Appunti di Calcolo delle probabilità

Riccardo Lo Iacono

Dipartimento di Matematica & Informatica
Università degli studi di Palermo
Sicilia
a.a. 2023-2024

Indice.

– 1 – Introduzione alla probabilità: storia e concetti base.

Storicamente il prima ad interessarsi a quella che sarebbe poi divenuto lo studio della probabilità fu il cavaliere *De Mere*. Questi accanito scommettitore, suppose che vi fosse un legame tra la frequenza con cui uscisse un certo risultato e la sua probabilità.

Esempio: Come esempio della logica di De Mere si consideri quanto segue: siano

$$\begin{aligned} A &= \text{“Lanciando un dado a sei facce 4 volte, esce almeno un 6”} \\ B &= \text{“Lanciando due dadi a sei facce 24 volte, esce almeno una coppia (6,6)”} \end{aligned}$$

ci si chiede: $\Pr(A) = \Pr(B)$?

Secondo De Mere si avrebbe

$$\begin{aligned} \Pr(A) &= \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3} \\ \Pr(B) &= \underbrace{\frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \cdots + \frac{1}{36}}_{\times 36} = \frac{2}{3} \implies \Pr(A) = \Pr(B) \end{aligned}$$

Si osserva però che una valutazione più “corretta” è ottenuta sottraendo a tutti casi possibili, quelli a sfavore di A e B rispettivamente, da cui

$$\begin{aligned} \Pr(A) &= \frac{6^4 - 5^4}{6^4} \approx 0.518 \\ \Pr(B) &= \frac{36^{24} - 35^{24}}{36^{24}} \approx 0.491 \end{aligned}$$

Concludendo dunque che $\Pr(A) > \Pr(B)$.

Introducendo un po di formalismo, quelli che nell'esempio di sopra sono stati indicati con A e B prendono il nome di eventi. Più in generale, fissato un certo spazio campionario Ω, dicasi ogni suo sottoinsieme E evento. Cioè un evento descrive uno dei possibili esiti di un esperimento. Casi particolari di evento sono l'evento certo Ω e quello impossibile $\varnothing$. In fine dato E un evento, si definisce $|E|$ il suo indicatore e si ha

$$|E| = \begin{cases} 1, & \text{se } E \text{ è vero;} \\ 0, & \text{se } E \text{ è falso.} \end{cases}$$

Dove con “vero” e “falso” ci si riferisce al verificarsi o meno di E.

Nota: la definizione di probabilità data da De Mere prende il nome di *criterio classico*.

– 1.1 – Partizione dell'evento certo.

Siano $E_1, \ldots, E_n$ una famiglia di eventi. Allora se

1. $\forall i, j, i \neq j \qquad E_i \wedge E_j = \varnothing$
2. $\bigcup_{i=1}^{n} (E_i) = \Omega$

si dirà che $E_1, \ldots, E_n$ formano una partizione di Ω.

– 2 – Impostazioni della probabilità.

Quella dell'impostazione classica, non è l'unica impostazione della probabilità esistente. Di fatti in aggiunta a quella sinora vista, si hanno le impostazioni *assiomatica, frequentista* e *soggettiva*, analizzate in maggior dettaglio nelle sezioni a seguire.

– 2.1 – Impostazione assiomatica.

L'impostazione assiomatica da una definizione rigorosamente matematica di probabilità, a seguito riportata.

Definizione: dato (Ω, A) uno spazio di misura: ossia Ω è uno spazio con un'algebra (o una $\sigma - algebra$ e A) una sua sottofamiglia di eventi; dicasi che una funzione $\Pr : A \to [0, 1]$, dicasi probabilità se:

1. $\forall E \in A, \Pr(E) \geq 0$;
2. $\Pr(\Omega) = 1$;
3. $\Pr(E_1 \vee E_2) = \Pr(E_1) + \Pr(E_2), \forall E_1, E_2 \in A : E_1 E_2 = \varnothing$

Nel caso in cui A sia infinito, il punto 3 diventa

$$\Pr\left(\bigvee_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \Pr(E_i)$$

– 2.2 – Impostazione frequentista.

Come evidente dall'esempio di De Mere, vi è una naturale tendenza ad associare la probabilità di un evento alla frequenza con cui lo stesso avviene. Tale concezione di probabilità è detta *impostazione frequentista*.

Definizione: considerata una successione di prove indipendenti, ripetute sotto le stesse condizioni, posto E un evento e f_N la frequenza di successo entro relativamente le prime N prove, si pone

$$\Pr(E) = \lim_{N \to \infty} f_N$$

– 2.3 – Impostazione soggettiva.

Le impostazioni sinora viste, sono generalizzabili nella *teoria soggettiva*. Con tale impostazione si ha una divisione rigorosa tra gli aspetti del certo e del probabile. Più in generale si ha quanto segue.

Definizione: sia E un evento, la probabilità $\Pr(*) E = p$ rappresenta il grado di fiducia che un individuo ha del verificarsi di E.

– 2.3.1 – Criterio della scommessa.

Da quanto detto precedentemente, sia supposto $\Pr(E) = p$ per un qualche evento E, si può intendere p come la quota che, in un ipotetica scommessa, un individuo è disposto a scommettere. Cioè

$$\text{si paga } p \text{ e si riceve } \begin{cases} 1, & \text{se } E \text{ vero }, \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases}$$

più in generale, $\forall S \in \mathbb{R}, S \neq 0$

$$\text{si paga } pS \text{ e si riceve } \begin{cases} S, & \text{se si verifica } S, \\ 0, & \text{altrimenti }. \end{cases}$$