Министерство науки и высшего образования Российской Федерации Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский университет ИТМО»
Факультет программной инженерии и компьютерной техники

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №6
ПО ИНФОРМАТИКЕ
«Работа с системой компьютерной вёрстки $\TeX$»
Вариант №32

Выполнил: Пархоменко К.А., группа P3112
Проверил: к.т.н., преподаватель Белозубов А.В.

г. Санкт-Петербург
2022г.

ставленную задачу. Остается заметить, что вычисление следует прекращать после того, как x_{n+1} станет равным x_n с заданным количеством десятичных знаков.

Метод последовательных приближений обладает одним большим достоинством: случайная ошибка в промежуточных действиях не повлияет на величину результата, а лишь увеличит время на его получение.

Вообще при проведении вычислений контролю должно быть уделено самое серьезное внимание. Конечно, процесс вычислений можно повторить заново, но это вдвое увеличит общее время работы. В особо ответственных случаях приходится идти и на этот шаг, но возможны и другие методы контроля, учитывающие специфику конкретного расчета. Например, если от одного аргумента x вычисляется $\sin x$ и $\cos x$, то естественно затем подсчитать $\sin^2 x + \cos^2 x$ и сравнить с единицей.

Еще один пример

Особый интерес представляет методика, позволяющая контролировать каждый этап вычислений. Продемонстрируем ее на примере решения системы линейных алгебраических уравнений.

Пусть нам задана система двух уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} 5x + 2y = 19, \\ 3x + 7y = 23. \end{cases} \tag{4}$$

Запишем ее коэффициенты и свободные члены в виде таблицы:

5	2	19
3	7	23

Пополним эту таблицу *контрольным столбцом*, элементы которого равны сумме элементов соответствующей строки. Получим расширенную таблицу:

5	2	19	26
3	7	23	33

(5)

В дальнейшем будем рассматривать таблицу (5) как изображение двух систем с одинаковыми коэффициентами и разными свободными членами: системы (4) и системы

$$\begin{cases} 5x + 2y = 26, \\ 3x + 7y = 33. \end{cases} \tag{6}$$

Решая системы (4) и (6) методом Гаусса, поделим все элементы первой строки на ее первый член. Получим таблицу

1	0,4	3,8	5,2
3	7	23	33

(7)

Контроль состоит в том, что на любом этапе сумма первых трех чисел любой строки должна равняться четвертому числу; здесь это выполняется.

Далее умножим все элементы первой строки на первый член второй строки. Получим

3	1,2	11,4	15,6
3	7	23	33

Вычтем почленно из 2-й строки 1-ю:

3	1,2	11,4	15,6
0	5,8	11,6	17,4

(8)

Из второй строки (8) получаем

$$y = \frac{11,6}{5,8} = 2,\ y = \frac{17,4}{5,8} = 3$$

Наконец, из 1-й строки таблицы (7) находим

$$x = 3,8 - 2 * 0,4 = 3,$$
$$x = 5,2 - 3 * 0,4 = 4$$

Искомое решение $x = 3$, $y = 2$; решение системы (6): $\tilde{x} = 4$, $\tilde{y} = 3$. Имеют место равенства

$$\tilde{x} = x + 1,\ \tilde{y} = y + 1 \tag{9}$$

значит, система решена верно. Отметим, что если в окончательном ответе равенства (9) не выполняются, то или при счете имели место слишком грубые округления, или была где-

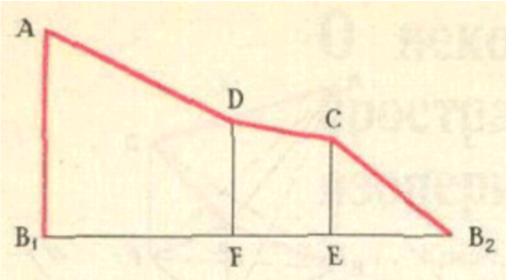

Рис. 4

AD (рис. 3) выбрать так, чтобы площадь треугольника BEF оказалась наибольшей из возможных.

Чтобы добиться этого, позаботимся сначала о том, чтобы его периметри был наибольшим. Развернем на плоскость грани $ABFD, FDCE, CEB$, проектирующие четырехугольник $ABCD$ на плоскость П. В получившейся плоской фигуре (рис. 4) длина строны B_1B_2 равна периметру треугольника BFE, откуда ясно, что этот периметр будет наибольшим в том случае, когда отрезки AD, DC, CB образуют один и тот же угол $\alpha = \arccos \frac{h}{2p-h}$ со стороной AB (рис. 5). Таким образом, пространственный четырехугольник со стороной $AB = h$ и периметром $2p$, для которого треугольник BEF имеет наибольший периметр, можно получить в результате следующего построения: прямоугольник со стороной $AB_1 = h$ и диагональю $AB_2 = 2p - h$ сворачивается в треугольную призму так, что точки B_1 и B_2 совпадают, а ее боковым ребром служит отрезок AB_1. При этом линия B_1ADCB_2 превратится в искомый пространственный четырехугольник.

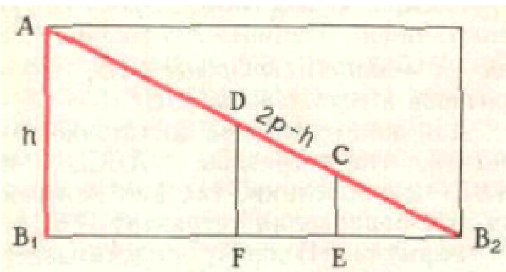

Рис. 5

Таким образом, наша задача свелась к изопериметрической задаче для треугольника BEF. Как мы знаем, при заданном периметре площадь этого треугольника максимальна, когда $BF = FE = EB$, вследствие чего у четырехугольника $ABCD$, являющегося решением задачи $2'$, стороны AD, DC и CB равны. Этими условиями и тем, что AD, DC и CB образуют один и тот же угол с AB, четырехугольник $ABCD$ определяется однозначно.

Итак, доказана.

Т е о р е м а 2. *Среди всех тетраэдров, натянутых на пространственные четырехугольники $ABCD$ с заданными периметром $2p$ и длиной h стороны AB, наибольший объем имеет тетраэдр, натянутый на четырехугольник, стороны которого AD, DC и CB имеют равные длины и образуют равные углы со стороной AB.*

Одновременно получен способ построения экстремального четырехугольника: для этого нужно прямоугольник, у которого одна сторона равна h, а диагональ равна $2p - h$, свернуть в правильную треугольную призму.

Р е ш е н и е з а д а ч и 3

Подсчитаем максимальный объем, о котором идет речь в теореме 2. Из рисунка 5 мы видим, что периметр треугольника BFE равен $\sqrt{(2p-h)^2 - h^2} = 2\sqrt{p(p-h)}$, а значит, его наибольшая площадь равна

$$\left[\frac{2\sqrt{p\,(p-h)}}{3}\right]^2 \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{p\,(p-h)}{3\sqrt{3}};$$

наконец, наибольший объем натянутого тетраэдра, в соответствии с формулой (1), равен

$$V = \frac{1}{3}\,h\,\frac{p\,(p-h)}{3\sqrt{3}} = \frac{p}{9\sqrt{3}}\,h\,(p-h) \qquad (2)$$

Теперь легко решается задача 3. Она отличается от задачи $2'$ тем, что в ней задается *только периметр* четырехугольника.