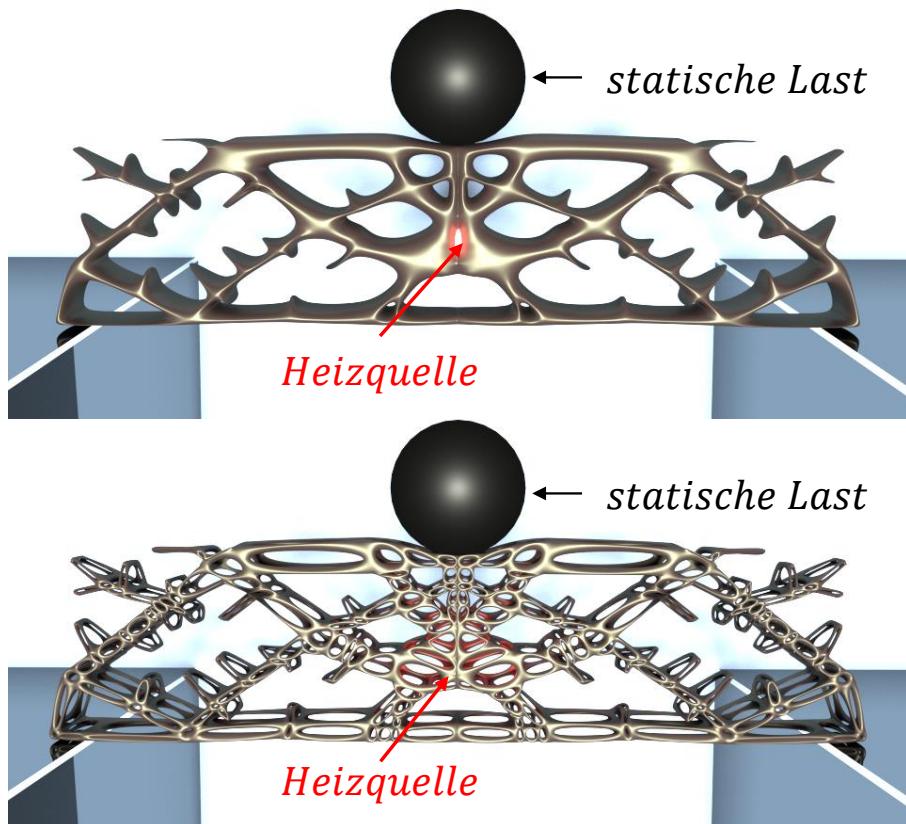


Entwicklung einer Applikation für eine automatisierte multiphysikalische Topologieoptimierung und Geometrierückführung

Development of an application for automated multi physical topology optimization and geometry returning

Verfasser: Dipl. -Ing. (FH) Martin Denk

Matrikelnummer: 39580514



Masterarbeit zur Erlangung des akademischen Grades

„Master of Science“ (M. Sc.)

im Studiengang

“Technische Berechnung und Simulation (Computational engineering)”

an der Hochschule für angewandte Wissenschaften München

eingereicht am 29.02.2016

Erstgutachter: Prof. Dr. –Ing. Armin Fritsch

Zweitgutachter: Prof. Dr. Georg Schlüchtermann

Autorennname	Dipl. -Ing. (FH) Denk Martin
Akronym	DMST
Titel der Arbeit	Entwicklung einer Applikation für eine automatisierte multiphysikalische Topologieoptimierung und Geometrierückführung
Erstellungsjahr	WS 2015/2016
Hochschule	Hochschule für angewandte Wissenschaften in München
Matrikelnummer	39580514
Studiengang	Technische Berechnung und Simulation
Themengebiete	1. Schwerpunkt Topologieoptimierung Thermik, Mechanik, Koppelung (Gewichtung, Adaption) 2. Schwerpunkt Informatik Algorithmen und Strategien (Python, Octave, CalculiX) 3. Schwerpunkt Geometrie NURBS, Polygonnetze, Modellierung (Blender, MeshLab)
Erstgutachter	Prof. Dr. –Ing. Armin Fritsch
Zweitgutachter	Prof. Dr. Georg Schlüchtermann

I. Kurzfassung

In dieser Arbeit wird eine Optimierungsstrategie vorgestellt, die verschiedene physikalische Probleme koppelt. Die einzelnen Systemantworten werden durch unterschiedlichste Verfahren kombiniert, sodass die Lösungen in dem gewählten Beispiel thermische und mechanische Zielfunktionen möglichst gut erfüllen.

Zusätzlich wird die Anbindung und Umsetzung dieser Methoden in einer selbst entwickelten Applikation für beliebige geometrische dreidimensionale Lastfälle für thermische und mechanische Modelle erläutert. In diesem Fall wird ausschließlich freie Software (Open Source) wie CalculiX, Octave und Blender verwendet.

Abschließend erfolgt die Umwandlung der Ergebnisse durch die unkonventionelle Verwendung von Animationssoftware in geometrische 3D-Konturen.

II. Inhalt

I.	Kurzfassung	II
III.	Abkürzungsverzeichnis	V
IV.	Abbildungsverzeichnis	V
1	Einleitung	1
2	Grundlagen der topologischen Optimierung	3
2.1	Struktur des Optimierungsproblems	4
2.2	Materialmodelle für die Topologieoptimierung	5
2.3	Algorithmus für die Einhaltung der Restriktion	7
2.4	Aktuelle Beispiele zu topologischen Optimierungsverfahren.....	11
3	Methoden der Topologieoptimierung	14
3.1	2D-Methode zur Maximierung der Steifigkeit.....	15
3.1.1	Ermittlung der Sensitivitäten	17
3.1.2	Filterung der Sensibilitäten	19
3.1.3	Einfluss der Parameter auf einen 2D- Steifigkeitsmaximierung	24
3.2	2D-Methode zur Maximierung der Energieabfuhr	28
3.3	Koppelung der Zielfunktionen Steifigkeit und Wärmeleitung	32
3.3.1	Optimierung durch Gewichtung der Designvariablen unterschiedlicher Systeme	32
3.3.2	Multiphysikalische Optimierung durch Addition.....	36
3.3.3	Kombination der Gewichtungsmethode und der additiven Strategie.....	39
4	Einführung in die Schnittstelle von FE-Solver	42
5	Software: Methoden, Algorithmen und Strategien.....	45
5.1	Strategieformulierung für die 2D- und 3D-Multiphysik Optimierung	47
5.2	Einzelne Thermal- und Strukturoptimierung	48
5.3	Optimierung durch Gewichtung	50
5.4	Optimierung durch Adaption	52
5.5	Softwareumsetzung und Aufbau	54

6	Anwendung der Topologieoptimierung	57
6.1	Probleme und 3D-Lösungen der 2D-Strategie.....	58
6.2	Beispiellastfall Presse inklusive Wärmetransport.....	61
6.3	Lösung der thermischen und mechanischen Analyse.....	63
6.4	Vergleich der mechanischen Lösung mit einem „kommerziellen“ Resultat	65
6.5	Koppelung des mechanischen und thermischen Problems.....	66
7	Einführung in die Beschreibung geometrischer Formen	69
8	Geometrische Modellierung von Ergebnissen	75
8.1	Nachzeichnen der geometrischen Form	76
8.2	Automatisiertes erstellen der Geometrie.....	79
9	Diskussion.....	82
10	Ausblick	84
11	Zusammenfassung	86
V.	Literaturverzeichnis	VIII
VI.	Anhang	XI
	Hard-kill BESO-Methode.....	XI
	MMA-Verfahren 3D-Optimierung.....	XII
	Einfaches Filterbeispiel und 3D-Filter.....	XIII
	Algorithmen für die Auswahl der Elemente im Filtergebiet	XIV
	Lösung des Lastfalles des 1D-Problems der Wärmeleitung	XVI
	Sensitivitäten für die thermische Berechnung	XVIII
	Bauraum-,Wärmeabtragvariationen	XX
	Sensitivitäten für eine Betrachtung gekoppelter Systeme	XXI
	Automat für Abaqus und CalculiX	XXII
	Grafische Oberfläche in Python (Tkinter)	XXIII
	Prozesslauf mit 3D-Ergebnisausgabe	XXV
	Blockmodell und weitere 3D-Analysen	XXVI

Steuerung der Optimierung durch Ersatz- und Zusatzlasten	XXX
Bèzier-Kurve Beispiel.....	XXXIII
B-Spline-Kurve Beispiel	XXXIV
Startkonstruktion mit einem Pythagorasbaum.....	XXXVI
Analyse der Ergebnisse und erneute Optimierung	XXXVIII
Automatisierte Geometriebewertung.....	XLI
Zustandsdiagramm (UML) der Software	XLIV
Eidesstattliche Erklärung	XLV

III. Abkürzungsverzeichnis

Abkürzung	Beschreibung
SIMP	Solid Isotropic Material With Penalty
BESO	Bi-Directional Evolutionary Structural Optimization
SKO	Soft Kill Option
GUI	Graphic User Interface
NURB	Non-Uniform Rational B-Spline

IV. Abbildungsverzeichnis

ABBILDUNG 1-1: ÜBERBLICK ÜBER DIE ZIELSETZUNG DER ARBEIT	2
ABBILDUNG 2-1: INTERPRETATION DER MATERIALVERTEILUNG UND PRINZIP DER TOPOLOGIEOPTIMIERUNG	4
ABBILDUNG 2-2: DARSTELLUNG DER VERSCHIEDENEN MATERIALMODELLE FÜR DIE TOPOLOGIEOPTIMIERUNG	5
ABBILDUNG 2-3: DARSTELLUNG DER VERWENDETEN METHODEN FÜR DIE EINHALTUNG DER RESTRIKTIONEN	7
ABBILDUNG 2-4: ANSCHAULICHE DARSTELLUNG DER MMA-METHODE NACH BESO.....	8
ABBILDUNG 2-5: ANSCHAULICHE DARSTELLUNG DER MMA-METHODE NACH BESO.....	9
ABBILDUNG 2-6: ERSTELLUNG DER LÖSUNGSGEOMETRIE AUS DER DICHTEVERTEILUNG.....	10
ABBILDUNG 2-7: LÖSUNGEN DER MAXIMALEN WÄRMEABFUHR UND DER MINIMALEN ENERGIEDISSIPATION NACH [13].	12

ABBILDUNG 2-8: TOPOLOGISCHE OPTIMIERUNG DURCH DIE VERWENDUNG VON MEHREREN MATERIALIEN VGL. [15] [4]. DIE BEIDEN LÖSUNGEN DER STEIFIGKEITSOPTIMIERUNG UND DER WÄRMELEITUNG SIND JEWELLS AUS [15] UND [4] ENTNOMMEN	13
ABBILDUNG 3-1: GRAFISCHE DARSTELLUNG DES SCHEMATA IN DER TOPOLOGIEOPTIMIERUNG. VERÄNDERTE ABZEICHNUNG AUS [4]. HIERBEI SIND NEBEN DER ÜBERSETZUNG DIE GRAFIKEN DURCH SELBSTERSTELLTE BILDER ERSETZT WORDEN. ZUSÄTZLICH WURDEN EIGENS ENTWICKELTE GRAFIKEN FÜR DIE FILTERUNG UND DES MMA-VERFAHRENS ERGÄNZT.....	14
ABBILDUNG 3-2: DARSTELLUNG DES EINFLUSSES DES BESTRAFUNGSEXponentEN	15
ABBILDUNG 3-3: BEISPIEL DER FILTERUNG DES SCHACHBRETTMUSTERS	19
ABBILDUNG 3-4: BEISPIEL DER FILTERSTRATEGIE	20
ABBILDUNG 3-5: BEISPIEL DER FILTER- UND DICHTEMATRIX	23
ABBILDUNG 3-6: DEFINITION DER WAHL DES LASTFALLES	24
ABBILDUNG 3-7: PARAMETERSTUDIE DES ERSATZLASTFALLES DES DREIPUNKTBIEGEVERSUCHES	25
ABBILDUNG 3-8: ANWENDUNG DER ERGEBNISSE FÜR DEN DREIPUNKTBIEGELASTFALL MIT EXTREMEN PARAMETERN.....	26
ABBILDUNG 3-9: DEFINITION DES THERMISCHEN LASTFALLES FÜR DIE TOPOLOGIEOPTIMIERUNG	29
ABBILDUNG 3-10 VERGLEICH DER LÖSUNGSSTRATEGIE DER THERMISCHEN AUFGABENSTELLUNG	30
ABBILDUNG 3-11: PARAMETERSTUDIE FÜR VERSCHIEDENE BAURAUMGRÖßen	31
ABBILDUNG 3-12: PARAMETERSTUDIE ZUR STATISCHEN GEWICHTUNG DER DESIGNVARIABLE	33
ABBILDUNG 3-13: PARAMETERSTUDIE ZUR DYNAMISCHEN GEWICHTUNG DER DESIGNVARIABLEN.....	34
ABBILDUNG 3-14: GEWICHTUNG DER SENSIVITÄTEN.....	36
ABBILDUNG 3-15: WECHSELHAFTE OPTIMIERUNG EINES GEBIETES NACH ZWEI ZIELFUNKTIONEN.....	38
ABBILDUNG 3-16: VERWENDUNG BEIDER VERFAHREN FÜR DIE OPTIMIERUNG	39
ABBILDUNG 3-17: KOPPELUNG DER GEWICHTUNG DER SENSIVITÄTEN UND DER ADAPTIVEN STEUERUNG	40
ABBILDUNG 3-18: VERGLEICH VERSCHIEDENER LÖSUNGSVERFAHREN	41
ABBILDUNG 4-1: BEISPIEL EINES INPUTDECKS IN CALCULIX UND ABAQUS	42
ABBILDUNG 4-2: ÜBERBLICK DER EINZELNEN MÖGLICHKEITEN ZUR SOLVERANSTEUERUNG ..	43
ABBILDUNG 5-1: AUFBAU DER SOFTWAREKOMPONENTEN FÜR DIE TOPOLOGIEOPTIMIERUNG	45

ABBILDUNG 5-2: GRAFISCHE EINGABEMASKE FÜR DIE PARAMETER UND DAS STARTEN DER PROGRAMMTEILE	46
ABBILDUNG 5-3: AUSWAHL DER OPTIMIERUNGSSTRATEGIEN	47
ABBILDUNG 5-4: DARSTELLUNG DER ALGORITHMEN FÜR EINZELNE OPTIMIERUNGSMETHODEN	48
ABBILDUNG 5-5: OPTIMIERUNG DURCH GEWICHTUNGEN	50
ABBILDUNG 5-6: OPTIMIERUNG DURCH ADAPTION	52
ABBILDUNG 5-7: SOFTWAREUMSETZUNG FÜR ALLGEMEINE LASTFÄLLE	54
ABBILDUNG 5-8: BEISPIEL EINES INPUTDECKS EINER STATISCHEN ANALYSE.....	55
ABBILDUNG 6-1: DARSTELLUNG DES PROBLEMS UND DER VERWENDETEN SOFTWAREELEMENTE	57
ABBILDUNG 6-2: PROBLEMATIK ZWISCHEN 2D UND 3D LÖSUNGEN	58
ABBILDUNG 6-3: DARSTELLUNG EINER FALSCHEN PROBLEMAUSWAHL.....	59
ABBILDUNG 6-4: 3D-LÖSUNGEN BEZÜGLICH DES 2D-LASTFALLES.....	60
ABBILDUNG 6-5: FALLBEISPIEL FÜR DIE TOPOLOGIEOPTIMIERUNG	61
ABBILDUNG 6-6: LÖSUNG DES BLOCKMODELLS FÜR THERMIK UND STATIK	63
ABBILDUNG 6-7: LÖSUNG DURCH DIE VERWENDUNG EINER HÖHEREN AUFLÖSUNG	64
ABBILDUNG 6-8: VERGLEICH DER LÖSUNGEN IN INSPIRE	65
ABBILDUNG 6-9: ANWENDUNG DER OPTIMIERUNGSTYPEN AUF DEN GEWÄHLTEN LASTFALL ..	66
ABBILDUNG 6-10: MODELLIERUNG EINER LÖSUNGSGEOMETRIE MITTELS 2D UND 3D ERGEBNISSEN.....	68
ABBILDUNG 7-1: DARSTELLUNG DER BASISFUNKTIONEN	70
ABBILDUNG 7-2: VERGLEICH VERSCHIEDENER GEOMETRISCHER BESCHREIBUNGSSTRATEGIEN	72
ABBILDUNG 7-3: VERGLEICH VERSCHIEDENER BESCHREIBUNGSTYPEN GEOMETRISCHER FORMEN	73
ABBILDUNG 7-4: EINSATZ VON FRAKTALEN ALS STARTENTWURF	74
ABBILDUNG 8-1: DARSTELLUNG VERSCHIEDENER MODELLIERUNGSVARIANTEN	75
ABBILDUNG 8-2: ERSTELLUNG DER GEOMETRIE DURCH „SUBDIVISION SURFACES“	76
ABBILDUNG 8-3: VERWENDUNG VON „SCULPING“	77
ABBILDUNG 8-4: MODELLIERUNG UND ANSCHLIEßENDE VERNETZUNG MIT BLENDER UND NETGEN.....	78
ABBILDUNG 8-5: METHODE ZUR GENERIERUNG EINER OBERFLÄCHE AUS EINEM FE-NETZ	79
ABBILDUNG 8-6: IMPORT DES FE-NETZES ALS LÖSUNGSGEOMETRIE.....	80
ABBILDUNG 8-7: GLÄTTUNG DER GEOMETRIE.....	81
ABBILDUNG 10-1: LÖSUNGSRAUMEINSCHRÄNKUNG	84
ABBILDUNG VI-1: VERGLEICH ZWISCHEN HARD- UND SOFT-KILL METHODE	XI

ABBILDUNG VI-2: MMA-VERFAHREN FÜR DIE 3D-MULTIPHYSIK VARIANTE.....	XII
ABBILDUNG VI-3: DARSTELLUNG EINES EINFACHEN FILTERBEISPIELS.....	XIII
ABBILDUNG VI-4: BEWERTUNG EINES STANDARDVERFAHRENS	XIV
ABBILDUNG VI-5: BEWERTUNG DURCH VERWENDUNG VON VORSORTIERTEN BEREICHEN....	XV
ABBILDUNG VI-6: FILTERUNG DURCH DIE NACHBARELEMENTE	XV
ABBILDUNG VI-7: LÖSUNG DES 1D PROBLEMS DER THERMISCHEN RECHNUNG.....	XVI
ABBILDUNG VI-8: VARIATION DES BAURAUMES UND DER LASTBEDINGUNG.....	XX
ABBILDUNG VI-9: ENDLICHER AUTOMAT ABAQUS CALCULIX.....	XXII
ABBILDUNG VI-10: DARSTELLUNG DER AKTUELLEN GRAFISCHEN OBERFLÄCHE (2016).....	XXIII
ABBILDUNG VI-11:GRAFISCHE OBERFLÄCHE IN BLENDER.....	XXIV
ABBILDUNG VI-12: PARAMETERLAUF EINER SCHEIBE MIT LOCH	XXV
ABBILDUNG VI-13: VERSCHIEDENE LÖSUNGEN DES LASTFALLES AUS KAPITEL 3	XXVI
ABBILDUNG VI-14: ERGEBNISSE EINER HEIZUNG EINES TRAPEZPROFILES MIT STANDARDRANDBEDINGUNGEN.....	XXVII
ABBILDUNG VI-15: ERWEITERUNG DURCH EINE RAUMTEMPERATUR AN DER UNTERSEITE	XXVII
ABBILDUNG VI-16: LÖSUNG DER TOPOLOGIEOPTIMIERUNG	XXVIII
ABBILDUNG VI-17: GEOMETRIEAUFBEREITUNG MITELS BLENDER.....	XXVIII
ABBILDUNG VI-18: KÜHLKANAL MIT ÄUßERER STRÖMUNG	XXIX
ABBILDUNG VI-19: ROHR FÜR HEIZABFUHR	XXIX
ABBILDUNG VI-20: AUSBAU VON KÜHLKANÄLEN MITTEL'S ERSATZLASTEN	XXX
ABBILDUNG VI-21: RICHTUNGSÄNDERUNG DER ERSATZLAST	XXXI
ABBILDUNG VI-22: BEISPIELE VERSCHIEDENER ERSATZLASTEN	XXXI
ABBILDUNG VI-23: LÖSUNG DER ERSATZLASTEN A), B), C)	XXXII
ABBILDUNG VI-24: LÖSUNG DER LASTFÄLLE D) E) F)	XXXII
ABBILDUNG VI-25: PYTHAGORASBAUM FÜR DIE THERMISCHE ANALYSE	XXXVI
ABBILDUNG VI-26: PYTHAGORASBAUM FÜR DIE STATICHE ANALYSE MIT EINER LAST.....	XXXVI
ABBILDUNG VI-27: PYTHAGORASBAUM BEI MEHREREN LASTEN.....	XXXVII
ABBILDUNG VI-28: AUTOMATISIERTE GEOMETRIEBEARBEITUNG IN BLENDER	XXXVIII
ABBILDUNG VI-29: ANALYSE DER ERGEBNISSE UND ERNEUTE OPTIMIERUNG.....	XXXIX
ABBILDUNG VI-30: 2D- LASTFALL MIT AUSWERTUNG (NACHGEZEICHNET)	XL
ABBILDUNG VI-31: KOMPLEXITÄTSBEWERTUNG DURCH HÄUFIGKEITSVERTEILUNG DER ELEMENTGRÖÙE UND DES MATERIALVERBRAUCHS	XLI
ABBILDUNG VI-32: ERMITTLEMENT VON FILIGRANEN UND MASSIVEN BEREICHEN	XLII
ABBILDUNG VI-33: BAURAUMABSCHÄTZUNG (TRANSFORMATION)	XLIII
ABBILDUNG VI-34: UML-DIAGRAMM DER ENTWICKELTEN APPLIKATION.....	XLIV

1 Einleitung

Energieeffizienz und Umweltverträglichkeit sind Schlagwörter, die in verschiedenen Industriebereichen stetig an Bedeutung gewinnen und durch Optimierungen des Produktes in jedem Zyklus verbessert werden vgl. [1], [2]. Der Begriff Optimierung wird in technischen Beschreibungen verwendet, um für die Qualität und Innovativität eines Produktes zu werben. Oftmals stecken hinter diesen „scheinhaft optimierten“ Konstruktionen jedoch nur empirische Elemente, Messungen oder „Try and Error“-Verfahren, die nicht der mathematischen Form einer Optimierung entsprechen. Leonhard Euler drückte die Notwendigkeit der Mathematik mit

„Die Mathematik ist es, die uns vor dem Trug der Sinne schützt und uns den Unterschied zwischen Schein und Wahrheit kennen lehrt.“

aus. Dies zeigt sich häufig im Falle der Topologieoptimierung, da hiermit bessere Lösungen gefunden werden. Bei der Verwendung von empirischen Ansätzen, Vermessungen oder Erfahrungswerten, werden diese oft übersehen. Um qualitativ hochwertige Produkte herstellen zu können, sollten mathematische Optimierungen auf sinnvollen physikalischen Modellen durchgeführt werden. Die Lösungen der Problemstellung werden in der Regel in einer Software durch numerische Verfahren approximiert, deren Entwicklung von den neusten Innovationen der Informatik geprägt werden. Mit jeder neuen Prozessorgeneration können stetig größere Gleichungssysteme und Modelle in endlicher Zeit gelöst werden vgl. [3]. Hierfür werden von mehreren Softwarehersteller Programme für eine Modellierung der Randbedingungen und Lasten angeboten. Diese können in einer Vielzahl von verschiedenen Disziplinen genutzt werden wie beispielsweise in der Konstruktion, der technische Mechanik, der Dynamik, der Strömungsmechanik, dem Magnetismus und vielen mehr vgl. [3], [2]. Oftmals gilt es nicht nur die physikalischen Effekte zu simulieren, sondern die Systeme mit Optimierungsverfahren zu verbessern, sodass z.B. beim Leichtbau eine Struktur mit minimalsten Gewicht die Anforderungen erfüllen soll. Ein Einbau in neue Simulationsverfahren ist aufgrund der Größe der Softwareapplikation mit hohen Kosten und viel Aufwand verbunden. Hierfür eignen sich spezifische Anwendungen als Plug-In besser, die einen kleinen Bereich sehr tief abdecken. Zusätzlich entfallen bei selbstentwickelten Produkten die Lizenzkosten der CAE-Programme, deren Funktionen meist mittels eigenen Programmabschnitten und dem Einsatz von freien Software Produkten nachgebaut werden können. Neben dem Einsparen von Kosten bieten OpenSource-Elemente den Vorteil einer freien und offenen Schnittstelle. So kann durch ein Python-Skript der freie „Solver“ CalculiX angesteuert werden, um anschließend die Ergebnisse automatisiert in Libre Office zu dokumentieren. Diese freie Software eignet sich somit ideal, um

neue Optimierungsverfahren und Strategien zu testen und für beliebige Fälle umzusetzen. Aus diesem Grund werden die im Folgenden definierten Ziele ausschließlich mit freier Software durchgeführt, sodass ein Nachbilden der Simulationsergebnisse und ein Einbau der entwickelten Applikation jederzeit ohne finanziellen Aufwand erfolgen können. Die Ziele dieser Masterarbeit unterteilen sich in die drei Schwerpunkte „Optimierung“, „Angewandte Informatik“ und „Geometrie“. Diese in den Schwerpunkten entwickelten Strategien werden für ein physikalisches Problem aus Wärmeleitung und Statik eingesetzt. In der nächsten Abbildung ist die grundlegende Struktur von Schwerpunkten bis hin zu angeschnittenen Bereichen vereinfacht abgebildet.

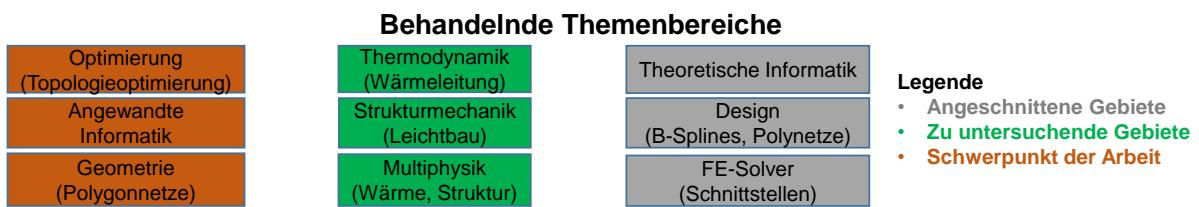


Abbildung 1-1: Überblick über die Zielsetzung der Arbeit

Im Schwerpunkt „Optimierung“ (Kapitel 2, 3) werden vorhandene Strategien aus der Literatur (siehe [4], [3]) erläutert, die für die Optimierung einzelner Systeme eingesetzt werden können. Hieraus erfolgt die Entwicklung einer eigenen Applikation für eine Koppelung des Problems der Wärmeleitung mit dem statischen Lastfall. Zeigen diese Verfahren Erfolge, so wird die Umsetzung der entwickelten Methoden in eine Software im Punkt „Angewandte Informatik“ (Kapitel 4, 5, 6) erläutert. Hierfür wird eine grafische Oberfläche entwickelt, die einzelne Python-Skripte und Octave-Skripte ansteuert. Es entstehen vier Auswahlmöglichkeiten, mit denen 2D- und 3D-Verfahren¹ angesteuert werden können. Abschließend werden die aus der Topologieoptimierung entstehenden diskreten Lösungen durch den unkonventionellen Einsatz von Animationsprogrammen in eine 3D-Geometrie im Bereich „Geometrie“ (Kapitel 7, 8) umgewandelt. Dabei können FE-Netze direkt als Basis für die neue Geometrie verwendet werden, mit denen durch mehrere Filter und geometrischen Verfahren glatte fertigbare Konturen aus Polygonnetzen erzeugt werden können. Diese genannten Themenschwerpunkte können unabhängig voneinander bearbeitet werden, da die Arbeit in Einführungs- und Hauptteile aufgeteilt ist. Es ist somit nicht notwendig (aber hilfreich) für die geometrische Modellierung vertiefte Kenntnisse der Programmierung der Software oder der Topologieoptimierung zu besitzen, deren Grundlagenteil im folgenden Abschnitt beschrieben wird.

¹ Hierbei gilt es durch Verwendung von Berechenbarkeits- und Komplexitätstheorien aus der theoretischen Informatik die Algorithmen effizient zu gestalten, sodass letztendlich kein exponentieller Programmablauf für den Bedarf an Speicherplatz und Rechenzeit eingesetzt wird.

2 Grundlagen der topologischen Optimierung

Die geometrische Optimierung von Bauteilen bezüglich physikalischer Randbedingungen kann durch unterschiedlichste Optimierungsstrategien, wie beispielsweise der „response surface method“ oder einer „monte carlo simulation“ erfolgen. In diesen Verfahren werden geometrische Parameter wie der Durchmesser einer Bohrung oder die Länge eines Stabes verändert, um die gewählten Zielfunktionen zu verbessern. Ein weiteres Standardwerkzeug der Optimierung von Brückenkonstruktionen ist die Topologieoptimierung. Diese Verfahren benötigen keine geometrischen Parameter, da die Optimierung direkt auf dem diskretisierten numerischen Modell durchgeführt wird. Die optimale Struktur ergibt sich hierbei durch das Entfernen von Material an ungünstigen Bereichen, sodass ein künstliches Wachstum an günstigen Bereichen der betrachteten Struktur stattfindet.

Die SKO-Methode (Soft Kill Optimization) ist ein Vertreter dieses Optimierungstyps, die durch ein empirisches Verfahren eine konstante mechanische Oberflächenspannung erzeugt. Hierbei wird an Stellen hoher Spannung Material angesetzt, während bei niedrigen Spannungswerten ein Entfernen des Werkstoffes simuliert wird. Dies wird über die Veränderung des Elastizitätsmodules jedes einzelnen finiten Elementes realisiert, sodass sich beispielsweise das Verhalten eines Loches aus einer niedrigen Elementsteifigkeit ergibt. Zusätzlich kann ein natürliches Wachstum durch das Verschieben vereinzelter Knoten abgebildet werden, sodass an lokalen Spannungsüberhöhungen² eine geeignete Kontur generiert wird. Letztendlich wird als optimale Voraussetzung für eine Bauteilgeometrie das nach [5] entwickelte Prinzip der konstanten Spannung verfolgt, das sich ebenfalls in der Natur findet. Vgl. [6], [5], [2].

Eine weitere ähnliche Möglichkeit für die Verbesserung von Bauteileigenschaften bietet die Verwendung von Materialgesetzen, aus welchen geeignete Sensitivitäten für die Optimierung ermittelt werden können. Unbelastete Elemente erhalten bei dieser Methode verringerte Materialwerte, sodass sich hieraus letztlich ein poröses Material mit unterschiedlichen Dichten ergibt. Die Ergebniskontur lässt sich anschließend aus der diskreten Dichteverteilung der einzelnen Elemente ermitteln.

Im folgenden Abschnitt wird die Struktur des Optimierungsproblems nach [4] erläutert. Dann werden mehrere Materialmodelle für die Steuerung der Designvariablen vorgestellt und die Methode „method of moving asymptotes“ erläutert, die das Standardwerkzeug zur Einhaltung der geforderten Restriktion beinhaltet.

² Das Verschieben der Knoten wird häufig zur Vermeidung von Kerbspannungen eingesetzt.

2.1 Struktur des Optimierungsproblems

Das Optimierungsproblem der Topologieoptimierung lässt sich standardmäßig über die Zielfunktion C

$$\min C(\rho) \quad (2.1)$$

und die Gleichungsrestriktion

$$\frac{\Omega_L(\rho)}{\Omega_D} - \Omega_{Ratio} = 0; \quad \Omega_L \in \Omega_D; \quad \Omega_{Ratio} \in [0,1] \quad (2.2)$$

definieren vgl. [7], [2]. In der nächsten Abbildung ist das Prinzip der Optimierung dargestellt. Das Verhältnis des Designgebietes Ω_D und des Lösungsgebietes Ω_L wird durch den vorgegebenen Parameter Ω_{Ratio} bestimmt. Als Lösungsgebiet wird ein Bereich in dem ein Material mit der normierten Dichte von eins vorhanden ist, definiert. Das Designgebiet beschreibt die mögliche Umgebung, in der eine Materialverteilung angesetzt werden darf. Wird als Beispiel die Maximierung der Steifigkeit bzw. die Minimierung der Dehnungsenergie gewählt, so ergibt sich ohne Restriktion die triviale Lösung des Vollmaterials an allen Stellen ($\rho_e = 1$), da hierdurch die minimale Verschiebung erreicht wird. Diese Gleichung sorgt für eine Begrenzung des Materialvolumens, sodass während der einzelnen Iterationen in der Optimierung das eingeschränkte Volumen stetig verteilt wird, um die Zielfunktion $C(\rho)$ zu minimieren.

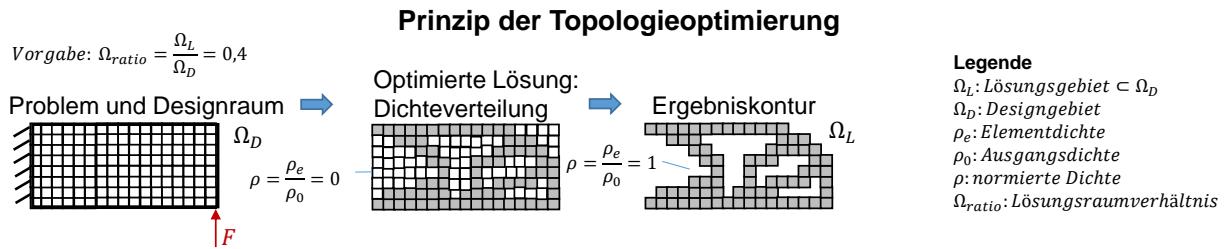


Abbildung 2-1: Interpretation der Materialverteilung und Prinzip der Topologieoptimierung

Die Designvariable bzw. die Dichte der einzelnen Elemente ρ_e , die bezüglich der finiten Elemente keinen Einfluss auf z.B. die Steifigkeits- und Wärmeleitfähigkeitsmatrix besitzen, dient der Steuerung der Materialeigenschaften. Diesbezüglich muss ein Zusammenhang³ zwischen den gewünschten Materialkennwerten und der Dichte erfolgen, sodass Bereiche mit einer geringen Dichte kleine Materialkennwerte besitzen. Nachfolgend werden verschiedene Standard-Gesetzmäßigkeiten der Topologieoptimierung vorgestellt, die für eine sinnvolle Verteilung des Materials sorgen.

³ Bei Mikrostrukturen ergeben sich oszillierende Zusammenhänge zwischen Dichte und Steifigkeit vgl. [3].

2.2 Materialmodelle für die Topologieoptimierung

Die Hauptaufgabe der Materialmodelle besteht in dem Entfernen von Material in ungünstigen Bereichen und dem Verstärken von hochbelasteten Gebieten. Dies kann durch verschiedenste Modelle wie der SIMP-Formulierung, der Soft-kill BESO (Bi-directional Evolutionary Structural Optimization) Methodik oder des Hard-kill BESO⁴ Verfahrens erfolgen, die standardmäßig eine Volumenrestriktion bzw. ein Verhältnis der Volumina (Lösungsraum/Bauraum) beinhalten.

In der folgenden Abbildung sind verschiedene Materialmodelle für die Variation der einzelnen Elemente veranschaulicht. Das gängigste Materialmodell in der Topologieoptimierung wird über den SIMP-Ansatz (Solid Isotropic Material with Penalty) beschrieben. Hierbei werden Materialeigenschaften über deren zugewiesene Dichte als Exponentialansatz variiert. Je größer der Dichtewert ist, desto stärker wird Vollmaterial simuliert. Falls ein Loch simuliert werden soll, so werden die Material- und Dichtewerte der betreffenden Elemente nahe 0 gesetzt, sodass diese Bereiche wenig Einfluss auf die Systemantwort besitzen.

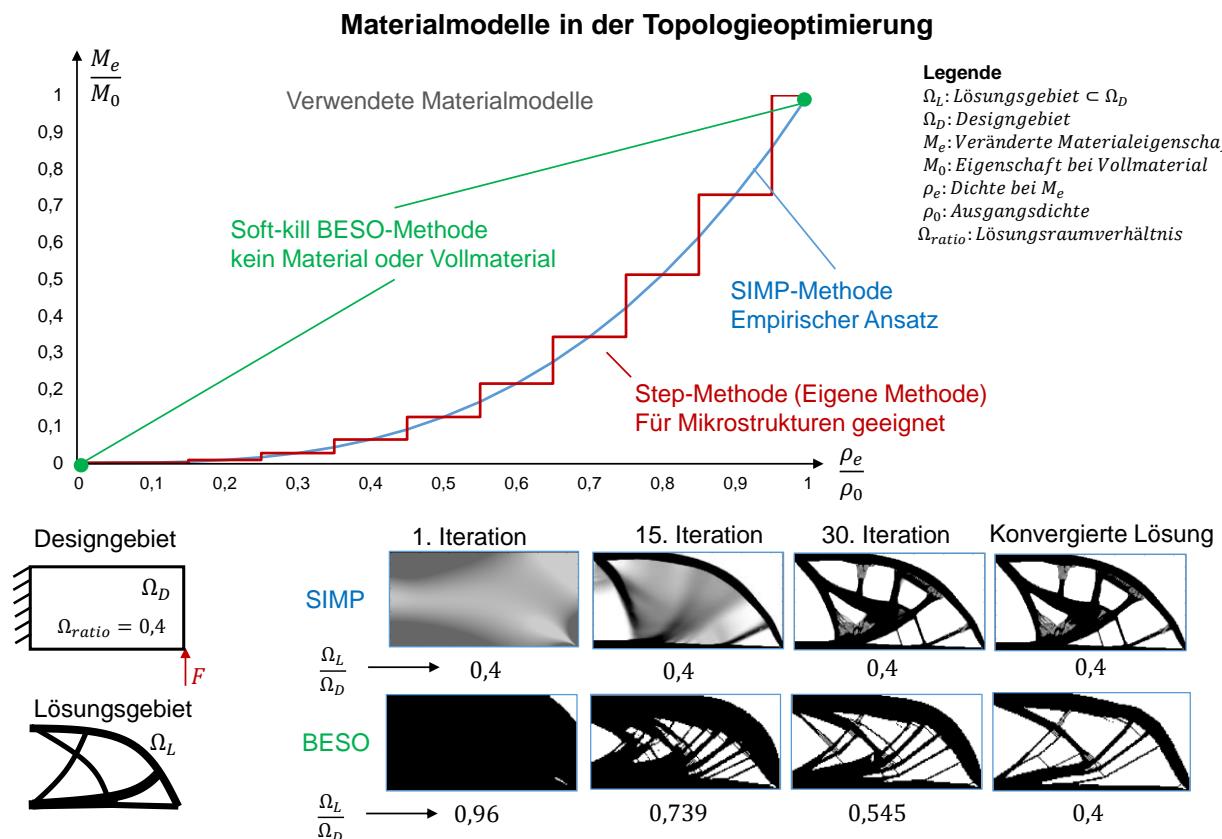


Abbildung 2-2: Darstellung der verschiedenen Materialmodelle für die Topologieoptimierung

⁴ Die Hard-kill BESO-Methode, die Elemente aus dem Gleichungssystem löscht, ist im Anhang unter Hard-kill BESO-Methode beschrieben.

In der Soft-kill BESO-Methode werden ausschließlich die Werte für die Dichte von 1 und ρ_{min} zugelassen, wobei ρ_{min} die minimal auftretende Dichte und somit den minimalen Materialwert beschreibt, sodass keine singulären Matrizen entstehen vgl. [7]. Ein Vergleich der beiden Verfahren zeigt eine unterschiedliche Vorgehensweise. Während in der SIMP-Methode der Lösungsraum auf den gewählten Wert von 0,4 in der ersten Iteration eingeschränkt wird, nähert sich das Verhältnis in dem BESO-Verfahren mit jeder Iteration der Restriktionsfunktion an. In beiden Verfahren kann eine zu schnelle Veränderung des Systems zu Problemen bezüglich des Konvergenzverhaltens führen, falls zu wenige Iterationen für die Verteilung des Materials durchgeführt werden. In der Literatur finden sich hierzu geeignete Parameter für die Materialfunktion und die Iterationsvorschrift, um ein gewünschtes Verhalten zu realisieren vgl. [7] [8]. Anschließend können die Verfahren stabil verwendet werden. Für die Entwicklung neuer Strategien ist die SIMP-Methode geeigneter, da in der Literatur und in den meisten neueren Veröffentlichungen vgl. [9], [10], [11] die topologischen Probleme mit diesem Ansatz gelöst werden. Probleme bestehen in der Interpretation der Ergebnisse, da eine Dichteverteilung vorliegt. Oftmals sind Bereiche mit einer Dichte zwischen 0 und 1, vorhanden in denen die Lösung nur approximiert werden kann. Das BESO-Verfahren zeigt eine klare 1-0 Verteilung, in der sofort geeignete Bauteillösungen ersichtlich werden. Jedoch werden meist deutlich mehr Elemente benötigt, um die Lösungsstrukturen aus dem SIMP-Ansatz⁵ abzubilden.

Die Step-Methode ist eine selbstentwickelte Bestrafungsfunktion, die sich entlang der Funktion der SIMP-Methode bildet. Hierbei werden die Materialwerte durch eine Treppenstufenfunktion verändert. Außerdem beinhaltet die Step-Methode das SIMP-Verfahren für $n_{step} \rightarrow \infty$ und die Soft-kill BESO-Methode $n_{step} = 1$, sodass die Vorteile beider Verfahren kombiniert werden und die Nachteile kompensiert werden. Zusätzlich können mittels dieser Methode neben der Topologieoptimierung von makroskopischen Problemen, mikromechanische Probleme betrachtet werden, da hierbei anisotrope Bereiche in einer Mikro-Zelle⁶ simuliert werden können vgl. [3]. Für die Einhaltung der Restriktion in den genannten Verfahren, werden im Folgenden zwei unterschiedliche Algorithmen für die BESO und SIMP-Methodik vorgestellt. Diese werden in der Softwareumsetzung für die Step-Methode kombiniert.

⁵ Der SIMP-Ansatz zeigt für die behandelten Fälle in Kapitel 9 bei weniger Elementen effizientere Ergebnisse, die bionischen und analytisch optimierten Strukturen ähneln.

⁶ Die physikalischen Größen der Makrostruktur hängen von einer sogenannten homogenisierten Größe $\emptyset^H(x)$ aus der Mikromechanik ab. Diese kann ähnlich einer schwingenden Treppenstufenfunktion sein. vgl. [3]

2.3 Algorithmus für die Einhaltung der Restriktion

Standardmäßig wird für die Einhaltung der Volumenrestriktion in der Topologieoptimierung das MMA-Verfahren (Method of Moving Asymptotes) verwendet. Da sich die zwei Materialmodelle „SIMP“ und „BESO“ deutlich unterscheiden, werden verschiedene Modifikationen⁷ des MMA-Verfahren benötigt. In dem kommenden Ablaufdiagramm sind die verwendeten Algorithmen für die Restriktionseinhaltung dargestellt. Die benötigten Sensitivitäten werden in den Kapitel 3 näher beschrieben, da sie abhängig von der Ermittlung der Lösung des physikalischen Problems sind.

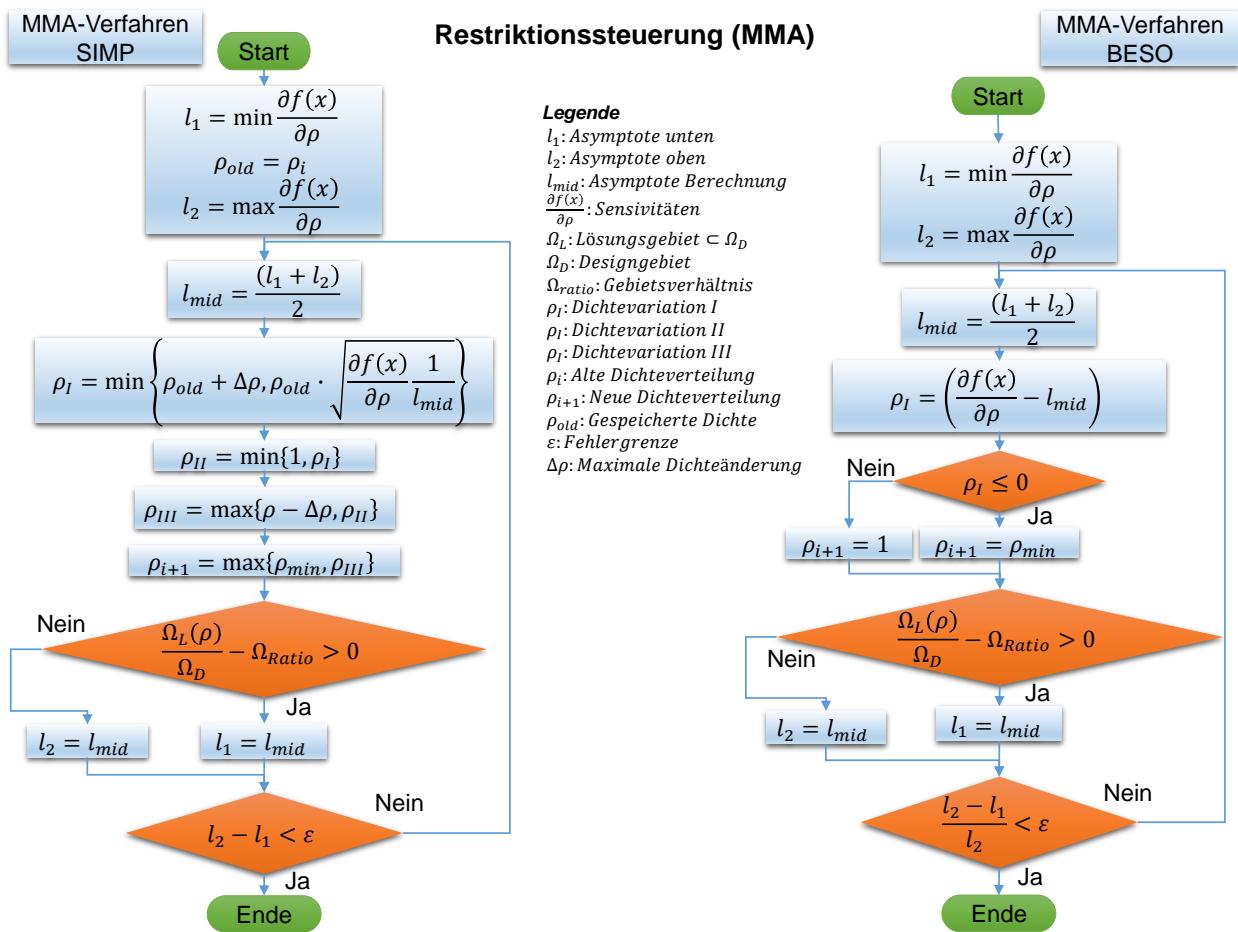


Abbildung 2-3: Darstellung der verwendeten Methoden für die Einhaltung der Restriktionen

Das MMA-Verfahren startet mit der Wahl von zwei Asymptoten, die aus konservativer Sicht an der größten und kleinsten Sensitivität festgelegt werden. Anschließend erfolgt die Wahl für die Skalierung der Dichte durch die Mittelung der oberen l_2 und unteren l_1 Grenze. Es schließt sich t der spezifische Teil für den gewählten Materialansatz an. Bei dem BESO-Verfahren werden die Dichten über die Differenz der Werte der Sensitivitäten und der gemittelten Asymptote errechnet.

⁷ Das Prinzip des MMA-Verfahren für das STEP-Verfahren findet sich im Anhang unter „MMA-Verfahren 3D-Optimierung“

Ist der Dichtewert größer als 0, so wird ein Vollmaterial festgelegt. Bei negativen Werten wird eine Dichte von ρ_{min} angesetzt. In der nächsten Abbildung ist für eine Verteilungsfunktion der Sensitivitäten auf dem Designgebiet die Durchführung des MMA-Verfahrens für die BESO-Strategie veranschaulicht. Die aufgetragene Funktion zeigt die Verschiebung der Asymptote der Häufigkeitsverteilung der Dichte auf dem Designgebiet Ω_D , die durch Kugeln grafisch modelliert ist.

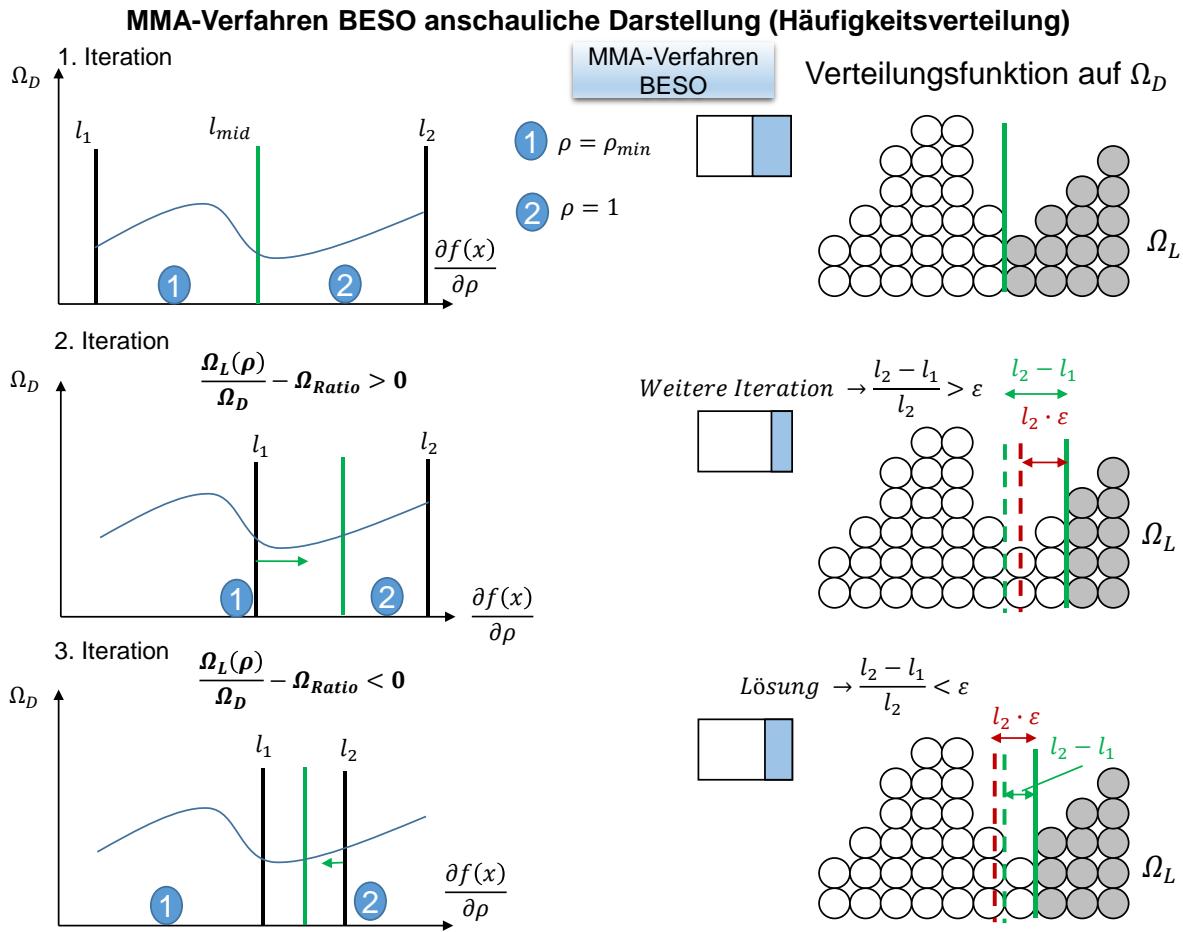


Abbildung 2-4: Anschauliche Darstellung der MMA-Methode nach BESO

In der ersten Iteration wird die gewählte Asymptote l_{mid} mittig zwischen l_1 und l_2 gelegt. Anschließend erfolgt eine Verteilung der Dichte. Es wird nun geprüft, ob zu viel oder zu wenig Material hinsichtlich der Volumenrestriktion eingesetzt wird. Ist zu viel Material vorhanden, so wird in der zweiten Iteration die untere Grenze l_1 durch l_{mid} ersetzt. Die gewählte Asymptote verschiebt sich nach rechts. Ist nun zu wenig Material vorhanden, wird die obere Grenze l_2 durch l_{mid} ersetzt, um die Materialmenge zu erhöhen. Dieses Verfahren wird solange eingesetzt, bis die Volumenrestriktion mit einer gegebenen Toleranz ε eingehalten wird. Nach Ablauf des Verfahrens resultieren zwei Bereiche mit normierten Dichten von 1 und ρ_{min} .

Bei dem SIMP-Verfahren wird eine ähnliche Vorgehensweise gewählt, jedoch entstehen hierbei die drei Bereiche, Vollmaterial (1), kein Material (2) und stetige Materialverteilung (3).

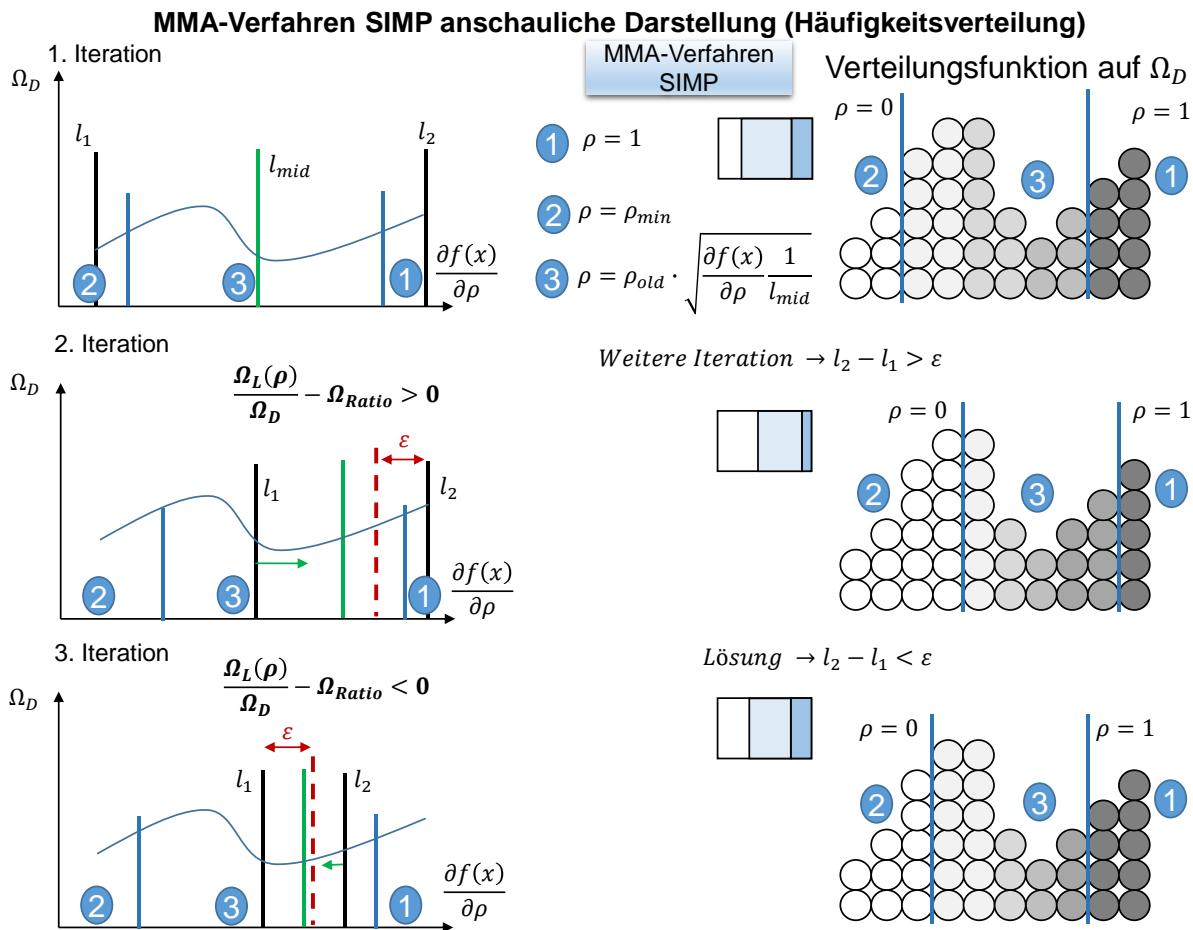


Abbildung 2-5: Anschauliche Darstellung der MMA-Methode nach BESO

Während bei der BESO-Methode die Asymptote die Grenze zwischen vollem und keinem Material darstellt, variiert die Asymptote l_{mid} durch den Ansatz

$$\rho_{old} \cdot \sqrt{\frac{\partial f(x)}{\partial \rho} \frac{1}{l_{mid}}} \quad (2.3)$$

die normierten Dichtewerte. Die gespeicherten (alten) normierten Dichtewerte werden mit der Wurzel aus den Sensitivitäten, die mit der Asymptote skaliert werden, errechnet. Entstehen nun Designwerte von 1, so wird dieser Bereich als Vollmaterial betrachtet. Bei Werten unter 0 wird eine Dichte von ρ_{min} angesetzt. Die restlichen Dichtewerte zwischen 1 und 0 werden als poröses Material beibehalten. Es ergeben sich somit 3 Bereiche mit den zwei Anschlägen 1, ρ_{min} und der verteilten Dichte, deren Materialkennwert sich exponentiell an den Dichtewert anpasst. Das Abbruchkriterium bezieht sich wiederum auf die Änderung der Werte der

Asymptote, wobei im Vergleich zur BESO-Methode die Differenz zwischen der oberen und unteren Asymptote mit der Toleranz ε gewählt wird.

Im SIMP-Verfahren entsteht eine unscharfe DichteVerteilung. Soll aus der Verteilungsfunktion eine Lösung erstellt werden, so müssen die Bereiche zwischen 1 und 0 bewertet werden. Die einfachste Entscheidung kann über eine Grenzdichte erfolgen. In folgender Abbildung ist das Prinzip der Ermittlung der endgültigen Lösung dargestellt. Hierbei werden alle Elemente bei der SIMP-Strategie mit einem Dichtewerte kleiner der Grenzdichte ρ_g gelöscht, sodass als Lösungsgeometrie die übrig gebliebenen Elemente verwendet werden. Beim BESO-Verfahren wird keine Grenzdichte benötigt, da als Lösungskontur eine klare Verteilung der Dichte entsteht.

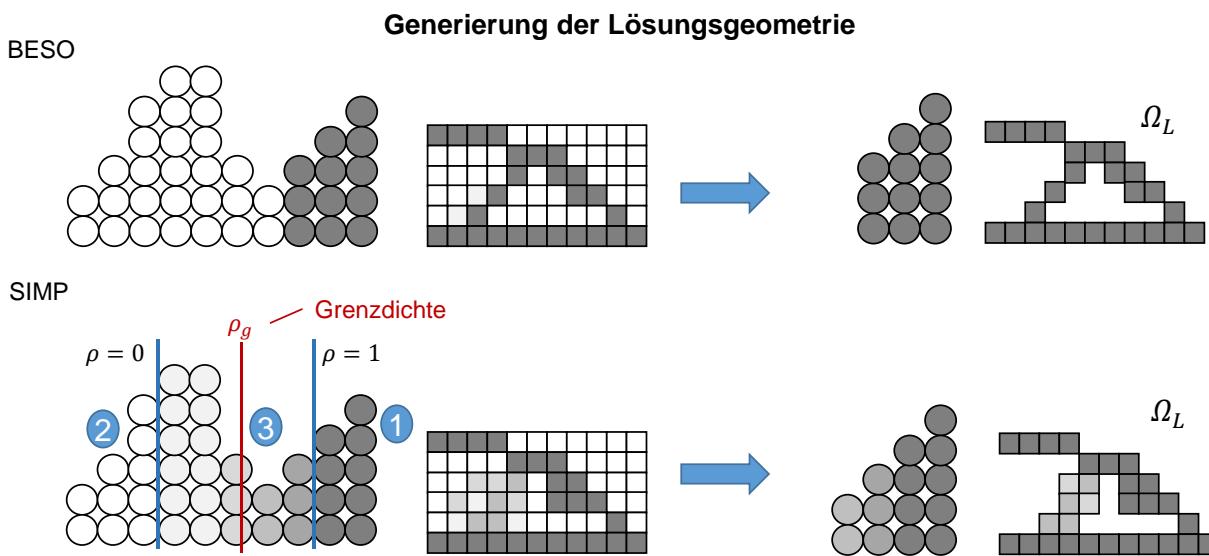


Abbildung 2-6: Erstellung der Lösungsgeometrie aus der DichteVerteilung

Zusammenfassend können verschiedenste Materialmodelle und MMA-Methoden für die Optimierung eingesetzt werden, die unterschiedlichste Lösungsstrategien benötigen. Zur Entwicklung neuer Algorithmen sollte zunächst das SIMP-Verfahren verwendet werden, da für diese Methode zahlreiche Lösungsbeispiele in der Literatur vgl. [11], [12] vorhanden sind. Zudem ist sie Standard in aktuellen Veröffentlichungen vgl. [13], [8] und findet sich in fast jedem kommerziellen Softwarepaket wie Abaqus (Solver: Tosca) oder Hypermesh (Solver: OptiStruct). Zwei Abhandlungen, die auf dem SIMP-Verfahren beruhen, werden im Folgenden vorgestellt. Diese aktuellen Publikationen beinhalten die Betrachtung der Strategie von Multimaterial-Optimierung und der Verbesserung der Geometrie hinsichtlich mehrerer Zielgrößen in einer Strömungssimulation. In diesen Veröffentlichungen und in den kommenden Abschnitten werden ausschließlich normierte Dichten ρ als Designvariable verwendet.

2.4 Aktuelle Beispiele zu topologischen Optimierungsverfahren

Ein mögliches Verfahren verschiedene physikalische Effekte kombiniert zu untersuchen, ist nach [13] entwickelt worden. Hierbei werden der Einfluss der Wärmeleitung und der Energiedissipation auf ein strömungsmechanisches System einzeln betrachtet und anschließend mit Gewichtungsfaktoren verknüpft. Für das Strömungssystem in der behandelten Optimierung wird nach [13]

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (2.4)$$

$$\rho(\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) = -\nabla P + \nabla \{\eta[\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T]\} - \alpha \mathbf{u} \quad (2.5)$$

angenommen. Die inkompressible Strömung nach der Naiver-Stokes Gleichung wird durch die Fluideigenschaften ρ , die dynamische Viskosität η , die Durchlässigkeit des porösen Fluides α , den Geschwindigkeitsvektor \mathbf{u} und den Fluideindruck P beschrieben. Zusätzlich zu dem Fluidsystemverhalten wird nach [13] die Diffusionsgleichung der Wärmeleitung mit der Heizkapazität C , dem Temperaturfeld, der Wärmequelle und der thermischen Leitfähigkeit k durch

$$\rho C(\mathbf{u} \cdot \nabla T) = \nabla \cdot (k \nabla T) + Q \quad (2.6)$$

beschrieben. Diese zwei Systeme werden mit den Gewichtungsfaktoren ω_1 und ω_2 durch

$$A_2 = \omega_1 B + \omega_2 C \quad (2.7)$$

verknüpft. Mit dieser Beschreibung kann bei einer konstanten Heizquelle Q nach [13] mit

$$B = \int_{\Omega} \{k(\gamma)(\nabla T)^2 + \rho C[T(\mathbf{u} \cdot \nabla T)]\} d\Omega \quad (2.8)$$

$$C = \int_{\Omega} \left[\frac{1}{2} \eta \sum_{i,j} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)^2 + \sum_i \alpha(\gamma) u_i^2 \right] d\Omega \quad (2.9)$$

die mittlere Temperatur und der Energieverlust durch Dissipation im Fluid minimiert werden. Hierbei wird die umgeformte Wärmeleitungsgleichung nach der Minimierung der mittleren Temperatur B und die inkompressible Navier-Stokes-Gleichung C nach der Energiedissipation aufgelöst und mit dem Porositätsfaktor γ zwischen 1 und 0 gesteuert.

Auf dem Designgebiet Ω können beide Systeme durch geeignete Wahl von γ sinnvoll kombiniert werden um anschließend eine hohe Wärmeableitung bei geringer Energiedissipation im Fluid zu erzielen. Die Systemantworten werden über die FEM ermittelt.

Die folgende Abbildung zeigt zwei Ergebnisse für den dargestellten Lastfall in der einerseits eine Gewichtung für die maximale Wärmeabfuhr und andererseits für die minimale Energiedissipation vorgestellt wird.

Koppelung der Wärmeleitung und der Fluidmechanik mit Gewichtsfaktoren

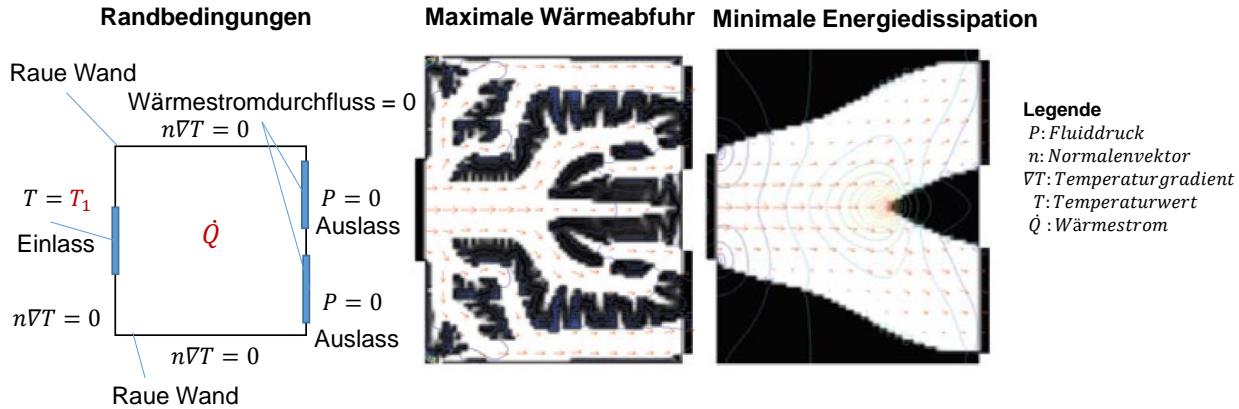


Abbildung 2-7: Lösungen der maximalen Wärmeabfuhr und der minimalen Energiedissipation nach [13].

Das Resultat der minimalen Energiedissipation zeigt eine Kontur, die einen möglichst geringen Druckverlust bezüglich der gewählten Randbedingungen ergibt. Wird eine Optimierung nach der maximalen Wärmeabfuhr durchgeführt, so entstehen einige Nebenzweige, die das Fluid und somit die Temperatur im gesamten Designraum verteilen. Aufgrund dieser unstetigen Kontur entsteht hierbei ein deutlich höherer Druckverlust. Beide Ergebnisse zeigen hinsichtlich des gewählten Optimums sinnvolle Topologien bezüglich ihrer Problemdefinitionen, sodass diese Strategie für die Koppelung verschiedenster physikalischer System einsetzbar ist.

Eine zusätzliche Variante für die Erweiterung der topologischen Optimierung ist die Verwendung von verschiedenen Materialien. Während in der gängigen Topologie Optimierung ein einzelnes Materialgebiet eingesetzt wird, kann die Verwendung verschiedenster Materialien deutlich leichtere Strukturen erzeugen. Als mögliche Ergänzung der Bestrafungsfunktion der Elementsteifigkeiten für zwei verschiedene Materialsteifigkeiten E_1, E_2 können nach [4] mithilfe von zwei verschiedenen Designvariablen ρ_1, ρ_2 und zwei separaten Bestrafungsfaktoren p_1, p_2 mit

$$E_e(\rho_1, \rho_2) = \rho_1^{p_1} \left((\rho_{2,e})^{p_2} E_1 + (1 - \rho_{2,e})^{p_2} E_2 \right) \quad (2.10)$$

angesetzt werden. Die Steuerung erfolgt bei jedem einzelnen Elemente durch zwei Dichtewerte. Diese Vorgehensweise kann für eine beliebige Anzahl verschiedener Materialen durchgeführt werden.

In der folgenden Abbildung wurde für zwei beschriebene Lastfälle eine multimaterielle topologische Optimierung durchgeführt. Die Steifigkeitsoptimierung zeigt eine Ansammlung des steifen Materials an den Außenflächen, während ein Material mit niedriger Steifigkeit als Stützstruktur dient. Dieses Verhalten wird heute in Sandwichstrukturen ausgenutzt vgl. [14], [2], [3], in denen die steifen Deckschichten mit hoher spezifischer Steifigkeit durch ein Material mit geringer Dichte auf Abstand gehalten werden. In dieser Materialverteilung wird an hochbelasteten Stellen ein festes, steifes Material eingesetzt, während an unbelasteten Stellen ein leichtes Material zur Stützung Verwendung findet. Eine ähnliche, sinnvolle Verteilung wird sich in der optimierten Struktur der Wärmeleitung genutzt, in der die Randbereiche eine geringe Leitfähigkeit aufweisen. Im Kern befindet sich eine hohe Leitfähigkeit, sodass die Energie schnellstmöglich abgeleitet wird.

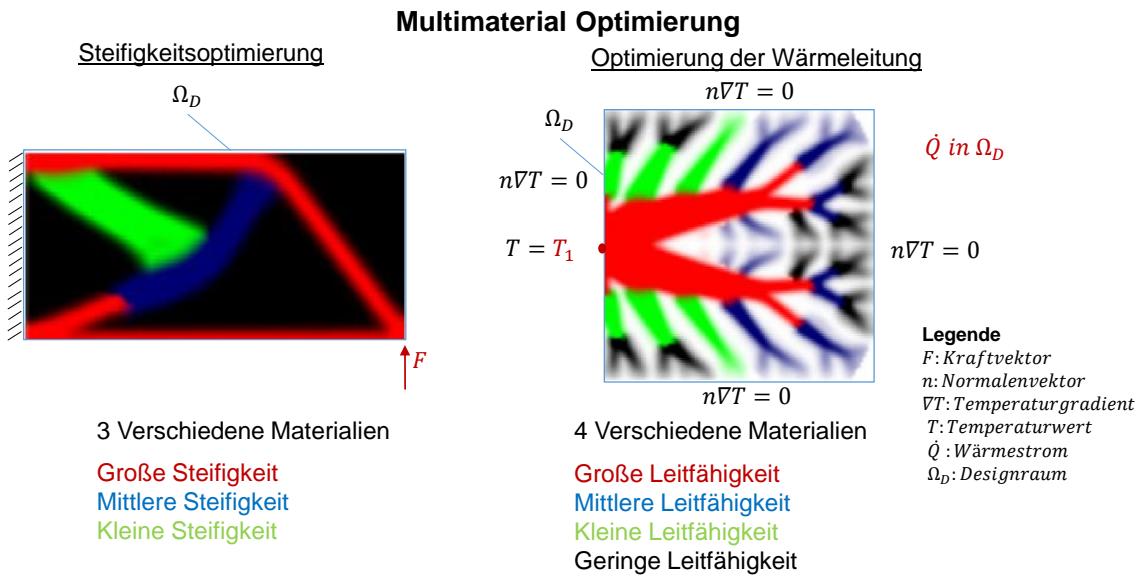


Abbildung 2-8: Topologische Optimierung durch die Verwendung von mehreren Materialien vgl. [15] [4]. Die beiden Lösungen der Steifigkeitsoptimierung und der Wärmeleitung sind jeweils aus [15] und [4] entnommen.

Die vorgestellten Forschungsergebnisse zeigen einige sinnvolle Strategien für die Behandlung von physikalischen Problemen. In den Beispielen ist einerseits der Designraum und andererseits die Zielfunktion gesteuert worden. Um eine geeignete Strategie für eine Koppelung der Wärmeabfuhrmaximierung und Steifigkeitsmaximierung zu entwerfen, werden in im kommenden Kapitel die einzelnen physikalischen Effekte separat mittels der Topologieoptimierung betrachtet. In diesen separaten Optimierungen wird das Verhalten untersucht, um geeignete Parameter und Strategieelemente zu entnehmen, mit denen abschließend eine gekoppelte Optimierungsstrategie entwickelt werden kann.

3 Methoden der Topologieoptimierung

Die unterschiedlichen Vorgehensweisen der verschiedenen Topologieoptimierungstypen durchlaufen in der Regel ähnliche Prozesse. Diese Schritte sowie deren Auswirkung sind in der nächsten Abbildung veranschaulicht.

Zunächst wird das physikalische System inklusive Lasten, Randbedingungen und Materialeigenschaften analysiert. Anschließend erfolgt die Lösung des eingelesenen Problems standardmäßig durch die finite Elemente Methode. Zusätzlich werden die Sensitivitäten für die Steuerung der normierten Dichtewerte ermittelt und gegebenenfalls durch einen Filter angepasst. Es folgt die Zuweisung der Dichte durch die Verwendung der MMA-Strategie. Nach Ablauf des Verfahrens ergibt sich im Falle eines 2D-Lastfalles die Lösungskontur anhand eines schwarz-weißen Bildes. Diese Prozesskette ist für sämtliche Problemstellungen gleich. Vgl. [4]

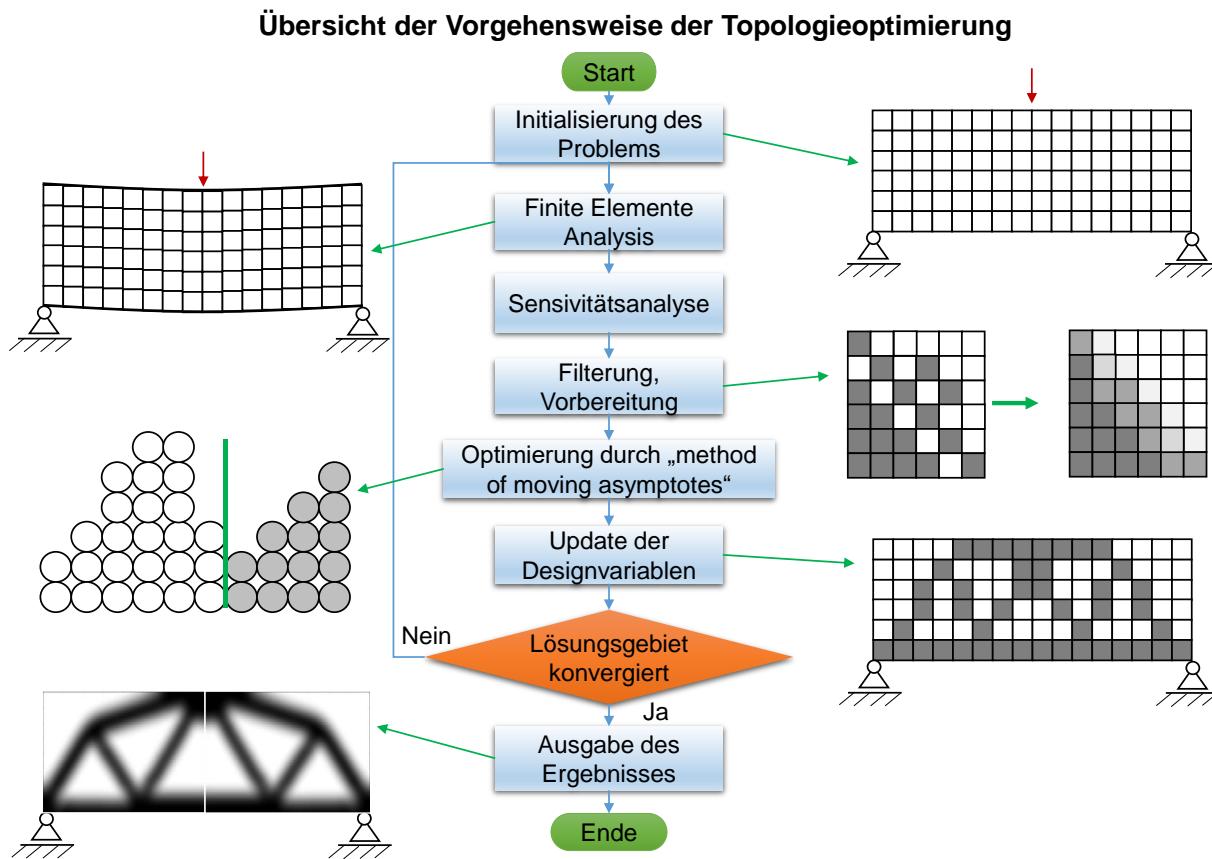


Abbildung 3-1: Grafische Darstellung des Schemata in der Topologieoptimierung. Veränderte Abzeichnung aus [4]. Hierbei sind neben der Übersetzung die Grafiken durch selbsterstellte Bilder ersetzt worden. Zusätzlich wurden eigens entwickelte Grafiken für die Filterung und des MMA-Verfahrens ergänzt.

Im nächsten Abschnitt wird die Topologieoptimierung für mechanische Probleme behandelt, die der beschriebenen Vorgehensweise folgt.

3.1 2D-Methode zur Maximierung der Steifigkeit

Für die Maximierung der Steifigkeit wird das Standardverfahren aus der Literatur vgl. [4], [3], [7] gewählt. Das SIMP-Verfahren verwendet für die Optimierung eines Gebietes eine Bestrafungsfunktion, die ungünstige Bereiche entfernt und effiziente Orte verstärkt. Bei der Steifigkeitsmaximierung wird bei lokalen niedrigen Dehnungsenergiwerten der Elastizitätsmodul verringert, um eine Materialansammlung bei großen Dehnungen zu bewirken. Als Bestrafungsfunktion wird der Ansatz nach [4], [3]

$$E_e = E_0 \cdot \rho_e^p \quad (3.1)$$

genutzt. Hierbei wird der E-modul E_e des einzelnen Elementes durch den E-Modul des Materials E_0 , der normierten Elementdichte des Materials ρ_e und einem Bestrafungsfaktor p variiert. Der Zusammenhang des gewählten Materialansatzes und dessen Auswirkung ist in Abbildung 3-2 dargestellt.

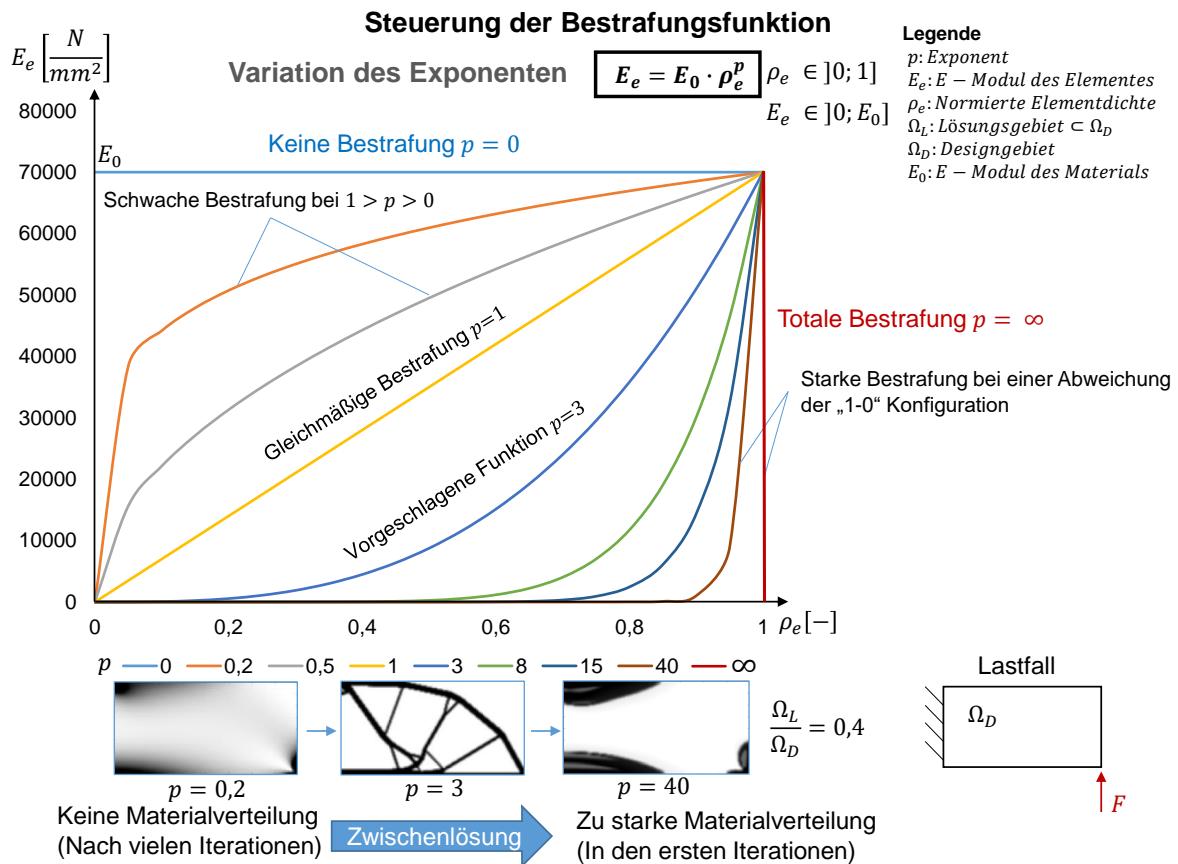


Abbildung 3-2: Darstellung des Einflusses des Bestrafungsexponenten

Bei einer Wahl des Faktors p zwischen 0 und 1 erfolgt eine schwache Bestrafung. Wird hingegen ein Wert zwischen 1 und ∞ gewählt, so entsteht eine sehr steile Bestrafungsfunktion.

Diese steile Funktion bewirkt als Ergebnis ein Tendieren der Elastizitätsmodule an die Grenzen E_0 und 0, sodass Materialkennwerte zwischen den beiden Werten kaum vorzufinden sind.

Neben dem Verlauf der Bestrafungsfunktion findet sich für einen Beispiellastfall je nach Wahl des Exponenten p ein anderes Ergebnis. Der Einsatz eines niedrigen Bestrafungsfaktors ($p = 0,2$) erzeugt selbst nach sehr vielen Iterationen eine unscharfe Struktur. Bei sehr hohen Exponenten ($p = 40$) entsteht eine klare 1 – 0 –Verteilung, allerdings konvergiert das Material sofort an die Bereiche mit hoher Dehnungsenergie, sodass sich schließlich kein Zusammenschluss der Bereiche ergibt. Eine geeignete Wahl liegt bei $p = 3$, der eine Struktur bewirkt, die einer halben Brückenkonstruktion ähnelt. Nach [4] kann die Wahl des Exponenten in 2D-Gebieten durch

$$p \geq \max \left\{ \frac{2}{1 - \nu_0}, \frac{4}{1 + \nu_0} \right\}, \quad (3.2)$$

oder in 3D-Gebieten durch

$$p \geq \max \left\{ 15 \frac{1 - \nu_0}{7 - 5\nu_0}, \frac{3}{2} \frac{1 - \nu_0}{1 - 2\nu_0} \right\} \quad (3.3)$$

erfolgen. Für Aluminium mit einer Querkontraktion ν_0 von 0,34 ergibt sich die Forderung von

$$\Omega_D \subset \mathbb{R}^2: p \geq 3,0; \quad \Omega_D \subset \mathbb{R}^3: p \geq 3,1. \quad (3.4)$$

Mit Hilfe dieser Bestrafungsfunktion steht der Zusammenhang zwischen Dichte und Steifigkeit der einzelnen Elemente fest. Um eine Steifigkeitsmaximierung mit dem Einsatz von Finiten Elementen zu erwirken, gilt nach [7] als Zielfunktion die Minimierung der Dehnungsenergie⁸

$$\Pi_{struc} = \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \mathbf{K} \mathbf{u}, \quad (3.5)$$

die durch den Verschiebungsvektor der Knoten \mathbf{u} und der Steifigkeitsmatrix \mathbf{K} errechnet werden kann.

Zusätzlich müssen für eine effiziente Optimierungsstrategie geeignete Sensitivitäten ermittelt werden, um die einzelnen Designvariablen ρ_e effizient zu steuern. Hierbei werden im folgenden Abschnitt geeignete Zusammenhänge durch das Differenzieren der Zielfunktion nach der Designvariablen für die Steifigkeitsmaximierung erschlossen. Diese können anschließend in dem in Kapitel 2 beschriebenen MMA-Verfahren eingesetzt werden, um die Verteilung des Materials zu variieren.

⁸ In analoger Weise kann nach [8], [3], [4] die Nachgiebigkeit $\mathbf{u}^T \mathbf{K} \mathbf{u}$ äquivalent minimiert werden.

3.1.1 Ermittlung der Sensitivitäten

Zur Bestimmung der Empfindlichkeiten können mehrere Größen verwendet werden. Es könnten je nach Anwendungsfall direkte Größen wie Spannungen, Dehnungen und Verschiebungen benutzt werden. So gebraucht beispielsweise die SKO-Methode, die auf eine konstante Oberflächenspannung abzielt, die Spannungsverteilung für die Sensitivitäten vgl. [2] [3]. Der gängigste Parameter in der Topologieoptimierung ist die Änderung der Energie oder der Nachgiebigkeit vom Ursprungsmodell bezüglich der verbesserten Variante. Mit jedem Iterationsschritt werden zwei Systemantworten aus einem Modell mit Vollmaterial und verteilten Material errechnet, deren Kombination für die Aussage der Sensibilitäten verwendet wird. vgl. [3], [4], [7]. Der Wert der Dehnungsenergie des Elementes kann eingesetzt werden, falls eine gleichmäßige Vernetzung vorhanden ist, da die Elementgröße somit keinen Einfluss auf den Wert der lokalen Dehnungsenergie hat. Diese Auswirkung kann durch eine Normierung der Dichte bezüglich des lokalen Elementvolumens kompensiert werden. Hierbei wird als geeignete Zielfunktion für die Optimierung ungleichmäßig strukturierter Netze die Dehnungsenergiedichte

$$\Pi_{den,struc} = \frac{1}{2} \frac{\partial \mathbf{u}^T \mathbf{K} \mathbf{u}}{\partial \Omega} \quad (3.6)$$

des Bauteiles gewählt. Angewandt auf ein diskretes Gebiet der finiten Elemente kann jedem Element e mit dem Volumen V_e , der Elementsteifigkeit \mathbf{K}_e und der Knotenverschiebung \mathbf{u}_e der Knoten am Element eine Energiedichte

$$\Pi_{struc,e} = \frac{1}{2} \frac{\mathbf{u}_e^T \mathbf{K}_e \mathbf{u}_e}{V_e} \quad (3.7)$$

zugeordnet werden. Mit diesen Energiedichten können verschiedene Elementtypen (Hexaeder, Tetraeder, Pentaeder) und Elementansätze (linear, quadratisch) gemischt und verglichen werden. Die Systemantwort „Energiedichte“ kann somit direkt zur Beschreibung der lokalen Systemeigenschaften eingesetzt werden. Durch das Differenzieren der Elementenergie oder Elementnachgiebigkeit nach der Designvariable ρ_e können geeignete Empfindlichkeiten mit

$$\widehat{\frac{\partial \Pi_{struc}}{\partial \rho_e}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \mathbf{u}_e^T}{\partial \rho_e} \mathbf{K}_e \mathbf{u}_e + \mathbf{u}_e^T \frac{\partial \mathbf{K}_e}{\partial \rho_e} \mathbf{u}_e + \mathbf{u}_e^T \mathbf{K}_e \frac{\partial \mathbf{u}_e}{\partial \rho_e} \right) \quad (3.8)$$

für das Element e ermittelt werden vgl. [16], [17], [4], [3]. Unter der Berücksichtigung der Ableitung der Systemgleichung $\mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{f}$ nach der Designvariablen gilt für ein einzelnes Element

$$\mathbf{K}_e \frac{\partial \mathbf{u}_e}{\partial \rho_e} + \frac{\partial \mathbf{K}_e}{\partial \rho_e} \mathbf{u}_e = \frac{\partial \mathbf{f}_e}{\partial \rho_e}. \quad (3.9)$$

Da die äußere Belastung nicht von den Dichtewerten abhängt, ergibt sich der Zusammenhang

$$\frac{\partial \mathbf{K}_e}{\partial \rho_e} \mathbf{u}_e + \mathbf{K}_e \frac{\partial \mathbf{u}_e}{\partial \rho_e} = 0 \rightarrow \mathbf{K}_e \frac{\partial \mathbf{u}_e}{\partial \rho_e} = -\frac{\partial \mathbf{K}_e}{\partial \rho_e} \mathbf{u}_e. \quad (3.10)$$

Wird dieser Zusammenhang eingesetzt, ergibt sich für die Sensitivität der Dehnungsenergie

$$\widehat{\frac{\partial \Pi_{struc}}{\partial \rho_e}} = -\frac{1}{2} \mathbf{u}_e^T \frac{\partial \mathbf{K}_e}{\partial \rho_e} \mathbf{u}_e \quad (3.11)$$

Die resultierenden Empfindlichkeiten der Dehnungsenergie hängen von der Änderung der Dehnungsenergie bezüglich der Steifigkeit ab. Wird der gewählte Materialansatz (SIMP-Ansatz)

$$\mathbf{K}_e = \rho_e^p \mathbf{K}_{0,e} \quad (3.12)$$

eingesetzt und differenziert, folgt für die Empfindlichkeiten der Steifigkeit des Elementes e

$$\frac{\partial \mathbf{K}_e}{\partial \rho_e} = p \cdot \rho_e^{p-1} \mathbf{K}_{0,e}. \quad (3.13)$$

Anschließend kann die Sensibilität direkt durch die Elementsteifigkeitsmatrix $\mathbf{K}_{0,e}$, die mit Vollmaterial definiert wird, und der Systemantwort der Elementknoten \mathbf{u}_e als

$$\widehat{\frac{\partial \Pi_{struc}}{\partial \rho_e}} = -p \cdot \rho_e^{p-1} \frac{1}{2} \mathbf{u}_e^T \mathbf{K}_{0,e} \mathbf{u}_e \quad (3.14)$$

ausgedrückt werden, wobei sich \mathbf{u}_e aus dem Lösen des Gleichungssystems mit einer verteilten Dichte- und Materialkennwerten ergibt. vgl. [7], [2], [4]. Wird anstatt der Dehnungsenergie die Dehnungsenergiedichte gewählt, wird hieraus

$$\widehat{\frac{\partial \Pi_{struc,den}}{\partial \rho_e}} = -p \cdot \rho_e^{p-1} \frac{\partial \mathbf{u}_e^T \mathbf{K}_{0,e} \mathbf{u}_e}{\partial \Omega_e}. \quad (3.15)$$

Als Resultat für die verwendeten Empfindlichkeiten für jedes einzelne Element e wird

$$\widehat{\frac{\partial \Pi_{struc,den}}{\partial \rho_e}} = -p \cdot \rho_e^{p-1} \frac{1}{2} \frac{\mathbf{u}_e^T \mathbf{K}_{0,e} \mathbf{u}_e}{V_e} \quad (3.16)$$

errechnet vgl. [7] [4]. Mit diesen Werten kann der Einfluss jeder einzelnen Änderung im Element selbst untersucht werden. Aufgrund der numerischen Probleme der finiten Elemente entsteht bei linearen Elementen ein künstliches Verhalten bezüglich der Elementsteifigkeiten vgl. [2]. Deshalb wird im kommenden Abschnitt ein Filter für die Sensitivitäten erläutert, der diese fehlerhaften Modelleigenschaften eliminieren kann.

3.1.2 Filterung der Sensibilitäten

In der Praxis hat sich gezeigt, dass eine direkte Verwendung der gewählten Sensibilitäten zu einer Schachbrettstruktur führt, da sich erhöhte Steifigkeitswerte, die sich rein durch den numerischen Ansatz der linearen Elemente und nicht aus dem physikalischen Problem ergeben, einstellen vgl. [3] [4]. Eine Kompensation dieses Effektes kann mit höheren Elementansätzen (quadratisch, kubisch...) bewirkt werden, die in der Regel deutlich größere Rechenzeiten in Anspruch nehmen vgl. [3] [4]. Die Notwendigkeit einer Filterung zeigt sich in der Abbildung 3-3. Der unter 3 markierte Bereich zeigt bei keiner Filterung $r_{min} = 1$ eine pixelartige Lösungsstruktur. Um dies zu verhindern, ist die Filtergrenze erhöht worden. Die Grenze von $r_{min} = 2$ entfernt die schachbrettartige Struktur, sodass glatte Konturen entstehen. Je nach Stärke des Filters können die Lösungsgebiete so beeinflusst werden, dass sich z.B. bei $r_{min} = 8$ eine einfache Rahmenstruktur ergibt. Die schwachen Zwischenstege bei der Lösung aus einer niedrigen Filterung werden durch das Erhöhen der Filtergrenze entfernt.

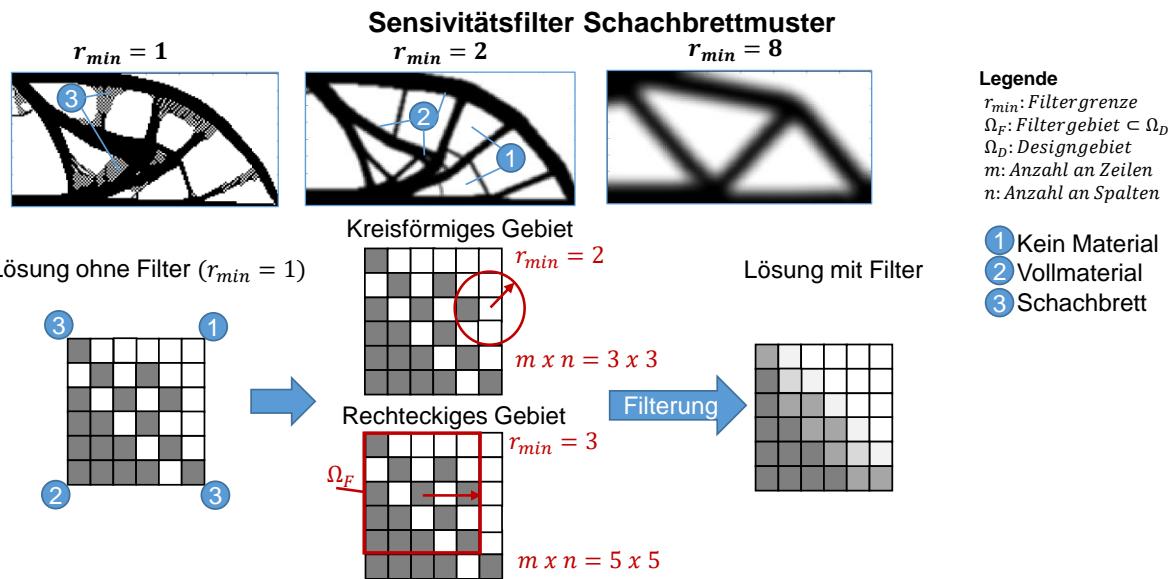


Abbildung 3-3: Beispiel der Filterung des Schachbrettmusters

Neben dem Beispiel ist das Prinzip der Filterung anhand einer einfachen Pixelstruktur abgebildet. Es resultiert eine Mittelung der Sensibilitäten und Dichten der Lösungsstruktur, die zu unschärferen Lösungskonturen ohne Schachbrettmuster führt. Um das zu untersuchende Element wird ein rechteckiges oder kreisförmiges Filtergebiet Ω_F gelegt, in dem die Empfindlichkeitswerte oder Dichtewerte aller dieser Elemente für die Ermittlung des gefilterten Ergebnisses verwendet werden. Aus der Größe dieses Gebietes Ω_F ergibt sich die $m \times n$ Dimension der im Folgenden definierten Matrizen für die Filterung.

Das Prinzip der Filterung wird mit Methoden aus der digitalen Bildbearbeitung durchgeführt.

Eine Filterung des Signals $\left(\widehat{\frac{\partial \Pi_{den,struc,e}}{\partial \rho_e}}\right)$ oder ρ_e des Elementes e erfolgt über eine sogenannte Filtermaske \widehat{H}_e ⁹. Je nach Aufbau dieser Maske können Glättungen, Schärfungen oder das Entfernen von Rauschen realisiert werden. vgl. [18] Um diese Filterstrategien einsetzen zu können, müssen die Bedingungen der Pixelstruktur eines digitalen Bildes auf das finite Elemente Netz angepasst werden. Hiermit können die Ergebnisse und entwickelten Verfahren aus der Bildbearbeitung direkt auf die Topologieoptimierung übertragen werden. Es wird somit von gleichmäßigen quadratischen 2D-Elementen¹⁰ ausgegangen, die einer Pixelstruktur ähneln. Die Filterung des Eingabesignales mit der Matrix \widehat{H}_e und den Matrixelementen $\widehat{H}_{e,i,k}$ erfolgt über den Zusammenhang

$$\widehat{\frac{\partial \Pi_{den,struc,e}}{\partial \rho_e}} = \sum_{k=1}^m \sum_{i=1}^n \widehat{H}_{e,i,k} \cdot F_{e,i,k}, \text{ oder } \rho_e = \sum_{k=1}^m \sum_{i=1}^n \widehat{H}_{e,i,k} \cdot F_{e,i,k}, \quad (3.17)$$

wobei \widehat{H}_e die verwendete Filtermaske und $F_{e,i,k}$ die Elemente der Matrix der Signalumgebung F_e für eine Filterung am Element e beschreiben. Diese Maske \widehat{H}_e kann sich elementweise unterscheiden, jedoch wird dies bei pixelartigen Netzen nur in Sonderfällen benötigt¹¹. Die folgende Abbildung zeigt ein einfaches Beispiel für die Filterung an einem Element. Als Filterumgebung werden die anliegenden Elemente in der Umgebung Ω_F gewählt, die in eine Matrix eingesortiert werden. Anschließend erfolgt die separate Multiplikation der zugehörigen Matrixelemente, deren Summation den neuen gefilterten Wert ergibt.

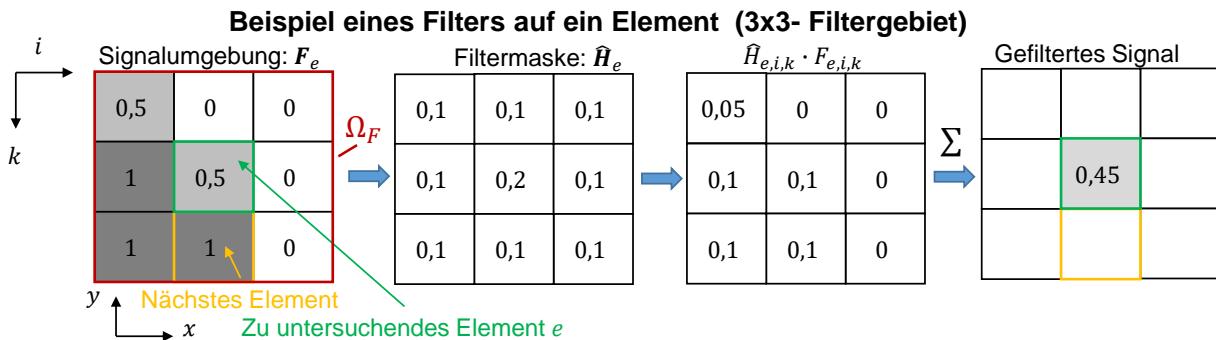


Abbildung 3-4: Beispiel der Filterstrategie

⁹ Viele dieser Masken können mit Faltungen beschrieben werden. Zusätzlich gibt es einige Varianten wie Rangordnungsfilter, die eine speziellere Form der Darstellung benötigen.

¹⁰ Für allgemeine Netze und dreidimensionale Strukturen, wird eine Modifikation dieser Filtermasken durchgeführt. Diese Modifikation befindet sich im Anhang „Einfaches Filterbeispiel und 3D-Filter“.

¹¹ Einer dieser Sonderfälle ist der Rand des Designraumes. Ein Beispiel und eine mögliche Anpassung der Matrix findet sich im Anhang „Einfaches Filterbeispiel und 3D-Filter“

Die Matrix \mathbf{F}_e setzt sich nach [4], [3] aus den umliegenden Sensivitäten und normierten Dichtewerten des i -ten Elements in x -Richtung und des k -ten Elements in y -Richtung mit

$$[\mathbf{F}_e] = \frac{1}{\rho_e} \begin{bmatrix} \rho_{1,1} \cdot \widehat{\frac{\partial \Pi_{den,struc,i,k}}{\partial \rho_{1,1}}} & \dots & \rho_{1,k} \cdot \widehat{\frac{\partial \Pi_{den,struc,i,k}}{\partial \rho_{1,n}}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{i,1} \cdot \widehat{\frac{\partial \Pi_{den,struc,i,k}}{\partial \rho_{m,1}}} & \dots & \rho_{i,k} \cdot \widehat{\frac{\partial \Pi_{den,struc,i,k}}{\partial \rho_{m,n}}} \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

im betrachteten Filtergebiet zusammen¹², wobei sich im Zentrum der $m \times n$ Matrix die Sensivität des betrachteten Elementes e befindet. In dieser werden sämtliche Signale in der Umgebung, die Einfluss auf das betrachtete Element haben sollen, in einer Matrix zusammengefasst. Die einzelnen Matrixelemente werden in diesem Fall mit der jeweiligen Elementdichte multipliziert und anschließend durch die Dichte des behandelnden Elementes skaliert. Neben diesen skalierten Sensibilitäten können ebenfalls die Dichtewerte oder unbearbeitete Sensivitäten für Matrixelemente \mathbf{F}_e zur Filterung verwendet werden, die sich je nach Anwendungsfall besser eignen vgl. [2], [12].

Die $m \times n$ Filtermaske $\widehat{\mathbf{H}}_e$ ¹³ lässt sich über den Abstand der Elemente zum Zentrum des zu untersuchenden Elementes durch die Schwerpunktkoordinaten der umliegenden Elemente $x_{i,k}, y_{i,k}$ in Ω_F mit

$$[\widehat{\mathbf{H}}_e] = \frac{1}{\sum_{k=1}^m \sum_{i=1}^n \widehat{H}_{e,i,k}} \begin{bmatrix} r_{min} - \sqrt{x_{1,1}^2 + y_{1,1}^2} & \dots & r_{min} - \sqrt{x_{1,n}^2 + y_{1,n}^2} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{min} - \sqrt{x_{m,1}^2 + y_{m,1}^2} & \dots & r_{min} - \sqrt{x_{m,n}^2 + y_{m,n}^2} \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

aufstellen vgl. [4] [3]. Je größer der Abstand eines Element zu dem Mittelpunkt des Filtergebiets Ω_F bzw. zum Element e ist, umso geringer ist der Einfluss seiner Empfindlichkeit und Dichte auf das zu untersuchende Signal.

In der Filtertechnologie von digitalen Bildern findet sich eine Reihe von weiteren Verfahren für den Aufbau der Filtermasken. Je nach Aufbau, kann der Einfluss der Elemente bezüglich der Entferungen zum Mittelpunkt des Gebietes verstärkt oder verringert werden.

¹² Für ungleichmäßige Netzstrukturen werden Gewichtungsfaktoren benötigt, die den Einsatz unterschiedlicher Volumina berücksichtigen. (siehe Anhang „Einfaches Filterbeispiel und 3D-Filter“).

¹³ Da diese Matrix normiert ist, ergibt sich automatisch eine Mitberücksichtigung von Bauteilrändern. Am Rand werden in der Regel weniger Werte aufsummiert, jedoch gewichten diese stärker. (siehe Anhang „Einfaches Filterbeispiel und 3D-Filter“)

Die standardmäßig eingesetzte AbstandsfILTERUNG in der Topologieoptimierung ähnelt dem Binomialfilter in der Bildbearbeitung, dessen Matrixwerte über Binomialkoeffizienten berechnet werden. Aufgrund deren Einfachheit, Geschwindigkeit und numerischen Genauigkeit, die auf die ganzzahligen Werte in der Matrix zurückzuführen sind, finden Binomialfilter sehr oft Gebrauch vgl. [11] [19]. Eine weitere Alternative eines linearen Filters ist die Wahl eines Gaußfilters vgl. [19] [18], der anstatt des Elementabstandes eine Gaußverteilung über das gewählte Gebiet legt. Die $m \times n$ Maske wird durch die Vektoren $\mathbf{g}(x)$ und $\mathbf{g}(y)$ mit

$$\hat{\mathbf{H}}_e(x, y) = \mathbf{g}^T(x)\mathbf{g}(y) \quad (3.20)$$

errechnet vgl. [18]. Das einzelne Element i der beiden Vektoren $\mathbf{g}(x)$ und $\mathbf{g}(y)$ lässt sich über die Gaußverteilung mit der Varianz σ und dem Erwartungswert μ als

$$g_i(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}; g_k(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(y_k-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad (3.21)$$

ermitteln. Durch die Varianz kann der Einfluss der umgebenden Signale gestaucht oder gestreckt werden. Der Erwartungswert des Filters kann 0 eingesetzt werden, da die Filterung relativ zu dem Zentrum des zu untersuchenden Elementes durchgeführt wird vgl. [18]. Es ergibt sich durch die Verwendung der separierten Form ($\mu = 0$) für die normierte Filtermatrix

$$[\hat{\mathbf{H}}_e] = \frac{1}{\sum_{m=1}^i \sum_{n=1}^k \hat{H}_{e;i,k}} \begin{bmatrix} \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{x_{1,1}^2+y_{1,1}^2}{2\sigma^2}} & \dots & \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{x_{1,n}^2+y_{1,n}^2}{2\sigma^2}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{x_{m,1}^2+y_{m,1}^2}{2\sigma^2}} & \dots & \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{x_{m,n}^2+y_{m,n}^2}{2\sigma^2}} \end{bmatrix}. \quad (3.22)$$

In der Regel findet sich in der Literatur der Topologieoptimierung vgl. [3] [4] ein Verfahren, dass $\hat{\mathbf{H}}_e$ und \mathbf{F}_e als AbstandsfILTER zusammenfasst. Hierbei wird in jeder Optimierungsiteration die Filtermatrix $\hat{\mathbf{H}}_e$ neu errechnet. Zusätzlich ist die Filtermatrix direkt in das Verfahren mit eingebunden, sodass die Verwendung eines neuen Filters sehr aufwändig ist. Die eingesetzte Separierung in eine Filtermatrix und eine Sensitivitätsmatrix aus der digitalen Bildbearbeitung bietet den Vorteil, dass die Filtermaske lediglich von der geometrischen Struktur der Vernetzung (x, y – Koordinaten) abhängt. Dadurch reicht es die Matrix \mathbf{H}_e einmalig zu errechnen, um diese anschließend für jede Optimierungsiteration einsetzen zu können. Neben der kürzeren Rechenzeit können die separierten Filtermasken $\hat{\mathbf{H}}_e$ mit weiteren Masken, die eine Glättung und Schärfung bewirken, kombiniert werden vgl. [19], [20].

Um die Auswirkung der verschiedenen Filtertypen auf ein Element zu veranschaulichen, sind in Abbildung 3-4 die einzelnen Filtertypen für ein Beispiel der Dichtefilterung in einem Gebiet von 5×5 Elementen dargestellt. Der Vergleich der verschiedenen Filtertypen auf einem rechteckigen Gebiet zeigt eine deutlich unterschiedliche Gewichtung der Komponenten. Während der AbstandsfILTER eine lineare Proportionalität zum Abstand der Elemente verwendet, bestrafen Binomialfilter und Gaußfilter bei einer Varianz von 1 die Entfernung vom Zentrum aus stärker. Des Weiteren ist die Funktion eines nichtlinearen Rangordnungsfilters (Medianfilter) abgebildet. Dieser ermittelt den neuen Filterwert durch die Wahl des Median aus einer sortierten Liste, die sich aus den einzelnen Matrixelementen $F_{e,i,k}$ zusammensetzt.

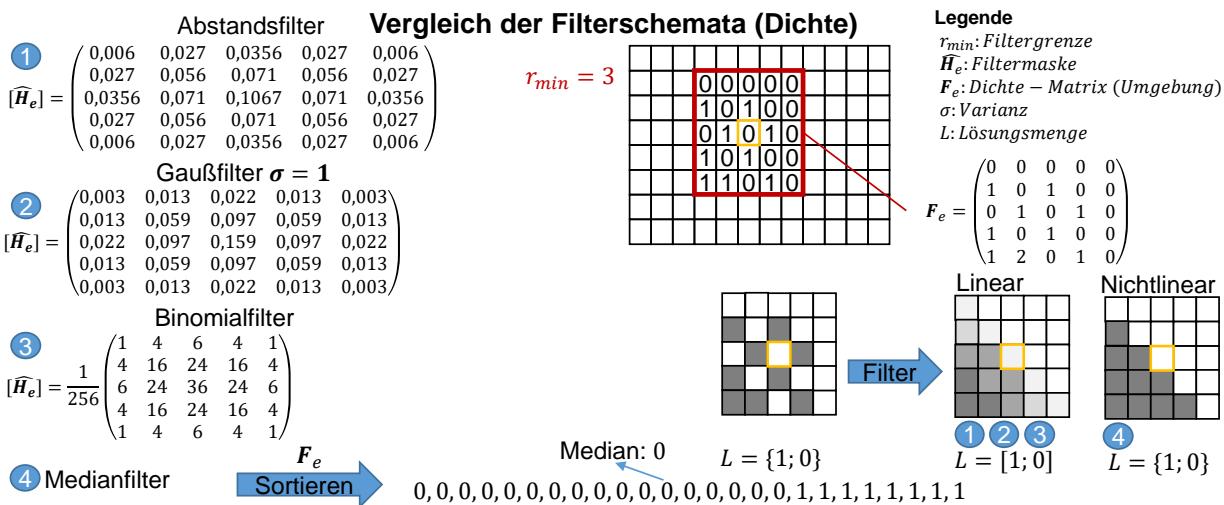


Abbildung 3-5: Beispiel der Filter- und Dichtematrix

Da der Binomialfilter eine Richtungsabhängigkeit besitzt und der Gaußfilter sehr rechenintensiv ist¹⁴ vgl. [18], wird standardmäßig der AbstandsfILTER¹⁵ für die SIMP-Methode eingesetzt. Bei der Filterung der Ergebnisse aus dem BESO-Verfahren wird der Medianfilter verwendet. Dieser erzeugt aus der klaren 1 – 0 DichteVerteilung wiederum eine 1 – 0 Verteilung erzeugt, da der Median zwischen den Werten 0 und 1 springt. Im folgenden Abschnitt wird ein Beispieldatensatz vorgestellt, an dem die wichtigsten definierten Parameter für die Steifigkeitsmaximierung variiert werden. Hierbei werden ausschließlich eine Abstandsfiltrierung sowie der Einsatz des SIMP-Verfahrens gewählt, da diese Koppelung in den meisten Topologieoptimierungsverfahren eingesetzt wird.

¹⁴ Bei ungleichmäßigen Netzen ist die Ermittlung der Varianz und Standardabweichung sehr rechenintensiv.

¹⁵ Diese linearen Filter (AbstandsfILTER, Gaußfilter, Binomialfilter) verwischen gewünschte Konturen. Für diesen Fall können nichtlineare Filter wie Medianfilter benutzt werden. Vgl. [20] Für die Selektion der Elemente im Filtergebiet sind mehrere Strategien im Anhang „Algorithmen für die Auswahl der Elemente im Filtergebiet“ beschrieben und bewertet (O-Notation, Komplexität, Berechenbarkeit).

3.1.3 Einfluss der Parameter auf einen 2D- Steifigkeitsmaximierung

Die Topologieoptimierung hinsichtlich der Steifigkeitsmaximierung lässt anhand eines Standardlastfalles aus der technischen Mechanik am besten untersuchen. Der Dreipunktbiegeversuch ist ein Standardverfahren zur Ermittlung von Biegesteifigkeiten. Ein Balken wird an seinen Enden gelenkig gelagert und anschließend mittig mittels eines Gewichts belastet. In der nächsten Abbildung sind der Lastfall des Dreipunktbiegeversuches, sowie zwei abgeleitete Lastfälle beschrieben. Hierbei kann die Anzahl von finiten Elementen halbiert werden, da das System mittels eines äquivalenten Lastfalls simuliert wird. Damit der Ersatzlastfall konsistent zum Ursprungsmodell ist, müssen die Belastungsverläufe und relativen Verformungsverläufe für alle Fälle identisch sein. Einerseits ist es möglich einen einseitig eingespannten Biegebalken mit einer halben Last am Ende des Balkens zu beaufschlagen, andererseits kann das Modell eines Balkens mit einer gleitenden mit halber Kraft belasteten Lagerung und zusätzlich einer gelenkigen Lagerung am Ende des Balkens angesetzt werden. Die Schnittgrößen und relativen Verformungsverläufe der rechten Hälfte des Dreipunktbiegelastfalles und der Ersatzlastfälle sind identisch. Diese Überlegung wird für \mathbb{R}^2 übernommen, wobei der lokale Angriffspunkt mitberücksichtigt werden muss. Da das Lager an der Unterseite des Balkens angebracht ist, muss die Ersatzlast ebenfalls an der rechten unteren Ecke, oder im zweiten Ersatzlastfall an der linken oberen Ecke angreifen.

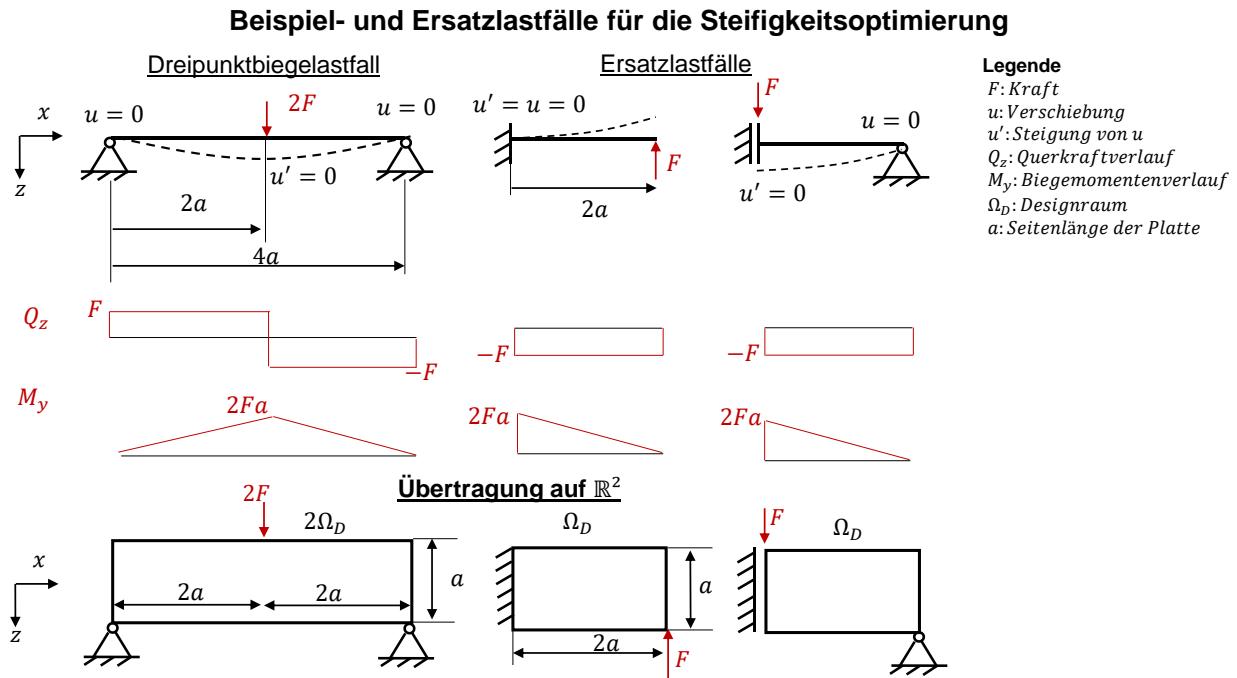


Abbildung 3-6: Definition der Wahl des Lastfalles

Aufbauend auf dem ersten Ersatzlastfall ist in der folgenden Abbildung eine Parameterstudie beschrieben, in der die grundlegenden Parameter für die Topologieoptimierung variiert werden. Insgesamt sind neun verschiedene Simulationsergebnisse, in denen von links nach rechts der Bestrafungsexponent erhöht wurde, abgebildet. Werden die einzelnen Resultate in den Spalten verglichen, so zeigt die Wahl einer kleinen Bestrafungsfunktion sehr filigrane Strukturen mit vielen Balkenelementen. Diese bionischen Konturen ähneln der entwickelten Rahmenstrukturbauweise von Michell 1904, in der für einen Biegebalken eine leichte und steife Struktur ausschließlich mit Stabelementen, die in 90° zueinander stehen, realisiert wird vgl. [2] [3] [21]. Die Wahl eines großen Exponenten sorgt für eine sehr schnelle Konvergenz mit wenig Streben, da in den ersten Iterationen sofort das gesamte Material an den größten Dehnungen angebracht wird. Der vorgeschlagene Wert nach [4] von $p = 3$ erzeugt Strukturen, die heutigen Brückenkonstruktionen ähneln.

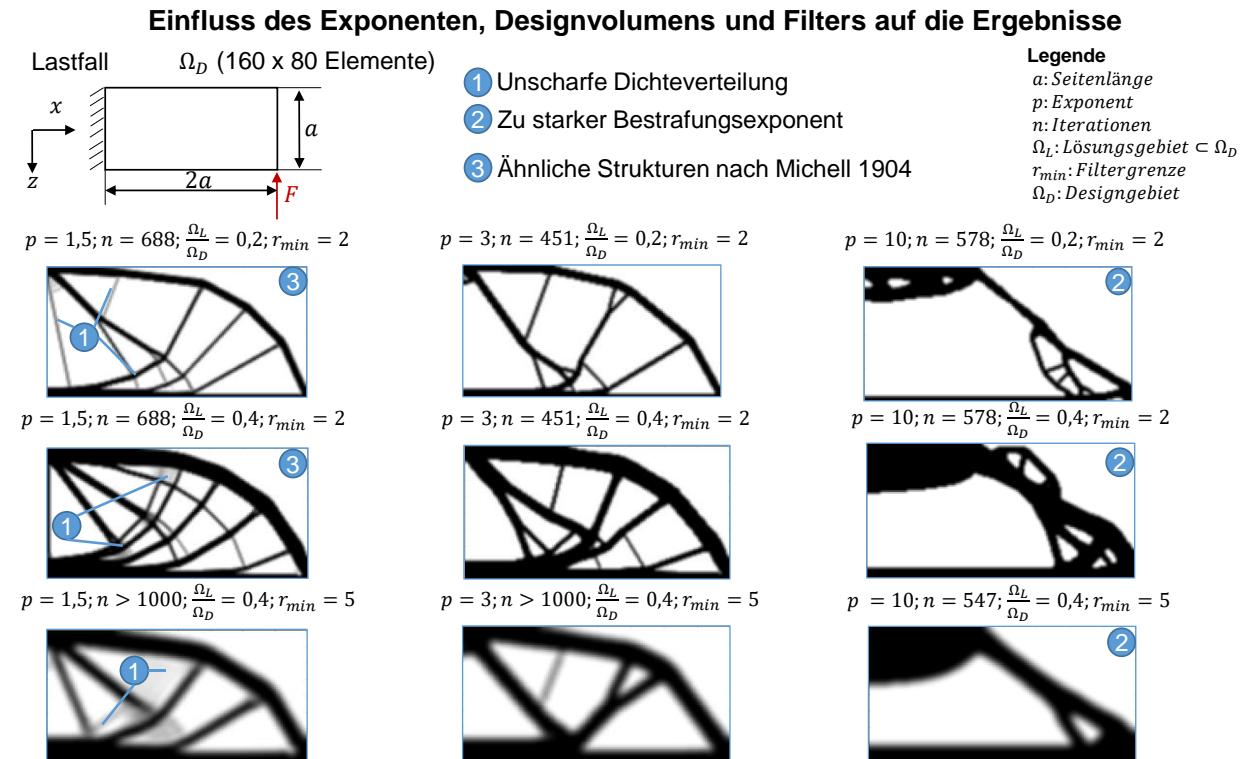


Abbildung 3-7: Parameterstudie des Ersatzlastfalles des Dreipunktbiegeversuches

Bei einer Verdoppelung des Volumens von der ersten Simulationsreihe auf die Zweite, zeigt sich eine Verstärkung der Querschnitte und eine Vermehrung der Strukturelemente. Wird nun die Filtergrenze in Reihe zwei auf Reihe drei erhöht, so verringert sich deutlich die Anzahl der Versteifungselemente, da diese Streben als „Schachbrett“ angesehen werden. Zusätzlich entsteht aufgrund der Mittelung der Sensitivitäten und Dichten eine unscharfe Dichteverteilung.

Aus dieser Analyse lassen sich geeignete Parameter herauslesen, für die eine Topologieoptimierung gelingt. So sollte für den Bestrafungsexponenten der vorgeschlagene Wert nach [4] ($p = 3$) verwendet werden, oder möglicherweise eine Variation des Bestrafungsexponenten während der Optimierung vgl. [22] benutzt werden. In Ausnahmefällen können verringerte Exponenten eingesetzt werden, um ggf. Michell-Strukturen zu erzeugen. Die Größe der Filtergrenze entscheidet über die Menge der Versteifungen. Je höher der Wert angesetzt wird, desto einfachere unscharfe Strukturen mit weniger Streben entstehen. Die minimale Grenze sollte so gewählt werden, dass im Filtergebiet mehr als ein Element bestimmt ist, da ansonsten der Effekt der Schachbrettstruktur auftritt. Das Designvolumen an sich hat den geringsten Einfluss auf die Ergebnisse, da die Grundstruktur kaum verändert wird. Je höher das Volumenverhältnis angesetzt wird, desto größer sind die Querschnitte und die Anzahl der Streben. In der nächsten Darstellung wurden für die Simulation verschiedene Elemente und grenzwertige Parameter gewählt. Einerseits wurde eine sehr starke Filtervariable festgelegt, andererseits ist mit einem sehr geringen Bestrafungsexponenten simuliert worden. Die hohe Filterung im linken Simulationsergebnis sorgt für ein Gebilde aus sechs Strukturelementen, das mit einfachen Mitteln fertigbar ist. In der rechten Lösung ist durch den niedrigen Bestrafungsexponenten eine Struktur entstanden, die der nach Michell 1904 entwickelten Rahmenbauweise ähnelt. Diese Strukturen bieten das optimale Leichtbaupotential, da eine Geometrie festgelegt wird, in der ausschließlich reine Zug- und Druckspannungen auftreten vgl. [23], [2], [21]. Um in der Topologieoptimierung neue Verfahren und Algorithmen zu überprüfen, wird in der Literatur ein Vergleich mit dieser bionischen Bauweise durchgeführt, da sie als optimale Geometrie angenommen wird.

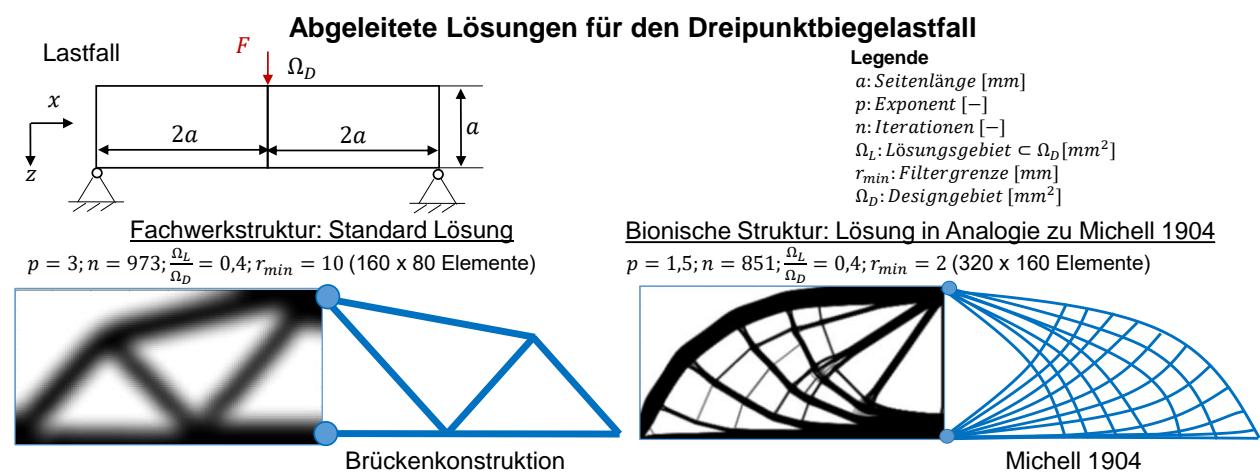


Abbildung 3-8: Anwendung der Ergebnisse für den Dreipunktbiegelastfall mit extremen Parametern

Die strukturelle Topologieoptimierung erzeugt beispielsweise für eine Brückenkonstruktion einige sinnvolle Lösungen. Hierbei zeigt sich, dass bei jedem Bauteil eine 2D- Parameterstudie durchgeführt werden sollte, auf einen breiten Lösungsbereich abzudecken. Diese Einstellungen können anschließend für dreidimensionale Methoden übertragen werden, um möglichst wenig Rechenzeit und Ressourcen zu benötigen. Abschließend könnten für geeignete Lastfälle analytische Ergebnisse wie Michell-Strukturen oder Standardfachwerkstrukturen aus der technischen Mechanik zur Überprüfung verwendet werden. Zusätzlich gibt es sehr viele Möglichkeiten die Lösungskonturen zu steuern und zu verändern, deren unterschiedliche Werte verschiedenste Lösungskonturen generieren. Die Variation des Filterverfahrens, die Veränderung der Bestrafungsfunktion oder die Wahl des Filtersignales sollten vorab durch schnelle 2D-Simulationen eingegrenzt werden. Das entstandene Verhalten kann anschließend auf 3D-Probleme übertragen werden, um effizient eine geeignete Lösung zu erzeugen. Als geeignete Startparameter sollten für die Applikation

$$r_{min} = 1$$

$$p = 3,0$$

$$\frac{\Omega_L}{\Omega_D} = 0,3 \text{ bis } 0,4$$

gewählt werden. Mit einem Filterradius von 1^{16} sollen mindestens alle Nachbarelemente in das Filtergebiet aufgenommen werden, sodass von allen Seiten ein Einfluss auf das zu untersuchende Element ausgeübt wird. Der Bestrafungsfaktor von 3 und das Verhältnis von 0,4 zeigen in der Parameterstudie die geeignetsten Lösungen und werden von [4] empfohlen.

Neben der mechanischen Gewichts- und Strukturoptimierung gilt es heutzutage weitere physikalische Effekte wie die Wärmeleitfähigkeit, die elektrische Leitfähigkeit, die Lichtbrechung und den aerodynamischen Widerstand zu verbessern. Für den gewählten Beispieldfall soll neben einem geringen Strukturgewicht ein möglichst hoher Wärmeabtrag zu erzielt werden. Im nächsten Abschnitt wird eine Methode zur topologisch thermalen Optimierung vorgestellt. Ziel ist es, eine möglichst gute Struktur für den passiven Wärmeabtrag zu erhalten. Für die erneute Filterung der Empfindlichkeiten der folgenden Optimierung wird die gleiche Strategie gewählt wie in der Steifigkeitsmaximierung. Als Filtereinstellung wird für jede Optimierung der Abstandsfilter gewählt, da dieser der Standardfilter in der Literatur ist vgl. [2] [7] [3].

¹⁶ In der Applikation wird keine direkte Filtergrenze eingesetzt, sondern eine Steuerung durch die Anzahl an umliegenden Elementen vgl. Anhang „Algorithmen für die Auswahl der Elemente im Filtergebiet“ (ungenaues Verfahren). Dies spart deutlich an Rechenzeit ein, da ein Baum als Datenstruktur verwendet wird.

3.2 2D-Methode zur Maximierung der Energieabfuhr

In der thermalen Optimierung wird eine ähnliche Strategie wie in der strukturellen Topologie Optimierung verfolgt. Es wird ebenfalls eine Bestrafungsfunktion verwendet, die ähnliche Eigenschaften bezüglich der Struktur erzeugt.

Einerseits führen zu niedrige Bestrafungsfaktoren zu kleinen Konvergenzraten, andererseits setzt bei hohen „Penalty“-Faktoren eine zu schnelle Materialverteilung ein. Für den Exponenten werden die aus Kapitel 3.1 empfohlenen Werte eingesetzt. Die thermale Bestrafungsfunktion wird mit

$$C_e = C_0 \cdot \rho_0^p \quad (3.23)$$

nach [4] aufgestellt. Der Wärmeleitkoeffizient des Elementes C_e wird durch den Wärmeleitkoeffizienten des Materials C_0 , der Dichte ρ_0 des Materials und dem Bestrafungsexponenten p bestimmt. Die Berechnung der Systemantwort erfolgt über das lineare Gleichungssystem

$$\mathbf{K}\mathbf{t} = \mathbf{q} \quad (3.24)$$

vgl. [13] [8] [16]. Hierbei ergeben sich die Temperaturwerte an den Knoten \mathbf{t} durch die inverse Wärmeleitfähigkeitsmatrix \mathbf{K}^{-1} multipliziert mit dem Lastvektor \mathbf{q} .

Die allgemeine Bestrafung hängt wiederum von der Energie ab, wobei es sich hierbei um den Wärmenergieabtrag handelt. Für die eine effiziente thermische Heizdissipation gilt es, nach [17] unter der Verwendung der finiten Elemente die thermische Erhaltung¹⁷

$$\Pi_{therm} = \frac{1}{2} \mathbf{t}^T \mathbf{K} \mathbf{t}. \quad (3.25)$$

zu minimieren. Wird die thermische Energieänderung auf das Volumen bezogen, so wird durch

$$\Pi_{den,therm} = \frac{1}{2} \frac{\partial \mathbf{t}^T \mathbf{K} \mathbf{t}}{\partial \Omega} \quad (3.26)$$

eine Energiedissipationsratendichte errechnet. Für ein einzelnes finites Element kann mit

$$\Pi_{den,therm,e} = \frac{1}{2} \frac{\mathbf{t}_e^T \mathbf{K}_e \mathbf{t}_e}{V_e} \quad (3.27)$$

eine Dissipationsratendichte für das Element e bestimmt werden, um unabhängige Elementformen und Elementtypen nutzen zu können.

¹⁷ [35], [24], [16] verwenden als $\Pi_{therm} = \mathbf{t}^T \mathbf{K} \mathbf{t}$ für die Optimierung.

Da sich die Struktur der Lösung des thermalen Problems und die zu minimierende Zielfunktion der thermischen Energieratendichte nicht von der Steifigkeitsmaximierung unterscheiden, können die Sensitivitäten¹⁸ direkt durch

$$\frac{\partial \widehat{\Pi_{therm,den}}}{\partial \rho_e} = -\frac{1}{2} p \cdot \rho_e^{p-1} \frac{\mathbf{t}_e^T \mathbf{K}_{0,e} \mathbf{t}_e}{V_e} \quad (3.28)$$

ausgedrückt werden. Die Sensitivitäten beider Probleme hängen somit in derselben Weise von der Dichte und des Bestrafungsexponenten ab. Um die gewählte Strategie zu überprüfen, wird ein Standardlastfall aus der Wärmeübertragung aufgestellt. Der thermische Beispieldesign besteht aus einer leitfähigen Struktur, die mit einem konstanten Wärmestrom beaufschlagt wird. Im Zentrum des Gebietes findet sich eine konstante Temperaturlast, die vereinfacht eine stationäre Heizquelle simuliert.

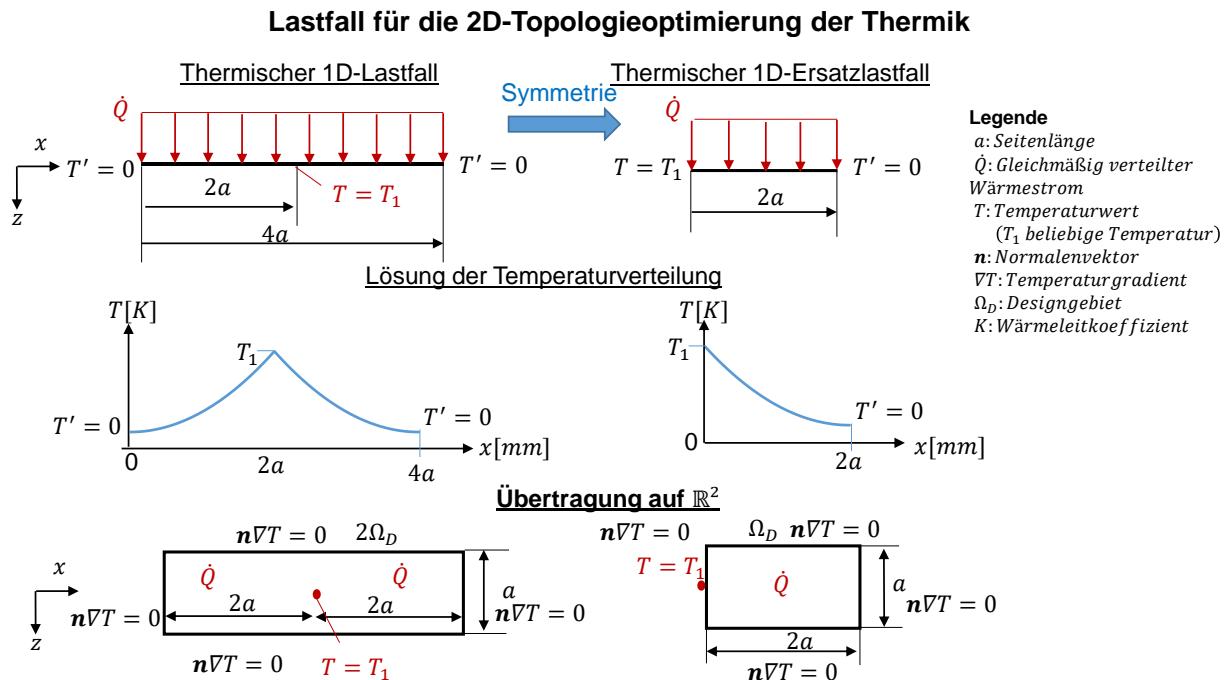


Abbildung 3-9: Definition des thermischen Lastfalles für die Topologieoptimierung¹⁹

Entscheidend für den Lastfall ist es, jedes einzelne Element mit einem gleichmäßigen Wärmestrom zu beaufschlagen. Dieser Wärmestrom auf dem gesamten Gebiet ist notwendig, da in der thermischen Topologieoptimierung²⁰ von einem Energiedissipationsproblem

¹⁸ Eine vollständige Herleitung für die thermische Optimierung findet sich im Anhang „Sensitivitäten der thermischen Berechnung“

¹⁹ Die Lösung der Temperaturverteilung findet sich im Anhang „Lösung des Lastfalles 1D-Problems der Wärmeleitung“

²⁰ Ein äquivalent in der strukturmechanischen Betrachtung wäre die Anbringung von optimalen Dämpfer- oder Crashelementen zur Optimierung des mechanischen Dämpferverhaltens.

ausgegangen wird. Jedes Element kann Energie aus dem System entnehmen, sodass als Ergebnis ein möglichst effizienter Pfad durch das Gebiet gelegt wird, um eine optimale Energieabfuhr zu bewirken. Es wird somit prinzipiell angenommen, dass an jeder Stelle des Designraumes ähnliche Konvektionsbedingungen herrschen, die von den Wärmeleitfähigkeitskoeffizienten der Elemente abhängen. Hierdurch wird das komplexe Konvektionsverhalten an der Ober- und Unterseite als konstante Wärmeabfuhr zur Vereinfachung angesetzt. Eine exaktere Alternative ist es, an jedem Element eine Kombination aus Wärmeleitung und passiver Konvektion zu verwenden, deren Lösungsermittlung allerdings deutlich mehr Rechenzeit benötigt.

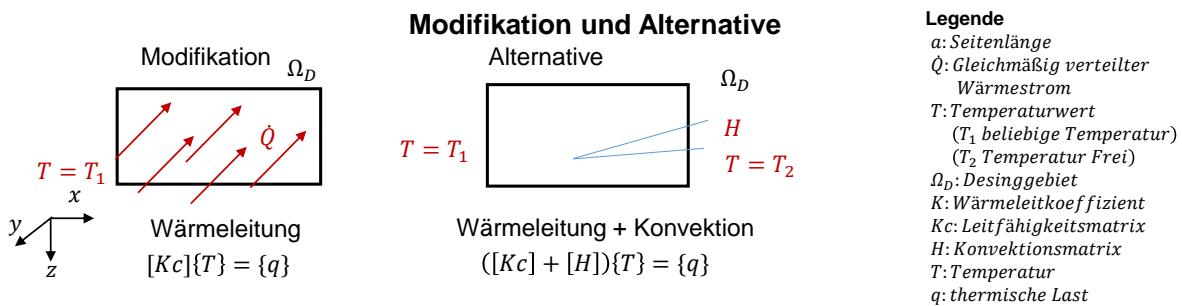


Abbildung 3-10 Vergleich der Lösungsstrategie der thermischen Aufgabenstellung

In Abbildung 3-10 ist der Vergleich der zwei Modelle „Alternativ“ und „Modifikation“ dargestellt. Die Schwierigkeit bei der Konvektion besteht in dem Aufstellen der Konvektionsmatrix H , die neben den verschiedenen Modellansätzen (turbulente, laminare, gemischte Strömung, ...) deutlich mehr Materialwerte braucht. Die Sensibilitäten und das gewählte Materialgesetz könnten prinzipiell beibehalten werden, jedoch muss ein Zusammenhang zwischen Dichte und Konvektionsmatrix und deren zusätzlicher Einfluss auf die Sensibilität hinzugefügt werden. Für die Topologieoptimierung von Heizproblemen mittels Konvektion, Passivkühlung und Aktivkühlung finden sich eine Vielzahl von Veröffentlichungen vgl. [8] [12] [24] [11], die diese Probleme behandeln. Um schnellstmöglich eine geeignete Struktur für einen passiven Wärmeüberträger zu erhalten, reicht die eingeführte Modifikation und anschließende Lösung der reinen Wärmeleitungsgleichung. Es wird somit der eingeführte Ersatzlastfall

$$\nabla(k\nabla T) + q = 0 ; \text{in } \Omega \quad (3.29)$$

$$T = 0 ; \text{in der Mitte des linken Randes} \quad (3.30)$$

$$(k\nabla T)\mathbf{n} = 0 \text{ am restlichen Rand} \quad (3.31)$$

nach [8] [4] [17] verwendet.

Diese Problemdefinition wird im Folgenden mittels des verwendeten Materialgesetzes und der Sensitivitäten optimiert. In der Abbildung 3-11 sind einige Lösungskonturen des Problemlastfalls dargestellt. Hierbei werden verschiedenste Parameter variiert, die Einfluss auf die Lösungskontur besitzen, variiert. Zusätzlich wird der Designraum mit dem Faktor k verlängert und verkleinert.

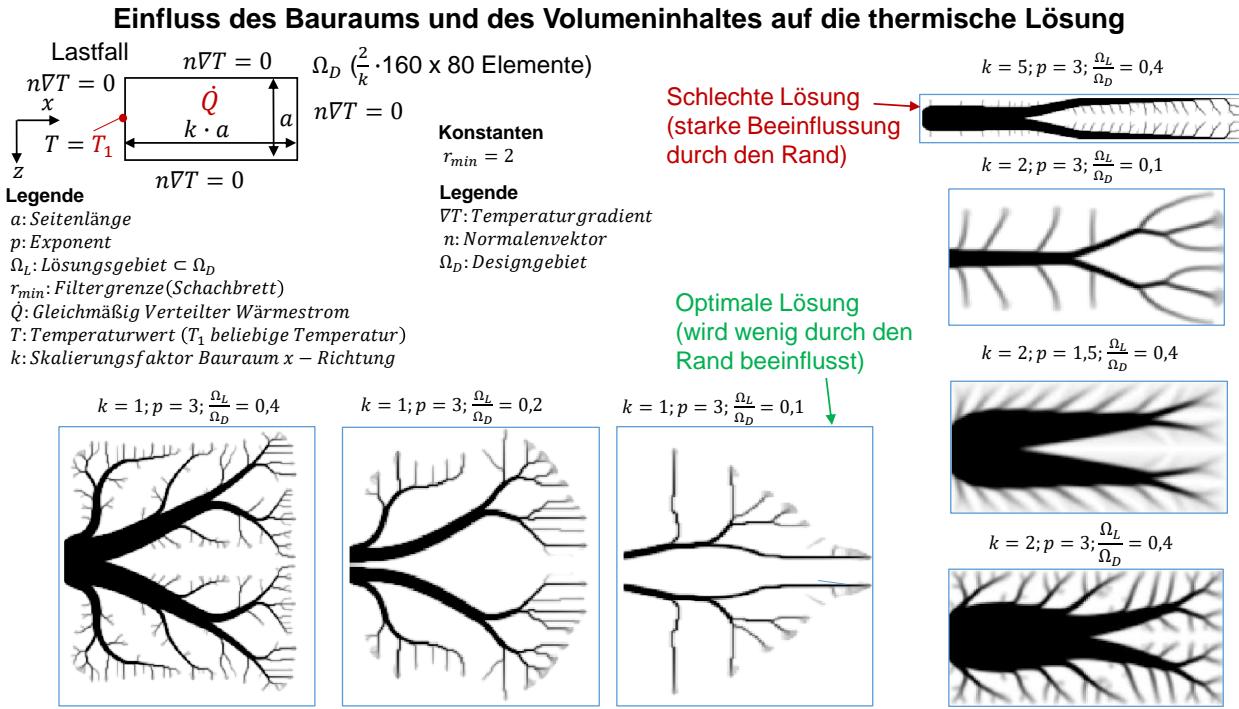


Abbildung 3-11: Parameterstudie für verschiedene BauRaumgrößen

Alle Ergebniskonturen zeigen eine baumartige Lösungskontur als optimales Wärmeabtragsproblem. Je nachdem wie einschränkend das Randgebiet wirkt, entstehen freie oder weniger freie Baumstrukturen, wie sie in der Natur zu finden sind. Während der Baum bestrebt ist möglichst viel Licht aufzunehmen, versucht das sich ergebende Lösungsgebiet möglichst effizient Wärme abzugeben. Ist der Baum durch den umliegenden Designraum²¹ stark eingeschränkt, so versucht er soweit möglich in die Höhe zu wachsen (vergleiche $k = 5$). Die optimale Baumstruktur lässt sich finden, falls keine Randbeeinflussung vorhanden sind (siehe $k = 1$). Der Baum kann sich nahezu überall frei entfalten, sodass die Äste am Ende nicht abgewinkelt werden müssen. Im nächsten Kapitel gilt es nun, die Lösungen der thermischen und mechanischen Optimierung zu koppeln, sodass die Eigenschaften Steifigkeit und Wärmeabtrag möglichst effizient maximiert werden.

²¹ Im Anhang unter „BauRaum-, Wärmeabtragsvariation“ wurden weitere BauRaumanalysen durchgeführt worden. Hierfür wird einerseits der BauRaum verändert, andererseits werden verschiedene Bereiche mit verschiedenen Wärmeabtragsraten eingestellt.

3.3 Koppelung der Zielfunktionen Steifigkeit und Wärmeleitung

Die Koppelung von verschiedenen physikalischen Bereichen in der Topologie Optimierung wurde in [13] für den Einsatz des konvektiven Wärmetransportes eines Fluides und der Koppelung von Wärmeleitung durchgeführt. Hierbei werden unterschiedliche physikalische Ergebnisse wie die Energiedissipation des Fluidsystems und ein Faktor, der proportional zur mittleren Temperatur des Designraumes bei konstanter Heizquelle, durch Gewichtungsfaktoren verknüpft vgl. [13]. Eine ähnliche Strategie vgl. [25] ist bei der Koppelung mechanischer und gießtechnischer Problemstellungen eingesetzt worden. Hierbei konnten Umformwerkzeuge deutlich besser ohne Verlust mechanischer Eigenschaften gestaltet werden als bei der Verwendung herkömmlicher Rippenstrukturen. Da durch diese Methoden bei geeigneten Parameterwahl sinnvolle Ergebnisse erzeugt werden, wird diese Strategie für die Koppelung von Steifigkeit und Wärmeleitung verwendet. Bei diesen Formulierungen, die im folgenden Abschnitt beschrieben werden, werden in jeder Iteration zwei Systemantworten errechnet. Anschließend erfolgt die Kombination der separierten Änderungsvorschläge durch den Einsatz der Gewichtung.

3.3.1 Optimierung durch Gewichtung der Designvariablen unterschiedlicher Systeme

Die gekoppelten Designvariablen ρ_{koppel} werden durch die Gewichtung der Designvorschläge $\rho_{struc}, \rho_{therm}$ aus den separat betrachteten Systemen mit

$$\rho_{koppel} = g_{struc} \cdot \rho_{struc} + g_{therm} \cdot \rho_{therm} \quad (3.32)$$

berechnet. In jeder Iteration werden durch die Gewichtung g_{struc} und g_{therm} die Dichteveerteilungen aus einer thermischen- und einer mechanischen Analyse des aktuellen Bauraumes Ω_D skaliert. Die neue Dichteveerteilung wird für die nächsten Systemanalysen verwendet. Um vergleichbare Ergebnisse zu erhalten, gilt für die Summe der Gewichtungsfaktoren für die zwei behandelnden Systeme

$$g_{struc} + g_{therm} = 1. \quad g_{struc} \in [0,1]; \quad g_{therm} \in [0,1] \quad (3.33)$$

Die Koppelung der einzelnen physikalischen Effekte kann nun mit einem Gewichtungsfaktor g_{struc} durch

$$\rho_{koppel} = g_{struc} \cdot \rho_{struc} + (1 - g_{struc}) \cdot \rho_{therm} \quad (3.34)$$

ausgedrückt werden. Wird beispielsweise $g_{struc} = 1$ gewählt, so wird eine vollständige Steifigkeitsmaximierung durchgeführt, während bei $g_{struc} = 0$ eine volle thermische Optimierung eingestellt wird.

Die folgende Darstellung zeigt für einen thermischen und mechanischen Beispieldlastfall die gekoppelten Lösungen unter Einsatz eines Gewichtungsfaktors. Bei einer Wahl zwischen 1 und 0 entstehen gräuliche Bereiche. Diese sind auf die Mittelung der Designvariablen zurückzuführen. Ergibt sich aus der thermischen Analyse in einem Gebiet ein Sollwert von 0 und aus der mechanischen Antwort ein Sollwert von 1, so resultiert bei gleichmäßiger Gewichtung ein mittlerer Wert von 0,5. Deshalb erzeugt diese Strategie eine große Anzahl an gräulichen Bereichen.

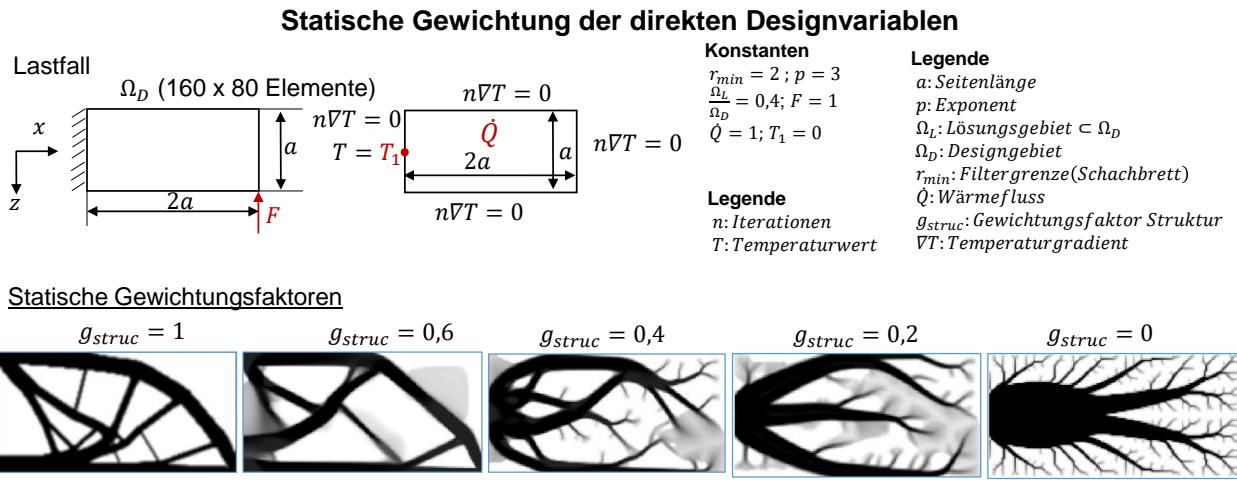


Abbildung 3-12: Parameterstudie zur statischen Gewichtung der Designvariable

Um gegebenenfalls dynamisch veränderbare Eigenschaften mittels der Gewichtsfaktoren abfangen zu können, ist es möglich veränderbare Gewichtungen einzubauen. Für eine sprunghafte Gewichtung ändert sich die Startgewichtung $g_{struc,0}$ nach einer einstellbaren Iteration n_{change} zu $g_{struc,1}$.

$$g_{struc} = \begin{cases} g_{struc,0} & \text{für } n < n_{change} \\ g_{struc,1} & \text{für } n \geq n_{change} \end{cases} \quad (3.35)$$

Eine lineare Gewichtung kann als Geradengleichung mit der Steigung $\frac{dg_{struc}}{dn}$ durch

$$g_{struc} = \begin{cases} g_{struc,0} + \frac{dg_{struc}}{dn} n & \text{für } 1 \geq g_{struc} \geq 0 \\ g_{struc,1} = 1 & \text{für } 1 > g_{struc} \\ g_{struc,1} = 0 & \text{für } 0 > g_{struc} \end{cases} \quad (3.36)$$

verwendet werden, wobei Gewichtungen außerhalb von [1,0] ausgeschlossen sind. Mit jeder Iteration steigt oder sinkt der Gewichtungsfaktor g_{struc} , sodass ein Wachsen der Lösung simuliert wird. Durch diese einfachen Ansätze können verschiedenste gekoppelte Lösungen erstellt werden.

Abbildung 3-13 zeigt die Lösungskontur bei der Anwendung einer sprunghaften und linearen Gewichtung. Einerseits wurde eine Steigung gewählt, die zum Startpunkt und Endpunkt eine gleichmäßige gegenläufige Gewichtung erzielt, andererseits werden die Faktoren von 1 auf 0,5 stetig gesenkt bzw. von 0 auf 0,5 angehoben. Da in unserem Fall das Systemverhalten zwischen Steifigkeit und Wärmeleitung kaum Einfluss aufeinander haben, ist eine dynamische Gewichtung bezüglich des Lösungsverhaltens unnötig. Bei einer Betrachtung der Resultate stellt sich in jeder Lösung eine Unschärfe ein. Je nachdem wie schnell die Faktoren geändert werden, ergeben sich verschiedene Lösungstypen. Zusätzlich sind die Lösungsgebiete abhängig von den Iterationsschritten. Eine konvergente Lösung wird mit dieser Strategie nicht erfolgen, bzw. lediglich für $n \rightarrow \infty$, da in diesem Fall wieder eine statische Gewichtung vorhanden ist.

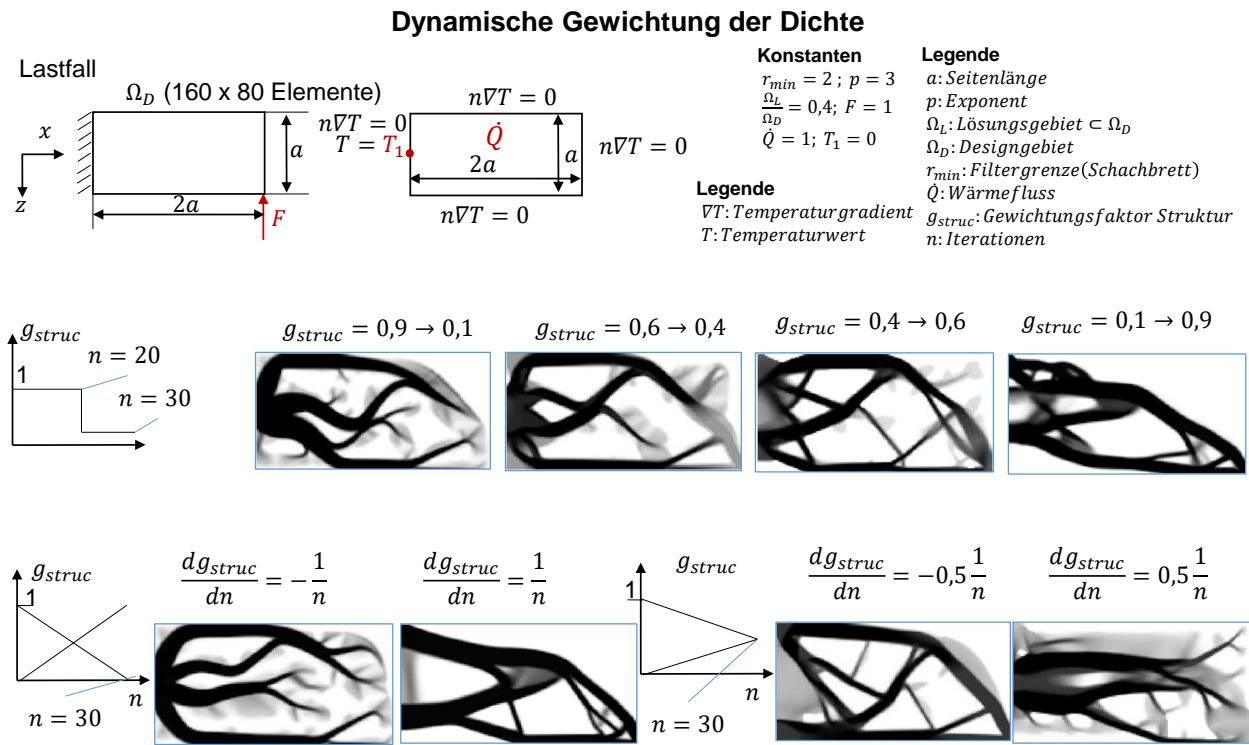


Abbildung 3-13: Parameterstudie zur dynamischen Gewichtung der Designvariablen

Diesbezüglich erzeugt die statische Gewichtung ein stabiles Lösungsverhalten, da die Lösungsstrategie unabhängig von der Anzahl der Iterationen ist. Aus diesem Grund eignen sich die statischen Gewichtungsfaktoren besser für eine Koppelung von zwei Zielfunktionen. So wird in dem Beispiel eine statische Gewichtung von $g_{struc} = 0,4$ und $g_{struc} = 0,6$ als eine mögliche Einsatzvariante simuliert, die jedoch sehr viele gräuliche Bereiche aufweist. Diese gräulichen Bereiche zeigen keine gewünschte 0 – 1 Situation, da viele Dichtewerte gemittelt werden. Wenn

es einige Bereiche gibt, in dem die Dichte aus der thermischen Rechnung 0 und aus der mechanischen Rechnung 1 betragen, entsteht eine unscharfe Dichte des Wertes von g_{struc} .

Um das Verhalten günstiger zu gestalten, können die Sensitivitäten gewichtet werden, sodass eine Mittelung der direkten Dichtewerte vermieden wird.

Die Koppelung der Sensitivitäten $\widehat{\frac{\partial \Pi_{koppel}}{\partial \rho_{e,koppel}}}$ aus der Systemantwort der Struktur $\widehat{\frac{\partial \Pi_{struc}}{\partial \rho_{e,struc}}}$ und der Systemantwort der thermischen Analyse $\widehat{\frac{\partial \Pi_{therm}}{\partial \rho_{e,therm}}}$ können für das Element e mit

$$\widehat{\frac{\partial \Pi_{koppel}}{\partial \rho_{e,koppel}}} = g_{struc} \cdot \widehat{\frac{\partial \Pi_{den,struc}}{\partial \rho_{e,struc}}} + (1 - g_{struc}) \cdot \widehat{\frac{\partial \Pi_{den,therm}}{\partial \rho_{e,therm}}} \quad (3.37)$$

gewichtet werden, wenn die Systeme der jeweiligen physikalischen Probleme nicht voneinander abhängen²². So wird in diesem Fall angenommen, dass die thermischen Dehnungen und der Einfluss der Verschiebungen auf die Temperaturverteilung vernachlässigt werden können. Durch das Einsetzen der jeweiligen Gradienten ergibt sich anschließend mit der Steifigkeitsmatrix K_{struc} , der Wärmeleitmatrix K_{therm} , den Verschiebungen u und den Temperaturen t

$$\widehat{\frac{\partial \Pi_{koppel}}{\partial \rho_{e,koppel}}} = -pp_e^{1-p} \frac{1}{2} (g_{struc} \cdot u^T K_{e,struc,0} u + (1 - g_{struc}) \cdot t^T K_{e,therm,0} t). \quad (3.38)$$

Da die Gewichtung nicht durch den absoluten Unterschied in den Sensitivitäten sondern durch den Gewichtungsfaktor g_{struc} durchgeführt werden soll, werden die einzelnen Sensitivitätswerte bezüglich ihrer Mittelwerte m_{struc} und m_{therm} mit

$$\widehat{\frac{\partial \Pi_{den,koppel}}{\partial \rho_{e,koppel}}} = g_{struc} \cdot \frac{1}{m_{struc}} \widehat{\frac{\partial \Pi_{den,struc}}{\partial \rho_{e,struc}}} + \frac{1}{m_{therm}} (1 - g_{struc}) \cdot \widehat{\frac{\partial \Pi_{den,therm}}{\partial \rho_{e,therm}}} \quad (3.39)$$

angepasst. Ein Einfluss der Materialparameter kann hierdurch gedämpft werden, da ein absoluter Materialkennwert nicht mehr entscheidend ist. Aus statistischer Sicht ist es gegebenenfalls ratsam als Alternative den Median zu wählen, der bei einer ungünstigen Verteilungsfunktion der Sensitivitäten eine bessere Aussage trifft.

Im Allgemeinen werden für die Gewichtungsfaktoren der Empfindlichkeiten ausschließlich konstante Werte gewählt, da die Probleme der Wahl von dynamischen Faktoren denselben Einfluss auf das Lösungsverhalten haben wie bei der Gewichtung der Designvariablen direkt.

²² Im Anhang befindet sich eine Erläuterung zur Ermittlung der Sensitivitäten von physikalischen Problemen, die sich gegenseitig beeinflussen.

Die folgende Abbildung zeigt die Gewichtung der Sensitivitäten für statische Gewichtungsfaktoren. Im Vergleich zu der vorherigen statischen Gewichtung entstehen klare 1 – 0 Gebilde, die gegen eine gute Zwischenlösung konvergieren.

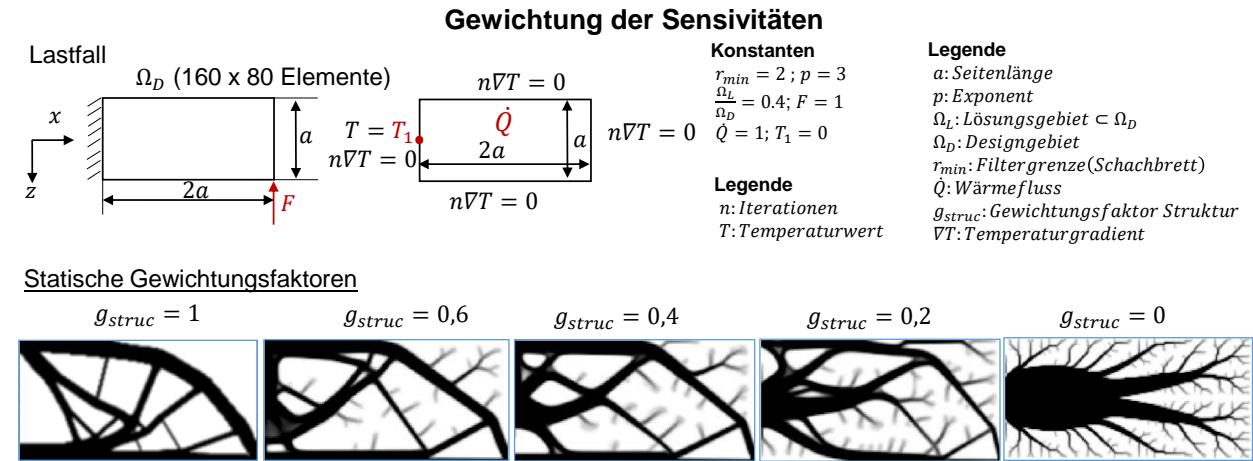


Abbildung 3-14: Gewichtung der Sensitivitäten

Zusammenfassend können durch die Gewichtungsstrategie mehr sinnvolle Varianten erstellt werden als bei einer getrennten Betrachtung der Zielfunktionen. So werden Strukturen erzeugt, die die beiden einzelnen Probleme im Mittel gut erfüllen, während bei einer Optimierung nach einer physikalischen Größe die weitere Zielfunktion nur bedingt oder schlecht erfüllt wird.

Oftmals sollen vorhandene Lösungen verwendet werden, um aufbauend auf diesen eine Verbesserung nach einer weiteren Zielfunktion durchzuführen. Hierbei wird ein eingeschränkter Designraum verwendet, sodass die gekoppelte Lösung entlang eines vorhandenen Lösungsgebietes wächst. Der nachfolgende Abschnitt beschreibt den Einsatz dieser Methode um einerseits bei der steifigkeitsoptimalen Lösung neue Wärmeableitelemente einzufügen und andererseits bei der thermaloptimierten Lösung Streben und Verstärkungen zu adaptieren.

3.3.2 Multiphysikalische Optimierung durch Addition

Die Optimierung durch Addition erfolgt über mehrere Iterationen der optimierten konvergierten Lösungsgebiete. In der ersten Iteration wird das optimale Lösungsgebiet $\Omega_{L,1}$ bezüglich einer einzelnen Zielfunktion gewählt, deren Eigenschaften für die gesamte Lösung stärker gewichtet. So wird beispielsweise eine reine Steifigkeitsoptimierung durchgeführt, auf der anschließend entlang des Lösungsgebiets Material adaptiert wird, deren Verhalten die Wärmeabfuhr begünstigt.

Da das Lösungsgebiet aus der ersten Iteration durch die unterschiedliche Dichteverteilung nicht eindeutig eine $1 - 0$ Konstellation ergibt, wird ein Gebiet $\Omega_{L,\varepsilon,i}$ durch die zusätzliche Ungleichheitsrestriktion $\rho - \rho_{grenz} > 0$ mit

$$\Omega_{L,\varepsilon,i} = \Omega_{L,i} (\rho > \rho_{grenz}) \quad (3.40)$$

eingeschränkt. Wird als Grenzwert der Dichte 0,9 gewählt, so werden die Lösungen entfernt, deren zugewiesene Designvariable kleiner als ρ_{grenz} ist. Anschließend wird der aktuelle Designraum $\Omega_{D,i}$ mit

$$\Omega_{D,i+1} = \Omega_{D,i} \setminus \Omega_{L,\varepsilon,i} \quad (3.41)$$

durch die gefilterten Lösungen verkleinert. Für die weitere Optimierung wird auf dem Gebiet $\Omega_{L,\varepsilon}$ die Lösung nach einer neuen Zielfunktion hinzugefügt. Zusammenfassend ergibt sich für das Verhältnis Lösungsgebiet/Designgebiet der Zusammenhang

$$\frac{\Omega_{L,i+1}}{\Omega_{D,i+1}} = \begin{cases} \frac{\Omega_{L,i}}{\Omega_{D,i}} & \text{für } n < n_{change} \\ \frac{\Omega_{L,i} - \Omega_{L,\varepsilon,i}}{\Omega_{D,i}} + \frac{\Omega_{Lad}}{\Omega_D} & \text{für } n \geq n_{change} \end{cases} \quad (3.42)$$

$$\Omega_{D,i+1} = \Omega_{D,i} \setminus \Omega_{L,\varepsilon,i} \quad \text{für } n \geq n_{change}. \quad (3.43)$$

Ab der Iteration n_{change} , die anhand der Konvergenz der Lösungen festgesetzt wird, wird eine Addition mit einer Lösungsgebieterweiterung durchgeführt. Das Lösungsraumverhältnis vergrößert sich durch ein zusätzliches einstellbares Adoptionsverhältnis $\frac{\Omega_{Lad}}{\Omega_D}$ und der ungenutzten Gebiete $\frac{\Omega_{L,i} - \Omega_{L,\varepsilon,i}}{\Omega_{D,i}}$, falls ein Dichtewert kleiner als ρ_{grenz} ist. Die Anpassung der Designvariablen wird mit

$$\rho_{i+1} = \begin{cases} 1 & \text{für } \rho_i > \rho_{grenz} \\ \frac{\Omega_{L,i+1}}{\Omega_{D,i+1}} & \text{für } \rho_i \leq \rho_{grenz} \end{cases} \quad (3.44)$$

durchgeführt, sodass bei jeder Zielfunktionsänderung eine gleichmäßige Verteilung der Dichte im verkleinerten Designgebiet $\Omega_{D,i+1}$ vorliegt. Für weitere Iterationen nach einer Änderung der Zielfunktion wird somit $\Omega_{L,\varepsilon,i}$ als Vollmaterial und $\Omega_{D,i+1}$ als gleichmäßig verteiltes poröses Material angesetzt, sodass das Verhalten des neuen Designgebietes zurückgesetzt wird. Diese Adaption kann mehrmals wiederholt werden, so dass abwechselnd z.B. eine Maximierung der Steifigkeit oder eine Maximierung der Wärmeabfuhr eingestellt werden kann.

In der folgenden Abbildung sind die Lösungen für den kombinierten Lastfall mittels Adaption aufgelistet, in der die Zielfunktion sprunghaft wechselt. Wird mit der Strukturmaximierung begonnen, so entwickelt sich die weitere Struktur entlang dieser. Die Wärmemaximierung passt sich dem Lösungsgebiet aus $\frac{\Omega_{L,1}}{\Omega_{D,1}}$ an und entwickelt einzelne Zweige an der optimierten Struktur.

Eine weitere Steifigkeitsmaximierung, die sich dem neuen Lösungsgebiet $\frac{\Omega_{L,2}}{\Omega_{D,2}}$ anpasst, bewirkt eine Verstärkung der einzelnen Streben. Durch mehrere Iterationen werden jeweils neue Stege und Äste für die Steifigkeits- und Wärmeabtragsmaximierung hinzugefügt. Die Verwendung des wärmeabfuhrmaximierte Lösungsgebietes als Startentwurf zeigt eine deutliche Vernachlässigung der Steifigkeitsanforderung in der gesamten Prozesskette.

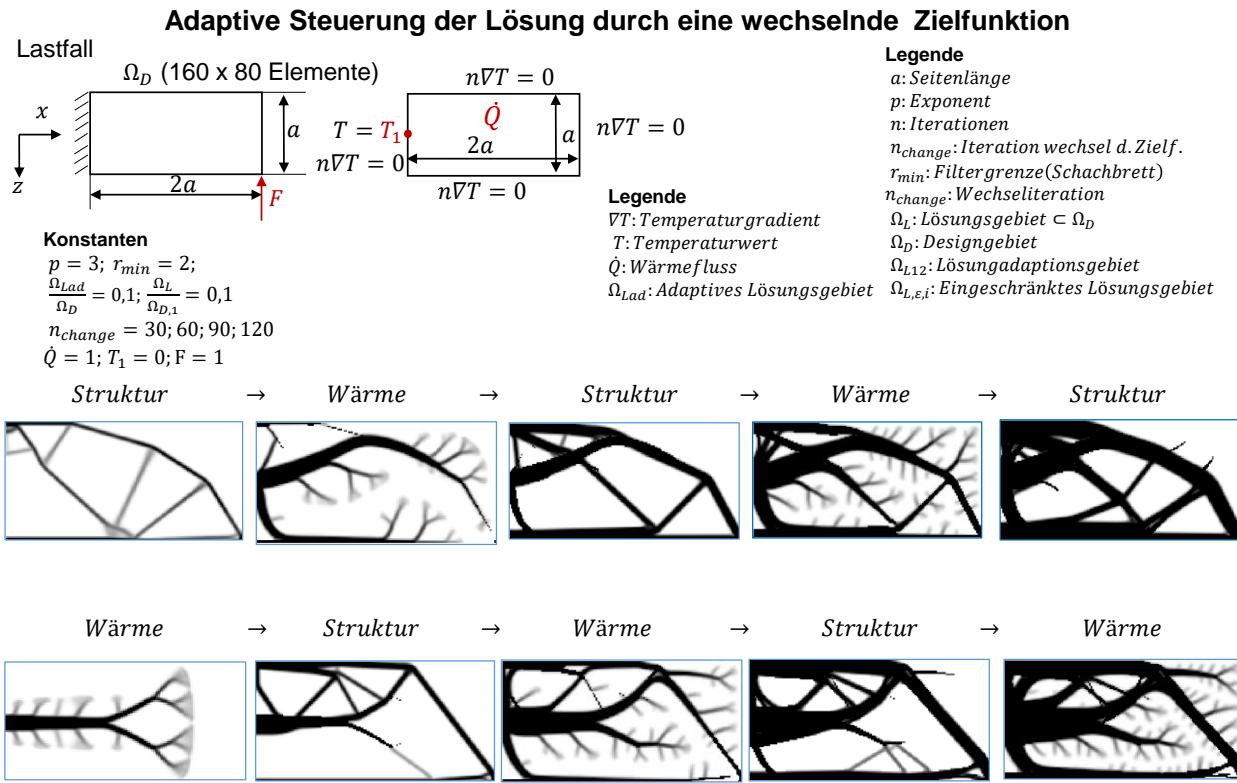


Abbildung 3-15: Wechselhafte Optimierung eines Gebietes nach zwei Zielfunktionen

Es zeigt sich, dass eine geeignete Wahl des Grundgerüsts sehr stark auf die Ausrichtung des Lösungsgebietes beiträgt. Um bessere Lösungen zu erzeugen, könnte als Adaption eine gewichtete Optimierung durchgeführt werden. Diese Kombination der adaptiven Strategie und der gewichteten Methode wird im kommenden Kapitel vorgestellt, sodass bessere Additionen entstehen, die beide Zielfunktionen berücksichtigen.

3.3.3 Kombination der Gewichtungsmethode und der additiven Strategie

Die beiden Verfahren für die Mehrzieloptimierung zeigen im Einzelnen verschiedene Gestaltungsvorschläge, aus denen ein Bauteil entwickelt werden kann. Eine gleichzeitige Verwendung beider Strategien könnte eindeutigere und bessere Ergebnisse erzeugen, sodass die Bewertung für einen Strukturvorschlag erleichtert wird.

Um den Einfluss einer gewichteten Erweiterung einschätzen zu können, wird jeweils auf eine reine steifigkeitsverbesserte und wärmeabfuhroptimierte Lösung eine Adaption mit gewichteter Zielfunktion durchgeführt. In der folgenden Abbildung sind die Ergebnisse dieser Koppelung bei einer Gewichtung der Designvariablen dargestellt.

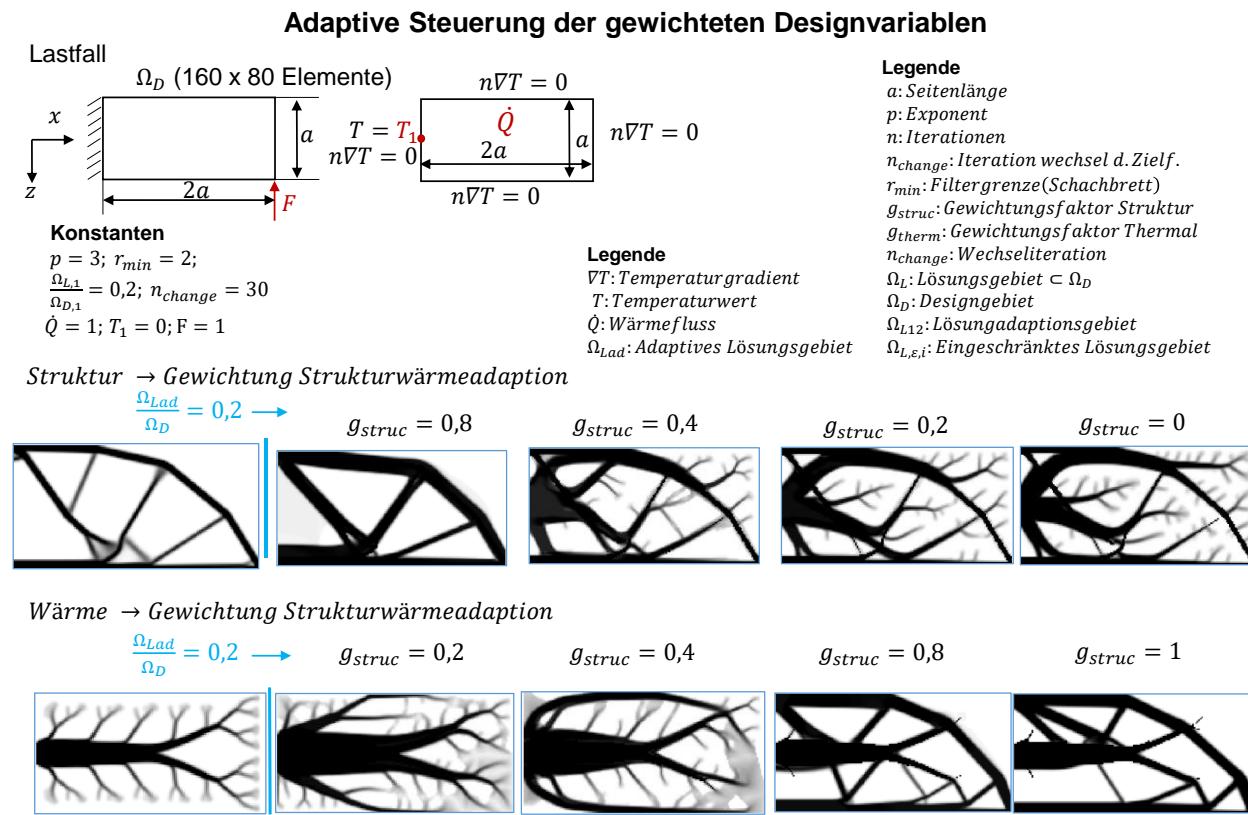


Abbildung 3-16: Verwendung beider Verfahren für die Optimierung

Die Grundstruktur aus der reinen Optimierung ist in jeder Lösung bei jeder Gewichtung zu erkennen. Wird keine Gewichtung gewählt ($g_{struc} = 1; g_{struc} = 0$), so ignoriert die Adaption die vorherige Zielfunktion. Die Kontur des Basisgebietes wird wenig ausgenutzt. Eine Gewichtung zeigt deutlich bessere Resultate, da sich die neuen Lösungsgebiete entlang der Vorherigen entwickeln. In den Lösungsgebieten wiederum erkennt man eine unklare DichteVerteilung. Diese kann durch den Einsatz der Empfindlichkeiten als Gewichtungsvariable kompensiert werden.

Die folgende Abbildung präsentiert Lösungen der Kombination von Adaption und Gewichtung von Empfindlichkeiten. Die Lösungsstruktur ähnelt in vielen Resultaten der vorherigen gekoppelten Strategieformulierung. Eine Adaption mit einer Gewichtung bewirkt wiederum eine Anpassung der neuen Lösung an die Gebiete. Im Gegensatz zur Gewichtung der Dichte ergeben sich hierbei keine gräulichen Lösungen, sondern klare 1 – 0 Strukturen.

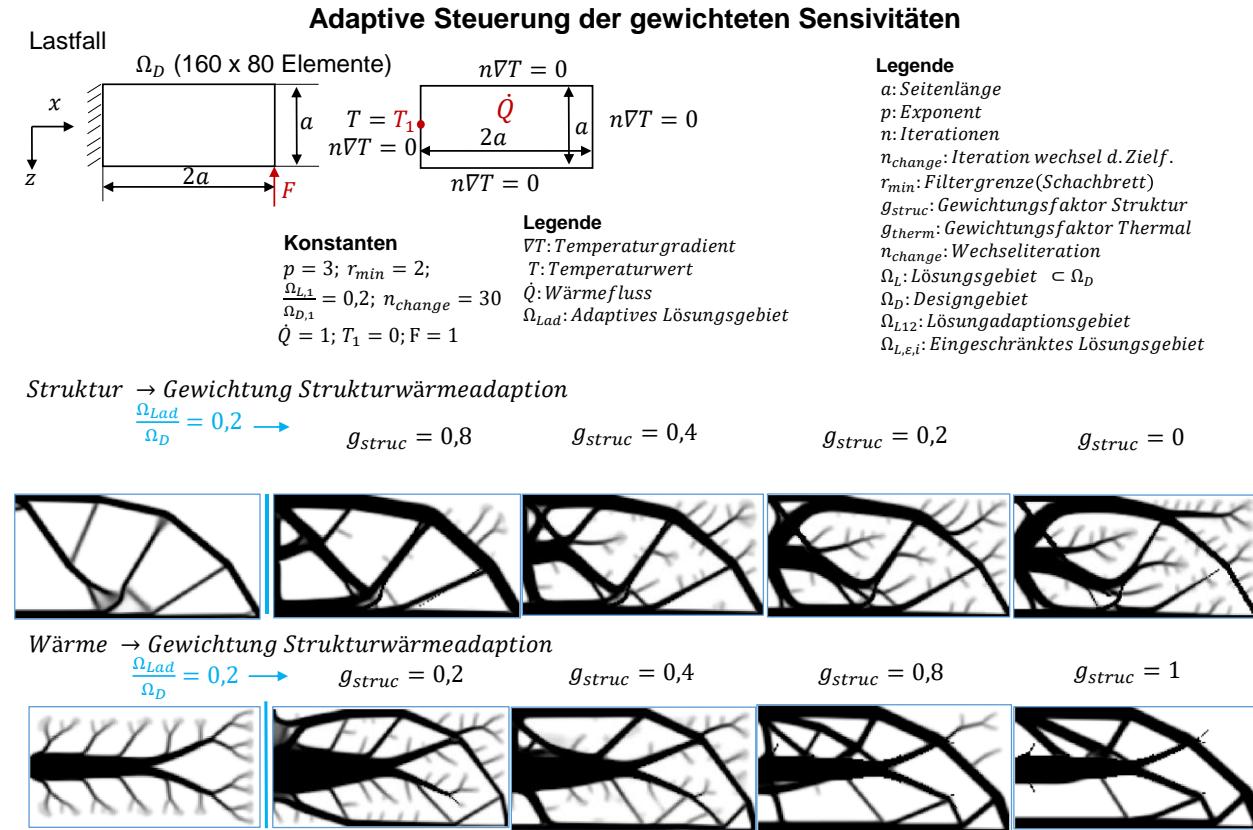


Abbildung 3-17: Koppelung der Gewichtung der Sensitivitäten und der adaptiven Steuerung

Eine Verbindung der Optimierungsvarianten erzeugt bei geeigneten Gewichtungsfaktoren bessere Ergebnisse, als bei einem strikten Wechsel der Zielfunktionen. Je nach Problemstellung könnte als Startentwurf zusätzlich eine gewichtete Lösung gewählt werden, um möglichst beide Zielfunktionen zu erfüllen. Wird etwas genauer auf die Problemformulierung eingegangen, so ist es sinnvoll, für die letzte Lösung adaption eine thermische Analyse zu verwenden, da die thermale Adaption nahezu unabhängig von der Strukturoptimierung Zweige hervor bringt (siehe $g_{struc} = 0$). Eine Addition der Strukturoptimierung als letzten Prozessschritt würde die Zweige entfernen, sodass die Wärmeabtragsmaximierung deutlich verringert wird (siehe $g_{struc} = 1$). Zusätzlich ist es sinnvoll eine statisch optimierte Lösung als Startbereich zu wählen, da sich diese Struktur für eine Erweiterung besser eignet.

Bei einem Vergleich der Verfahren in folgender Abbildung zeigen sich die Vor- und Nachteile der einzelnen Verfahren. Wird eine reine Steifigkeitsmaximierung durchgeführt, so wird die Wärmeabfuhr moderat abgedeckt. Die Optimierung nach der Wärmedissipation erzeugt keine sinnvolle Lösung für das mechanische Problem.

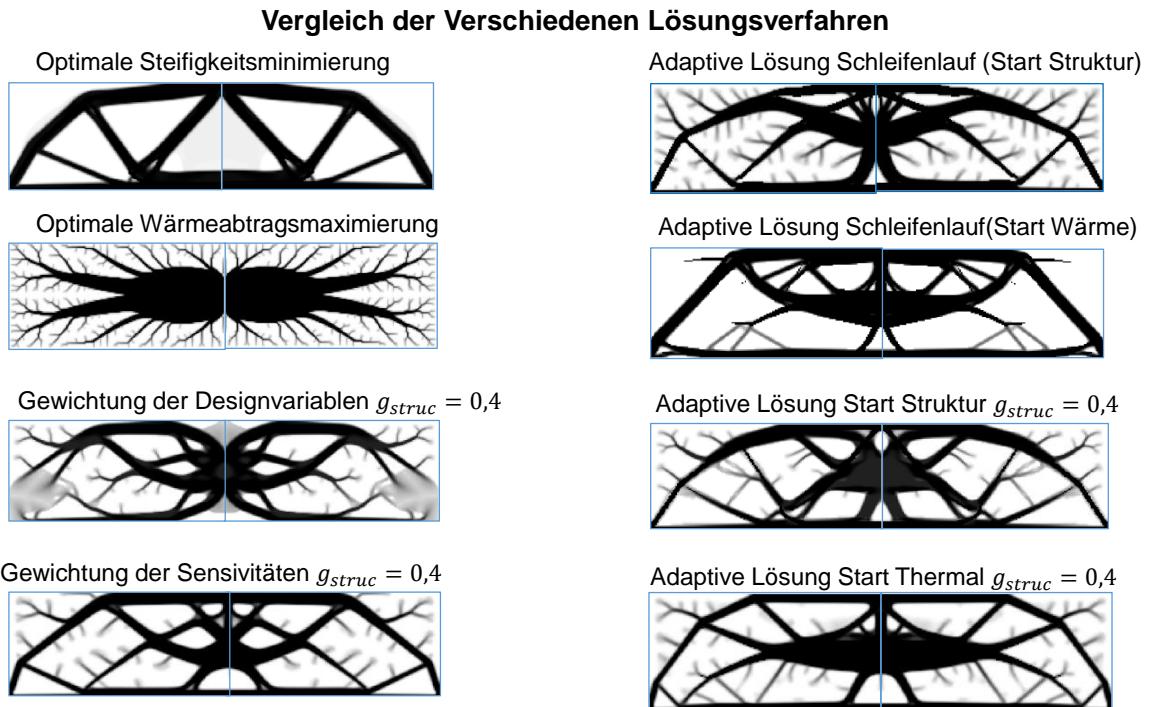


Abbildung 3-18: Vergleich verschiedener Lösungsverfahren

Die Koppelung der Zielfunktion zeigt in jedem Fall sinnvolle Lösungen für einen Kompromiss beider Zielfunktionen. Wird die Strategie der Gewichtung verfolgt, so sollte standardmäßig eine Gewichtung der Sensitivitäten durchgeführt werden, da unscharfe Bereiche für die Interpretation nicht geeignet sind. Die reinen Adoptionsverfahren zeigen klare Lösungsgebiete, die sehr stark von der zuletzt gewählten Zielfunktion beeinflusst werden. Für diese Problemstellung eignet sich eine Steifigkeitsmaximierung als Startentwurf und eine Wärmedissipation als letzte Adaption am besten. Die Kombinationen aus der Gewichtung der Sensitivitäten und der Adaption bieten sehr gute Kompromisse zwischen den Zielfunktionen. Insgesamt zeigt sich bei allen Lösungsgebieten eine ähnliche Struktur. Nun gilt es diese Strategien auf allgemeine Lastfälle und dreidimensionale Konturen zu übertragen. Hierfür wird im folgenden Kapitel eine Einführung in das Gebiet der Softwareansteuerung von finiten Elementen Solver gegeben. Anschließend erfolgt eine Umsetzung der entwickelten Optimierungsstrategien mittels der Verwendung der Programmiersprache Python und den ASCI-Schnittstellen der FE-Solver. Letztendlich entsteht eine Applikation in der beliebige Lastfälle und Parameter 2D und 3D- Lösungen erzeugt werden.

4 Einführung in die Schnittstelle von FE-Solver

Moderne CAE-Programme bieten die Möglichkeit durch grafische Oberflächen in schnellstmöglicher Zeit technische Problemstellungen zu lösen. Entscheidend für das Lösen der Problematik ist nicht der grafische Modellaufbau, sondern die Eingabedatei für den Gleichungslöser. Diese besteht in den Fällen Abaqus, CalculiX, Nastran, Ansys und OptiStruct aus ASCI- oder Binärdateien, in denen die gesamten Informationen für die Berechnung der Systemantwort gespeichert sind. Während in der grafischen Variante oftmals nicht ersichtlich ist, mit welchen Einstellungen die Simulation durchgeführt wird, bietet die ASCI-Datei den Vorteil der kompletten Darstellung der Einstellparameter. Der große Nachteil dieser Textdatei liegt in der intensiven Einarbeitungszeit in eine programmierähnliche Sprache²³. Die Abbildung 4-1 zeigt den Aufbau eines Inputdecks für CalculiX und Abaqus eines rechteckig festeingespannten zugbelasteten Körpers, dessen Verschiebungsverhalten durch zwei Elemente approximiert wird.

Beispiel eines Inputdecks für Abaqus und CalculiX

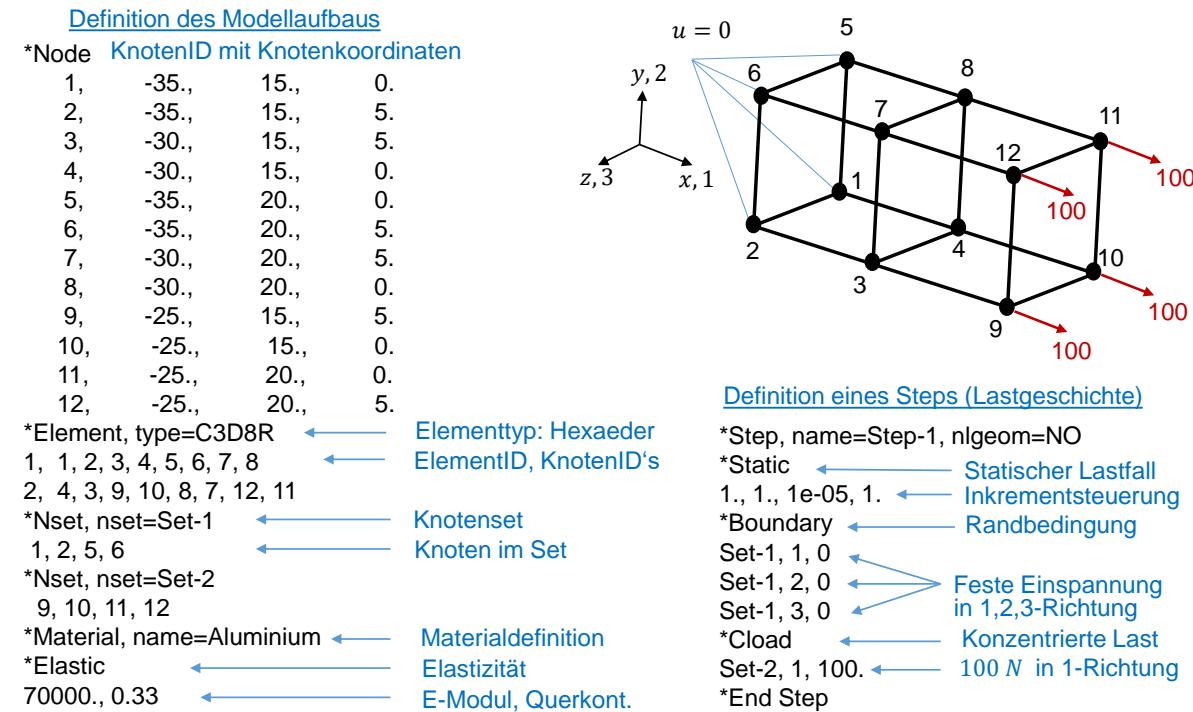


Abbildung 4-1: Beispiel eines Inputdecks in CalculiX und Abaqus

Durch den Einsatz von „*“ werden sogenannte Karten definiert in denen beispielsweise mit „*Element, type=C3D8R“ der Elementtyp Hexaeder und die in den folgenden Zeilen

²³ Um die Gültigkeit von Solverinputdecks in ein Programm zu prüfen, werden Automaten verwendet, die die Syntax und Semantik des Inputdecks testen. Hierfür ist im Anhang „Automat für Abaqus und CalculiX“ ein Beispiel dargelegt, wie diese umgesetzt werden können.

geschilderten Elementnummern und zugehörigen Knoten definiert werden. Für eine komplett Analyse müssen verschiedenste Karten aufgerufen werden, deren Bedeutung in Abbildung 4-1 mit blauen Kommentaren gekennzeichnet ist. Eine Eingabedatei besteht in der Regel aus den zwei Teilen Modellaufbau und Lastgeschichte. Im Modellaufbau werden unveränderbare Eigenschaften wie Knoten, Elemente, Knotensets und Materialien festgelegt. Die Lastgeschichte beinhaltet die veränderlichen Einstellungen (Lasten und Randbedingungen). Aus dieser ASCI-Datei entnimmt der „Solver“ die Einstellungen für z.B. den Aufbau der Steifigkeitsmatrix und des Lastvektors.

Neben der grafischen und textbasierten Variante können in modernen CAE-Programmen Skriptsprachen wie APDL in Ansys, TCL in Hyperworks oder PCL in MSC Patran verwendet werden. Mit wenig Aufwand kann hierbei ein parametrisierter Lauf durchgeführt werden.

Des Weiteren können höhere Programmiersprachen wie C++, Java in Siemens NX oder Python in Abaqus, Ansys eingesetzt werden. Diese bieten den Vorteil einer vielfältigen Programmierung, sodass Bibliotheken aus verschiedenen Softwaredisziplinen implementiert werden können. Durch ein Python-Skript kann z.B. die Geometrie in der Animationssoftware Blender erzeugt werden, um anschließend eine Berechnung in Abaqus durchzuführen. Die folgende Abbildung stellt eine Übersicht über die genannten Möglichkeiten zur Ansteuerung eines Lösers bzw. der ASCI-Datei dar.

Überblick über die Solveransteuerung

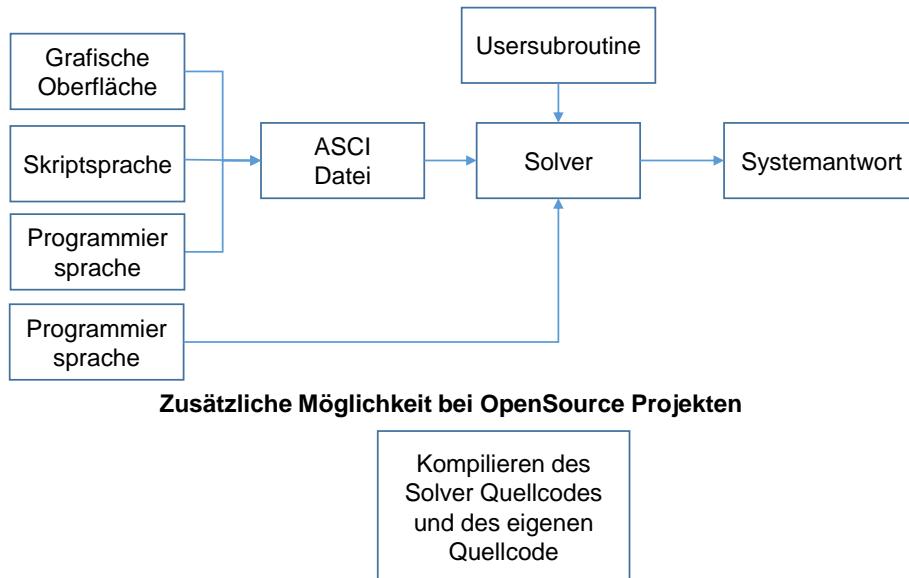


Abbildung 4-2: Überblick der einzelnen Möglichkeiten zur Solveransteuerung

Nach dem Ablaufen der Skript- und Programmiersprachen entsteht in der Regel am Ende wiederum eine Textdatei, die dem „Solver“ übergeben wird. Eine Steuerung des Verhaltens eines Gleichungslösers ist somit durch die gegebenen Karten eingeschränkt. Wird z.B. ein neues Materialgesetz benötigt, so kann dies nicht durch die höheren Programmiersprachen erfolgen, da aktuell keine Schnittstelle für z.B. Python vorhanden ist. Hierfür können sogenannte „Usersubroutines“ verwendet werden. Diese in FORTRAN oder C geschriebenen Programmabschnitte werden mit der ASCI-Datei direkt an den „Solver“ übergeben, der diesen neuen Programmabschnitt einbindet, sodass während den Iterationen das eingestellte Materialverhalten mitberücksichtigt wird.

Die aktuelle Entwicklung der CAE-Programme zeigt den stärker anwachsenden Einsatz von objektorientierten Programmiersprachen wie Python. Aus diesem Grund ist es sinnvoll neue Applikationen ebenfalls in einer höheren Sprache zu generieren, sodass lediglich die Anbindung an den gewählten Löser neu erstellt werden muss. Bis es möglich ist eine direkte Ansteuerung²⁴ über geeignete Datenstrukturen (Graphen, Bäume, Felder) der einzelnen Programme einzusetzen, müssen ASCI-Inputdecks als Schnittstelle verwendet werden.

Eine alternative Möglichkeit für eine Programmerweiterung kann bei OpenSource Projekten wie CalculiX, LinuxCAE, OpenFoam und Z88 Auroa durchgeführt werden, da der eigene Quellcode direkt implementiert werden kann. Materialgesetzte neue Karten oder Ressourcensteuerungen können direkt eingebunden werden, sodass die Rechenzeiten aufgrund des reduzierten Transfers der Variablen deutlich gesenkt werden können.

Zusammenfassend gibt es verschiedene Möglichkeiten den „Solver“ anzusteuern. Da die Programmierschnittstelle zu den grafischen CAE-Programmen in der Regel durch interne Skriptsprachen wie PCL in Patran, TCL in Hyperworks und Python in Abaqus vorhanden ist, kann eine allgemeine Erweiterung der Softwarepakete nur für ein ausgewähltes Programmpaket eingesetzt werden. Um dennoch möglichst viele verschiedene Löser ansprechen zu können, kann die Steuerung der ASCI-Datei eingesetzt werden. Es müssen hierbei keine internen Bibliotheken, die sich von CAE-Programm zu CAE-Programm unterscheiden, eingeladen werden. Es kann direkt auf rein textbasierte Schnittstellen zugegriffen werden. Die automatisierte Optimierung kann durch das Verändern der ASCI-Inputdatei erfolgen, um wie es in der Topologieoptimierung üblich ist, Elemente zu entfernen oder Materialeigenschaften zu ändern. Für diesen Typ der Optimierung können verschiedenste strategische Elemente eingesetzt werden, deren Vorgehensweise im nächsten Kapitel erläutert wird.

²⁴ Hiermit ist der Einsatz der internen Funktionen, Klassen und Bibliotheken gemeint.

5 Software: Methoden, Algorithmen und Strategien

Die Implementierung der Verfahren aus Kapitel 3 wird mittels einer Kombination aus Octave, Python und CalculiX (FE-Solver) erfolgen. Hierbei dienen Python-Skripte der Steuerung der gesamten Prozesse, deren Struktur in der folgenden Abbildung in „Grundlegender Aufbau“ abgebildet ist. Zu Beginn kann der Anwender beliebige Lastfälle, Materialien und Optimierungsstrategien definieren. Wird ein 2D-, 3D- Beispiel gewählt so kann die Optimierung direkt erfolgen. Wird kein Beispiel gewählt, so werden als Eingabe zwei Inputdecks aus einer thermischen und statischen Problemstellung benötigt. Anschließend kann die Topologieoptimierung gestartet werden, sodass als Resultat entweder ein Schwarzweiß-Bild oder ein Inputdeck mit verschiedenen Materialsets erfolgt.

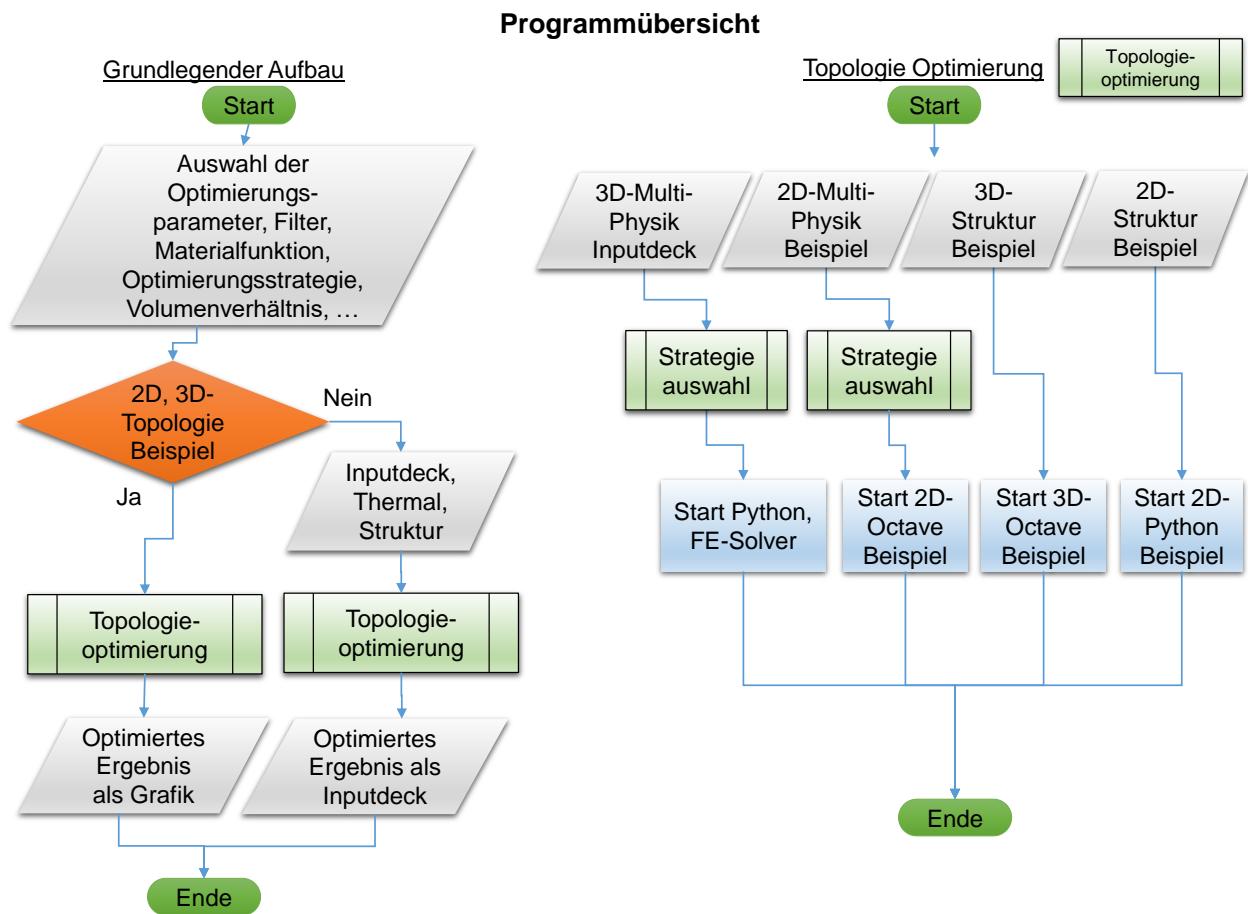


Abbildung 5-1: Aufbau der Softwarekomponenten für die Topologieoptimierung

Die Topologieoptimierung kann mit vier verschiedenen Programmabschnitten ablaufen, deren Auswahl sich auf 3D-Multiphysik, 2D-Multiphysik Beispiel, 3D- Struktur Beispiel und 2D-Struktur Beispiel beschränkt. Je nach Auswahl wird entweder Octave mit einem Octave-Skript aufgerufen, oder ein Prozess in Python gestartet. Relevant für die Koppelung der physikalischen

Prozesse sind die multiphysikalischen Prozesse, bei denen verschiedene Koppelungsstrategien verwendet werden können. Hierbei gibt es die Möglichkeit direkt die Lastfälle aus Kapitel 3 mit 2D- Multiphysik Beispiel zu starten. Dies soll vorab den Einfluss der einzelnen Parameter für die Topologieoptimierung und deren Koppelung aufzeigen, sodass sich für eine 3D-Analyse geeignete Werte ergeben. Bei dem Starten von 3D-Multiphysik können beliebige Lastfälle und Geometrien bearbeitet werden, die anschließend gekoppelt oder einzeln analysiert werden. Allgemein erfolgt die Prozesssteuerung und Parametereingabe über eine grafische Oberfläche²⁵. Aus dieser werden die benötigten Softwarepakete Octave und der FE-Solver (CalculiX) mit Python gesteuert. Die folgende Abbildung zeigt die Eingabemaske für alle Optimierungsalgorithmen. Die nötigen Eingabeparameter für die gewählte Optimierung sind mit den Zahlen 1) 2) 3) 4) gekennzeichnet. Wird z.B. „3D-Struktur Beispiel“ gewählt so müssen alle mit 4) gekennzeichneten Parameter gesetzt werden. Für die 3D-Multi-Physik Variante sind zusätzliche „Checkboxes“ vorhanden, die z.B. die Strategie SIMP/BESO steuern, das Ergebnis im STL-Format exportieren, oder die Lösungskontur in jeder Iteration als interaktive 3D-Grafik²⁶ ausgeben.



Abbildung 5-2: Grafische Eingabemaske für die Parameter und das Starten der Programmteile

Bei den multiphysikalischen Verfahren 1) 2) kann die Optimierungsstrategie für die Koppelung durch die Auswahl von a) bis g) eingestellt werden. Je nach Kombination der Auswahlparameter (Checkbox) werden zusätzliche Parameter z.B. für c) g_{struc} benötigt, die in diesem Fall eine Gewichtung von Sensitivitäten bewirkt. Die Auswirkungen der Kombinationsmöglichkeiten von a) bis g) und deren Einfluss auf die Optimierungsmethoden werden im nächsten Abschnitt beschrieben.

²⁵ Eine Beschreibung der grafischen Oberfläche findet sich im Anhang unter „Grafische Oberfläche in Python (Tkinter)“

²⁶ Hierzu findet sich ein Parameterlauf im Anhang unter „Prozesslauf mit 3D-Ergebnisausgabe“

5.1 Strategieformulierung für die 2D- und 3D-Multiphysik Optimierung

Die Einstellung der Optimierungsstrategie erfolgt über die in folgender Abbildung dargestellten Entscheidungen. Diese können durch die Auswahlmöglichkeiten „Thermal“, „Struktur“, „Adaption“, „Startentwurf Struktur“, „Adaption Gewichtung“, „Iterative Adaption“ und „Sensitivitäten“ in der grafischen Oberfläche angewählt werden. Anschließend wird geprüft, welche Auswahl getroffen wurde, sodass der entsprechende Algorithmus startet. Die Verwendung von z.B. „Thermal“, „Struktur“, „Adaption“ bewirkt eine thermale Optimierung, auf dessen Lösung eine Lösung aus einer strukturellen Optimierung adaptiert wird.

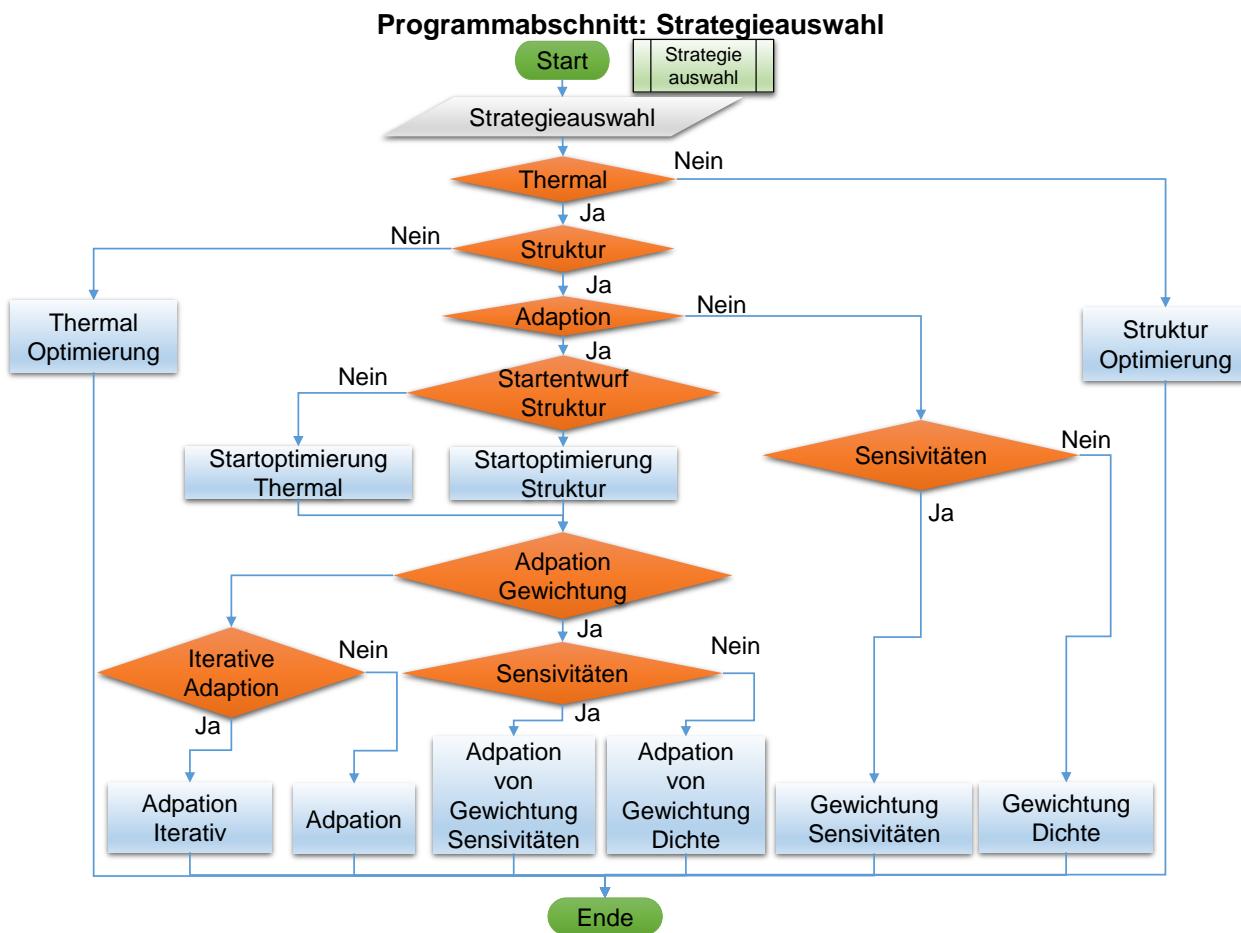


Abbildung 5-3: Auswahl der Optimierungsstrategien

Insgesamt können dadurch acht verschiedene Optimierungsmöglichkeiten von einer einzelnen physikalischen Optimierung bis hin zur Adaption einer gewichteten Lösung eingestellt werden. Die einzelnen Optimierungsverfahren werden im kommenden Abschnitt dargestellt, wobei aus Gründen der Übersicht die Einzeloptimierungen, sowie die adaptiven Varianten und die gewichteten Strategien jeweils zusammengefasst werden.

5.2 Einzelne Thermal- und Strukturoptimierung

Das Schema einer nicht gekoppelten Optimierung wird in folgender Darstellung für das Betätigen von „3D-Multi-Physik Inputdecks“ und „2D-Multi-Physik Beispiele“ aufgezeigt. Eine einzelne Optimierung startet mit der Eingabe des Lastfalles und der Materialeigenschaften. Hierbei werden die Randbedingungen und Einstellungen dem gegebenen Inputdeck oder dem 2D-Beispiellastfall des Octaveskripts entnommen. Anschließend kann die Optimierung gestartet werden. Zunächst werden die Systemantworten wie Temperaturen, oder Verschiebungen errechnet, die entweder direkt in Octave oder mithilfe von CalculiX ermittelt werden. Hierfür wird das Modell mit einem Materialgesetz aus 2.2 beaufschlagt, sodass die Elemente unterschiedliche Materialwerte bezüglich ihrer Dichte erhalten. Anschließend wird die Steifigkeits- oder Wärmeleitfähigkeitsmatrix mit den veränderten Materialeigenschaften aufgestellt. Die benötigte Systemantwort (Temperaturen, Verschiebungen) ergibt sich nun durch das Lösen des Gleichungssystems.

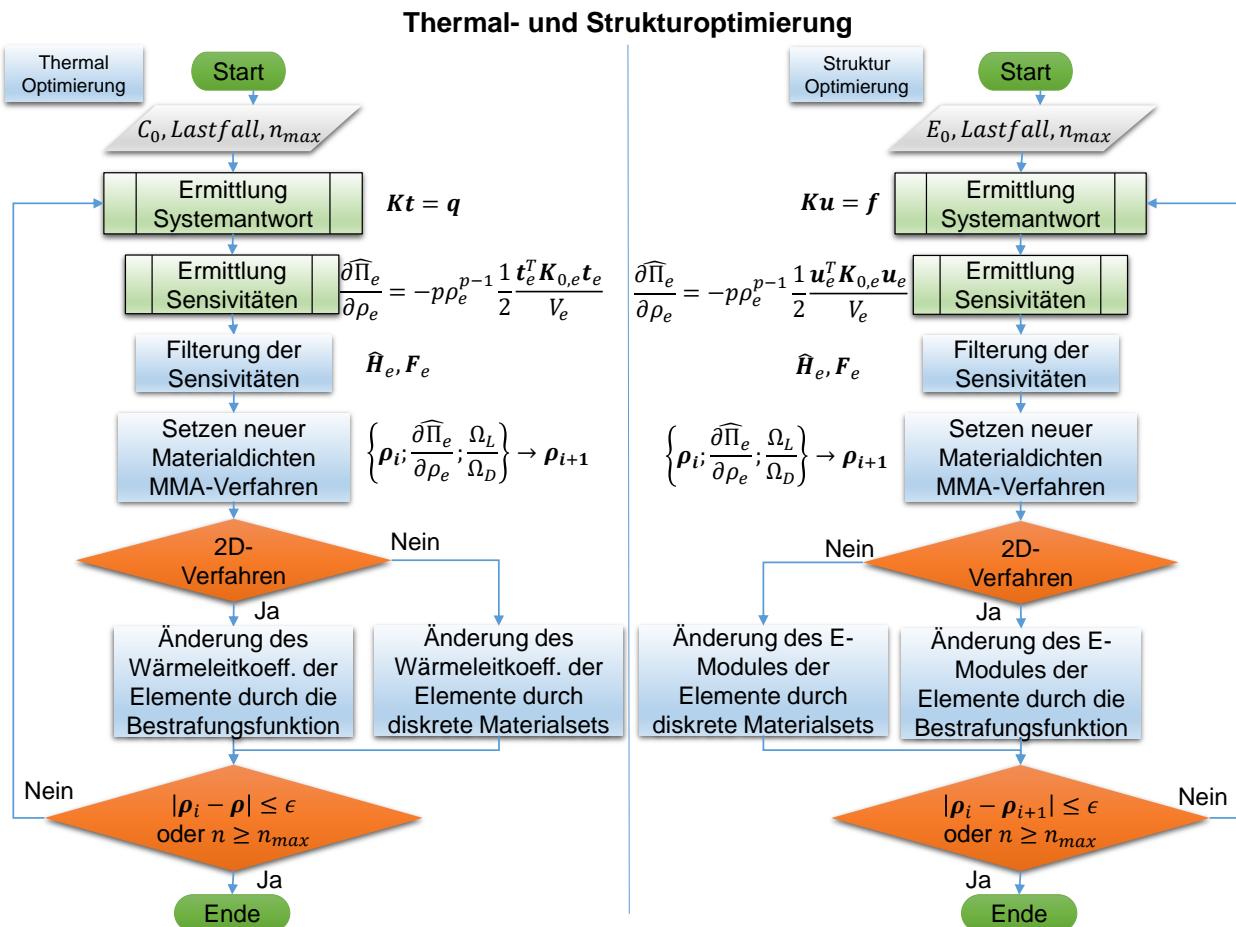


Abbildung 5-4: Darstellung der Algorithmen für einzelne Optimierungsmethoden

Die Sensitivitäten werden in Octave durch ein erneutes Lösen des Lastfalles ermittelt, wobei ein Vollmaterial angesetzt wird und zusätzlich die vorherige Systemantwort als Randbedingung beaufschlagt wird. Wird das Problem mittels eines FE-Solver gelöst, so wird ein zweites Inputdeck mit Eigenschaften eines Vollmaterials erzeugt, in dem die Temperatur- oder Verschiebungswerte als Randbedingung (*Boundary) auf jeden einzelnen Knoten²⁷ veranschlagt werden. Anschließend können die Sensitivitäten aus der Ergebnisdatei als Heizstrom (Flux) oder als Energiedichte (Energy density) für jedes Element extrahiert werden.

Zusätzlich können die sich ergebenden Sensitivitäten gefiltert werden, wobei dies bei Elementansätzen höherer Ordnung (2, 3, ...) nicht notwendig ist vgl. [3] [7]. Bei sehr großen Systemen ist der Einsatz eines Filters sehr rechenintensiv, sodass es sinnvoller ist, auf quadratische Elementansätze umzusteigen.

Danach erfolgt die Variation der Dichteparameter durch die Methode der bewegten Asymptoten (MMA) aus Kapitel 2. Während bei einer 2D-Optimierung direkt die Bestrafungsfunktion verwendet wird, werden bei einer 3D-Untersuchung Materialsets²⁸ generiert, deren Materialeigenschaften sich stufenweise exponentiell verändern. Als Resultat ergibt sich ein Stapel mit Elementnummern, denen jeweils ein Dichtewert zugeordnet wird. Aus diesem Dichtewert und der Element-ID wird in der nächsten Iteration ein neuer Materialwertkennwert errechnet.

Abschließend wird geprüft ob das Ergebnis konvergiert oder die maximale Anzahl an Iterationen überschritten wurde. Falls eine Einzeloptimierung für die Thermik oder Mechanik gewählt wurde, entsteht als Resultat für das 2D-Multiphysik Beispiel eine schwarz-weiße Grafik, in der die Lösungskontur abgebildet ist. In der 3D-Variante mittels Ansteuerung des FE-Lösers ergibt sich ein Inputdeck, in dem die Lösungskontur anhand der definierten Materialsets abgelesen werden kann. Aus diesem Inputdeck können STL-Dateien²⁹ direkt abgeleitet werden, deren triangulierte Flächen aus den Koordinaten der Knotenpunkte entstehen.

Diese nicht gekoppelten Optimierungsstrategien dienen der Verbesserung von thermalen oder mechanischen Eigenschaften. Besonders der thermale Aspekt ist ein entscheidender Programmabschnitt, da dieser Typ der Topologieoptimierung in kommerziellen Programmen wenig verbreitet ist. Zusätzlich können beide Typen mittels Gewichtungsfaktoren, deren Umsetzung in folgenden Abschnitt erläutert wird, verbessert werden.

²⁷ Das FE-Modell hat keine Freiheitsgrade, deshalb werden die Sensitivitäten deutlich schneller ermittelt als die Systemantworten.

²⁸ Eine detaillierte Umsetzung folgt in Kapitel 5.5

²⁹ Die Methodik zur Erstellung einer Datei im STL-Format ist in Kapitel 8.2 beschrieben.

5.3 Optimierung durch Gewichtung

Falls eine Optimierung durch Gewichtung gewählt wird, können die zwei Strategien „Gewichtung der Sensitivitäten“ und „Gewichtung der Dichte“ eingesetzt werden. In dem kommenden Ablaufdiagramm ist die Verfahrensstruktur der gewichteten Optimierung veranschaulicht. Zusätzlich sind wesentlichen Formeln angegeben, die hierfür notwendig sind.

Zu Beginn wird die thermale und mechanische Analyse gleichzeitig durchgeführt. Wird die Gewichtung von Sensitivitäten gewählt, so erfolgt eine Normierung der Größe der Sensitivitäten aus der mechanischen und thermischen Rechnung mittels des Median oder Mittelwert. Hiermit werden die Empfindlichkeiten so skaliert, dass ein direkter Vergleich der Sensibilitäten durchgeführt werden kann. Andernfalls würde z.B. bei sehr hohen Dehnungsenergiwerten und niedrigen Heizstromwerten ein Einfluss der thermischen Analyse erst bei sehr kleinem g_{struc} erfolgen, da die Absolutwerte deutlich voneinander abweichen können.

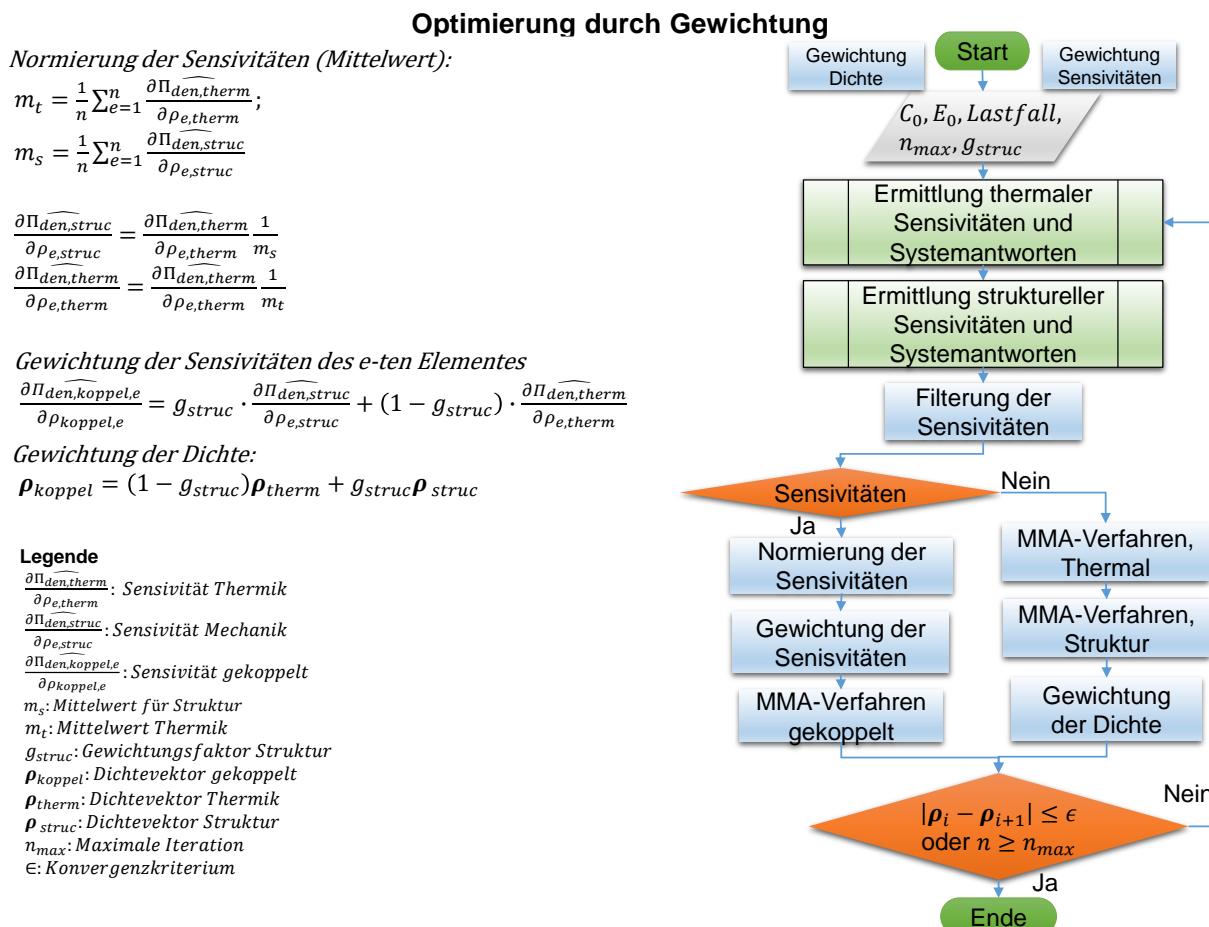


Abbildung 5-5: Optimierung durch Gewichtungen

Die Berechnung des thermischen Mittelwertes m_t und des Mittelwertes für das Strukturproblem m_s erfolgt mit

$$m_t = \frac{1}{n} \sum_{e=1}^n \widehat{\frac{\partial \Pi_{den,therm}}{\partial \rho_{e,therm}}} \quad (5.1)$$

und

$$m_s = \frac{1}{n} \sum_{e=1}^n \widehat{\frac{\partial \Pi_{den,struc}}{\partial \rho_{e,struc}}}. \quad (5.2)$$

Hierfür wird eine Summation aller Sensitivitäten über die Anzahl aller Elemente n durchgeführt. Anschließend erfolgt die Normierung durch die Skalierung mittels der Anzahl der beteiligten Sensitivitäten. Zusätzlich können für die Faktoren m_t, m_s Mediane³⁰ verwendet werden.

Nach der Skalierung werden die normierten Sensitivitäten gewichtet. Wird beispielsweise ein Gewichtungsfaktor g_{struc} von 0,5 gewählt, so ergibt sich eine gleichmäßige Koppelung der Thermik und Mechanik durch die Kombination der Empfindlichkeiten aus den beiden Analysen. Mit diesen neuen Sensitivitäten werden die neuen Dichtewerte für die nächste Iteration durch das MMA-Verfahren ermittelt.

Wird eine Gewichtung der Dichte gewählt, so wird zunächst eine einzelne Optimierung bezüglich des thermalen Problems durchgeführt. Nun wird eine weitere Optimierung für den mechanischen Problemfall ausgeführt. Aus beiden Optimierungsläufen entstehen zwei Dichteverteilungen. Da diese Dichteverteilungen zwischen 0 und 1 normiert sind, wird keine zusätzliche Skalierung durch die Mittelwerte oder Mediane benötigt. Die zwei Dichtewerte pro Element werden direkt durch g_{struc} skaliert, sodass ein neuer einzelner Dichtewert für das behandelnde Element errechnet wird. Mit dieser Dichteverteilung wird die nächste Iteration durchgeführt.

Die gesamte Prozesskette wird solange durchlaufen, bis ein Grenzwert ϵ unterschritten wird, oder eine maximale Anzahl an Iterationen durchgeführt wurde. Diese Optimierungsstrategie wird zusätzlich in der Variante „Adaption“ benötigt. Hierbei kann eine Adaption eines gewichteten Gebietes als Lösungsgebiet auf eine schon vorhandene Lösung hinzugefügt werden. Diese Methode und einige weitere Verfahren der Strategie der Adaption werden im folgenden Kapitel vorgestellt.

³⁰ Es werden alle Sensitivitäten nach der Größe sortiert. Anschließend wird der Wert in der Mitte des Vektors als Median angesetzt.

5.4 Optimierung durch Adaption

Das Adoptionsverfahren, dargestellt als Ablaufdiagramm in folgender Abbildung, beinhaltet den komplexesten Aufbau der verwendeten Optimierungsstrategien, da hier sehr viele Strategieelemente kombiniert werden. Für dieses Verfahren werden einige zusätzliche Variablen benötigt, die die Adaption steuern. Die Variable n_{change} gibt an, ab welcher Iteration eine Adaption angesetzt wird. Sollen mehrere Adaptionen hintereinander angesetzt werden, so kann mit n_{admax} eine Anzahl an Adaptionen eingestellt werden. Mit Ω_{Lad} wird die Erweiterung des Designvolumens bei einem Adaptionsschritt gesteuert.

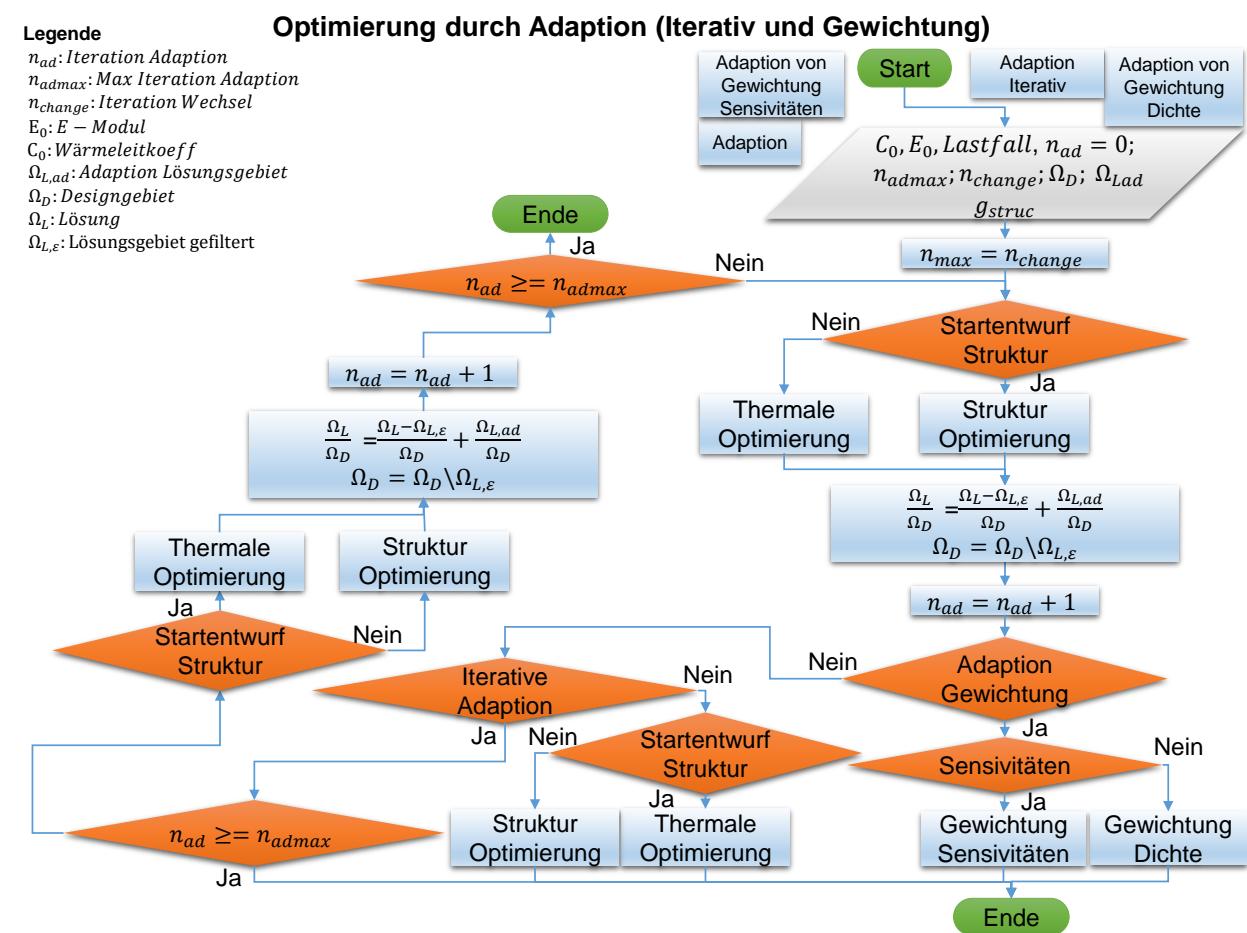


Abbildung 5-6: Optimierung durch Adaption

Sind alle benötigten Parameter eingestellt, so kann das Verfahren starten. Zunächst erfolgt eine ungewichtete thermale oder statische Optimierung. Die Optimierungsschleife wird solange durchlaufen³¹, bis die Wechseliteration n_{change} erreicht wird. Anschließend wird das mögliche Lösungsgebiet mit dem Adoptionsgebiet erweitert, sodass mehr Designraum ausgefüllt werden

³¹ In der Umsetzung ist zusätzlich ein Konvergenzkriterium für den Abbruch eingebaut.

kann. Falls eine gewichtete Adaption gewählt wird, erfolgt die Addition eines Lösungsgebietes einer gekoppelten Optimierung. Hierbei können sämtliche Parameter aus Kapitel 5.3 eingesetzt werden. Neben dem Resultat aus der Verbesserung durch Gewichtung kann einmalig eine Adaption eines Gebietes aus einer ungewichteten statischen, oder thermalen Optimierung erfolgen.

Bei einer iterativen Vorgehensweise erfolgt der Wechsel zwischen den verschiedenen Systemen Thermik → Statik, Statik → Thermik automatisch. Nach jedem Wechsel wird der Lösungsraum erweitert und der Index n_{ad} erhöht. Falls die maximal mögliche Anzahl an Iterationen n_{admax} erreicht wird, so wird die Wechseladaption abgebrochen.

Werden alle Strategieelemente aufgelistet, so ergeben sich acht mögliche Strategien zur Verbesserung von Bauteilen, die mit den zusätzlichen Entscheidungen SIMP/BESO und Mittelwert/Median ausgeführt werden können. Diese Verfahren können mehrmals hintereinander geschalten werden, sodass beispielsweise eine Adaptionen auf schon optimierten Bauteilen beaufschlagt werden können.

Für eine Koppelung können somit verschiedene Ansätze gewählt werden. Um eine effiziente Applikation zu entwickeln, wird im Folgenden eine Vorgehensweise für die Implementierung der Strategien in vorhandene Softwarepakete vorgestellt. Diese Methode kann für sämtliche CAE-Programme mit ASCI-Schnittstellen durchgeführt werden.

In dem vorliegenden Fall erfolgt die komplette Ansteuerung der Programme mittels Python. Die Systemantworten und die Lösung der physikalischen Probleme wird in dem Open Source CAE-Programm CalculiX simuliert, sodass die rechenintensive Operation wie der Aufbau der Steifigkeitsmatrix in einem FORTRAN-Code³² umgesetzt wird. Als Gleichungslöser wird SPOOLES 2.2 oder PARADISO 5.0 verwendet. Diese sind standardmäßig bei der Installation von CalculiX implementiert. Die Modellierung des physikalischen Problems kann entweder durch ein selbstgeschriebenes Python-Skript oder durch eine grafische Anwendung wie Abaqus CAE erfolgen.

Insgesamt soll die im Folgenden beschriebene Variante die einzelnen extern verwendeten Programme austauschen können, sodass sich eine Modularisierung und Kapselung der einzelnen Abschnitte ergibt, wie es im „software engineering“ für wissenschaftliche Anwendungen üblich ist vgl. [26].

³² Prinzipiell könnte die gesamte Applikation in Python geschrieben werden, jedoch ist es in der Numerik üblich Programmabschnitte, die große Rechenzeiten beanspruchen, in FORTRAN zu schreiben. Hierfür wurden im Laufe der Jahre sehr effiziente Bibliotheken verfasst die von CalculiX benutzt werden.

5.5 Softwareumsetzung und Aufbau

Die Umsetzung der Topologieoptimierung in folgender Abbildung wird in die Gebiete „Modellierung“, „Prozesssteuerung, Optimierung“ und „Gleichungslöser“ unterteilt. Die Modellierung der Lastfälle, Geometrie und Materialeigenschaften kann direkt durch Abaqus, CalculiX oder einem selbst erstellten Python-Skript erfolgen. Diese Varianten erzeugen für das gleiche FE-Netz zwei Inputdecks für thermale und statische Analysen, die mit dem Gleichungslöser kompatibel sein sollte, sodass ein Abaqus-Inputdeck erst durch „translate.py“ in ein CalculiX-Format übersetzt werden muss. Als Alternative kann die gesamte Prozesskette in Python direkt mit der Bibliothek „numpy.py“ umgesetzt werden, jedoch erfordert dies Kenntnisse der Steifigkeits- und Wärmeleitfähigkeitsmatrix.

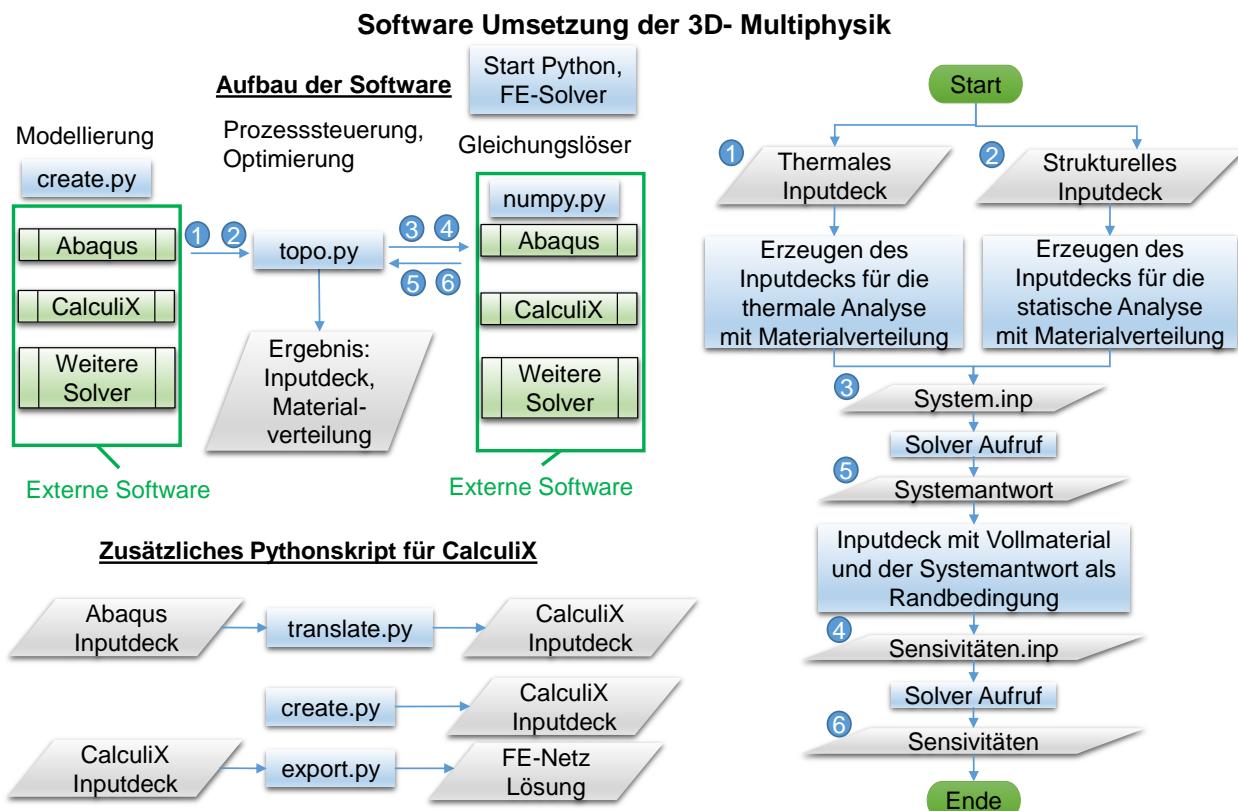


Abbildung 5-7: Softwareumsetzung für allgemeine Lastfälle

Es werden somit zwei Inputdecks (1, 2) aus der Modellierung mit z.B. Abaqus CAE benötigt die über „topo.py“³³ in veränderter Form an den Gleichungslöser als neue Inputdecks (3, 4, 5, 6) übergeben werden. Anschließend werden die Ergebnisse ausgewertet, aus denen wiederum die Inputdecks (3, 4, 5, 6) in veränderter Form übergeben werden.

³³ In der grafischen Oberfläche erfolgt dies über den vorhandenen Button „3D-Multiphysik“

Während dieses Prozesses wird aus den gegebenen Inputdecks (1, 2) ein neues Inputdeck „System.inp“ erzeugt. Die gesamten Randbedingungen, Lasten und geometrischen Eigenschaften werden aus dem Inputdeck übernommen, sodass ausschließlich die Materialeigenschaften nach dem Step-Ansatz aus Kapitel 3.2 verändert werden. Anschließend erfolgt die Auswertung der Systemantwort, deren Ergebnisse als Randbedingung für die Sensitivitätsanalyse angesetzt werden. Diese wiederum wird über die Generierung eines Inputdecks aus der Eingangsdatei aufgebaut, wobei hier Randbedingungen aus der Systemanalyse auf alle Knoten festgelegt werden, sodass keine Freiheitsgrade vorhanden sind. Die Abbildung 5-8 zeigt den relevanten Ausschnitt aus den Inputdecks. Für die Ermittlung der Systemantwort werden in der Datei „System.inp“ drei Elementsets erstellt.

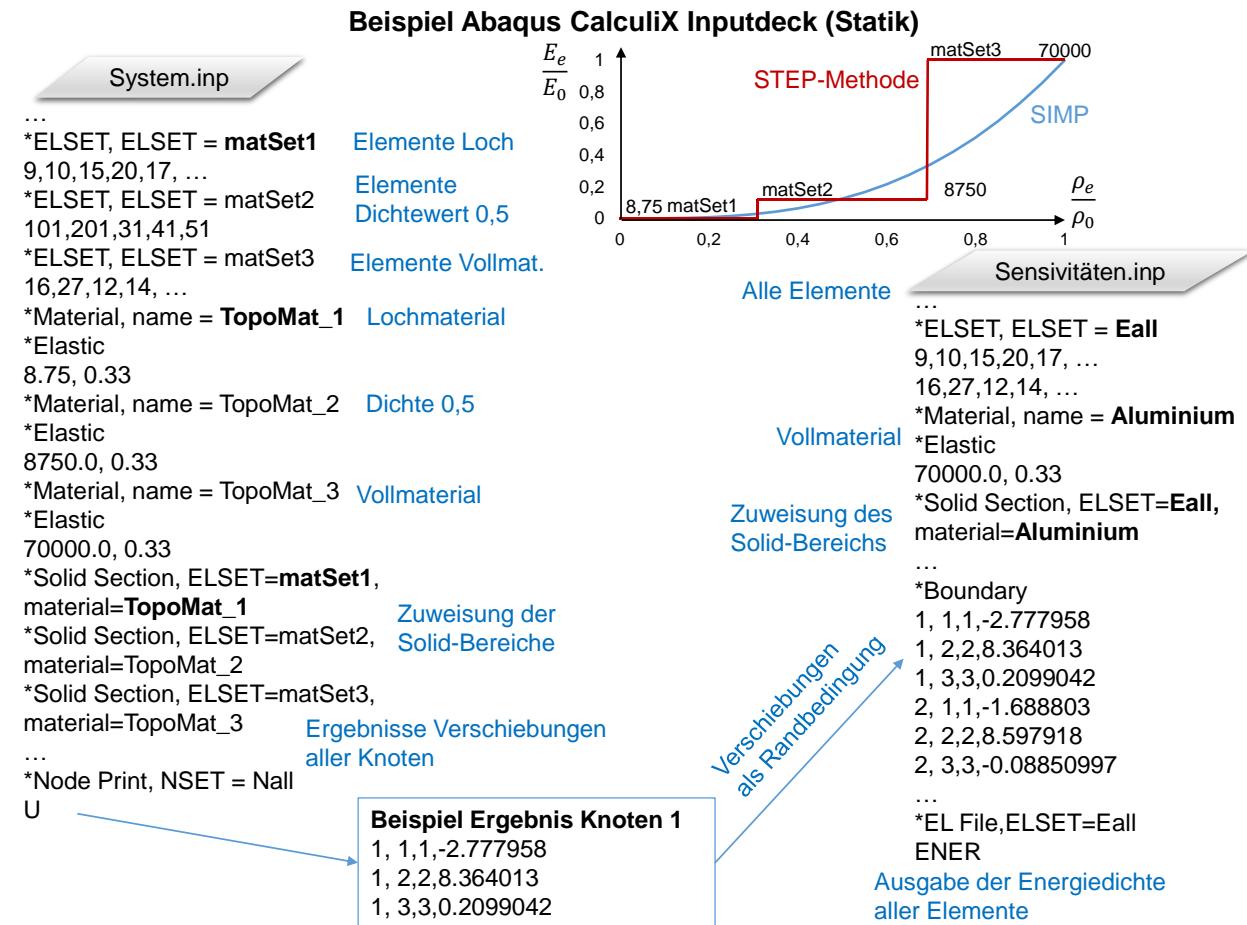


Abbildung 5-8: Beispiel eines Inputdecks einer statischen Analyse

Alle Elemente, die „matSet1“ zugeordnet werden, erhalten aufgrund ihres Dichtewertes nahe bei 0 minimale Materialkennwerte. Elemente mit einem Dichtewert von 0,5 werden dem Set „matSet2“ zugeordnet, wodurch sich ein Elastizitätsmodul einstellt, dessen Größe durch die STEP-Modellierung bestimmt wird. Falls die Elemente mittels eines normierten Dichtewertes von

1 den vollen E-Modul erhalten, werden sie in diesem Beispiel „matSet3“ zugeordnet. Die verschiedenen Materialien „TopoMat_1“, „TopoMat_2“ und „TopoMat_3“ zeigen diese veränderlichen E-Module, die sich entlang der Exponentialfunktion (Penaltyfunktion) entwickelt. Anschließend erfolgt eine Zuweisung der Materialien zu den gewählten Elementsets, sodass Elemente mit einer geringen Dichte einem schlechten Material zugeschrieben werden. Abschließend werden die Verschiebungen ausgegeben, in der für jeden Knoten die Verschiebungswerte in x, y, z aufgelistet sind.

Diese Verschiebungen werden in der Datei „Sensivitäten.inp“ als Randbedingungen aufgetragen. Es ist somit kein Freiheitsgrad mehr vorhanden, da alle Knoten mit Verschiebungswerten aus der Analyse des Inputdecks „System.inp“ belegt sind. Im Unterschied zu „System.inp“ wird allen vorhandenen Elementen die Eigenschaft eines Vollmaterials zugewiesen, sodass sich durch die Ausgabe der Energiedichte (Dehnungsenergie) direkt die Sensivitäten ergeben. Diese Vorgehensweise erfolgt analog für die thermale Analyse, wobei hier für die Randbedingungen die Temperaturwerte aus der Systemanalyse angesetzt werden. Als Sensivität kann die Heizrate aus der Simulation mit vollen Materialeigenschaften entnommen werden. Aus diesen Empfindlichkeiten werden über das 3D-MMA-Verfahren³⁴ neue Dichtewerte ermittelt. Dann wird mit den neuen zugewiesenen Dichtewerten der Elemente eine weitere Analyse durchgeführt.

Eine zu schnelle Änderung der Dichtewerte kann zu Konvergenzproblemen und unbrauchbaren Ergebnissen führen vgl. [4], [3]. Aus Stabilitätsgründen wird hiermit während der Topologieoptimierung das Material langsam entfernt, sodass erst nach einer definierten Iteration das gewünschte Verhältnis zwischen Lösungsgebiet und Designgebiet eingestellt wird. Zusätzlich werden Schranken eingebaut, die eine Dichteänderung eines Elementes über ein vorgegebenes Inkrement ($\Delta\rho = 0,2$) nicht zulassen. Alternativ kann ab der ersten Iteration direkt das eingestellte Verhältnis ohne Einschränkungen gefordert werden, jedoch zeigt sich in einigen realen Anwendungsbeispielen eine ungünstige Materialverteilung.

Einige dieser Anwendungsbeispiele³⁵ werden im folgenden Kapitel mit der entwickelten Software verbessert. Hierfür werden alle beschriebenen Verfahren verwendet, umso geeignete Vorschläge auswählen zu können. Die entstandenen geometrischen Formen können abschließend erneut in einem CAD- oder Animationsprogramm aufgebaut werden.

³⁴ Das eingesetzte MMA-Verfahren wird im Anhang unter „MMA-Verfahren 3D-Optimierung“ vorgestellt. Im Vergleich zu der herkömmlichen Variante aus Kapitel 2 sind einige Unterschiede zu erkennen.

³⁵ Im Anhang „Blockmodell und weitere 3D-Analysen“ befinden sich weitere Anwendungsbeispiele und Lastfälle zu verschiedenen Problemstellungen.

6 Anwendung der Topologieoptimierung

Eine Verifikation einer Softwarekomponente lässt sich durch die Anwendung an einem Beispiellastfall am deutlichsten zeigen. Ein geeigneter Lastfall sollte möglichst so gewählt werden, dass keine trivialen Lösungen entstehen und sämtliche Problemstellungen behandelt werden können. Hierfür kann eine „Presse mit Wärmetransport“ verwendet werden, die die Probleme von Statik und Thermik beinhaltet. In folgender Abbildung ist der gewählte Lastfall dargestellt. Der geometrische Aufbau wird in FreeCAD konstruiert. Anschließend wird die geometrische Form in Abaqus CAE importiert. Mit der vorhandenen grafischen Oberfläche können schnellstmöglich die gewählten Randbedingungen, Lasten und Netzstrukturen aufgebaut werden.

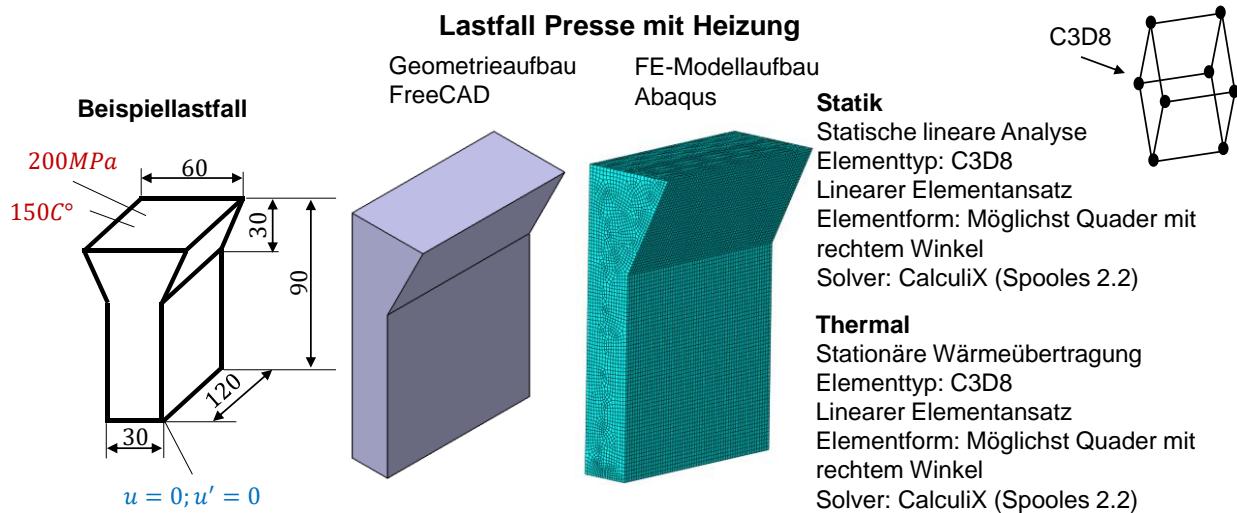


Abbildung 6-1: Darstellung des Problems und der verwendeten Softwareelemente

Für die Optimierung sind die wesentlichen Einstellungen in der Inputdatei entscheidend. So wird in der linearen statischen Analyse ein linearer Elementansatz ausschließlich mit C3D8³⁶ (Hexaeder) Elementen gewählt. In der thermischen Analyse wird als Problemstellung eine stationäre Wärmeübertragung gesetzt mit denselben Elementtypen. Diese sich ergebenden Gleichungssysteme werden mit Spooles 2.2 gelöst, deren Ergebnisse als ASCI-Datei vorliegen.

Um die Notwendigkeit einer 3D-Optimierung zu verdeutlichen, wird zunächst an dem gelösten statischen 2D-Problem aus Kapitel 3 ein Vergleich zwischen 3D- und 2D-Lösungen aufgestellt. Aus diesem Standardlastfall können einige Ergebnisse auf den gewählten Beispiellastfall übertragen werden.

³⁶ In Abaqus wird für die thermische Analyse der Typ DC3D8 benötigt. In Caluclix kann der Typ C3D8 für thermische und statische Systeme verwendet werden.

6.1 Probleme und 3D-Lösungen der 2D-Strategie

Eine deutliche Problematik der zweidimensionalen Untersuchung zeigt sich in folgender Darstellung. Einerseits reichen 2D-Lösungen für starke Bestrafungsexponenten und hohen Filterradius aus, andererseits entsteht durch die zusätzliche Dimension eine neue Lösungsstruktur. Das erste Beispiel zeigt ein 3D-Lösungsgebiet, das nicht durch zwei Dimensionen abgebildet werden kann, da sich das Lösungsgebiet in der y-Richtung ändert. Die zweite Lösung, in der eine stärkere Filterung eingesetzt wird, zeigt eine Vergleichbarkeit der 2D-Lösung mit der 3D-Lösung, da in Dickenrichtung keine Änderung generiert wird. Diese Beispiele veranschaulichen, dass die 2D-Lösungen für 3D-Problemlösungen als Abschätzung dienen können. Eine reine Extrusion der 2D-Fläche kann jedoch eine schlechtere Lösung ergeben, als bei Resultaten aus einer 3D-Optimierung mit ausreichender Anzahl an Elementen in Dickenrichtung.

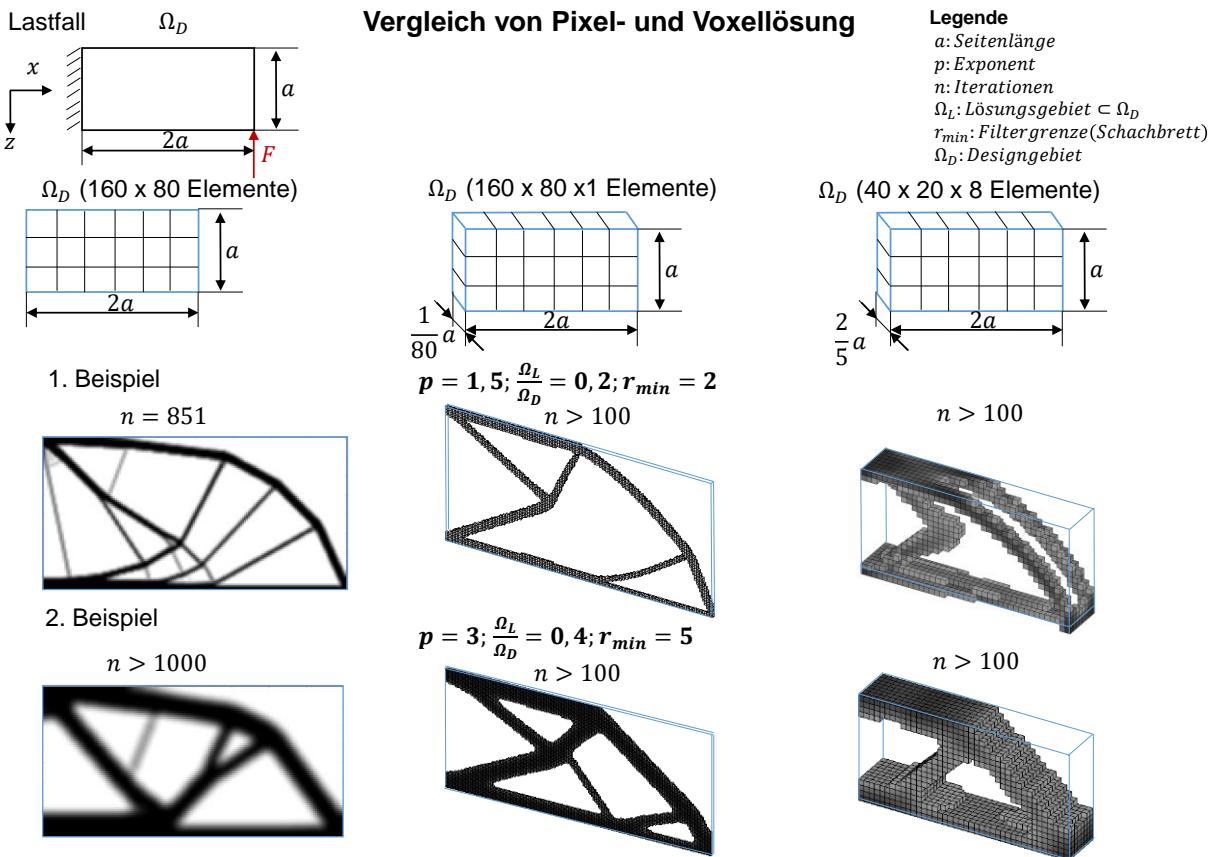


Abbildung 6-2: Problematik zwischen 2D und 3D Lösungen

Im Allgemeinen lassen sich die Lösungsstrukturen der 2D-Probleme mit denen der 3D-Probleme vergleichen. Um nun geeignete Parameter für eine 3D-Studie zu ermitteln, ist es sinnvoll mehrere 2D-Läufe zu starten. Des Weiteren können durch eine topologische 2D-Analyse

hochauflösende Startentwürfe für 3D-Modelle entwickelt werden, so dass z.B. in diesem Lastfall die 2D-Lösung aus Zeitersparnis extrudiert und anschließend 3D optimiert werden kann. Zusätzlich können einige problematische Definitionen von Randbedingungen (punktförmige Einspannung) und Lasten (Punktformige Heizquelle) vorab durch 2D-Definitionen erkannt und beurteilt werden. Bei der Verwendung der finiten Elemente kann es bei Punktlasten zu Problemen führen, für das in der folgenden Abbildung ein Beispiel abgebildet ist. Hierbei ist ein physikalisches Problem mit verschiedenen Elementtypen und Vernetzungsarten gelöst worden. Da es sich um eine zentrierte Last handelt, entsteht am Kraftangriffspunkt proportional zur Elementgröße eine Verschiebung. Werden sehr kleine Elemente inklusive höherer Ordnung gewählt, so entsteht eine ungewollte lokale Dehnungsüberhöhung. Die Ergebnisse werden dabei verzerrt, so dass sich der typische Dehnungsverlauf eines Biegebalkens in den beschriebenen Fällen lediglich an dem grobvernetzten Modell mit linearen Elementen erkennen lässt.

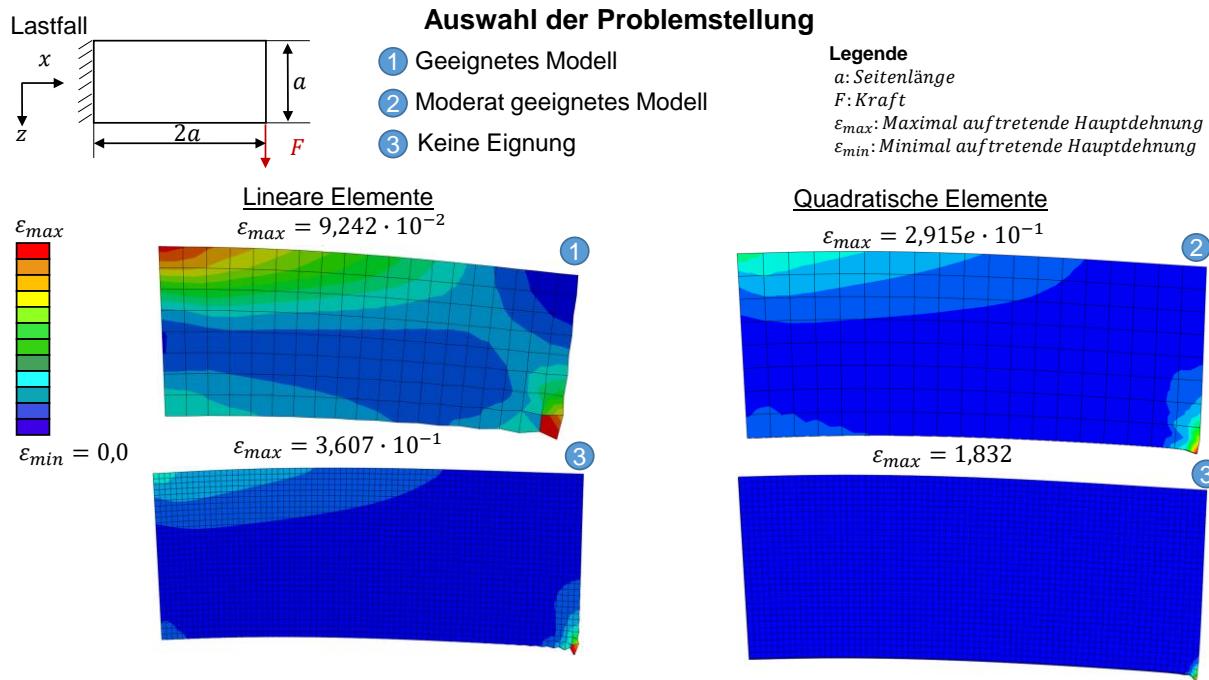


Abbildung 6-3: Darstellung einer falschen Problemauswahl

Für die Topologieoptimierung sind solche Singularitäten ungeeignet, da sofort an der Dehnungsüberhöhung das gesamte Material angesetzt wird. Dies führt zu keiner oder einer schlechten Konvergenz des Problems. Eine solche Problemstellung kann durch die Wahl einer konstanten Kraftangriffsfläche kompensiert werden, da die Verschiebung nicht mehr proportional von der Elementgröße abhängt. Zudem dürfen keine punktförmigen Einspannungen gewählt werden, diese ähnliche Auswirkungen auf den Dehnungsverlauf ausüben.

Nun gilt es die 2D-Ergebnisse aus Kapitel 3 nach zu simulieren³⁷. In folgender Darstellung ist ein Beispielfall mit wenigen Elementen aufgebaut. Hierbei ist farblich die Verschiebungs-, Temperatur-, Dehnungsenergie- und Heizflussverteilung über das gesamte Gebiet der Problemstellung aufgetragen, um zu überprüfen ob das verwendete Modell für die Optimierung geeignet ist. Die Singularität hat bei dieser Vernetzung wenig Auswirkungen³⁸, sodass eine Topologieoptimierung durchgeführt werden kann.

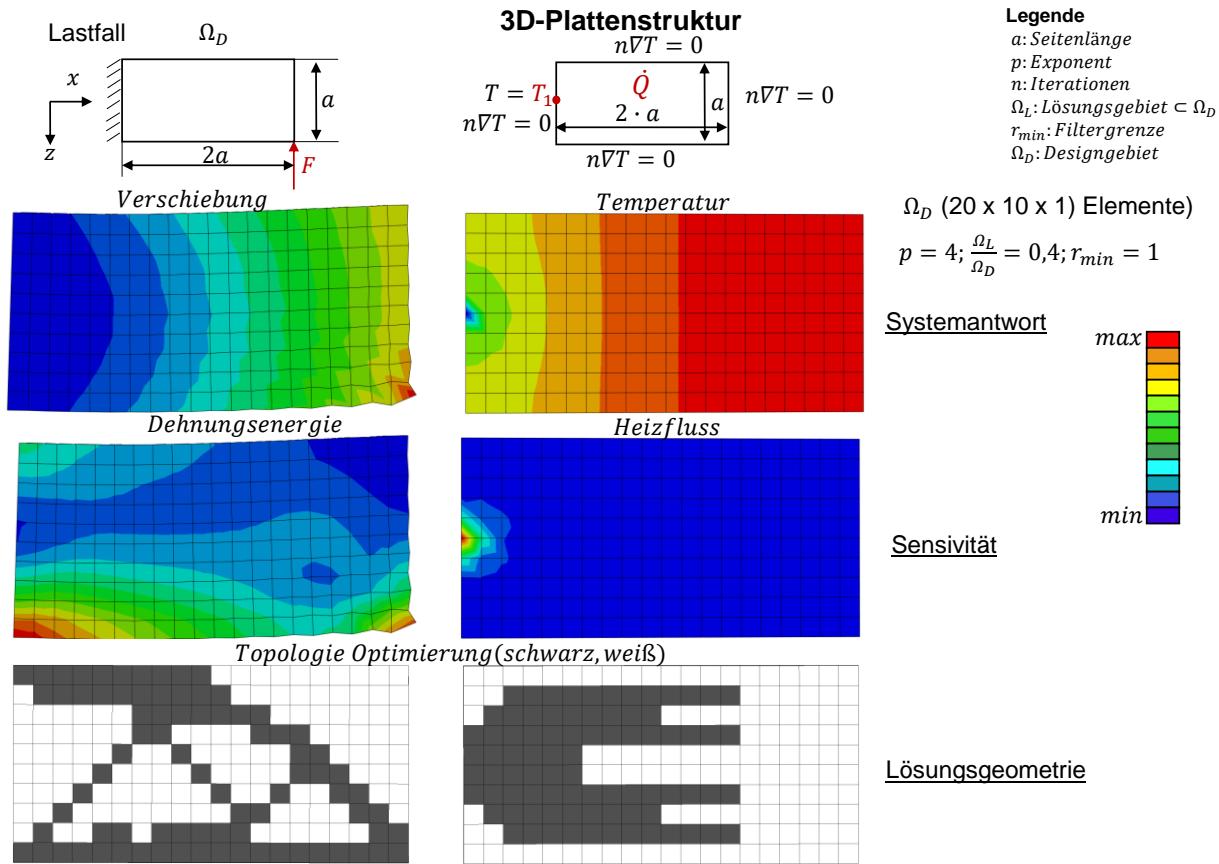


Abbildung 6-4: 3D-Lösungen bezüglich des 2D-Lastfalles

Die Lösungsgeometrie zeigt die typische Fachwerkstruktur für den statischen Lastfall und eine sehr grobe Baumstruktur bei der thermischen Analyse. Die Grundkonturen stimmen insgesamt mit den 2D-Lösungen aus Kapitel 3 überein, sodass im Folgenden der gewählte Beispiellastfall „Presse inklusive Wärmetransport“ bearbeitet werden kann. In diesem Problemfall werden aufgrund sehr fein vernetzter Modelle ausschließlich Flächenlasten und Flächeneinspannungen verwendet.

³⁷ Es befindet sich im Anhang unter „Blockmodell und weitere 3D-Analysen“ weitere Problemfälle, sowie Blockergebnisse für den Lastfall aus Kapitel 3.

³⁸ Die Größenordnung des maximalen Wertes und der Werte im gesamten Lösungsgebiet unterscheiden sich wenig, sodass der Verformungsverlauf eines Biegebalkens und die Temperaturverteilung einer punktbelasteten Platte ersichtlich sind.

6.2 Beispiellastfall Presse inklusive Wärmetransport

Zur Verifikation wird das verwendete Softwareelement anhand einer Presse geprüft. In der kommenden Abbildung ist der Lastfall für die gekoppelte Analyse beschrieben. Es wird ein eingeschränkter Designraum gewählt, der an der Oberseite mit einer Druck- und Heizlast beaufschlagt ist. Hierbei sollen einerseits ein möglichst großer Wärmeabtrag und andererseits eine möglichst steife Struktur entstehen. Um eine genauere Auflösung der Topologieoptimierung zu erzielen, wird das Modell aufgrund der symmetrischen Geometrie, Randbedingung und Last verkleinert. Anschließend wird das $\frac{1}{4}$ Modell grob vernetzt und simuliert, um einige 3D-Effekte aufzuzeigen. Zusätzlich erfolgt die Auswertung durch das Selektieren einer Scheibe, um eine genaue Auflösung eines Ausschnitts zu ermöglichen, da deutlich mehr Elemente für den Querschnitt verwendet werden können. Aus den Ergebnissen des grob vernetzten 3D-Blocks und der feinvernetzten 3D-Scheibe können Konturen für die Lösungsgeometrie kombiniert werden. Die entstehende Lösung des $\frac{1}{4}$ Modells kann schließlich nach zweimaligen Spiegeln als Lösungskontur für die Aufgabenstellung verwendet werden.

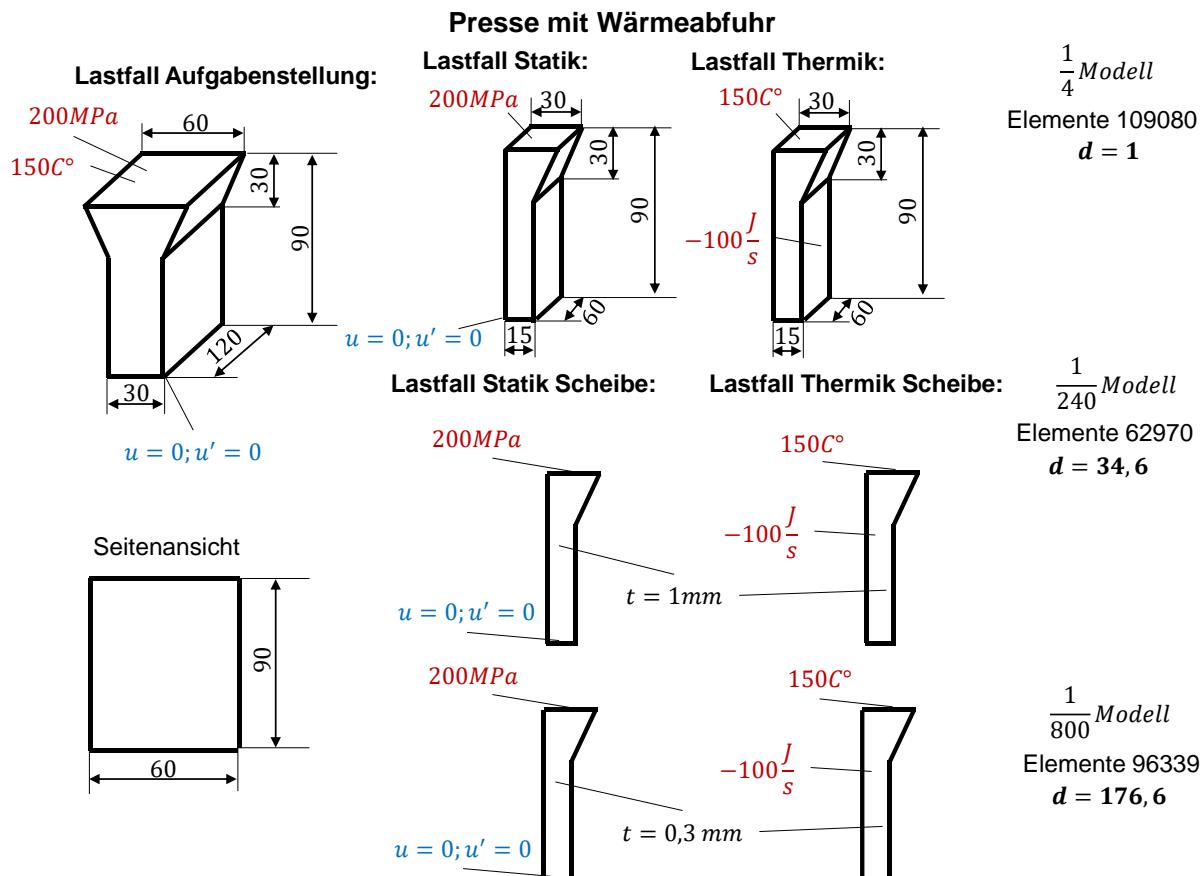


Abbildung 6-5: Fallbeispiel für die Topologieoptimierung

Um geeignete Gewichtungsfaktoren und Adoptionswege zu finden, wird zunächst eine reine statische und thermale Optimierung gewählt. Anschließend erfolgt die Kombination durch die gewählten Faktoren und Lösungsbereiche³⁹. Hierbei können die Ergebnisse der unterschiedlichen Modelle (Scheibe⁴⁰ und Block) mit der Auflösung d verglichen werden. Diese kann mit dem Verhältnis der eingesetzten Elemente $\frac{n_{ele2}}{n_{ele1}}$ multipliziert mit dem Verhältnis der geometrischen Vereinfachung zum Ursprungsmodell $\frac{n_{mv2}}{n_{mv1}}$ durch

$$d = \frac{n_{ele2}}{n_{ele1}} \cdot \frac{n_{mv2}}{n_{mv1}} \quad (6.1)$$

errechnet werden, falls identische Elementformen und -typen verwendet werden. Bei dem Vergleich des Scheiben- ($t = 1 \text{ mm}$, 62970 Elemente) mit dem Blockmodell ($t = 60 \text{ mm}$, 109080 Elemente), kann eine verbesserte Auflösung des Ergebnisses von

$$d = \frac{n_{eleScheibe}}{n_{eleBlock}} \cdot \frac{n_{mvScheibe}}{n_{mvBlock}} = \frac{62970}{109080} \cdot \frac{60}{1} = 34,6$$

bewirkt werden, obwohl deutlich weniger Elemente im Scheibenmodell eingesetzt werden. Wird eine noch dünnerne Scheibenstruktur mit einer Dicke $t = 0,3 \text{ mm}$ und einer Elementanzahl von 96339 gewählt, so kann die Auflösung nochmals deutlich auf $d = 176,6$ gesteigert werden. Durch diesen Ansatz können mit wenigen Elementen sehr scharfe Auflösungen und sehr feine Lösungsstrukturen entstehen. Nachteilig wirkt sich diese Reduzierung des 3D-Objektes auf das Lösungsverhalten aus, da die Dimension von \mathbb{R}^3 auf \mathbb{R}^2 verringert wird. Die optimalen Scheibenstrukturen können auf den gesamten Block übertragen werden, jedoch können in dem Blockmodell durch die zusätzliche Dimension effizientere Konturen entstehen, die eine Änderung in z -Richtung generieren lässt. Diesbezüglich werden die Scheibenergebnisse und die Blockergebnisse kombiniert verwendet.

Im kommenden Abschnitt werden die Ergebniskonturen des beschriebenen Lastfalles für die gewählte Scheibe und den gewählten Block interpretiert. Es wird eine reine thermische und statische Analyse durchgeführt, aus denen vorab die jeweils optimalen Lösungen der separat betrachteten Probleme betrachtet werden. Anschließend werden die beiden Scheibenmodelle unterschiedlicher Dicke verglichen, um die Auswirkung einer weiteren Vergrößerung der Auflösung aufzuzeigen.

³⁹ Eine weitere Steuerung der Optimierung kann durch Ersatzlasten erfolgen, die für die thermische Analyse im Anhang „Steuerung der Optimierung durch Ersatzlasten“ eingesetzt wurde. Zusätzlich können aktive Wärmeüberträger wie Kühlkanäle durch zusätzliche Lasten realisiert werden.

⁴⁰ Neben der Vorderansicht wird die Seitenansicht ebenfalls als Scheibe modelliert.

6.3 Lösung der thermischen und mechanischen Analyse

Für die Auswahl geeigneter Lösungskonturen bei einer Koppelung werden im Folgenden die Lösungen des rein thermischen und mechanischen Problems dargestellt. Beim statischen Resultat ergibt sich an der Oberseite eine Stützstruktur mit mehreren Streben. Diese Struktur ist nicht durchgängig, sondern beinhaltet in Tiefenrichtung mehrere Ausprägungen (1). An der Übergangskante hat sich eine Ausklinkung (2) gebildet, die den Kraftfluss umlenkt. Zusätzlich sind an der Krafteinleitung zwei Streben (3) entstanden, die als Stütze dienen. In der Umsetzung sollten somit die Stützelemente (1) an der Oberseite berücksichtigt werden, da diese durch ein Scheibenmodell nicht generiert werden können.

Die thermische Lösung zeigt eine baumähnliche Struktur, da der Lastfall dem in Kapitel 3.2 gewählten Problem ähnelt. Mit dem eingesetzten Material wird versucht Wärme in alle Richtungen abzuleiten. In diesem Fall ist die Lösung des Wärmeproblems in Tiefenrichtung durchgängig, sodass hierfür kein Blockmodell notwendig gewesen wäre.

- ① Stützstreben (4/6 Dargestellt)
- ② Ausprägung
- ③ Stützen (Einspannung)

Verwendung des $\frac{1}{4}$ Modells

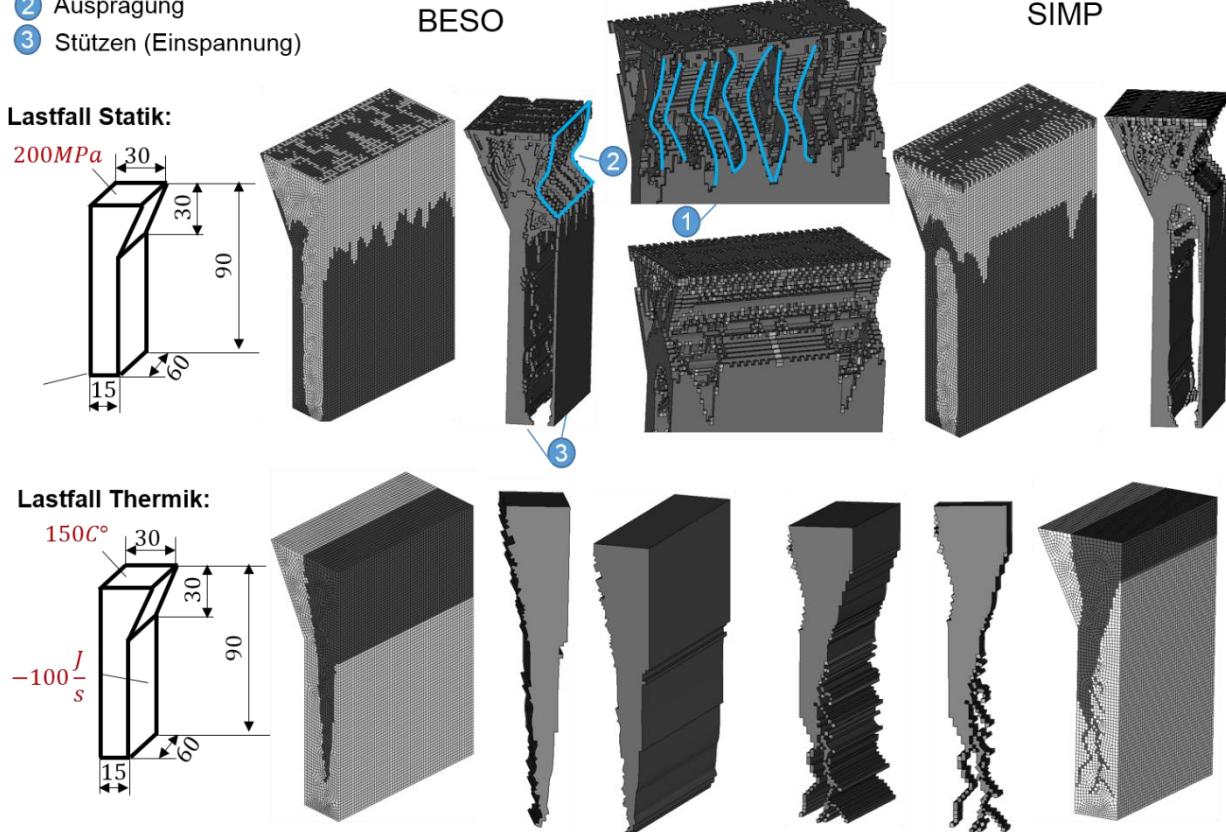


Abbildung 6-6: Lösung des Blockmodells für Thermik und Statik

Um eine feinere Lösungskontur zu erhalten, sind im Folgenden die Ergebnisse bei der Verwendung zweier verschiedener Scheibenmodelle gezeigt. Hierbei wird durch das Vergrößern der Auflösung d geprüft, ob durch eine weitere Verfeinerung des Netzes bessere Ergebnisse entstehen. Die Lösungen in der Darstellung ähneln der Blockstruktur. Bei der Betrachtung der statischen Lösung entstehen an der Kraftangriffsfläche wiederum feine Stützstrukturen (1), die deutlich mehr Streben beinhalten. Das Verhältnis der Flächen an der Einspannung (2) zeigt ein ähnliches Volumenverhältnis wie in der Blocklösung. In der thermischen Lösung ergeben sich deutlich mehr Zweige, die die Wärme abtransportieren.

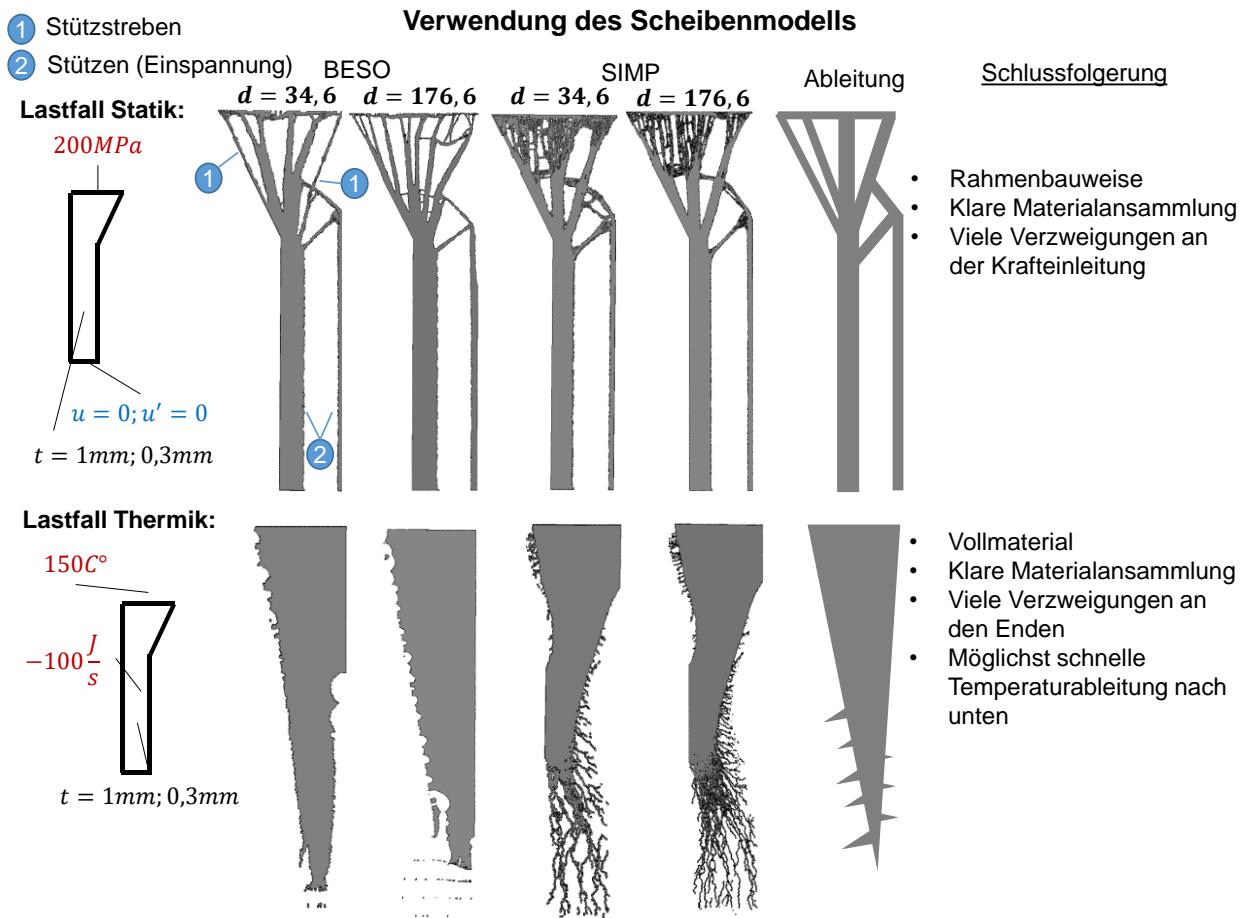


Abbildung 6-7: Lösung durch die Verwendung einer höheren Auflösung

Eine 5-Fach größere Auflösung von 176,6 bewirkt keine wesentlichen Verbesserungen, sodass die entstehende Lösung als unabhängig von der Netzfeinheit angesehen werden kann.

Um nun die Lösungskonturen verwenden und kombinieren zu können, wird der statische Lastfall in der kommerziellen Software Inspire nachgebildet und validiert, sodass bei ähnlichen geometrischen Ergebnisse eine Koppelung durchgeführt werden kann.

6.4 Vergleich der mechanischen Lösung mit einem „kommerziellen“ Resultat

Ein Vergleich der Lösungen des vorherigen Abschnitts mit den Konturen aus Inspire zeigt in folgender Darstellung deutliche Ähnlichkeiten. Werden die Scheibenergebnisse verglichen, so sind in dem Ergebnis aus Inspire deutlich weniger Streben (1) vorhanden. Zusätzlich ist zwar ein ähnliches Querschnittsverhältnis an der Einspannung (2) gegeben, jedoch ist die Materialansammlung in der Lösung aus dem selbstentwickelten Programm deutlich höher. Die Lösung aus Inspire benötigt somit mehr Material an der Kraftangriffsfläche (1), das an der Einspannung (2) fehlt.

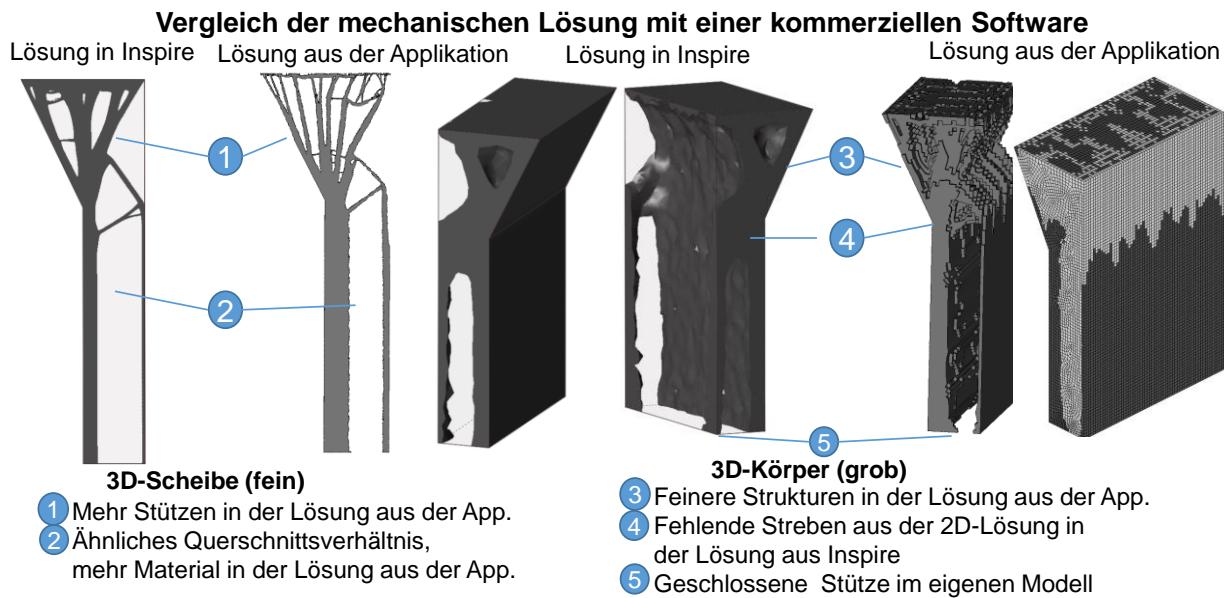


Abbildung 6-8: Vergleich der Lösungen in Inspire

Die Lösungen der Blockstruktur sind ähnlich, wobei in der Lösung aus Inspire weniger Stützen (3, 4) eingebaut sind. Zusätzlich sind die unterschiedlichen Stützen (3) in der Tiefenrichtung nicht vorhanden. Des Weiteren ist die Strebe an der Einspannung auf einer Seite (5) in der Inspire-Lösung nicht geschlossen, die in dem Ergebnis aus der „eigenen“ Software mit Material ausgefüllt ist. Aus diesem Vergleich wird ersichtlich, dass ein Übereinkommen der Konturen und groben Strukturen gezeigt wurde, allerdings sind die Lösungen aus Inspire weniger fein und komplex. Die thermischen Resultate können nicht verglichen werden, da es hierfür noch keine kommerzielle Software gibt. Nach der Ermittlung der grundlegenden Struktur der Ergebnisse und einem Vergleich der Resultate mit der kommerziellen Applikation können gekoppelte Lösungen ermittelt werden. Da hierfür viele verschiedene Strategieelemente aus Kapitel 3 eingesetzt werden, gilt es eine geeignete Auswahl aus der Vielzahl der entstehenden Lösungsvorschläge zu treffen.

6.5 Koppelung des mechanischen und thermischen Problems

Die Koppelung der beiden physikalischen Systeme wird zunächst am Scheibenmodell mit der Auflösung $d = 176,6$ untersucht. Hierbei werden sämtliche sinnvolle Strategieelemente aus der Optimierungssoftware verwendet, um geeignete Lösungen zu erhalten. Die Resultate sind in folgender Abbildung aufgelistet, die mittels der Verfahren „Gewichtung von Sensitivitäten“, „Gewichtung der Dichte“, „Adaption“, „Iterative Adaption“ und „Adaption mit Gewichtung“ errechnet wurden. Des Weiteren sind zusätzliche Parameter mit (1, 2, 3, 4, 5, 6) gekennzeichnet, die bei einem Adoptionsverfahren zusätzlich gesteuert werden können.

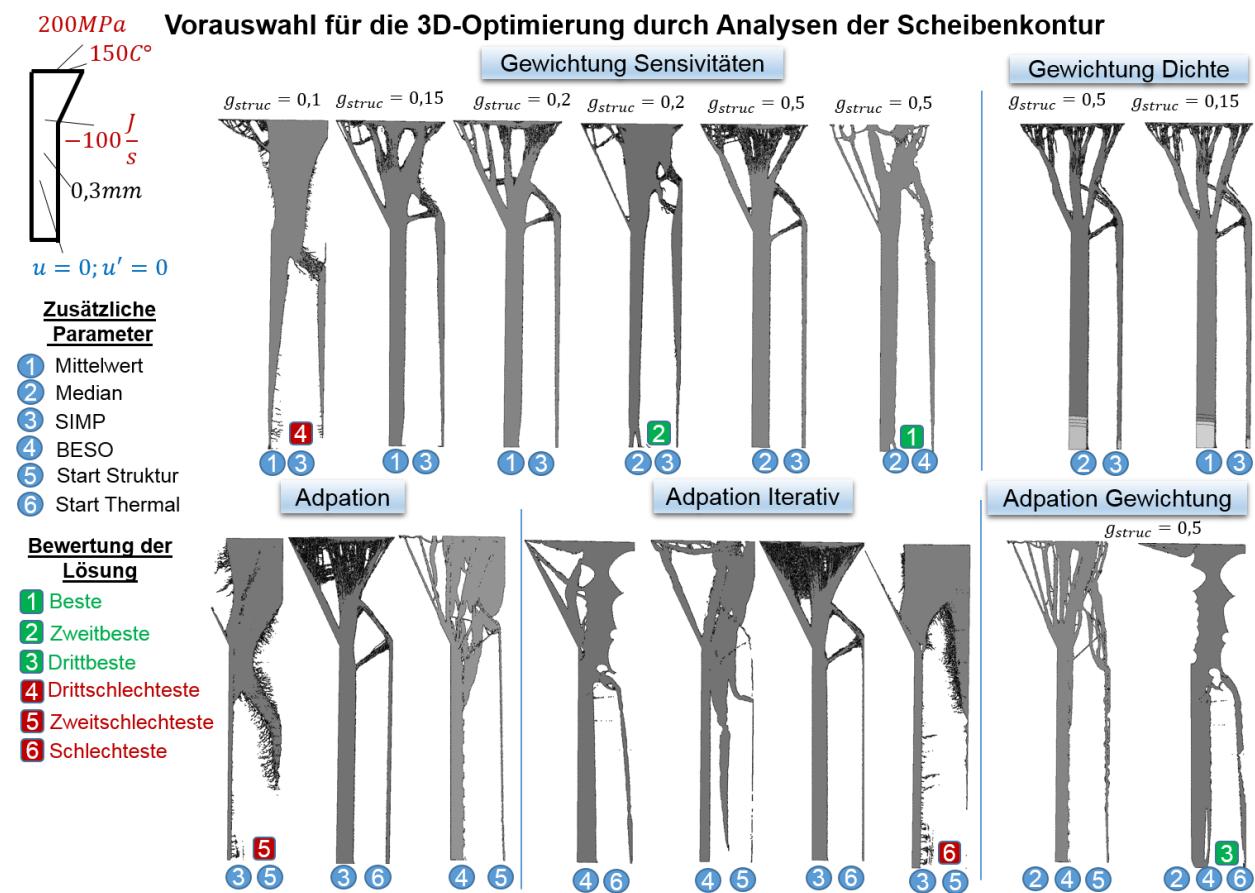


Abbildung 6-9: Anwendung der Optimierungstypen auf den gewählten Lastfall

Bei einer Gewichtung der Sensitivitäten wurde zunächst der Gewichtungsfaktor von $g_{struc} = 0,1$ auf 0,15 und anschließend auf 0,2 erhöht. Für die Skalierung wird zu Beginn der Mittelwert aller Sensitivitäten der Elemente verwendet. Es zeigt sich bei der niedrigsten Gewichtung von 0,1 ein sehr starker Einfluss des thermischen Systems. Der Faktor 0,2 bewirkt eine Struktur, die kaum von der thermischen Problemstellung beeinflusst wird. Wird statt des Mittelwertes der Median gewählt, so resultiert eine deutliche Beeinflussung des thermischen Problemfalles bei einem

Gewichtsfaktor von 0,2. Eine Erhöhung von g_{struc} auf 0,5 bewirkt in etwa gleichmäßige Auswirkungen des thermischen und mechanischen Problems auf die Lösungskontur. Die Wahl des Gewichtungsfaktors unter der Verwendung des Median bewirkt eine bessere Aussagekraft, sodass bei einer Gewichtung von 0,5 beiden Systemen gleichmäßig miteinbezogen werden. Der Mittelwert ist nicht aussagekräftig, da extreme lokale Überhöhungen statistisch die Gewichtung der Systeme verfälschen. Da das SIMP-Verfahren als Lösung unscharfe Strukturen und Geflechte von Streben an der Krafteinleitungsstelle generiert, wird zusätzlich die BESO-Strategie eingesetzt. Hierbei entstehen bei einem Gewichtungsfaktor von $g_{struc} = 0,5$ und einer Skalierung durch den Median klare Strukturen und aussagekräftige Konturen für die Stützelemente.

Der Vergleich der Ergebnisse von der Gewichtung mittels der Dichtenwerte zeigt ähnliche Lösungskonturen, falls eine unterschiedliche Gewichtung von $g_{struc} = 0,5$ für den Median und $g_{struc} = 0,15$ für den Mittelwert verwendet wird. Da jedoch einige Bereiche gräulich hinterlegt sind, eignen sich die Ergebnisse für eine Umsetzung nur bedingt.

Neben der Koppelung über die Verwendung von Gewichtungsfaktoren, wurde eine Adaption von Lösungsgebieten durchgeführt. Die Variante „Startstruktur Struktur“ und der Einsatz des SIMP-Verfahrens bieten eine gute Lösungskontur für die thermischen Eigenschaften, allerdings ist die Lösung für die statische Problemstellung nicht geeignet. Eine Veränderung des Startentwurfs zu „Thermal“ zeigt deutliche Verbesserungen für eine multiphysikalische Optimierung. Dieses Ergebnis ähnelt den Resultaten aus der Optimierung mittels Gewichtung. Der letzte durchgeführte Lösungstyp in der Adaption hat sehr viel Einfluss auf das Ergebnis, dass eine iterative Vorgehensweise bessere Konturen ermöglichen könnte. Die generierte Lösungsgeometrie mittels des BESO-Ansatzes erzeugt durch die abwechselnden Zielfunktionen neue Konturen, die für die gekoppelte Problemstellung eine deutlich bessere Struktur aufweisen. Wird das SIMP-Verfahren eingesetzt, so finden sich kaum Veränderungen in der Kontur bezüglich der iterativen Adaption und dem einmaligen Wechsel.

Abschließend wird eine Adaption einer gewichteten Lösung durchgeführt, da die letzte adaptierte Lösung den größten Einfluss zeigt. Es ergeben sich Konturen, die eine Verbesserung zu den vorherigen Ergebnissen zeigen, da in der letzten Iteration beide Zielfunktionen berücksichtigt werden. Insgesamt entstehen sehr viele Ergebnisstrukturen, aus denen das Resultat aus der Gewichtung der Sensivitäten mittels des BESO-Verfahren als optimale Wahl bei eigener Bewertung eingestuft wird.

Diese verwendeten Parameter werden gewählt, um weitere Simulationen durchzuführen, die in folgender Abbildung dargestellt sind. Hierbei wird neben einer erneuten 3D-Scheibenanalyse der Seitenansicht ein Blockmodell angesetzt. In diesem Modell wird die Elementanzahl stetig vergrößert, um den Einfluss der Netzfeinheit auf die 3D-Ergebnisse festzustellen. Aufbauend auf diesen Ergebnissen der 3D-Scheiben- und 3D-Blockoptimierung werden geeignete Stützstrukturen und Verformungen (siehe 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8) für den Neuaufbau entnommen.

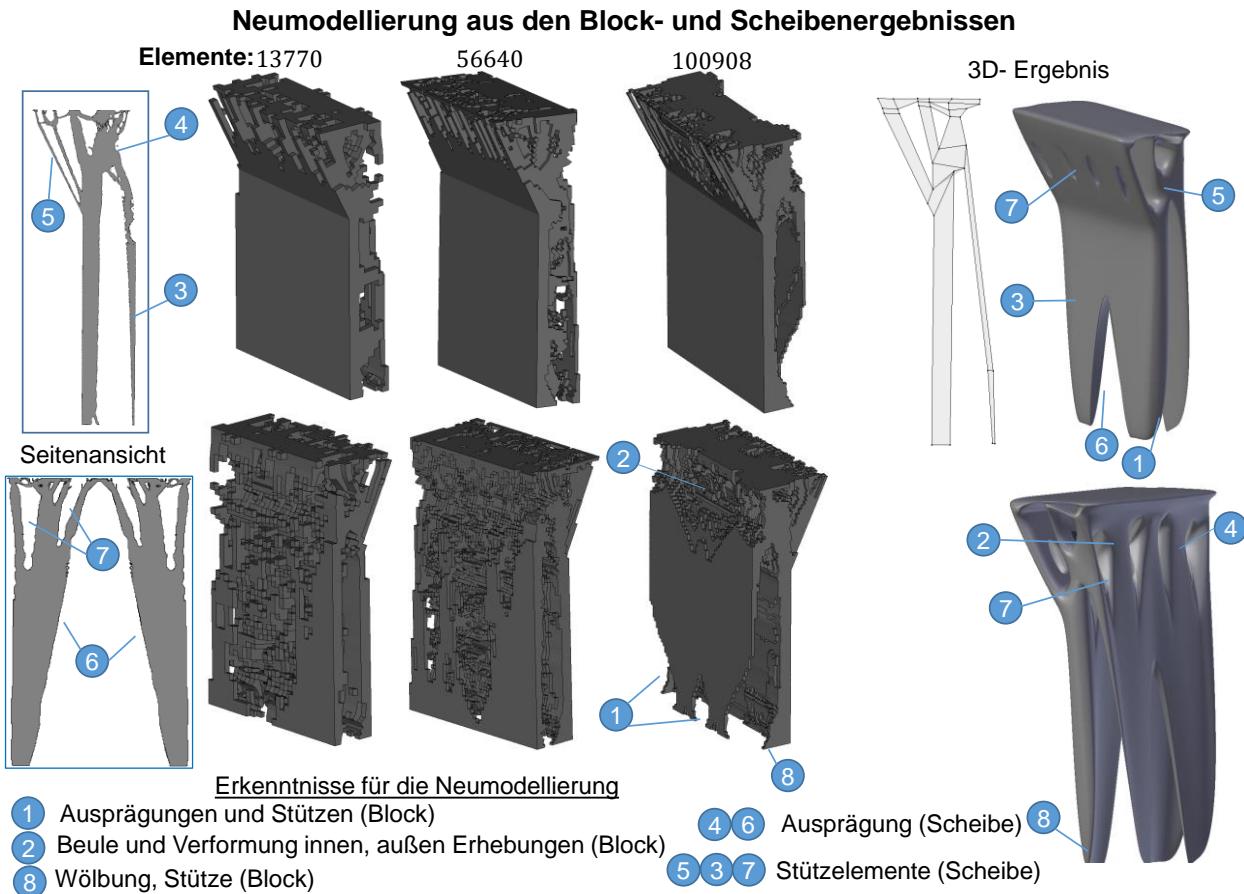


Abbildung 6-10: Modellierung einer Lösungsgeometrie mittels 2D und 3D Ergebnissen

Die Erstellung der neuen Geometrie wird standardmäßig mit CAD-Programmen durchgeführt. Da die Generierung der resultierenden Freiformflächen sehr viel Zeit beansprucht und sich schwierig automatisieren lässt, wird stattdessen eine Applikation aus dem Animations-, oder Gamedesign gewählt. Diese bieten neben der vorhandenen Nutzerfreundlichkeit verschiedenste geometrische Ansätze, die deutlich schneller und flexibler den Aufbau der gewünschten Konturen ermöglichen. Einige dieser Formulierungen für eine dreidimensionale Darstellung geometrischer Körper werden im folgenden Kapitel erläutert und verglichen.

7 Einführung in die Beschreibung geometrischer Formen

Die Beschreibung von geometrischen Formen in der CAE-Welt kann durch verschiedenste mathematische Ansätze erfolgen. Eine gängige Variante ist die Verwendung⁴¹ von B-Splines und Bézier Kurven, die für Freiformflächen verwendet werden. Hierbei wird bei den Bézier-Kurven die geometrische Form der Kurve $C(t)$ mit

$$C(t) = \sum_{i=0}^n B_i^n(t) P_i; \quad 0 \leq t \leq 1 \quad (7.1)$$

durch die Kontrollpunkte P_i und die reellen Bernsteinpolynome

$$B_i^n(t) = \frac{n!}{i!(n-i)!} t^i (1-t)^{n-i} \quad (7.2)$$

definiert vgl. [27], [28]. Das Bernsteinpolynom wird über die Anzahl der gewählten Punkte i und die Wahl des Bernsteins Polynomgrades n gesteuert. Die Koordinaten der Funktion werden durch den Parameter t bestimmt, in der $t = 0$ den Startpunkt und $t = 1$ den Endpunkt beschreibt. Die weiteren Koordinaten ergeben sich durch die Werte von t zwischen 0 und 1, die durch zusätzliche Kontrollpunkte definiert sind. Der sich ergebende Graph wird somit durch mehrere Kontrollpunkte und der Angabe eines Start- und Endpunktes festgelegt. Da der Anfang und das Ende der Funktion fest definiert sind, können mehrere Bézier-Funktionen aneinander gesetzt werden. In der Regel wird dafür eine zusätzliche Stetigkeit der verschiedenen Funktionsabschnitte gefordert.

Eine weitere Möglichkeit für die Definition einer geometrischen Kurve ist die Wahl von B-Spline Kurven. Hierbei wird die Funktion $C(t)$ mit

$$C(t) = \sum_{i=0}^n N_{i,d}(t) P_i \quad (7.3)$$

definiert vgl. [27], [29]. Die i -te Basisfunktion $N_{i,d}$ der B-spline mit dem Grad d lässt sich als

$$N_{i,0}(t) = \begin{cases} 1, & \text{wenn } t_i \leq t \leq t_{i+1} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \quad (7.4)$$

$$N_{i,d}(t) = \frac{t - t_i}{t_{i+d} - t_i} N_{i,d-1}(t) + \frac{t_{i+d+1} - t}{t_{i+d+1} - t_{i+1}} N_{i+1,d-1}(t) \quad (7.5)$$

aufstellen vgl. [27].

⁴¹ Neben den beiden genannten Typen gibt es weitere Möglichkeiten wie z.B. C-Splines (hermetische Kurven) oder gewichtete Splines um geometrische Flächen zu beschreiben.

Zusätzlich wird ein Knotenvektor T mit

$$T = (t_0, t_1, \dots, t_m) \quad (7.6)$$

eingeführt, in der m als

$$m = d + n + 1 \quad (7.7)$$

definiert ist vgl. [28]. Dieser Knotenvektor steuert die Überschneidung der Basisfunktionen und deren Auswirkung. In folgender Abbildung sind jeweils ein Beispiel für die Basisfunktion einer Bézier-Kurve⁴² und einer B-Spline⁴³ aufgetragen. Bei der Betrachtung der Bernsteinfunktionen hat zum Zeitpunkt $t = 0$ ausschließlich B_0^3 Auswirkung auf die Funktion. Am Ende der Funktion $t = 1$ hat nur B_2^3 einen Einfluss. Dies sorgt dafür, dass die Funktion im Anfangspunkt P_0 starten und im Endpunkt P_2 endet. Das Bernsteinpolynom B_1^3 dient zur Verzerrung des weiteren Bereiches.

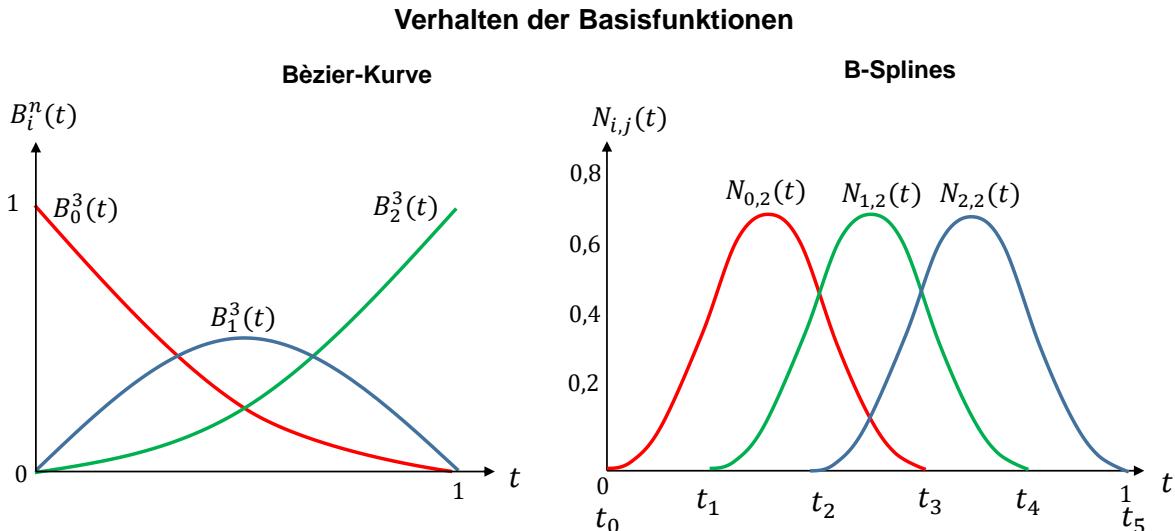


Abbildung 7-1: Darstellung der Basisfunktionen

Die Basisfunktionen der B-Spline verhalten sich ähnlich. Die Funktion wird durch das mehrmalige überschneiden der gleichmäßigen Basisfunktionen gesteuert. So wirkt $N_{0,2}$ in diesem Beispiel zwischen Bereich t_0 und t_3 . Neben diesen gleichmäßigen Basisfunktionen können durch das Skalieren oder Verzerren von $N_{i,j}$ und B_i^n die Verläufe der Funktionen angepasst werden. Zusätzlich kann bei den B-Splines der Vektor T variiert werden, sodass die einzelnen Basisfunktionen an verschiedenen Zeitpunkten starten. Diese Beschreibungsformen bieten somit viele Möglichkeiten unterschiedliche Kurven zu erzeugen.

⁴² Ein Beispiel der Aufstellung einer Bézier-Kurve findet sich im Anhang unter „Bézier-Kurve Beispiel“

⁴³ Ein Beispiel der Aufstellung einer B-Spline findet sich im Anhang unter „B-Spline-Kurve Beispiel“

Bei geeigneter Wahl der Basisfunktionen, können geschlossene Funktionen, Kreise, Ellipsen oder Tragflügelkonturen ausgedrückt werden, sodass durch das Extrudieren der Graphen Zylinder- oder Tragflügelflächen beschrieben werden können. Zudem kann neben der Beschreibung der Flächenkonturen mittels Extrusion eine Erweiterung der Funktionen $C(t)$ mit zusätzlichen Bernsteinpolynomen und Basisfunktionen erfolgen. Hierzu werden zwei Parameter u, v benötigt, mit denen durch

$$S(u, v) = \sum_{j=0}^m \sum_{i=0}^n B_i^n(u) B_j^m(v) P_{ij}; \quad 0 \leq u, v \leq 1 \quad (7.8)$$

$$S(u, v) = \sum_{j=0}^m \sum_{i=0}^n N_{j,d}(v) N_{i,d}(u) P_{ij}; \quad 0 \leq u, v \leq 1 \quad (7.9)$$

die Flächen $S(u, v)$ beschrieben werden kann vgl. [27] [29]. Die einzelnen Funktionen werden durch weitere Basisfunktionen $B_j^m, N_{j,d}$ in Flächen umgewandelt, deren Koordinaten sich aus der Wahl der Parameter u, v ergeben.

In der CAE-Welt gibt es für diese Art von Funktionen einige Formate wie Parasolid oder CatPart, die die analytische Beschreibung der Flächenfunktionen erfassen. Der Vorteil dieser Bézier Graphen und B-Spline Funktionen ergibt sich durch eine exakt mathematisch definierte Freiformfläche. Aus diesem Grund ist dieser Ansatz bei CAD-Geometrien weit verbreitet, da es für die Fertigung nötig ist, eine exakte geometrische Form zu erhalten (Toleranzen einhalten).

Eine weitere Möglichkeit ist der Gebrauch von Polygonnetzen. Hierzu wird die Oberfläche der Geometrie durch viele einzelne Flächen definiert. Die gängigste Variante ist der Einsatz von linearen Dreieckselementen, die in dem Format „STL“ benutzt werden. Je nach Anzahl der einzelnen Flächenelemente können Krümmungen und Ausprägungen approximiert werden. Der Vorteil dieser Polygonnetze liegt in der größeren Freiheit. Es kann jede Geometrie durch das Verschieben und Verfeinern der Flächen mit einer einfachen mathematischen Beschreibung abgebildet werden. Deshalb wird diese Methodik im Animationsdesign eingesetzt, in dem komplexe Körper modelliert werden.

Die mathematische Beschreibung dieser „Subdivision Surfaces“ besteht aus Flächen die durch die umliegenden Knoten beschrieben werden. Ein äquivalenter Vergleich lässt sich zwischen CAD-Geometrien und finiten Elementen ziehen, da die geometrische Fläche in der FEM ebenfalls diskretisiert wird. Diesbezüglich können finite Elemente Netze direkt in „Subdivision Surfaces“ umgewandelt werden. Eine automatisierte Umwandlung der FE-Netze in analytisch beschreibbare Flächen (NURBS) ist mit sehr viel Zeit und Rechenleistung verbunden, da

Optimierungsverfahren wie die Methode der kleinsten Quadrate⁴⁴ nötig sind, um passende Ausgleichsflächen zu finden.

In der nächsten Abbildung ist die Gegenüberstellung von Bézier-Kurven, B-Splines und Polygonnetzen dargestellt. Werden die analytischen Funktionen betrachtet, so ändert ein Verschieben des Kontrollpunktes die Form der Kurve. Dies kann auf die abgebildeten Flächen übertragen werden, in denen durch mehrere umliegende Punkte die geometrische Fläche verzerrt werden kann. Die Wahl von Polygonnetzen zeigt eine deutlich einfachere Variante der Flächenbeschreibung. Hierbei könnte zusätzlich der Polynomgrad erhöht werden, sodass Krümmungen besser approximiert werden können.

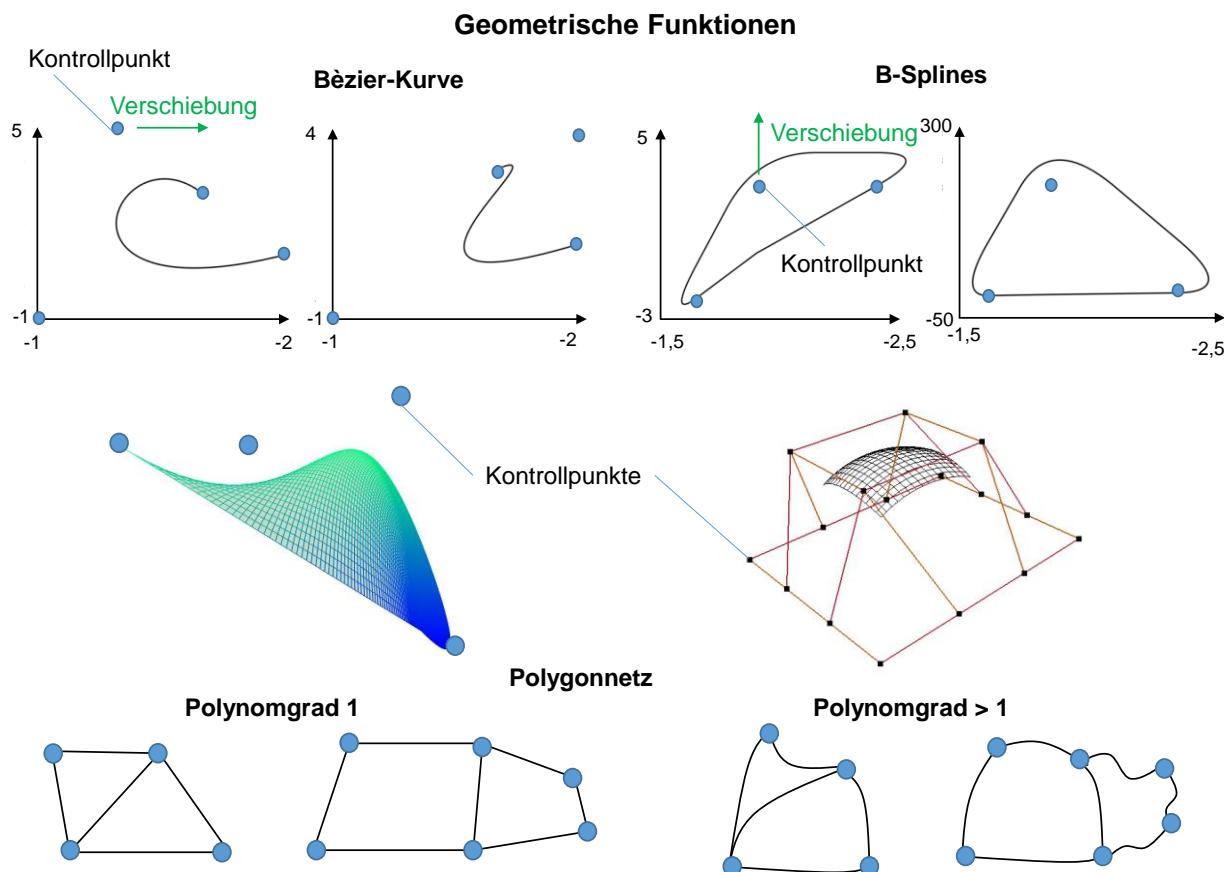


Abbildung 7-2: Vergleich verschiedener geometrischer Beschreibungsstrategien

Aus diesen Überlegungen können verschiedene Strategien für eine Ableitung der topologischen Ergebnisse ausgewählt werden. Spline- und Bézier-Flächen können direkt in CAD-Programme eingeladen und weiter bearbeitet werden, jedoch ist die Beschreibung der gewünschten Geometrie aufwändig. Mittels Polygonnetzen kann jede Geometrie mittels Verzerren erzeugt werden. Hieraus ergibt sich eine ungenaue Flächenkontur, da ein diskretes Netz vorhanden ist.

⁴⁴ Dieses Verfahren findet sich ebenso zur Ermittlung von Ausgleichsfunktionen bei Messergebnissen.

Abbildung 7-3 präsentiert eine Kugel, die durch die verschiedenen geometrischen Ansätze „Subdivision Surfaces“ (Polygonnetze) und NURBS (Non-Rational-B-Splines) veranschaulicht wird. Die Oberfläche der Kugel wird durch Polygonnetze approximiert, deren Einsatz eine sehr raue Oberfläche bewirkt. Ein Verzerren der Form kann durch das direkte Verschieben der einzelnen Knoten erfolgen. Falls eine genauere geometrische Abschätzung erforderlich ist, kann die Anzahl der Flächenelemente erhöht werden.

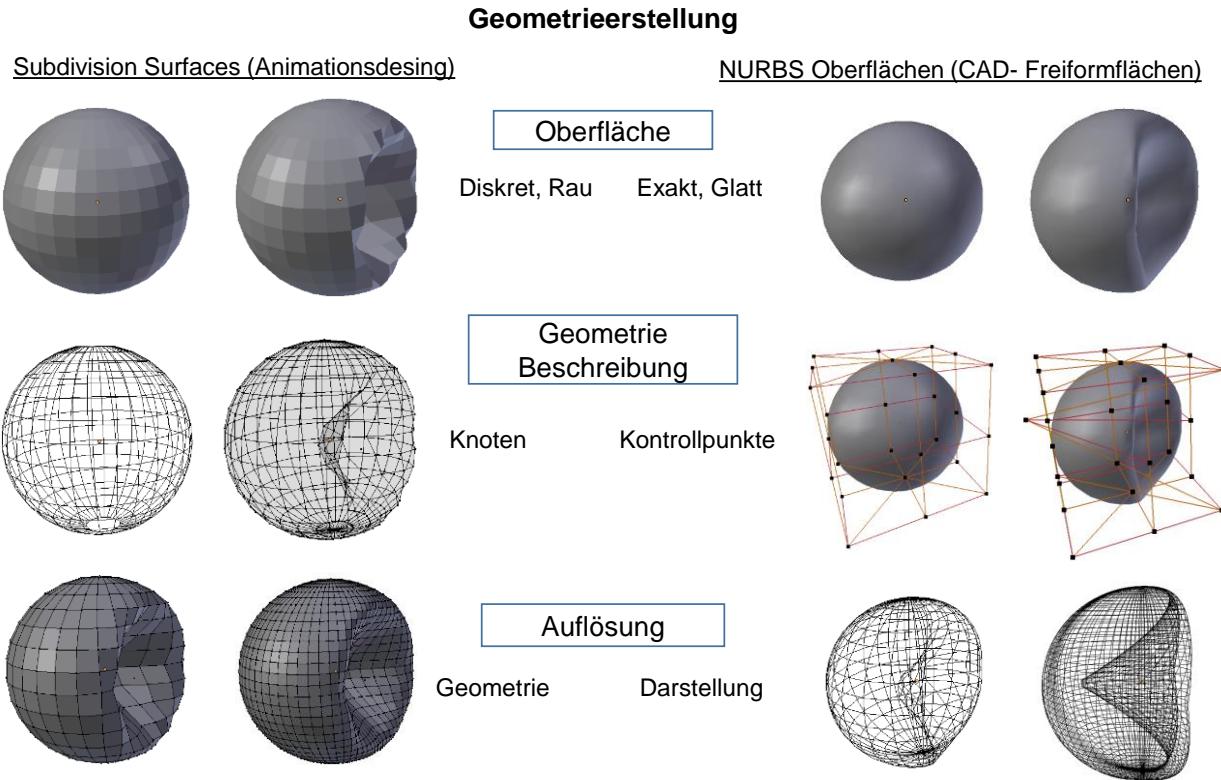


Abbildung 7-3: Vergleich verschiedener Beschreibungstypen geometrischer Formen

Beim Einsatz von Freiformflächen⁴⁵ wird eine exakt definierte Kugeloberfläche festgesetzt. Die Verzerrung erfolgt anhand weniger Kontrollpunkte. Da die Geometrie exakt beschrieben ist, bewirkt eine Erhöhung der Auflösung ausschließlich eine optisch verbesserte Kontur.

Insgesamt ergibt sich, dass für die Entwicklung neuer Konzepte Polygonnetze besser geeignet sind, da deren geometrische Beschreibung einfacher ist. Es können somit deutlich effizienter komplexe Konturen mit interaktiven Hilfsmittel⁴⁶ erstellt werden. Die Beschreibung mittels NURBS-Flächen sollte erst dann erfolgen, wenn die Berechnung und Auslegung abgeschlossen ist.

⁴⁵ Es ist möglich in der Freiformfläche den Ansatzgrad der Funktion zu erhöhen, sodass mehrere Basisfunktionen für das Abbilden einer komplexeren Kontur eingesetzt werden.

⁴⁶ Zeichen-Tablets, Stiften, abgescante Bauteile

Als Alternative zu den herkömmlichen Methoden der geometrischen Beschreibung können Verfahren wie Michell-Strukturen oder Fraktale (sich selbst ähnliche Strukturen) verwendet werden. Diese Fraktale wie Pythagorasbäume⁴⁷, Lévy-C-Kurven und Drachenkurven lassen sich häufig in der Natur finden vgl. [30], [31] und können als Startstruktur verwendet werden. Es sollten jedoch nur Fraktale benutzt werden, deren Struktur in der Natur vorhanden ist, oder durch physikalische Ansätze bestätigt lässt. In der folgenden Abbildung werden baumähnliche Fraktale gezeigt, die für eine thermische Optimierung geeignet sind. Als Vergleich dient die Lösung einer Topologieoptimierung, die durch einen Rand beschränkt ist. Zusätzlich ist für einen statischen Lastfall eine Michell-Struktur aufgebaut, die aus verzerrten Fraktalen erstellt wurde.

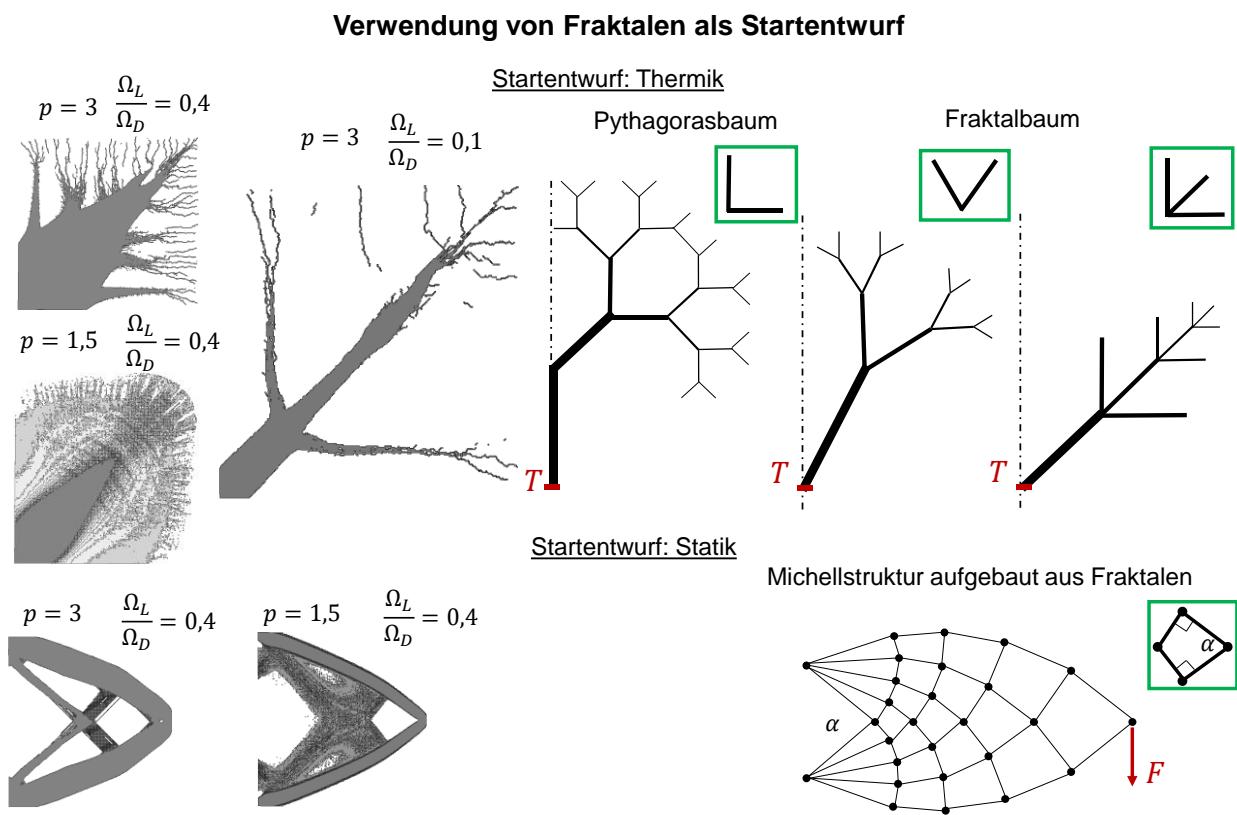


Abbildung 7-4: Einsatz von Fraktalen als Startentwurf

Dieser Ansatz der Fraktale kann als Ergänzung zu den herkömmlichen 3D-Modellen benutzt werden, um geeignete Startentwürfe für eine Topologieoptimierung zu erhalten. Als resultierende 3D-Geometrie sollten allerdings Polygonnetze und NURB-Flächen verwendet werden, da diese für physikalische Simulationen nötig sind. Um eine Ergebnisgeometrie zu erzeugen, wird im kommenden Abschnitt die Umwandlung der Ergebnisse aus der Topologieoptimierung mittels der beschriebenen geometrischen Methoden vorgestellt.

⁴⁷ Einige Konstruktionsmöglichkeiten von Pythagorasbäumen finden sich im Anhang, um sinnvolle Startstrukturen zu erstellen.

8 Geometrische Modellierung von Ergebnissen

Das Resultat der Topologieoptimierung sind diskrete geometrische Formen aus finiten Elementen, die in geeignete Konturen umgewandelt werden müssen. In der Regel werden CAD-Programme verwendet, um Freiformflächen (NURBS) an das Lösungsgebiet anzupassen. Als Alternative kann für die Konzeptphase und die Validierung der finalen Geometrie mittels FEM ein Animationsprogramm wie die freie Software Blender genutzt werden, die neben den Freiformflächen und Polygonnetzen sogenannte Metaballs beherrscht. Die Erzeugung mit Polygonnetzen ist die einfachste Methode, um die topologische Form zu gestalten. Hierbei wird aus viereckigen und dreieckigen Formen die gesamte Lösungskontur nachgebildet. Werden NURBS oder extrudierte Bézier-Kurven verwendet, so müssen die Kontrollpunkte so verschoben werden, dass sich die Freiformfläche der Lösungskontur anschmiegt. Diese Variante ist deutlich aufwändiger, da Kanten und Verzweigungen von Stegen schwierig zu modellieren sind. Eine interaktive Lösung, die geringe Einarbeitungszeit benötigt, bieten Metaballs. Diese Metaballs verbinden sich automatisch zu einer Geometrie, wenn ein Kontakt hergestellt wird. Falls notwendig können die Freiformflächen und Metaballs in Polygonnetze umgewandelt werden.

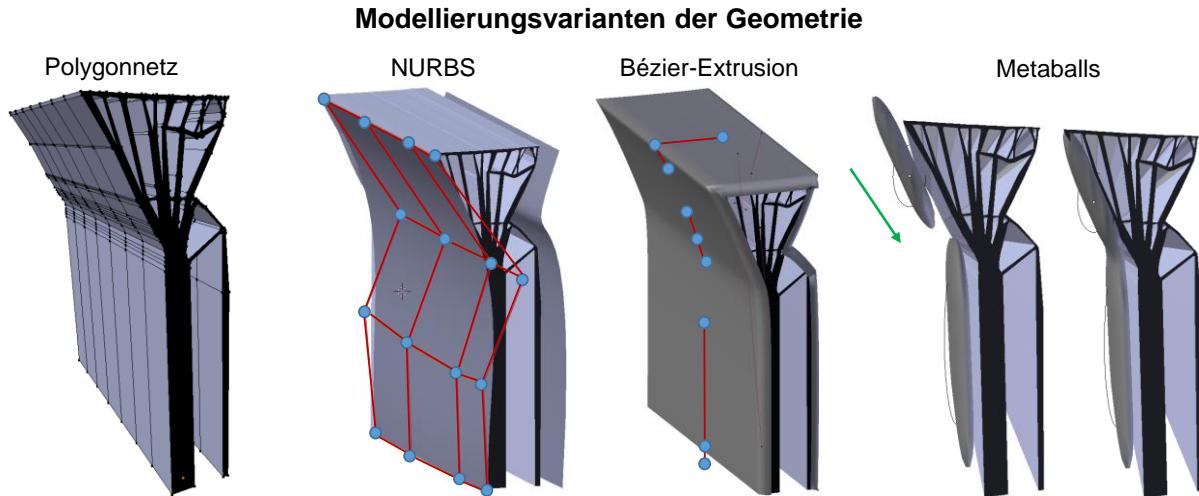


Abbildung 8-1: Darstellung verschiedener Modellierungsvarianten

All diese beschriebenen Varianten können für die geometrische Beschreibung eines Objektes gebraucht werden. In der Regel sind für die endgültige Geometrie exakte Beschreibungen wie Freiformflächen notwendig. Für die Konzeptphase reichen Körper aus Polygonnetzen, die sich effizient erzeugen lassen. Zusätzlich kann das resultierende FE-Netz aus der Topologieoptimierung in ein Polygonnetz automatisiert umgewandelt werden, sodass der Schritt der Nachmodellierung nicht erforderlich ist. Es muss somit nur die Nachbearbeitung erfolgen.

8.1 Nachzeichnen der geometrischen Form

Das Nachzeichnen ist der Standardweg für die Erzeugung der geometrischen Konturen. Unter der Verwendung von Polygonnetzen kann dies durch entlanglegen mehrerer Flächen (1) geschehen. Falls eine genauere geometrische Beschreibung erforderlich ist, können zusätzliche Polygone eingesetzt (2) werden. In der folgenden Abbildung ist für die rein statische Optimierung ein Modell aus „Subdivision Surfaces“ aufgebaut. Die Lösungskontur wurde mit Blender erstellt und anschließend mit mehreren Operationen nachbereitet.



Abbildung 8-2: Erstellung der Geometrie durch „Subdivision Surfaces“

Zuerst wird die Lösungskontur aus der Topologieoptimierung in Blender eingeladen. Hierfür kann das Gebiet als Bilddatei in den Hintergrund gesetzt werden. Anschließend wird die Kontur mit mehreren Dreiecken und Vierecken nachgezeichnet (1, 2). So besteht jede einzelne Strebe aus einem Viereck und mehreren Dreiecken. Bei einem Vergleich des Scheibenergebnisses und des modellierten 2D-Blendermodells sind wenige Unterschiede festzustellen. Vereinzelt wurden kleine Stege zusammengefasst oder entfernt. Aus dieser 2D-Geometrie kann eine 3D-Lösung erzeugt werden. In diesem Fall können mit wenigen Operationen zwei verschiedene Varianten erstellt werden. Das einfache Modell wird durch das Extrudieren der Fläche erstellt, dessen

Geometrie prinzipiell als Lösung genutzt werden kann. Da jedoch sehr viele scharfe Kanten vorhanden sind, könnten hohe Kerbspannungen entstehen, die durch ein Glättungsverfahren verminder werden können. Eine weitere Methode ist der automatisierte Einsatz von Balkenelementen. Hierbei wird in Blender an jedem erzeugten Linienelement eine 3D-Balkenstruktur aufgebaut. Dadurch lassen sich in kürzester Zeit, Fachwerkstrukturen erstellen und bearbeiten. Zusätzlich besteht wiederum die Möglichkeit der automatisierten Glättung der Kerben und spitz zulaufenden Kanten. Abschließend können die einzelnen Balkenelemente durch Skalierungsfaktoren an die Belastung angepasst werden.

Letztendlich entsteht eine 3D-Geometrie aufgebaut aus mehreren Polygonnetzen, deren Geometrie durch das Verschieben der Knoten an weitere Restriktionen (z.B. aus der Fertigung) angepasst werden kann. Zusätzlich gibt es Standardverfahren die Polygonnetze lokal oder global verfeinern, sodass durch moderne Verfahren wie das „Sculping“ weitere Glättungen eingebaut werden können. Bei dieser Strategie, das in folgender Abbildung beschrieben ist, können wie bei der Modellierung einer Tonskulptur Flächen eingedrückt, verdrillt, verschoben und verzerrt werden. Hierfür können zusätzliche Hardwareschnittstellen wie „Grafik Tablets“ oder „Virtual Reality Glasses“ verwendet werden, die eine Generierung von schwierigen geometrischen Formen deutlich vereinfacht. Soll beispielsweise geprüft werden, ob Sicken eine Verbesserung bewirken, so kann durch das Zeichnen mit einem Stift auf dem Grafik-Tablet die Fläche eingedrückt werden. Diese Art der interaktiven benutzerfreundlichen Modellierung ist bei herkömmlichen CAE-Programmen nicht gegeben.



Abbildung 8-3: Verwendung von „Sculping“

Neben der flexiblen Bearbeitung der geometrischen Konturen können die Verfahren für die bessere Gestaltung von FE-Netzen genutzt werden. Durch die Glättung von Kanten mit automatisierten Methoden, der Einsatz von „Sculping“ für zusätzliche Elemente wie Sicken und der automatisierten Erstellung von Balkenstrukturen können schnellstmöglich geometrische Konturen für die anschließende Generierung finiter Elemente angepasst werden.

In Abbildung 8-4 ist die schrittweise Verbesserung und Glättung der 3D-Geometrie in Blender und deren anschließende 3D-Vernetzung in Netgen dargestellt. Zunächst wird die Ergebnisgeometrie in Blender eingeladen, sodass entlang der Lösungskonturen einfache Polygonelemente wie Dreiecke und Vierecke konstruiert werden. Anschließend kann auf dem gesamten Modell eine automatische Glättung und Verfeinerung⁴⁸ durchgeführt werden. Um die Konturen nochmals anzupassen, werden diese mit „Sculping“ verschoben und danach automatisch verfeinert. Werden die jeweiligen Konturen vernetzt, so zeigen die geometrischen Nachbesserungen eine Verbesserung der automatisch generierten Netze, sodass die Physik in einer FE-Analyse deutlich besser abgebildet werden kann. Abschließend kann die Geometrie gespiegelt und als gesamtes Modell mit FEM validiert werden.

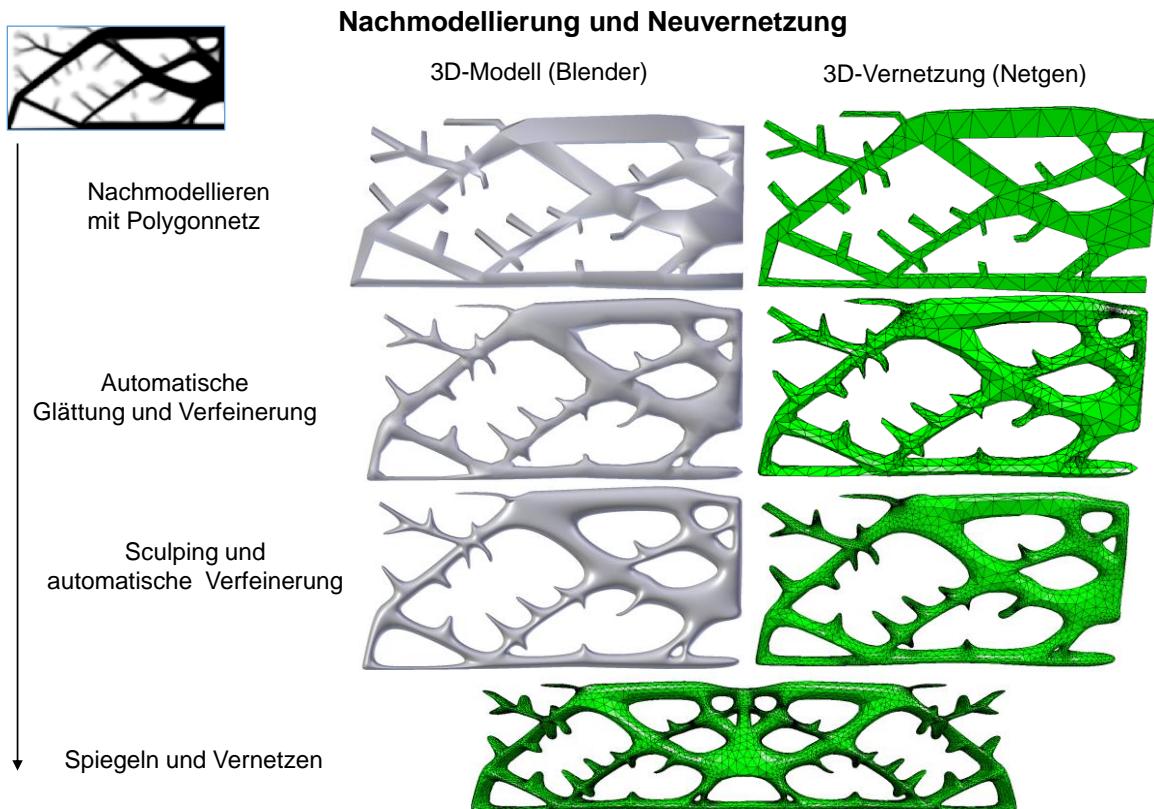


Abbildung 8-4: Modellierung und anschließende Vernetzung mit Blender und Netgen

Das Nachzeichnen der Lösung beansprucht in der Regel die meiste Zeit. Diesbezüglich wird in folgendem Abschnitt die automatisierte Erzeugung der Lösungsgeometrie mittels „Subdivision Surfaces“ vorgestellt. Hierbei wird das FE-Netz in eine 3D-Geometrie aus einzelnen Flächenelementen umgeformt, sodass kein Nachmodellieren notwendig ist.

⁴⁸ Die automatische Verfeinerung erfolgt durch die Splitting der einzelnen Polygonflächen. Komplexeste geometrische Formen für das Rendering können diesbezüglich aus mehreren Millionen Flächen bestehen.

8.2 Automatisiertes erstellen der Geometrie

Eine automatisierte Erzeugung einer geometrischen Form kann über verschiedenste Wege erfolgen. Der Standardweg in der CAE-Welt, ist die Verwendung von Optimierungsverfahren, die Freiformflächen so optimieren, dass eine geometrisch gute Approximation des FE-Netzes erfolgt. Hierbei können Polygonflächen durch die Methode der kleinsten Quadrate auf NURBS zurückgeführt werden. Es wird sozusagen eine Ausgleichsfunktion durch mehrere Messpunkte ermittelt. Da diese Optimierung von sehr vielen Parametern (Polynomgrad, Gewichtung, Form der Basisfunktion) abhängt, wird sehr viel Rechenleistung benötigt, um eine geeignete Flächenfunktion zu finden. Es gibt zwar Methoden wie das „Polygonnetz zu NURBS“⁴⁹ in der Applikation Rhino, allerdings kann kein automatisches Rückführen von diskreten geometrischen Formen auf analytische Freiformflächen erfolgen vgl. [32]. Aus diesem Grund wird die Standardmethode FE-Netz zu STL vorgestellt, dessen Resultat anschließend in Blender eingeladen wird. Es ist somit kein Nachzeichnen der Kontur erforderlich, da das Polygonnetz in Form eines STL-Formaten vorliegt. In folgender Abbildung ist das Schema der Umwandlung eines beliebigen FE-Netzes in das Oberflächenformat STL-Format dargestellt. Zunächst werden die vorkommenden Elementflächen gezählt. Ist eine Elementfläche mehrmals vorhanden, so ist diese eine innenliegende Fläche. Alle einmalig vorkommenden Flächenstücke werden als Außenflächen gekennzeichnet. Anschließend wird aus den außenliegenden Elementflächen ein STL aus triangulierten Flächenelementen erstellt.

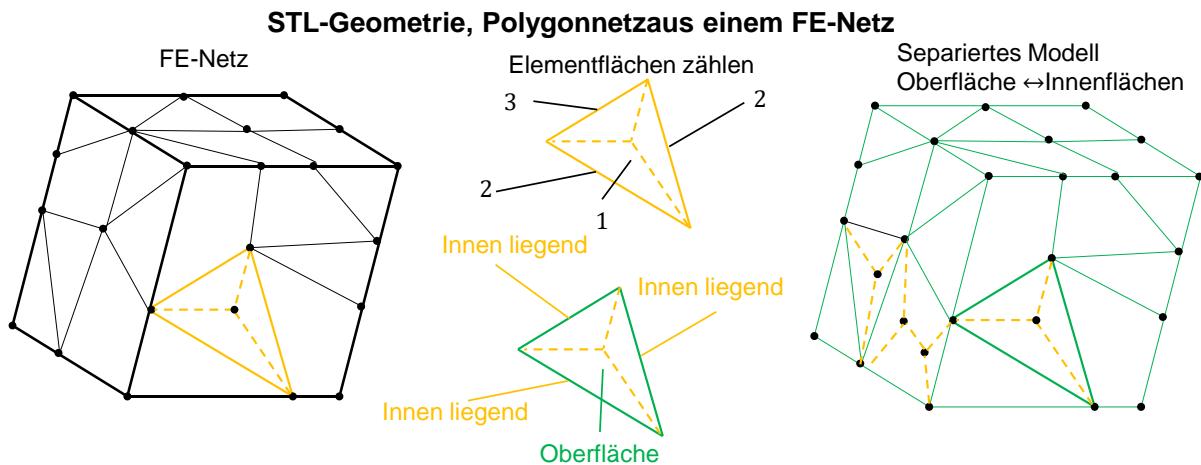


Abbildung 8-5: Methode zur Generierung einer Oberfläche aus einem FE-Netz

Da nicht das gesamte Netz sondern nur die Elemente mit einer Dichte nahe 1 als STL exportiert werden soll, müssen die Elemente, die sich nicht im Lösungsgebiet befinden, gelöscht werden.

⁴⁹ Diese Operation erfordert ein händisches Entlängeln einer Metageometrie.

Hierfür wird standardmäßig der normierte Dichtewert der einzelnen Elemente entnommen. Anschließend wird eine Grenzdichte eingestellt, ab der die Elemente als Lösung angesehen werden. Als finale Geometrie entsteht somit ein polygonförmiges Netz, dessen Elemente einen Dichtewert größer der Grenzdichte besitzen.

In folgender Abbildung ist eine diskrete Lösung aus der Topologieoptimierung in Abaqus als FE-Netz (Inp-Format) und in Blender als Polygonnetz (STL) importiert. Eine sofortige Verwendung der unregelmäßigen geometrischen Form erzeugt aufgrund der extrudierten Elemente Riefenbildungen (1) und raue Oberflächen (2). Diese könnten durch automatisierte Glättungsverfahren und Nachbearbeitungen entfernt werden, wobei eine Neukonstruktion in diesem Fall deutlich einfacher ist. Sollen Analysen direkt auf dem FE-Netz der Lösung durchgeführt werden, so bewirken der durchtrennte Steg (4), die Löcher in der Geometrie (5) und die raue Lastangriffsfläche (3) eine nichtgewollte Verzerrung der Ergebnisse.

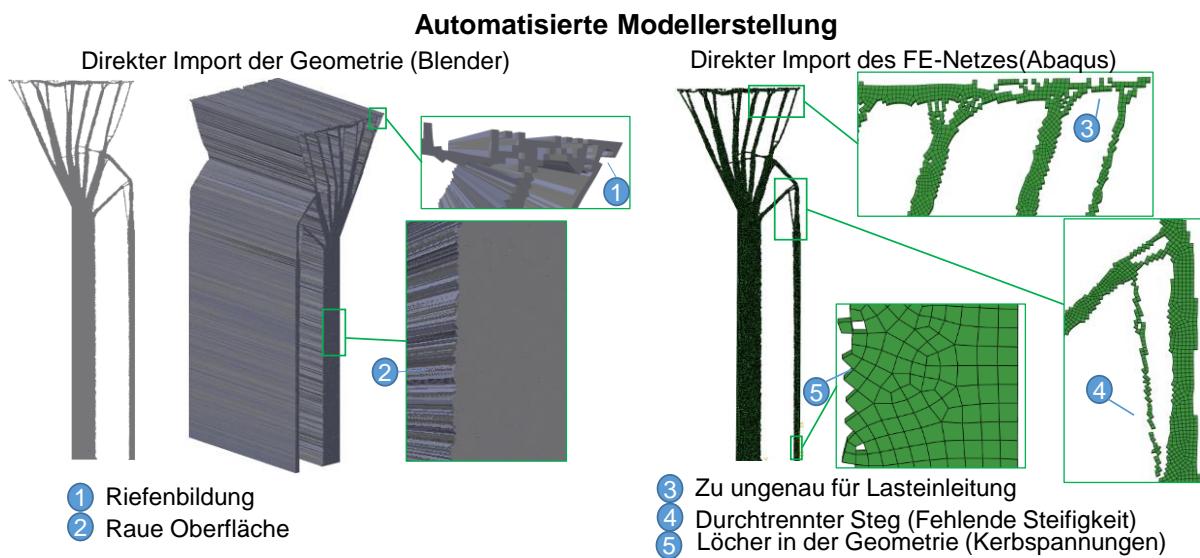


Abbildung 8-6: Import des FE-Netzes als Lösungsgeometrie

Falls der automatisierte Geometrieexport dennoch verwendet wird, ist eine Anpassung der diskreten Kontur notwendig, um sinnvolle Ergebnisse bei einer Nachrechnung⁵⁰ der Ergebniskontur mittels FEM zu erzeugen. In Blender gibt es hierzu die Möglichkeit durch automatisierte Verfahren glattere Konturen zu erzielen. Zusätzlich können Löcher, durchtrennte Stege und Aussparungen mit Elementen aufgefüllt werden. Falls einige Flächen nicht automatisiert verbessert werden, können diese durch „Sculping“ weiter bearbeitet werden.

⁵⁰ Es könnte neben der Nachrechnung eine erneute Topologieoptimierung durchgeführt werden, in der z.B. ein neuer Designbereich in Blender hinzugefügt werden kann.

In folgender Darstellung ist die Nachbearbeitung der Geometrie mittels Blender abgebildet. Da einige Stege durchtrennt sind, sollten diese geflickt werden. Dies erfolgt über die Vereinigung der Lösungsgeometrie mit einem Quader, der über das Loch gelegt wird. Anschließend werden auf dem FE-Netz mehrere automatisierte Algorithmen wie Neuvernetzung, Randglättung, Netzvereinfachung und Netzneustrukturierung angesetzt. Diese bewirken eine glatte Geometrie, die abschließend durch das „Sculping“ weiter verbessert werden kann.

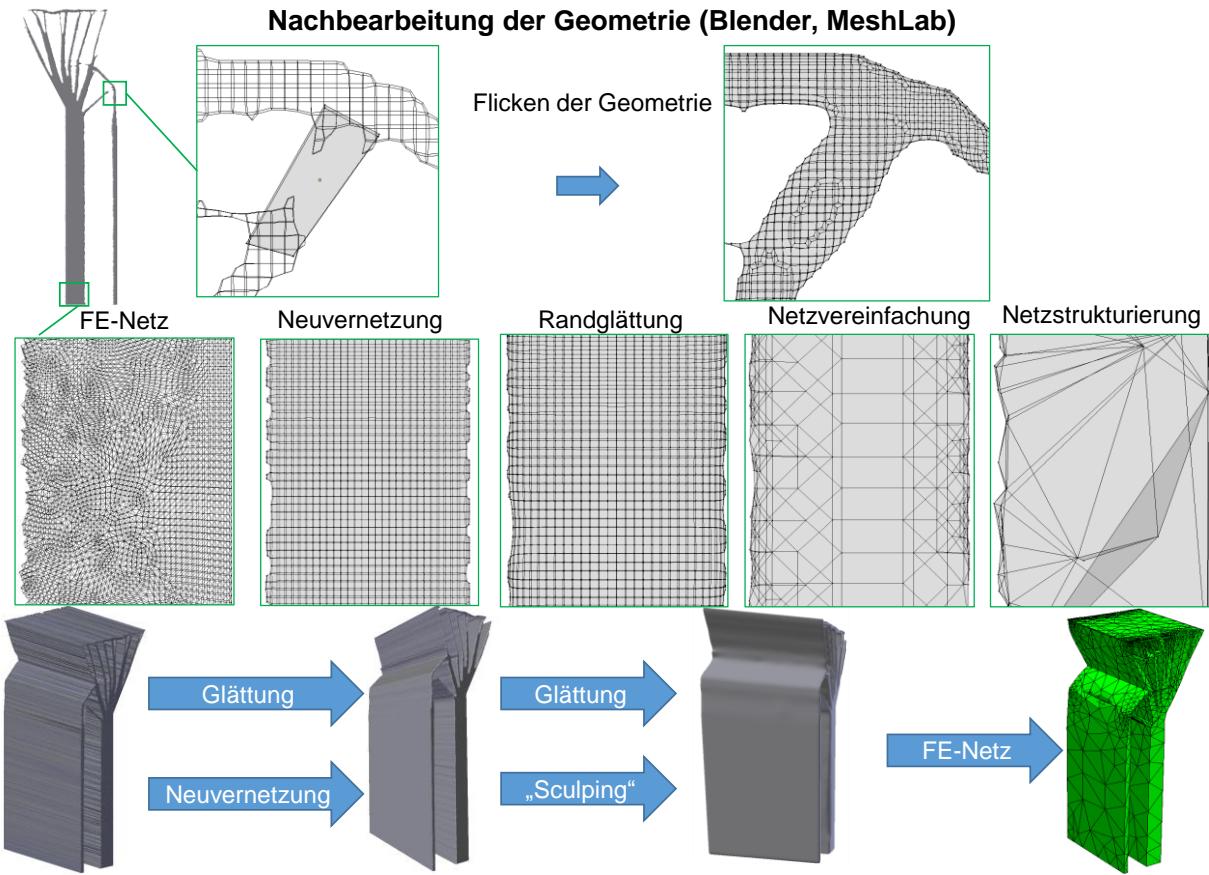


Abbildung 8-7: Glättung der Geometrie

Letztendlich zeigt der Weg der multiphysikalischen Topologieoptimierung mit anschließender geometrischer Modellierung mit Blender eine effiziente Strategie für die Bauteilauslegung⁵¹. Neben den eingesetzten Strategieelementen können einige weitere Varianten zur Erweiterung der beschriebenen Themenschwerpunkte „Geometrie“, „Softwareentwicklung“ und „Topologieoptimierung“ eingesetzt werden. Einige mögliche Erweiterungen, sowie die kritische Auseinandersetzung mit den verwendeten Komponenten hinsichtlich Geometrieerstellung und Optimierungsverfahren werden in den folgenden Kapiteln dargelegt.

⁵¹ Im Anhang unter „Analyse der Ergebnisse und erneute Optimierung“ findet sich ein Beispiel für eine FE-Analyse des Resultats aus der Topologieoptimierung, die nach der Nachbearbeitung der Geometrie erfolgt. Anschließend wird eine weitere Optimierung und FE-Analyse durchgeführt.

9 Diskussion

Zusammenfassend können durch die entwickelte Applikation verschiedene Simulationstypen mit zahlreichen Einstellparametern gestartet werden. Anhand des ausgewählten Lastfalles „Presse mit Heizung“ konnten Lösungsgebiete erzeugt werden, deren Struktur in der etablierten kommerziellen Software Inspire und deren „Solver“ OptiStruct in ähnlicher Weise entstehen.

Die verwendeten Strategien in der selbstentwickelten Applikation für eine Koppelung zweier Zielfunktionen zeigen jedoch in vielen Fällen keine relevanten Ergebnisse. So bewirkt der Einsatz von dynamischen Gewichtungsfaktoren bei einer sprunghaften und linearen Änderung kein Erfolg. Zusätzlich ergeben sich zwar aus der Gewichtung der Dichtewerte passende Ergebnisse, allerdings entstehen hierbei unscharfe Lösungskonturen. Eine Interpretation dieser Resultate kann nur durch Abschätzungen oder mit viel Erfahrung erfolgen.

Weitaus bessere und eindeutigere Ergebnisse können aus der Gewichtung der Sensitivitäten der unterschiedlichen Systeme gewonnen werden. Es entstehen scharfe Bilder, die nach endlich vielen Iterationen ein konvergentes Verhalten zeigen. Bei einer geeigneten Wahl des Gewichtungsfaktors werden die beiden Zielfunktionen berücksichtigt, sodass sich insgesamt eine bessere Lösung einstellt.

Eine weitere Verfahrensvariante kann mittels Adaption von Lösungsgebieten durchgeführt werden, mit denen Eigenschaften zur Verbesserung einer oder mehrerer Zielfunktionen hinzugefügt werden. Soll an einem strukturoptimierten Bauteil mehr Wärme abgetragen werden, so können durch die Adaption die bestmöglichen Stellen für das Anbringen von weiterem Material ersichtlich werden.

Insgesamt ergeben die durchgeführten Analysen bezüglich des Beispieldafalles „Presse mit Heizung“ unterschiedliche Strukturen. Oftmals ist schwer zu erkennen, welche Strategie sich für die gewählte Problemstellung am besten eignet. Grundsätzlich sollte bei einer Optimierung für eine Neuentwicklung die Strategie „Gewichtung der Sensitivitäten“ gewählt werden. Sollen schon vorhandene Bauteile verbessert werden, so ist eine Adaption besser geeignet. Die weiteren Verfahren können je nach Problemstellung erfolgreich sein, diese sind allerdings für eine „Default“-Variante ungeeignet. Als Standardmaterialmodell kann eine Kombination aus BESO und SIMP eingesetzt werden, so dass eine Optimierung mit dem BESO-Modell gestartet wird, an der anschließend mehrere Iterationen mittels des SIMP-Ansatzes durchgeführt werden.

Hinsichtlich der Software- und Methodenentwicklung bietet die Ansteuerung verschiedener Komponenten wie Octave, Matlab, Abaqus und CalculiX eine effiziente Vorgehensweise. Da für die gesamten Ergebnisse aus dieser Arbeit „Open Source“-Elemente verwendet wurden, können deutlich Kosten eingespart werden. Zusätzlich kann man sich durch die selbst entwickelten Tools deutliche von der Konkurrenz abheben, deren Lösungsapplikationen aktuell keine thermale Topologieoptimierung beherrschen. Des Weiteren können neue Verfahren schnellst implementiert werden, deren Tests in kommerzieller Software sehr viel Zeit beanspruchen. Nachteilig wirkt sich die Effizienz der entwickelten Applikation aus, da keine Vollzeitentwickler an dem Quellcode beschäftigt sind, sodass sich oftmals ein erhöhter Ressourcenverbrauch⁵² und eine größere Fehleranfälligkeit ergeben.

Da als gewählte Programmiersprache Python eingesetzt wird, kann eine direkte Erweiterung an einige CAE-Pakete wie Abaqus, Hyperworks und Ansys erfolgen, die mit Python arbeiten können. Neben diesen Programmen gibt es die Möglichkeit der Anbindung von Bibliotheken oder einer direkten Schnittstelle aus der Animationssoftware Blender. Es könnten somit direkte geometrische Operationen für das Bearbeiten von Polygonnetzen und NURB-Flächen verskriptet und implementiert werden. So könnte eine automatisierte Glättung der topologischen Ergebnisse mit anschließender Verfeinerung der Oberfläche des Ergebnisses erfolgen.

Bezüglich des erneuten Geometrieaufbaus zeigt der Einsatz von Animationssoftware eine kreative und schnelle Variante. Das Nachzeichnen der Konturen beansprucht deutlich weniger Zeit als in CAD-Systemen. Zusätzlich können die Ergebnisse aus der Topologieoptimierung automatisiert eingeladen und geglättet werden. Falls einige Fehler im Modell vorhanden sind, können diese manuell entfernt werden.

Letztlich stellt sich die Strategie Koppelung multiphysikalischer Topologieoptimierung durch eine selbstentwickelte Applikation mit anschließender Bearbeitung der Geometrie in einer Animationssoftware als eine effiziente Wahl dar. Aufbauend auf den drei gesetzten Schwerpunkten „Geometrie“, „Topologieoptimierung“ und „Softwareentwicklung“ können weitere mögliche Modifikationen und Erweiterungen entwickelt werden, von denen einige im nachfolgenden Ausblick vorgestellt werden.

⁵² Neben Python wird Fortran für rechenintensive Operationen als Ersatz eingesetzt. Somit sind z.B. zwei Bibliotheken für die Ermittlung der Filtergebiete vorhanden. Falls somit die Fortanbibliothek nicht funktionsfähig ist (Andere Rechnerarchitektur → neues kompilieren des Quellcodes), wird automatisch auf das Pythonmodul umgelenkt, da dieses Modul unabhängig von dem jeweiligen System (Linux, BSD, Mac, Windows ...) und der jeweiligen Rechnerarchitektur (z.B. Intel-, AMD-Prozessor) funktionieren.

10 Ausblick

In vielen kommerziellen Paketen gibt es Methoden wie der Einstellung eines „No Designspace“, oder der Definition von Fertigungsrestriktionen die den Optimierungsverlauf zusätzlich beeinflussen. Diese Möglichkeiten könnten in der eigenen Applikation ebenfalls in weiteren Arbeiten implementiert werden. So wird aktuell an einem Einbau einer Einschränkung des Designbereichs gearbeitet, dessen Auswirkung an einem Beispiel in folgender Abbildung dargestellt ist. Hierbei sollen funktionale Bereiche in der Optimierung als Vollmaterial angesehen werden, sodass Bolzenanbindungen, Schraubverbindungen oder Nietverbindungen mitbetrachtet werden. Es können somit einzelne Elemente aus der Optimierung ausgeschlossen werden, die bei der Berechnung der Systemantwort mitbetrachtet werden. Zusätzlich können direkt automatisierte Verfahren für die Geometrieerzeugung verwendet werden, in der diese Bereiche als Material angesetzt werden.

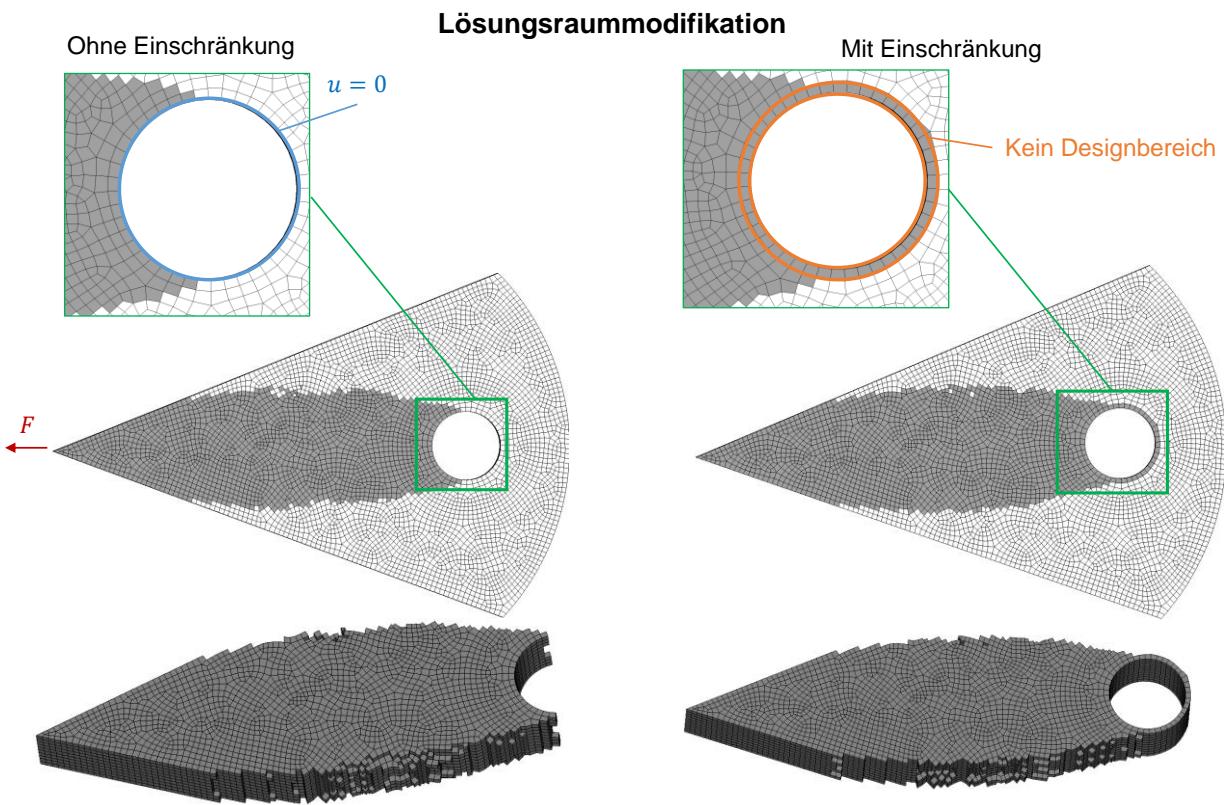


Abbildung 10-1: Lösungsraumeinschränkung

Für die Erweiterung der Optimierungsstrategien können weitere physikalische Probleme wie dynamische, magnetische, elektrische Systeme hinzugefügt werden. Außerdem können Multimaterialverfahren sowie die Änderung des FE-Netzes während der Iteration einen großen Vorsprung gegenüber der kommerziellen Variante bewirken. Ebenso kann anstatt der finiten

Elemente Methode, die Methode der finiten Differenzen oder Volumen verwendet werden, um so das geeignete Verfahren für die verwendete Problemstellung einzusetzen.

Ebenfalls ist eine Verbesserung des Quellcodes notwendig, um zusätzliche Erweiterungen einzubauen. Hierfür können Methoden aus dem „Softwareengineering“ verwendet werden, die eine modularisierte Vorgehensweise aufzeigen. Das gesamte Paket lässt sich aus einzelnen Programmabschnitten zusammensetzen, die unabhängig voneinander agieren können. Hierbei können die aktuell verwendeten Algorithmen z.B. zur Filterung der Sensitivitäten hinsichtlich Rechenzeit und Ressourcenverbrauch durch Parallelisierung verbessert werden. Dabei bietet sich die Berechenbarkeitstheorie und Komplexitätstheorie aus der theoretischen Informatik an, in der grundlegende Elemente wie Datenstrukturen, Kalküle und formale Sprachen viele auftretende grundlegende Probleme lösen können. So ist beispielsweise das Verhalten der Verfahren unter Erhöhung der Anzahl der Elemente⁵³ entscheidend, um so Algorithmen zu vermeiden, die in der Regel exponentielle Rechenzeiten benötigen vgl. [26].

Zusätzlich können Methoden aus Blender direkt in entwickelte Applikation angebunden werden, mit denen eine automatische Glättung der optimierten Kontur erfolgt. Hierbei können weitere Optimierungsläufe automatisiert erfolgen, sodass ein Wechsel zwischen automatisierter Optimierung und automatisierter geometrischer Nachbearbeitung erfolgt.

Neben weiteren Applikationen für die Topologieoptimierung können aufgrund der Kapselung der entwickelten Klassen, Methoden und Bibliotheken schnellstmöglich neue Programme erstellt werden, die auf finiten Elementen basieren. Diesbezüglich wird aktuell eine Software mit den Quellcode aus der Topologieoptimierung für die automatisierte Bewertung von geometrischen Formen hinsichtlich der Fertigbarkeit entwickelt, die anhand finiter Elemente Netze die Geometrie analysiert (siehe Anhang „Automatisierte Geometriebewertung“).

All diese Möglichkeiten könnten in weiteren Abschlussarbeiten und Projekten realisiert werden. In naher Zukunft erfolgen zusätzlich einige Tutorials und Skripte, sowie die Einstellung einer Batchfähigen Ansteuerung der einzelnen Optimierungen. Zusammenfassend entsteht als Resultat eine „Open Source“-Variante für die Topologieoptimierung, die sich auf jedem System einbringen und anpassen lässt.

⁵³ Ein exponentieller Anstieg an Operationen bezüglich einer linearen Erhöhung der Elemente sollte nicht verwendet werden.

11 Zusammenfassung

Im Rahmen einer Masterarbeit wird eine Applikation für die Topologieoptimierung verschiedenster Problemstellungen und Zielfunktionen entwickelt. Diese setzt sich aus den drei Bereichen „Methodenentwicklung“, „Softwareumsetzung“ und „geometrische Modellerstellung“ zusammen.

In der Methodenentwicklung wird versucht, neue Verfahren für die Optimierung von multiphysikalischen Problemstellungen zu entwerfen. Hierfür werden Gewichtsfaktoren sowie Adoptionsmethoden eingesetzt, die eine gemeinsame Betrachtung von verschiedenen Zielfunktionen ermöglichen. Zunächst werden einige mögliche Filterverfahren aus der digitalen Bildverarbeitung vorgestellt, die für die Glättung der Lösungskonturen und Vermeidung von numerischen Problemen aus der Optimierung eingesetzt werden. Um anschließend geeignete Lösungen zu generieren, sind einige Parameterstudien simuliert worden, die den Einfluss verschiedener Parameter auf einen gewählten Beispiellastfall zeigen. Abschließend erfolgt die Beschreibung mehrerer Methoden für die Koppelung zweier physikalischer Systeme mit den Methoden „statische Gewichtsfaktoren“, „dynamische Gewichtung“ und „Adaption von Lösungsgebieten“.

Die Softwareumsetzung setzt sich mit der Entwicklung eines Programmes für die eingesetzten Methoden auseinander. Hierbei gilt es geeignete Strategien zu gebrauchen, die eine Anbindung von kommerziellen und freien CAE-Applikationen erlaubt, sodass sich Ergebnisse in endlicher Reichenzeit ergeben. Letztendlich wird Python für die Steuerung der Optimierung und Prozesse verwendet, deren nötige Systemantworten für das Optimierungsverfahren von vorhandenen FE-Lösern ermittelt werden. Diese Software kann mit geeigneten Schnittstellen freie FE-Solver wie CalculiX und freie Animationsprogramme wie Blender ansteuern und benutzen.

Die komplette Geometriebearbeitung wird in der Animationssoftware Blender durchgeführt. Durch die nutzerfreundliche Bedienbarkeit und schnelle Handhabung können dreidimensionale Körper in kürzester Zeit erstellt werden. Zusätzlich wird ein Verfahren zur automatisierten Erstellung von Konturen aus dem Ergebnis der Topologieoptimierung vorgestellt, da die FE-Netze direkt eingeladen werden können.

Insgesamt setzen sich die einzelnen Abschnitte der Masterarbeit zu einer sehr effizienten und kostenfreien Methode für die Erstellung optimaler Strukturen zusammen. Hohe Lizenzkosten sowie Wettbewerbsvorteile können schließlich vermieden bzw. ausgebaut werden, da ausschließlich freie Programme und eine flexible Programmierung eingesetzt werden.

V. Literaturverzeichnis

- [1] B. Klein, „Leichtbau-Konstruktion Berechnungsgrundlagen und Gestaltung,“ Springer Verlag, 2013.
- [2] A. Schumacher, Optimierung mechanischer Strukturen, Wuppertal: Springer Verlag, 2013.
- [3] L. Harzheim, Strukturoptimierung Grundlagen und Anwendungen, Nourney: Europa-Lehrmittel, 2014.
- [4] O. S. Martin Phillip Bendsoe, Topology Optimization, Theory, Methods and Applications, Berlin: Springer-Verlag, 2004.
- [5] C. Mattheck, Denkwerkzeuge nach der Natur, Karlsruhe: Karlsruher Institut für Technologie, 2010.
- [6] C. Mattheck, Warum alles kaputt geht: Form und Versagen in Natur und Technik, Karlsruhe: Karlsruher Institut für Technologie, 2003.
- [7] Y. M. X. X. Huang, Evolutionary Topology Optimization of Continuum Structures, Australien: John Wiley & Sons, Ltd, 2010.
- [8] E. M. D. J. T. A. Danny J. Lohan, „Topology optimization for heat conduction using generative design algorithms,“ in *World congress on structural and multidisciplinary optimization*, Sydney Australia, 2015.
- [9] M. S. Ryszard Kutyłowski, „Analyse des Penalty-Faktors in SIMP-Methode in Bezug auf die Konvergenz der Lösungen,“ Institut of Civil Engineering, Poland, 2008.
- [10] E. K. A. Z. D. P. K. G. E.M. Papoutsis-Kiachagias, „Constrained topology optimization for laminar and turbulent flows, including heat transfer,“ National technical university of athens, Capua, Italy, 2011.
- [11] M. P. B. O. S. A. Gersborg-Hansen, „Topologyoptimization using the finite volume method,“ in *World Congress of Structural and Multidisciplinary Optimization*, Brasilien, 2005.
- [12] S. L. Dan He, „BESO method for topology optimization of structures with high efficiency of

- heat dissipation," Dalian University of Technology, China, 2008.
- [13] E. M. Dede, „Multiphysics Topology Optimization of Heat Transfer and Fluid Flow Systems,“ in *Excerpt from the Proceedings of the COMSOL Conference*, Boston, 2009.
- [14] J. Wiedemann, „Leichtbau Elemente und Konstruktion,“ Springer Verlag, 2007.
- [15] R. T. a. S. Mohseni, „Alternating active-phase algroithm for multimaterial topology optimization problems a 115-line matlab implementation,“ Sharif University of technology, Tehran, Iran, 2013.
- [16] S. L. Dan He, „BESO method for topology optimization of structures with high efficiency of heat dissipation," Dalian University of Technology, Dalian, China, 2008.
- [17] M.-G. K. J.-H. C. S. Kim, „Topology Desing Optimization of Heat Conduction problem using adjoint sensitivity analysis method," 2010.
- [18] D. B. Haasdonk, „Digitale Bildverarbeitung Einheit 8 Lineare Filterung," Albert-Ludwigs-Universität Freiburg, Freiburg, 2007.
- [19] S. Winter, „Skript zur Vorlesung Digitale Bildverarbeitung," Institut für Neuroinformatik, 2014.
- [20] P. D. C. Stamm, Bildverarbeitung, FHNW bverl HS 12, 2012.
- [21] B. M. D. A. A. S. L. CHan, The Desing of Michell Optimum Structures, London: Ministry of aviation, 1962.
- [22] A. H. A. V. A. Dadulau, „A new adaptive penalization scheme for topology optimization," Universität Stuttgart, Stuttgart, Deutschland, 2008.
- [23] T. S. V. P. George I. N. Rozvany, „Extension of Michells theory to exact stress-base multi-load truss optimization," in *Word Congress on Structural and Multidisciplinary Optimization*, Orlando, Florida, USA, 2013.
- [24] S. L. H. Q. Yongcun Zhang, „Design of the Heta Conduction Structure Based on the Topology Optimization," INTECH, Open Science, Open minds, China, 2011.
- [25] N. C. Drude, „Optimale Gestaltung von Strukturen elastischer Materialien durch die

Topologieoptimierung mit Gewichtungsfaktoren,“ Technische Universität München, München, 2011.

[26] I. Sommerville, Software Engineering, Pearson Studium, 2012.

[27] Á. Balázs, Tessellation and rendering of trimmed NURBS models in scene graph systems, München: Rheinischen Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn, 2008.

[28] W. Matusik, Bézier Curves and Splines, MIT CSAIL.

[29] J. L. C.-K. S. John Fischer, If You Know B-Splines Well, You Also Know NURBS!, Michigan: Michigan Technological University.

[30] B. Mandelbrot, Die fraktale Geometrie der Natur, Birkhäuser, 2014.

[31] H. Zeitzler, Fraktale Geometrie - Eine Einführung, Bayreuth: Vieweg Verlagsgesellschaft, 2013.

[32] W. msh, „Robert MC Neel,“ 13 04 2011. [Online]. Available:
<http://wiki.mcneel.com/de/rhino/meshtonurb>. [Zugriff am 09 01 2016].

[33] E. P.-K. E. K. A. Z. D. P. K. G. P., „Constrained topology optimization for laminar and turbulent flows, including heat transfer,“ National Technical University of Athens, Capua, Italien, 2011.

[34] L. J.-L. Lions, „On some shape and topology optimization problems in conductive and convective heat transfers,“ in *An international conference on engineering and applied sciences optimization*, Greece, 2014.

[35] D. Lee, „Topology optimization of multi-material with heat conduction problem,“ Sejong Univiversity, Seoul, Republic Korea, 2014.

[36] S. Schwarz, „Sensitivitätsanalyse und Optimierung bei nichtlinarem Strukturverhalten,“ Universität Stuttgart, Baustatik, Stuttgart, 2001.

[37] S. Kimmich, „Strukturoptimierung und Sensibilitätsanalyse mit finiten Elementen,“ Universität Stuttgart, Institut für Baustatik, Stuttgart, 1990.

VI. Anhang

Hard-kill BESO-Methode

Die Hard-kill BESO-Methode beschreibt ein Verfahren in dem ausschließlich Vollmaterial eingesetzt wird. Hierbei werden mit jeder Iteration Elemente an ungünstigen Bereichen entfernt vgl. [7]. In der folgenden Abbildung ist ein Vergleich zwischen der Soft-kill- und Hard-kill-Methode abgebildet. Der Unterschied der beiden Methoden besteht in der Auswirkung auf die Systemgleichungen. Falls kein Vollmaterial vorhanden ist, wird bei der Hard-kill-Methode eine Löschung der Elemente vorgenommen. Die Soft-kill-Methode verringert stattdessen die Materialeigenschaften, sodass die Elemente wie ein Loch mitsimuliert werden.

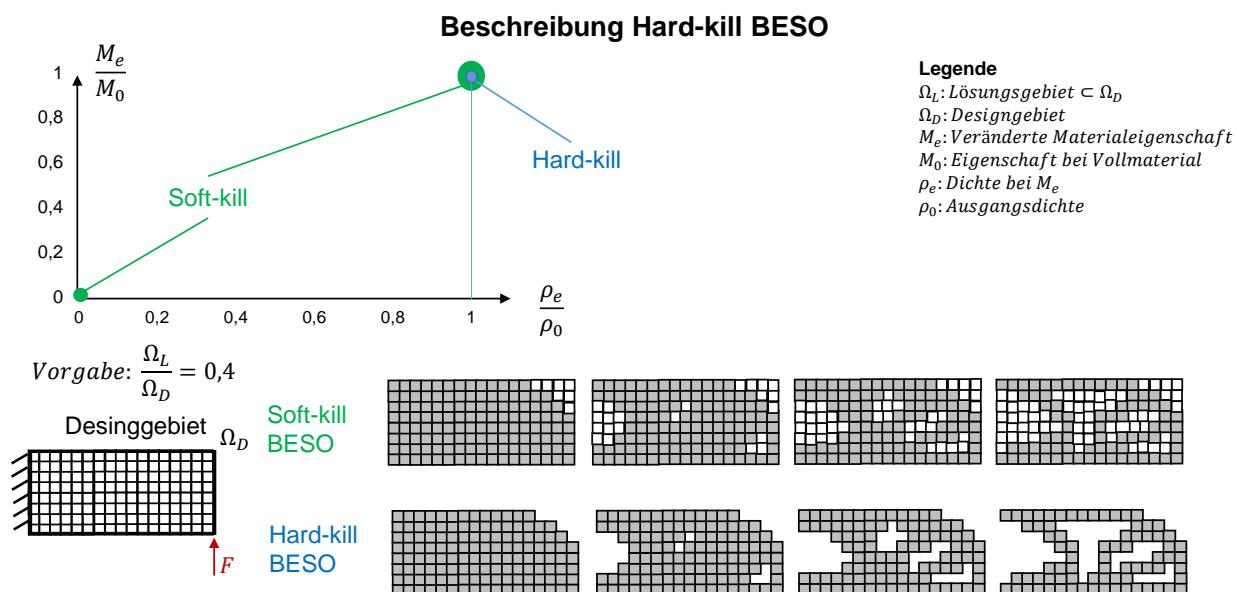


Abbildung VI-1: Vergleich zwischen Hard- und Soft-kill Methode

Der Vorteil des Hard-kill-Verfahrens gegenüber der Soft-kill-Strategie besteht in der Verringerung der Rechenzeit der Systemantwort und deren Sensitivitäten, da mit jedem weiteren Schritt die Anzahl der Elemente verringert wird. Jedoch wird zusätzliche Zeit für das Entfernen dieser benötigt. Während in der Soft-kill Methode ein Reaktivieren der Elemente durch das Setzen der Dichte 1 bewirkt wird, können in dem Standard Hard-kill-Verfahren ausschließlich Elemente entfernt werden. Aus diesem Grund wird dieses Verfahren nicht Eingesetzt, da ein Reaktivieren für einige multiphysikalische Optimierungsstrategien notwendig ist.

MMA-Verfahren 3D-Optimierung

Das eingesetzte Verfahren in der Applikation divergiert von den aus Kapitel 2 beschriebenen Algorithmen. Es wird eine Kombination beider Verfahren eingesetzt, die je nach Auswahl von SIMP oder BESO die Verfahrensstrategie ändert. In folgendem Ablaufdiagramm ist das Schema der Restriktionssteuerung für das STEP-Verfahren dargestellt.

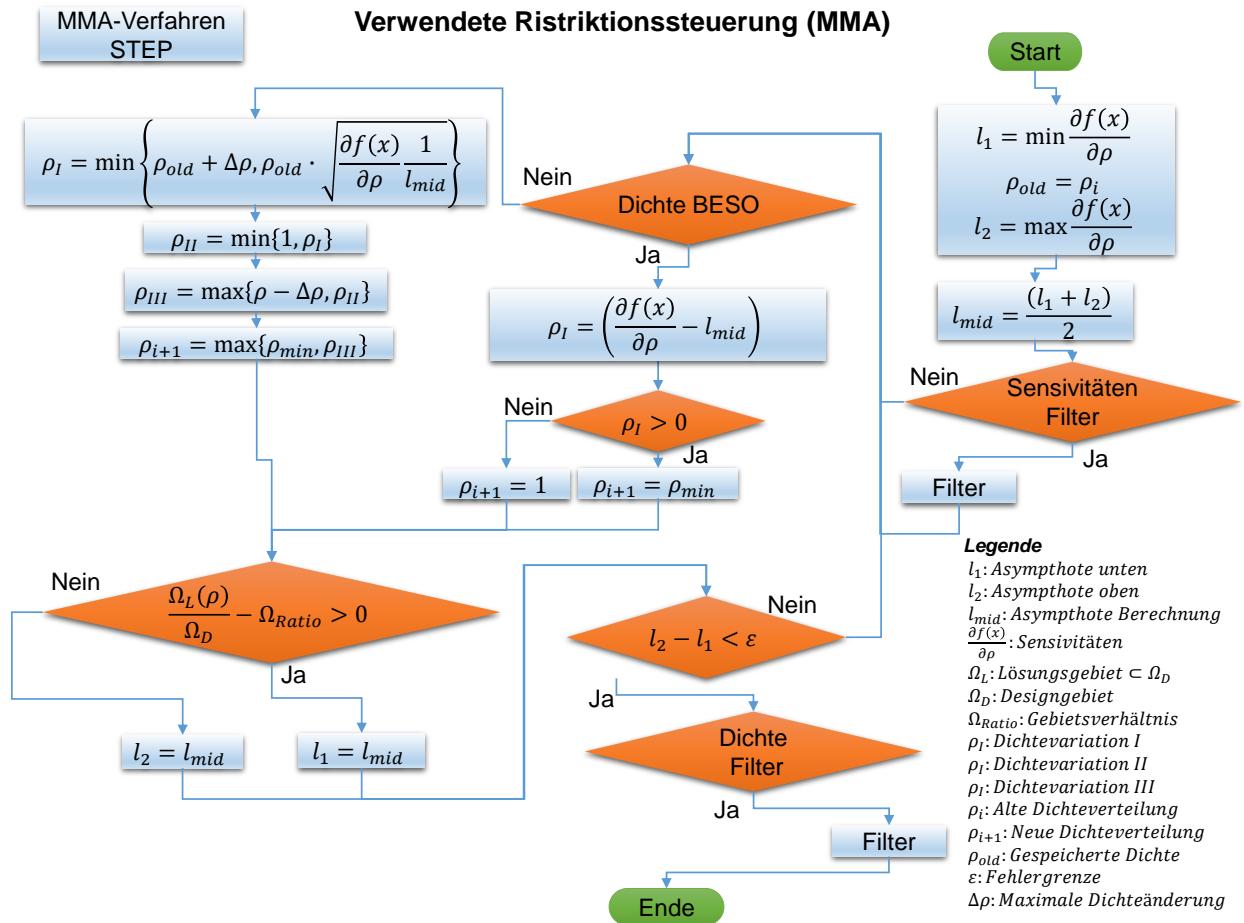


Abbildung VI-2: MMA-Verfahren für die 3D-Multiphysik Variante

Die Auswahlparameter SIMP/BESO können durch eine „Checkbox“ eingestellt werden. Zusätzlich wird automatisch beim Einsatz von zwei Materialsets in die BESO-Strategie geschaltet. Bei mehreren „Steps“ wird der Auswahlparameter auf SIMP gesetzt. Außerdem sind noch einige Einstellmöglichkeiten wie die Filterung der Dichte oder der Sensitivität möglich.

Einfaches Filterbeispiel und 3D-Filter

Für die Randbereiche des Filters sind einige Modifikationen der Matrizen notwendig. Der in der nächsten Abbildung grün dargestellte Bereich befindet sich am Rand. Die Elemente der Matrix die außerhalb des Gebietes sind, werden mit 0 besetzt, sodass diese nicht berücksichtigt werden. Als Alternative kann mit einer Strategie aus der digitalen Bildbearbeitung eine lineare Abstufung am Rande mit den Randelementen durchgeführt werden, in der die Matrix H_e mit „virtuellen“ Sensitivitäten erweitert wird vgl. [20].

Einfaches Beispiel für eine Filterung

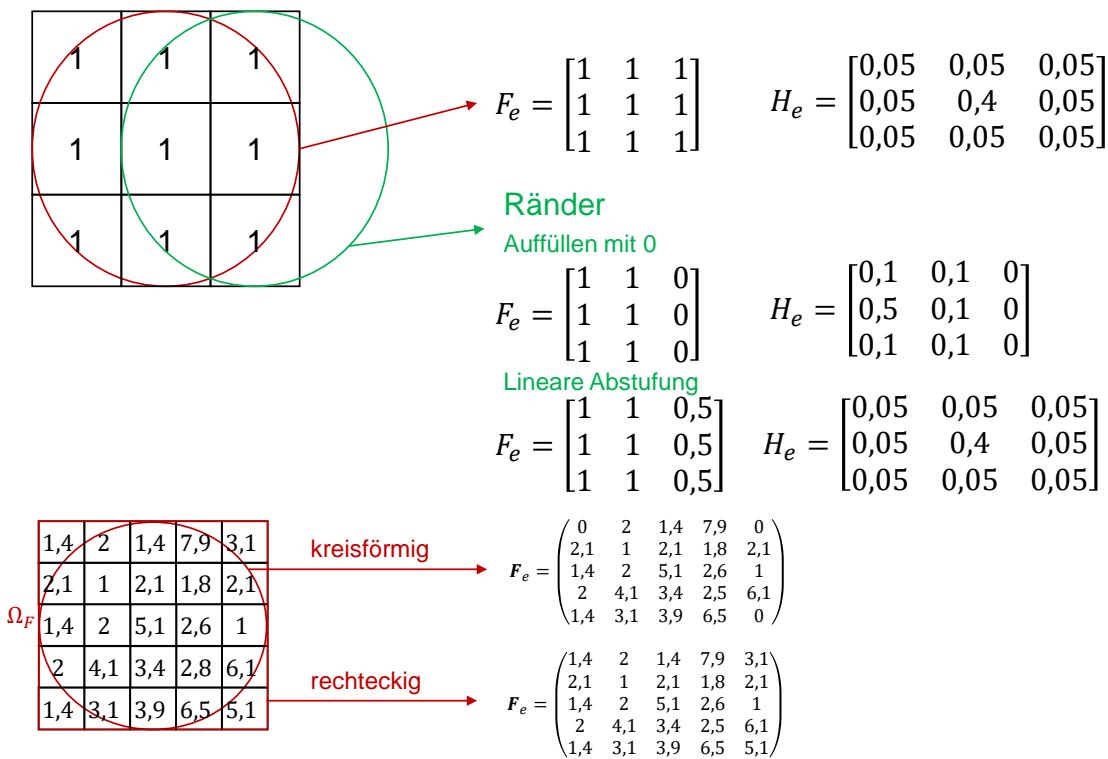


Abbildung VI-3: Darstellung eines einfachen Filterbeispiels

Zusätzlich wird für ungleiche FE-Netze das Volumen zur Skalierung der Elemente der Matrix F_e benötigt, in dem große Elemente stärker gewichten als kleine Elemente. In den Randbereichen wird ebenfalls eine Modifikation durch das fehlende Volumen des Gebietes eingesetzt.

$$[F_e] = \frac{1}{\rho_e} \begin{bmatrix} \rho_{1,1} \cdot V_{e,1,1} \frac{\partial \widehat{\Pi_{den,struc,i,k}}}{\partial \rho_{1,1}} & \dots & \rho_{1,k} \cdot V_{e,1,k} \frac{\partial \widehat{\Pi_{den,struc,i,k}}}{\partial \rho_{1,k}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{i,1} \cdot V_{e,i,1} \frac{\partial \widehat{\Pi_{den,struc,i,k}}}{\partial \rho_{i,1}} & \dots & \rho_{i,k} \cdot V_{e,i,k} \frac{\partial \widehat{\Pi_{den,struc,i,k}}}{\partial \rho_{i,k}} \end{bmatrix}.$$

Algorithmen für die Auswahl der Elemente im Filtergebiet

Für die Auswahl der Elemente im Filtergebiet wird speziell eine Bewertung durchgeführt, da bei einer Erhöhung der eingesetzten Elemente im Modell für das Standardverfahren ein quadratischer Aufwand an Rechenzeit benötigt wird. In folgender Abbildung ist das Standardsuchverfahren dargestellt, mit dem die Elemente im Filtergebiet ermittelt werden. Es wird für jedes Element geprüft ob der Elementschwerpunkt in dem gewählten Filtergebiet liegt. Anschließend werden die selektierten Elemente in eine Liste gespeichert.

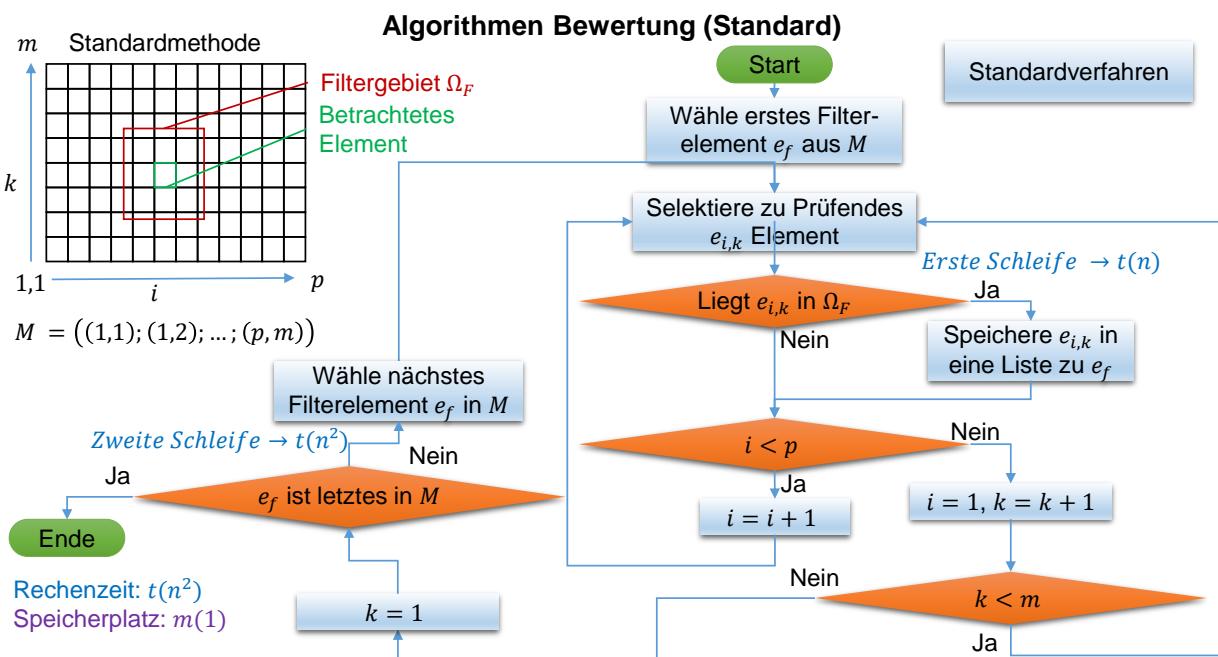


Abbildung VI-4: Bewertung eines Standardverfahrens

Am Ablaufdiagramm sind die Problemstellen kenntlich gemacht. Jede Schleife die innerhalb einer weiteren Schleife über die komplette Anzahl der Elemente läuft, erhöht in diesem Fall den Polynomgrad der Rechenzeit. In diesem Fall werden zwei Schleifengänge benötigt, sodass die Rechenzeit quadratisch ansteigt. Für den Speicherplatz wird eine konstante Abhängigkeit festgestellt. Um die Rechenzeit zu verringern, werden in den folgenden beiden Abbildungen weitere Verfahren vorgestellt. Hierbei verringert sich in beiden Strategien die Rechenzeit von einer quadratischen Abhängigkeit auf eine Lineare. Der Speicherbedarf hängt in beiden Fällen linear von der Anzahl der Elemente des gesamten Modells ab. In dem ersten Verfahren (Abbildung IV-5) wird die Verringerung der Rechenzeit durch eine Vorsortierung ermöglicht. Das gesamte Modell wird in Bereiche eingeteilt, die der Größe des Filtergebiets entsprechen. Anschließend wird der Bereich angewählt, in dem das zu untersuchende Element liegt. Für die

Ermittlung der Elemente in dem Filtergebiet wird anstatt des gesamten Modellraumes ein Unterraum verwendet, der deutlich kleiner ist und so die Rechenzeit minimiert.

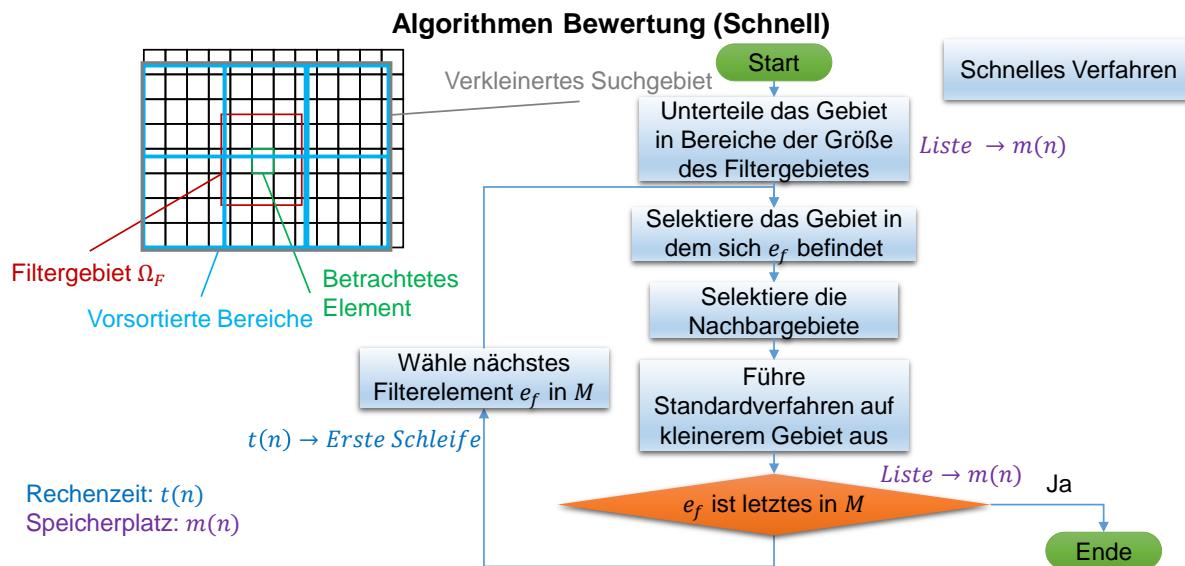


Abbildung VI-5: Bewertung durch Verwendung von vorsortierten Bereichen

Das in folgender Abbildung beschriebene Verfahren kann durch die Verwendung von Bäumen als Datenstruktur deutlich Rechenzeit im Vergleich zum „schnellen“ Verfahren einsparen, da die Zugriffszeiten verringert werden. Aus diesem Grund wird für das 3D-Verfahren standardmäßig der ungenauere Algorithmus verwendet, der eine Selektierung durch die umliegenden Elemente durchführt.

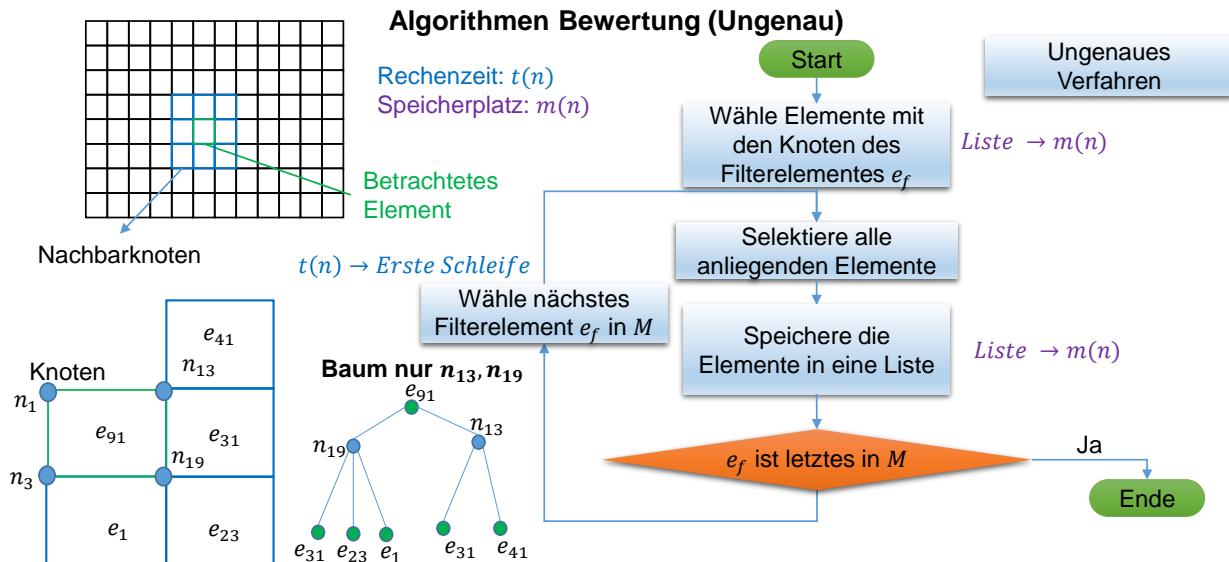


Abbildung VI-6: Filterung durch die Nachbarelemente

Lösung des Lastfalles des 1D-Problems der Wärmeleitung

Analytische Lösung des 1D-Thermikproblems

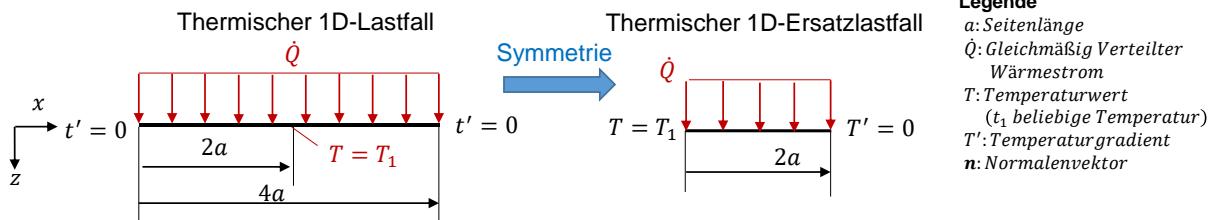


Abbildung VI-7: Lösung des 1D Problems der thermischen Rechnung

Die Wärmeleitungsgleichung ist mit dem Wärmeleitkoeffizienten K , der Temperaturverteilung T und der äußeren Belastung f durch

$$\frac{\partial T(x, t)}{\partial t} - K \Delta T(x, t) = f(x, t)$$

gegeben. Da es sich in diesem Fall um einen stationären Lastfall handelt, ergibt sich für die Wärmeleitungsgleichung das Possionproblem

$$-K \Delta T(x) = f(x).$$

Durch die Darstellung des Problems im \mathbb{R}^1 vereinfacht sich die Possiongleichung zu

$$-K T''(x) = f(x).$$

Da der angreifende Wärmestrom konstanten ist, folgt

$$-K T''(x) = \dot{Q}.$$

Nun gilt es eine Lösung für das inhomogene Problem zu finden. Dies gelingt in diesem Fall durch mehrmaliges integrieren.

$$\int -K T''(x) dx = \int \dot{Q} dx$$

$$-K T''(x) + C_1 = x \dot{Q}$$

$$\int -K T''(x) + C_1 dx = \int \dot{Q} dx$$

Als Lösung für das inhomogene Problem ergibt sich

$$-KT(x) + C_1x + C_2 = \frac{1}{2}x^2\dot{Q}.$$

Die Integrationskonstanten können durch das Einsetzen der Randbedingungen bestimmt werden. Aus dem Einsetzen der ersten Randbedingung $T(0) = T_1$ kann die erste Integrationskonstante mit

$$-KT(0) + C_10 + C_2 = \frac{1}{2}0^2\dot{Q}$$

bestimmt werden, sodass sich für die Konstante

$$C_2 = KT_1$$

ergibt. Um die zweite Konstante zu errechnen wird die Randbedingung $T'(2a) = 0$ in die Ableitung von $T(x)$

$$T'(x) = \frac{1}{-K}(-C_1 + x\dot{Q})$$

eingesetzt. Es ergibt sich für die zweite Integrationskonstante C_1

$$0 = \frac{1}{-K}(-C_1 + 2a\dot{Q}) \rightarrow C_1 = 2a\dot{Q}.$$

Die Temperaturverteilung des thermischen 1D-Ersatzlastfalles kann mit

$$T(x) = -\frac{1}{K}\left(-2a\dot{Q}x - KT_1 + \frac{1}{2}x^2\dot{Q}\right) = T_1 + \frac{2a\dot{Q}x}{K} - \frac{\frac{1}{2}x^2\dot{Q}}{K}$$

beschrieben werden. Durch weiteres Umformen ergibt sich schließlich die Lösung für die gesamte Verteilungsfunktion als

$$T(x) = T_1 + \frac{2a\dot{Q}x}{K} - \frac{\frac{1}{2}x^2\dot{Q}}{K}$$

$$T(x) = T_1 + \frac{2a\dot{Q}(x - 2a)}{K} - \frac{\frac{1}{2}(x - 2a)^2\dot{Q}}{K} \quad \text{für } 2a \leq x \leq 4a$$

$$T(x) = T_1 - \frac{2a\dot{Q}(x - 2a)}{K} - \frac{\frac{1}{2}(x - 2a)^2\dot{Q}}{K} \quad \text{für } 0 \leq x \leq 2a$$

Sensitivitäten für die thermische Berechnung

Für die thermische Energieratendichte gilt

$$\Pi_{den,therm} = \frac{1}{2} \frac{\partial \mathbf{t}^T \mathbf{K} \mathbf{t}}{\partial \Omega}$$

vgl. [17]. Angewandt auf ein diskretes Gebiet der finiten Elemente kann jedem Element e mit dem Volumen V_e , der Elementsteifigkeit \mathbf{K}_e eine Energiedichte

$$\Pi_{therm,e} = \frac{1}{2} \frac{\mathbf{t}_e^T \mathbf{K}_e \mathbf{t}_e}{V_e}$$

zugeordnet werden. Durch das Differenzieren der Elementenergie nach der Designvariable ρ_e können Sensitivitäten durch

$$\widehat{\frac{\partial \Pi_{therm,e}}{\partial \rho_e}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \mathbf{t}_e^T}{\partial \rho_e} \mathbf{K}_e \mathbf{t}_e + \mathbf{t}_e^T \frac{\partial \mathbf{K}_e}{\partial \rho_e} \mathbf{t}_e + \mathbf{t}_e^T \mathbf{K}_e \frac{\partial \mathbf{t}_e}{\partial \rho_e} \right)$$

für das Element e ermittelt werden vgl. [16], [17], [4], [3]. Unter der Berücksichtigung der Ableitung Systemgleichung $\mathbf{K} \mathbf{t} = \mathbf{q}$ nach den Designvariablen gilt nach [17] für ein einzelnes Element

$$\mathbf{K}_e \frac{\partial \mathbf{t}_e}{\partial \rho_e} + \frac{\partial \mathbf{K}_e}{\partial \rho_e} \mathbf{t}_e = \frac{\partial \mathbf{q}_e}{\partial \rho_e}.$$

Da die äußere Belastung nicht von den Dichtewerten abhängt ergibt sich der Zusammenhang

$$\frac{\partial \mathbf{K}_e}{\partial \rho_e} \mathbf{t}_e + \mathbf{K}_e \frac{\partial \mathbf{t}_e}{\partial \rho_e} = 0 \rightarrow \mathbf{K}_e \frac{\partial \mathbf{t}_e}{\partial \rho_e} = - \frac{\partial \mathbf{K}_e}{\partial \rho_e} \mathbf{t}_e.$$

Wird dieser Zusammenhang eingesetzt, ergibt sich für Sensitivität der thermischen Energierate

$$\widehat{\frac{\partial \Pi_{therm,e}}{\partial \rho_e}} = - \frac{1}{2} \mathbf{t}_e^T \frac{\partial \mathbf{K}_e}{\partial \rho_e} \mathbf{t}_e$$

Die Sensitivitäten für die der thermischen Energie hängen von der Wärmeleitfähigkeitsmatrix des Elementes \mathbf{K}_e ab. Wird der gewählte SIMP-Ansatz

$$\mathbf{K}_e = \rho_e^p \mathbf{K}_{0,e}$$

differenziert, ergibt sich für die Sensitivität der Steifigkeit des Elementes e

$$\frac{\partial \mathbf{K}_e}{\partial \rho_e} = p \rho_e^{p-1} \mathbf{K}_{0,e}.$$

Anschließend kann die Sensivität direkt durch die Elementsteifigkeitsmatrix $\mathbf{K}_{0,e}$ und der Systemantwort der Elementknoten \mathbf{u}_e als

$$\widehat{\frac{\partial \Pi_{struc}}{\partial \rho_e}} = -p \rho_e^{p-1} \frac{1}{2} \mathbf{t}_e^T \mathbf{K}_{0,e} \mathbf{t}_e$$

ausgedrückt werden vgl. [7] [2] [4]. Wird anstatt der Heizabflussrate die Heizabflussratendichte gewählt ergibt sich

$$\widehat{\frac{\partial \Pi_{therm,den}}{\partial \rho_e}} = -p \cdot \rho_e^{p-1} \frac{\partial \mathbf{t}_e^T \mathbf{K}_{0,e} \mathbf{t}_e}{\partial \Omega_e}.$$

Als Resultat für die verwendeten Sensivitäten wird für jedes einzelne Element e

$$\widehat{\frac{\partial \Pi_{therm,den}_e}{\partial \rho_e}} = -p \rho_e^{p-1} \frac{1}{2} \frac{\mathbf{t}_e^T \mathbf{K}_{0,e} \mathbf{t}_e}{V_e}$$

errechnet.

Bauraum-, Wärmeabtragvariationen

Falls eine Modifikation des Standardlastfalles der Wärmeübertragung durchgeführt wird, kann das Lösungsgebiet beeinflusst werden. In folgender Abbildung sind die Lösungen für eine Bauraummodifikation und eine Wärmeabtragsveränderung dargestellt.

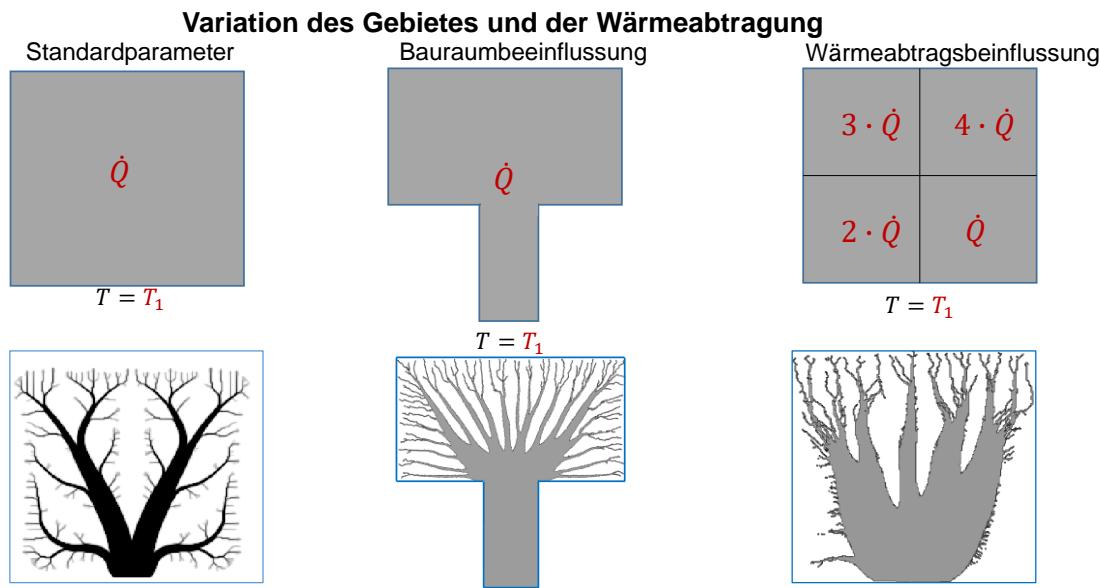


Abbildung VI-8: Variation des Bauraumes und der Lastbedingung

Die Bauraumbeeinflussung erzeugt volles Material an der Temperatureinleitungsstelle, um die Wärmeenergie möglichst schnell nach oben abzuleiten, da dort deutlich schneller die Wärme aufgrund des großen Bauraums verschwindet.

Die Variation der Heizrate zeigt ein Streben der Äste in Gebiete mit hohen Wärmeabtragsraten. Durch diese Strategie können somit Bereiche absichtlich mit einem niedrigen Wärmeabtrag beaufschlagt werden, um so z.B. ein bekanntes schlechtes Strömungsverhalten vereinfacht abzubilden.

Sensitivitäten für eine Betrachtung gekoppelter Systeme

Falls zwei physikalische Probleme gekoppelt sind so kann z.B.

$$\mathbf{K}_1 \mathbf{u}_1 = \mathbf{f}_1; \quad \mathbf{K}_2 \mathbf{u}_2 = \mathbf{f}_2(\mathbf{u}_1)$$

$$\mathbf{K}_1 \mathbf{u}_1 - \mathbf{f}_1 = \mathbf{0}; \quad \mathbf{K}_2 \mathbf{u}_2 - \mathbf{f}_2(\mathbf{u}_1) = \mathbf{0}$$

angesetzt werden. Die Belastung \mathbf{f}_2 ist abhängig von der Systemantwort \mathbf{u}_1 . Es folgt für die Systemantwort

$$\mathbf{u}_{out} = \mathbf{1}^T \mathbf{u}_2$$

Anschließend gilt nach [4] durch Verwendung der „adjoint method“ durch die zwei Nullvektoren multipliziert mit zwei beliebigen Vektoren λ_1, λ_2

$$\mathbf{u}_{out} = \mathbf{1}^T \mathbf{u}_2 + \lambda_1 [\mathbf{K}_1 \mathbf{u}_1 - \mathbf{f}_1] + \lambda_2 [\mathbf{K}_2 \mathbf{u}_2 - \mathbf{f}_2(\mathbf{u}_1)].$$

Durch das Differenzieren mit der Systemvariablen ergibt sich

$$\frac{\partial \mathbf{u}_{out}}{\partial \rho_e} = \mathbf{1}^T \frac{\partial \mathbf{u}_2}{\partial \rho_e} + \lambda_1^T \left[\frac{\partial \mathbf{K}_1}{\partial \rho_e} \mathbf{u}_1 + \mathbf{K}_1 \frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial \rho_e} - \frac{\partial \mathbf{f}_1}{\partial \rho_e} \right] + \lambda_2^T \left[\frac{\partial \mathbf{K}_2}{\partial \rho_e} \mathbf{u}_2 + \mathbf{K}_2 \frac{\partial \mathbf{u}_2}{\partial \rho_e} - \frac{\partial \mathbf{f}_2}{\partial \rho_e} \right] - \lambda_2^T \frac{\partial \mathbf{f}_2}{\partial \mathbf{u}_1} \frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial \rho_e}.$$

Das ausklammern von $\frac{\partial u_i}{\partial \rho_e}$ führt zu

$$\frac{\partial \mathbf{u}_{out}}{\partial \rho_e} = [\mathbf{1}^T + \lambda_2^T \mathbf{K}_2] \frac{\partial \mathbf{u}_2}{\partial \rho_e} + \left[-\lambda_2^T \frac{\partial \mathbf{f}_2}{\partial \mathbf{u}_1} + \lambda_1^T \mathbf{K}_1 \right] \frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial \rho_e} + \lambda_1^T \left[\frac{\partial \mathbf{K}_1}{\partial \rho_e} \mathbf{u}_1 \right] + \left[\frac{\partial \mathbf{K}_2}{\partial \rho_e} \mathbf{u}_2 \right] - \frac{\partial \mathbf{f}_1}{\partial \rho_e} - \frac{\partial \mathbf{f}_2}{\partial \rho_e}.$$

Um die ungünstigen Ableitungen $\frac{\partial u_i}{\partial \rho_e}$ zu entfernen wird in den jeweiligen Klammern eine Null erzeugt vgl. [4].

$$[\mathbf{1}^T + \lambda_2^T \mathbf{K}_2] = \mathbf{0}; \quad \left[-\lambda_2^T \frac{\partial \mathbf{f}_2}{\partial \mathbf{u}_1} + \lambda_1^T \mathbf{K}_1 \right] = \mathbf{0}$$

Als Resultat ergibt sich für die Sensitivität von \mathbf{u}_2

$$\frac{\partial \mathbf{u}_{out}}{\partial \rho_e} = \lambda_1^T \left[\frac{\partial \mathbf{K}_1}{\partial \rho_e} \mathbf{u}_1 \right] + \left[\frac{\partial \mathbf{K}_2}{\partial \rho_e} \mathbf{u}_2 \right] - \frac{\partial \mathbf{f}_1}{\partial \rho_e} - \frac{\partial \mathbf{f}_2}{\partial \rho_e}$$

wobei, die Vektoren λ_2^T und λ_1^T durch die obigen Zusammenhänge errechnet werden. Es muss somit zunächst die System 1 errechnet werden, um anschließend für System 2 die Sensitivitäten zu erhalten vgl. [4].

Automat für Abaqus und CalculiX

Prinzipiell können die verwendeten Inputdecks als reguläre Sprache aus der theoretischen Informatik angesehen werden. Ähnlich wie in einer Programmiersprache gilt es, die geforderte Syntax und Semantik zu erfüllen, sodass der „Solver“ die Datei lesen kann. In folgender Darstellung ist ein Beispiel für einen deterministisch endlichen Automaten abgebildet. Dieser prüft ob das Inputdeck für den FE-Löser verständlich ist. Der Automat beginnt im Zustand 1. Wird für die ersten beiden Zeichen „**“ gelesen, so handelt es sich um einen Kommentar, der ignoriert werden kann. Falls die ersten beiden Zeichen aus „*“ und „ „ bestehen, so handelt es sich um eine Karte, in der die folgenden Zeilen als gültige Informationen angesehen werden. Bestehen die ersten Beiden Zeichen aus anderen ASCII-Zeichen, so handelt es sich um einen Fehler, der zum Ende des Programmes führt.

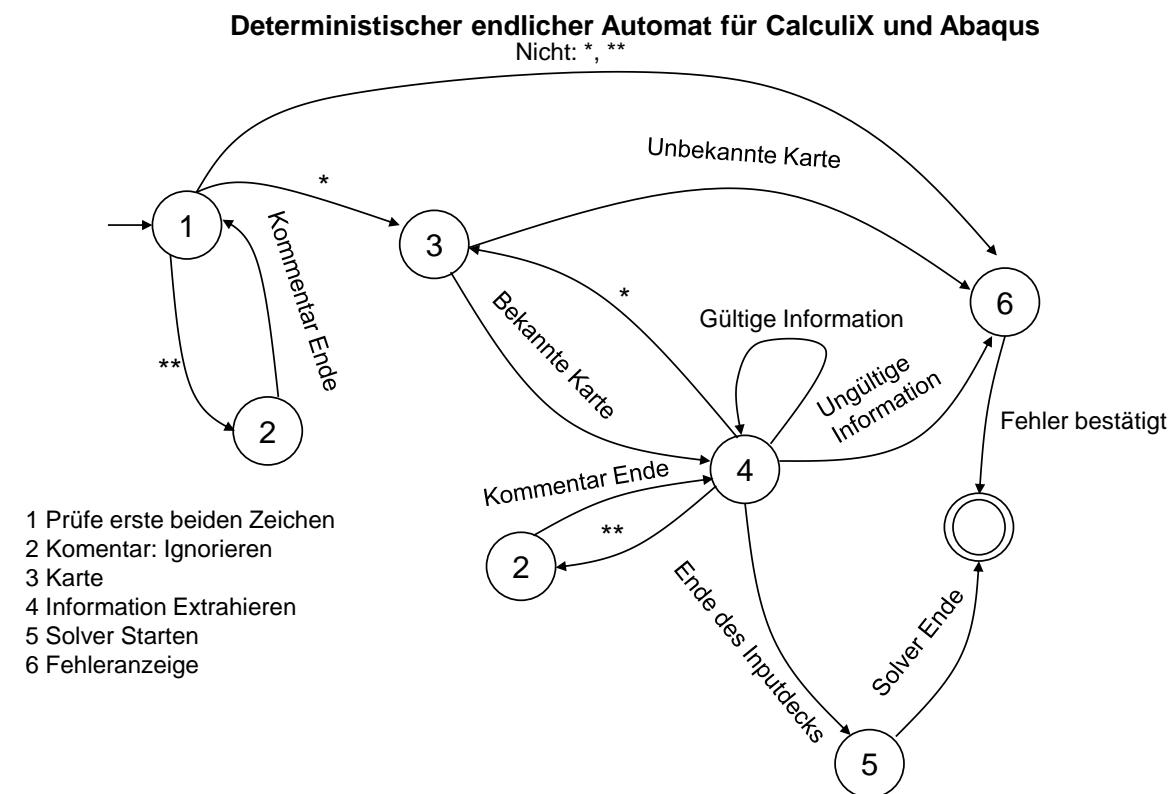


Abbildung VI-9: Endlicher Automat Abaqus CalculiX

Dieser Automat prüft die wesentlichen Fälle bezüglich der Semantik und Syntax, wobei nicht alle Fehler in dem Modell berücksichtigt sind. Neben der Prüfung der Fehler werden Automatenmodelle als Phrasen verwendet. So können Modelle in der grafischen Oberfläche in Abaqus erstellt werden und anschließend mit dem Phrasen in ein CalculiX-Inputdeck umgewandelt werden.

Grafische Oberfläche in Python (Tkinter)

Die aktuelle GUI ist mit Tkinter erstellt. Mit dieser Bibliothek lassen sich einfache Oberflächen erzeugen, die grundlegende Aufgaben erfüllt. In der kommenden Abbildung ist die grafische Oberfläche dargestellt. Sie besteht aus einer Leiste in der z.B. eine Parameterbeschreibung angewählt werden kann. Des Weiteren sind einige Lösungskonturen als Grafik implementiert, die mit der Applikation erstellt wurden.

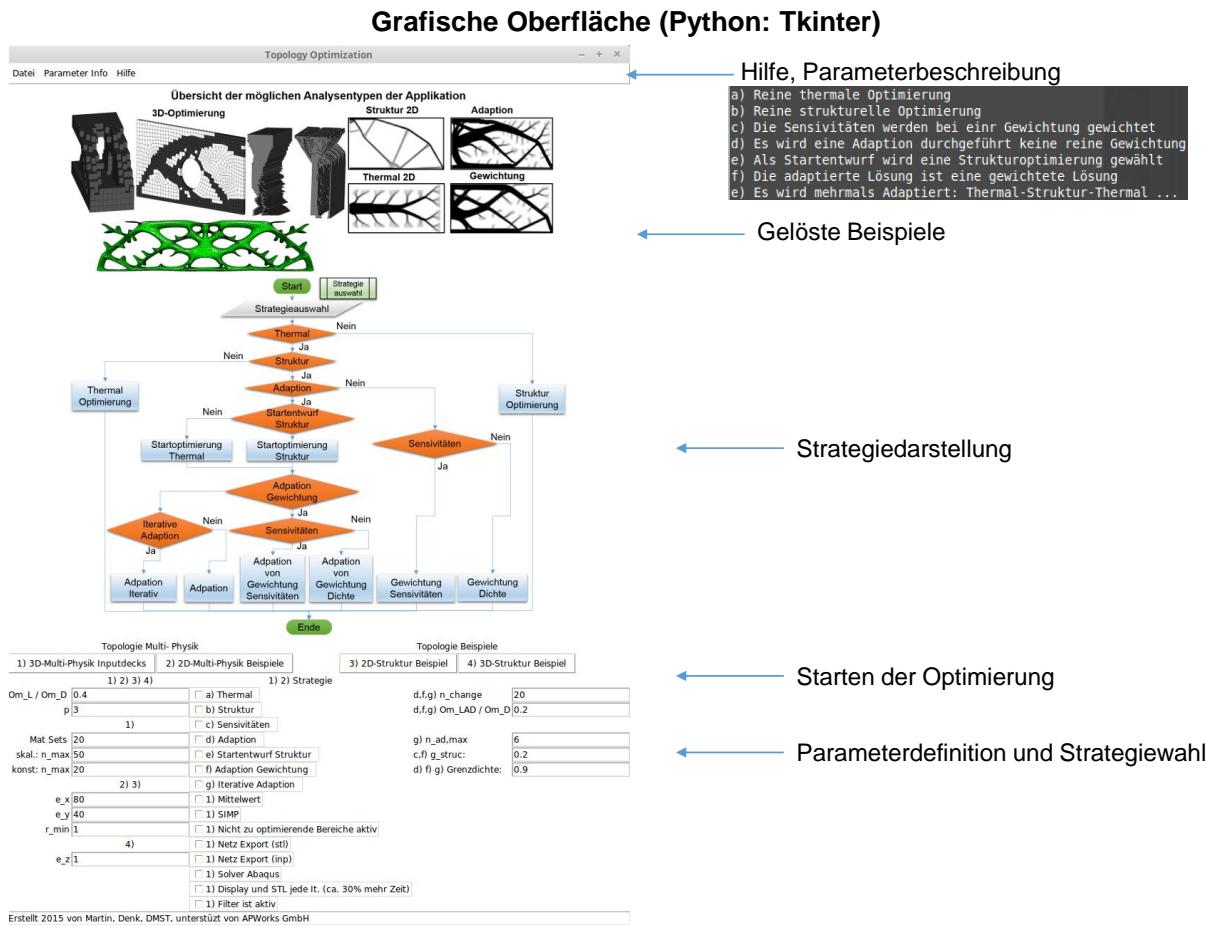


Abbildung VI-10: Darstellung der aktuellen grafischen Oberfläche (2016)

Zusätzlich ist die Ansteuerung der einzelnen Optimierungstypen als Ablaufdiagramm dargestellt. Abschließend erfolgen die Einstellungen für die Optimierung und die möglichen Auswahlflächen 1), 2), 3), 4).

Da die grafische Oberfläche völlig unabhängig von der Optimierung fungiert, kann diese effizient ausgetauscht werden.

Neben der grafischen Oberfläche als „Stand-Alone“-Programm kann das Optimierungswerkzeug in Blender implementiert werden. Die hierfür erstellte grafische Oberfläche ist in folgender Abbildung dargestellt.

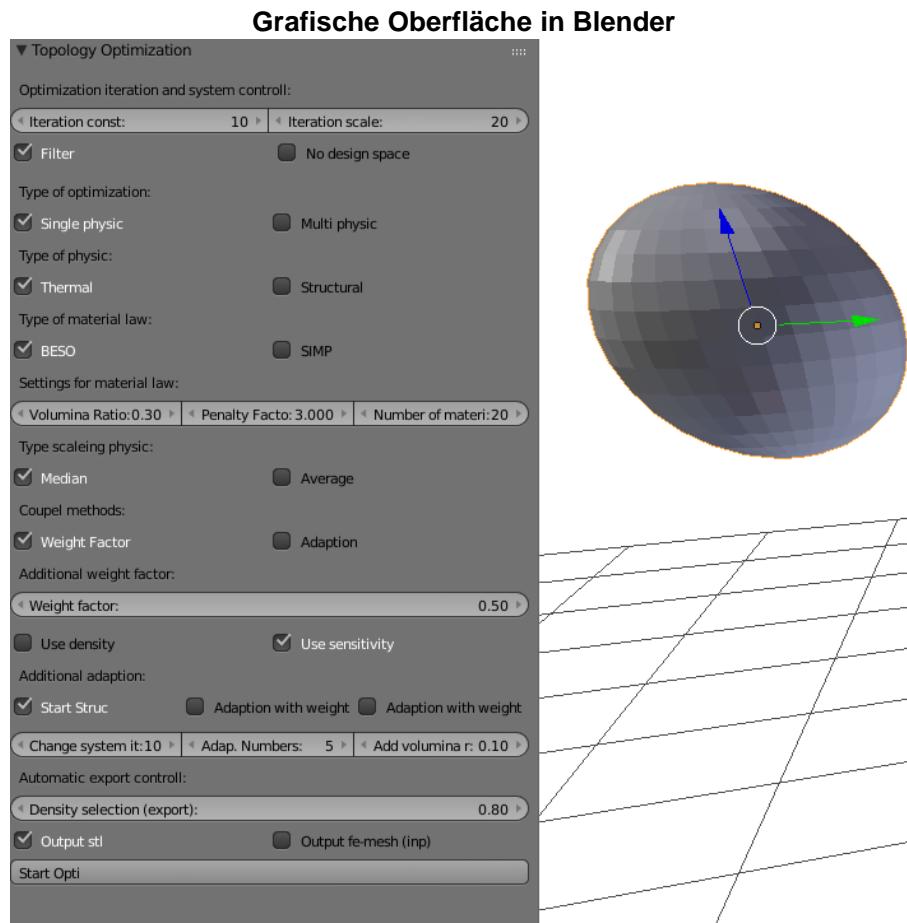


Abbildung VI-11:Grafische Oberfläche in Blender

Mit dieser Strategie können die optimierten Modelle direkt eingeladen und automatisch verbessert werden. Außerdem können Funktionen aus Blender verwendet werden, sodass das Ergebnis z.B. in verschiedenen Dateiformaten exportiert werden kann.

Prozesslauf mit 3D-Ergebnisausgabe

Während der Optimierung können die Ergebnisse einer Optimierung als Grafik ausgegeben werden. Hiermit können einige Modellfehler und Probleme vorab anhand der ersten Iterationen festgestellt werden. Für den in folgender Abbildung dargestellten Beispieldesign sind die Ergebnisse nach den einzelnen Iterationen dargestellt.

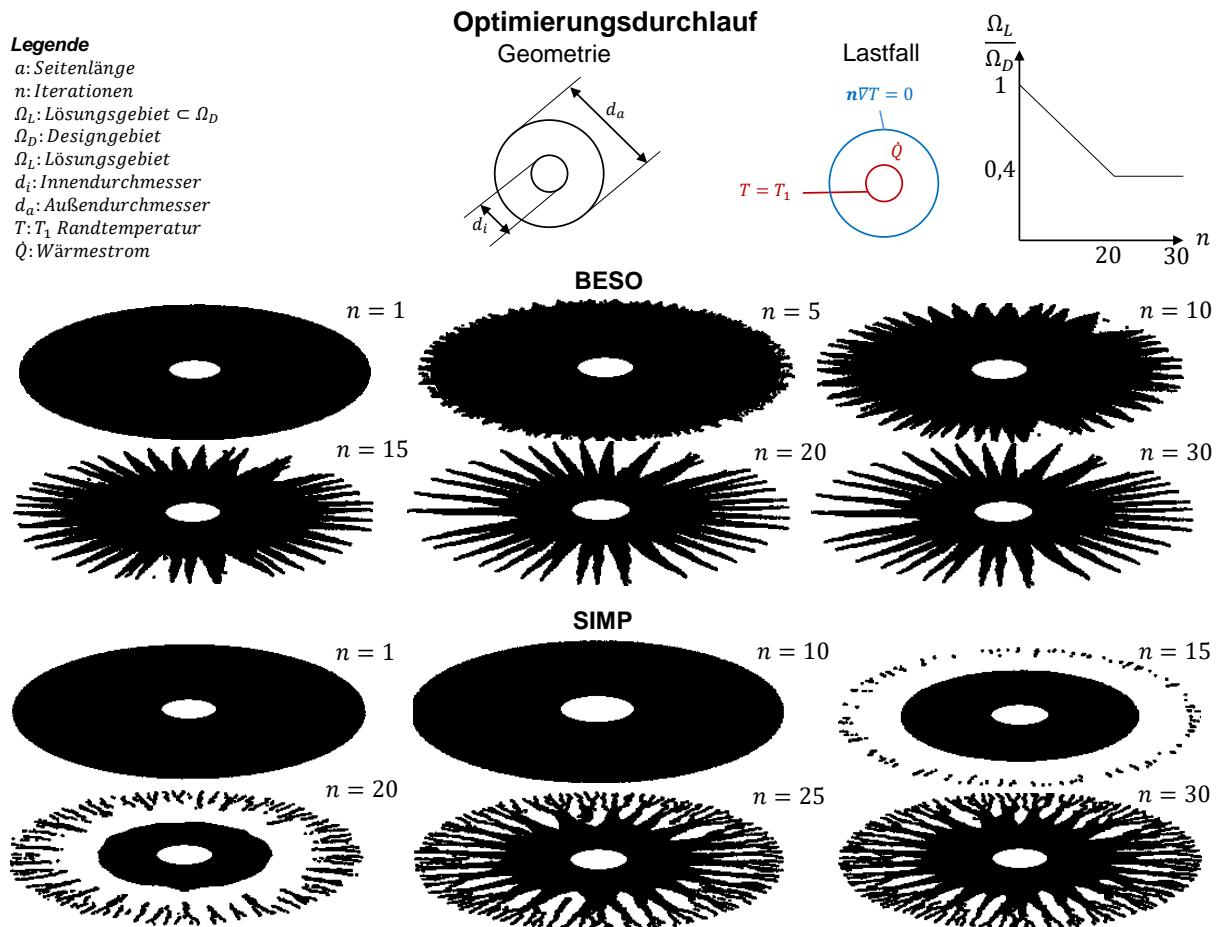


Abbildung VI-12: Parameterlauf einer Scheibe mit Loch

Bis die Modelle konvergieren, werden stetig Ergebnisse während der Optimierung ausgegeben. So zeigt sich schon nach einigen Iterationen in der BESO-Strategie die endgültige Form.

Das SIMP-Verfahren zeigt erst nach Abschluss des linearen Entfernung des Materials ein vergleichbares Ergebnis.

Blockmodell und weitere 3D-Analysen

Um die Gültigkeit der Verfahren zu festigen, werden weitere Problemstellungen bearbeitet. In folgender Darstellung sind die Lösungen einer 3D-Blockstruktur der Lastfälle aus Kapitel 3 abgebildet. Diese zeigen ein ähnliches Verhalten wie die 2D-Modelle, jedoch sind ebenfalls einige Unterschiede in Dickenrichtung vorhanden. Die Lösung des statischen Lastfalles besitzt in der Mitte eine Ausfräsmöglichkeit, die in einer extrudierten 2D-Lösung berücksichtigt werden sollte. Ebenso bilden sich in der thermalen Lösung vier Äste anstatt zwei.

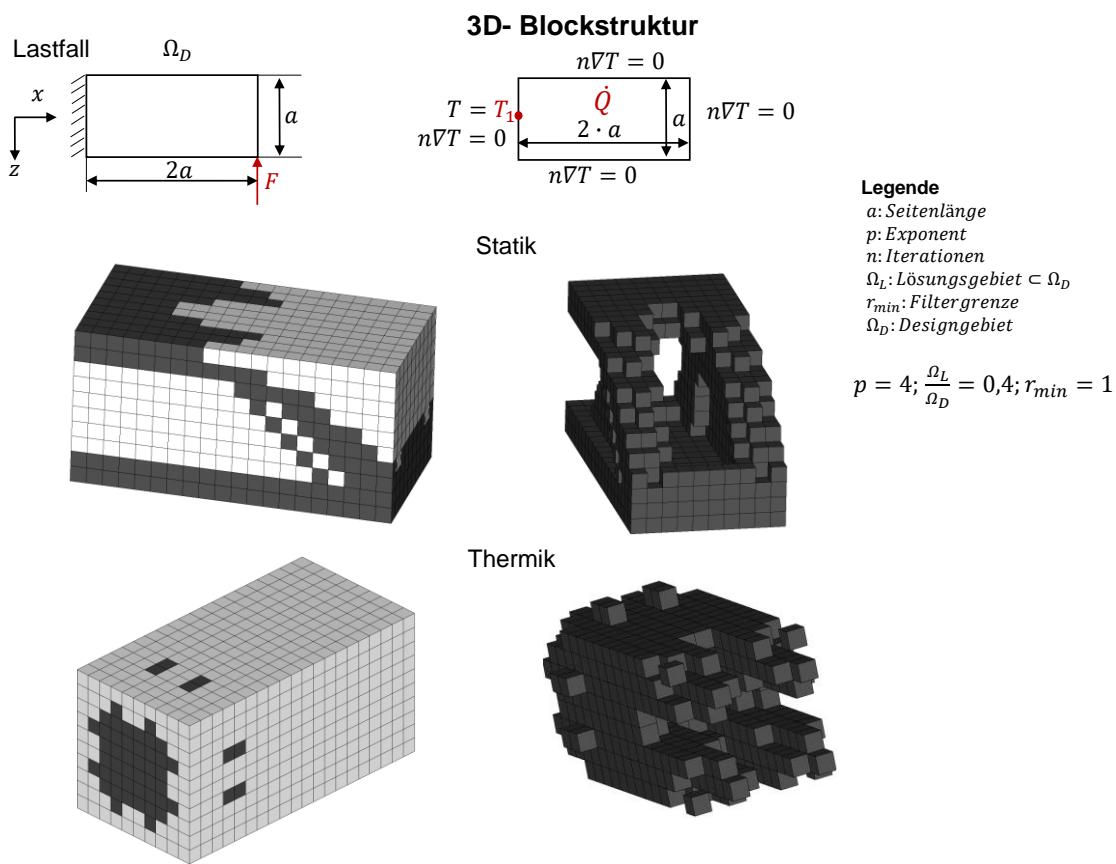


Abbildung VI-13: Verschiedene Lösungen des Lastfalles aus Kapitel 3

Neben dem Lastfall aus Kapitel 3 werden in den dargestellten Ergebnissen der folgenden Abbilder weitere thermale Problemstellungen betrachtet, da diese Optimierungsvariante sehr unerforscht ist. Für eine extrudierte Trapezprofil, einen Block mit unterschiedlichen Punktlasten und einem Kühlrohr werden verschiedene Modelle optimiert. Je nach Anbringung der Temperaturlast können hierbei das Ergebnis und der Wärmeabtrag gesteuert werden. Abschließend erfolgt die Betrachtung eines Ergebnisses eines statischen Lastfalls, dessen geometrisches Resultat automatisiert geglättet und verbessert wird.

Kühlung eines Trapezprofils

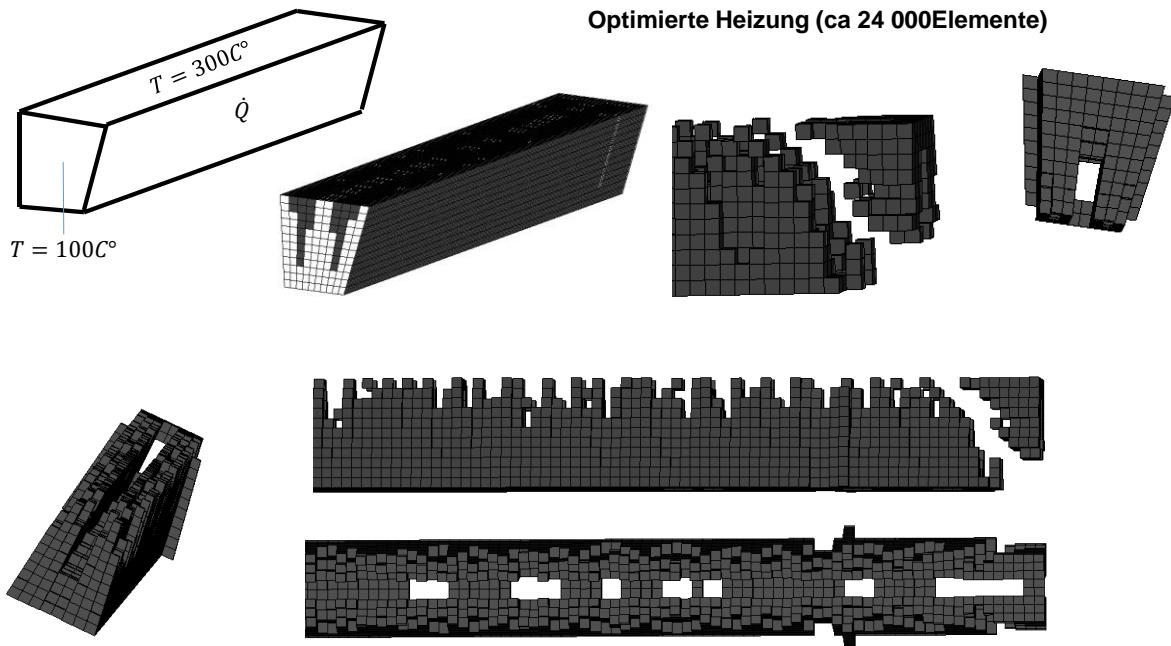


Abbildung VI-14: Ergebnisse einer Heizung eines Trapezprofiles mit Standardrandbedingungen

Kühlung eines Trapezprofils

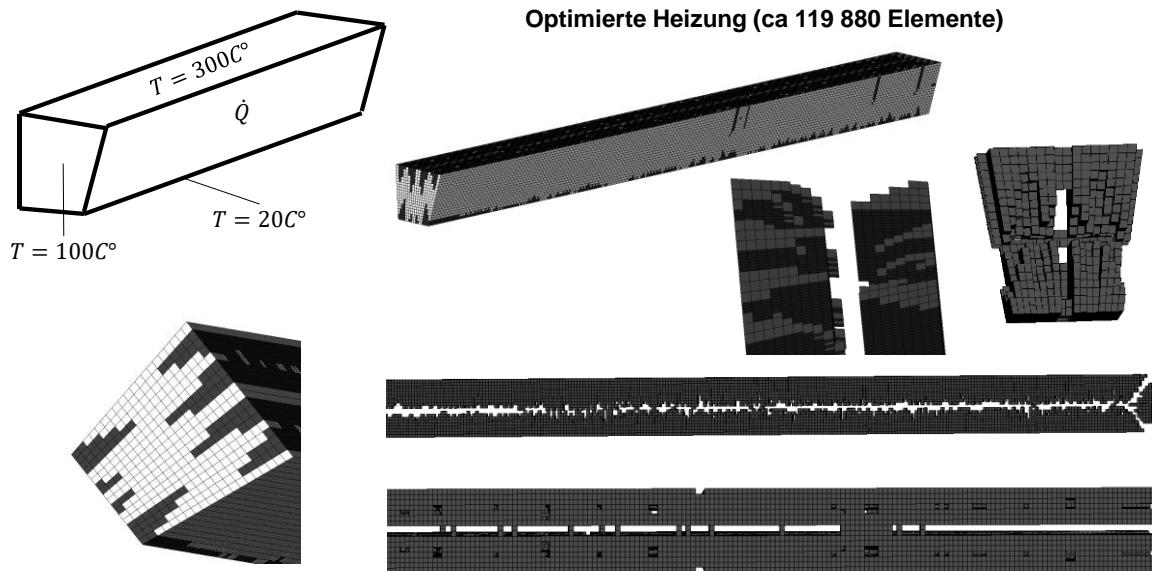


Abbildung VI-15: Erweiterung durch eine Raumtemperatur an der Unterseite

Wärmeüberträger Analyse

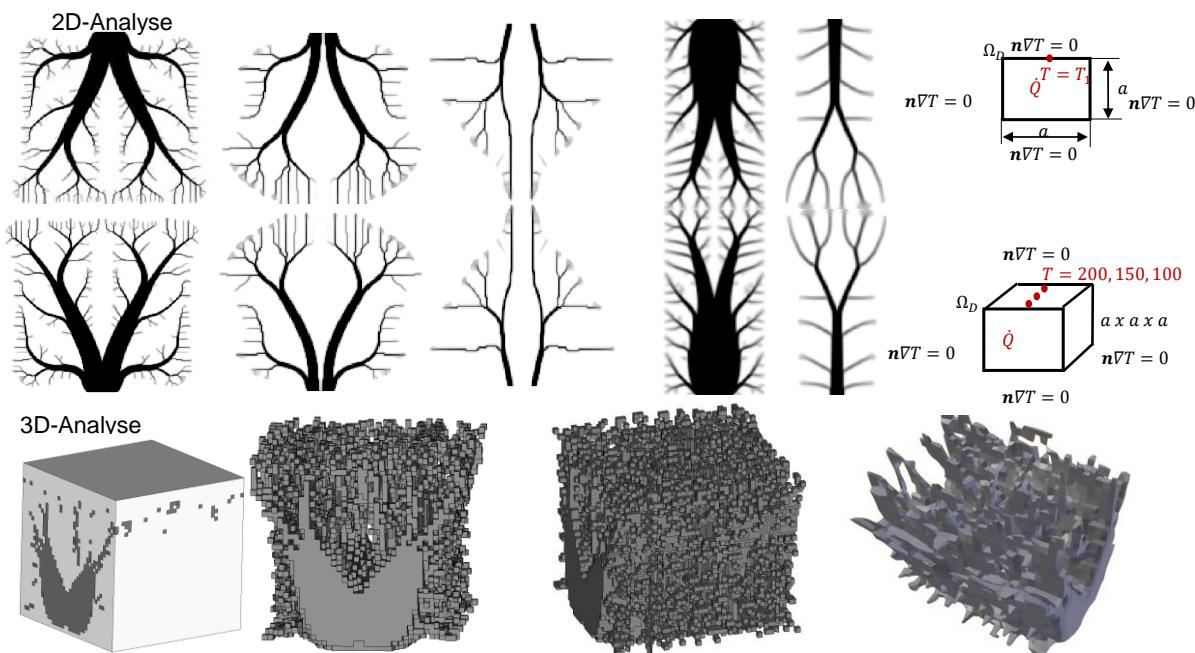


Abbildung VI-16: Lösung der Topologieoptimierung

Lösungsgeometrie (Blender)

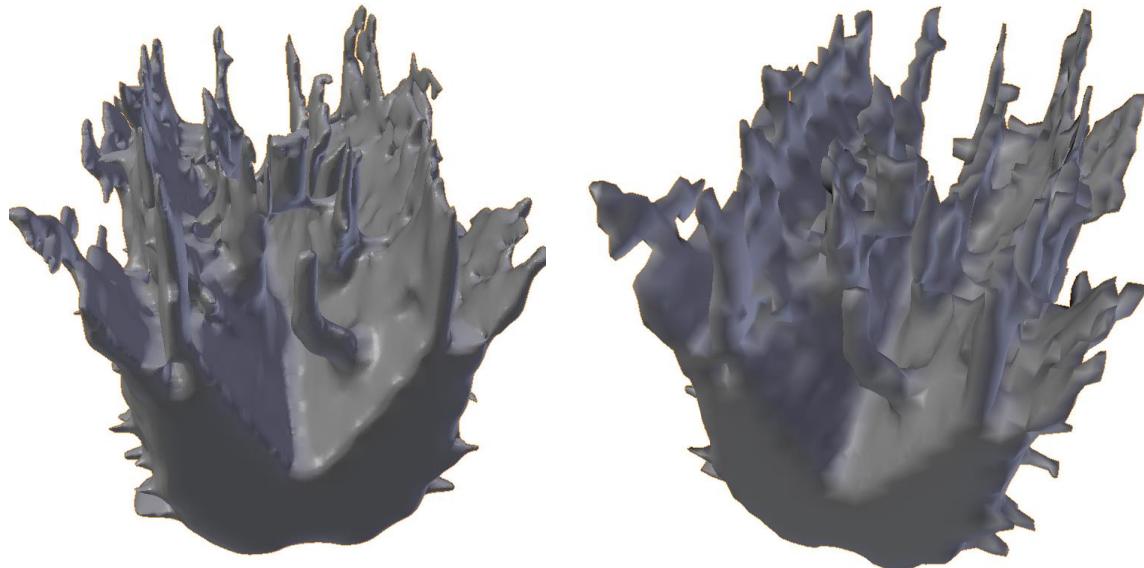
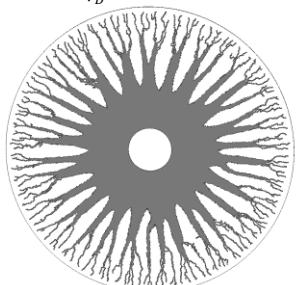


Abbildung VI-17: Geometriaufbereitung mittels Blender

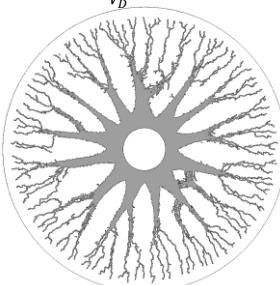
Wärmeüberträger Analyse

2D-Analyse

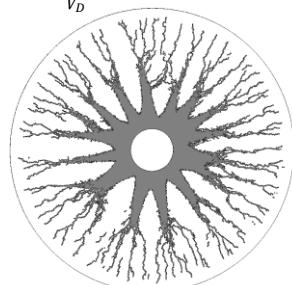
$$\text{SIMP } \frac{V_L}{V_D} = 0,4, p = 3$$



$$\frac{V_L}{V_D} = 0,2, p = 4$$



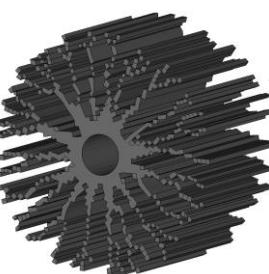
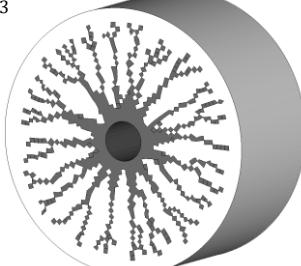
$$\frac{V_L}{V_D} = 0,2, p = 3$$



$$\text{BESO (Stark vereinfacht)} \frac{V_L}{V_D} = 0,2, p = 3$$



3D-Analyse



$$\mathbf{n} \nabla T = 0$$

$$T = T_1$$

$$\mathbf{n} \nabla T = 0$$

$$T = T_1$$

Abbildung VI-18: Kühlkanal mit äußerer Strömung

2D-Lastfall

$$\mathbf{n} \nabla T = 0$$

$$T = T_1$$

$$\dot{Q}$$

Innenrohrströmung

BESO



SIMP

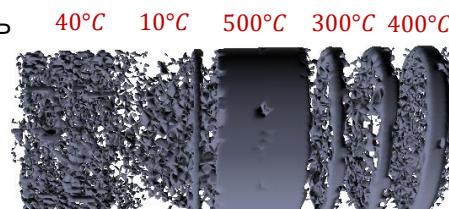


3D-Lastfall

$$T = T_1$$

$$\dot{Q}$$

SIMP



40°C 10°C 500°C 300°C 400°C

BESO

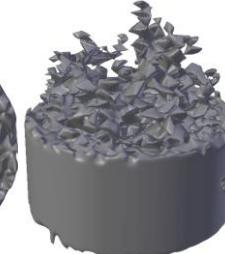
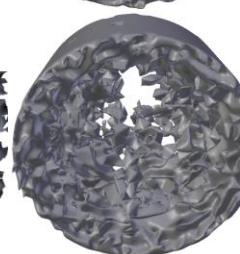
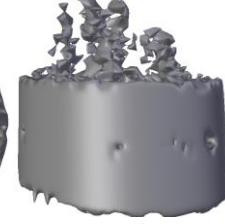
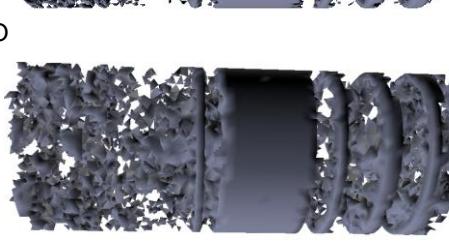


Abbildung VI-19: Rohr für Heizabfuhr

Steuerung der Optimierung durch Ersatz- und Zusatzlasten

In den folgenden Beispielen werden Ersatzlasten zur Steuerung der Lösung eingesetzt. Für Heizquellen werden thermische Lasten definiert, die als statische Kraft angetragen werden. Wird nun eine Topologieoptimierung durchgeführt, so ergeben sich Streben, die sich entlang der Heizquellen aufbauen. Je nach Verhältnis der auftretenden statischen Last F_{struc} und der Ersatzlasten F_{temp} , lässt sich das Lösungsverhalten modifizieren.

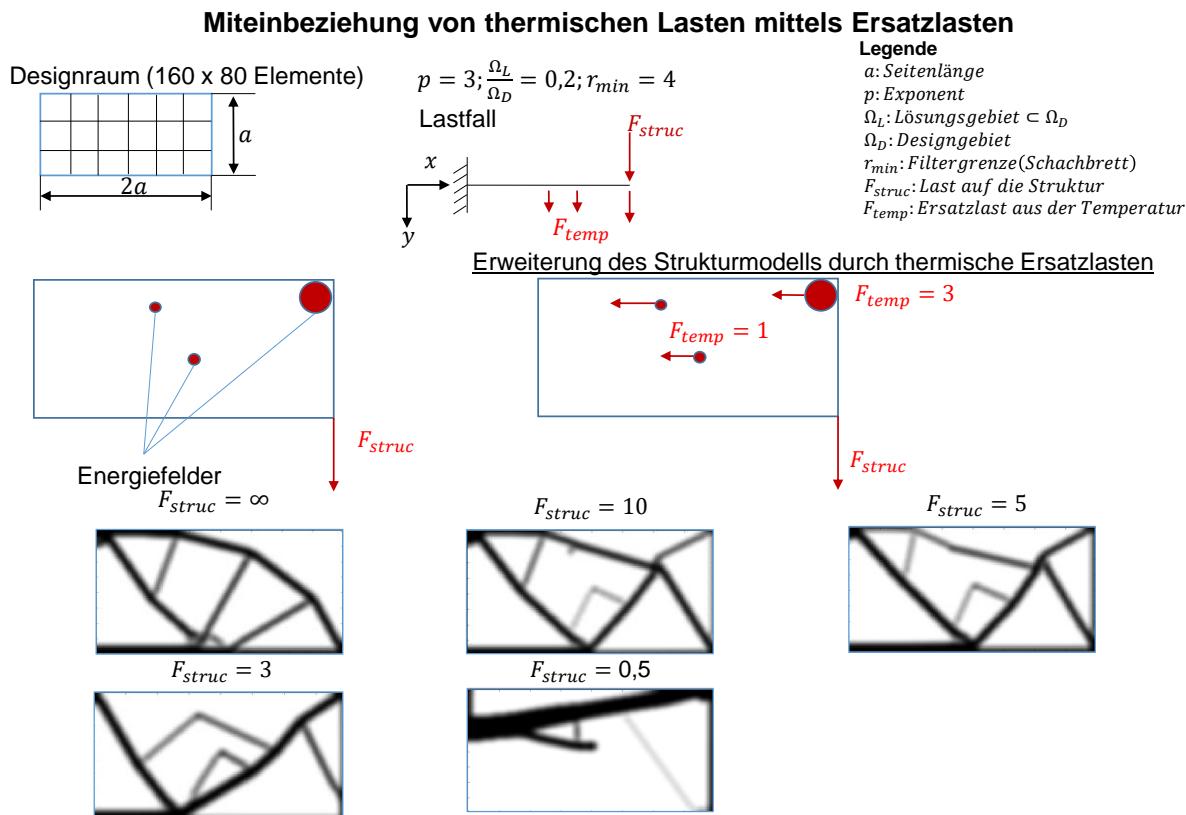


Abbildung VI-20: Ausbau von Kühlkanälen mittels Ersatzlasten

Letztendlich könnten mit dieser Strategie automatisiert ohne Nacharbeit Kühlkanäle in die Heizquellen gelenkt werden. Anschließend kann auf der erzeugten Lösung eine Adaption durchgeführt werden, die den Wärmeabtrag nochmals verbessert.

Da die Richtung der eingesetzten Ersatzkräfte in verschiedene Richtung zeigen könnte, wird erneut eine Analyse mit Ersatzlasten durchgeführt, die um 90° gedreht sind. Eine Gegenüberstellung der Lösung findet sich in der nachfolgenden Darstellung, in der die Elementanzahl für eine bessere Auflösung erhöht wurde.

Vergleich der Richtung der thermischen Last

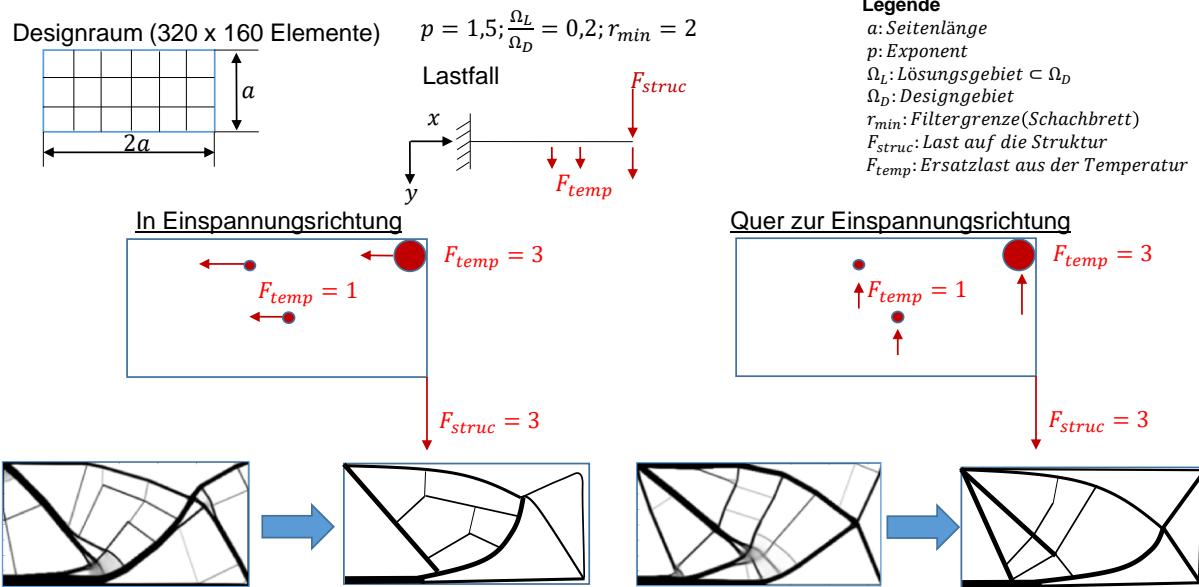


Abbildung VI-21: Richtungsänderung der Ersatzlast

Im Folgenden erfolgt die Steuerung des thermischen Problems aus Kapitel 6 durch zusätzliche Lasten, die in Abbildung VI-21 kenntlich gemacht sind. Hierdurch können Kühlrippen und Wände erzeugt werden, die in den nachfolgenden Abbildungen als Resultat zu finden sind.

Lösung durch Verwendung von Ersatzlasten

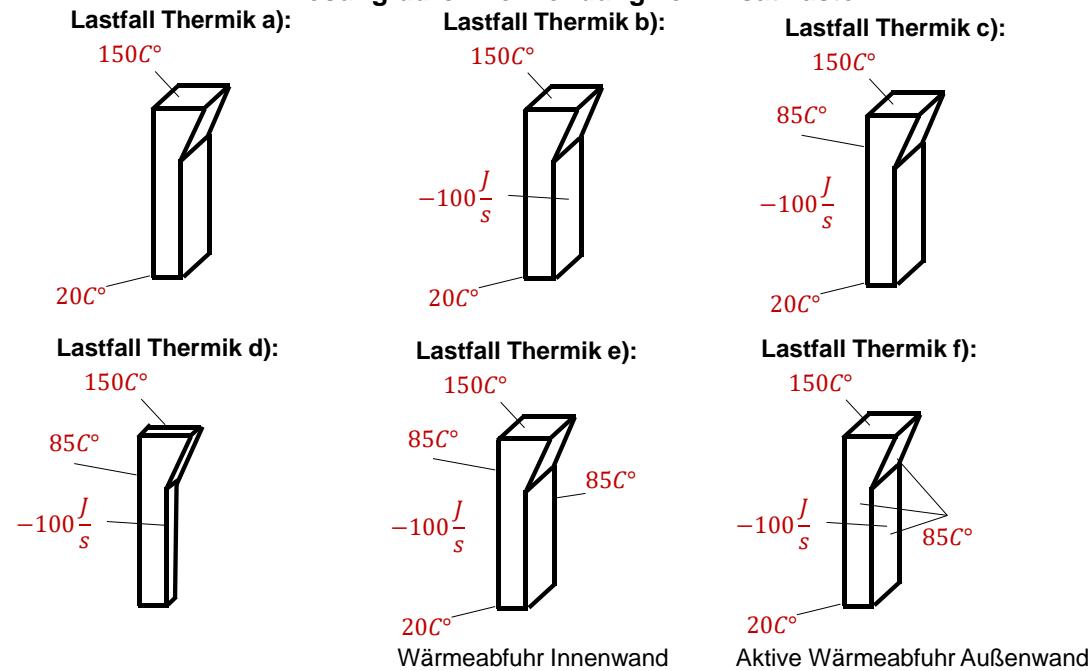
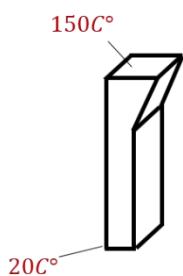


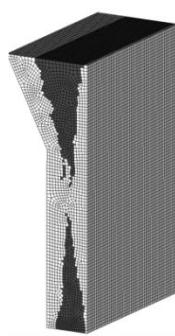
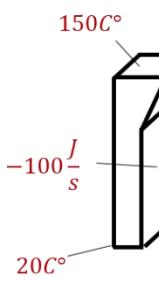
Abbildung VI-22: Beispiele verschiedener Ersatzlasten

Ergebnisse der Lastfälle a)b)c)

Lastfall Thermik a):



Lastfall Thermik b):



Lastfall Thermik c):

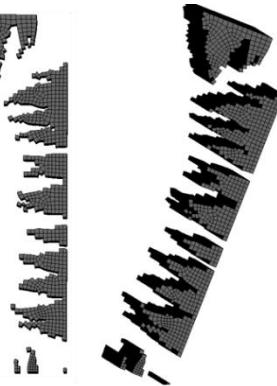
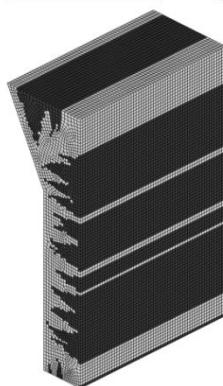
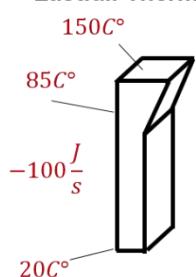
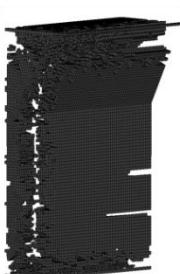
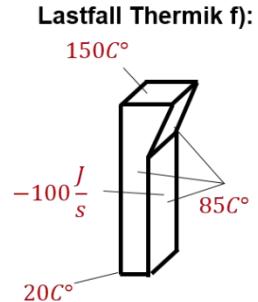
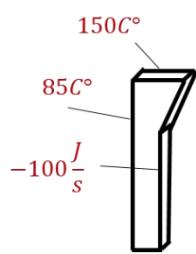


Abbildung VI-23: Lösung der Ersatzlasten a), b), c)

Ergebnisse der Lastfälle d)e)f)

Lastfall Thermik d):



Lastfall Thermik e):

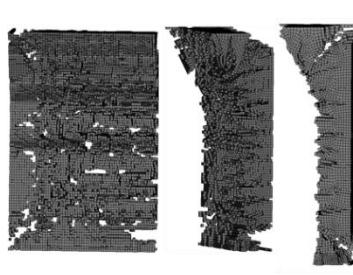
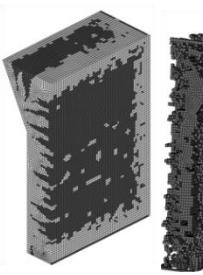
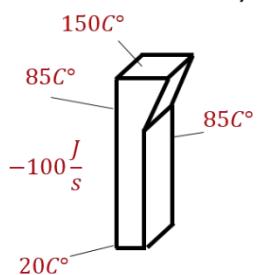


Abbildung VI-24: Lösung der Lastfälle d) e) f)

Bèzier-Kurve Beispiel

Im Folgenden wird ein Beispiel für die Ermittlung eines Bèzier-Graphen vorgestellt

$$P_0(1,3); P_1(0,5); P_2(-1, -1); P_3(2,1)$$

$$n = 3;$$

$$C(t) = \sum_{i=0}^n B_i^n(t) P_i; \quad 0 \leq t \leq 1$$

$$B_i^n(t) = \frac{n!}{i!(n-i)!} t^i (1-t)^{n-i}$$

$$C(t) = P_0 B_0^3 + P_1 B_1^3 + P_2 B_2^3 + P_3 B_3^3$$

Beim Einsetzen des Grades ergibt sich für das erste Bernsteinpolynom

$$B_0^3 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3!}{0! 1 \cdot 2 \cdot 3!} t^0 (1-t)^3 = (1-t)^3.$$

Wird dies für alle Bernsteinpolynome durchgeführt, so folgt für diese

$$B_0^3 = (1-t)^3$$

$$B_1^3 = 3(1-t)^2 t$$

$$B_2^3 = 3(1-t)t^2$$

$$B_3^3 = t^3.$$

$$C(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \binom{1}{3} (1-t)^3 + \binom{0}{5} 3(1-t)^2 t + \binom{-1}{-1} 3(1-t)t^2 + \binom{2}{1} t^3$$

$$\text{Startpunkt: } C(0) = \binom{1}{3}; \text{ Endpunkt: } C(1) = \binom{2}{1}$$

B-Spline-Kurve Beispiel

Im Folgenden wird ein Beispiel für die Ermittlung einer B-Spline vorgestellt.

$$P_0(2,3); P_1(0,5); P_2(-1,-2)$$

$$T = (t_0, t_1, t_2, t_3, t_4, t_5) = (0,1,2,3,4,5)$$

$$n = 2; d = 2$$

$$C(t) = \sum_{i=0}^n N_{i,d}(t) P_i$$

$$N_{i,0}(t) = \begin{cases} 1, & \text{wenn } t_i \leq t \leq t_{i+1} \\ 0, & \text{andernfalls} \end{cases}$$

$$N_{i,d}(t) = \frac{t - t_i}{t_{i+d} - t_i} N_{i,d-1}(t) + \frac{t_{i+d+1} - t}{t_{i+d+1} - t_{i+1}} N_{i+1,d-1}(t)$$

$$N_{0,2}(t) = \frac{t - 0}{2 - 0} N_{0,1}(t) + \frac{3 - t}{3 - 1} N_{1,1}(t)$$

$$= \frac{t}{2} \left[\frac{t - 0}{1 - 0} N_{0,1}(t) + \frac{2 - t}{2 - 1} N_{1,0}(t) \right] + \frac{3 - t}{2} \left[\frac{t - 1}{2 - 1} N_{1,0}(t) + \frac{3 - t}{3 - 2} N_{2,0}(t) \right]$$

$$= \frac{1}{2} [t^2 N_{0,0}(t) + t(2-t) N_{1,0}(t) + (3-t)(t-1) N_{1,0}(t) + (3-t)^2 N_{2,0}(t)]$$

In analoger Weise können die Funktionen $B_{1,2}$ und $B_{2,2}$ ermittelt werden. Anschließend erfolgt bei einer Gleichverteilung der Basisfunktion auf $T = (t_0, t_1, t_2, t_3, t_4, t_5) = (0,1,2,3,4,5)$

$$N_{0,2}(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} t^2 & \text{wenn } 0 \leq t < 1 \\ \frac{1}{2} [-2(t-1)^2 + 2(t-1) + 2] & \text{wenn } 1 \leq t < 2 \\ \frac{1}{2} [(t-2)^2 - 2(t-2) + 1] & \text{wenn } 2 \leq t < 3 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$N_{1,2}(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} (t-1)^2 & \text{wenn } 1 \leq t < 2 \\ \frac{1}{2} [-2(t-2)^2 + 2(t-2) + 2] & \text{wenn } 2 \leq t < 3 \\ \frac{1}{2} [(t-3)^2 - 2(t-3) + 1] & \text{wenn } 3 \leq t < 4 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$N_{2,2}(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}(t-2)^2 & \text{wenn } 2 \leq t < 3 \\ \frac{1}{2}[-2(t-3)^2 + 2(t-3) + 2] & \text{wenn } 3 \leq t < 4 \\ \frac{1}{2}[(t-4)^2 - 2(t-4) + 1] & \text{wenn } 4 \leq t < 5 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

um die gesamte Funktion $C(t)$ abbilden zu können.

$$P_0(2,3); P_1(0,5); P_2(-1,-2)$$

Beispiel für: $1 \leq t < 2$

$$C(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \binom{2}{3} \frac{1}{2} [-2(t-1)^2 + 2(t-1) + 2] + \binom{0}{5} \frac{1}{2} (t-1)^2 + \binom{-1}{-2} 0$$

Startkonstruktion mit einem Pythagorasbaum

Konstruktion eines Pythagorasbaumes: Thermik

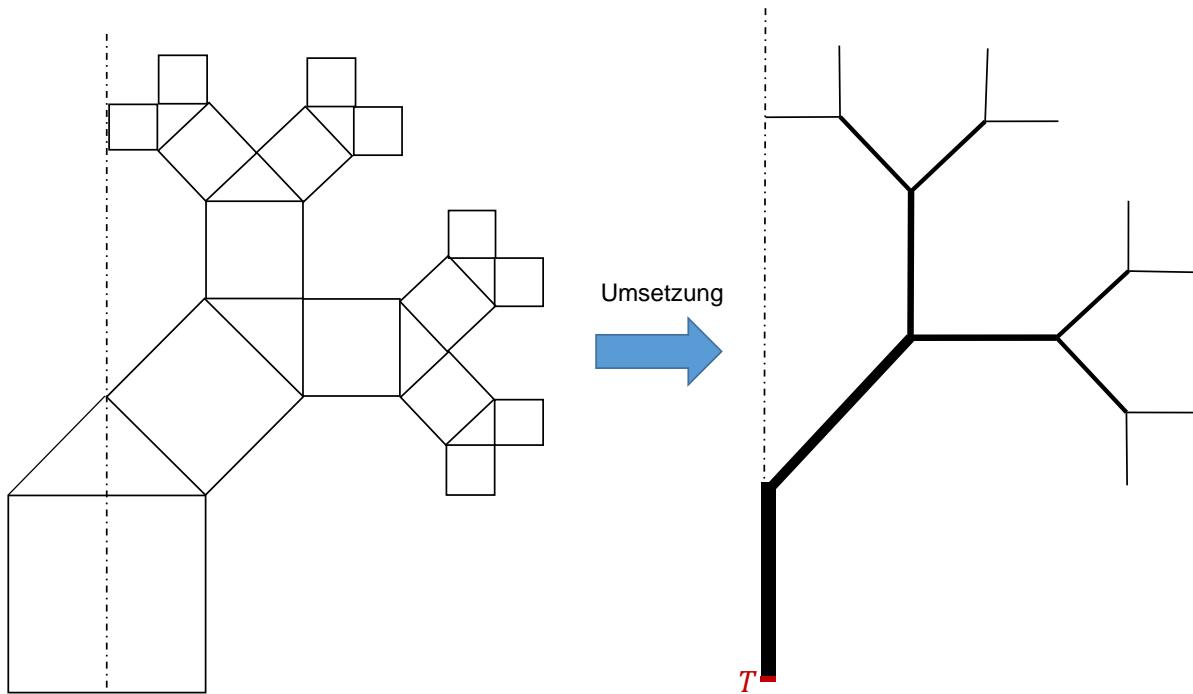


Abbildung VI-25: Pythagorasbaum für die thermische Analyse

Konstruktion eines Pythagorasbaumes: Statik

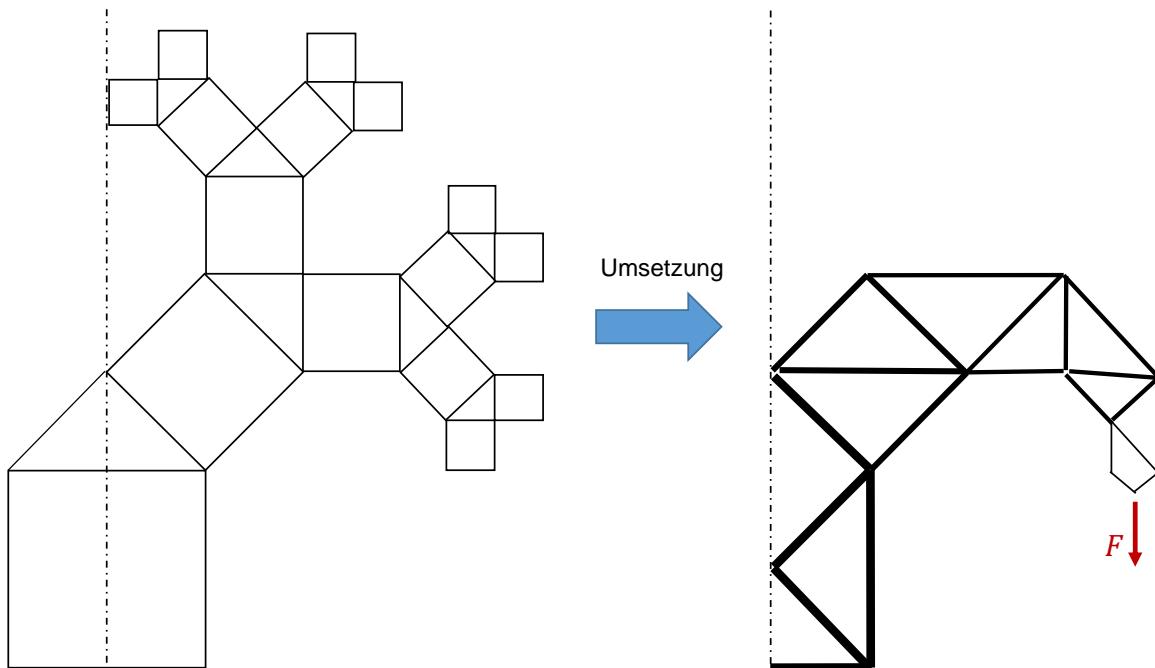


Abbildung VI-26: Pythagorasbaum für die statische Analyse mit einer Last

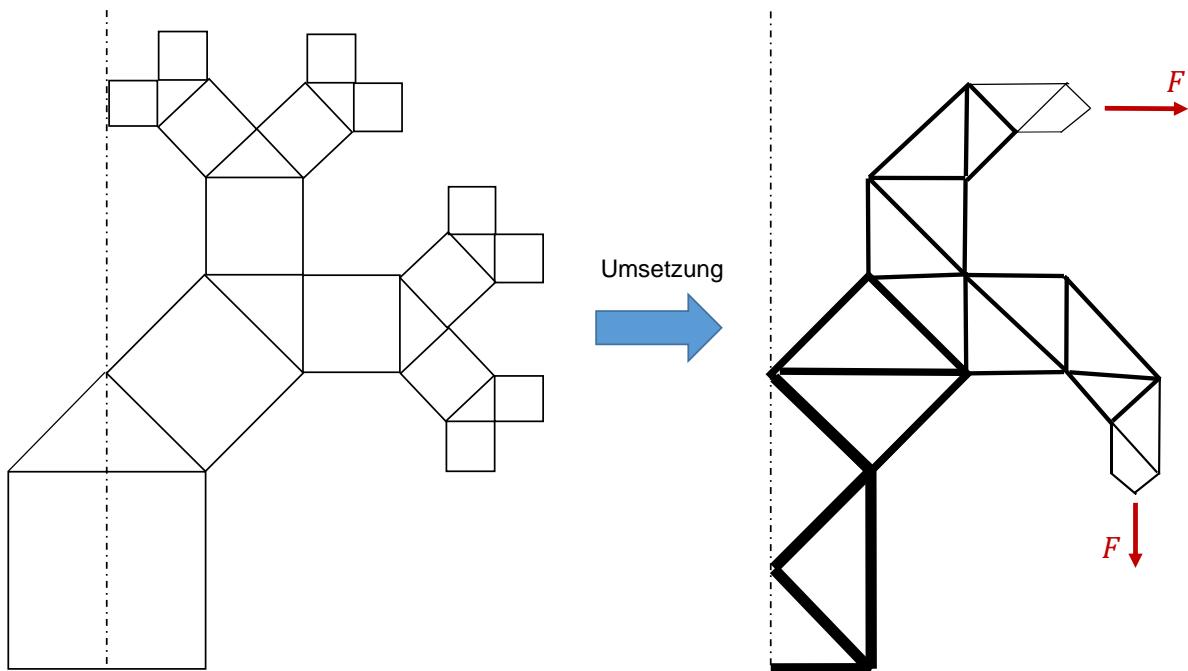
Konstruktion eines Pythagorasbaumes: Statik 2 Lasten

Abbildung VI-27: Pythagorasbaum bei mehreren Lasten

Analyse der Ergebnisse und erneute Optimierung

Die nächste Darstellung zeigt den Verlauf der automatisierten Verfahren für die Geometrienachbearbeitung in Blender. Das Optimierungsergebnis besteht in diesem Fall aus blockförmigen Elementen. Um aus diesem Voxelnetz eine fertigbare Kontur zu erstellen, werden verschiedenste Softwareelemente aus Blender verwendet.

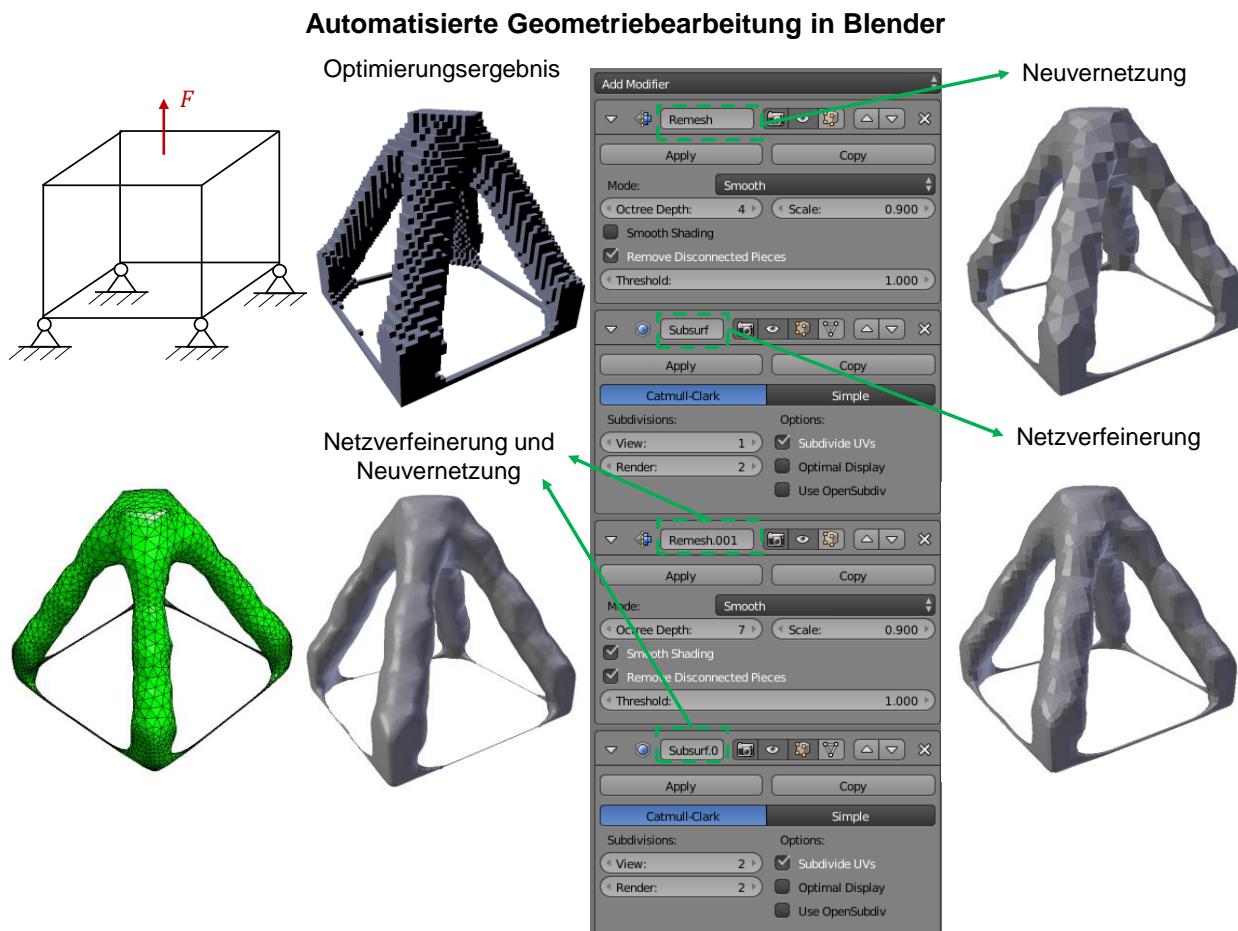


Abbildung VI-28: Automatisierte Geometriebearbeitung in Blender

Durch eine Neuvernetzung wird die Kontur geglättet, sodass die Treppenstufen verschwinden. Eine Verfeinerung des Netzes bewirkt eine glattere Oberfläche. Werden diese beiden Modifikationen nochmals eingesetzt, so ergibt sich eine Geometrie, die für weitere FE-Analysen und der additiven Fertigung verwendet werden können. Diese Form kann anschließend in Netgen vernetzt werden.

Das Netz aus Netgen kann in Abaqus direkt eingeladen werden, um so weitere Analyseschritte durchzuführen. Eine FE-Analyse zeigt die Güte des Topologieergebnisses. In diesem Fall sollten die Dehnungen in jedem Element eine ähnliche Größenordnung annehmen.

Die folgende Abbildung zeigt die Ergebnisse aus dem vernetzten Modell, dessen Dehnungswerte in einem ähnlichen Größenbereich liegen. Die Lösungskontur besteht aus vier massiven Streben und vier filigranen Elementen, die kaum gedeht werden. An diesen schwach belasteten Bereichen (blau) kann Material entfernt werden, das an stark belastete Gebiete (rot, grau) hinzugefügt werden kann.

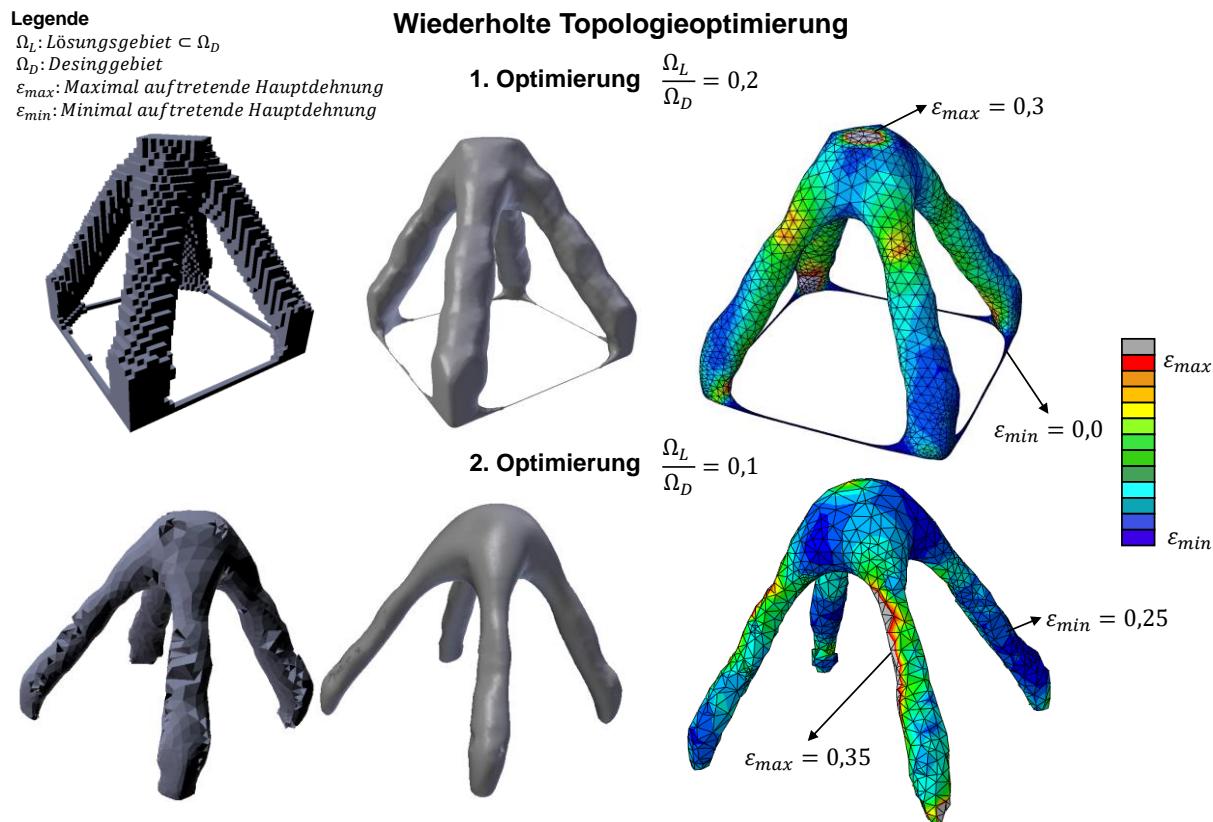


Abbildung VI-29: Analyse der Ergebnisse und erneute Optimierung

Über eine erneute Topologieoptimierung auf dem Ergebnis der ersten Optimierung können die Dehnungsverläufe weiter verbessert werden. Das Ergebnis aus der zweiten Optimierung weist eine deutlich glattere Lösungskontur auf und ein Angleichen des minimalen und maximalen Hauptdehnungswertes. Es besteht wiederum aus den vier massiven Balken, jedoch sind die filigranen Stabkonturen entfernt worden. Die Rundungen an der Krafteinleitungsstelle zeigen einen weicheren Übergang als in dem ersten Lauf. Diese Vorgehensweise zeigt, dass eine erneute Optimierung bessere und glattere Konturen erzeugt. Außerdem steigt bei einer Halbierung des eingesetzten Volumens die maximale Hauptdehnung um nur 16%. Da für diese Variante ausschließlich automatisierte Methoden und Funktionen verwendet wurden, können mehrere Optimierungsiterationen in einer Applikation hintereinander geschaltet werden.

Neben der automatisierten Geometriebearbeitung können die Ergebnisse nachgezeichnet werden. Die Konturen können hierbei durch wenige dreieckige und viereckige Flächen nachgebildet werden, sodass sich eine deutlich einfache Handhabung der Modelle ergibt. Einzelne Querschnitte können durch das Verschieben weniger Knoten angepasst werden. In der folgenden Abbildung ist eine Problemstellung mit verschiedenen Material- und Filtereinstellungen verbessert worden. Das sich ergebende Resultat „SIMP-Filter“ ist in Blender eingeladen worden, sodass die Kontur mit wenigen Polygonen nachgezeichnet und geglättet wurde. Daraufhin erfolgt eine Vernetzung der Geometrie in Netgen und eine FE-Analyse in Abaqus. Abschließend ist eine weitere Optimierung durchgeführt worden.

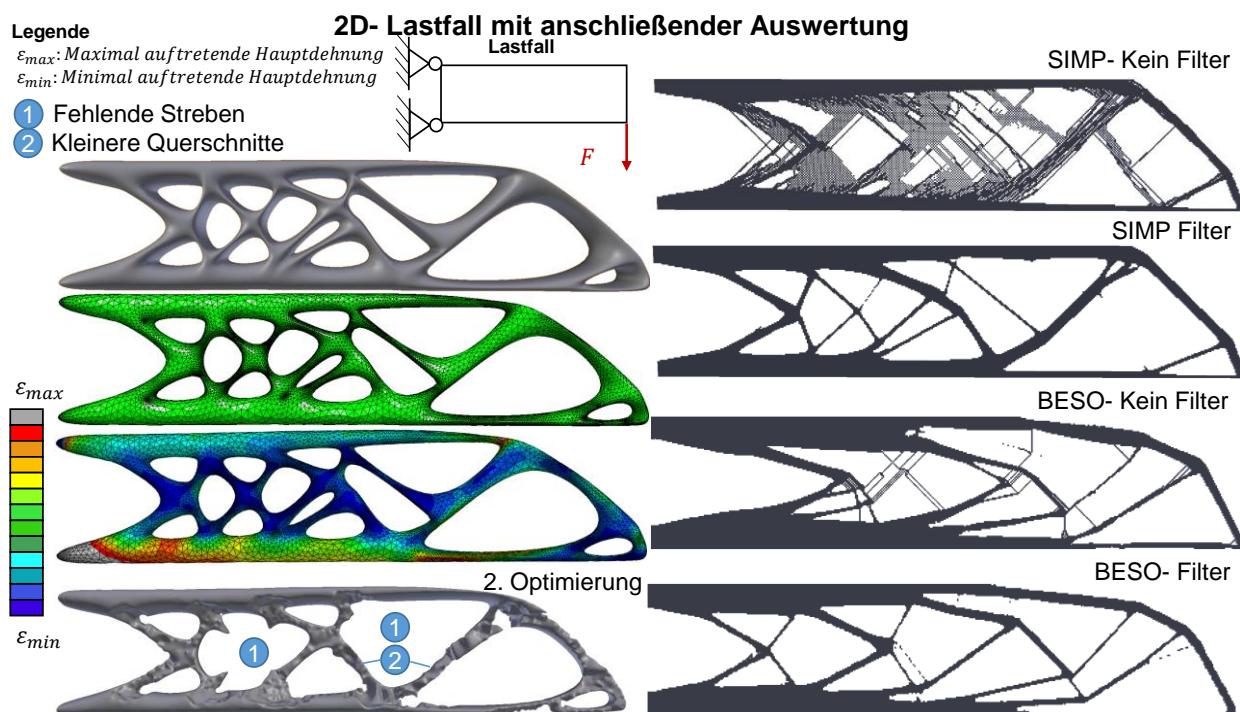


Abbildung VI-30: 2D- Lastfall mit Auswertung (Nachgezeichnet)

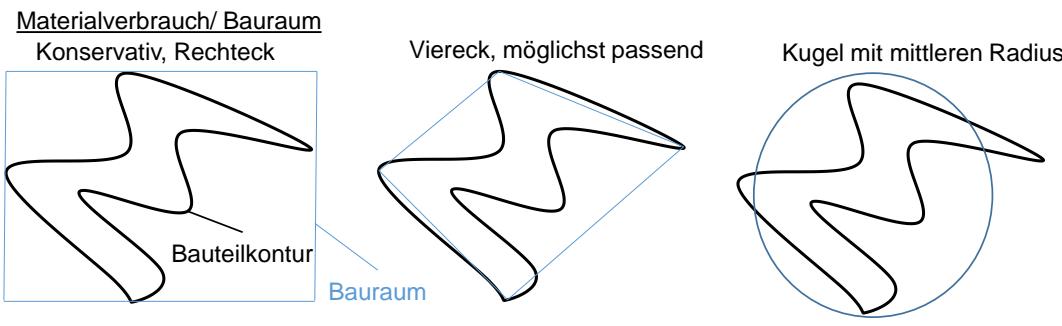
Werden die Dehnungswerte aus der FE-Analyse betrachtet, so sind die Stützstreben kaum belastet. Die Querschnitte dieser Balkenelemente sollten bei einer erneuten Modellierung verringert bzw. entfernt werden (siehe 2. Optimierung (1), (2)). Eine schnellere Auslegung der Querschnitte kann aufgrund der fachwerkartigen Struktur⁵⁴ über Balkenmodelle erfolgen, sodass keine aufwändige erneute Topologieoptimierung notwendig ist.

⁵⁴ Die Dehnungswerte zeigen einen konstanten Verlauf entlang der einzelnen Streben. Dies ist ein Anzeichen für eine reine Zug-, Druckbelastung, sodass Stabelemente idealisiert in diesen Bereichen verwendet werden können.

Automatisierte Geometriebewertung

Für die automatisierte Bewertung von Modellen soll eine Applikation zum Abschätzen der Kosten für die additive Fertigung erstellt werden. In folgender Abbildung sind einige Möglichkeiten für die Beurteilung der Bauteile angeführt. Zunächst wird ein virtueller Bauraum um das Modell entlang gelegt. Als konservative Abschätzung kann eine blockförmige Umgebung gewählt werden, die sich anhand der Maximalabmaße des Bauteils ergibt. Einige weitere Bauräume können mit Kugeloberflächen oder verzerrten Blöcken beschrieben werden. Anhand des Verhältnisses aus Bauraum- und Materialvolumen kann anschließend die Bauraumausnutzung abgeschätzt werden.

Einschätzung der Komplexität des Bauteils



Komplexität der Geometrie

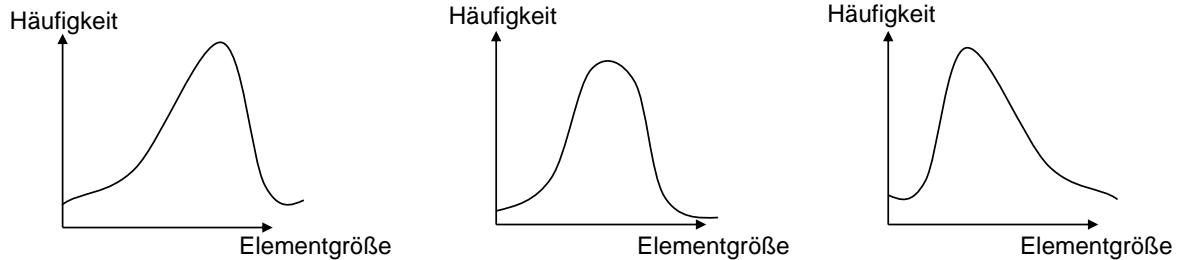
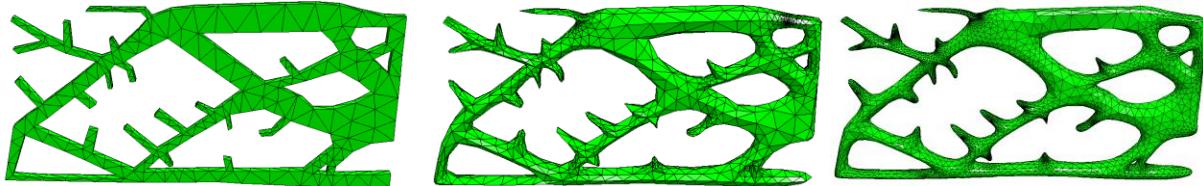


Abbildung VI-31: Komplexitätsbewertung durch Häufigkeitsverteilung der Elementgröße und des Materialverbrauchs

Eine weitere Möglichkeit bietet die Verwendung von finiten Elementen. Durch einen geeigneten „Automesher“ können Bauteile vernetzt werden. Für das Abbilden schwieriger Konturen werden deutlich mehr Elemente benötigt, sodass bei einfachen Formen sehr wenige große Elemente verwendet werden. Rundungen, Streben, Kanten und Löcher werden hierdurch lokal deutlich

feiner vernetzt, wodurch Anhand der Häufigkeitsverteilung der Elementgrößen eine Aussage über die Komplexität approximiert werden kann.

Eine weitere Methode zur automatisierten Abschätzung ist in folgender Abbildung dargestellt. Über das gesamte Bauteil wird ein blockförmiges FE-Netz gelegt. Nun werden alle Elemente gelöscht die sich außerhalb des Bauteils befinden. Die übrigen Elemente werden in die Bereiche „Oberfläche Schwerpunkt außerhalb“, „Oberfläche Schwerpunkt innerhalb“ und „Bauteilinneres“ unterteilt. Befinden sich deutlich mehr Elemente an der Oberfläche als im Bauteilinneren, so zeigt dies eine Struktur mit filigranen Bereichen. Sind fast ausschließlich Elemente im Bauteilinneren, so ergibt sich eine massive Struktur (Bestenfalls ein Quader).

Beurteilung Bauteils durch ein Kontrollnetz

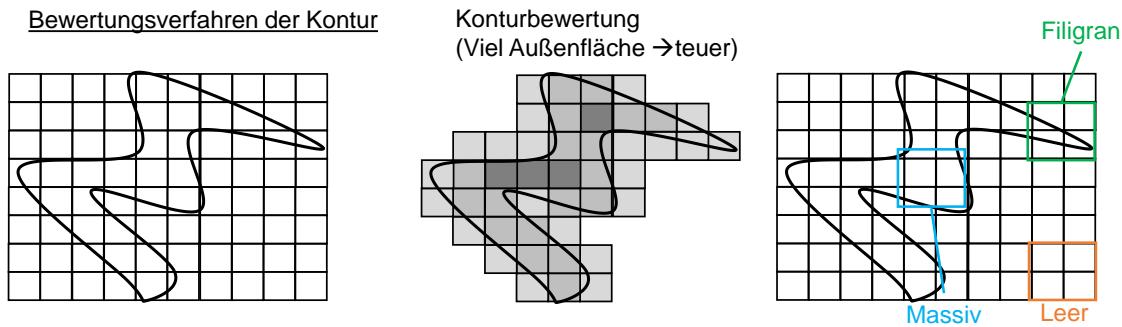


Abbildung VI-32: Ermittlung von filigranen und massiven Bereichen

Über diese Strategien wird versucht eine Applikation zu entwickeln, die Fertigungskosten abschätzen kann. Diese berücksichtigt die Eigenschaften

- Materialverbrauch,
- Bauraumausnutzung (Virtueller Bauraum),
- Bauteiloberfläche,
- Änderung der Konturen (FEM-Häufigkeit)
- Filigranität und Massivität (Voxelnetz).

Da diese Variante von sehr vielen Einflussfaktoren abhängt, sollte vorab eine Analyse der Auswirkungen des verwendeten Vernetzers und der gewählten Strategien durchgeführt werden. Als sinnvoller Parameter für z.B. eine Fertigungskennzahl, können ohne eine Untersuchung nur der Materialverbrauch und die Bauraumausnutzung verwendet werden.

Da die genannten Methoden zur Kostenabschätzung von sehr vielen Einflussfaktoren abhängen, können sich die gesetzten Kennwerte bei einem gleichen Bauteil unterscheiden, wenn z.B. eine unterschiedliche Vernetzung oder Positionierung des Modells eingestellt wird. Um vergleichbare Kennwerte zu generieren kann eine Hauptachsentransformation mit anschließender Flächenprojektion erfolgen. Diese Vorgehensweise ist in folgender Abbildung dargestellt, in der mit dieser Strategie ein Gesamtbauraum ermittelt wird. Der benötigte Bereich wird über die projizierte Fläche und deren Abstand zur projizierten Bauteilloberfläche ermittelt.

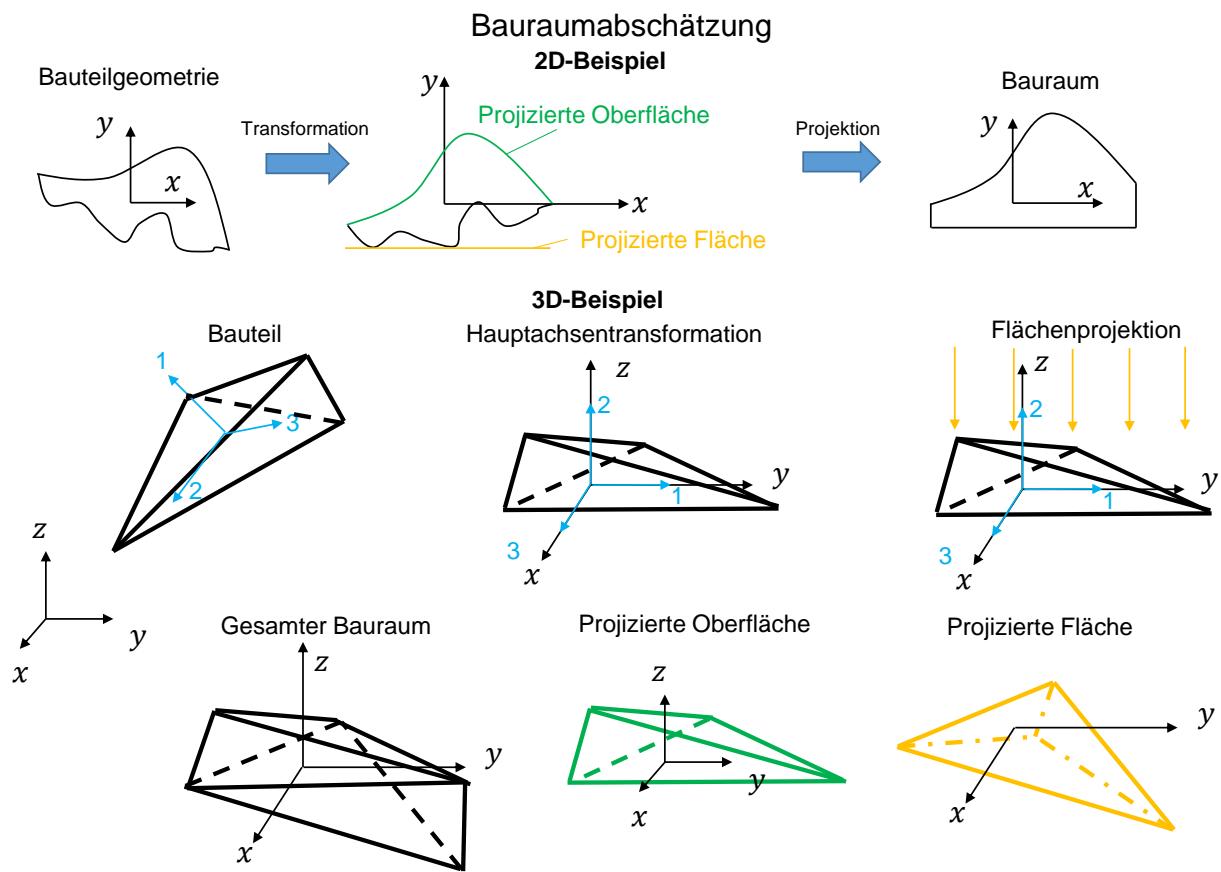


Abbildung VI-33: Bauraumabschätzung (Transformation)

Der ermittelte Gesamtbauraum und die entstehende Kennzahl sind unabhängig von den Parametern „Elementgröße“, „Position“ und „Häufigkeitsverteilung“. Für das gleiche Bauteil werden somit identische Werte ermittelt, obwohl eine unterschiedliche Position im Raum vorliegen kann.

Insgesamt können über die vorgestellten Methoden verschiedenste Kennzahlen und Abschätzungen ermittelt werden, sodass eine vorläufige Kostenanalyse durch diese Strategien deutlich vereinfacht wird.

Zustandsdiagramm (UML) der Software

Das aktuelle Programm besitzt mehrere Verfahrensabläufe. Diese lassen sich über das dargestellte Zustandsdiagramm zusammenfassen. Der Zustandsautomat startet mit der Aktion des Programmaufrufs. Anschließend wird auf das Betätigen von „Exit“ oder eines Buttons gewartet. Je nach Auswahl wird der Zustand der jeweiligen Optimierung eingeleitet. Nach erfolgreichem Ablauf wird die Ausgabe angezeigt oder in einem Inputdeck gespeichert. Nun kann erneut eine Optimierung durch das anwählen eines Buttons gestartet werden.

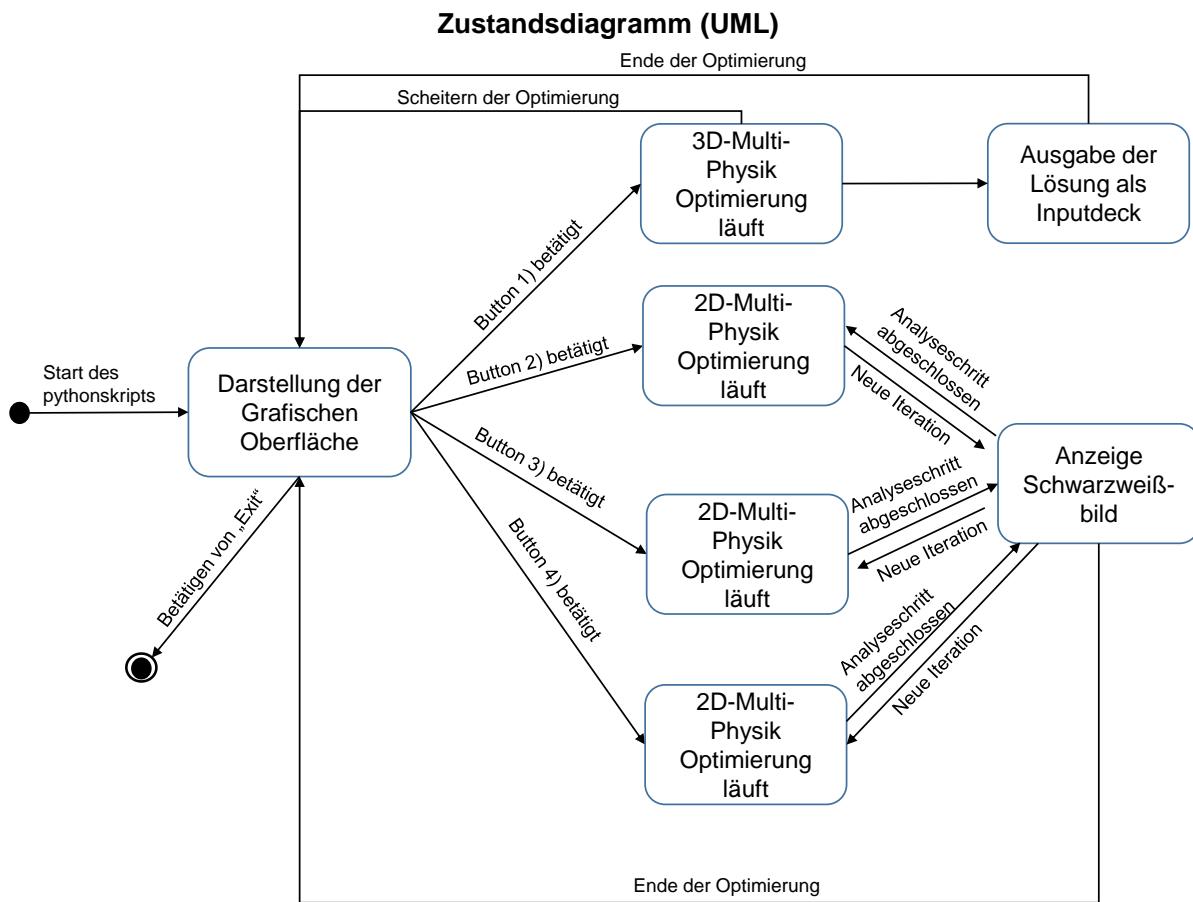


Abbildung VI-34: UML-Diagramm der entwickelten Applikation

Diese grobe Einteilung der Zustände kann in weitere detailliertere Diagramme unterteilt werden. So setzt sich die Optimierung aus weiteren einzelnen Schritten zusammen. Durch diesen übersichtlichen Aufbau der Software lässt sich die Fehlersuche vereinfachen, da lediglich der jeweilige Zustand überprüft werden muss.

Eidesstattliche Erklärung

Hiermit versichere ich Martin Denk, dass die vorliegende Masterarbeit selbstständig und ausschließlich mithilfe der angegebenen Quellen und Hilfsmittel verfasst wurden. Alle Stellen der Arbeit, für die wörtliche oder sinngemäße Gedanken oder Textpassagen aus anderen Quellen übernommen wurden, sind als solche kenntlich gemacht. Diese Arbeit wurde in gleicher oder ähnlicher Form noch keiner anderen Prüfungsstelle vorgelegt.

Martin Denk

Vierkirchen, 15.02.2016