基于 Pontryagins 极小值原理的最优轨迹推导

使用双积分动力学，已知起点位置速度和终点位置速度，求解两点边值问题最优解。作业文档已经提供了协态变量α_1、α_2、α_3、β_1、β_2、β_3的表达形式，如式(1)所示。协态变量与最优控制量$u^* = [a_x, a_y, a_z]^{\mathrm{T}}$之间的关系如式(3)所示。

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{12}{T^3} & 0 & 0 & \frac{6}{T^2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12}{T^3} & 0 & 0 & \frac{6}{T^2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{12}{T^3} & 0 & 0 & \frac{6}{T^2} \\ \frac{6}{T^2} & 0 & 0 & -\frac{2}{T} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{6}{T^2} & 0 & 0 & -\frac{2}{T} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{6}{T^2} & 0 & 0 & -\frac{2}{T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta p_x \\ \Delta p_y \\ \Delta p_z \\ \Delta v_x \\ \Delta v_y \\ \Delta v_z \end{bmatrix} \tag{1}$$

其中，

$$\begin{bmatrix} \Delta p_x \\ \Delta p_y \\ \Delta p_z \\ \Delta v_x \\ \Delta v_y \\ \Delta v_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{xf} - p_{x0} - v_{x0}T \\ p_{yf} - p_{y0} - v_{y0}T \\ p_{zf} - p_{z0} - v_{z0}T \\ v_{xf} - v_{x0} \\ v_{yf} - v_{y0} \\ v_{zf} - v_{z0} \end{bmatrix} \tag{2}$$

$$u = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 T + \beta_1 \\ \alpha_2 T + \beta_2 \\ \alpha_3 T + \beta_3 \end{bmatrix} \tag{3}$$

在上述结论的基础上，详细推导目标函数与时间 T 的关系式。

首先，将式(3)代入到目标函数$J = \int_0^T (1 + a_x^2 + a_y^2 + a_z^2)dt$中，并通过积分，得到式(4)。

$$J = T + \left(\frac{1}{3}\alpha_1^2 T^3 + \alpha_1\beta_1 T^2 + \beta_1^2 T\right) + \left(\frac{1}{3}\alpha_2^2 T^3 + \alpha_2\beta_2 T^2 + \beta_2^2 T\right) + \left(\frac{1}{3}\alpha_3^2 T^3 + \alpha_3\beta_3 T^2 + \beta_3^2 T\right) \tag{4}$$

将式(1)中协态变量$\alpha_1, \ldots, \beta_3$的表达式代入目标函数(4)中，这一步公式推导比较繁杂，注意正负号和同类项消除。但是可以看出公式(4)中的后三项除了下标不同，其他是完全相同的，

因此可以计算第二项$\left(\frac{1}{3}\alpha_1^2T^3+\alpha_1\beta_1T^2+\beta_1^2T\right)$，其他部分（后两项）只修改下标即可。因此，这里给出第二项的展开式(5)。

$$
\begin{aligned}
&\left(\frac{1}{3}\alpha_1^2T^3+\alpha_1\beta_1T^2+\beta_1^2T\right)\\
&\Downarrow \text{代入协态变量}\\
&\frac{1}{3}\left(-\frac{12}{T^3}\Delta p_x+\frac{6}{T^2}\Delta v_x\right)^2T^3+\left(-\frac{12}{T^3}\Delta p_x+\frac{6}{T^2}\Delta v_x\right)\left(\frac{6}{T^2}\Delta p_x-\frac{2}{T}\Delta v_x\right)T^2+\left(\frac{6}{T^2}\Delta p_x-\frac{2}{T}\Delta v_x\right)^2T\\
&\Downarrow \text{多项式展开}\\
&\left(\frac{48}{T^3}\Delta p_x^2-\frac{48}{T^2}\Delta p_x\Delta v_x+\frac{12}{T}\Delta v_x^2\right)+\left(-\frac{72}{T^3}\Delta p_x^2+\frac{60}{T^2}\Delta p_x\Delta v_x-\frac{12}{T}\Delta v_x^2\right)+\left(\frac{36}{T^3}\Delta p_x^2-\frac{24}{T^2}\Delta p_x\Delta v_x+\frac{4}{T}\Delta v_x^2\right)\\
&\Downarrow \text{合并同类项}\\
&\frac{12}{T^3}\Delta p_x^2-\frac{12}{T^2}\Delta p_x\Delta v_x+\frac{4}{T}\Delta v_x^2
\end{aligned}
\tag{5}
$$

然后，将$\Delta p_x=p_{xf}-p_{x0}-v_{x0}T,\Delta v_x=v_{xf}-v_{x0}$代入式(5)，得到式(6)

$$
\begin{aligned}
&\frac{12}{T^3}(p_{xf}-p_{x0}-v_{x0}T)^2-\frac{12}{T^2}(p_{xf}-p_{x0}-v_{x0}T)(v_{xf}-v_{x0})+\frac{4}{T}(v_{xf}-v_{x0})^2\\
&\Downarrow \text{多项式展开并合并同类项}\\
&\frac{12}{T^3}(p_{xf}-p_{x0})^2-\frac{12}{T^2}(p_{xf}-p_{x0})(v_{x0}+v_{xf})+\frac{4}{T}(v_{x0}^2+v_{x0}v_{xf}+v_{xf}^2)
\end{aligned}
\tag{6}
$$

至此，第二项$\left(\frac{1}{3}\alpha_1^2T^3+\alpha_1\beta_1T^2+\beta_1^2T\right)$的展开为式(6)，同理第三四项也按照同样的方式展开，最终得到式(7)所示的形式。

$$
J=T+\frac{12}{T^3}(\mu_x^2+\mu_y^2+\mu_z^2)-\frac{12}{T^2}(\mu_x\tau_x+\mu_y\tau_y+\mu_z\tau_z)+\frac{4}{T}(\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z)
\tag{7}
$$

其中，

$$
\begin{aligned}
&\mu_x=p_{xf}-p_{x0},\ \mu_y=p_{yf}-p_{y0},\ \mu_z=p_{zf}-p_{z0}\\
&\tau_x=v_{x0}+v_{xf},\quad \tau_y=v_{y0}+v_{yf},\quad \tau_z=v_{z0}+v_{zf}\\
&\sigma_x=v_{x0}^2+v_{x0}v_{xf}+v_{xf}^2\\
&\sigma_y=v_{y0}^2+v_{y0}v_{yf}+v_{yf}^2\\
&\sigma_z=v_{z0}^2+v_{z0}v_{zf}+v_{zf}^2
\end{aligned}
\tag{8}
$$

为了求得最优时间$T*$，对式(7)关于时间T求导，并令$\frac{\partial J(T)}{\partial T}=0$，如式(9)所示。

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial J(T)}{\partial T}=1-\frac{36}{T^4}(\mu_x^2+\mu_y^2+\mu_z^2)+\frac{24}{T^3}(\mu_x\tau_x+\mu_y\tau_y+\mu_z\tau_z)-\frac{4}{T^2}(\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z)=0\\
&\Downarrow \text{公式前后都乘以}T^4\\
&T^4-4(\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z)T^2+24(\mu_x\tau_x+\mu_y\tau_y+\mu_z\tau_z)T-36(\mu_x^2+\mu_y^2+\mu_z^2)=0
\end{aligned}
\tag{9}
$$

最后通过一元四次方程求根公式即可得到最优时间T^*。

注意的是，所推导的公式(9)，其一元四次方程的系数与助教分享的代码一致，即$-36(\mu_x^2+\mu_y^2+\mu_z^2)=c0$、$24(\mu_x\tau_x+\mu_y\tau_y+\mu_z\tau_z)=c1$、$-4(\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z)=c2$。

```
STEP 2: go to the hw_tool.cpp and finish the function Homeworktool::OptimalBVP
the solving process has been given in the document

because the final point of trajectory is the start point of OBVP, so we input the pos,vel to the OBVP

after finish Homeworktool::OptimalBVP, the Trajctory_Cost will record the optimal cost of this trajectory


*/
double px0 = _start_position(0);
double py0 = _start_position(1);
double pz0 = _start_position(2);

double pxf = _target_position(0);
double pyf = _target_position(1);
double pzf = _target_position(2);

double vx0 = _start_velocity(0);
double vy0 = _start_velocity(1);
double vz0 = _start_velocity(2);

double vxf = 0;
double vyf = 0;
double vzf = 0;

Eigen::Matrix<double, 4, 4> m;

double c0 = -36 * ((pxf - px0) * (pxf - px0) + (pyf - py0) * (pyf - py0) + (pzf - pz0) * (pzf - pz0)) ;
double c1 = 24 * ((pxf - px0) * (vxf + vx0) + (pyf - py0) * (vyf + vy0) + (pzf - pz0) * (vzf + vz0));
double c2 = -4 * (vx0 * vx0 + vx0 * vxf + vxf * vxf + vy0 * vy0  + vy0 * vyf + vyf * vyf + vz0 * vz0 + vz0 * vzf + vzf * vzf);
double c3 = 0.0;

m << 0, 0, 0, -c0,
     1, 0, 0, -c1,
     0, 1, 0, -c2,
     0, 0, 1,  c3;
```

```
eigenValules = m
for(int i = 0; i
{
    double T = s
    double img =

    if(T <= 0 ||
        continue
    }

    Eigen::Vecto

    alpha(0) = 1
    alpha(1) = 1
    alpha(2) = 1
    beta(0) = 2
    beta(1) = 2
    beta(2) = 2

    J = T + 1.0

    if(J < optim
    {
        optimal_
    }
}
return optimal_c
```