

Appunti di Fisica

Riccardo Lo Iacono

Dipartimento di Matematica & Informatica
Università degli studi di Palermo
Sicilia
a.a. 2021-2022

Indice

1	Il SI e le grandezze di misura.	4
2	Analisi dimensionale.	5
3	Cifre significative.	6
4	Posizione e velocità.	7
4.1	Posizione e velocità.	7
5	Moto di un corpo puntiforme.	8
5.1	Moto rettilineo uniforme.	8
5.2	Moto uniformemente accelerato.	8
6	Moto del proiettile.	9
6.1	Gittata e altezza massima.	10
7	Moto circolare uniforme.	11
8	Leggi del moto.	12
8.1	Sistema inerziale e prima legge di Newton.	12
8.2	Seconda legge di Newton.	12
8.3	Forza gravitazionale e forza peso.	13
8.4	Terza legge di Newton.	13
8.5	Applicazioni delle leggi di Newton.	14
8.6	Forze d'attrito.	16
9	Moto circolare e leggi di Newton.	17
9.1	Moto in sistemi di riferimento accelerati.	17
9.2	Moto in presenza di forze frenanti.	17
10	Energia di un sistema.	19
10.1	Sistema e ambiente esterno.	19
10.2	Lavoro compiuto da una forza costante.	19
10.3	Lavoro compiuto da una forza variabile.	20
10.4	Energia cinetica e teorema dell'energia cinetica.	22
10.5	Energia potenziale di un sistema.	23
10.6	Forze conservative e non conservative.	24
10.7	Forze conservative ed energia potenziale.	24

11 Conservazione dell'energia.	25
11.1 Sistema isolato.	25
11.2 Sistemi con attrito dinamico.	26
11.3 Forze non conservative e variazione dell'energia meccanica.	27
11.4 Potenza.	27
12 Quantità di moto e urti.	28
12.1 Quantità di moto e sua conservazione.	28
12.2 Impulso e quantità di moto.	29
12.3 Urti monodimensionali.	29
13 Meccanica dei fluidi.	31
13.1 Pressione.	31
14 Moto oscillatorio.	32
14.1 Moto di un corpo connesso ad una molla.	32
14.2 Energia di un oscillatore armonico.	33
14.3 Pendolo	34
15 Temperatura	35
15.1 Principio zero della termodinamica.	35
15.2 Dilatazione termica di liquidi e solidi.	36
15.3 Descrizione macroscopica dei gas.	37
16 Primo principio della termodinamica.	38
16.1 Calore.	38
16.2 Calore specifico.	39
16.3 Calore latente.	39
16.4 Lavoro e calore nelle trasformazioni termodinamiche.	40
16.5 Primo principio della termodinamica.	41
16.6 Applicazioni del primo principio.	41
17 Teoria cinetica dei gas.	43
17.1 Modello molecolare di un gas.	43
17.2 Calore specifico molare di un gas.	46
17.3 Trasformazioni adiabatiche di un gas.	47
18 Macchine termiche.	48
18.1 Macchine termiche e secondo principio.	48
18.2 Macchine di Carnot.	49
18.3 Entropia.	51
18.4 Variazione di entropia nelle trasformazioni irreversibili.	52

18.5 Entropia su scala microscopica.	53
19 Campi elettrici.	54
19.1 Proprietà delle cariche elettriche.	54
19.2 Corpi caricati per induzione.	54
19.3 Legge di Coulomb.	55
19.4 Campo elettrico.	55
19.5 Campo elettrico di una carica distribuita.	56
19.6 Linee di campo.	57
19.7 Moto di particella carica in un campo uniforme.	57
20 La legge di Gauss	58
20.1 Il flusso elettrico.	58
20.2 La legge di Gauss.	59
21 Potenziale elettrico.	60
21.1 Potenziale elettrico e differenza di potenziale.	60
21.2 Differenza di potenziale in un campo elettrico uniforme.	61
21.3 Potenziale elettrico ed energia potenziale di cariche puntiformi.	62
21.4 Relazione tra campo e potenziale elettrico.	62
21.5 Potenziale elettrico di una distribuzione di carica.	63
22 Capacità e dielettrici.	64
22.1 Calcolo della capacità di un condensatore piano.	64
22.2 Combinazioni di condensatori.	65
22.3 Energia immagazzinata in un condensatore carico.	66
23 Corrente elettrica.	67
23.1 Resistenza.	68
23.2 Modello di conduzione elettrica.	69
23.3 Resistenza e temperatura.	70
23.4 Potenza elettrica.	70
24 Circuiti in corrente continua.	71
24.1 Forza elettromotrice.	71
24.2 Combinazioni di resistori.	72
24.3 Leggi di Kirchhoff.	73
24.4 Circuiti RC.	73

– 1 – Il SI e le grandezze di misura.

Per poter descrivere i fenomeni naturali, è necessario misurare gli aspetti che caratterizzano gli stessi. A ciascuna di queste misure è assegnata una grandezza fisica, di cui a seguito si riportano quelle “fondamentali”.

- lunghezza;
- massa;
- tempo.

Il dover comunicare i risultati di un esperimento, comporta la necessità di un’unità di misura univoca. Proprio per far fronte a tale bisogno nel 1960, nacque il “Sistema Internazionale” (SI), il quale si occupò di stabilire le unità di misura per le grandezze fisiche.

Alcune delle principali furono

- [il kilogrammo](#) (kg) per la massa;
- [il metro](#) (m) per la lunghezza;
- [il secondo](#) (s) per il tempo;

Altre unità di misura furono stabilite, ma si parlerà di ciascuna quando necessarie.

– 2 – Analisi dimensionale.

In fisica il concetto di dimensionale ha un significato particolare, con esso infatti si caratterizza la natura di una grandezza.

Si avrà spesso il bisogno di verificare la correttezza di un'equazione, in questi casi uno strumento utile è l'analisi dimensionale. Questa permette di verificare se tutti i membri di una certa equazione appartengano alla stessa dimensione.

Esempio.

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

L'equazione sopra indicata è dimensionalmente consistente poiché, se analizzata dal punto di vista delle unità di misura si ha

$$|L| = |L| + \frac{|L|}{|T|} |T| + \frac{|L|}{|T|^2} |T|^2$$

Viceversa un'equazione del tipo

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^3$$

risulta essere inconsistente dimensionalmente poiché, se analizzata dal punto di vista delle unità di misura si ha

$$|L| = |L| + \frac{|L|}{|T|} |T| + \frac{|L|}{|T|^2} |T|^3$$

il che è inconcepibile.

– 3 – Cifre significative.

La misurazione di grandezze fisiche comporta spesso una correttezza dei valori ottenuti solo entro certi limiti. Tale incertezza è dovuta a vari fattori, quale ad esempio la qualità dello strumento utilizzato.

Al fine di dare una corretta rappresentazione del valore, si usano spesso le cifre significative. (Nei presenti appunti ci si limiterà alla terza cifra.)

Quando si svolgono operazioni, per assegnare un corretto numero di cifre significative si utilizzano le seguenti regole.

1. Operazioni di somma e sottrazione: il numero di cifre significative del risultato deve essere uguale al numero di cifre significative degli operandi.

Esempio.

$$12.3 + 1.92 = 14.2 \text{ non } 14.22$$

2. Operazioni di prodotto e divisione: il numero di cifre significative deve essere uguale al numero minimo di cifre significative degli operandi.

Esempio.

$$12.1 \cdot 1.001 = 12.1 \text{ non } 12.10121$$

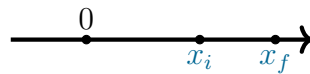
– 4 – Posizione e velocità.

Il moto unidimensionale studia il moto di un corpo, idealizzato come punto materiale, la cui massa e dimensione sono trascurabili.

– 4.1 – Posizione e velocità.

Si consideri una retta orientata, per stabilire la posizione di un punto $x \neq 0$, è necessario sapere dove questi si trovi rispetto il punto di riferimento.

Si consideri la seguente retta orientata ove sono stati fissati i punti x_i e x_f .



Si definisce spostamento, la variazione di posizione del punto in un certo lasso di tempo. Cioè

$$\Delta x = x_f - x_i$$

Dalla variazione di posizione si può ricavare la velocità media con cui avviene tale spostamento, la quale è data dalla seguente relazione.

$$\mathbf{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

Spesso però risulta utile conoscere la velocità del corpo in un certo istante di tempo, in questo caso si parlerà di velocità istantanea ed è data dalla seguente relazione.

$$\mathbf{v}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$$

– 5 – Moto di un corpo puntiforme.

Un corpo puntiforme è soggetto a molti moti, ma nei presenti appunti si studieranno i seguenti.

- Moto rettilineo uniforme;
- Moto uniformemente accelerato.

– 5.1 – Moto rettilineo uniforme.

Si definisce moto rettilineo, il moto di un corpo che si muove a velocità costante. Cioè

$$\mathbf{v}(t) = \text{costante} = \mathbf{v}$$

da cui, poiché la velocità è costante, segue

$$x(t) = x_0 + v_0 t$$

– 5.2 – Moto uniformemente accelerato.

Si definisce moto uniformemente accelerato, un moto che si muove con accelerazione costante. Cioè

$$\mathbf{a}(t) = \text{costante} = \mathbf{a}$$

da cui, poiché l'accelerazione è costante, segue

$$x(t) = x_0 + \mathbf{v}t$$

ma poiché la velocità varia linearmente

$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_f}{2}$$

da cui segue

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 + \frac{\mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_f}{2} t \\ &= x_0 + \mathbf{v}_0 t + \frac{1}{2} \mathbf{a} t^2 \end{aligned}$$

– 6 – Moto del proiettile.

La presente analisi del moto del proiettile è svolta sulla base di due ipotesi quali

1. in caduta libera l'accelerazione rimane costante per tutto il moto;
2. la resistenza dell'aria è trascurata.

Si consideri la figura di seguito riportata.

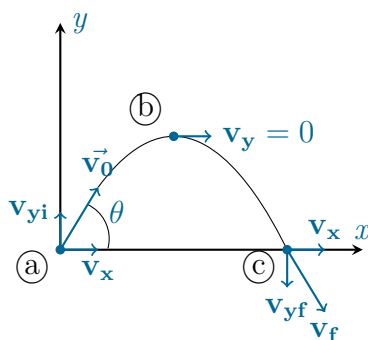


Figura 1: Schema rappresentativo di moto del proiettile.

Siano (a), (b), (c) rispettivamente: il punto di partenza del proiettile, il punto in cui il proiettile raggiunge l'altezza massima, il punto in cui il proiettile raggiunge lo stesso livello orizzontale di partenza.

Dalla *Figura 1* si nota che:

- lungo x , la posizione del corpo varia di moto rettilineo uniforme, poiché la velocità \mathbf{v}_x rimane costante per tutto il moto. Dunque se si considera \mathbf{r}_x lo spostamento lungo x , segue

$$\mathbf{r}_x(t) = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}t$$

- lungo y , la posizione del corpo varia di moto uniformemente accelerato, poiché la velocità \mathbf{v}_y varia, ma rimane costante l'accelerazione dovuta alla gravità. Dunque se si considera \mathbf{r}_y lo spostamento lungo y , segue

$$\mathbf{r}_y(t) = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0t + \frac{1}{2}\mathbf{a}t^2$$

– 6.1 – Gittata e altezza massima.

Si consideri la figura di seguito riportata.

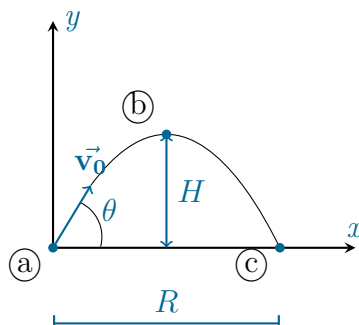


Figura 2: Schema rappresentativo di moto del proiettile con gittata e altezza.

Dalla *Figura 2*, supponendo che in (a), $x_0 = 0$ e il proiettile ha una certa velocità \mathbf{v}_y , si nota che:

- (b) è il punto di massima elevazione raggiunto dal proiettile;
- (c) è il punto in cui il proiettile raggiunge lo stesso livello orizzontale di partenza.

Ponendo H e R rispettivamente: distanza massima verticale, distanza massima orizzontale, segue

$$H = \frac{\mathbf{v}_0^2 \sin^2 \theta_0}{2g}$$

$$R = \mathbf{v}_x \cos \theta_0 \frac{\mathbf{v}_x^2 \sin 2\theta_0}{g}$$

Pertanto si ha che R è massima se $\theta_0 = 45^\circ$.

– 7 – Moto circolare uniforme.

Si definisce moto circolare uniforme, il moto di un corpo che, muovendosi su un percorso circolare, mantiene una velocità costante.

Fatto.

Un corpo che si muove a velocità costante su una traiettoria circolare, possiede un'accelerazione.

Poiché la velocità è una grandezza vettoriale, la presenza di un'accelerazione è dovuta a due possibili ragioni, quali:

1. variazione del modulo della velocità;
2. variazione della direzione della velocità.

L'accelerazione del moto circolare è dovuta proprio a ques'ultimo motivo. Infatti, il vettore velocità, sempre tangente alla traiettoria circolare, è perpendicolare al raggio della stessa.

Si consideri ora la figura di seguito riportata.

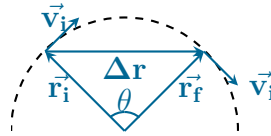


Figura 3: Schema rappresentativo del moto circolatorio.

Ponendo \vec{v}_i e \vec{v}_f coda contro coda, si nota che l'angolo fra essi compreso è θ , da cui i triangoli $\widehat{r_i \Delta r r_f}$ e $\widehat{v_i \Delta v v_f}$ sono simili.

È possibile pertanto stabilire una relazione tra i lati come segue.

$$\frac{|\Delta \vec{v}|}{v} = \frac{|\Delta r|}{r}$$

ove $v = v_i = v_f$ e $r = r_i = r_f$.

Risolvendo rispetto \vec{v} e calcolando il limite per $\Delta \rightarrow 0$, segue

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v}{r} \frac{|\Delta \vec{r}|}{|\Delta t|} = \frac{v^2}{r} = a_c$$

– 8 – Leggi del moto.

– 8.1 – Sistema inerziale e prima legge di Newton.

Si definisce un sistema inerziale, se in tale sistema l'accelerazione di un corpo risulta nulla. Inoltre, qualsiasi sistema che si muove a velocità costante rispetto un sistema inerziale, è a sua volta inerziale.

Chiaro il concetto di sistema inerziale, si può ora introdurre la prima legge di Newton.

Legge prima di Newton.

Un corpo osservato da un sistema inerziale, se non soggetto a forze esterne, mantiene il proprio stato di moto, se in moto, di quiete se in quiete.

– 8.2 – Seconda legge di Newton.

Con la prima legge di Newton, si ha chiaro cosa accada ad un corpo se questi non è soggetto a forze. Pertanto, è naturale chiedersi cosa accada invece se sul corpo agiscono delle forze.

Si supponga di applicare una forza \mathbf{F} su un corpo di massa m , questi inizierà a muoversi, subendo pertanto un'accelerazione. Incrementando l'intensità della forza \mathbf{F} , aumenterà di conseguenza l'accelerazione del corpo.

Da tali osservazioni, Newton dedusse che la forza applicata su un corpo è proporzionale all'accelerazione dello stesso, deduzione culminata nella seconda legge.

Legge seconda di Newton.

L'accelerazione di un corpo, se osservato da un sistema inerziale, è proporzionale alla forza applicata sullo stesso, e inversamente proporzionale alla propria massa. Cioè

$$\mathbf{a} \propto \frac{\sum \mathbf{F}}{m} \implies \sum \mathbf{F} = m\mathbf{a}$$

Nel SI, la forza è misurata in Newton, (N).

$$1 \text{ N} \equiv \text{kg} \cdot \text{m/s}^2$$

– 8.3 – Forza gravitazionale e forza peso.

Ogni corpo sulla terra è soggetto ad una forza di attrazione verso il basso, la quale è definita come forza peso \mathbf{F}_p .

Si può pertanto definire “peso”, l’intensità con la quale un corpo subisce tale forza.

Si consideri un corpo di massa m in caduta libera, come detto questi è soggetto, per semplicità, unicamente alla forza peso, quindi

$$\sum \mathbf{F} = \mathbf{F}_p = m\mathbf{a}$$

da osservazioni sperimentali si osserva che l’accelerazione a cui i corpi in caduta libera sono soggetti è costante ed è pari a $9.80 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$, che per la sua importanza è indicata con \mathbf{g} .

Osservazione.

Nei presenti appunti l’accelerazione sarà considerata positiva se diretta verso il basso o verso destra, negativa in caso contrario.

– 8.4 – Terza legge di Newton.

Si supponga di applicare una forza su un corpo di massa m , in un certo senso, il corpo applicherà una resistenza. Da un’esperienza simile, Newton dedusse quanto poi sarebbe diventata la terza legge.

Legge terza di Newton.

Se due corpi interagiscono l’uno con l’altro, la forza $\mathbf{F}_{1,2}$ esercitata sul corpo due dal corpo uno, risulta essere uguale in modulo e opposta in verso alla forza $\mathbf{F}_{2,1}$ esercitata sul corpo uno dal corpo due.

Cioè

$$\mathbf{F}_{1,2} = -\mathbf{F}_{2,1}$$

– 8.5 – Applicazioni delle leggi di Newton.

Nella presente sezione, si riportano due modelli per la risoluzione di problemi risolvibili applicando le leggi di Newton.

– 8.5.1 – Modello: punto materiale in equilibrio.

Si consideri un corpo in equilibrio sorretto da una fune, il cui schema di corpo libero è riportato nella figura di seguito.



Figura 4: Schema di corpo libero di un corpo sorretto da fune.

Dalla *Figura 4* si osserva che:

- sull'asse x non vi sono forze, quindi

$$\sum \mathbf{F}_x = 0$$

- sull'asse y le forze agenti sono la forza peso e la tensione, quindi

$$\sum \mathbf{F}_y = \mathbf{F}_p + \mathbf{T} = 0 \implies \mathbf{T} = -\mathbf{F}_p$$

– 8.5.2 – Modello: punto materiale sotto l'azione di forze esterne.

Si consideri un corpo, posto su una superficie orizzontale, soggetto ad una forza verso destra, il cui schema di corpo libero è riportato nella figura di seguito.

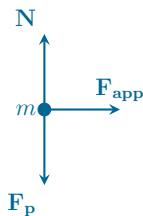


Figura 5: Schema di un corpo soggetto a una forza orizzontale.

Supponendo di voler calcolare

1. l'accelerazione del corpo;
2. la forza normale esercitata dalla superficie.

si ha che

1. lungo l'asse x , l'unica forza è quella applicata, quindi

$$\sum \mathbf{F}_x = \mathbf{F}_{\text{app}} = m\mathbf{a} \implies \mathbf{a} = \frac{\mathbf{F}_{\text{app}}}{m}$$

2. lungo l'asse y , le forze applicate sono la forza peso e la normale, poiché verticalmente non c'è accelerazione, segue

$$\sum \mathbf{F}_y = \mathbf{N} + \mathbf{F}_p = 0 \implies \mathbf{N} = -\mathbf{F}_p$$

– 8.6 – Forze d’attrito.

Si consideri un corpo che attraversa un mezzo viscoso, come ad esempio l’aria. Questi risentirà di una resistenza dovuta all’interazione stessa tra corpo e mezzo; tale resistenza è definita *forza d’attrito*.

Si supponga di applicare una forza ad un corpo, se la forza è sufficientemente piccola il corpo rimarrà fermo. Segue dalla terza legge di Newton, che il corpo esercita una forza in resistenza a quella applicata; si definisce tale forza *forza d’attrito statico*.

Si supponga ora di aumentare progressivamente la forza applicata, segue che dopo un certo periodo di tempo la forza d’attrito statico raggiunge il suo limite, oltre il quale il corpo comincia a muoversi. Sebbene in movimento, il corpo è ancora soggetto ad una forza, la quale è definita *forza d’attrito dinamico*.

Osservazioni sperimentali hanno dimostrato che sia la forza di attrito statico sia quella di attrito dinamico, dipendono dalla forza normale. Più precisamente

- la forza di attrito statico risulta essere

$$F_s \leq \mu_s N$$

ove μ_s è coefficiente di attrito statico.

- la forza di attrito dinamico risulta essere

$$F_d \leq \mu_k N$$

ove μ_k è coefficiente di attrito dinamico.

Osservazione.

Sia μ_k che μ_s dipendono dal materiale che applica resistenza.

– 9 – Moto circolare e leggi di Newton.

Si consideri un corpo collegato ad una fune, tenuto in moto circolatorio da un velocità costante in modulo, su un piano privo di attrito. Dalla seconda legge di Newton, se sul corpo non sono applicate forze, questi si muove secondo una traiettoria rettilinea; ma la corda esercita sul corpo un forza radiale \vec{F}_r , che obbliga il moto circolatorio.

Pertanto, applicando la seconda legge, segue

$$\sum \mathbf{F} = \mathbf{F}_r = m\mathbf{a}_c = m\frac{v^2}{r}$$

ove \mathbf{a}_c è definita accelerazione centripeta.

– 9.1 – Moto in sistemi di riferimento accelerati.

Si consideri un osservatore ed un corpo posti all'interno di un veicolo in movimento. Si presentano due scenari

1. il veicolo è fermo, dunque anche il corpo rimane fermo;
2. il veicolo inizia a muoversi, il corpo inizialmente fermo inizia a muoversi verso la parte posteriore del veicolo.

Sembra dunque che nel secondo caso si violi la seconda legge di Newton, ma così non è, infatti sul corpo agisce una forza che ne determina il moto; si definisce tale forza *forza apparente*.

– 9.2 – Moto in presenza di forze frenanti.

Si è precedentemente descritta la forza di attrito dinamico esercitata su un corpo in movimento su una superficie, trascurando però qualsiasi iterazione tra i due.

Se si considerano questi effetti si avrà che, la superficie o il mezzo attraversato producono una forza frenante \vec{R} . L'intensità \vec{R} dipende dalla velocità del corpo, mentre la direzione sarà sempre opposta al moto.

Osservazione.

Poiché l'intensità di \vec{R} può variare in modo, complesso si considerino i modelli dei paragrafi successivi.

– 9.2.1 – Modello: Forza frenante proporzionale alla velocità del corpo.

Si consideri un corpo immerso in un liquido, o in un gas, da osservazioni sperimentali, segue

$$\mathbf{R} = -b\mathbf{v}$$

ove b è una costante dipendente la mezzo attraversato.

Esempio.

Una sfera di massa m è lasciata cadere in un liquido. Supponendo che sulla sfera agiscano unicamente la forza $\vec{\mathbf{R}}$ e $\vec{\mathbf{F}}_g$, se ne studi il moto.

Dall'applicazione della seconda legge di Newton

$$\sum \mathbf{F} = m\mathbf{g} - b = m\mathbf{a} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt}$$

risolvendo per $d\mathbf{v}/dt$, segue

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{g} - \frac{b}{m}\mathbf{v}$$

– 9.2.2 – Modello: Forza frenante proporzionale al quadrato della velocità.

Si consideri un corpo che si muove ad alta velocità, da osservazioni sperimentali segue

$$\mathbf{R} = DA\mathbf{v}^2\rho$$

ove D è una costante empirica, ρ è la densità dell'aria, A l'area della sezione trasversale perpendicolare al moto.

Esempio.

Un corpo di massa m è lasciato cadere libero da uno stato di riposo. segue

$$\sum \mathbf{F} = m\mathbf{g} + \frac{1}{2}DA\mathbf{v}^2\rho = m\mathbf{a}$$

da cui il modello dell'accelerazione è

$$\mathbf{a} = \mathbf{g} - \left(\frac{DA\rho}{2m}\mathbf{v}^2 \right)$$

– 10 – Energia di un sistema.

Il concetto di energia, è utile poiché applicabile ai sistemi meccanici, senza necessariamente ricorrere alle leggi di Newton. Inoltre, l'approccio energetico è utile nella comprensione dei fenomeni elettrici e termici, per i quali non è possibile applicare Newton.

– 10.1 – Sistema e ambiente esterno.

Un *sistema*, è una piccola regione dello spazio, del quale si ignorano tutti i dettagli esterni. Questi può essere

- un corpo, un punto materiale o un insieme di questi;
- una regione dello spazio.

Indipendentemente dal sistema, si può identificare un *contorno del sistema*, il quale può essere considerata come una superficie che divide il sistema dall'ambiente circostante.

– 10.2 – Lavoro compiuto da una forza costante.

Molti dei termini utilizzati sin'ora, hanno pressoché il medesimo significato di quello assegnatogli nella vita quotidiana. Si procede ora all'introduzione di una nuova grandezza fisica, quale il *lavoro*. Si consideri una forza costante applicata ad un corpo, si definisce lavoro il prodotto tra il modulo della forza, l'eventuale spostamento causato ed il coseno dell'angolo compreso tra la forza e lo spostamento, cioè

$$W \equiv F \Delta s \cos \theta$$

Nel SI, il lavoro è misurato in Joule, (J).

$$1 \text{ J} \equiv \text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}^2$$

– 10.3 – Lavoro compiuto da una forza variabile.

Si consideri una forza variabile applicata ad un corpo lungo l'asse x . Da quanto detto fin'ora il lavoro non può dunque essere calcolato come $\mathbf{W} = \mathbf{F}\Delta\mathbf{s} \cos \theta$, ma se si suppone di dividere lo spostamento in parti piccolissime, tali che $\Delta s \rightarrow 0$, si avrà che approssimativamente la forza applicata è costante, segue dunque

$$\mathbf{W} \approx \mathbf{F}_x \Delta s$$

Si supponga ora di suddividere la curva che rappresenta \mathbf{F}_x , in un gran numero di intervalli, segue che il lavoro della forza è circa uguale a

$$\mathbf{W} \approx \sum_{x_i}^{x_f} \mathbf{F}_x \Delta s$$

Infine se si calcola il limite per $\Delta s \rightarrow 0$, sebbene i termini tendano all'infinito, la loro somma sarà uguale all'area compresa tra la curva rappresentante la forza e l'asse x , cioè

$$\mathbf{W} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \sum_{x_i}^{x_f} \mathbf{F}_x \Delta s = \int_{x_i}^{x_f} \mathbf{F}_x dx$$

– 10.3.1 – Lavoro compiuto da una molla.

Si consideri la figura di seguito riportata.

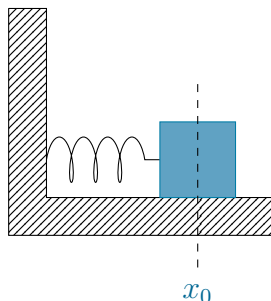


Figura 6: Schema sistema massa-molla.

Si si suppone di allungare, o eventualmente comprimere, la molla di un piccolo tratto rispetto la posizione di equilibrio x_0 , questa eserciterà una forza sul blocco che matematicamente è pari a

$$\mathbf{F}_s = -kx$$

ove k è una costante dipendente dalla molla.

Quanto detto è espresso più propriamente dalla legge di Hooke, di seguito riportata.

Legge di Hooke.

La forza necessaria ad allungare o comprimere una molla, è proporzionale all'allungamento o alla compressione subita dalla stessa.

Tornando al calcolo del lavoro, si consideri uno spostamento da una posizione x_i a x_f , il lavoro compiuto dalla forza elastica è

$$\mathbf{W} = \int_{x_i}^{x_f} -kx \, dx = \frac{1}{2}kx_f^2 - \frac{1}{2}kx_i^2$$

– 10.4 – Energia cinetica e teorema dell'energia cinetica.

Si consideri una forza orizzontale verso destra applicata su un corpo. Se tale forza causa uno spostamento, il lavoro totale sarà

$$W_{\text{TOT}} = \int_{x_i}^{x_f} \sum \mathbf{F}_x \, dx$$

Dunque applicando Newton, segue

$$\begin{aligned} W_{\text{TOT}} &= \int_{x_i}^{x_f} \sum \mathbf{F}_x \, dx = \int_{x_i}^{x_f} m \vec{a} \, dx \\ &= \int_{x_i}^{x_f} m \frac{dv}{dt} \, dx = \int_{x_i}^{x_f} m \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} \, dx \\ &= \int_{v_i}^{v_f} mv \, dv = \frac{1}{2} m \mathbf{v}_f^2 - \frac{1}{2} m \mathbf{v}_i^2 \end{aligned}$$

ove \mathbf{v}_i è la velocità del corpo a x_i , mentre \mathbf{v}_f quella in x_f .

Si definisce la quantità $\frac{1}{2}mv^2$, energia cinetica e la si indica con la lettera K .

$$K \equiv \frac{1}{2}mv^2$$

Da ciò segue

$$W = K_f - K_i = \Delta K \tag{1}$$

L'Equazione (1) è un'importante risultato noto come *teorema dell'energia cinetica*.

Teorema dell'energia cinetica.

Quando si compie lavoro su un corpo, e ne consegue una variazione nel modulo della velocità, il lavoro totale è pari alla variazione di energia cinetica.

– 10.5 – Energia potenziale di un sistema.

Si consideri un corpo posto ad una certa altezza dal suolo, poiché su questi non si applica una forza, lo stesso non ha energia cinetica bensì ne possiede una con tali capacità. Si definisce tale energia *energia potenziale*.

Si consideri ora un agente esterno che solleva un corpo da una posizione y_i a y_f , ponendo che la forza applica sia pari alla forza di gravità, segue

$$\mathbf{W} = \vec{\mathbf{F}}_{app} \cdot \Delta \mathbf{s} = mgy_f - mgv_i$$

Si definisce la quantità mgy , energia potenziale gravitazionale e la si indica con U_g .

$$U_g \equiv mgy$$

Dunque il lavoro effettuato dall'agente esterno è

$$\mathbf{W} = \Delta U_g$$

– 10.5.1 – Energia potenziale elastica.

Si consideri Figura 6. Si è detto che il lavoro della forza elastica è

$$\mathbf{W} = \int_{x_i}^{x_f} -kx \, dx = \frac{1}{2}kx_f^2 - \frac{1}{2}kx_i^2$$

ma questo risulta essere uguale al lavoro applicato dall'agente esterno che allunga o comprime la molla. Pertanto si può mettere in correlazione il lavoro dell'agente esterno con l'energia potenziale infatti, similmente a quanto fatto con l'energia potenziale gravitazionale si può stabilire un' *energia potenziale elastica* U_s .

$$U_s = \frac{1}{2}kx^2$$

– 10.6 – Forze conservative e non conservative.

Una forza si definisce conservativa se soddisfa le seguenti proprietà, tra loro equivalenti.

1. Il lavoro compiuto dalla forza agente su un punto materiale che si muove tra due punti, è indipendente dal percorso.
2. Il lavoro compiuto dalla forza agente su un punto materiale che descrive una linea chiusa, è zero.

Si ha che il lavoro compiuto da una forza conservativa è

$$W_c = -\Delta U$$

Se una forza non soddisfa nessuna delle precedenti proprietà, questa si dice non conservativa.

Si definisce inoltre *energia meccanica* la somma di energia cinetica e potenziale, cioè

$$E_{mec} = U + K$$

ove U comprende tutte le energie potenziali e K quelle cinetiche.

– 10.7 – Forze conservative ed energia potenziale.

Si è detto precedentemente che il lavoro compiuto da una forza conservativa, dipende unicamente dalle coordinate iniziali e finali. È pertanto possibile definire una funzione energia potenziale U , tale che il lavoro compiuto sugli elementi del sistema sia uguale alla variazione di energia potenziale.

$$W_c = \int_{x_i}^{x_f} Fx \, dx = -\Delta U$$

Se il punto di applicazione della forza subisce uno spostamento infinitesimale dx , si può esprimere la variazione infinitesimale dell'energia potenziale del sistema nella forma

$$dU = -F_x dx$$

Segue dunque

$$F_x = \frac{dv}{dx}$$

– 11 – Conservazione dell'energia.

Si è fin'ora parlato di un unico metodo per cui l'energia può essere trasferita da un sistema ad un'alto, ossia il lavoro. Esistono però altri metodi di trasferimento di energia quali

- [onde meccaniche](#): processi nei quali l'energia è trasportata da perturbazioni che si propagano nell'aria;
- [calore](#): meccanismo di trasferimento dovuto a una differenza di temperatura tra due regioni dello spazio.

Uno degli aspetti fondamentali di questa sezione è il seguente fatto, l'energia non può essere né creata né distrutta, questa si conserva sempre.

Principio di conservazione dell'energia.

Se l'energia presente in un sistema subisce una variazione, è necessario che una pari quantità di energia abbia lasciato il sistema.

$$\Delta E_s = \sum T$$

ove E_s indica l'energia del sistema, T la quantità di energia trasferita tramite i meccanismi prima citati.

– 11.1 – Sistema isolato.

Un sistema i cui confini non sono attraversati da nessun flusso di energia si dice *isolato*.

Si consideri un corpo sollevato dal suolo, come detto il lavoro sarà $\mathbf{W} = -\Delta U_g$. Se ci si concentra sul lavoro fatto da \mathbf{F}_g , quando il corpo è lasciato cadere al suolo, questo risulta essere

$$\begin{aligned}\mathbf{W}_c &= -mg\Delta s \\ &= -mgy_f + mgy_i\end{aligned}$$

Dal teorema dell'energia cinetica

$$\mathbf{W}_c = \Delta K$$

da cui

$$\begin{aligned}\Delta K &= -\Delta U \\ \Delta E_{mec} &= 0\end{aligned}$$

– 11.2 – Sistemi con attrito dinamico.

Si consideri un corpo soggetto ad una forza d'attrito. Questa poiché una forza, e poiché presente uno spostamento, fa lavoro.

Si consideri la situazione in cui sul corpo agiscano un certo numero di forze, compresa quella d'attrito, segue che il lavoro è

$$\sum \mathbf{W} = \int \sum \vec{\mathbf{F}}_e \cdot d\vec{\mathbf{s}} + \int \vec{\mathbf{F}}_k \cdot d\vec{\mathbf{s}} = \int \sum \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{s}}$$

ove $d\vec{\mathbf{s}}$ è lo spostamento del corpo.

Applicando la seconda legge di Newton, segue

$$\begin{aligned} \mathbf{W} &= \int m \vec{\mathbf{a}} \cdot d\vec{\mathbf{s}} = \int m \frac{d\vec{\mathbf{v}}}{dt} \cdot d\vec{\mathbf{s}} \\ &= \int m \frac{d\vec{\mathbf{v}}}{dt} \cdot \vec{\mathbf{v}} dt \end{aligned}$$

ma

$$\frac{d\vec{\mathbf{v}}}{dt} \cdot \vec{\mathbf{v}} = \frac{1}{2} \frac{dv^2}{dt}$$

da cui

$$\begin{aligned} \mathbf{W} &= \int_{t_i}^{t_f} m \left(\frac{1}{2} \frac{d}{dt} v^2 \right) dt = \frac{1}{2} m \int_{v_i}^{v_f} dv^2 \\ &= \frac{1}{2} m \mathbf{v}_f^2 - \frac{1}{2} m \mathbf{v}_i^2 = \Delta K \end{aligned}$$

Ma $\vec{\mathbf{F}}_k$ è opposta al moto, segue

$$\mathbf{W} = \Delta K + \int \vec{\mathbf{F}}_k \cdot d\vec{\mathbf{s}}$$

– 11.3 – Forze non conservative e variazione dell'energia meccanica.

Si consideri un corpo che scivola lungo una superficie. Si supponga questi faccia parte di un sistema che subisce variazione di energia potenziale di qualche tipo. Per il principio di conservazione, segue che l'energia potenziale dissipata è stata convertita in energia cinetica, da cui

$$\Delta E_{mec} = \Delta K + \Delta U = -\mathbf{F}_k d$$

Se il sistema su cui agiscono le forze non conservative, è un sistema non isolato, allora

$$\Delta E_{mec} = -\mathbf{F}_k d + \sum \mathbf{W}_e$$

– 11.4 – Potenza.

Si consideri un operaio che deve spostare una massa da un punto ① ad un punto ②, col la possibilità di scegliere tra due percorsi, il primo più lungo ma meno ripido, il secondo l'esatto opposto.

Sebbene il lavoro svolto risulta uguale indipendentemente dal percorso, l'unica differenza la si ha nel tempo impiegato. Si definisce l'energia trasferita per istante di tempo *potenza*.

$$\langle \mathbf{P} \rangle \equiv \frac{\mathbf{W}}{\Delta t} \implies \mathbf{P} = \frac{d\mathbf{W}}{dt}$$

Nel SI, la potenza si misura in Watt, (\mathbf{W}).

$$1 \text{ W} \equiv \text{J/s}$$

– 12 – Quantità di moto e urti.

– 12.1 – Quantità di moto e sua conservazione.

Si consideri la figura di seguito riportata. Poiché isolato l'unica forza agente su



Figura 7: Sistema isolato composto da particelle.

ciascuna delle due particelle, è quella dovuta all'altra particella. Segue dunque dalla terza legge di Newton

$$\mathbf{F}_{1,2} = -\mathbf{F}_{2,1} \implies \mathbf{F}_{1,2} + \mathbf{F}_{2,1} = 0$$

applicando ora la seconda legge di Newton

$$m_1 \mathbf{\ddot{a}}_1 + m_2 \mathbf{\ddot{a}}_2 = 0$$

ma da ciò, se m_1, m_2 sono costanti, segue

$$\begin{aligned} \frac{d(m_1 \mathbf{\dot{a}}_1)}{dt} + \frac{d(m_2 \mathbf{\dot{a}}_2)}{dt} &= 0 \\ \frac{d}{dt}(m_1 \mathbf{\dot{a}}_1 + m_2 \mathbf{\dot{a}}_2) &= 0 \end{aligned}$$

da cui si determina $m_1 \mathbf{\dot{a}}_1 + m_2 \mathbf{\dot{a}}_2$ costante.

Definizione.

La quantità di moto di un corpo, schematizzabile come punto materiale, di massa m e velocità \mathbf{v} , è definita come

$$\mathbf{\dot{p}} \equiv m \mathbf{\dot{v}}$$

Dall'applicazione della seconda legge di Newton, si possono relazionare forza risultante e quantità di moto, come Segue

$$\begin{aligned} \sum \mathbf{F} &= m \mathbf{\ddot{a}} \\ &= \frac{d(m \mathbf{\dot{a}})}{dt} = \frac{d\mathbf{\dot{p}}}{dt} \end{aligned}$$

Dunque poiché $\mathbf{F}_{1,2} + \mathbf{F}_{2,1} = \frac{d}{dt} = 0$, segue che $\mathbf{\dot{p}}_1 + \mathbf{\dot{p}}_2$ sia costante.

Principio di conservazione della quantità di moto.

Quando due o più corpi di un sistema isolato, interagiscono, la quantità di moto si conserva.

– 12.2 – Impulso e quantità di moto.

Si consideri un punto materiale su cui agisce una forza risultante $\sum \mathbf{F}$ variabile nel tempo. In accordo con quanto detto $\sum \mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}$.

Segue pertanto che, se a t_i si ha una certa \mathbf{p}_i e a t_f si ha una certa \mathbf{p}_f , dall'integrazione di $d\mathbf{p} = \sum \mathbf{F} dt$, segue

$$\Delta \mathbf{p} = \int_{t_i}^{t_f} \sum \mathbf{F} dt$$

La quantità appena trovata è definita *impulso*.

$$\vec{\mathbf{I}} \equiv \int_{t_i}^{t_f} \sum \mathbf{F} dt$$

– 12.3 – Urti monodimensionali.

Si definisce urto l'evento in cui due, o più, particelle interagiscono per un breve istante tramite forze. Questi si suddividono in urti

- elastici: se l'urto non causa una variazione dell'energia cinetica;
- anelastici: se l'urto causa una variazione dell'energia cinetica;
 - semplice: se ne consegue che i corpi rimangono separati;
 - completamente anelastico: se ne consegue che i corpi rimangono uniti.

– 12.3.1 – Urti completamente anelastici.

Si consideri Figura 7. I due corpi urtano centralmente e rimanendo poi uniti. Poiché il sistema è isolato

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = (m_1 + m_2) \vec{v}_f$$

da cui quindi

$$\vec{v}_f = \frac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2}{m_1 + m_2}$$

– 12.3.2 – Urti elastici.

Si consideri nuovamente Figura 7. I due corpi urtano e dopo si allontanano con due velocità differenti. Assumendo l'urto anelastico, poiché per un infinitesimo i due corpi risultano uniti, sia \vec{p} sia K sono costanti. Segue pertanto

$$m_1 \vec{v}_{1i} + m_2 \vec{v}_{2i} = m_1 \vec{v}_{1f} + m_2 \vec{v}_{2f} \quad (2)$$

da cui quindi

$$m_1 (\vec{1f} - \vec{v}_{1i}) = m_2 (\vec{2f} - \vec{v}_{2i}) \quad (3)$$

Ponendo ora a sistema l'Equazioni (2) e (3), segue

$$\begin{aligned} \vec{v}_{1f} &= \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \right) \vec{v}_{1i} + \left(\frac{2m_2}{m_1 + m_2} \right) \vec{v}_{2i} \\ \vec{v}_{2f} &= \left(\frac{2m_1}{m_1 + m_2} \right) \vec{v}_{1i} + \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \right) \vec{v}_{2i} \end{aligned}$$

– 13 – Meccanica dei fluidi.

– 13.1 – Pressione.

I fluidi non sono soggetti né a taglio né a trazione, possono solo essere compressi.

Si consideri un corpo immerso in un fluido, chiuso da un pistone leggero. Si supponga di applicare una forza \mathbf{F} , è possibile stabilire la pressione del fluido al livello a cui è immerso il corpo, avendo nota l'area A del pistone. Vale quanto segue

$$\mathbf{P} \equiv \frac{\mathbf{F}}{A}$$

Nel SI, la pressione è misurata in Pascal, (Pa)

$$1 \text{ Pa} \equiv \text{N/m}^2$$

– 14 – Moto oscillatorio.

– 14.1 – Moto di un corpo connesso ad una molla.

Si consideri Figura 6. Supponendo il piano privo di attrito, da osservazioni sperimentali si sa che se mossa da x_0 , la massa produrrà un moto oscillatorio da destra a sinistra.

Dalla legge di Hooke, si ha che la forza risultante sul blocco sia

$$\mathbf{F}_k = -kx$$

da cui applicando la seconda legge di Newton, segue

$$-kx = m\mathbf{x}_x \implies \mathbf{a}_x = -\frac{k}{m}x$$

– 14.1.1 – Modello: punto materiale in moto armonico.

Volendo dare una descrizione matematica del moto, si osserva che la massa è soggetta ad una forza \mathbf{F}_k , poiché $\mathbf{a}_x = dv/dt$ segue dunque

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x$$

da cui ponendo $\frac{k}{m} = \omega^2$, segue

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2x \quad (4)$$

Soluzione all'equazione (4), risulta essere una funzione $x(t)$ come di seguito descritta.

$$x(t) = A \cos(\omega t + \phi)$$

ove A è detta ampiezza, ω è nota come pulsazione e ϕ è chiamata fase.

Si osserva infatti

$$\frac{dx}{dt} = \vec{v} = -\omega A \sin(\omega t + \phi) \quad (5)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \vec{a} = -\omega^2 A \cos(\omega t + \phi) \quad (6)$$

Infine se si indica con τ il periodo di oscillazione, e con f la frequenza, segue

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

$$f = \frac{1}{\tau} = \frac{\omega}{2\pi}$$

– 14.2 – Energia di un oscillatore armonico.

Si consideri ora il sistema in Figura 6, dal punto di vista energetico. Poiché un sistema isolato, ci si aspetta che l'energia meccanica sia costante. Dalle equazioni (5) e (6), segue

$$\begin{aligned}K &= \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \sin^2(\omega t + \phi) \\U &= \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}k\omega^2 A^2 \cos^2(\omega t + \phi)\end{aligned}$$

Poiché sia K sia U sono sempre non nulle, segue

$$\begin{aligned}E = K + U &= \frac{1}{2}kA^2 [\sin^2(\omega t + \phi) + \cos^2(\omega t + \phi)] \\&= \frac{1}{2}kA^2\end{aligned}$$

Infine, la velocità si ricava come

$$\vec{v} = \pm \sqrt{\frac{k}{m}(A^2 - x^2)} = \omega \sqrt{A^2 - x^2}$$

– 14.3 – Pendolo

Altra categoria di moti oscillatori è quella dei pendoli, di cui si tratterà solo il *pendolo semplice*.

Si consideri la figura di seguito riportata.

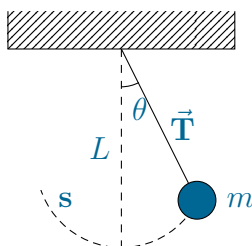


Figura 8: Schema modello pendolo semplice.

Applicando la seconda legge di Newton, poiché l'unica forza opposta all'equilibrio è la componente della forza peso, segue

$$\mathbf{F} = -mg \sin \theta = -m \frac{d^2 \mathbf{s}}{dt^2}$$

ove \mathbf{s} è lo spostamento misurato lungo l'arco.

Ma $\mathbf{s} = L\theta$, e poiché L costante, segue

$$-m \frac{d^2 \mathbf{s}}{dt^2} = \frac{d^2 \theta}{dt^2} = -\frac{g}{L} \sin \theta$$

Osservazione.

Se $\theta \leq 10$ radianti, la precedente equazione si approssima come

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} = -\frac{g}{L} \theta$$

la cui soluzione è

$$\theta = \theta_{MAX} \cos(\omega t + \phi)$$

ove θ_{MAX} è il massimo spostamento angolare dall'equilibrio, con

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$$

da cui infine

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$$

– 15 – Temperatura

– 15.1 – Principio zero della termodinamica.

Si considerino due corpi A, B posti a *contatto termico*. Questi con il tempo raggiungeranno un *equilibrio termico*, cioè una situazione in cui i corpi non si scambiano energia: né come calore né come radiazione elettromagnetica.

Si supponga ora che i corpi A, B non siano a contatto termico, e si supponga di avere un terzo corpo C . Si immagini di porre A, C in contatto termico, fintanto che questi raggiungano un equilibrio, annotando tale temperatura. Si proceda analogamente per B . Se una volta confrontate le temperature precedentemente annotate, si ha che queste coincidono, allora i corpi A, B sono in equilibrio termico tra loro.

Quanto detto è alla base del principio zero della termodinamica, di seguito enunciato.

Principio zero della termodinamica.

Se due corpi A, B sono separatamente in equilibrio termico con un corpo C , allora A, B sono in equilibrio termico tra loro.

– 15.2 – Dilatazione termica di liquidi e solidi.

Ogni corpo, sia esso solido o liquido, è accomunato da una caratteristica comune: all'aumentare della temperatura, aumenta il volume dello stesso. Tale fenomeno in fisica è definito *dilatazione termica*.

Si consideri un corpo di lunghezza L_i , a una certa temperatura. Si supponga che questi si allunghi di un tratto ΔL , a causa di una variazione di temperatura ΔT .

È possibile stabilire il valore di ΔL come

$$\Delta L = \alpha L_i \Delta T$$

ove α è definito *coefficiente di dilatazione lineare*.

$$\alpha \equiv \frac{\Delta L / L_i}{\Delta T}$$

Poiché le dimensioni lineari del corpo variano, al variare della temperatura, segue che variano di conseguenza area e volume.

$$\Delta V = \beta V_i \Delta T \quad (7)$$

ove β è definito *coefficiente di dilatazione volumetrico*.

Per ricavare una relazione tra α e β , si assume che il primo sia lo stesso in ogni direzione. Considerando dunque un corpo di dimensioni l, h, w , il volume di questi sarà $V_i = lhw\alpha$. Supponendo una variazione di temperatura $T_i + \Delta T$, segue che il volume sarà $V_i + \Delta V$.

$$\begin{aligned} V_i + \Delta V &= (l + \Delta l)(h + \Delta h)(w + \Delta w) \\ &= (l + \alpha l \Delta T)(h + \alpha h \Delta T)(w + \alpha w \Delta T) \\ &= lwh(1 + \alpha \Delta T)^3 \\ &= V_i[1 + 3\alpha \Delta T + 3(\alpha \Delta T)^2 + (\alpha \Delta T)^3] \end{aligned}$$

ma per $\Delta T < 100$ gradi si ha che $\alpha \Delta T \ll 1$, conseguentemente i termini $3(\alpha \Delta T)^2$ e $(\alpha \Delta T)^3$ sono trascurabili. Pertanto

$$\Delta V = 3\alpha V_i \Delta T \quad (8)$$

ma da ciò segue

$$\beta \simeq 3\alpha$$

– 15.3 – Descrizione macroscopica dei gas.

Per i gas, l'Equazione (8) non è applicabile, poiché questi non hanno un volume proprio, bensì assumono quello del recipiente che li contiene. Proprio per tale ragione per i gas si utilizza quella una relazione, definita *equazione di stato*, che lega volume, pressione e temperatura.

Nota.

Tutti ragionamenti riguardanti i gas, nella presente sezione e in tutte quelle successive, terranno conto di gas perfetti, ossia a bassa densità.

Si consideri un gas contenuto in un cilindro, la cui pressione è variabile tramite un pistone. Supponendo che non vi siano perdite e la massa rimanga costante, dati sperimentali stabiliscono che

- a T costante la pressione è inversamente proporzionale al volume;
- a P costante il volume è direttamente proporzionale alla temperatura;
- a V costante la pressione è direttamente proporzionale alla temperatura.

In sintesi

$$PV = nRT$$

ove n è il numero di moli, R è la costante dei gas perfetti pari a $8.314 \text{ J/mol} \cdot \text{K}$. Spesso risulta però comodo scrivere la precedente equazione come

$$PV = nRT = \frac{N}{N_a}RT = NK_B T$$

ove K_B è la *costante di Boltzmann*, pari a $1.38 \times 10^{-23} \frac{\text{J}}{\text{K}}$.

– 16 – Primo principio della termodinamica.

– 16.1 – Calore.

Si definisce *calore*, lo scambio di energia attraverso la superficie che racchiude un sistema, dovuto ad una differenza di temperatura tra sistema e ambiente esterno.

– 16.1.1 – Unità di calore.

Le prime nozioni sul calore si basavano su un fluido, il *calorico*. Questi fluiva da una sostanza all'altra e ne causava una variazione di temperatura.

Dal nome di tale fluido fù introdotta la *caloria*. Questa era definita come quantità di energia necessaria per incrementare la temperatura di un grammo d'acqua da 14.5 a 15.5 gradi.

– 16.1.2 – Equivalente meccanico del calore.

Si consideri un contenitore cilindrico riempito di acqua, contenente una turbina messa in moto da due blocchi.

Da osservazioni sperimentali si osserva che, se trascurata l'energia persa sui supporti, l'abbassarsi dei blocchi di un tratto h , causa una perdita di energia pari a $2gmh$

Variando di poco le condizioni dell'esperimento, si osserva che

$$2gmh \propto m_a \Delta T$$

ove m_a è la massa dell'acqua, e ΔT è l'incremento di temperatura.

$$1 \text{ cal} \equiv 4.18 \text{ J}$$

– 16.2 – Calore specifico.

La *capacità termica* di una particolare sostanza, è definita come la quantità di energia utile ad aumentare di un grado la temperatura della stessa. Segue che, se Q causa un variazione ΔT nella temperatura, allora

$$Q = C\Delta T$$

Si definisce *calore specifico*, la capacità termica per unità di massa. Cioè

$$c = \frac{Q}{m\Delta T}$$

da cui

$$Q = mc\Delta T$$

– 16.3 – Calore latente.

Ogni qual volta si è in presenza di una transizione di fase, cioè il passaggio da uno stato ad un altro, lo scambio di calore non comporta una variazione di temperatura.

In questi casi, se Q è necessaria al cambiamento di stato di una massa m di una certa sostanza, si viene ad avere il *calore latente* L .

$$L \equiv \frac{Q}{m}$$

segue dunque

$$Q = \pm mL$$

Quest'ultima equazione stabilisce che se il sistema assorbe calore, Q è positivo, se invece lo cede allora Q sarà negativo.

– 16.4 – Lavoro e calore nelle trasformazioni termodinamiche.

In termodinamica, lo stato di un sistema è descritto da variabili di stato, quali pressione, volume, ecc. Si ha però che se un sistema è in equilibrio termico, è possibile specificare lo stato dello stesso.

Si consideri un cilindro contenente gas, munito di un pistone mobile. Se A è l'area di sezione del pistone, sul gas si imporrà una forza $\mathbf{F} = \mathbf{P}A$. Abbassando, quasi staticamente, il pistone di un certo tratto $ds = dy$, il lavoro sul gas è

$$d\mathbf{W} = \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{s}} = -\mathbf{P}A dy$$

ma $A dy = \Delta V$, segue

$$d\mathbf{W} = -\mathbf{P}\Delta V$$

Integrando da V_i a V_f , segue quindi

$$\mathbf{W} = \int_{V_i}^{V_f} -\mathbf{P} dV \quad (9)$$

Se \mathbf{P} e V sono noti in ogni punto, allora lo stato del sistema è rappresentabile con il *diagramma PV*.

Esempio.

Siano V_i il volume iniziale, V_f quella finale, e siano \mathbf{P}_i la pressione iniziale e \mathbf{P}_f quella finale, si riporti corrispondente il diagramma PV, stabilendo con f lo stato finale, e con i quello iniziale.

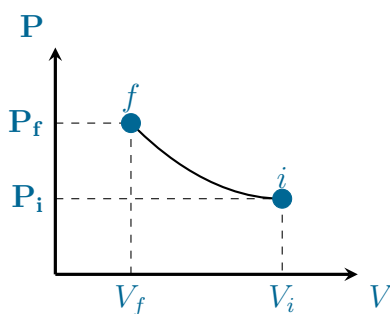


Figura 9: Esempio di diagramma PV.

– 16.5 – Primo principio della termodinamica.

Il *primo principio della termodinamica* è un caso di conservazione dell'energia. Quest stabilisce che i soli scambi di energia possono avvenire sotto forma di calore o lavoro, quindi

$$\Delta E_{int} = Q + W$$

Da ciò segue che, se in un sistema una quantità dQ è scambiata come calore ed è compiuto del lavoro dW , vi sarà una variazione dE_{int} .

$$dE_{int} = dQ + dW$$

Si consideri un sistema isolato, come detto in precedenza l'energia interna sarà costante. Più precisamente poiché $Q = W = 0$ segue che $E_{int} = 0$.

Si consideri un sistema in cui avviene una trasformazione ciclica, in questo caso

$$\Delta E_{int} = 0 \quad \text{e} \quad Q = -W$$

– 16.6 – Applicazioni del primo principio.

Le trasformazioni termodinamiche si suddividono in

- adiabatiche: l'energia non è scambiata come calore, cioè $Q = 0$. Per il primo principio segue

$$\Delta E_{int} = W$$

- isobare: i valori di lavoro e calore sono entrambi diversi da zero. Segue che il lavoro sul gas è

$$W = -P\Delta V$$

ove P è la pressione del gas, costante per l'intera trasformazione.

- isocore: il volume del gas non varia, segue che il lavoro è nullo. Per il primo principio segue

$$\Delta E_{int} = Q$$

- isoterma: la temperatura rimane costante.

– 16.6.1 – Espansione isoterma di un gas perfetto.

Si consideri Figura 9. Dall'applicazione dell'Equazione (9), segue

$$\begin{aligned}\mathbf{W} &= \int_{V_i}^{V_f} -\mathbf{P} \, dV = \int_{V_i}^{V_f} -\frac{nRT}{V} \, dV \\ &= -nRT \int_{V_i}^{V_f} \frac{1}{V} \, dV \\ &= -nRT \ln(V) \Big|_{V_i}^{V_f} \\ &= -nRT \ln \left(\frac{V_f}{V_i} \right)\end{aligned}$$

– 17 – Teoria cinetica dei gas.

– 17.1 – Modello molecolare di un gas.

Uno strumento utile per lo studio dei gas, è il modello della teoria cinetica. Questa si basa sulle seguenti ipotesi

1. Il numero di molecole presenti nel gas è elevato, e la distanza tra ciascuna di esse, se paragonata alle dimensioni, è grande.
2. Ciascuna particella, se considerata a solo, segue le leggi di Newton; nel complessivo invece il moto è casuale.
3. Le molecole interagiscono mediante forze a corto raggio, forze le quali si esercitano in urti elastici.
4. Il gas analizzato è una sostanza pura.

Si consideri ora la figura di seguito riportata.

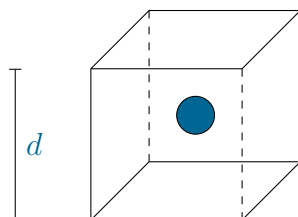


Figura 10: Gas contenuto in contenitore cubico.

Si supponga che la sfera in blu in Figura 10, rappresenti del gas a volume V costituito da N molecole.

Supponendo che ciascuna delle N molecole abbia massa m_0 e velocità lungo l'asse x \mathbf{v}_{xi} , se considerata la quantità di moto \mathbf{p} , poiché la massa della parete è molto maggiore di m_0 , segue che $\mathbf{p}_{xi} = m_0 \mathbf{v}_{xi}$ antecedentemente l'urto e $-m_0 \mathbf{v}_{xi}$ successivamente.

Ma allora segue

$$\Delta \mathbf{p} = -m_0 \mathbf{v}_{xi} - (m_0 \mathbf{v}_{xi}) = -2m_0 \mathbf{v}_{xi}$$

Poiché ciascuna molecola è soggetta alle leggi di Newton, segue dal teorema dell'impulso

$$\vec{\mathbf{F}}_m \Delta t_u = \Delta \mathbf{p}_{xi} = -2m_0 \mathbf{v}_{xi}$$

ove $\vec{\mathbf{F}}_m$ è la forza esercitata dalla parete sulla molecola, Δt_u la durata dell'urto.

Segue che affinché la singola molecola urti nuovamente una stessa parete, è necessario che la stessa percorra una distanza $2d$, da cui

$$\Delta t = \frac{2d}{v_{xi}}$$

Sebbene la forza che causa una variazione della quantità di moto sia presente solo durante l'urto, è possibile stabilire una forza media $\langle F_i \rangle$ nell'intervallo tra andata e ritorno, segue

$$\vec{F}_i \Delta t = -2m_0 v_{xi}$$

da cui, se applicata la terza legge di Newton, segue che sulla parete si esercita una forza

$$\langle F \rangle = -\langle F_i \rangle = \frac{m_0 v_{xi}^2}{d}$$

La forza totale $\langle F \rangle$ è allora data da

$$\begin{aligned} \langle F \rangle &= \sum_{i=1}^N \frac{m_0 v_{xi}}{d} \\ &= \frac{m_0}{d} \sum_{i=1}^N v_{xi} \end{aligned}$$

ma da ciò segue

$$\langle v_{xi} \rangle = \frac{\sum_{i=1}^N v_{xi}}{N}$$

Si può quindi scrivere $\langle F \rangle$ come

$$\langle F \rangle = \frac{m_0}{d} N \langle v_{xi}^2 \rangle$$

Si consideri una singola molecola, questa avrà velocità $\vec{v}_i^2 = v_{xi}^2 + v_{yi}^2 + v_{zi}^2$, segue che $\langle v \rangle^2 = \langle v_x^2 \rangle + \langle v_y^2 \rangle + \langle v_z^2 \rangle$. Poiché il moto è casuale segue $\langle v_{xi}^2 \rangle = \langle v_{yi}^2 \rangle = \langle v_{zi}^2 \rangle$. Cioè

$$\langle v_i^2 \rangle = 3 \langle v_{xi}^2 \rangle$$

allora

$$\langle F \rangle = \frac{1}{3} N \frac{m_0 \langle v \rangle^2}{d}$$

Calcolando ora la pressione P , segue

$$\begin{aligned} P &= \frac{\langle F \rangle}{A} = \frac{1}{3} N \frac{m_0 \langle v \rangle^2}{d^3} \\ &= \frac{2}{3} \frac{N}{V} \frac{1}{2} m_0 \langle v^2 \rangle \end{aligned}$$

– 17.1.1 – Interpretazione molecolare della temperatura.

Si considerino le due equazioni per il calcolo di PV .

$$PV = \frac{2}{3} \frac{N}{V} \frac{1}{2} m_0 \langle \mathbf{v}^2 \rangle = N K_B T$$

Segue

$$T = \frac{2}{3 K_B} \left(\frac{1}{2} m_0 \langle \mathbf{v}^2 \rangle \right)$$

Poiché $\mathbf{v}_x^2 = \frac{1}{3} \langle \mathbf{v}^2 \rangle$, e così analogamente $\mathbf{v}_y^2, \mathbf{v}_z^2$, segue

$$\frac{1}{2} m_0 \langle \mathbf{v}_x^2 \rangle = \frac{1}{2} K_B T$$

Quanto detto è generalizzato nel *teorema dell'equipartizione dell'energia*.

Teorema dell'equipartizione dell'energia.

Ogni grado di libertà dà contributo $\frac{1}{2} K_B T$ all'energia totale del sistema.

– 17.2 – Calore specifico molare di un gas.

Si consideri un gas che subisce una trasformazione a temperatura costante.

Poiché ΔT è la stessa in ogni percorso, segue che ΔE_{int} è anch'essa la medesima indipendentemente dal percorso scelto. Pertanto a variare sono \mathbf{W} e Q . Per ovviare a questo problema, si definiscono i *calori specifici molari*, associati a una trasformazione isocora e a una isovolumica.

$$\begin{aligned} Q &\equiv nC_v\Delta T && \text{isovolumica} \\ Q &\equiv nC_p\Delta T && \text{isocora} \end{aligned}$$

Si consideri il caso di un gas monoatomico. Se a questi si fornisce calore, mantenuto a volume costante, ciò comporterà una variazione di energia cinetica.

$$K_{TOT} = NK_B T = \frac{3}{2}nRT = E_{int} \quad (10)$$

Si consideri ora che il gas ceda calore, allora, poiché il volume è costante, $\mathbf{W} = 0$. Segue, dal primo principio della termodinamica, che

$$\begin{aligned} Q &= \Delta E_{int} \\ \Delta E_{int} &= nC_v\Delta T \end{aligned} \quad (11)$$

Se C_v è costante

$$E_{int} = nC_v T$$

Per variazioni infinitesimali

$$V_v = \frac{dE_{int}}{dT}$$

da cui sostituendo all'Equazione (10), segue

$$C_v = \frac{3}{2}R$$

Si consideri ora il caso di una trasformazione a pressione costante. Poiché il calore dev'essere fornito, $Q = nC_p\Delta T$, cioè a variare è il volume, quindi $\mathbf{W} = \mathbf{P}\Delta V$.

Dal primo principio segue quindi

$$E_{int} = nC_p\Delta T - P\Delta V \quad (12)$$

ma $PV = nRT \implies \mathbf{P}\Delta V = nR\Delta T$, da cui sostituendo all'Equazioni (11), (12), segue

$$nC_v\Delta T = nC_p\Delta T - nR\Delta T$$

Da ciò segue quindi

$$\begin{aligned} C_p - C_v &= R \\ C_p &= \frac{5}{2}R \end{aligned}$$

– 17.3 – Trasformazioni adiabatiche di un gas.

Si consideri un gas che compia una trasformazione adiabatica infinitesima, con variazione dV di volume e una variazione dT di temperatura. Segue $\mathbf{W} = \mathbf{P}dV$. Poiché unicamente dipendente dalla temperatura, si ha che

$$dE_{int} = nC_v dT$$

è uguale ad un processo isovolumico che avviene alle stesse temperature.

Per il primo principio, segue

$$dE_{int} = nC_v dT = -\mathbf{P}dV$$

Differenziando l'equazione di stato per i gas perfetti, segue

$$\mathbf{P}dV + Vd\mathbf{P} = nRdT$$

Ponendo $R = C_p - c_v$, segue che dividendo per $\mathbf{P}V$

$$\frac{dV}{V} + \frac{dP}{P} = -\frac{C_p - C_v}{C_v} \frac{dV}{V} = \frac{d}{V}(1 - y)$$

ove $y = C_p/C_v$

Integrando l'ultima equazione, segue

$$\ln \mathbf{P} + y \ln V = \text{costante}$$

il che equivale a

$$\mathbf{P}V^y = \text{costante}$$

– 18 – Macchine termiche.

– 18.1 – Macchine termiche e secondo principio.

Si definisce macchina termica un dispositivo che, assorbendo energia come calore, restituisce parte della stessa come lavoro.

Si consideri una macchina a vapore, qui l'acqua, sotto forma di vapore, si espande contro un pistone, producendo così lavoro. Una volta condensatosi, il vapore si trasforma in acqua, ripetendo il ciclo.

Si ha così che la macchina termica ha assorbito una quantità $|Q_h|$ di calore, compiendo lavoro \mathbf{W} meccanico e cedendo calore $|Q_c|$.

Per il primo principio dunque $\Delta E_{int} = Q + \mathbf{W} = Q - \mathbf{W}_{mec} = 0$, segue quindi

$$\mathbf{W}_{TOT} = Q_{TOT} = |Q_h| - |Q_c|$$

Si definisce *rendimento* di una macchina termica, il rapporto tra lavoro compiuto e calore assorbito, cioè

$$\epsilon \equiv \frac{\mathbf{W}_{mec}}{|Q_h|} = \frac{|Q_h| - |Q_c|}{|Q_h|} = 1 - \frac{|Q_c|}{|Q_h|}$$

Dalla precedente equazione segue $\epsilon = 1 \iff |Q_c|/|Q_h| = 0$. Ma ciò è inconcepibile per una meccanica reale. Da ciò segue il *secondo principio della termodinamica*.

Principio secondo della termica.

L'energia non fluisce da un corpo freddo ad uno caldo, se la stessa è sotto forma di calore.

– 18.2 – Macchine di Carnot.

Una *macchina di Carnot* è una macchina termica operante in un solo ciclo reversibile ideale, tra due sorgenti termiche, che fissa il limite superiore al rendimento di qualsiasi altra macchina termica.

A queste è legato il teorema di Carnot, di seguito riportato.

Teorema di Carnot.

Nessuna macchina termica operante tra due sorgenti termiche, può essere più efficiente di una macchina di Carnot operante tra le stesse sorgenti.

Dimostrazione.

Si suppongano due macchine operanti su due stesse sorgenti di calore. Si supponga la prima una macchina di Carnot con rendimento ϵ_C , la seconda una macchina termica con rendimento $\epsilon > \epsilon_C$.

La macchina con rendimento ϵ è utilizzata per far operare quella di Carnot come frigorifero. Per combinazione tra le due non vi è scambio di lavoro con l'esterno.

Assumendo come fatto che la macchina sia più efficiente del frigorifero, segue che vi è un trasferimento di energia senza aver compiuto lavoro. Ma ciò viola il secondo principio, segue che $\epsilon > \epsilon_C$ è impossibile.

– 18.2.1 – Ciclo di Carnot.

Si consideri la figura di seguito riportata, rappresentante ciclo di un gas operante tra le temperature T_h e T_c .

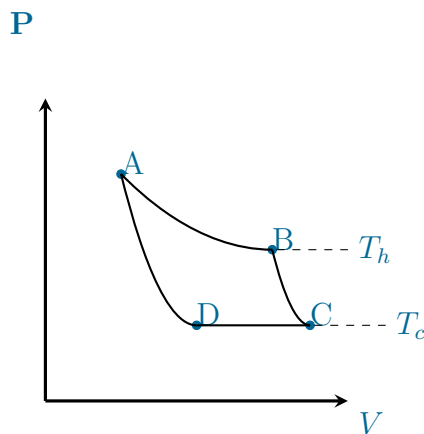


Figura 11: Schema del ciclo di Carnot.

Si hanno le seguenti trasformazioni

- $A \rightarrow B$: isoterma a temperature T_h . Si assorbe $|Q_h|$, si compie lavoro \mathbf{W}_{AB} .
- $B \rightarrow C$: adiabatica, la temperature passa da T_h a T_c , si compie lavoro \mathbf{W}_{BC} .
- $C \rightarrow D$: isoterma a temperature T_c . Si assorbe $|Q_c|$, si compie lavoro \mathbf{W}_{CD} .
- $D \rightarrow A$: adiabatica, la temperature passa da T_c a T_h , si compie lavoro \mathbf{W}_{DA} .

Il rendimento è dunque dato da

$$\epsilon = \mathbf{W}_{AB} + \mathbf{W}_{BC} + \mathbf{W}_{CD} + \mathbf{W}_{DA} = \frac{\mathbf{W}_{\text{mec}}}{|Q_h|} = 1 - \frac{|Q_c|}{|Q_h|}$$

Da osservazioni sperimentali $|Q_c|/|Q_h| = T_c/T_h$, da cui allora

$$\epsilon_C = 1 - \frac{T_c}{T_h}$$

– 18.3 – Entropia.

Un'altro concetto utile della termodinamica è quello di *entropia*. Questa è da considerare come misura del disordine in un sistema isolato.

Si consideri una trasformazione infinitesima. Se dQ è la quantità di calore scambiato durante il cammino tra due stati, allora

$$dS = \frac{dQ}{T} \quad (\text{trasformazione reversibile})$$

supponendo T costante.

Si consideri ora il caso di una trasformazione finita, poiché T non è sempre costante, segue

$$\Delta S = \int_i^f dS = \int_{T_i}^{T_f} \frac{1}{T} dQ$$

la quale risulta essere dipendente unicamente dagli stati iniziali e finali del sistema.

Si consideri adesso l'entropia di una macchina di Carnot, operante a T_c e T_h . Poiché il calore è ceduto solo nelle trasformazioni isoterme, segue

$$\Delta S = \frac{|Q_h|}{T_h} - \frac{|Q_c|}{T_c = 0}$$

Più in generale, indipendentemente dalla trasformazione

$$\Delta S = \oint \frac{1}{T} dQ$$

– 18.4 – Variazione di entropia nelle trasformazioni irreversibili.

Ricordando che l'entropia di sistemi reali dipende solo dagli stati iniziali e finali del sistema, si può calcolare l'entropia di una trasformazione irreversibile, in stato di equilibrio, fissando una trasformazione reversibile tra gli stessi stati e calcolando ΔS .

Poiché la variazione di entropia, se il processo è irreversibile, è sempre positiva, si può enunciare il secondo principio nel seguente modo.

Principio secondo della termodinamica legato all'entropia.

L'entropia di un sistema isolato che si evolve non può mai diminuire.

– 18.4.1 – Variazione di entropia nella conduzione di calore.

Si considerino una sorgente calda ed una fredda a contatto termico, con cui si ha un trasferimento Q di calore. Poiché la sorgente fredda assorbe Q , $\Delta S_c = Q/T_c$ e quella calda cede Q , $\Delta S_h = -Q/T_h$, segue

$$\Delta S = \Delta S_c + \Delta S_h = \frac{Q}{T_c} + \frac{-Q}{T_h} > 0$$

– 18.5 – Entropia su scala microscopica.

Si supponga un gas a volume iniziale V_i , libero di occupare un volume V_f . Supponendo V_m la massa delle singole particelle, il numero di possibili locazioni ω delle molecole è

$$\omega_i = \frac{V_i}{V_m}$$

Trascurando la possibilità che due particelle siano nella medesima posizione, N molecole potranno trovarsi in ω_i^N stati diversi. Cioè

$$\omega_i^N = \left(\frac{V_i}{V_m} \right)^N = \Omega_i$$

analogamente il numero di micro-stati finali sarà dato da

$$\omega_f^N = \left(\frac{V_f}{V_m} \right)^N = \Omega_f$$

Calcolando ora il rapporto tra i micro-stati finali e iniziali, segue

$$\frac{\Omega_f}{\Omega_i} = \left(\frac{V_f}{V_i} \right)^N$$

da cui moltiplicando per K_B è calcolandone il logaritmo, segue

$$K_B \ln \left(\frac{\Omega_f}{\Omega_i} \right) = n N_a K_B \ln \left(\frac{V_f}{V_i} \right) = n R \ln \left(\frac{V_f}{V_i} \right)$$

segue

$$S_f - S_i = n R \ln \left(\frac{V_f}{V_i} \right)$$

da cui si ha la seguente definizione di entropia.

$$S = K_b \ln \Omega$$

– 19 – Campi elettrici.

– 19.1 – Proprietà delle cariche elettriche.

Si supponga di strofinare un palloncino contro la manica di un maglione. Se al palloncino si avvicinano dei pezzetti di carta, questi saranno attratti dallo stesso, dimostrando l'esistenza di una forza elettrica.

Dall'esempio fatto si evince l'esistenza di due tipi di cariche elettriche, che per semplicità si definiscono positiva e negativa.

Si supponga ora di avvicinare due palloncini, caricati staticamente come in precedenza. Si noterà subito che questi tendono a respingersi. Si può dunque concludere che cariche simili si respingono e cariche opposte si attraggono.

Nota.

La carica elettrica si conserva sempre.

– 19.2 – Corpi caricati per induzione.

I materiali possono essere classificati in base alla loro capacità di trasportare elettroni, da ciò si hanno

- [i conduttori](#): materiali in cui alcuni elettroni sono liberi di muoversi.
- [gli isolanti](#): materiali nei quali tutti gli elettroni sono legati agli atomi, dunque non possono muoversi liberamente.
- [i semiconduttori](#): materiali con proprietà intermedie tra conduttori ed isolanti.

Si dirà che un corpo è caricato per induzione se caricato senza entrare in contatto col corpo che induce carica.

– 19.3 – Legge di Coulomb.

Il primo a misurare l'intensità delle cariche elettriche fu *Charles Coulomb*. Questi dedusse, da osservazioni sperimentali, che l'intensità della forza elettrica tra due cariche puntiformi è data dalla seguente relazione.

$$\mathbf{F}_e = \frac{K_C |q_1| |q_2|}{r^2} \quad \text{legge di Coulomb}$$

ove K_C è nota come costante di Coulomb pari a $8.99 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2$, $|q_1|, |q_2|$ sono i valori assoluti delle cariche in analisi, r la distanza tra le due.

Generalmente conviene scrivere la costante di coulomb come

$$K_C = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$$

ove ϵ_0 è la costante di dielettrica del vuoto, pari a $1/\mu_0 c^2$, ove μ_0 è la costante magnetica del vuoto, c la velocità della luce.

Più in generale la forza esercitata da una carica su un'altra, è data come seguente

$$\vec{\mathbf{F}}_{1,2} = -\vec{\mathbf{F}}_{2,1} = \frac{K_C |q_1| |q_2|}{r^2} \hat{\mathbf{r}}_{1,2} \quad (13)$$

ove $\hat{\mathbf{r}}_{1,2}$ è il versore da q_1 a q_2 .

– 19.4 – Campo elettrico.

Uno dei concetti più utili legati alle cariche è quello di campo. Questo è definito come rapporto tra la forza elettrica, che una carica q , esercita su una carica q_0 e q_0 stesso. Cioè

$$\vec{\mathbf{E}} \equiv \frac{\vec{\mathbf{F}}_e}{q_0}$$

ove q_0 è detta carica di prova.

Più in generale, sostituendo alla precedente equazione l'Equazione (13), segue

$$\vec{\mathbf{E}} = K_C \frac{q}{r^2} \hat{\mathbf{r}}$$

– 19.5 – Campo elettrico di una carica distribuita.

Si consideri un'area dello spazio in cui è presente una carica distribuita q , si consideri di tale carica una porzione Δq . Calcolando il campo elettrico di tale carica, segue

$$\Delta \vec{E} = \frac{K_C \Delta q}{r^2} \hat{r}$$

ove r è la distanza tra Δq e un punto qualsiasi.

Per cui il campo elettrico totale in un punto P è

$$\vec{E} \approx K_C \sum_i \frac{\Delta q_i}{r_i^2} \hat{r}$$

da cui se $\Delta q_i \rightarrow 0$, segue

$$\vec{E} = \lim_{\Delta q_i \rightarrow 0} \sum_i K_C \frac{\Delta q_i}{r_i^2} \hat{r} = K_C \frac{dq}{r^2} \hat{r}$$

Per comodità nei calcoli si usa la seguente notazione.

Notazione.

$$\begin{aligned} \rho &\equiv \frac{Q}{V} \\ \sigma &\equiv \frac{Q}{A} \\ \lambda &\equiv \frac{Q}{l} \end{aligned}$$

le quali sono rispettivamente *densità di carica di volume*, *di superficie*, *di linea*, Q è una carica distribuita.

Nel caso di cariche infinitesimali, valgono

$$\begin{aligned} dq &= \rho dV \\ dq &= \sigma dA \\ dq &= \lambda dl \end{aligned}$$

– 19.6 – Linee di campo.

Le linee di campo rappresentano un metodo grafico per descrivere il campo elettrico. Si legano a quest'ultimo nel seguente modo

- \vec{E} è tangente alle linee di campo in ogni punto, e la direzione di queste è quella del versore del campo elettrico.
- Il numero di linee di campo è proporzionale all'intensità del campo elettrico.

– 19.7 – Moto di particella carica in un campo uniforme.

Si consideri una particella di massa m e carica q , in un campo elettrico \vec{E} . La forza agente sulla particella è $q\vec{E}$, inoltre se questa è l'unica forza a cui è soggetta, da Newton

$$\begin{aligned}\vec{F}_e &= q\vec{E} = m\vec{a} \\ \vec{a} &= \frac{q\vec{E}}{m}\end{aligned}$$

– 20 – La legge di Gauss

– 20.1 – Il flusso elettrico.

Si consideri la figura di seguito riportata, rappresentante un campo magnetico uniforme perpendicolare ad una superficie.

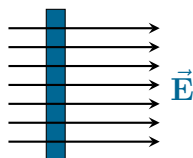


Figura 12: Superficie attraversata da campo elettrico.

Si definisce *flusso elettrico* il numero di linee di campo che attraversano una superficie. Più precisamente questi si definisce come

$$\Phi_E \equiv \mathbf{E}A$$

Se la superficie A non è perpendicolare al campo, questa formerà un certo angolo θ con $\vec{\mathbf{E}}$. Più in generale il flusso elettrico è definito come

$$\Phi_E \equiv \mathbf{E}A \cos \theta$$

Si consideri ora il caso in cui $\vec{\mathbf{E}}$ non sia uniforme. Se si considera una superficie A divisa in tante piccole aree $\Delta \vec{\mathbf{A}}_i$, segue che ciascuna sortirà un campo $\vec{\mathbf{E}}_i$ generalmente uniforme. Dunque il flusso su ogni elemento sarà

$$\Delta \Phi_E = \mathbf{E}_i \Delta A_i \cos \theta$$

Da ciò, integrando, il flusso elettrico totale sarà

$$\Phi_E = \oint \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{A}} \quad (14)$$

– 20.2 – La legge di Gauss.

Si consideri una carica q posta al centro di una sfera di raggio r . In ogni punto della sfera $\vec{\mathbf{E}}$ è parallelo a $\Delta\vec{\mathbf{A}}_i$, rappresentante l'elemento di area ΔA_i , segue

$$\vec{\mathbf{E}} \cdot \Delta\vec{\mathbf{A}}_i = E\Delta A_i$$

Dall'Equazione (14), segue

$$\Phi_E = \oint \mathbf{E} \, dA = E \oint dA$$

ma poiché sferica, $dA = A = 4\pi r^2$, segue

$$\Phi_E = K_C \frac{q}{r^2} 4\pi r^2 = 4\pi K_C q = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

Quanto detto viene generalizzato nella *legge di Gauss*, con la quale si stabilisce che

$$\Phi_E = \oint \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{A}} = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0}$$

ove q_{int} è la carica presente unicamente all'interno della superficie.

– 21 – Potenziale elettrico.

– 21.1 – Potenziale elettrico e differenza di potenziale.

Si consideri una carica q_0 immersa in un campo \vec{E} . Si è già detto che la carica sarà sottoposta ad una forza $q_0\vec{E}$.

Si supponga che la carica compia uno spostamento $d\vec{s}$, ne segue $\mathbf{W} = q_0\vec{E} \cdot d\vec{s}$. Ciò implica pertanto una variazione $dU = -\mathbf{W}$ dell'energia potenziale del sistema.

Considerando dunque che la carica q_0 compia uno spostamento da un punto (a) ad un punto (b), segue

$$\Delta U = -q_0 \int_{(a)}^{(b)} \vec{E} \cdot d\vec{s} \quad (15)$$

da cui, se si divide per q_0 , si ottiene la differenza di potenziale unicamente dipendente dalle cariche sorgenti. Si definisce questa *differenza di potenziale elettrico*.

$$\Delta V \equiv \frac{\Delta U}{q_0} = - \int_{(a)}^{(b)} \vec{E} \cdot d\vec{s} \quad (16)$$

da cui logicamente

$$V = \frac{U}{q_0}$$

Nel SI, il potenziale elettrico è misurato in volt, (V).

$$1 \text{ V} \equiv \text{J/C}$$

– 21.2 – Differenza di potenziale in un campo elettrico uniforme.

Sebbene valide per qualsiasi tipo di campo elettrico, l'Equazioni (15), (16) sono semplificabili per i campi uniformi.

Si considerino due punti (a) e (b) tra loro distanti $d = |\vec{s}|$, la differenza di potenziale tra loro è

$$\Delta V = - \int_{(a)}^{(b)} \vec{E} \cdot d\vec{s} = - \int_{(a)}^{(b)} E \cos \theta \, ds = - \int_{(a)}^{(b)} E \, ds$$

posto *vas* parallelo le linee di campo. Ma \mathbf{E} è costante, segue allora

$$\Delta V = -\mathbf{E} \int_{(a)}^{(b)} ds = -\mathbf{E}d$$

da cui segue

$$\Delta U = q_0 \Delta V = -q_0 \mathbf{E}$$

Più in generale per uno spostamento \vec{s} , non parallelo alle linee di campo tra due punti qualunque

$$\begin{aligned} \Delta V &= - \int_{(a)}^{(b)} \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\vec{E} \int_{(a)}^{(b)} d\vec{s} = -\vec{E} \cdot \vec{s} \\ \Delta U &= q_0 \Delta V = -q_0 \vec{E} \cdot \vec{s} \end{aligned}$$

– 21.3 – Potenziale elettrico ed energia potenziale di cariche puntiformi.

Per calcolare il potenziale di una carica puntiforme ad una distanza r , si consideri l'Equazione (16).

$$\begin{aligned}\Delta V &= - \int_{\textcircled{a}}^{\textcircled{b}} \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{s}} \\ &= - \int_{\textcircled{a}}^{\textcircled{b}} K_C \frac{q}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \cdot d\vec{\mathbf{s}}\end{aligned}$$

ma $\hat{\mathbf{r}} \cdot d\vec{\mathbf{s}} = d\vec{\mathbf{s}} \cos \theta = dr$, segue

$$\Delta V = -K_C q \int_{\textcircled{a}}^{\textcircled{b}} \frac{1}{r^2} dr = K_C q \left[\frac{1}{r_{\textcircled{b}}} - \frac{1}{r_{\textcircled{a}}} \right]$$

– 21.4 – Relazione tra campo e potenziale elettrico.

Dall'Equazione (16), si può esprimere la differenza di potenziale dV tra due punti come

$$dV = \vec{\mathbf{E}} d\vec{\mathbf{s}}$$

Se la distribuzione di carica che genera $\vec{\mathbf{E}}$ ha una simmetria sferica, segue $\vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{s}} = E dr$, da ciò

$$\mathbf{E}_r = \frac{dV}{dr}$$

Se $\vec{\mathbf{E}}$ si espande in ogni direzione, vale allora quanto segue

$$\mathbf{E}_x = \frac{\partial V}{\partial x}, \quad \mathbf{E}_y = \frac{\partial V}{\partial y}, \quad \mathbf{E}_z = \frac{\partial V}{\partial z},$$

– 21.5 – Potenziale elettrico di una distribuzione di carica.

Se la distribuzione di carica è nota, si considera il potenziale di carica dq , da cui

$$dV = K_C \frac{dq}{r}$$

integrando, segue

$$V = K_C \int_{\textcircled{a}}^{\textcircled{b}} \frac{1}{r} dq$$

Se invece il campo elettrico è noto, basta usare l'Equazione (16).

– 22 – Capacità e dielettrici.

Si definisce un sistema composto da due cariche, *condensatore*.

Da osservazioni sperimentali $Q \propto \Delta V$, cioè $Q = C\Delta V$ ove C è detta capacità.

Definizione.

La capacità C di un condensatore è data dal rapporto tra il valore assoluto della carica e la differenza di potenziale tra i conduttori.

$$C \equiv \frac{|Q|}{\Delta V} \quad (17)$$

Nel SI, la capacità è misurata in Farad, (F).

$$1 \text{ F} \equiv \text{C/V}$$

– 22.1 – Calcolo della capacità di un condensatore piano.

Si consideri la figura di seguito riportata.

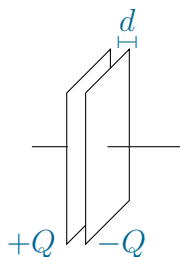


Figura 13: Schema di condensatore a facce piane.

Se si trascurano gli effetti lungo i bordi, se la distanza d tra le piastre è piccola, segue

$$\vec{\mathbf{E}} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{Q}{\epsilon_0 A}$$

Poiché il campo tra le armature è uniforme, $\Delta V = \mathbf{E}d = Qd/\epsilon_0 A$, da cui sostituendo all'Equazione (17) segue

$$\begin{aligned} C &= \frac{Q}{\Delta V} = \frac{Q}{Qd/\epsilon_0 A} \\ &= \frac{\epsilon_0 A}{d} \end{aligned}$$

– 22.2 – Combinazioni di condensatori.

Dati due o più condensatori, questi possono tra loro essere collegati

1. in serie;
2. in parallelo.

– 22.2.1 – Condensatori in serie.

Dati due condensatori, questi si dicono in serie se, la carica Q sul primo condensatore è la stessa carica presente sul secondo condensatore.

Segue dunque che la differenza di potenziale fornita, si distribuisca su ciascun condensatore, pertanto valore

$$\Delta V = \Delta V_1 + \Delta V_2$$

Supponendo di voler utilizzare un'unico condensatore, tale che questi sia equivalente ai due precedentemente presenti, dall'Equazione (17) segue

$$\Delta V = \frac{Q}{C_{eq}}$$

da cui pertanto

$$\begin{aligned} \frac{Q}{C_{eq}} &= \frac{Q_1}{C_1} + \frac{Q_2}{C_2} \quad \text{ma } Q = Q_1 = Q_2 \\ \frac{1}{C_{eq}} &= \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \end{aligned}$$

– 22.2.2 – Condensatori in parallelo.

Dati due condensatori, questi si dicono in parallelo se, la differenza di potenziale ai capi del primo condensatore è la stessa presente sul secondo. cioè

$$\Delta V = \Delta V_1 = \Delta V_2$$

Supponendo di voler utilizzare un'unico condensatore, tale che questi sia equivalente ai due precedentemente presenti, dall'Equazione (17) segue

$$Q = C_{eq} \Delta V$$

da cui pertanto

$$\begin{aligned} C_{eq} \Delta V &= C_1 \Delta V_1 + C_2 \Delta V_2 \quad \text{ma } \Delta V = \Delta V_1 = \Delta V_2 \\ C_{eq} &= C_1 + C_2 \end{aligned}$$

– 22.3 – Energia immagazzinata in un condensatore carico.

Sia q la carica presente in un condensatore in un qualsiasi momento durante la carica. Dunque $\Delta = q/C$, inoltre, il lavoro per spostare una carica dq è

$$\begin{aligned}d\mathbf{W} &= \Delta V dq = \frac{q}{C} dq \\ \mathbf{W} &= \int_0^Q \frac{q}{C} dq = \frac{1}{C} \int_0^Q q dq = \frac{Q^2}{2C}\end{aligned}$$

Da ciò segue pertanto

$$\begin{aligned}U = \frac{Q^2}{2C} &= \frac{1}{2} Q \Delta V = \frac{1}{2} C (\Delta V)^2 \\ &= \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_0 A}{d} (\mathbf{E}^2 d^2) \\ &= \frac{1}{2} (\varepsilon_0 A d) \mathbf{E}^2 \\ &= \frac{1}{2} \mu d^2\end{aligned}$$

ove $\mu = \frac{1}{2} \mathbf{E}^2 \varepsilon_0$ è detta *densità di energia*.

– 23 – Corrente elettrica.

Si faccia l'ipotesi di alcune cariche che si muovono perpendicolarmente ad una superficie di area A . Se si definisce ΔQ la carica che attraversa la superficie in un tempo Δt , allora

$$\langle I \rangle = \frac{\Delta Q}{\Delta t}$$

da cui

$$I = \frac{dQ}{dt}$$

Nel SI, la corrente è misurata in Ampere, (A).

$$1 \text{ A} \equiv \text{C/s}$$

– 23.0.1 – Modello microscopico della corrente.

Si consideri un elemento conduttore di lunghezza Δx , il cui volume sia $\Delta x A$. Siano n il numero di portatori di carica per unità di volume, allora

$$\Delta Q = (nA\Delta x)q$$

ove q è la carica di ciascun portatore di carica.

Se se ciascun portatore si muove a velocità $\mathbf{v_d}$, poiché $\Delta x = \mathbf{v_d}\Delta t$, segue

$$\Delta Q = (nA\mathbf{v_d}\Delta t)q$$

da cui segue

$$\langle I \rangle = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = nA\mathbf{v_d}q$$

– 23.1 – Resistenza.

Si consideri un conduttore con sezione d'area A , percorso da corrente I . Si definisce J *densità di corrente*, cioè la corrente per unità d'area come

$$J \equiv \frac{I}{A} = nqv_d$$

oppure

$$J = \sigma \mathbf{E}$$

ove σ è detta conducibilità, la quale è una caratteristica propria dei materiali. Materiali di questo tipo si definiscono *ohmici*, soddisfano cioè la *legge di Ohm*.

Legge di Ohm.

Per molti materiali, il rapporto tra densità di carica e campo elettrico è una costante σ , indipendente dal campo elettrico che genera la corrente.

Può risultare utile stabilire una relazione tra differenza di potenziale e lunghezza, se si considerano le applicazioni pratiche, considerando il campo uniforme

$$\Delta V = \mathbf{E}l$$

da cui, considerando un filo, segue

$$J = \sigma \frac{\Delta V}{l}$$

analogamente poiché $J = I/A$, segue

$$\Delta V = \frac{l}{\sigma} l = \frac{l}{\sigma A} I = RI$$

ove R è detta *resistenza*, la quale può essere scritta come $R = \Delta V/I$

Nel SI, la resistenza è misurata in Ohm, (Ω).

$$1 \quad \Omega \equiv V/A$$

Inoltre ogni resistenza è caratterizzata di una *resistività*, definita come

$$\rho \equiv \frac{1}{\sigma}$$

– 23.2 – Modello di conduzione elettrica.

Si consideri un reticolo di atomi liberi. Quando si applica un campo elettrico, tali elettroni seguiranno una deriva nella stessa direzione del campo ma con verso opposto, con un velocità \mathbf{v}_d molto piccola.

Considerando le seguenti ipotesi, si deriverà il modello.

1. Il moto dopo l'urto è indipendente dal moto antecedente lo stesso.
2. L'energia tra un urto e l'altro di un elettrone nel campo viene interamente ceduta agli atomi del conduttore quando l'elettrone urta con essi.

Quando l'elettrone di massa m_e e carica $-e$ è soggetto ad un campo elettrico $\vec{\mathbf{E}}$, risente di una forza $\vec{\mathbf{F}} = -e\vec{\mathbf{E}}$, da Newton segue

$$\vec{\mathbf{a}} = \frac{\sum \mathbf{F}}{m} = \frac{q\vec{\mathbf{E}}}{m_e} \quad \text{con } q = -e$$

Poiché $\vec{\mathbf{E}}$ è costante, dopo l'urto se $\vec{\mathbf{v}}_i$ è la velocità immediatamente successiva allo stesso, la velocità finale sarà

$$\vec{\mathbf{v}}_f = \vec{\mathbf{v}}_i + \vec{\mathbf{a}}t = \vec{\mathbf{v}}_i + \frac{q\vec{\mathbf{E}}}{m_e}t$$

ma poiché tale velocità si ripete in un periodo τ , si ha

$$\langle \mathbf{v}_f \rangle = \vec{\mathbf{v}}_d = \frac{q\vec{\mathbf{E}}}{m_e}\tau$$

dunque

$$J = nq\mathbf{v}_d = \frac{nq^2\mathbf{E}}{m_e}\tau$$

$$\sigma = \frac{nq^2}{m_e}\tau$$

$$\rho = \frac{1}{\sigma} = \frac{m_e}{nq^2\tau}$$

– 23.3 – Resistenza e temperatura.

La resistività di un conduttore varia, entro certi limiti, al variare della temperatura, con la seguente relazione.

$$\rho = \rho_0 [1 + \alpha(T - T_0)]$$

ove α è detto *coefficiente di resistività termico*.

Dalla precedente relazione

$$\alpha = \frac{\Delta\rho}{\rho_0\Delta T}$$

ma si è detto che la resistenza è proporzionale alla resistività, segue pertanto

$$R = R_0 [1 + \alpha(T - T_0)]$$

– 23.4 – Potenza elettrica.

Si consideri il circuito della figura di seguito riportata.

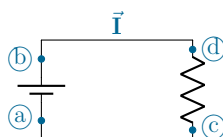


Figura 14: Circuito con resistenza.

Quando una quantità di corrente Q , passa da (a) a (b), si ha una variazione $\Delta U = Q\Delta V$, la quale viene successivamente persa nel passaggio da (c) a (d).

$$\frac{dU}{dt} = \frac{d}{dt} = \frac{dQ}{dt}\Delta V = I\Delta V$$

da cui

$$P = I\Delta V$$

ma $\Delta V = IR$, allora

$$P = I^2 R$$

– 24 – Circuiti in corrente continua.

– 24.1 – Forza elettromotrice.

La differenza di potenziale ai capi di una batteria rimane costante, conseguentemente anche la corrente rimane costante. Per tale ragione si parla di corrente *continua*.

Quando si parla di *f.e.m* ci si riferisce alla forza elettromotrice fornita da una batteria.

Come logico pensare, anche una *f.e.m* ha una resistenza interna, dunque l'effettiva differenza di potenziale di una batteria è

$$\Delta V = \varepsilon - Ir$$

ove ε è la forza elettromotrice propria della batteria, r la resistenza interna della stessa. Dunque considerando figura 14, segue

$$\begin{aligned}\varepsilon &= IR + Ir \\ I &= \frac{\varepsilon}{R + r}\end{aligned}$$

ma quindi

$$\mathbf{P} = I\varepsilon = I^2(R + r)$$

– **24.2 – Combinazioni di resistori.**

Dati due o più resistori, questi possono tra loro essere collegati

1. in serie,
2. in parallelo.

– **24.2.1 – Resistori in serie.**

Dati due resistori, questi si dicono in serie se la corrente che attraversa la prima, attraversa anche la seconda. Cioè vale

$$I = I_1 = I_2$$

Ma la differenza di potenziale ΔV è

$$\Delta V = I_1 R_1 + I_2 R_2 = I R_{eq}$$

da ciò

$$R_{eq} = R_1 + R_2$$

– **24.2.2 – Resistori in parallelo.**

Dati due resistori, questi si dicono in parallelo se sottoposte alla stessa tensione ΔV . Vale cioè

$$\Delta V = \Delta V_1 = \Delta V_2$$

ma dunque

$$I = I_1 + I_2$$

ma si è detto che

$$I = \frac{\Delta V}{R_{eq}}$$

da ciò

$$I = \frac{\Delta V_1}{R_1} + \frac{\Delta V_2}{R_2}$$

pertanto, poiché $\Delta V = \Delta V_1 = \Delta V_2$, segue

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

– 24.3 – Leggi di Kirchhoff.

Spesso capita di non poter semplificare un circuito complesso ad un semplice chiuso unico. La procedura di analisi di tali circuiti è di molto semplificata se si applicano i principi (o leggi) di Kirchhoff.

Queste sono

- legge dei nodi: in un nodo la somma delle correnti deve essere nulla.

$$\sum_{\text{nodo}} I = 0$$

- legge delle maglie: in una maglia la somma delle tensioni deve essere nulla.

$$\sum_{\text{maglia}} \Delta V = 0$$

– 24.4 – Circuiti RC.

Si definisce circuito RC, un circuito del tipo quello della figura di seguito riportata.

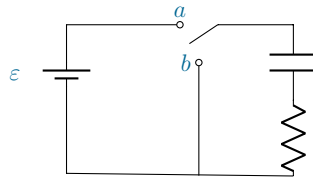


Figura 15: Circuito RC.

– 24.4.1 – Carica di un condensatore.

Si consideri Figura 15. Dalla seconda legge di Kirchhoff, supponendo che il circuito sia chiuso con l'interruttore in a , segue

$$\varepsilon - IR - \frac{q}{C} = 0 \quad (18)$$

Supponendo che $t = 0$ e il condensatore sia scarico, si può calcolare la corrente massima I_i come

$$I_i = \frac{\varepsilon}{R}$$

Dall'Equazione (18), trascorso un tempo sufficientemente lungo, la corrente non circola più nel circuito, segue

$$Q = C\varepsilon$$

Analiticamente segue

$$I = \frac{dq}{dt} = \frac{\varepsilon}{R} - \frac{q}{RC}$$

Da quest'equazione si ricava una relazione per q , infatti

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\varepsilon C}{RC} - \frac{q}{RC} = -\frac{q - C\varepsilon}{RC}$$

moltiplicando per dv e dividendo per $q - C\varepsilon$, segue integrando

$$\begin{aligned} \int_0^q \frac{1}{q - C\varepsilon} dq &= -\frac{1}{RC} \int_0^t dt \\ &= \ln \left(\frac{q - C\varepsilon}{-C\varepsilon} \right) = -\frac{t}{RC} \end{aligned}$$

quindi

$$q(t) = C\varepsilon (1 - e^{-t/RC}) = Q (1 - e^{-t/RC})$$

da ciò, derivando, segue

$$I(t) = \frac{\varepsilon}{R} e^{-t/RC} = \frac{\varepsilon}{R} e^{-t/\tau}$$

ove $\tau = RC$.

– 24.4.2 – Scarica di un condensatore.

Si consideri nuovamente Figura 15, supponendo che il condensatore sia carico e il circuito sia chiuso in b .

Considerando la maglia contenente condensatore e resistore, segue

$$-\frac{q}{C} - IR = 0$$

ponendo $I = dq/dt$, segue

$$\begin{aligned}\frac{q}{C} &= -R \frac{dq}{dt} \\ \frac{dq}{q} &= \frac{1}{RC} dt\end{aligned}$$

Integrando segue pertanto

$$\begin{aligned}\int_0^q \frac{1}{q} dq &= \frac{1}{RC} \int_0^t dt \\ q(t) &= Qe^{-t/RC} = Qe^{-t/\tau}\end{aligned}$$

da ciò derivando nuovamente, segue

$$I(t) = -\frac{Q}{RC}e^{-t/RC} = \frac{Q}{RC}e^{-t/\tau}$$