Алгоритм МКМ

Kailiak Eugene

10/10/2017

1. Заметим, что рассматриваемые суммы в потенциалах - части пропускной способности разреза нашего графа. Это верно потому, что граф слоистый. Так как $c(e) - f(e) \geq 0$ для любого ребра e, то пропускная способность разреза между двумя слоями (не содержащими s и t) $C(S,T) = \Sigma_{u \in V_i} \Sigma_{v \in V_{i+1}} (c(u,v) - f(u-v))$ Поэтому если мы возьмём только одну вершину во внешней сумме, то она станет не больше. А так как максимальный поток в графе равен пропускной способности минимального разреза, то поток такой величины мы в графе пропустить можем.
   Докажем теперь, что можно пропустить через вершину r. Так как по определению потенциала мы можем пропустить поток этой величины по инцидентным ребрам к вершине r, запустим такие потоки вдоль рёбер. Рассмотрим теперь вершины, в которые пришли новые потоки. Так как величина пущенного по ребру потока меньше величины потенциала r, а он минимальный во всём графе, то пришедший в новый слой поток меньше потенциала каждого ребра в этом слое. Аналогично и для всех слоёв (мы пускаем поток "в две стороны"от нашей вершины, но на суть это не влияет). То есть в каждом слое в одну вершину могло влиться дополнительно не больше $\phi(r)$ потока. А по определению потенциала через минимум пропускных способностей в остаточной сети в и из вершины, мы можем пустить этот поток дальше, пока не дойдём до s и t. Следовательно, такой поток пустить можно

2. Алгоритм будет заключаться в следующем: на каждой итерации по имеющейся у нас сети с посчитанными потенциалами и выброшенными вершинами с нулевыми потенциалами строим слоистую сеть. В ней будем искать блокирующий поток, находя вершину с наименьшим потенциалом и пуская через неё поток $\phi(r)$, попутно удаляя из слоистой сети вершины с нулевым потенциалом и инцидентные им рёбра, обновляя потенциалы при удалении и пропускании потока. На каждой итерации мы ходим по какому-то количеству рёбер, количество которых не больше, чем $|V|$ (мы считаем, что от кратных ребёр мы заранее избавились), при этом $|E_i|$ из них мы удаляем. Тогда за один поиск блокирующего потока мы сделаем операций $\Sigma_i O(|V|) + |E_i| = O(|V|^2)$ Всего итераций не больше $O(|V|)$, поэтому общая асимптотика будет $O(V^3)$