INDUCCIÓN

SUMATORIA:

$$\sum_{i=1}^{n} i = 1+2+3+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = 1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1+a_2+a_3+\ldots.+a_{n-1}+a_n$$

$$\prod_{i=1}^{n} a_i = a_1.a_2.a_3\ldots.a_{n-1}.a_n$$

PROPIEDADES:

$$1.-\sum_{i=1}^{n} k = k\sum_{i=1}^{n} 1 = kn \quad \text{tambien } \sum_{i=1}^{n} 1 = n$$

$$2.-\sum_{i=1}^{n} ka_i = k\sum_{i=1}^{n} a_i$$

$$3.-\sum_{i=1}^{n} (a_i \pm b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i \pm \sum_{i=1}^{n} b_i$$

$$4.-\sum_{i=m}^{n} (F_i - F_{i-1}) = F_n - F_{m-1} \quad (\text{P. } Telescópica)$$

Calcular por propiedad Telescópica $\sum_{k=1}^{n} 5^k$

$$\sum_{k=1}^{n} (5^k - 5^{k-1}) = 5^n - 1$$

$$\sum_{k=1}^{n} 5^k - \sum_{k=1}^{n} 5^{k-1} = 5^n - 1$$

$$\sum_{k=1}^{n} 5^k - \frac{1}{5}\sum_{k=1}^{n} 5^k =$$

$$\frac{4}{5}\sum_{k=1}^{n}5^{k}=5^{n}-1 => \sum_{k=1}^{n}5^{k}=\frac{5}{4}(5^{n}-1)$$

Ejercicios:

1. Calcular $\sum_{k=1}^{n} kk!$ asuma que $\sum_{k=1}^{n}(kk! - (k-1)(k-1)!) = nn!$
2. Calcular $\sum_{k=1}^{n}(2^{k-1}-2^{k}), n \in Z^{+}$
3. Calcular $\sum_{k=1}^{n}k^{2}$, asuma $k^{3}-(k-1)^{3}$

1. Hallar $\sum_{k=1}^{n}k^{2}$ asuma $\sum_{k=1}^{n}(k^{3}-(k-1)^{3})$ conjunto de partida , luego demuestre :

INDUCCIÓN MATEMATICA

Inducción es una técnica que se utiliza para demostrar predicados, y no es una herramienta para descubrir formulas. En toda inducción, se sabe que:

En toda Inducción va de lo particular a lo General: P(n) $\Longrightarrow$ P(n+1)

En toda Deducción va de lo General a lo Particular: P(n+1) $\Longrightarrow$ P(n).

El proceso de inducción, sirve para elaborar **HIPOTESIS**, que resuelve el problema.

PRINCIPIO DE INDUCCION

Sea el conjunto de definición S

$$S=\left\{ n\in N \quad / el \text{ predicado } P(n) \ es \, válido, \ \text{n} \geq 0 \right\}$$

Para demostrar por inducción: se tiene el siguiente principio:

i. Para n = 1 $\in S$, P(1), es válido
ii. Supongamos que n = h $\in S$, P(h), es la hipótesis Inductivo
iii. Para n = h +1 $\in S$, P(h+1), es válido

Ejemplo de Sumatorias:

1) Demostrar por inducción : $$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

Solución:

i. Para n= 1, $\sum_{k=1}^{1} k = \frac{1(1+1)}{2} = 1$

$1 = 1,\ \ P(1): Es\ válido$

ii. $Suponiendo\_n = h -> \sum_{k=1}^{h} k = \frac{h(h+1)}{2}$, hipótesis inductivo

iii. $Para: n = h+1 -> \sum_{k=1}^{h+1} k = \frac{(h+1)((h+1)+1)}{2}, por\ \ demostrar$

$$\sum_{k=1}^{h+1} k = \sum_{k=1}^{h} k + \sum_{k=h+1}^{h+1} k$$
$$= \frac{h(h+1)}{2} + (h+1)$$
$$= \frac{h(h+1)+2(h+1)}{2}$$
$$= \frac{(h+1)((h+1)+1)}{2}$$ cumple; P(n) es valido

2) Dado la serie, demostrar por Inducción

1	=1
1+3	=4
1+3+5	=9
1+3+5+7	=16
.	.

Encontramos que la serie se puede expresar mediante la siguiente sumatoria:

$$\sum_{k=1}^{n} (2k-1) = n^2$$

Lo cual ahora demostraremos por inducción:

Para n = 1: $2(1)-1=1^2$

$1=1$ Es valido

II) $Suponiendo\_n=h->\sum_{k=1}^{h}(2k-1)=h^2$ hipótesis inductiva

Para n = h+1 : $Para: n=h+1->\sum_{k=1}^{h+1}(2k-1)=(h+1)^2, por\_demostrar$

$$\sum_{k=1}^{h+1}(2k-1)=\sum_{k=1}^{h}(2k-1)+\sum_{k=h+1}^{h+1}(2k-1)$$
$$=\mathrm{h}^2+2(\mathrm{h}+1)\text{-}1$$
$$=\mathrm{h}^2+2h+1$$
$$=(\mathrm{h}+1)^2, \text{que es valido la demostracion}$$

3) Demostrar por inducción que el número total de subconjuntos generados a partir de A ={ a , b , c , d } $\Longrightarrow \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=2^n$

i) Para n=1

$$\sum_{k=0}^{1}\binom{1}{k}=2^1$$
$$\binom{1}{0}+\binom{1}{1}=2$$
$$1+1=2; \text{ cumple, P(n) es valido}$$
$$2=2 \quad \text{Es valido}$$

ii) Supongamos que n=h

$$\sum_{k=0}^{h}\binom{h}{k}=2^h ......Hipótesis-Inductiva$$

iii) <u>Para n=h+1</u>

$$\sum_{k=0}^{h+1}\binom{h+1}{k}=2^{h+1}.....Por-probar$$

$$\sum_{k=0}^{h+1}\binom{h+1}{k}=\sum_{k=0}^{h}\binom{h+1}{k}+\sum_{k=h+1}^{h+1}\binom{h+1}{k}$$

$$\binom{h+1}{0}+\binom{h+1}{1}+\binom{h+1}{2}+\binom{h+1}{3}+.............+\binom{h+1}{h}+\binom{h+1}{h+1}$$

$$\binom{h}{0}+\binom{h}{1}+\binom{h}{0}+\binom{h}{2}+\binom{h}{1}+......................+\binom{h}{h}$$

$$\binom{h}{0}+\binom{h}{1}+.......+\binom{h}{h}+\binom{h}{0}+\binom{h}{1}+....................+\binom{h}{h}$$

$$=\sum_{k=0}^{h}\binom{h}{k}+\sum_{k=0}^{h}\binom{h}{k}\ ....para->n=h+1$$

$$=2\sum_{k=0}^{h}\binom{h}{k}=2.2^{h}=2^{h+1};\ \text{cumple}$$

4) Demostrar por Inducción :

i. $\sum_{k=1}^{n}(3k-2)=\frac{1}{2}(3n^2-n)$

i. Par n = 1: $1=\frac{1}{2}(3(1)^2-1)$

$1=1$

ii. Supo. n = h : $\sum_{k=1}^{h}(3k-2)=\frac{1}{2}(3h^2-h)$, hipo. ind.

iii. Para n=h+1: $\sum_{k=1}^{h+1}(3k-2)=\sum_{k=1}^{h}(3k-2)+\sum_{k=h+1}^{h+1}(3k-2)$

$$\frac{1}{2}(3h^2-h)+(3(h+1)-2)$$

$$\frac{3h^2-h+6(h+1)-4}{2}$$

$$\frac{3h^2-h+6h+6-4}{2}$$

$$\frac{3h^2+5h+2}{2}$$

$$\frac{3(h^2+2h)+2-h}{2}$$

$$\frac{3((h+1)^2-1)+2-h}{2}$$

$$\frac{3(h+1)^2-(h+1)}{2} \quad \text{cumple}$$

Lqqd.

5) Demostrar por inducción

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{2^k}=2-\frac{n+2}{2^n}$$

i) Para n=1, $\sum_{k=1}^{1}\frac{k}{2^k}=2-\frac{1+2}{2^1}$

$$\frac{1}{2^1}=2-\frac{3}{2^1}$$

$$\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

ii) Supo. n = h : $\sum_{k=1}^{h}\frac{k}{2^k}=2-\frac{h+2}{2^h}$

iii) Para n=h+1: $\sum_{k=1}^{h+1}\frac{k}{2^k}=2-\frac{(h+1)+2}{2^{(h+1)}}$

$$\sum_{k=1}^{h+1}\frac{k}{2^k}=\sum_{k=1}^{h}\frac{k}{2^k}+\sum_{k=h+1}^{h+1}\frac{k}{2^k}$$

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{h+1}\frac{k}{2^k}&=2-\frac{h+2}{2^h}+\frac{h+1}{2^{h+1}}\\&=2+\frac{h+1-2(h+2)}{2^{h+1}}\\&=2+\frac{(h+1)-(2h+4)}{2^{h+1}}\\&=2+\frac{-h-3}{2^{h+1}}\\&=2-\frac{(h+3)}{2^{h+1}}\\&=2-\frac{((h+1)+2)}{2^{h+1}},cumple\end{aligned}$$

6) Demostrar por inducción, a partir de la siguiente serie:

-3+5	=2
-3+5-7+9	=4
-3+5-7+9-11+13	=6

Se puede generalizar y escribiendo:

$$\sum_{k=1}^{2n}(-1)^k(2k+1)=2n$$

i) Para n=1 $\sum_{k=1}^{2}(-1)^k(2k+1)=2(1)$

$$-3+5=2$$

$$2=2$$

ii) Supo.n = h : $\sum_{k=1}^{2h}(-1)^k(2k+1)=2(h)$

iii) Para n=h+1: $\sum_{k=1}^{2(h+1)}(-1)^k(2k+1)=2(h+1)$

$$\sum_{k=1}^{2(h+1)} (-1)^k (2k+1) = \sum_{k=1}^{2h} (-1)^k (2k+1) + \sum_{k=2h+1}^{2(h+1)} (-1)^k (2k+1)$$

$$=2h + \sum_{k=2h+1}^{2(h+1)} (-1)^k (2k+1)$$

$$=2h + (-1)^{(2h+1)}(2(2h+1)+1) + (-1)^{2h+2(2(2h+2)+1)}$$

=2h-1(4h+3)+(1)(4h+5)

=2h+2 = 2(h+1) cumple

7) Desarrollando el cuadrado y operando $\sum_{k=1}^{n}(k^3-(k-1)^3)$ **tenemos :**

$$\sum_{k=1}^{n} 3k^2 - 3k + 1 = n^3$$

$$\left[3\sum_{k=1}^{n} k^2 - 3\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1\right] = n^3$$

$$3\sum_{k=1}^{n} k^2 - \frac{3n(n+1)}{2} + n = n^3$$

$$3\sum_{k=1}^{n} k^2 = n^3 + \frac{3n^2+3n}{2} - n$$

$$3\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{2n^3+3n^2+3n-2n}{2}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{2n^3+3n^2+n}{6}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Hemos deducido la fórmula

Demostrando por inducción: $$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Para n = 1:

$$1^2 = 1(1+1)(2(1)+1)$$

$$1^2 = 1(2*3)$$

$$1 = 1$$

n = h :

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{h(h+1)(2h+1)}{6}$$

$$1+4+9+......+h^2 = \frac{h(h+1)(2h+1)}{6}$$

n=h+1:

$$1^2+2^2+3^2+......+h^2+(h+1)^2 = \frac{(h+1)((h+1)+1)(2(h+1)+1)}{6}$$

$$\frac{h(h+1)(2h+1)}{6}+(h+1)^2$$

$$\frac{h(h+1)(2h+1)+6(h+1)^2}{6}$$

$$\frac{(h+1)\left[h(2h+1)+6(h+1)\right]}{6}$$

$$\frac{(h+1)\left[((h+1)+1)(2(h+1)+1)\right]}{6}$$

EJEMPLOS DE DESIGUALDADES - DIVISIBILIDAD:

1 Demostrar por inducción

$n! \geq 2^{n-1}$ para n=1,2,3,...

i) para n=1, $1! \geq 2^{1-1}$

$1 \geq 1$ cumple

ii) Sup n=h, $h! \geq 2^{h-1}$

iii) para n=h+1, $(h+1)! \geq 2^{(h+1)-1}$

$(h+1)! = (h+1)h!$

como $h \geq 1$

$h+1 \geq 2$

$(h+1)! \geq (h+1)2^{h-1}$

$(h+1)! \geq 2.2^{(h)-1}$

$(h+1)! \geq 2^{(h+1)-1}$ cumple

2. Demostrar por Inducción

$3^n + 7^n - 2$, es divisible entre 8, para n=1,2,3,..

i) Para n= 1 3^1+7^1-2,

10-2

8, cumple

ii) Supo. n=h, 3^h+7^h-2, hipo. inductiva

iii) Para n=h+1, $3^{h+1}+7^{h+1}-2$

$3.3^h+7.7^h-2$

$3.3^h+(3+4).7^h+(4-6)$

$3.3^h+37^h+4.7^h+(4-6)$

$3(3^h+7^h-2)+4(7^h+1)$

por indu. es divisible por 8

3^n+7^n-2, es divisible entre 8

3. Demostrar por inducción que $\forall\ n \in \mathbb{N}:\ \mathbf{3^{2n+2}-2^{n+1}}$ es múltiplo de 7.

Solución:

- Para n=1: $3^{2(1)+2}-2^{1+1} = 3^4-2^2 = 77 = \dot{7}$
- Para n=h: $3^{2h+2}-2^{h+1} = \dot{7}$ … (α) Hipótesis inductiva
- Probar para n=h+1: $3^{2(h+1)+2}-2^{(h+1)+1} = \dot{7}$

$3^{2h+2}.3^2-2^{(h+1)}.2 = \dot{7}$ … (β)

Sumando y restando $\mathbf{2^{(h+1)}.3^2}$ en (β) se obtiene

$3^{2h+2}.3^2 - \mathbf{2^{(h+1)}.3^2} + \mathbf{2^{(h+1)}.3^2} - 2^{(h+1)}.2$

$9\,(3^{2h+2}-2^{h+1})+2^{h+1}\,(9-2)$, de la expresión (α)

$9\ (\dot{7})\ \underline{+\,7.\,2^{h+1}} = \dot{7}+\dot{7} = \dot{7}$ $\ell.q.q.d$

4. Demostrar por inducción: $x^{2n-1}+y^{2n-1}$ es divisible por x+y

Solución:

- Para n=1: $x^{2(1)-1}+y^{2(1)-1} = x+y = \overline{x\dot{+}y}$
- Para n=h: $x^{2h-1}+y^{2h-1} = \overline{x\dot{+}y}$… (α) Hipótesis inductiva

- Probar para n=h+1: $x^{2(h+1)-1} + y^{2(h+1)-1} = \overline{x \dotplus y}$

$x^{2(h+1)-1} + y^{2(h+1)-1} = x^{2h+1} + y^{2h+1}$

$x^{2h-1}. x^2 + y^{2h-1} .y^2$ … (β)

Sumando y restando $\boldsymbol{x^{2h-1}.y^2}$ en (β)

$x^{2h-1}. x^2 \boldsymbol{- x^{2h-1}.y^2 + x^{2h-1}.y^2} + y^{2h-1} .y^2$

$x^{2h+1} (x^2 - y^2) + y^2 (x^{2h-1} + y^{2h-1})$

Por hipótesis inductiva en (α)

$x^{2h+1} (x^2 - y^2) + y^2 (\overline{x \dotplus y})$

$x^{2h+1} \underline{(x + y)} (x - y) + y^2 (\overline{x \dotplus y})$

$x^{2h+1} (\overline{x \dotplus y}) + y^2 (\overline{x \dotplus y}) = \overline{x \dotplus y}$ $\quad \ell.q.q.d$

5. Demostrar: $$\sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{n}} \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{i(i+1)}} = \frac{\mathbf{n}}{\mathbf{n+1}}$$

Solución:

- Para n=1: $$\sum_{i=1}^{1} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{1}{1+1} \to \frac{1}{1(1+1)} = \frac{1}{2}$$

- Para n=h: $$\sum_{i=1}^{h} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{h}{h+1} \ \ldots \text{(Hipótesis inductiva)}$$

- Probaremos que para n=h+1: $$\sum_{i=1}^{h+1} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{h+1}{h+2}$$

$$\sum_{i=1}^{h+1} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{1}{(h+1)(h+2)} + \sum_{i=1}^{h} \frac{1}{i(i+1)}$$

$$= \frac{1}{(h+1)(h+2)} + \frac{h}{h+1}$$

$$= \frac{h(h+2)+1}{(h+1)(h+2)} = \frac{h+1}{h+2} \quad \ell.q.q.d$$

6. Demostrar $$\forall \boldsymbol{n} \in \mathbb{Z}^{+}: \sum_{i=1}^{n} \cos(2i-1)x = \frac{\operatorname{sen} 2nx}{2 \operatorname{sen} x}$$

Solución:

- *Para n=1:* $$\sum_{i=1}^{1} \cos(2i-1)x = \frac{\operatorname{sen} 2x}{2 \operatorname{sen} x} = \cos x$$

Para n=h:
$$\sum_{i=1}^{h} \cos(2i-1)x = \frac{\operatorname{sen} 2hx}{2 \operatorname{sen} x} \quad \ldots(\text{Hipótesis inductiva})$$

Probaremos para n=h+1: $$\sum_{i=1}^{h+1} \cos(2i-1)x = \frac{\operatorname{sen} 2(h+1)x}{2 \operatorname{sen} x}$$

$$\sum_{i=1}^{h+1} \cos(2i-1)x = \cos[2(h+1)-1]x + \sum_{i=1}^{h} \cos(2i-1)x$$

$$= \cos(2hx + x) + \frac{\operatorname{sen} 2hx}{2 \operatorname{sen} x}$$

$$= \frac{2\operatorname{sen} x(\cos 2hx \cos x - \operatorname{sen} 2hx \operatorname{sen} x) + \operatorname{sen} 2hx}{2 \operatorname{sen} x}$$

$$= \frac{\operatorname{sen} 2x \cos 2x + \operatorname{sen} 2hx(1 - 2(\operatorname{sen} x)^2)}{2 \operatorname{sen} x}$$

$$= \frac{\operatorname{sen} 2x \cos 2hx + \operatorname{sen} 2hx \cos 2x}{2 \operatorname{sen} x}$$

$$= \frac{\operatorname{sen}(2hx + 2x)}{2 \operatorname{sen} x} = \frac{\operatorname{sen} 2(h+1)x}{2 \operatorname{sen} x} \qquad \ell.q.q.d$$

Ejercicios de domicilio:

1. $$\sum_{k=1}^{n}(3k-2)=\frac{1}{2}(3n^2-n)$$

2. $$\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{2^k}=2-\frac{n+2}{2^n}$$

3. $$\sum_{k=1}^{2n}(-1)^k(2k+1)=2n$$

4. $$\sum_{k=1}^{n}(3k^2-3k+1)=n^3$$

5. Demostrar por inducción:

   1. 3^n+7^n-2 es divisible entre 8, para n=1,2,3, . . .
   2. $2^n \geq n^2$ para n=4,5,6,... donde 2n+1 $\leq 2^n$,n=3,4,5
   3. 2^n+5^n-3 es divisible por 2, para n $\geq$
   4. 3^n+7^n-2 es divisible entre 8, para n=1,2,3...
   5. Demostrar por inducción que n^3-n es divisible por 3, siempre n=1,2,3...
   6. Demostrar por inducción que: $1+2+2^2+2^3+...+2^n=2^{n+1}-1$ *siempre* que n=0,1,2,3,..
   7. Demostrar por inducción: $1+3+5+7+...+(2k-1)=n^2$ *siempre* que k=1,2,3,..n
   8. Demostrar por inducción: $-3+5-7+...+(-1)^k(2k+1)=2n$ *siempre* que k=1,2,3,..2n

INDUCCIÓN EN SEGMENTOS DE ALGORITMOS

Dado un segmento de Algoritmo, a partir de la traza o prueba de escritorio, determinar la fórmula que realiza el segmento de algoritmo. Para determinar la variable de Entrada/salida (E/S) solo tiene que observar la formula. Lo más importante es determinar la función llamada el predicado, lo que permitirá demostrar por Inducción. Para demostrar el predicado por inducción, realizar todos los pasos siguientes:

a. **Hacer la TRAZA ó prueba de escritorio (la trazabilidad del segmento de algoritmo)**
b. **Encontrar la fórmula en base a los resultados de la traza.**
c. **Indicar las variables de E/S mediante la caja negra**
d. **Definir el predicado**
e. **Demostrar por inducción el predicado obtenido.**

PSEUDOCÓDIGOS:

1. **Dada un segmento de algoritmo. Demostrar por inducción el predicado P(n):**

```
FUNCION  Cuadrado (N)
 Inicio
    I ← 0
    S ← 0
    Mientras (I < N)
      hacer
        S ← S + N
        I ← I + 1
     Fin_ hacer
     Retornar ( S ):
 Fin - inicio
```

Solución:

a. Realizamos la traza para parámetro de entrada: N = 5

N	I	S
5	0	0
	1	5
	2	10
	3	15
	4	20
	5	**25**
S = N * I		

b. La fórmula **S = N * I**

c. E/ S

d. Predicado: $\mathbf{S_n = N * I_n}$

e. Demostración por inducción:

DEMOSTRACION POR INDUCCIÓN: $P(n) = S_n = N * I_n$

I. Para n=0: $S_0 = N * I_0$

$0 = N * 0,$

$0 = 0$ **cumple P(1)**

II. Para n=h: $S_h = N * I_h$ **...(Hipótesis inductiva)**

III. Para n=h + 1: $S_{h+1} = N * I_{h+1}$ **, por demostrar**

$$\begin{cases} S_{h+1} = S_h + N, \longleftarrow \text{Tomando.} \\ I_{h+1} = I_h + 1 \end{cases}$$

$S_{h+1} = S_h + N$

$= N * I_h + N$

$= N (I_h + 1) \rightarrow S_{h+1} = N * I_{h+1}$

l.q.q.d

2.-Demostrar por Inducción el siguiente segmento de Algo. :

```
FUNCION  SUMA (A, B)
 INICIO
    C ← A;
    D ← B;
    Mientras (D > 0)
       Inicio de mientras
         C ← C + B;
         D ← D – 1;
       Fin_mientras;

       Retornar  ( C );
 FIN
```

Solución:

a. Realizamos la traza para los parámetros de entrada: **A = 1 y B = 5**

A	B	D	C
1	5	5	1
		4	6
		3	11
		2	16
		1	21
		0	**26**
C= A + B²			

b. Variables de E / S:

c. La fórmula $\mathbf{C = A + B^2}$

$\mathbf{C = A + B * B}$

d. Predicado: $\mathbf{A_n = C_n + B * D_n}$

e. Demostración por inducción:

I. Para n=0: $A_0 = C_0 + B^* D_0 \implies A_0 = \mathbf{A + B^2}$ **cumple**

II. Para n=h: $A_h = C_h + B^* D_h$ ...(Hipótesis inductiva)

III. Para n=h + 1: $A_{h+1} = C_{h+1} + B^* D_{h+1}$, por demostrar $\longleftarrow$ Tomando

$$\begin{cases} C_{h+1} = C_h + B \\ D_{h+1} = D_h - 1 \end{cases}$$

$A_{h+1} = C_{h+1} + B^* D_{h+1}$

$A_{h+1} = C_h + B + B (D_h - 1)$

$A_{h+1} = C_h + B + B *D_h - B$

$A_{h+1} = C_h + B *D_h$ es la hipótesis inductiva

$A_h +_1 = \mathbf{A + B^2}$ **cumple** *l. q. q. d*

3. Demostrar por Inducción:

```
Función Cuadrado (X, Y, N)
        Inicio
            S = X;
            P = Y;
            Mientras (N< >0)
               S = S * Y;
               N = N – 1;
            Fin - mientras
            Retornar(X);
        Fin-inicio;
```

a. Realizamos la traza para el parámetro de entrada **n = 5**

X Y N	**X P**	**N**	**S**
5	**Y**	5	X
		4	XY
		3	XY^2
		2	XY^3
		1	XY^4
		0	XY^5
S = X Y^5			

b. formula s = X $\mathbf{Y^5}$

c. **Variables de E/S**

d. Predicado: $\mathbf{S_n = X\,Y^n}$

e. Demostración:

i) Para n=0: $S_0 = X\,Y^0$

$X = X$, cumple P(1).

ii) Para n=h: $S_h = X\,Y^h$ …(Hipótesis inductiva)

iii) Para $n = h + 1$: $S_{h+1} = X\,Y^{(h+1)}$

$$\left[\begin{array}{l} S_{h+1} = S_h\ Y; \longleftarrow \text{tomando.} \\ n = n - 1 \end{array}\right.$$

$S_{h+1} = S_h\ Y$

$= XY^h\ y$

$S_{h+1} = X\,Y^{(h+1)}$ $\ell.q.q.d$

4.- Demostrar por Inducción:

FUNCION SUMA (A, B)

Inicio

$\left[\begin{array}{l} C \leftarrow 0 \\ P \leftarrow B \end{array}\right.$

Mientras (P> 0)

$\left[\begin{array}{l} C \leftarrow C + A \\ P \leftarrow P - 1 \end{array}\right.$

Fin_mientras

$\left[\begin{array}{l} P \leftarrow B - 1 \\ W \leftarrow C \end{array}\right.$

Mientras (P> 0)

$\left[\begin{array}{l} C \leftarrow C + W \\ P \leftarrow P - 1 \end{array}\right.$

Fin - mientras

Retornar (C)

FIN- inicio

Solución:

a. Realizar la traza para el parámetro de entrada por lectura: **A = 7 y B = 5**

A	B	P	C
7	5	5	0
		4	7
		3	14
		2	21
		1	28
		0	**35**
	W	**P**	**C**
	35	4	35
		3	70
		2	105
		1	140
		0	**175**
$C = A * B^2$			

W = C, P = B - 1,

C=C+W

b. Formula $C = A * B^2$

c. Indicar las variables de entrada y salida

.

d. Predicado : $\mathbf{C_n = W + A*BP_n}$

$\mathbf{= 35 + 7*5*4}$

e. Demostración por inducción:

- Para n = 0: $C_0 = W + A*BP_0 \rightarrow C_0 = A*B^2$ cumple.
- Para n = h: $C_h = W + A*B\ P_h$ …(Hipótesis inductiva)
- Para n = h+1: $C_{h+1} = W + A*B\ P_{h+1} \longleftarrow$ (α)

$$\begin{cases} P_{h+1} = B - 1 \\ W = A*B \end{cases}$$

Tomando la expresión (α)

$C_{h+1} = W + A{*}B\ P_{h+1}$

$C_{h+1} = A{*}B + A{*}B\ (B - 1)$

$C_{h+1} = A{*}B + A{*}B^2 - A{*}B$

$C_{h+1} = \mathbf{A * B^2}$ cumple. *c.q.q.d*

5.- Considerar el siguiente segmento de algoritmo para demostrar por inducción el predicado llamado sumatoria.

```
FUNCION  Sumatoria (n)
  Inicio
    z ← 0
    x ← 1
    y ← 1
    Mientras (y < n)
      z ← z + x*y
      x ← (−1) x
      y ← y + 2
    Fin - mientras
    Retornar ( z )
FIN - Inicio
```

Solución:

a. Realizamos la traza para el parámetro de entrada de: **n=14**

n	y	x	z	
14	1	1	***0***	= 0
	3	−1	***1***	= 0 + 1
	5	1	***−2***	= 0 + 1−3
	7	−1	***3***	= 0 + 1−3 +5
	9	1	***−4***	= 0 + 1−3 +5−7
	11	−1	***5***	= 0 + 1−3 +5−7 + 9
	13	1	***−6***	= 0 + 1−3 +5−7 + 9−11

$$\sum_{k=0}^{2n}(-1)^k = 2n+1 \quad ó \quad \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}(2k-1) = (-1)^{n-1}(n)$$

Para n=1: $\sum_{k=1}^{1}(-1)^{k+1}(2k-1) = (-1)^{1-1}(1) \rightarrow 1 = 1$

Para n=h: $$\sum_{k=1}^{h}(-1)^{k+1}(2k-1) = (-1)^{h-1}(h) \quad \text{.... (Hipótesis inductiva)}$$

Demostrar para n=h+1: $$\sum_{k=1}^{h+1}(-1)^{k+1}(2k-1) = (-1)^{h}(h+1)$$

$$\sum_{k=1}^{h+1}(-1)^{k+1}(2k-1) = (-1)^{h+2}(2(h+1)-1) + \sum_{k=1}^{h}(-1)^{k+1}(2k-1)$$

$$= (-1)^{h+2}(2(h+1)-1) + (-1)^{h-1}(h)$$

$$= (-1)^{h}(-1)^{2}(2h+1) + (-1)^{h}(-1)^{-1}(h)$$

$$= (-1)^{h}(2h+1) + (-1)^{h}(-h) = (-1)^{h}(2h+1) + (-1)^{h}(-h)$$

$$= (-1)^{h}(2h-h+1) = (-1)^{h}(h+1) \qquad \ell.q.q.d$$

Ó $A_n = (-1)^{(n+1)}(n)$

Ejercicios

1.-Demostrar por inducción el número total de subconjuntos generados a partir de A= { a, b, c, d } Para n=0,1,2,3,4 método combinatorio, y por método de Potencia

2.-Demostrar por inducción

```
FUNCION INCOGNITO (n)

Inicio
  x ← 1
  y ← 1
  z ← 0
  Mientras (x < n)
      y ← y * 2
      t ← 1/y
      z ← z + t
      x ← x + 1
  Fin_mientras

    Retornar ( z )
```

FIN - Inicio

FIN CLASE DE INDUCCION

EJERCICIOS RESUELTOS

1.Demostrar por inducción que el número total de subconjuntos generados a partir de A ={ a , b , c , d }, por método de potencia, método combinatoria se obtiene sumatoria.

Demostraremos el enunciado a partir de el siguiente:

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=2^{n}$$

Para n=1

$$\sum_{k=0}^{1}\binom{1}{k}=2^{1}$$

$$\binom{1}{0}+\binom{1}{1}=2$$

$$1+1=2$$

$$2=2$$

Para n=h

$$\sum_{k=0}^{h}\binom{h}{k}=2^{h}......Hipótesis-Inductiva$$

Para n=h+1

$$\sum_{k=0}^{h+1}\binom{h+1}{k}=2^{h+1}.....Por-probar$$

$$\binom{h+1}{0}+\binom{h+1}{1}+\binom{h+1}{2}+\binom{h+1}{3}+..........\ ....+\binom{h+1}{h}+\binom{h+1}{h+1}$$

$$\binom{h}{0}+\binom{h}{1}+\binom{h}{0}+\binom{h}{2}+\binom{h}{1}+..........\ ....\ ...+\binom{h}{h}$$

$$\binom{h}{0}+\binom{h}{1}+.......+\binom{h}{h}+\binom{h}{0}+\binom{h}{1}+..........\ ....\ .+\binom{h}{h}$$

$$\sum_{k=0}^{h}\binom{h}{k}+\sum_{k=0}^{h}\binom{h}{k}=..........\ ....\ .....para->n=h+1$$

$$2\sum_{k=0}^{h}\binom{h}{k}=2.2^{h}=2^{h+1}$$

2.Demuestre por inducción: $\sum_{k=1}^{n}k^{2}$

Desarrollando $\sum_{k=1}^{n}(k^{3}-(k-1)^{3})$ obtenemos :

$$\sum_{k=1}^{n} 3k^2 - 3k + 1 = n^3$$

$$\left[3\sum_{k=1}^{n} k^2 - 3\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1\right] = n^3$$

$$3\sum_{k=1}^{n} k^2 - \frac{3n(n+1)}{2} + n = n^3$$

$$3\sum_{k=1}^{n} k^2 = n^3 + \frac{3n^2 + 3n}{2} - n$$

$$3\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{2n^3 + 3n^2 + 3n - 2n}{2}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Demostrando por inducción:

n = 1:

$$1^2 = 1(1+1)(2(1)+1)$$

$$1^2 = 1(2*3)$$

$$1 = 1$$

n = h :

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{h(h+1)(2h+1)}{6}$$

$$1 + 4 + 9 + \ldots\ldots + h^2 = \frac{h(h+1)(2h+1)}{6}$$

n=h+1:

$$1^2+2^2+3^2+......+h^2+(h+1)^2=\frac{(h+1)((h+1)+1)(2(h+1)+1)}{6}$$

$$\frac{h(h+1)(2h+1)}{6}+(h+1)^2$$

$$\frac{h(h+1)(2h+1)+6(h+1)^2}{6}$$

$$\frac{(h+1)\left[h(2h+1)+6(h+1)\right]}{6}$$

$$\frac{(h+1)\left[(h+1)+1)(2(h+1)+1)\right]}{6}$$

EJERCICIOS

1. Dada un segmento de algoritmo:

¿Cuál es I / o de la función?
Demostrar por inducción
El predicado?

```
Función   PRACTICA(A; B)
 Inicio
     W=0; C=0; P=B;
     Mientras (P>0)
       Hacer
         C=C + A; P=P-1;
       Fin- Hacer
      P=P-1;
      W=C;
      Mientras ( P>0)
         Hacer
            C=C + W; P=P-1;
         Fin - Hacer
    Retornar ( );
  Fin -Inicio
```

2. Dada $N=\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}$ y $C_n=C_{\frac{N}{2}}+N^2$ para $C_1=1$; Hallar la solución General de una relación recursiva y el algoritmo recursivo.

3. Considerar el siguiente Pseudo-código, se pide demostrar por inducción.

```
Función   Incógnito(R)
inicio
  A=0;  B=1;   C=1;
  Mientras (C < R)
    Hacer   A=A + B*C;    C=C + 2;   B=B (-1);
    Fin- Hacer
       Return( );
   Fin - Inicio;
```

analice si es equivalente $\sum_{k=1}^{2n}(-1)^k(2k+1)=2n+1$, demuestra por inducción.

4. Dada el seudocódigo

¿Cuál es I/ o de la función, Cual es la formula, Cual es el predicado? Demostrar por inducción.

```
Función   EXAMEN( I; S, B)
  Inicio
    B=0; D=0; A=S;
    Mientras (A>0)
    Hacer
      B=B + D; A=A -1;
    Fin-hacer
      A=S;
      Mientras ( A>0)
         Hacer
            B=B + I; A=A-1;
         Fin-hacer;
         A= S – 1; D = B;
      Mientras (A>0)
        Hacer
        B= B + D; A= A – 1;
        Fin -hacer;
     Retornar (  )
   Fin - Inicio
```

5. Demostrar por inducción el predicado del segmento de algoritmo:

```
funsión  S (X ,Y)
inicio C=X; D=Y;
   mientras (D>0)
    C=C+Y; D=D-1;   completar
    Fin mientras;
  RETURN (  );
Fin- inicio.
```

FIN DE PRACTICA