Appunti di Calcolo delle probabilità

Riccardo Lo Iacono

Dipartimento di Matematica & Informatica
Università degli studi di Palermo
Sicilia
a.a. 2023-2024

Indice.

– 1 – Introduzione alla probabilità: storia e concetti base.

Storicamente il prima ad interessarsi a quella che sarebbe poi divenuto lo studio della probabilità fu il cavaliere *De Mere*. Questi accanito scommettitore, suppose che vi fosse un legame tra la frequenza con cui uscisse un certo risultato e la sua probabilità.

Esempio: Come esempio della logica di De Mere si consideri quanto segue: siano

$$
\begin{aligned}
A &= \text{“Lanciando un dado a sei facce 4 volte, esce almeno un 6”} \\
B &= \text{“Lanciando due dadi a sei facce 24 volte, esce almeno una coppia (6,6)”}
\end{aligned}
$$

ci si chiede: $\Pr(A) = \Pr(B)$?

Secondo De Mere si avrebbe

$$
\begin{aligned}
\Pr(A) &= \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3} \\
\Pr(B) &= \underbrace{\frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \cdots + \frac{1}{36}}_{\times 36} = \frac{2}{3} \implies \Pr(A) = \Pr(B)
\end{aligned}
$$

Si osserva però che una valutazione più “corretta” è ottenuta sottraendo a tutti casi possibili, quelli a sfavore di A e B rispettivamente, da cui

$$
\begin{aligned}
\Pr(A) &= \frac{6^4 - 5^4}{6^4} \approx 0.518 \\
\Pr(B) &= \frac{36^{24} - 35^{24}}{36^{24}} \approx 0.491
\end{aligned}
$$

Concludendo dunque che $\Pr(A) > \Pr(B)$.

Introducendo un po di formalismo, quelli che nell’esempio di sopra sono stati indicati con A e B prendono il nome di eventi. Più in generale, fissato un certo spazio campionario Ω, dicasi ogni suo sottoinsieme E evento. Cioè un evento descrive uno dei possibili esiti di un esperimento. Casi particolari di evento sono l’evento certo Ω e quello impossibile $\varnothing$. In fine dato E un evento, si definisce $|E|$ il suo indicatore e si ha

$$
|E| = \begin{cases} 1, & \text{se } E \text{ è vero;} \\ 0, & \text{se } E \text{ è falso.} \end{cases}
$$

Dove con “vero” e “falso” ci si riferisce al verificarsi o meno di E.

Nota: la definizione di probabilità data da De Mere prende il nome di *criterio classico*.

– 1.1 – Partizione dell’evento certo.

Siano $E_1, \dots, E_n$ una famiglia di eventi. Allora se

1. $\forall i, j, i \neq j \qquad E_i \wedge E_j = \varnothing$
2. $\bigcup_{i=1}^{n} (E_i) = \Omega$

si dirà che $E_1, \dots, E_n$ formano una partizione di Ω.