

**ESSAY – Entropie als mathematisches Modell in der Physik und in der
Informationstheorie – Ein Vergleich
von Kara Riebesel
31.03.2024**

Der Begriff „Entropie“ wurde erstmals 1865 von Rudolf Clausius im Zuge der Entwicklung der Thermodynamik als komplexer Zusammenhang zwischen Wärme und Temperatur definiert. In der späteren Theorie der statistischen Mechanik wurde Entropie dann als ein Maß eines thermodynamischen Makrosystems definiert, welches die Summe über die Wahrscheinlichkeit p_i angibt, ob sich die Einzelteile (die Atome) in bestimmten Mikrozuständen (Geschwindigkeit, Position) befinden.¹ In anderen Worten beschreibt die Entropie die „Unordnung“ oder den „Informationsmangel“ eines Makrosystems. Beispielsweise bewegen sich die einzelnen Atome eines Makrosystems bei Temperaturerhöhung immer schneller, die „Unordnung“ des Systems steigt. Gleichzeitig sinkt die Wahrscheinlichkeit, dass sich ein Atom in einem bestimmten Mikrozustand befindet und damit auch unser Wissen über das Gesamtsystem. Die Entropie als Maß der „Unordnung“ und des „Informationsmangels“ hingegen steigt. Diese thermodynamische Entropie ist in ihrer Form auch ein mathematisches Modell, welches die Komplexität der Einzelteile eines thermodynamischen Gesamtsystems durch Abbildung auf ein Maß reduziert. Das mathematische Modell repräsentiert dabei eine Eigenschaft (die Entropie) des Gesamtsystems.

Dieses mathematische Modell zur Beschreibung thermodynamischer Systeme verwendete C. E. Shannon 1948, um die Fundamente für eine andere Disziplin zu legen: der Informationstheorie.² Die von ihm definierte Informationsentropie ähnelt der Gleichung der thermodynamischen Entropie bis auf den Boltzmann Faktor k_b . Sie verallgemeinert das physikalische Prinzip auf allgemeine Systeme mit Informationsübertragung, bei denen die Entropie den mittleren Informationsgehalt pro Zeichen einer Quelle darstellt. Hier werden den einzelnen Zeichen (im physikalischen Korrelat die Mikrozustände) Auftrittswahrscheinlichkeiten zugeordnet. Vereinfacht gesagt stellt sie ein Maß dafür da, wie viele Bits Information benötigt werden, um bei einer Übertragung von einem System in ein Zielsystem ein Zeichen genau identifizieren zu können. Ähnlich wie in der Physik sinkt die Entropie, wenn die Wahrscheinlichkeit des Auftretens eines Zeichens steigt und steigt bei sinkender Wahrscheinlichkeit.³

1 Bais, F. A., J. D. Farmer. 'The Physics of Information.' In Philosophy of Information, 609-684. Eds. Pieter Adriaans and Johan Van Benthem. Elsevier, 2008 – Weitere Veröffentlichung: <https://arxiv.org/abs/0708.2837> - Seite 2

2 Vgl. Bais, Farmer, 2008, Seite 2

Ein wichtiges Gedankenexperiment führte zur Übertragung des Konzepts der Entropie aus der Physik in die Informationstheorie: der Maxwellsche Dämon.¹ Kurz zusammengefasst geht es um folgendes: Zwei Behälter von Gas mit gleicher Entropie enthalten Atome, die sich mit einer gewissen Geschwindigkeit bewegen. Der Dämon kann nun die Geschwindigkeit aller Atome erkennen und so durch Betätigen einer Schleuse zwischen den Behältern, die schnelleren Atome zu einer Seite durchlassen und die langsameren zu der anderen. Er kann somit ohne Zuführung von Arbeit an das Gesamtsystem, die Entropie der Teilsysteme erhöhen bzw. verringern. Dies würde dem 2. Hauptsatz der Thermodynamik widersprechen und war deshalb lange Zeit ein ungeklärtes Problem. Nach Maxwell und Lord Kelvin versuchte L. Szilárd eine Lösung für dieses Problem zu finden und definierte zum ersten Mal eine Entropie der Information.¹ Er ging davon aus, dass der Dämon bei Messung der Geschwindigkeiten der Atome eine Information über die Messung abspeichern musste und diese die gesuchte Entropieminderung enthielt, die den gleichen Betrag der Entropieminderung thermodynamischer Systeme betrug.¹ Diese Idee veranlasste C. Shannon später, Information allgemeiner zu betrachten und ihr eine eigene Entropie zuzuweisen, die Informationsentropie.

Wir wollen im Folgenden betrachten, welche verschiedenen Funktionen die Entropie in der Physik, sowie in der Informationstheorie erfüllt und dazu Beispiele angeben. Nach A. Gelfert haben wissenschaftliche Modelle unter anderem folgende Funktionen:

Sie finden Verwendung „1.) als Repräsentation (*repräsentationale Funktion*), 2.) als Mittel zur Vorhersage (*prädiktive Funktion*), 3.) als Hilfsmittel zur Intervention (*instrumentalistische Funktion*) und 4.) als Mittel zum Ausloten möglicher explanatorischer, kausaler und theoretischer Zusammenhänge (*explorative Funktion*).“²

Im ersten Fall der *repräsentationalen* Funktion erfüllt die thermodynamische Entropie ihre Aufgabe, indem sie schwer zu bestimmende Einzeleigenschaften eines Makrosystems durch Reduktion auf ein allgemeineres Maß abbildet. Dies beschreibt bei heutigem Wissenstand nicht nur Systeme aus der statistischen Mechanik, sondern auch Systeme auf fundamentaler quantentheoretischer Ebene. Eine zum heutigen Zeitpunkt bestmögliche Repräsentation, die in verschiedenen Theorien eingebettet ist, ist somit gegeben. Die Informationsentropie erfüllt durch ihre Abbildung der Eigenschaften von allgemeinen Systemen mit Informationsübertragung ebenfalls eine repräsentationale Funktion.

Als Fundament des 2. Hauptsatzes der Thermodynamik erfüllt die Entropie auch eine *prädiktive* Funktion, da mithilfe dieser Gesetzmäßigkeiten, das thermodynamische Verhalten von Gesamtsystemen vorhergesagt werden kann. Da bis heute kein Perpetuum Mobile 2. Art gefunden wurde, kann von zuverlässigen Vorhersagen ausgegangen werden. Die Informationsentropie stellt die Basis für das Landauerprinzip

¹ Vgl. Bais, Farmer, 2008, Seite 26

² Gelfert, Axel: Perspektiven der Wissenschaftstheorie (Universitätsinterne Veröffentlichung) – Seite 23

dar.¹ Dieses Prinzip wurde bereits durch L. Szilárd angestoßen und 1961 durch Rolf Landauer ausformuliert und beschreibt dissipative Vorgänge (also Informationsverlust) bei Informationsübertragung. Dies wurde in den letzten Jahren experimentell überprüft² und man kann damit korrekte Vorhersagen bei Systemen der Informationsübertragung treffen. Die Informationsentropie als Basis erfüllt somit ebenfalls eine prädiktive Funktion.

Die *instrumentalistische* Funktion erfüllt die thermodynamische Entropie ebenfalls durch die zahlreiche Anwendung des Modells bei der Konstruktion von Technologien des Lebensalltags. Die Informationstheorie, deren Basis die Informationsentropie bildet, führte maßgeblich zur Entwicklung von Kommunikationssystemen und Computern. Das Modell der Informationsentropie ermöglichte somit den Aufbau der modernen Kommunikationsgesellschaft. Der *explorative* Charakter der thermodynamischen Entropie findet man in ihrer Funktion, die Zustände der Einzelsysteme zu verallgemeinern. Durch sie ist es möglich, explorativ Systeme zu untersuchen, zu denen wir experimentell keinen Zugang haben. Die Informationsentropie wird ebenfalls explorativ verwendet, so konnte mit ihr das Problem des Maxwellschen Dämon neu bewertet werden und sie legte den explorativen Grundstein für viele neue Konzepte in der Informationstheorie, wie beispielsweise das Landauer Prinzip.

Für die Diskussion der Eigenschaften und Modellübertragung der Entropie, möchte ich als ersten Schritt die Validität der Entropie als mathematisches Modell betrachten und beziehe mich dabei auf die semantische Abgrenzung von Modellen zu Theorien³ und die Definition von L. Boltzmann über die Grundeigenschaften von Modellen.⁴

In der semantischen Auffassung vom Verhältnis zwischen Theorien und Modellen wird häufig folgender Satz genannt: „A scientific theory is best thought of as a collection of models“.³ Die thermodynamische Entropie vervollständigt durch ihr Konzept den 2. Hauptsatzes der Thermodynamik und damit die Theorie der statistischen Mechanik und kann deshalb als mathematisches Modell innerhalb dieser Theorie gesehen werden. In Bezug auf die Definition des Begriffs „model“ von Ludwig Boltzmann 1902⁴ wird durch die Entropie ein abstraktes (mentales) Modell eines Gesamtsystems konstruiert, welches durch ihre Repräsentation eine Zusammenfassung der Eigenschaften der Einzelteile des Gesamtsystems abbildet. Wir können somit auch hier von der Zuordnung der Entropie zu wissenschaftlichen Modellen ausgehen.

1 Vgl. Bais, Farmer, 2008, Seite 23

2 Bérut, A., Arakelyan, A. „Experimental. Verification of Landauer’s principle linking information and thermodynamics, Nature, Vol. 483, Seite 187 – 189, 2012

3 Vgl. Gelfert, Seite 19

4 Vgl. Gelfert, Seite 13

Welche Voraussetzungen in den beiden Disziplinen gelten nun, sodass eine erfolgreiche Modellübertragung stattfinden konnte? Die Physik versucht durch Modellierung von zeitlichen Änderungsprozessen, grundlegende Gesetzmäßigkeiten der Natur zu identifizieren, sie in einfachen Gleichungen abzubilden und diese Gleichungen zu vereinheitlichen. Die Informationstheorie erforscht hingegen die Gesetzmäßigkeiten, denen Information (die grundsätzlich alle möglichen Formen von Zeichen annehmen kann) unterliegt. Sie erforscht deshalb im Vergleich zur Physik allgemeinere logische Bauteile ohne zugeordnetes physisches Korrelat und deren Gesetzmäßigkeiten. Gleichzeitig ist diese komplette Unabhängigkeit von einem physikalischen Korrelat aber ein Trugschluss. Jeder Prozess, bei der Information transportiert, gesichert oder bearbeitet wird, muss über ein physikalisches Substrat erfolgen. Hier findet sich eine fundamentale Beziehung zwischen den beiden Disziplinen, Information existiert nur innerhalb der physikalischen Gesetzmäßigkeiten.¹ Diese Erkenntnis führte sogar so weit, dass vor kurzer Zeit eine neue Disziplin entwickelt wurde, die Physik der Information, die Grundlage ist für weitere vertiefende Disziplinen, wie die Quanteninformationstheorie.

Diese Verbindung erklärt den Erfolg der Übertragung des Konzepts der Entropie in der Mitte des 20. Jahrhunderts von der Physik in die Informationstheorie. Gleichzeitig ist die Entropie erfolgreich in beiden Disziplinen, da sie in der Physik sowie in der Informationstheorie die oben genannten Funktionen wissenschaftlicher Modelle erfüllt. Als weitere Begründung für den Erfolg des Übertrags könnte man die Ähnlichkeit in der Vorgangsweise beider Disziplinen sehen, Strukturen (sei es nun physikalische oder logische) durch Mathematisierung zu modellieren, sodass eine Modellübertragung einfacher wird.

Trotz dieser sehr nahen Verbindungen zwischen den beiden Gebieten Physik und Informationstheorie kann es aber bei Versuchen, andere Modelle aus der Physik in die Informationstheorie zu übertragen, zu Misserfolgen kommen. Die physikalische Entropie nutzt in ihrem Ansatz bereits ein verallgemeinertes Prinzip zur Beschreibung von Wahrscheinlichkeiten, sodass der Schritt in die weitere Verallgemeinerung nahe liegt. Dies ist bei vielen mathematischen Konzepten aus der Physik nicht gegeben. Im Gegensatz zur Physik mit ihren Abbildungen materieller Strukturen, verfolgt die Informationstheorie wie bereits erwähnt Abbildungen allgemeiner Strukturen von Information. Sie ist deshalb eine Verallgemeinerung der thermodynamischen Entropie, diese könnte deshalb umgekehrt als Ableitung der Informationsentropie gesehen werden, obwohl sie geschichtlich zuerst entwickelt wurde. Hier könnte man eventuell auch von einer fast isomorphen Abbildung des Modells von einer wissenschaftlichen Disziplin in die andere sprechen.

Die physikalische Entropie ist also ein spezifischer Anwendungsfall der Informationsentropie und selbst innerhalb der Physik könnte diese Entropie nun in Subfelder übertragen werden, z.B. unterscheidet sich die thermodynamische Entropie,

¹ Vgl. Bais, Farmer, 2008, Seite 2

die sich auf die Freiheitsgrade der Bewegung der Atome bezieht, in ihrem Verhalten von einer hypothetischen räumlichen Positionsentropie, die sich nur auf die räumliche Position der Atome bezieht.¹ In Analogie zur Übertragung des Modells innerhalb der Physik existiert ebenso die Möglichkeit die Informationsentropie auf weitere wissenschaftliche Disziplinen zu übertragen. In der Soziologie wurde z.B. die soziale Entropie eingeführt.

Ebenfalls könnte das Entropiemodell, als Repräsentation von Systemen mit Informationsverlust, in der Wissenschaftstheorie zur Beschreibung von wissenschaftlichen Modellen verwendet werden. Bei der Abbildung von Zielsystemen kommt es, solange es sich nicht um eine isomorphe Abbildung handelt, zwangsweise zu einem Informationsverlust über das Zielsystem. Das Modell könnte somit als Abbildung des Zielsystems mit erhöhter Entropie verstanden werden. Man könnte sogar so weit gehen und sagen, dass sogar die gesamte Wissenschaft, die auf Modellen basiert, als Anwendung des Problems der Entropiemaximierung gelten könnte. Mit der Entropie als Maß könnten wir beschreiben, wie genau oder vereinfacht eine Abbildung bei wissenschaftlicher Modellierung getätigt wurde.

Zusammenfassend bildet die Informationsentropie, die aus dem Konzept der thermodynamischen Entropie übertragen wurde, ein fundamentales Modell der Eigenschaften von Informationsprozessen, bei denen Einzelteilen Wahrscheinlichkeiten zugeordnet sind. Sie kann bei genauerer Definition des Kontexts einfach auf andere Disziplinen der Wissenschaft, bei denen solche Prozesse eine Rolle spielen, übertragen werden. In der Physik wurde das mathematische Modell der Entropie zwar das erste Mal entwickelt, am Ende ist dieses aber nur ein weiterer spezifischer Anwendungsfall der Informationsentropie. Validität erhalten beide Modelle durch ihre funktionale Verwendbarkeit.

In diesem Essay konnte nur eine grundlegende Übersicht über Entropie als mathematisches Modell in beiden Disziplinen gezeigt werden und die Geschichte der Übertragung in die Informationstheorie. Seitdem wurde an dem Konzept in beiden Feldern vertieft geforscht, wodurch es zu vielen neuen Aussagen gekommen ist. Diese sprengen aber den Rahmen hier. In Bezug auf die Verknüpfung zwischen Physik und Informationstheorie wird das neuere Forschungsfeld der Physik der Information in Zukunft weiter Aufschluss geben können

1 Vgl. Bais, Farmer, Seite 25

2 Vgl. Bais, Farmer, Seite 3

Literaturverzeichnis:

Gelfert, Axel: Perspektiven der Wissenschaftstheorie (Universitätsinterne Veröffentlichung)

Bais, F. A., J. D. Farmer. 'The Physics of Information.' In Philosophy of Information, 609-684. Eds. Pieter Adriaans and Johan Van Benthem. Elsevier, 2008 – Weitere Veröffentlichung: <https://arxiv.org/abs/0708.2837>

Bérut, A., Arakelyan, A. ,Experimental. Verification of Landauer's principle linking information and thermodynamics, Nature, Vol. 483, 187 – 189, 2012

(Aus dem Prinzip der Informationsentropie konnte das Landauer Prinzip abgeleitet werden, nachdem irreversible Informationsübertragungsprozesse immer einen dissipativen Verlust hinnehmen müssen, ähnlich der Energieabgabe bei Wärmeübertragung gemäß dem 2. HS der Thermodynamik. Hier ist der Verlust die Information in Bits, die nicht übertragen wurden. Auch hier könnte man mit dem maxwellschen Dämon ... Wirkung auf das Gedächtnis des maxwellschen Dämon.

Der Maxwellsche Dämon hingegen als Übertragungsmodell von physikalischer Entropie zu Informationsentropie ist hingegen sehr wohl explorativen Charakters, da er als Gedankenexperiment, maßgeblich zur explorativen Erforschung von Gesetzmäßigkeiten in verschiedenen Disziplinen beigetragen hat.

Literaturverzeichnis:

Gelfert, Axel: Perspektiven der Wissenschaftstheorie (Universitätsinterne Veröffentlichung)

Bais, F. A., J. D. Farmer. 'The Physics of Information.' In Philosophy of Information, 609-684. Eds. Pieter Adriaans and Johan Van Benthem. Elsevier, 2008 – Weitere Veröffentlichung: <https://arxiv.org/abs/0708.2837>

Bérut, A., Arakelyan, A. ,Experimental. Verification of Landauer's principle linking information and thermodynamics, Nature, Vol. 483, 187 – 189, 2012

Anstelle der Atome in der statistischen Mechanik treten hier die Zeichen auf, die als abstrakte Information aus jeglicher Form von Zeichen oder Zeichengruppen bestehen können. Die Analogie zu den Eigenschaften wie Geschwindigkeit und Position der Atome, ist der Informationsgehalt, die Anzahl der einzel

- Siehe Seite 25 Physics of Information. What is Entropy?
- Physikalisches Korrelat zur Information

Hier könnte man theoretisch auch von einer isomorphen Abbildung von einer wissenschaftlichen Disziplin in die andere sprechen, wobei die Abbildung eine weitere Verallgemeinerung des Modells darstellt.

Das Entropiemodell zur Beschreibung von Systemen mit Informationsverlust könnte auch zur Beschreibung von wissenschaftlichen Modellen verwendet werden. Bei der Abbildung von Zielsystemen kommt es, solange es sich nicht um eine isomorphe Abbildung handelt, zwangsweise zu einem Informationsverlust über das Zielsystem. Das Modell könnte somit als Abbildung des Zielsystems mit erhöhter Entropie verstanden werden.

Aufgabe

Diskutieren Sie dann, was im betreffenden Fall zum Erfolg (oder Misserfolg) der versuchten Modellübertragung beigetragen hat. Berücksichtigen Sie dabei auch die zentralen Voraussetzungen und Grundannahmen, die in den jeweiligen Anwendungsbereichen gelten. Beides – Darstellung und Diskussion – sollte in etwa den gleichen Umfang haben.