数学分析B 2025秋 USTC

姓名：石泊远　　学号：PB25000051

2025 年 9 月 20 日

Assignments 1. 设$r, s \in \mathbb{Q}$，求证：若$r + s\sqrt{2} = 0$，则$r = s = 0$

Proof. 若r, s中有一个不等于0，不妨设为s，$r \neq 0$的情况可以通过同乘$\sqrt{2}$转化到$s \neq 0$的情况
则原式等价于$\sqrt{2} = -\dfrac{r}{s} \in \mathbb{Q}$，而我们知道$\sqrt{2}$不是有理数，从而矛盾，有两个不等于0同理

Assignments 2. 证明：$6 \mid f(n) = n^4 + 2n^3 + 2n^2 + n$

Proof.

$$f(n) = n(n+1)(n^2+n+1)$$

相邻两个数中定有一个偶数，从而$2 \mid f(n)$
把模三的完全剩余系带入可知$3 \mid f(n)$

Assignments 3. 验证$E = \left\{p + q\sqrt{2} \mid p, q \in \mathbb{Q}\right\}$是一个数域，并证明$\mathbb{Q} \subsetneqq \mathbb{E} \subsetneqq \mathbb{R}$。
问：$\mathbb{Q}, \mathbb{E}, \mathbb{R}$之间还有没有其他的数域$E_1$

Proof. E的关于加减乘的封闭性是显然的，除的封闭性可以由如下被证明

$$\frac{p+q\sqrt{2}}{s+t\sqrt{2}}=\frac{ps-2qt+(qs-pt)\sqrt{2}}{s^2-2t^2}\in\mathbb{E}$$

$\mathbb{Q}\subset\mathbb{E}\subset\mathbb{R}$是显然的，下面证明真包含

$\sqrt{2}\in\mathbb{E},\sqrt{2}\notin\mathbb{Q}\Longrightarrow\mathbb{Q}\subsetneqq\mathbb{E}$

若$1,\sqrt{2}$可以通过线性组合表出$\sqrt{3}$，不妨设$\sqrt{3}=r+s\sqrt{2}\Longleftarrow\dfrac{r^2+2s^2-3}{2rs}=\sqrt{2}$，矛盾，从而我们有

$\sqrt{3}\in\mathbb{R},\sqrt{3}\notin\mathbb{E}\Longrightarrow\mathbb{E}\subsetneqq\mathbb{R}$