

**БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ФАКУЛЬТЕТ РАДИОФИЗИКИ И КОМПЬЮТЕРНЫХ
ТЕХНОЛОГИЙ**

Кафедра информатики и компьютерных систем

С. Г. Мулярчик, И. М. Шевкун

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

**Методические указания
к лабораторному практикуму**

В двух частях

Часть 2

Уравнения математической физики

**Минск
2019**

УДК 519.6 (076.5)

ББК 22.19я73

М90

Рекомендовано
советом факультета радиофизики
и компьютерных технологий
30 апреля 2019 г., протокол № 10

Р е ц е н з е н т
кандидат физико-математических наук,
доцент *Ю. И. Воротницкий*

Мулярчик, С. Г.

М90

Численные методы : метод. указания к лаб. практикуму.
В 2 ч. Ч. 2. Уравнения математической физики / С. Г. Муляр-
чик, И. М. Шевкун. – Минск : БГУ, 2019. – 51 с.

Приводится описание лабораторных работ по изучению методов численного решения уравнений математической физики эллиптического и параболического типов.

Для студентов специальностей 1-31 04 02 «Радиофизика», 1-31 04 03 «Физическая электроника», 1-31 04 04 «Аэрокосмические радиоэлектронные и информационные системы и технологии», 1 - 98 01 01 «Компьютерная безопасность», 1-31 03 07 «Прикладная информатика».

УДК 519.6 (076.5)

ББК 22.19я73

© БГУ, 2019

Цель вычислений – понимание,
а не числа.

Р. В. Хемминг

ПРЕДИСЛОВИЕ

Лабораторный практикум по курсу «Численные методы» состоит из двух частей: часть 1: Задачи высшей математики; часть 2: Уравнения математической физики.

Вторая часть практикума включает работы по изучению методов численного решения уравнений математической физики эллиптического и параболического типов. В качестве методической задачи в этой части практикума используется уравнение теплопроводности, описывающее стационарный и нестационарный перенос тепла в области сложной формы, составленной из прямоугольных сегментов (последнее обеспечивает вариативность форм и, следовательно, возможность формулировки индивидуальных заданий).

Выполнение каждой лабораторной работы сводится к разработке алгоритма, включающего построение сетки, формулировку разностных уравнений и рекуррентных соотношений, реализующих итерационный метод их решения, и написанию на его основе программы, ее отладке, исследованию численного метода в соответствии с заданием соответствующей лабораторной работы.

Рекомендуется следующий порядок выполнения лабораторной работы. Прежде всего следует ознакомиться с теоретическими основами численного метода, которому посвящена первая часть методического пособия. Далее необходимо подробно разобрать методический пример и в особенности программу его решения, приводимую во второй части пособия. Выполнение индивидуального задания выполняется по образцу разобранного методического примера!

Заключительные пожелания. Каждую программу необходимо доводить до отлаженного программного продукта. Последние должны быть оптимизированы по эффективности вычислений (требуемой памяти, количеству операций), иметь защиту от ошибок в задании исходных данных, защиту от заикливания, обеспечивать настройку программы на задачу с помощью системы параметров. Возможные языки программирования – C, C++.

Лабораторная работа № 6

РЕШЕНИЕ ДВУМЕРНОГО СТАЦИОНАРНОГО УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

ЦЕЛЬ РАБОТЫ: изучить и программно реализовать на языке высокого уровня конечно-разностный метод решения краевой задачи для стационарного уравнения теплопроводности.

6.1. Математическая постановка

В стационарном случае распределение температуры в двумерной области G при отсутствии внутри этой области стоков и источников тепла описывается уравнением

$$\nabla \cdot a \nabla T = 0; \quad (x, y) \in G, \quad (6.1)$$

где $T(x, y)$ – температура, $\nabla = (\partial/\partial x; \partial/\partial y)$ – двумерный оператор дифференцирования, a – температуропроводность материала, заполняющего область, в общем случае функция пространственных координат и температуры. Запись $\nabla \cdot (\dots)$ означает векторную операцию дивергенции над вектором, заключенным в скобки.

Уравнение (6.1) в точках границы Γ области G дополняется граничными условиями, отражающими характер температурного обмена области с внешней средой:

$$T(x, y) = \alpha_1(x, y); \quad (x, y) \in \Gamma_1, \quad (6.2)$$

$$a \frac{\partial T(x, y)}{\partial \eta} = \alpha_2(x, y); \quad (x, y) \in \Gamma_2, \quad (6.3)$$

$$a \frac{\partial T(x, y)}{\partial \eta} = \alpha_3(T, x, y); \quad (x, y) \in \Gamma_3. \quad (6.4)$$

Граничное условие (6.2) означает, что в точках, принадлежащих Γ_1 , температура известна. Граничное условие (6.3) описывает плотность температурного потока в точках области Γ_2 . Граничное условие (6.4) свидетельствует о том, что в точках области Γ_3 имеют место более сложные процессы взаимодействия с внешней средой. Здесь

$\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ – отдельные части границы $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$, \mathbf{n} – вектор единичной нормали к ней, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ – заданные функции.

Соотношения (6.1)÷(6.4) представляют собой математическую модель стационарных процессов температурного обмена, записанную в дивергентной форме. Дивергентная форма позволяет легко преобразовать ее в интегральную форму.

Введем плотность температурного потока

$$\mathbf{F} = -a\nabla T \quad (6.5)$$

и запишем (6.1) в виде

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = 0. \quad (6.6)$$

Проинтегрируем (6.6) по произвольной двумерной области S_i :

$$\iint_{(S_i)} (\nabla \cdot \mathbf{F}) ds = 0; \quad S_i \in G \cup \Gamma.$$

Применив теперь теорему Остроградского – Гаусса, получим искомую интегральную форму

$$\oint_{(L_i)} (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}) dl = 0; \quad i = \overline{1, N}, \quad (6.7)$$

где \mathbf{n} – вектор единичной внешней нормали к контуру L_i , ограничивающему область S_i . Запись области определения интегрального тождества (6.7) означает, что область моделирования $G \cup \Gamma$ разбита на N элементарных ячеек, каждая из которых имеет площадь S_i с длиной ограничивающей линии L_i .

Интегральное тождество (6.7) справедливо, что очень важно, не только для всех точек области G , но и для всех точек границы Γ с неизвестной температурой T . Граничные условия (6.3), (6.4) учитываются в (6.7) путем задания соответствующей плотности температурного потока в точках границ Γ_2 и Γ_3 :

$$(\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}) = \alpha_2(x, y); \quad (x, y) \in \Gamma_2, \quad (6.8)$$

$$(\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}) = \alpha_3(T, x, y); \quad (x, y) \in \Gamma_3. \quad (6.9)$$

Таким образом, интегральная формулировка краевой задачи (6.1)÷(6.4) включает интегральное тождество (6.7), граничные условия (6.2), (6.8), (6.9).

Опишем теперь область решения задачи и ее границу. Будем полагать, что $\bar{G} = G \cup \Gamma$ – прямоугольная область:

$$\bar{G} = \{(x, y) | 0 \leq x \leq L_x; 0 \leq y \leq L_y\}.$$

Краевую задачу в произвольной области \bar{g} можно свести к краевой задаче в прямоугольной области \bar{G} , если вписать \bar{g} в \bar{G} и ввести функцию

$$\bar{T}(x, y) = \begin{cases} T(x, y); & (x, y) \in \bar{g}, \\ 0; & (x, y) \in \bar{G} \setminus \bar{g}. \end{cases} \quad (6.10)$$

В дальнейшем рассмотрим краевую задачу (6.7), (6.2), (6.8) в прямоугольной области \bar{G} в предположении однородности среды ($a = \text{const}$) с граничными условиями двух типов (рис. 6.1):

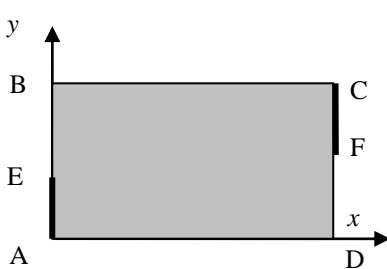


Рис. 6.1. Пример области

– в точках участков AE и CF границы Γ температура фиксирована, в частности

$$\begin{aligned} T(x, y) &= t_1; & (x, y) \in AE, \\ T(x, y) &= t_2; & (x, y) \in CF; \end{aligned} \quad (6.11)$$

– остальная часть границы теплоизолирована, т. е. через эти участки отсутствует передача тепла:

$$(\mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\eta}) = 0; \quad (x, y) \in BE \cup BC \cup DF \cup AD,$$

или

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_x &= 0; & (x, y) \in BE \cup DF; \\ \mathbf{F}_y &= 0; & (x, y) \in AD \cup BC, \end{aligned} \quad (6.12)$$

где $\mathbf{F}_x, \mathbf{F}_y$ – проекции вектора \mathbf{F} на оси x и y соответственно.

6.2. Построение сетки

Введем в $\overline{G} = G \cup \Gamma$ непрерывную, вообще говоря, неравномерную прямоугольную сетку (назовем ее основной)

$$\overline{\omega}_{hr} = \left\{ (x_i, y_j); \quad i = \overline{0, N_x}; j = \overline{0, N_y} \mid x_0 = 0; \quad x_{N_x} = L_x; \right. \\ \left. x_{i+1} = x_i + h_i; \quad y_0 = 0; \quad y_{N_y} = L_y; \quad y_{j+1} = y_j + r_j \right\}$$

таким образом, что сеточные линии $x = x_i$; $i = \overline{0, N_x}$ и линии $y = y_j$; $j = \overline{0, N_y}$ параллельны сторонам области \overline{G} . Здесь (x_i, y_j) – узел сетки, h_i, r_j – текущие шаги сетки по осям x и y соответственно.

Потребуем, чтобы все границы области совпадали с линиями сетки пространственной дискретизации. В дальнейшем узлы основной сетки будем нумеровать целыми числами k , причем $k = i + mj$, где i, j – номера сеточных линий, $m = N_x + 1$ – число узлов сетки вдоль оси x .

В узлах основной сетки определим сеточную функцию

$$T(x_i, y_j) = T_k; \quad k = \overline{0, N-1}; \quad N = (N_x + 1)(N_y + 1).$$

Наряду с основной сеткой построим вспомогательную сетку

$$\omega_{h+1/2, r+1/2} = \left\{ (x_{i+1/2}, y_{j+1/2}); \quad i = \overline{0, N_x - 1}; \quad j = \overline{0, N_y - 1} \right. \\ \left. \mid x_{i+1/2} = x_i + h_i/2; \quad y_{j+1/2} = y_j + r_j/2 \right\},$$

линии которой находятся на одинаковом расстоянии от двух соседних

линий основной сетки. Вспомогательная сетка разбивает

область \overline{G} на элементарные ячейки (ячейки алгебраизации)

S_k , $k = \overline{0, N-1}$, число которых N совпадает с числом узлов сетки пространственной дискретизации, т. е.

$$N = (N_x + 1)(N_y + 1).$$

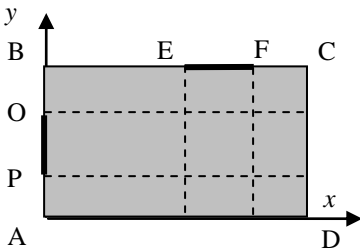


Рис. 6.2. Разбиение на подобласти

\overline{G}

выполнении лабораторного задания предлагается использовать постоянные по величине шаги вдоль координат x и y , вычисляемые,

Рекомендация 1. При

$$h = \frac{\min\{BE, EF, FC\}}{M}; \quad r = \frac{\min\{AP, PO, OB\}}{M}. \quad (6.13)$$

6.3. Разностная аппроксимация

Выполним разностную аппроксимацию краевой задачи (6.7), (6.11), (6.12) (используется интегральная форма) методом интегральных тождеств.

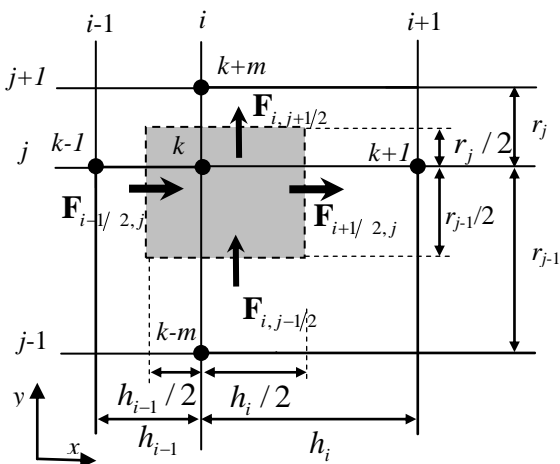


Рис.6.3. Ячейка алгебраизации интегрального тождества

Рассмотрим произвольный узел k , принадлежащий основной сетке (см. рис. 6.3). Раскроем для него интегральное тождество

$$\oint_{(L_i)} (\mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\eta}) dl = 0; \quad i = \overline{1, N}$$

на элементарной ячейке, ограниченной смежными линиями вспомогательной сетки. На рисунке линии основной сетки пронумерованы с использованием целых индексов i, j , линии вспомогательной сетки – с привлечением полуцелых индексов $i \pm \frac{1}{2}, j \pm \frac{1}{2}$.

Примем следующее допущение: плотность потока на стороне ячейки алгебраизации постоянна. При таком предположении интегральное тождество аппроксимируется простым соотношением:

$$(\mathbf{F}_{i+1/2, j} - \mathbf{F}_{i-1/2, j})(r_{j-1} + r_j) + (\mathbf{F}_{i, j+1/2} - \mathbf{F}_{i, j-1/2})(h_{i-1} + h_i) = 0.$$

Следующий шаг на пути алгебраизации интегрального тождества – аппроксимация на сетке плотности потока (6.5). Проинтегрируем x -ю составляющую плотности потока

$$\mathbf{F}_x = -a \frac{dT}{dx}$$

на отрезке $[x_i, x_{i+1}]$, полагая $y = y_j$, $\mathbf{F}_x(x, y_j) = \mathbf{F}_{i+1/2, j}$. Учитывая, что $a = \text{const}$, получим

$$\mathbf{F}_{i+1/2, j} = -a \frac{T_{k+1} - T_k}{h_i}.$$

Определив аналогичным образом плотности температурных потоков на остальных сторонах элементарной ячейки:

$$\mathbf{F}_{i-1/2, j} = -a \frac{T_k - T_{k-1}}{h_{i-1}}, \quad \mathbf{F}_{i, j-1/2} = -a \frac{T_k - T_{k-m}}{r_{j-1}},$$

$$\mathbf{F}_{i, j+1/2} = -a \frac{T_{k+m} - T_k}{r_j},$$

запишем аппроксимацию интегрального тождества для ячейки алгебраизации, содержащей внутренний узел k , в виде:

$$a_{k,k-m}T_{k-m} + a_{k,k-1}T_{k-1} + a_{k,k}T_k + a_{k,k+1}T_{k+1} + a_{k,k+m}T_{k+m} = 0, \quad (6.14)$$

где

$$\begin{aligned} a_{k,k-m} &= -\frac{a(h_{i-1} + h_i)}{2r_{j-1}}; \quad a_{k,k-1} = -\frac{a(r_{j-1} + r_j)}{2h_{i-1}}; \\ a_{k,k+1} &= -\frac{a(r_{j-1} + r_j)}{2h_i}; \quad a_{k,k+m} = -\frac{a(h_{i-1} + h_i)}{2r_j}; \\ a_{k,k} &= -(a_{k,k-m} + a_{k,k-1} + a_{k,k+1} + a_{k,k+m}). \end{aligned} \quad (6.15)$$

В соотношениях (6.14), (6.15) следует учесть, что в узлах границы Γ_2 , где имеют место условия (6.12), значения некоторых параметров дискретизации становятся равными нулю. В таких узлах являются нулевыми также и определенные коэффициенты разностной схемы.

Чтобы определиться с такими коэффициентами, рассмотрим область \bar{g} сложной формы, составленную из связанных прямоугольных фрагментов (см. рис. 6.4). Впишем ее в прямоугольную область \bar{G} так, чтобы участки границы области \bar{g} проходили по сеточным линиям прямоугольной сетки, построенной в \bar{G} .

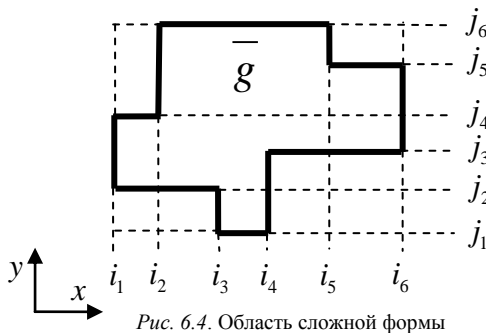


Рис. 6.4. Область сложной формы

На рисунке номера сеточных линий, совпадающих с участками

границы области \overline{g} , которые параллельны оси y , обозначены $i_1, i_2, i_3, i_4, i_5, i_6$; оси x — $j_1, j_2, j_3, j_4, j_5, j_6$.

Выделим характерные участки границы области \overline{g} , приведенной на рисунке, и скорректируем разностные соотношения (6.14), (6.15) для принадлежащих этим участкам узлов сетки:

1. $h_{i-1} = 0$ и $a_{k,k-1} = 0$ для узлов

$$\{i = i_1; j_2 \leq j \leq j_4\} \cup \{i = i_2; j_4 < j \leq j_6\} \cup \{i = i_3, j_1 \leq j < j_2\}.$$

2. $h_i = 0$ и $a_{k,k+1} = 0$ для узлов

$$\{i = i_4; j_1 \leq j < j_3\} \cup \{i = i_5; j_5 < j \leq j_6\} \cup \{i = i_6, j_3 \leq j \leq j_5\}.$$

3. $r_{j-1} = 0$ и $a_{k,k-m} = 0$ для узлов

$$\{j = j_1; i_3 \leq i \leq i_4\} \cup \{j = j_2; i_1 \leq i < i_3\} \cup \{j = j_3, i_4 < i \leq i_6\}.$$

4. $r_j = 0$ и $a_{k,k+m} = 0$ для узлов

$$\{j = j_4; i_1 \leq i < i_2\} \cup \{j = j_5; i_5 < i \leq i_6\} \cup \{j = j_6, i_2 \leq i \leq i_5\}.$$

Остались неохваченными перечисленными корректировками четыре граничных узла области $\overline{g} : (i_2, j_4); (i_3, j_2); (i_4, j_3); (i_5, j_5)$. Разностные уравнения для этих узлов сохраняют пятидиагональный вид. Подлежат корректировке только расчетные соотношения для отдельных коэффициентов, в частности:

$$\text{узел } (i_2, j_4): r_j = 0 \text{ в } a_{k,k-1}, h_{i-1} = 0 \text{ в } a_{k,k+m};$$

$$\text{узел } (i_3, j_2): r_{j-1} = 0 \text{ в } a_{k,k-1}, h_{i-1} = 0 \text{ в } a_{k,k-m};$$

$$\text{узел } (i_4, j_3): r_{j-1} = 0 \text{ в } a_{k,k+1}, h_i = 0 \text{ в } a_{k,k-m};$$

$$\text{узел } (i_5, j_5): r_j = 0 \text{ в } a_{k,k+1}, h_i = 0 \text{ в } a_{k,k+m}.$$

Рассмотрим узлы сетки с заданной температурой. К таким узлам относятся узлы границы области \overline{g} , в которых имеют место граничные условия $T(x, y) = t_1$; $T(x, y) = t_2$ и фиктивные узлы,

принадлежащие области $\overline{G/g}$, в которых $T(x, y) = 0$. Коэффициенты разностных уравнений (6.14) для таких узлов:

$$a_{k,k-m} = a_{k,k-1} = a_{k,k+1} = a_{k,k+m} = 0; \quad a_{k,k} = 1.$$

Правая часть b_k обсуждаемых уравнений становится отличной от нуля (принимает значение соответствующей температуры).

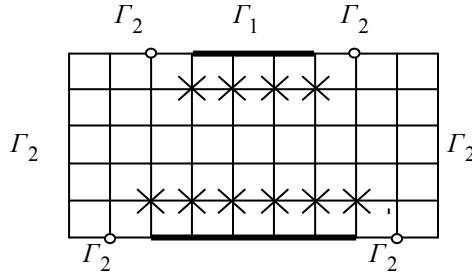


Рис. 6.5. Приграничные к контактам узлы

И последнее, если внутренний узел расположен по соседству с узлом границы Γ_1 , то для такого узла число неизвестных в разностном уравнении (6.15) после того, как были совершены корректирующие действия, становится меньшим еще на единицу. Это обусловлено тем, что слагаемое с известной температурой переносится в правую часть, корректируя таким образом значение для него b_k . Иллюстрацией к сказанному является рис.6.5, на котором выделены крестиками все внутренние узлы, порождающие разностные уравнения с четырьмя неизвестными. Кружочками на этом рисунке обозначены узлы границы Γ_2 , которым соответствуют разностные уравнения, содержащие три неизвестные температуры.

6.4. Метод решения

С вычислительной точки зрения разностная схема (6.14), (6.15) с описанными корректировками является системой линейных алгебраических уравнений

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b},$$

с пятидиагональной $[N \times N]$ - матрицей \mathbf{A} .

Нетрудно убедиться, что коэффициенты матрицы \mathbf{A} обладают следующими свойствами:

$$a_{k,k} > 0; \quad a_{k,j} \leq 0, \quad k \neq j;$$

$$a_{k,k} = - \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{N-1} a_{k,j};$$

$$a_{k,j} = a_{j,k}.$$

Эти свойства означают, что матрица разностной схемы является симметричной, положительно определенной с диагональным преобладанием. Перечисленные свойства обеспечивают высокую эффективность как прямых, так и итерационных методов ее решения.

Решение разностной схемы (6.14), (6.15) в лабораторной работе осуществляется достаточно простым и часто используемым на практике методом последовательной верхней релаксации (ПВР). При реализации любого итерационного метода, в частности метода последовательной верхней релаксации, необходимо хранить только ненулевые элементы матрицы \mathbf{A} . Диагональная разреженность матрицы \mathbf{A} позволяет хранить ее ненулевые элементы в пяти одномерных массивах, а свойство симметричности матрицы дает возможность сократить число таких одномерных массивов до трех.

Будем хранить элементы центральной диагонали в одномерном массиве D , верхней, соседней с центральной диагональю, – в массиве B , верхней, отстоящей на величину m от центральной диагонали, – в массиве C . Запишем разностную схему (6.14), (6.15) в терминах элементов одномерных массивов:

$$\begin{aligned} C_{k-m} T_{k-m} + B_{k-1} T_{k-1} + D_k T_k + B_k T_{k+1} + C_k T_{k+m} &= b_k; \quad k = \overline{0, N-1}; \\ C_{k-m} &= a_{k,k-m}; \quad B_{k-1} = a_{k,k-1}; \quad B_k = a_{k,k+1}; \quad C_k = a_{k,k+m}; \\ D_k &= -(C_{k-m} + B_{k-1} + B_k + C_k); \end{aligned} \quad (6.16)$$

Метод последовательной верхней релаксации применительно к (6.16) выглядит следующим образом:

$$T_k^{l+1} = T_k^l + \lambda(\bar{T}_k^{l+1} - T_k^l), \quad (6.17)$$

где l – номер ПВР-итерации ($l = 0, 1, 2, \dots$ до получения решения с требуемой точностью), λ – параметр релаксации ($1 < \lambda < 2$), \bar{T}_k^{l+1} – значение температуры в k -ом узле, вычисленное на итерации методом Гаусса – Зейделя:

$$\bar{T}_k^{l+1} = \begin{cases} (b_k - B_k T_{k+1}^l - C_k T_{k+m}^l) / D_k; & k = 0; \\ (b_k - B_{k-1} T_{k-1}^{l+1} - B_k T_{k+1}^l - C_k T_{k+m}^l) / D_k; & k = \overline{1, m-1}; \\ (b_k - C_{k-m} T_{k-m}^{l+1} - B_{k-1} T_{k-1}^{l+1} - B_k T_{k+1}^l - C_k T_{k+m}^l) / D_k; \\ & k = \overline{m, N-m-1}; \\ (b_k - C_{k-m} T_{k-m}^{l+1} - B_{k-1} T_{k-1}^{l+1} - B_k T_{k+1}^l) / D_k; \\ & k = \overline{N-m, N-2}; \\ (b_k - C_{k-m} T_{k-m}^{l+1} - B_{k-1} T_{k-1}^{l+1}) / D_k; & k = N-1. \end{cases} \quad (6.18)$$

Реализация ПВР-итерации сводится к последовательному обходу узлов с неизвестной температурой $T(x, y)$, уточнению в каждом из них температуры согласно (6.17), (6.18).

Учтем теперь особенности решаемой краевой задачи, которые позволят упростить реализацию ПВР-метода.

Во-первых, принятое ранее соглашение о постоянстве шагов сетки пространственной дискретизации, неизменность теплопроводности среды дают возможность отказаться от формирования и хранения матрицы коэффициентов решаемой системы, т. к. значения коэффициентов вычисляются однократно.

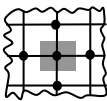
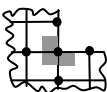
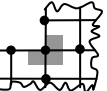
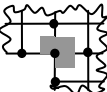
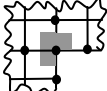
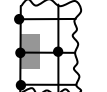
Во-вторых, в этих условиях отпадает целесообразность одномерной индексации диагональных элементов матрицы \mathbf{A} и, следовательно, сеточной функции – температуры в узлах сетки. Температуру проще представить матрицей, элементами которой являются температуры в соответствующих узлах прямоугольной сетки: $T_{i,j} = T(x_i, y_j)$.


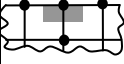
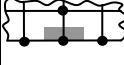




В-третьих, следует отказаться также от переноса членов с известной температурой в правую часть разностного уравнения (просто эти члены остаются неизменными на протяжении всех итераций ПВР-метода).

Рассмотрим возможные варианты разностных уравнений для области сложной формы, изображенной на рис. 6.4, и расчетные соотношения для коэффициентов разностных уравнений (табл. 6.1).

Таблица 6.1

Узлы сетки и разностные уравнения

№ п/п	Вариан- ты	Разностные уравнения	Коэффициенты
1		$\alpha_1 T_{i,j-1} + \alpha_2 T_{i-1,j} + \alpha_2 T_{i+1,j} +$ $+ \alpha_1 T_{i,j+1} + \gamma_1 T_{i,j} = 0$	$\alpha_1 = -h/r;$ $\alpha_2 = -r/h;$ $\gamma_1 = -2(\alpha_1 + \alpha_2)$
2		$\alpha_1 T_{i,j-1} + \alpha_2 T_{i-1,j} + \alpha_3 T_{i+1,j} +$ $+ \alpha_4 T_{i,j+1} + \gamma_2 T_{i,j} = 0$	$\alpha_3 = \alpha_2/2;$ $\alpha_4 = \alpha_1/2;$ $\gamma_2 = -1,5(\alpha_1 + \alpha_2)$
3		$\alpha_1 T_{i,j-1} + \alpha_3 T_{i-1,j} + \alpha_2 T_{i+1,j} +$ $+ \alpha_4 T_{i,j+1} + \gamma_2 T_{i,j} = 0$	
4		$\alpha_4 T_{i,j-1} + \alpha_3 T_{i-1,j} + \alpha_2 T_{i+1,j} +$ $+ \alpha_1 T_{i,j+1} + \gamma_2 T_{i,j} = 0$	
5		$\alpha_4 T_{i,j-1} + \alpha_2 T_{i-1,j} + \alpha_3 T_{i+1,j} +$ $+ \alpha_1 T_{i,j+1} + \gamma_2 T_{i,j} = 0$	
6		$\alpha_4 T_{i,j-1} + \alpha_2 T_{i+1,j} + \alpha_4 T_{i,j+1} +$ $+ \gamma_3 T_{i,j} = 0$	$\gamma_3 = -(\alpha_1 + \alpha_2)$

7		$\alpha_4 T_{i,j-1} + \alpha_2 T_{i-1,j} + \alpha_4 T_{i,j+1} + \gamma_3 T_{i,j} = 0$	
8		$\alpha_3 T_{i-1,j} + \alpha_3 T_{i+1,j} + \alpha_1 T_{i,j-1} + \gamma_3 T_{i,j} = 0$	
9		$\alpha_3 T_{i-1,j} + \alpha_3 T_{i+1,j} + \alpha_1 T_{i,j+1} + \gamma_3 T_{i,j} = 0$	
10		$\alpha_4 T_{i,j-1} + \alpha_3 T_{i+1,j} + \gamma_4 T_{i,j} = 0$	
11		$\alpha_4 T_{i,j-1} + \alpha_3 T_{i-1,j} + \gamma_4 T_{i,j} = 0$	
12		$\alpha_3 T_{i+1,j} + \alpha_4 T_{i,j+1} + \gamma_4 T_{i,j} = 0$	
13		$\alpha_3 T_{i-1,j} + \alpha_4 T_{i,j+1} + \gamma_4 T_{i,j} = 0$	$\gamma_4 = -(\alpha_3 + \alpha_4)$

Вариант № 1 в табл. 6.1 соответствует случаю, когда (i, j) – внутренний узел области \bar{g} . Ячейка алгебраизации рассматриваемой краевой задачи для внутренних узлов (выделена в таблице темным цветом) принадлежит четырем квадрантам пятиточечного шаблона. Разностное уравнение для внутреннего узла

$$\alpha_1 T_{i,j-1} + \alpha_2 T_{i-1,j} + \alpha_2 T_{i+1,j} + \alpha_1 T_{i,j+1} + \gamma_1 T_{i,j} = 0,$$

где

$$\alpha_1 = -\frac{h}{r}; \quad \alpha_2 = -\frac{r}{h}; \quad \gamma_1 = -2(\alpha_1 + \alpha_2),$$

содержит три однократно вычисляемых коэффициента $\alpha_1, \alpha_2, \gamma_1$.

Ячейка алгебраизации следующих четырех вариантов разностной аппроксимации краевой задачи (варианты 2÷5) включает три квадранта пятиточечного шаблона. Такая ячейка алгебраизации характерна для внутренних вершин \bar{g} n -угольной области. Разностная схема в этих случаях содержит 5 температур в узлах пятиточечного шаблона. Коэффициентами разностной схемы, наряду с α_1, α_2 , выступают однократно вычисляемые коэффициенты $\alpha_3, \alpha_4, \gamma_2$.

Обратимся к вариантам 6÷9, в ячейку алгебраизации которых входят два квадранта четырехточечного шаблона. Эти варианты соответствуют точкам, принадлежащим границе. Разностная схема для них содержит четыре температуры, при этом вновь вычисляемым коэффициентом является только γ_3 . Другие коэффициенты – это $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$.

Наконец, в вариантах 10÷13, характерных для вершин внешних углов n -угольной области \bar{g} , ячейка алгебраизации включает один квадрант трехточечного шаблона, а разностная схема – линейное уравнение с тремя неизвестными, однократно вычисляемым коэффициентом которого есть γ_4 .

Таким образом, для n -угольной области \bar{g} сложной формы на прямоугольной сетке имеется не более 12 различных граничных конфигураций, при этом однократно вычисляемых коэффициентов – всего лишь 8, три из которых – однократно вычисляемые коэффициенты разностных уравнений для внутренних узлов.

Метод последовательной верхней релаксации теперь реализуется так:

$$T_{i,j}^{k+1} = T_{i,j}^k + \lambda(\bar{T}_{i,j}^{k+1} - T_{i,j}^k),$$

где

$\bar{T}_{i,j}^{k+1}$ – значение температуры в (i, j) -узле, вычисленное на k -ой итерации методом Гаусса – Зейделя. Расчетное соотношение для $\bar{T}_{i,j}^{k+1}$ в узле сетки пространственной дискретизации краевой задачи легко записать из соответствующего разностного уравнения. Например, во

внутреннем узле

$$\bar{T}_{i,j}^{k+1} = -(\alpha_1 T_{i,j-1}^{k+1} + \alpha_2 T_{i-1,j}^{k+1} + \alpha_2 T_{i+1,j}^k + \alpha_1 T_{i,j+1}^k) / \gamma_1.$$

Реализация одной ПВР-итерации сводится к последовательному обходу узлов сетки пространственной дискретизации, уточнению в каждом из них температуры.

Выход из итерационного процесса можно организовать так:

$$\max_{i,j} \frac{|T_{i,j}^{k+1} - T_{i,j}^k|}{|T_{i,j}^{k+1}|} \leq \varepsilon,$$

где ε – допустимая относительная погрешность решения. Наряду с этим следует предусмотреть выход из итерационного процесса по количеству допустимых итераций, исключая заикливание в случае неудачного задания ε .

6.5. Задание

1. Реализовать на языке высокого уровня программу расчета распределения температуры в n -угольной области \bar{g} (см. пример в п. 6.5), форма которой конкретизируется преподавателем с помощью рисунка 6.6 и данных таблицы 6.2.

На контакте K1 области \bar{g} фиксирована температура T1, на контакте K2 – температура T2. Область заполнена однородным материалом с температуропроводностью a . Границы области, свободные от контактов, теплоизолированы, т.е. через эти участки отсутствует передача тепла.

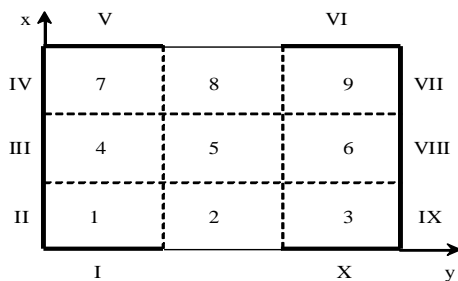


Рис. 6.6. Прямоугольная область

Таблица 6.2.

Определение формы моделируемой области

Номер варианта	Исключаемые сегменты
1	8
2	2
3	5, 8
4	2, 5
5	2, 8
6	2, 3, 6
7	6, 8, 9
8	4, 7, 8
9	1, 2, 4
10	4
11	4, 5
12	6
13	5, 6
14	4, 6

Прямоугольная область \bar{G} на рис. 6.6 состоит из 9 одинаковых сегментов, которые пронумерованы арабскими цифрами 1÷9. Римскими цифрами I ÷ V обозначены отрезки, образующие контакт K1, цифрами VI ÷ X – контакт K2. Форма конкретного варианта области \bar{g} определяется исключением из области \bar{G} сегментов, номера которых приведены во втором столбце табл. 6.2., а форма контактов K1 и K2 задается с помощью табл. 6.3 (посредством перечисления входящих в контакты отрезков).

Таким образом, конкретный вариант области \bar{g} и ее границ, в точках которых температура фиксирована, идентифицируется так: n1.n2.n3 (задается преподавателем), где n1 – номер варианта из табл. 6.2, n2 – номер варианта для K1, а n3 – номер варианта для K2 из табл. 6.3.

Таблица 6.3.

Задание контактов

Контакт К1		Контакт К2	
Номер варианта	Используемые отрезки	Номер варианта	Используемые отрезки
1	1	1	6
2	1, 2	2	6, 7
3	1, 2, 3	3	6, 7, 8
4	1, 2, 3, 4	4	6, 7, 8, 9
5	1, 2, 3, 4, 5	5	6, 7, 8, 9, 10
6	2, 3, 4, 5	6	7, 8, 9, 10
7	3, 4, 5	7	8, 9, 10
8	4, 5	8	9, 10
9	5	9	10

2. Рассчитать (с одинарной значностью) и вывести на экран распределение температуры в области \bar{g} при следующих значениях исходных данных:

$$h = 0,2; \quad r = 0,3; \quad NXB = 15; \quad NYB = 12;$$

$$\lambda = 1,7; \quad REP = 3000; \quad \varepsilon = 0,0001;$$

$$T1 = 5,0; \quad T2 = 15,0,$$

где λ – параметр релаксации ПВР-метода, REP – максимально допустимое число итераций, ε – требуемая точность решения, $T1$, $T2$ – температуры контактов.

3. Исследовать сходимость ПВР-метода, выполнив расчеты (с одинарной значностью) при значениях параметра релаксации $\lambda = 1,5; 1,7; 1,9$, используя при этом исходные данные п. 2. Результаты расчета отразить в таблице, содержащей число выполненных итераций и соответствующее значение параметра релаксации.

3. Исследовать достигаемую точность ПВР-метода при выполнении расчета с удвоенной значностью. Для этого выполнить расчет с $\varepsilon = 10^{-16}$ и другими исходными данными, перечисленными в п. 2. Вывести на экран относительное изменение температуры на итерациях ПВР-метода.

6.6. Пример выполнения задания

Рассмотрим основные этапы выполнения лабораторной работы на конкретном примере. Интересующая нас область \bar{g} (см. рис. 6.7) является подмножеством области \bar{G} (см. рис. 6.6.) и для рассматриваемого примера ее можно получить путем исключения из области \bar{G} сегментов 4,5,7,8. Контакт K1 в этом примере, его температура T1, образован отрезком II, а контакт K2, его температура T2, – отрезком VI.

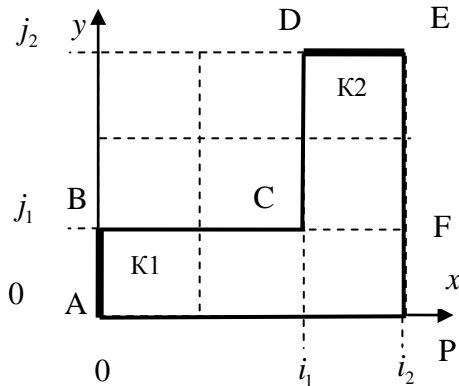


Рис. 6.7. Область \bar{g}

Построение сетки. Будем использовать равномерную сетку по каждой из координатных осей. Пусть h и r – шаги сетки пространственной дискретизации прямоугольной области \bar{G} , NXB и NYB – количество шагов сетки, приходящееся на сторону сегмента по оси x и y соответственно.

Тогда полное количество узлов сетки вдоль оси x :

$$NX = 3 * NXB + 1,$$

вдоль оси y :

$$NY = 3 * NYB + 1,$$

во всей прямоугольной области \bar{G} :

$$N = NX * NY.$$

Разбиение на подмножества. Множество узлов сетки, принадлежащих области \bar{g} , разобьем на подмножества, в каждом из которых разностное уравнение тепловой задачи для всех узлов подмножества имеет один и тот же вид.

Обозначим (i,j) -узлы, соответствующие вершинам области \bar{g} , так:

$$(0;0), (0;j_1), (i_1;j_1), (i_1;j_2), (i_2;j_2), (i_2;0),$$

где

$$i_1 = NXB + NXB; \quad i_2 = i_1 + NXB; \quad j_1 = NYB; \quad j_2 = 3 * NYB.$$

Искомые подмножества узлов определим, привлекая значения индексов вершин шестиугольной области \bar{g} :

1. $[A;B]: \{i = 0; 0 \leq j \leq j_1\};$
2. $[D;E]: \{i_1 \leq i \leq i_2; j = j_2\};$
3. $(A;P): \{0 < i < i_2; j = 0\};$
4. $P : \{i = i_2; j = 0\};$
5. $(EP) : \{i = i_2; 0 < j < j_2\};$
6. $(BC) : \{0 < i < i_1; j = j_1\};$
7. $C : \{i = i_1; j = j_1\};$
8. $(DC) : \{i = i_1; j_1 < j < j_2\};$
9. $(ABFP) : \{0 < i < i_2; 0 < j < j_1\};$
10. $(CDEP): \{i_1 < i < i_2; j_1 \leq j < j_2\}.$

Итерация Гаусса-Зейделя. Выберем из таблицы 6.1 для перечисленных подмножеств разностные уравнения и запишем их в форме итерации Гаусса-Зейделя на k -ой итерации ПВР-метода:

1. $T_{ij} = T1; \quad (i,j) \in \{i = 0; 0 \leq j \leq j_1\};$
2. $T_{ij} = T2; \quad (i,j) \in \{i_1 \leq i \leq i_2; j = j_2\};$
3. $\bar{T}_{ij}^{k+1} = -(\alpha_3 T_{i-1,j}^{k+1} + \alpha_3 T_{i+1,j}^k + \alpha_1 T_{i,j+1}^k) / \gamma_3;$
 $(i,j) \in \{0 < i < i_2; j = 0\};$
4. $\bar{T}_{ij}^{k+1} = -(\alpha_3 T_{i-1,j}^{k+1} + \alpha_4 T_{i,j+1}^k) / \gamma_4;$
 $(i,j) \in \{i = i_2; j = 0\};$

5. $\bar{T}_{ij}^{k+1} = -(\alpha_4 T_{i,j-1}^{k+1} + \alpha_2 T_{i-1,j}^{k+1} + \alpha_4 T_{i,j+1}^k) / \gamma_3;$
 $(i, j) \in \{i = i_2; \quad 0 < j < j_2\};$
6. $\bar{T}_{ij}^{k+1} = -(\alpha_3 T_{i-1,j}^{k+1} + \alpha_3 T_{i+1,j}^k + \alpha_1 T_{i,j+1}^{k+1}) / \gamma_3;$
 $(i, j) \in \{0 < i < i_1; \quad j = j_1\};$
7. $\bar{T}_{ij}^{k+1} = -(\alpha_1 T_{i,j-1}^{k+1} + \alpha_3 T_{i-1,j}^{k+1} + \alpha_2 T_{i+1,j}^k + \alpha_4 T_{i,j+1}^k) / \gamma_2;$
 $(i, j) \in \{i = i_1; \quad j = j_1\};$
8. $\bar{T}_{ij}^{k+1} = -(\alpha_4 T_{i,j-1}^{k+1} + \alpha_2 T_{i+1,j}^k + \alpha_4 T_{i,j+1}^k) / \gamma_3;$
 $(i, j) \in \{i = i_1; \quad j_1 < j < j_2\};$
9. $\bar{T}_{ij}^{k+1} = -(\alpha_1 T_{i,j-1}^{k+1} + \alpha_2 T_{i-1,j}^{k+1} + \alpha_2 T_{i+1,j}^k + \alpha_1 T_{i,j+1}^k) / \gamma_1;$
 $(i, j) \in \{0 < i < i_2; \quad 0 < j < j_1\};$
10. $\bar{T}_{ij}^{k+1} = -(\alpha_1 T_{i,j-1}^{k+1} + \alpha_2 T_{i-1,j}^{k+1} + \alpha_2 T_{i+1,j}^k + \alpha_1 T_{i,j+1}^k) / \gamma_1;$
 $(i, j) \in \{i_1 < i < i_2; \quad j_1 \leq j < j_2\}.$

Первые два подмножества соответствуют контактам K1 и K2. Температура на контактах остается постоянной на итерациях ПВР-метода. По этой причине сеточная функция, описывающая температуру в узлах, принадлежащих контакту, не зависит от номера ПВР-итерации.

Организация ПВР-процесса. Разностная схема – совокупность разностных уравнений для узлов прямоугольной области \bar{G} – решается ПВР-методом. Полагаем, что сетка построена и вычислены все сеточные параметры. Для реализации ПВР-процесса необходимо задать начальное приближение, в нашем случае нулевую температуру во всех (i, j) -узлах:

$$T_{ij} = 0; \quad i = \overline{0, NX}; \quad j = \overline{0, NY},$$

и присвоить значения температур T1 и T2 узлам, принадлежащим контактам K1 и K2:

$$T_{ij} = T1; \quad (i, j) \in \{i = 0; \quad 0 \leq j \leq j_1\};$$

$$T_{ij} = T2; \quad (i, j) \in \{i_1 \leq i \leq i_2; \quad j = j_2\}.$$

Кроме того, следует однократно вычислить коэффициенты разностных уравнений: $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ и задать исходные значения используемых итерационных параметров.

Дальнейшие вычисления осуществляются в тройном (k, i, j) -цикле. Здесь k – номер ПВР-итерации, i, j – индексы узлов. На итерациях метода последовательной верхней релаксации осуществляется обход узлов области \bar{G} , в процессе которого уточняется температура только в узлах области \bar{g} (температура в фиктивных узлах и контактах при этом не изменяется).

Приведем вычисления, которые выполняются на k -ой ПВР-итерации в (i, j) -узле:

$$\begin{aligned} 1. \Delta T_{ij}^k &= \lambda(\bar{T}_{ij}^{k+1} - T_{ij}^k); \\ 2. T_{ij}^{k+1} &= T_{ij}^k + \Delta T_{ij}^k, \end{aligned}$$

где \bar{T}_{ij}^{k+1} – значение температуры, найденное из соотношений итерации Гаусса-Зейделя (см. выше). Здесь также рассчитывается величина относительного изменения температуры в узле:

$$\delta_{ij} = \frac{|\Delta T_{ij}^k|}{|T_{ij}^{k+1}|}$$

и определяется наибольшее (на множестве рассмотренных узлов) относительное изменение температуры. После обхода всех узлов сетки пространственной дискретизации задачи

$$\max \delta = \max_{\substack{0 \leq i \leq NX-1 \\ 0 \leq j \leq NY-1}} \delta_{ij}.$$

Именно это значение используется при проверке условия выхода из цикла ($\max \delta$ сравнивается с требуемой точностью ε).

Если цикл ПВР закончен, сохраняются в соответствующих файлах данные, используемые при построении распределения температуры в области \bar{G} , графика относительного изменения температуры на итерациях ПВР-метода.

Программа, решающая эту задачу, приведена ниже. Она разработана на языке C++ в рамках среды разработки Visual Studio. Цифры в скобках используются для ссылки на соответствующую строку.

В процессе своей работы программа создает на диске C в каталоге "work" 4 файла, которые используются для графического отображения результатов расчетов с помощью системы MATLAB.

(1)	#include <stdlib.h>
(2)	#include <math.h>
(3)	#include <fstream>
(4)	#define PRES double
(5)	#define NXB 15
(6)	#define NX NXB*3+1
(7)	#define NYB 12
(8)	#define NY NYB*3+1
(9)	#define REP 3000
(10)	#define EPSL 1.e-5
(11)	#define LL 1.7f
(12)	#define TEM1 5.0f
(13)	#define TEM2 15.0f
(14)	#define HX 0.2f
(15)	#define HY 0.3f
(16)	using namespace std;
(17)	void maxpvr(PRES *t1, PRES *del, PRES *maxdel)
(18)	{
(19)	PRES d = fabs(*del)/fabs(*t1);
(20)	if (d > *maxdel) *maxdel = d;
(21)	}
(22)	int main(int argc, char **argv)
(23)	{
(24)	ofstream foutT("c:/work/dT.dat",ios_base::out ios_base::trunc
(25)	ios_base::binary);
(26)	int i1, i2, j1, j2, rp, i, j, k=0;
(27)	PRES T1=TEM1, T2=TEM2, h=HX, r=HY, tx, t0, t1, del,
(28)	maxdel=0.0f;
(29)	PRES T[NY][NX];
(30)	PRES lam = LL;
(31)	PRES eps = EPSL;
(32)	int prz = 1;

```

(33) int nT = 0;
(34) PRES alf_1 = - h/r;
(35) PRES alf_2 = - r/h;
(36) PRES alf_3 = alf_2*0.5f;
(37) PRES alf_4 = alf_1*0.5f;
(38) PRES gam_1 = - 2.f * (alf_1 + alf_2);
(39) PRES gam_2 = - 1.5f * (alf_1 + alf_2);
(40) PRES gam_3 = - (alf_1 + alf_2);
(41) PRES gam_4 = - (alf_3 + alf_4);
(42) i1 = NXB + NXB; i2 = i1 + NXB;
(43) j1 = NYB; j2 = NYB * 3; rp = REP;
(44) for (j=0; j<=j2; j++) {
(45)   for (i=0; i<=i2; i++) { T[j][i] = 0.0f; } }
(46)   for (j=0; j<=j1; j++) T[j][0] = T1;
(47)   for (i=i1; i<=i2; i++) T[j2][i] = T2;
(48)   while ( k<rp && prz==1) {
(49)     k++;
(50)     for (j=0; j<j2; j++) {
(51)       for (i=1; i<=i2; i++) {
(52)         t0 = T[j][i];
(53)         if (i>=0 && i<i2 && j==0) {
(54)           tx = - (alf_3*(T[j][i-1]+T[j][i+1]) + alf_1*T[j+1][i])/gam_3;
(55)           del = lam * (tx - t0); t1 = t0 + del; T[j][i] = t1;
(56)           maxpvr(&t1, &del, &maxdel);}
(57)         else if (i==i2 && j==0) {
(58)           tx = - (alf_3*T[j][i-1] + alf_4*T[j+1][i])/gam_4;
(59)           del = lam * (tx - t0); t1 = t0 + del; T[j][i] = t1;
(60)           maxpvr(&t1, &del, &maxdel);}
(61)         else if (i==i2 && j>0 && j<j2) {
(62)           tx = - (alf_4*(T[j-1][i]+T[j+1][i]) + alf_2*T[j][i-1])/gam_3;
(63)           del = lam * (tx - t0); t1 = t0 + del; T[j][i] = t1;
(64)           maxpvr(&t1, &del, &maxdel);}
(65)         if (i>0 && i<i1 && j==j1) {
(66)           tx = - (alf_3*(T[j][i-1]+T[j][i+1]) + alf_1*T[j-1][i])/gam_3;
(67)           del = lam * (tx - t0); t1 = t0 + del; T[j][i] = t1;
(68)           maxpvr(&t1, &del, &maxdel);}
(69)         else if (i==i1 && j==j1) {
(70)           tx = - (alf_3*T[j][i-1] + alf_4*T[j+1][i] + alf_2*T[j][i+1] + alf_1*T[j-
(71)             1][i])/gam_2;
(72)           del = lam * (tx - t0); t1 = t0 + del; T[j][i] = t1;

```

```

(73) maxpvr(&t1, &del, &maxdel);}
(74) else if (i==i1 && j>j1 && j<j2) {
(75) tx = - (alf_4*(T[j-1][i]+T[j+1][i]) + alf_2*T[j][i+1])/gam_3;
(76) del = lam * (tx - t0); t1 = t0 + del; T[j][i] = t1;
(77) maxpvr(&t1, &del, &maxdel);}
(78) else if (i>0 && i<i2 && j>0 && j<j1) {
(79) tx = - (alf_1*(T[j-1][i]+T[j+1][i]) + alf_2*(T[j][i-1]+T[j][i+1]))
(80) /gam_1;
(81) del = lam * (tx - t0); t1 = t0 + del; T[j][i] = t1;
(82) maxpvr(&t1, &del, &maxdel);}
(83) else if (i>i1 && i<i2 && j>j1-1 && j<j2) {
(84) tx = - (alf_1*(T[j-1][i]+T[j+1][i]) + alf_2*(T[j][i-1]+T[j][i+1]))
(85) /gam_1;
(86) del = lam * (tx - t0); t1 = t0 + del; T[j][i] = t1;
(87) maxpvr(&t1, &del, &maxdel); } }
(88) nT++; PRES w = maxdel;
(89) foutT.write((char*)&w, sizeof w);
(90) if (maxdel < eps) prz = 0; maxdel = 0.0f; }
(91) foutT.close();
(92) ofstream fouT("c:/work/nT.dat",ios_base::out | ios_base::trunc |
(93) ios_base::binary);
(94) fouT.write((char*)&nT, sizeof nT);
(95) fouT.close(); // закрываем файл
(96) ofstream fout("c:/work/Pole.dat",ios_base::out | ios_base::trunc
(97) | ios_base::binary);
(98) for (j = 0; j < NY; j++) {
(99)     for (i = 0; i < NX; i++) { PRES w = T[j][i];
(100)         fout.write((char*)&w, sizeof w); } }
(101) fout.close();
(102) int n_x = NX; int n_y = NY;
(103) ofstream fou("c:/work/Param.dat",ios_base::out |
(104) ios_base::trunc | ios_base::binary);
(105) fou.write((char*)&n_x, sizeof n_x);
(106) fou.write((char*)&n_y, sizeof n_y);
(107) fou.close();
(108) }

```

Комментарии к программе. Строки (1 - 3) описывают подключение библиотек, используемых программой. Строка (4) указывает, что все переменные с плавающей точкой имеют тип

“double”. Строки (5 - 15) дают полное описание исходных данных задачи: строка (5) – число шагов сетки по оси X в одном сегменте, (6) – число узлов сетки по оси X во всей структуре, (7, 8) – аналогично по оси Y, (9) – максимальное число ПВР-итераций, (10) – точность решения задачи, (11) – итерационный параметр, (12) – температура контакта K1, (13) – температура контакта K2, (14, 15) – шаги сетки. Строка (16) – открывает пространство стандартных имен библиотеки iostream.

Строки (17 - 21) – функция, выполняющая расчет максимального относительного изменения температуры на текущей итерации ПВР-метода.

Далее следует функция “main”. Ее начало – строки (22, 23), окончание – строка (108). Объект “fout” (строки 24, 25) выполняет запись на диск файла “dT.dat”. Рабочие переменные определены в строках (26 – 28). Двумерный массив “T” (строка 29) содержит искомое распределение, переменная “lam” (30) – итерационный параметр λ , “eps” (31) – точность решения СЛАУ, “prz” (32) – условие окончания ПВР-итераций, “nT” (33) – число итераций ПВР. Строки (34 – 41) – коэффициенты, используемые на итерациях ПВР.

Строки (44,45) – обнуляется массив температур, затем в него заносятся температуры контактов (строки 46, 47).

Строкой (48) начинается основной цикл ПВР. Каждый проход цикла выполняется, если число итераций меньше максимально допустимого числа и не достигнута требуемая точность.

Строками (50, 51) начинается обход узлов двумерной разностной сетки. Строки (53 – 56) – блок обработки узлов сетки, находящихся внутри отрезка AP. Точка A здесь исключается, т. к. температура в ней известна, точка P обрабатывается индивидуально. Строка (55): del – поправка температуры, t1 – новое значение температуры. Строка (56) – расчет максимальной относительной поправки температуры. Строки (57 - 60) – обработка точки P, строки (61 - 64) – обработка внутренней части отрезка EP, строки (65 - 68) – обработка внутренней части отрезка BC, строки (69 - 73) – обработка точки C, строки (74 - 77) – обработка внутренней части отрезка CD, строки (78 - 82) – обработка внутренней части прямоугольника ABFP, строки (83 - 87) – обработка внутренней части прямоугольника CDEF, включая внутреннюю часть отрезка CF.

После завершения обхода всех точек области в файл “dT.dat” дописывается текущая максимальная относительная поправка температуры (строка 89), проверяется условие выхода из цикла

(строка 90). Если цикл ПВР закончен, закрывается файл “dT.dat” (строка 91), в файл “nT.dat” записывается число итераций ПВР (строки 92 - 95), в файл “Pole.dat” записывается распределение температуры (строки 96 - 101), в файл “Param.dat” записывается размерность разностной сетки (строки 102 - 107).

Для вывода на экран трехмерного распределение температуры используется script-файл “Ris_2D.m”:

```
clc
clear all
Precision = 'double';
fidp = fopen('c:/work/Param.dat', 'r', 'l');
if (fidp == -1)
    disp('File "Param.dat" not found');
    return;
end
datap = fread(fidp, 2, 'int');
fclose(fidp);
NX = datap(1);
NY = datap(2);
Size = [NX NY];
fid = fopen('c:/work/Pole.dat', 'r', 'l');
if (fid == -1)
    disp('File "Pole.dat" not found');
    return;
end
U = fread(fid, Size, Precision);
SizeS = size(U);
x=1:NX;
y=1:NY;
[yy, xx] = meshgrid(y,x);
surf(xx, yy, U)
xlabel('X')
ylabel('Y')
zlabel('U')
fclose(fid);
```

Для построения графика зависимости максимальной относительной поправки от номера итерации привлекается script-файл “Graf_1D.m”:

```

clc
clear all
%Precision = 'float';
Precision = 'double';
fidp = fopen('c:/work/nT.dat', 'r', 'l');
if (fidp == -1)
    disp('File "nT.dat" not found');
    return;
end
datap = fread(fidp, 1, 'int');
fclose(fidp);
n = datap(1)
Size = [n];
fid = fopen('c:/work/dT.dat', 'r', 'l');
if (fid == -1)
    disp('File "dT.dat" not found');
    return;
end
U = fread(fid, Size, Precision);
fclose(fid);
semilogy(U);

```

Лабораторная работа № 7

РЕШЕНИЕ ДВУМЕРНОГО НЕСТАЦИОНАРНОГО УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

ЦЕЛЬ РАБОТЫ: изучить и программно реализовать на языке высокого уровня конечно-разностный метод решения краевой задачи для нестационарного уравнения теплопроводности.

7.1. Математическая модель

Нестационарный перенос тепла в двумерной прямоугольной области G при отсутствии внутри этой области источников и стоков тепла описывается уравнением теплопроводности

$$C \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla \cdot b \nabla T; \quad (x, y) \in G; \quad t > 0,$$

где C – удельная теплоемкость среды, b – коэффициент теплопроводности, $T(x, y, t)$ – температура, $\nabla = (\partial/\partial x; \partial/\partial y)$ – двумерный оператор дифференцирования, которое, в отличие от стационарного переноса, содержит член, пропорциональный первой производной от температуры по времени. С целью упрощения задачи предположим, что удельная теплоемкость среды постоянна. Введем коэффициент температуропроводности $a = b/C$. Тогда уравнение теплопроводности приобретает вид:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \nabla \cdot a \nabla T; \quad (x, y) \in G; \quad t > 0. \quad (7.1)$$

Дифференциальное уравнение (7.1) относится к уравнениям в частных производных параболического типа. Постановка задачи для такого уравнения включает граничные и начальные условия.

Граничные условия в точках границы Γ области G отражают характер температурного обмена области с внешней средой:

$$T(x, y, t) = \alpha_1(x, y, t); \quad (x, y) \in \Gamma_1; \quad t > 0, \quad (7.2)$$

$$a \frac{\partial T(x, y, t)}{\partial \eta} = \alpha_2(x, y, t); \quad (x, y) \in \Gamma_2; \quad t > 0, \quad (7.3)$$

$$a \frac{\partial T(x, y, t)}{\partial \eta} = \alpha_3(T, x, y, t); \quad (x, y) \in \Gamma_3; \quad t > 0. \quad (7.4)$$

Здесь $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ – отдельные части границы $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$, η – вектор единичной нормали к ней, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ – заданные функции.

Завершается математическая постановка краевой задачи для уравнения параболического типа заданием начального условия:

$$T(x, y, 0) = T_0(x, y); \quad (x, y) \in \bar{G}, \quad (7.5)$$

где $\bar{G} = G \cup \Gamma$. Функция $T_0(x, y)$ в правой части (7.5) описывает распределение температуры в области \bar{G} в момент времени $t = 0$.

Рассмотрим более удобную интегральную форму математической модели. Введем плотность температурного потока

$$\mathbf{F} = -a \nabla T. \quad (7.6)$$

Перепишем (7.1) в виде:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -\nabla \cdot \mathbf{F}. \quad (7.7)$$

Проинтегрируем левую и правую части (7.7) по произвольной двумерной области S_k , переставив в левой части порядок применения операторов дифференцирования и интегрирования:

$$\frac{\partial}{\partial t} \iint_{(S_k)} T ds = - \iint_{(S_k)} (\nabla \cdot \mathbf{F}) ds, \quad S_k \in \bar{G}.$$

Применим к правой части теорему Остроградского-Гаусса:

$$\frac{\partial}{\partial t} \iint_{(S_k)} T ds = - \oint_{(L_k)} (\mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\eta}) dL; \quad k = \overline{1, N}, \quad (7.8)$$

где $\boldsymbol{\eta}$ – внешняя единичная нормаль к контуру L_k , окаймляющему область S_k . Уравнение (7.8) является интегральной формой уравнения (7.7), плотность потока в которой соответствует (7.6).

Уравнение теплопроводности в интегральной формулировке справедливо для всех N элементарных ячеек, на которые разбита область \bar{G} (каждая из таких ячеек имеет площадь S_k и длину ограничивающей линии L_k).

Интегральное тождество (7.8) справедливо для всех точек области \bar{G} , включая граничные точки $(x, y) \in \Gamma_2 \cup \Gamma_3$ (точки с неизвестной температурой T). Граничные условия (7.3), (7.4) учитываются в (7.8) путем задания соответствующей плотности температурного потока на участках Γ_2 и Γ_3 :

$$(\mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\eta}) = \beta_2(x, y, t); \quad (x, y) \in \Gamma_2, \quad (7.9)$$

$$(\mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\eta}) = \beta_3(T, x, y, t); \quad (x, y) \in \Gamma_3. \quad (7.10)$$

7.2. Разностная аппроксимация

Рассмотрим на следующем примере, как на основе интегральной формулировки (7.8), (7.2), (7.9), (7.10) строится и численно решается разностная схема.

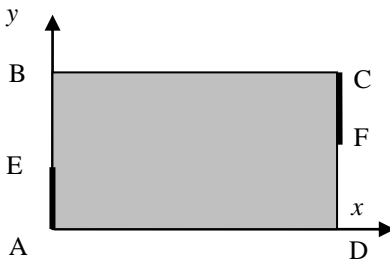


Рис. 7.1. Пример области моделирования

Пусть требуется рассчитать распределение температуры в прямоугольной области

$\bar{G} = \{(x, y) | 0 \leq x \leq L_x; 0 \leq y \leq L_y\}$ (ABCD на рис.7.1) в момент времени $t_{\text{кон}}$, если в начальный момент времени $t_0 = 0$ температура $T(x, y, 0) = 0$ во всех точках области \bar{G} , а при $t > 0$ граничное условие (7.2) явля-

ется температурным источником:

$$T_1 = T_1(x, y, t) = T_1(t); \quad (x, y) \in AE,$$

$$T_2 = T_2(x, y, t) = T_2(t); \quad (x, y) \in CF.$$

Теперь, используя интегральную формулировку, необходимо выполнить разностную аппроксимацию краевой задачи как по пространственной, так и по временной переменным.

Как и в стационарном случае, построим основную сетку

$$\overline{\omega}_{hr} = \left\{ (x_i, y_j); \quad i = \overline{0, N_x}; j = \overline{0, N_y} \mid x_0 = 0; \quad x_{N_x} = L_x; \right. \\ \left. x_{i+1} = x_i + h_i; \quad y_0 = 0; \quad y_{N_y} = L_y; \quad y_{j+1} = y_j + r_j \right\}$$

с переменным шагом h_i по оси x и переменным шагом r_j по оси y , где N_x, N_y – количество шагов сетки по осям x и y соответственно, L_x – длина отрезка AD, L_y – длина отрезка AB.

Наряду с основной сеткой для разбиения области \overline{G} на элементарные ячейки введем вспомогательную сетку

$$\omega_{h+1/2, r+1/2} = \left\{ (x_{i+1/2}, y_{j+1/2}); \quad i = \overline{0, N_x - 1}; \quad j = \overline{0, N_y - 1} \right. \\ \left. \mid x_{i+1/2} = x_i + h_i/2; \quad y_{j+1/2} = y_j + r_j/2 \right\},$$

линии которой смещены относительно линий основной сетки на величину, равную половине шага основной сетки. Вспомогательная сетка разбивает область \overline{G} на элементарные ячейки, число которых N совпадает с числом узлов сетки пространственной дискретизации, т. е. $N = (N_x + 1)(N_y + 1)$.

Разностную сетку по времени построим аналогично:

$$\omega_{\tau} = \{t_l, \quad l = \overline{0, M-1}; \quad t_M = t_{кон}; \quad t_{l+1} = t_l + \tau_l; \quad l = \overline{0, M-1}\},$$

где τ_l – шаг по t , в общем случае зависящий от номера шага, l – номер временного слоя, M – количество шагов сетки по оси t .

Аппроксимируем теперь уравнение теплопроводности (7.8) на элементарной ячейке, площадь которой s_k , периметр L_k , содержащей произвольный k -ый внутренний узел. Сетка пространственной дискретизации задачи $\overline{\omega}_{hr}$ использует двойную (i, j) -индексацию узлов. Запишем уравнение (7.8), привлекая (i, j) -индексацию:

$$\frac{\partial}{\partial t} \iint_{(S_{i,j})} T ds = - \oint_{(L_{i,j})} (\mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\eta}) dL; \quad i = \overline{0, N_x}; \quad j = \overline{0, N_y}. \quad (7.11)$$

Интеграл в левой части уравнения (7.11) по теореме о среднем представим так:

$$\iint_{(S_{i,j})} T ds = T_{i,j} s_{i,j},$$

где $T_{i,j}$ – среднее значение температуры внутри (i, j) -элементарной ячейки, $s_{i,j}$ – площадь элементарной ячейки.

Производную по времени аппроксимируем правой разностной производной:

$$\frac{\partial}{\partial t} \iint_{(S_{i,j})} T ds \approx s_{i,j} \frac{T_{i,j}^{l+1} - T_{i,j}^l}{\tau_l}.$$

Верхний индекс l сеточной функции $T_{i,j}^l$ в этой аппроксимации указывает на момент времени t_l сетки ω_τ , к которому относится ее значение, нижние индексы i и j – на узел сетки $\overline{\omega}_{hr}$ пространственной дискретизации задачи.

Разностное уравнение для произвольного (i, j) -узла сетки $\overline{\omega}_{hr}$ при использовании явного шеститочечного шаблона на пространственно-временной сетке

$$s_{i,j} \frac{T_{i,j}^{l+1} - T_{i,j}^l}{\tau_l} = - \oint_{(L_{i,j})} (\mathbf{F}^l \cdot \boldsymbol{\eta}) dL; \quad i = \overline{0, N_x}; \quad j = \overline{0, N_y} \quad (7.12)$$

использует аппроксимацию интеграла по контуру, рассмотренную в лабораторной работе № 6, при этом плотности потоков \mathbf{F} относятся к l -му временному слою. Соответствующая разностная схема является

явной, т. к. позволяет решение на верхнем временном слое в явном виде определить через решение на предыдущем слое:

$$T_{i,j}^{l+1} = T_{i,j}^l - \frac{\tau_l}{S_{i,j}(L_{i,j})} \oint (\mathbf{F}^l \cdot \boldsymbol{\eta}) dL; \quad i = \overline{0, N_x}; \quad j = \overline{0, N_y}, \quad (7.13)$$

и, как следует из теории, является ограниченно устойчивой. Условие устойчивости явной разностной схемы (7.13) при использовании равномерной пространственно-временной сетки имеет вид:

$$\tau \leq \frac{d^2}{4a}; \quad d = \min\{h; r\}, \quad (7.14)$$

где h – шаг сетки по оси x , r – по оси y , τ – по оси t . Позднее в п. 7.4 рекуррентные соотношения 7.13 будут конкретизированы при рассмотрении привлекаемого методического примера.

7.3. Задание

1. Реализовать на языке высокого уровня программу численного решения нестационарного уравнения теплопроводности в n -угольной области \bar{g} , форма которой конкретизируется с помощью рисунка 7.2 и данных таблицы 7.1.

Температура на контакте K1 в начальный момент времени $t_0 = 0$ мгновенно повышается от нуля до T1, на контакте K2 – от нуля до T2. Область заполнена однородным материалом с температуропроводностью a . Границы области, свободные от контактов, теплоизолированы, т.е. через эти участки отсутствует передача тепла.

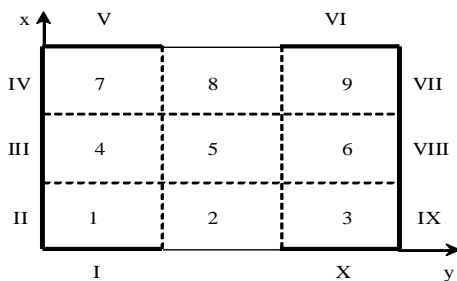


Рис. 7.2. Прямоугольная область

Таблица 7.1

Определение формы моделируемой области

Номер варианта	Исключаемые сегменты
1	8
2	2
3	5, 8
4	2, 5
5	2, 8
6	2, 3, 6
7	6, 8, 9
8	4, 7, 8
9	1, 2, 4
10	4
11	4, 5
12	6
13	5, 6
14	4, 6

Прямоугольная область \overline{G} на рис. 7.2 состоит из 9 одинаковых сегментов, которые пронумерованы арабскими цифрами 1÷9. Римскими цифрами I ÷ V обозначены отрезки, образующие контакт K1, цифрами VI ÷ X – контакт K2. Форма конкретного варианта области \overline{g} определяется исключением из области \overline{G} сегментов, номера которых приведены во втором столбце табл.7.1., а форма контактов K1 и K2 задается с помощью таблицы 7.2 (посредством перечисления входящих в контакты отрезков).

Таким образом, конкретный вариант области \overline{g} и ее границ, в точках которых температура известна (фиксирована или является функцией времени), идентифицируется так: n1.n2.n3 (задается преподавателем), где n1 – номер варианта из табл. 7.1, n2 – номер варианта для K1, а n3 – номер варианта для K2 из табл. 7.2.

2. Рассчитать (с одинарной значностью) при следующих значениях исходных данных:

$$h = 0,2; \quad r = 0,3; \quad NXB = 15; \quad NYB = 12;$$

$$T1 = 5,0; \quad T2 = 15,0; \quad t_{кон} = 400,0,$$

где $T1$, $T2$ – температуры контактов, $t_{кон}$ – время моделирования, NXB и NYB – количество шагов сетки, приходящееся на сторону

Таблица 7.2

Задание контактов

Контакт К1		Контакт К2	
Номер варианта	Используемые отрезки	Номер варианта	Используемые отрезки
1	1	1	6
2	1, 2	2	6, 7
3	1, 2, 3	3	6, 7, 8
4	1, 2, 3, 4	4	6, 7, 8, 9
5	1, 2, 3, 4, 5	5	6, 7, 8, 9, 10
6	2, 3, 4, 5	6	7, 8, 9, 10
7	3, 4, 5	7	8, 9, 10
8	4, 5	8	9, 10
9	5	9	10

сегмента по оси x и y соответственно, и сохранить на диске C в рабочем каталоге «work» набор файлов последовательного распределения температуры в области \bar{g} (запись в файл осуществляется через каждый DEL-интервал времени). После окончания работы программы численного решения нестационарного уравнения теплопроводности записанные результаты анимировать с помощью системы MATLAB.

7.4. Пример выполнения задания

Рассмотрим следующий пример. Двумерное нестационарное распределение температуры рассчитывается в прямоугольнике (рис. 7.1), т. е. $\bar{g} = \bar{G}$. Контакт К1 – отрезок II, а контакт К2 – отрезок VII (см. рис. 7.2).

Построение сетки. Используем равномерную сетку с шагом h по оси x и r по оси y . Полное количество узлов сетки вдоль оси x :

$$NX = 3 * NXB + 1,$$

вдоль оси y :

$$NY = 3 * NYB + 1,$$

в области \bar{G} :

$$N = NX * NY,$$

где NXB и NYB – число шагов, приходящееся на сторону сегмента области \bar{G} вдоль координатных осей x и y соответственно.

Будем привлекать равномерную сетку по времени, руководствуясь условием устойчивости (7.14), выбирая из него максимальный временной шаг

$$\tau = \frac{d^2}{4a}; \quad d = \min\{h; r\}.$$

Разбиение на подмножества. Множество узлов сетки, принадлежащих области \bar{G} , разобьем на подмножества, в каждом из которых разностное уравнение тепловой задачи для всех узлов подмножества имеет один и тот же вид.

Обозначим (i, j) -узлы, соответствующие характерным точкам области $\bar{g} = \bar{G}$ (см. рис. 7.3):

$$(0; 0), (0; j_1), (0; j_3), (i_1; 0), (i_1; j_2), (i_1; j_3),$$

где i_1 – x -ый индекс точки D ($i_1 = 3 * NXB$), j_1 – y -ый индекс точки E ($j_1 = NYB$), j_2 – y -ый индекс точки F ($j_2 = 2 * NYB$), j_3 – y -ый индекс точки C ($j_3 = 3 * NYB$).

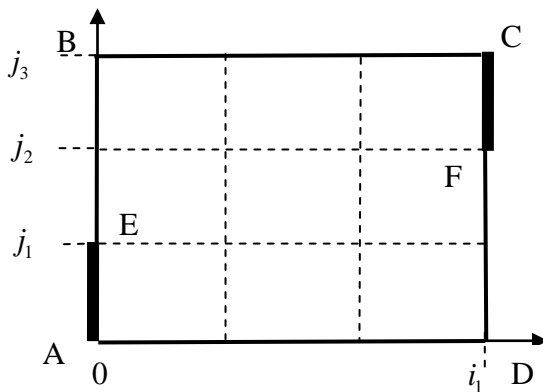


Рис. 7.3. Характерные точки области

Приведем теперь искомые подмножества узлов интересующей нас области $\bar{g} = \bar{G}$ (их всего девять):

1. $[AE] : \{i=0; 0 \leq j \leq j_1\};$
2. $(BE): \{i=0; j_1 < j < j_3\};$
3. $B : \{i=0; j=j_3\};$
4. $D : \{i=i_1; j=0\};$
5. $(DF): \{i=i_1; 0 < j < j_2\};$
6. $(CF): \{i=i_1; j_2 \leq j \leq j_3\};$
7. $(AD): \{0 < i < i_1; j=0\};$
8. $(BC): \{0 < i < i_1; j=j_3\};$
9. $(ABCD): \{0 < i < i_1; 0 < j < j_3\}.$

Вычисления на шаге. Чтобы получить расчетные соотношения, выполняемые на шаге, необходимо аппроксимировать во всех узлах сетки пространственной дискретизации задачи интеграл, стоящий в правой части разностного уравнения (7.12), т. е.

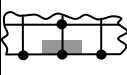




$$\oint_{(L_{i,j})} (\mathbf{F}^l \cdot \boldsymbol{\eta}) dL; \quad i = \overline{0, N_x}; \quad j = \overline{0, N_y}, \quad (7.15)$$

и определить площадь используемых элементарных ячеек. В действительности эксплуатируемая в индивидуальных заданиях n -угольная форма области \overline{g} порождает небольшое число характерных форм элементарных ячеек (для области рассматриваемого примера $\overline{g} = \overline{G}$ число таких форм всего девять), для каждой из которых следует выполнить перечисленные выше действия. Учтем теперь, что в лабораторной работе №6 необходимые нам аппроксимации построены и сведены в таблицу 6.1 (отличаются только знаком и сомножителем a). Привлекая их, сформируем таблицу 7.3, обращаясь к которой можно легко записать разностные уравнения для характерных узлов конкретной области \overline{g} . В последнем столбце этой таблицы приведены соотношения для расчета площади соответствующих элементарных ячеек.

Таблица 7.3.

Аппроксимация на сетке интеграла (7.15)

№ п/п	Вариант	$\oint_{(L_{i,j})} (\mathbf{F}^l \cdot \boldsymbol{\eta}) dL$	$S_{i,j}$
1		$-a(\alpha_1 T_{i,j-1}^l + \alpha_2 T_{i-1,j}^l + \alpha_2 T_{i+1,j}^l +$ $+ \alpha_1 T_{i,j+1}^l + \gamma_1 T_{i,j}^l)$	$s = h * r$
2		$-a(\alpha_1 T_{i,j-1}^l + \alpha_2 T_{i-1,j}^l + \alpha_3 T_{i+1,j}^l +$ $+ \alpha_4 T_{i,j+1}^l + \gamma_2 T_{i,j}^l)$	$0,75 * s$
3		$-a(\alpha_1 T_{i,j-1}^l + \alpha_3 T_{i-1,j}^l + \alpha_2 T_{i+1,j}^l +$ $+ \alpha_4 T_{i,j+1}^l + \gamma_2 T_{i,j}^l)$	$0,75 * s$
4		$-a(\alpha_4 T_{i,j-1}^l + \alpha_3 T_{i-1,j}^l + \alpha_2 T_{i+1,j}^l +$ $+ \alpha_1 T_{i,j+1}^l + \gamma_2 T_{i,j}^l)$	$0,75 * s$
5		$-a(\alpha_4 T_{i,j-1}^l + \alpha_2 T_{i-1,j}^l + \alpha_3 T_{i+1,j}^l +$ $+ \alpha_1 T_{i,j+1}^l + \gamma_2 T_{i,j}^l)$	$0,75 * s$
6		$-a(\alpha_4 T_{i,j-1}^l + \alpha_2 T_{i+1,j}^l + \alpha_4 T_{i,j+1}^l +$ $+ \gamma_3 T_{i,j}^l)$	$0,5 * s$
7		$-a(\alpha_4 T_{i,j-1}^l + \alpha_2 T_{i-1,j}^l + \alpha_4 T_{i,j+1}^l +$ $+ \gamma_3 T_{i,j}^l)$	$0,5 * s$
8		$-a(\alpha_3 T_{i-1,j}^l + \alpha_3 T_{i+1,j}^l + \alpha_1 T_{i,j-1}^l +$ $+ \gamma_3 T_{i,j}^l)$	$0,5 * s$

9		$-a(\alpha_3 T_{i-1,j}^l + \alpha_3 T_{i+1,j}^l + \alpha_1 T_{i,j+1}^l + \gamma_3 T_{i,j}^l)$	$0,5 * s$
10		$-a(\alpha_4 T_{i,j-1}^l + \alpha_3 T_{i+1,j}^l + \gamma_4 T_{i,j}^l)$	$0,25 * s$
11		$-a(\alpha_4 T_{i,j-1}^l + \alpha_3 T_{i-1,j}^l + \gamma_4 T_{i,j}^l)$	$0,25 * s$
12		$-a(\alpha_3 T_{i+1,j}^l + \alpha_4 T_{i,j+1}^l + \gamma_4 T_{i,j}^l)$	$0,25 * s$
13		$-a(\alpha_3 T_{i-1,j}^l + \alpha_4 T_{i,j+1}^l + \gamma_4 T_{i,j}^l)$	$0,25 * s$

Разностные соотношения таблицы 7.3 содержат следующие однократно вычисляемые сеточные коэффициенты:

$$s = hr;$$

$$\alpha_1 = -h/r; \quad \alpha_2 = -r/h; \quad \alpha_3 = \alpha_2/2; \quad \alpha_4 = \alpha_1/2;$$

$$\gamma_1 = -2(\alpha_1 + \alpha_2); \quad \gamma_2 = -1,5(\alpha_1 + \alpha_2); \quad \gamma_3 = -(\alpha_1 + \alpha_2);$$

$$\gamma_4 = -(\alpha_3 + \alpha_4).$$

Запишем теперь рекуррентные соотношения, реализуемые на шаге численного решения краевой задачи для нестационарного уравнения теплопроводности в области $\bar{g} = \bar{G}$ методического примера.

Пользуясь табл. 7.3, запишем разностное уравнение (7.12) для внутреннего (i, j) -го узла (случай 9 в перечне характерных подмножеств области $\bar{g} = \bar{G}$ методического примера):

$$\frac{s}{a \tau} (T_{i,j}^{l+1} - T_{i,j}^l) = -(\alpha_1 T_{i,j-1}^l + \alpha_2 T_{i-1,j}^l + \alpha_2 T_{i+1,j}^l + \alpha_1 T_{i,j+1}^l + \gamma_1 T_{i,j}^l).$$

После несложных преобразований получим искомое рекуррентное соотношение, имеющего место для всех внутренних узлов сетки пространственной дискретизации краевой задачи:

$$9. T_{i,j}^{l+1} = T_{i,j}^l - \beta_1 [\alpha_1 (T_{i,j-1}^l + T_{i,j+1}^l) + \alpha_2 (T_{i-1,j}^l + T_{i+1,j}^l) + \gamma_1 T_{i,j}^l],$$

$$(i, j) \in \{0 < i < i_1; 0 < j < j_3\}.$$

Для остальных подмножеств рекуррентные формулы имеют вид:

1. $T_{i,j}^{l+1} = T1; (i, j) \in \{i = 0; 0 \leq j \leq j_1\};$
2. $T_{i,j}^{l+1} = T_{i,j}^l - \beta_2 [\alpha_4 (T_{i,j-1}^l + T_{i,j+1}^l) + \alpha_2 T_{i+1,j}^l + \gamma_3 T_{i,j}^l],$
 $(i, j) \in \{i = 0; j_1 < j < j_3\};$
3. $T_{i,j}^{l+1} = T_{i,j}^l - \beta_3 [\alpha_4 T_{i,j-1}^l + \alpha_2 T_{i+1,j}^l + \gamma_3 T_{i,j}^l],$
 $(i, j) \in \{i = 0; j = j_3\};$
4. $T_{i,j}^{l+1} = T_{i,j}^l - \beta_3 [\alpha_3 T_{i-1,j}^l + \alpha_4 T_{i,j+1}^l + \gamma_4 T_{i,j}^l]$
 $(i, j) \in \{i = i_1; j = 0\};$
5. $T_{i,j}^{l+1} = T_{i,j}^l - \beta_2 [\alpha_4 (T_{i,j-1}^l + T_{i,j+1}^l) + \alpha_2 T_{i-1,j}^l + \gamma_3 T_{i,j}^l]$
 $(i, j) \in \{i = i_1; 0 < j < j_2\};$
6. $T_{i,j}^{l+1} = T2, (i, j) \in \{i = i_1; j_2 \leq j \leq j_3\};$
7. $T_{i,j}^{l+1} = T_{i,j}^l - \beta_2 [\alpha_1 T_{i,j+1}^l + \alpha_3 (T_{i-1,j}^l + T_{i+1,j}^l) + \gamma_3 T_{i,j}^l],$
 $(i, j) \in \{0 < i < i_1; j = 0\};$
8. $T_{i,j}^{l+1} = T_{i,j}^l - \beta_2 [\alpha_1 T_{i,j-1}^l + \alpha_3 (T_{i-1,j}^l + T_{i+1,j}^l) + \gamma_3 T_{i,j}^l],$
 $(i, j) \in \{0 < i < i_1; j = j_3\}.$

В этих соотношениях $\beta_1 = a\tau / s; \beta_2 = 2\beta_1; \beta_3 = 4\beta_1.$

Организация вычислительного процесса. Пусть сетка построена и вычислены все сеточные характеристики, присутствующие в рекуррентных соотношениях, аппроксимирующих уравнение теплопроводности в узлах пространственно-временной сетки:

$$s = hr; d = \min\{h; r\}; \tau = d^2 / 4a;$$

$$\alpha_1 = -h/r; \alpha_2 = -r/h; \alpha_3 = \alpha_2/2; \alpha_4 = \alpha_1/2;$$

$$\gamma_1 = -2(\alpha_1 + \alpha_2); \gamma_2 = -1,5(\alpha_1 + \alpha_2);$$

$$\gamma_3 = -(\alpha_1 + \alpha_2); \quad \gamma_4 = -(\alpha_3 + \alpha_4);$$

$$\beta_1 = a\tau / s; \quad \beta_2 = 2\beta_1; \quad \beta_3 = 4\beta_1;$$

$$NX = 3 \times NXB + 1; \quad NY = 3 \times NYB + 1;$$

$$i_1 = NX - 1; \quad j_1 = NYB; \quad j_2 = NYB + NYB; \quad j_3 = NY - 1.$$

Замечание. При записи индексов i_1, j_1, j_2, j_3 характерных точек области $\bar{g} = \bar{G}$ (см. рис. 7.3) учтено, что нумерация индексов i и j начинается с нуля.

Для осуществления вычислительного процесса прежде всего необходимо реализовать начальное условие краевой задачи во всех (i, j) -узлах пространственной сетки:

$$T_{i,j} = 0; \quad i = \overline{0, i_1}; \quad j = \overline{0, j_3}$$

и присвоить значения температур $T1$ и $T2$ узлам, принадлежащим контактам:

$$T_{i,j} = T1; \quad \{i = 0; \quad 0 \leq j \leq j_1\};$$

$$T_{i,j} = T2; \quad \{i = i_1; \quad j_2 \leq j \leq j_3\}.$$

Здесь и далее двумерный массив $T_{i,j}$ используется для хранения сеточной функции (температуры в узлах пространственной сетки) на l -ом временном слое. Обращаем внимание, что сформированное начальное распределение температуры сохраняется на диске C .

Сеточная функция на $(l+1)$ -ом временном слое в (i, j) -узлах области $\bar{g} = \bar{G}$ (для ее идентификации используется двумерный рабочий массив $TT_{i,j}$) вычисляется в тройном l, i, j -цикле из приведенных выше рекуррентных соотношений $2 \div 5$ и $7 \div 9$. Температура в узлах, принадлежащих контактам, при этом не перевычисляется, т. к. по условиям задачи при $t > 0$ остается фиксированной на всем временном интервале решения краевой задачи.

После осуществления текущего временного шага (реализации внутреннего двойного i, j -цикла) вычисленные значения сеточной функции $TT_{i,j}$ переписываются в основной двумерный массив $T_{i,j}$ и передаются на диск C , если текущее значение n выполненных временных шагов кратно заданному числу шагов интервала вывода

(распределения сохраняются на диске С с заданным интервалом вывода для последующей анимации результатов расчета).

Выход из тройного l, i, j -цикла имеет место, когда n достигает значения T/τ , где T – время наблюдения.

Программа численного решения приведена ниже. Программа разработана на языке C++ в рамках среды разработки Visual Studio. Цифры в скобках используются для ссылки на соответствующую строку.

В процессе решения задачи программа записывает на диск С в каталог "work" набор файлов, содержащих последовательные распределения температуры, что после окончания работы программы позволяет анимировать результаты расчетов с помощью системы MATLAB.

(1)	#include <stdlib.h>
(2)	#include <math.h>
(3)	#include <fstream>
(4)	#define PRES double
(5)	#define NXB 15
(6)	#define NYB 12
(7)	#define NX NXB*3+1
(8)	#define NY NYB*3+1
(9)	#define NYK2 NYB*2
(10)	#define REP 3000
(11)	#define DEL 100
(12)	#define AMAT 1.1f
(13)	#define TEM1 5.0f
(14)	#define TEM2 15.0f
(15)	#define HX 0.2f
(16)	#define HY 0.3f
(17)	using namespace std;
(18)	int main(int argc, char **argv)
(19)	{
(20)	int i, j, k;
(21)	int idt=0;
(22)	int ndt=0;
(23)	PRES T1=TEM1, T2=TEM2, h=HX, r=HY, a=AMAT, t0;
(24)	PRES T[NY][NX], TT[NY][NX];
(25)	PRES rr = min(h, r);

```

(26) PRES tau = 0.25f*rr*rr/a;
(27) PRES alf_1 = -h/r;
(28) PRES alf_2 = -r/h;
(29) PRES alf_3 = 0.5f * alf_2;
(30) PRES alf_4 = 0.5f * alf_1;
(31) PRES bet_1 = a*tau / (h*r);
(32) PRES bet_2 = 2.0f*bet_1;
(33) PRES bet_3 = 4.0f*bet_1;
(34) PRES gam_1 = -2.f*(alf_1 + alf_2);
(35) PRES gam_3 = - (alf_1 + alf_2);
(36) PRES gam_4 = - (alf_3 + alf_4);
(37) char filename[128];
(38) for (j=0; j<NY; j++) {
(39)     for (i=0; i<NX; i++) {
(40)         T[j][i] = 0.0f; } }
(41) for (j=0; j<=NYB; j++)
(42) { T[j][0] = T1; TT[j][0] = T1; }
(43) for (j=NYK2; j<NY; j++)
(44) { T[j][NX-1] = T2; TT[j][NX-1] = T2; }
(45) ofstream fout("c:/work/T1.dat",ios_base::out | ios_base::trunc |
(46) ios_base::binary);
(47) for (j = 0; j < NY; j++) {
(48)     for (i = 0; i < NX; i++) {
(49)         PRES w = T[j][i];
(50)         fout.write((char*)&w, sizeof w); } }
(51) fout.close();
(52) for (k=0; k<REP; k++) {
(53)     for (j=0; j<NY; j++) {
(54)         for (i=0; i<NX; i++) {
(55)             t0 = T[j][i];
(56)             if (i>0 && i<NX-1 && j==0) {
(57)                 TT[j][i] = t0 - bet_2*(alf_3*(T[j][i-1]+T[j][i+1]) + alf_1*T[j+1][i] +
(58)                 gam_3*t0);}
(59)             else if (i>0 && i<NX-1 && j==NY-1) {
(60)                 TT[j][i] = t0 - bet_2*(alf_3*(T[j][i-1]+T[j][i+1]) + alf_1*T[j-1][i] +
(61)                 gam_3*t0);}
(62)             else if (i==0 && j>NYB && j<NY-1) {
(63)                 TT[j][i] = t0 - bet_2*(alf_4*(T[j-1][i]+T[j+1][i]) + alf_2*T[j][i+1] +
(64)                 gam_3*t0);}
(65)             else if (i==NX-1 && j>0 && j<NYK2) {

```

```

(66) TT[j][i] = t0 - bet_2*(alf_4*(T[j-1][i]+T[j+1][i]) + alf_2*T[j][i-1] +
(67) gam_3*t0);}
(68) else if (i==0 && j==NY-1) {
(69) TT[j][i] = t0 - bet_3*(alf_3*T[j][i+1] + alf_4*T[j-1][i] + gam_4*t0);}
(70) else if (i==NX-1 && j==0) {
(71) TT[j][i] = t0 - bet_3*(alf_3*T[j][i-1] + alf_4*T[j+1][i] + gam_4*t0);}
(72) else if (i>0 && i<NX-1 && j>0 && j<NY-1) {
(73) TT[j][i] = t0 - bet_1*(alf_1*(T[j][i-1]+T[j][i+1]) + alf_2*(T[j-
(74) 1][i]+T[j+1][i]) + gam_1*t0);} } }
(75) for (j=0; j<NY; j++) {
(76)     for (i=0; i<NX; i++) {
(77)         T[j][i] = TT[j][i]; } }
(78) idt++;
(79) if (idt == DEL) { idt=0; ndt++;
(80) sprintf_s(filename, sizeof(filename), "c:/work/T%d.dat", ndt+1);
(81) ofstream fout(filename, ios_base::out | ios_base::trunc |
(82) ios_base::binary);
(83) for (j = 0; j < NY; j++) {
(84)     for (i = 0; i < NX; i++) {
(85)         PRES w = T[j][i];
(86)         fout.write((char*)&w, sizeof w); } }
(87)     fout.close(); }
(88) }
(89) int n_x = NX; int n_y = NY; int n_k = ndt;
(90) ofstream fou("c:/work/Param.dat", ios_base::out |
(91) ios_base::trunc | ios_base::binary);
(92) fou.write((char*)&n_x, sizeof n_x);
(93) fou.write((char*)&n_y, sizeof n_y);
(94) fou.write((char*)&n_k, sizeof n_y);
(95) fou.close();
(96) }

```

Комментарии к программе. Строки (1–3) – подключение библиотек, используемых программой. Строка (4) указывает, что все переменные с плавающей точкой имеют тип “double”. Строки (5–16) дают полное описание задачи: строка (5) – число шагов сетки по оси X в одном сегменте, (6) – число узлов сетки по оси Y в одном сегменте, (7) – число узлов сетки в структуре по оси X, (8) – число узлов сетки в структуре по оси Y, (9) – величина индекса j2, (10) – число шагов по времени, (11) – интервал записи распределения температуры для его

анимации (запись происходит через каждые DEL временных шагов), (12) – температуропроводность материала, (13) – температура контакта K1, (14) – температура контакта K2, (15) – шаг сетки по X, (16) – шаг сетки по Y. Строка (17) – открывает пространство стандартных имен библиотеки iostream.

Далее следует процедура “main”. Ее начало строки (18–19), окончание – строка (96). Рабочие переменные определены в строках (20–23), двумерный массив T содержит искомое распределение, массив TT – рабочий (строка 24), гг – меньший из шагов (строка 25), tau (26) – шаг по времени, строки (27–36) – коэффициенты в разностных формулах. В переменной filename хранится имя записываемого на диск файла. Двойной цикл (38–40) – начальное распределение температуры, циклы (41–42) и (43–44) – задание температуры на контактах. Строки (45–51) – запись на диск начального распределения температуры.

Строка (52) – начало цикла по времени, (53) – начало цикла прохода по узлам сетки вдоль оси Y, (54) – начало цикла прохода по узлам сетки вдоль оси X. Строки (56–58) – обработка внутренних точек отрезка AD, строки (59–61) – обработка внутренних точек отрезка BC, (62–64) – обработка внутренних точек отрезка BE, (65–67) – обработка внутренних точек отрезка DF, (68–69) – обработка точки B, (70–71) – обработка точки D, (72–74) – обработка внутренних точек области.

Строки (75–77) – подготовка следующего шага по времени, (78–87) – запись очередного распределения температуры, (88) – окончание цикла по времени, (89–95) – запись файла со счетчиками.

Для анимации двумерного температурного поля используется script-файл “Anim_2D.m”:

```
(1)  clc
(2)  clear all
(3)  Precision = 'double';
(4)  fidp = fopen('c:/work/Param.dat', 'r', 'l');
(5)  if (fidp == -1)
(6)      disp('File "Param.dat" not found');
(7)      return;
(8)  end
(9)  datap = fread(fidp, 3, 'int');
(10) fclose(fidp);
(11) NX = datap(1);
```



```

(12) NY = datap(2);
(13) NT = datap(3);
(14) Size = [NX NY];
(15) fid = fopen('c:/work/T1.dat', 'r', 'l');
(16) if (fid == -1)
(17)     disp('File "T1.dat" not found');
(18)     return;
(19) end
(20) U = fread(fid, Size, Precision);
(21) SizeS = size(U);
(22) x=1:NX;
(23) y=1:NY;
(24) [yy, xx] = meshgrid(y,x);
(25) surf(xx, yy, U)
(26) axis([1 NX 1 NY 0 15])
(27) xlabel('X')
(28) ylabel('Y')
(29) zlabel('U')
(30) fclose(fid);
(31) basename = 'c:/work/T';
(32) for i=2:NT+1
(33)     filename = sprintf('%s%d.dat', basename, i);
(34)     fid = fopen(filename, 'r', 'l');
(35)     if (fid == -1)
(36)         disp('File "T.dat" not found');
(37)         return;
(38)     end
(39)     U = fread(fid, Size, Precision);
(40)     SizeS = size(U);
(41)     x=1:NX;
(42)     y=1:NY;
(43)     [yy, xx] = meshgrid(y,x);
(44)     surf(xx, yy, U)
(45)     axis([1 NX 1 NY 0 15])
(46)     title(['n=', num2str(i), ' N=', num2str(NT+1)])
(47)     fclose(fid);
(48)     pause(0.05);
(49) end

```

Для улучшения качества анимации оси графика фиксированы с помощью оператора `axis([1 NX 1 NY 0 15])` (строки 26 и 45). Здесь последний параметр (15) указывает максимальную температуру в области. Если она имеет другое значение, его следует задать вручную.

Список литературы

1. *Мулярчик, С. Г.* Численные методы : учеб. пособие / С. Г. Мулярчик. – Минск : РИВШ, 2017. – 318 с.
2. *Вержбицкий, В. М.* Численные методы / В. М. Вержбицкий. – М. : Высш. шк., 2005. – 841 с.
3. *Турчак, Л. И.* Основы численных методов: учеб. пособие для студентов вузов / Л. И. Турчак, П. В. Плотников. – М. : Физматгиз, 2005. – 301 с.

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие	3
--------------------------	---

Лабораторная работа № 6.

Решение двумерного стационарного уравнения теплопроводности...	4
Математическая постановка (4). Построение сетки (7). Разностная аппроксимация (8). Метод решения (13). Задание (18). Пример выполнения задания (21). Построение сетки (21). Разбиение на подмножества (22). Итерация Гаусса-Зейделя (22). Организация ПВР-процесса (23). Программа (25). Комментарии к программе (27).	

Лабораторная работа № 7.

Решение двумерного нестационарного уравнения теплопроводности...	31
Математическая модель (31). Разностная аппроксимация (33). Задание (36). Пример выполнения задания (38). Построение сетки (38). Разбиение на подмножества (39). Вычисления на шаге (40). Организация вычислительного процесса (43). Программа (45). Комментарии к программе (47).	
Список литературы	50

Учебное издание

Мулярчик Степан Григорьевич
Шевкун Игорь Михайлович

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

**Методические указания
к лабораторному практикуму**

В двух частях

**Часть 2
Уравнения математической физики**

В авторской редакции

Ответственный за выпуск *С. Г. Мулярчик*

Подписано в печать 17.05.2019. Формат 60×84/16. Бумага офсетная.
Усл. печ. л. 3,02. Уч.-изд. л. 2,55. Тираж 50 экз. Заказ

Белорусский государственный университет.
Свидетельство о государственной регистрации издателя,
изготовителя, распространителя печатных изданий
№ 1/270 от 03.04.2014.
Пр. Независимости, 4, 220030, Минск.

Отпечатано с оригинал-макета заказчика
на копировально-множительной технике
факультета радиофизики и компьютерных технологий
Белорусского государственного университета.
Ул. Курчатова, 5, 220045, Минск.