Рекурренты-2

Kailiak Eugene

18/09/2017

Сделаем из нашего двудольного графа сеть (добавим сток и исток), ребра ориентируем из левой доли в правую и назначим им пропускную способность 1. От стока проведём аналогичные рёбра в левую долю, а из правой доли проведём рёбра к стоку. В этой сети можно использовать теорему Форда-Фалкерсона и сказать, что величина максимального потока равна пропускной способности минимального разреза. Также будем использовать Лемму о том, что поток не превосходит пропускную способность минимального разреза.
Пусть $n = |L|$. Докажем в одну сторону. Рассмотрим разрез (S, T) в котором m вершин из левой доли и k вершин из правой. Разберём случаи и посчитаем пропускную способность.:

1. $m \leq l$. Тогда пропускная способность содержит $n - m$ ребёр из s в первую долю, и l рёбер из вершин второй доли, лежащих в S, ведущих в t. Тогда пропускная способность не меньше чем $n - m + l = n + (l - m) \geq n$, т.к. $l - m \geq 0$

2. $m > l$. Тогда по условию теоремы $N(A) \leq |A|$, что означает, что эти m вершин первой доли соединены с не меньшим числом вершин правой доли, то есть существует как минимум $m - l$ рёбер из S в T + $(n - m)$ рёбер в левую долю из s и l рёбер из правой доли в t. Тогда пропускная способность $\geq (n - m) + l + (m - l) = n$

Итак, в любом случае пропускная способность разреза не больше n, поэтому в одну сторону доказали. Докажем во вторую. Пусть существует паросочетание размера n. Значит, пропускная способность минимального разреза $\geq n$. Пусть дано множество A (докажем для любого). Возьмём разбиение (S, T), где $S = A \cup N(A)$. Тогда аналогично посчитаем минимальную пропускную способность: $(n - |A|) + N(A) \geq n \Rightarrow N(A) - |A| \geq 0 \Rightarrow N(A) \geq |A|$, что и требовалось доказать.