i}^N \cdot \operatorname{div} \mathbf{z}_{h,i}^N \\ & + \frac{\gamma_{p,N}}{h^2} \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega_h^{\Gamma_f}} (\mathbf{y}_{h,i}^N \nabla \phi + \frac{1}{h} \mathbf{p}_{h,i}^N \phi_h)(\mathbf{z}_{h,i}^N \nabla \phi + \frac{1}{h} \mathbf{q}_{h,i}^N \phi_h) \\ & + \sum_{i=1}^2 \int_{\Gamma_{h,f}} \mathbf{y}_{h,i}^N \cdot \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}_i + \sigma_N h \sum_{i=1}^2 \int_{\Gamma_{h,f}} [\boldsymbol{\sigma}_i(\mathbf{u}_{h,i}) \cdot \mathbf{n}] [\boldsymbol{\sigma}_i(\mathbf{v}_{h,i}) \cdot \mathbf{n}] \\ & = \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega_{h,i}} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}_{h,i} + \gamma_{div} \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega_h^{\Gamma_{int}}} \mathbf{f} \cdot \operatorname{div} \mathbf{z}_{h,i} + \gamma_{div,N} \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega_h^{\Gamma_f}} \mathbf{f} \cdot \operatorname{div} \mathbf{z}_{h,i}^N \\ & - \frac{\gamma_{p,N}}{h^2} \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega_h^{\Gamma_f}} \mathbf{g}|\nabla \phi_h|(\mathbf{z}_{h,i}^N \nabla \phi + \frac{1}{h} \mathbf{q}_{h,i}^N \phi_h), \quad \forall (\mathbf{v}_{h,1}, \mathbf{v}_{h,2}, \mathbf{z}_{h,1}, \mathbf{z}_{h,2}, \mathbf{q}_h, \mathbf{z}_{h,1}^N, \mathbf{q}_{h,1}^N, \mathbf{z}_{h,2}^N, \mathbf{q}_{h,2}^N) \in W_h^{(k)}. \end{aligned} \quad (8.20)$$

**Test case : manufactured solution** We use the method to solve (8.14) with the exact solution

$$u_{ex} = (\sin(x) \times \exp(y), \sin(y) \times \exp(x))$$

with boundary conditions :

$$\sigma(u) \cdot n = \sigma(u_{ex}) \times \frac{\nabla \phi}{\|\nabla \phi\|} + u_{ex} \times \phi, \quad \text{on } \Omega_h^{\Gamma_f} = \Omega_h^{\Gamma} \cap \{x > 0.5\}.$$

We choose  $\gamma_u = \gamma_p = \gamma_{div} = \gamma_{u,N} = \gamma_{p,N} = \gamma_{div,N} = 1.0$ ,  $\sigma_p = 1.0$  and  $\sigma_N = 0.01$ .

On Figure 41, we see that  $\phi$ -FEM seems to follow the theoretical convergence order given for Neumann conditions in [5].

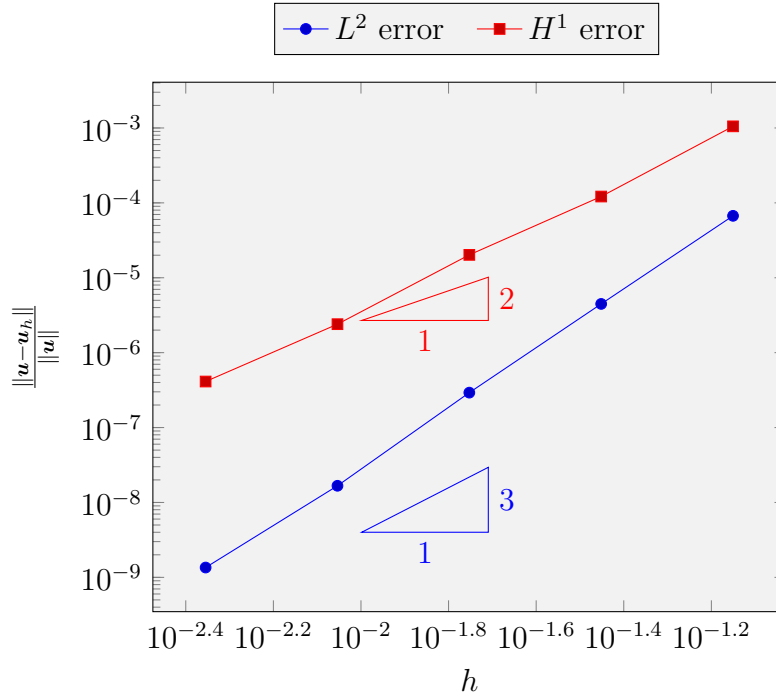


FIGURE 41 –  $H^1$  and  $L^2$  relative errors for the test case of fractures with  $E_1 = E_2 = 7 \text{ kPa}$ ,  $\nu_1 = \nu_2 = 0.3$  and  $k = 2$ .

# Conclusion

A travers ce rapport, nous avons présenté le principe des méthodes éléments finis puis une méthode récente :  $\phi$ -FEM. Nous avons ensuite cherché à introduire de nouvelles variantes et évolutions de  $\phi$ -FEM, notamment dans le cadre de l'élasticité linéaire. Cela nous a permis de voir les avantages offerts par cette méthode sur différents problèmes.

Nous avons également développé une méthode permettant de créer la fonction  $\phi$  afin de créer des maillages réguliers sur des domaines complexes. Cela pourra par exemple permettre d'utiliser  $\phi$ -FEM sur des organes, généralement complexes à mailler régulièrement.

J'espère, suite à ce stage, avoir la chance et l'opportunité de collaborer à nouveau avec Monsieur Duprez, Monsieur Lozinski et Madame Lleras pour participer au développement et à l'évolution de  $\phi$ -FEM pour différents problèmes et son implémentation au sein de *SOFA*.

# Références

- [1] Grégoire Allaire. *Analyse numérique et optimisation*. 2012.
- [2] Grégoire Allaire and François Alouges. Analyse variationnelle des équations aux dérivées partielles, polycopié du cours map 431. <http://www.cmap.polytechnique.fr/~alouges/polycopie2.pdf>, 2015-2016.
- [3] F. Ballarin and G. Rozza. multiphenics. <https://mathlab.sissa.it/multiphenics>, 2020.
- [4] S. Brenner and L. Scott. The mathematical theory of finite element methods, 2008.
- [5] Michel Duprez, Vanessa Lleras, and Alexei Lozinski. A new  $\phi$ -FEM approach for problems with natural boundary conditions. working paper or preprint, March 2020.
- [6] Michel Duprez and Alexei Lozinski.  $\phi$ -FEM : a finite element method on domains defined by level-sets. *SIAM J. Numer. Anal.*, 58(2) :1008–1028, 2020.
- [7] François Faure, Christian Duriez, Hervé Delingette, Jérémie Allard, Benjamin Gilles, Stéphanie Marchesseau, Hugo Talbot, Hadrien Courtecuisse, Guillaume Bousquet, Igor Peterlik, and Stéphane Cotin. SOFA : A Multi-Model Framework for Interactive Physical Simulation. In Yohan Payan, editor, *Soft Tissue Biomechanical Modeling for Computer Assisted Surgery*, volume 11 of *Studies in Mechanobiology, Tissue Engineering and Biomaterials*, pages 283–321. Springer, June 2012.
- [8] André Fortin and André Garon. Les éléments finis : de la théorie à la pratique. [https://giref.ulaval.ca/afortin/elements\\_finis.pdf](https://giref.ulaval.ca/afortin/elements_finis.pdf), 1999.
- [9] Hans Petter Langtangen and Anders Logg. *Solving PDEs in Python*. Springer, 2017.
- [10] Anders Logg, Kent-Andre Mardal, Garth N. Wells, et al. *Automated Solution of Differential Equations by the Finite Element Method*. Springer, 2012.