

Содержание

1	Теоретические вопросы	2
1.1	Определение группы. Пример группы	2
1.2	Примеры групп по сложению	2
1.3	Примеры групп по умножению	2
1.4	Группа кватернионов	2
1.5	Порядок элемента, порядок группы	2
1.6	Группа подстановок. Теорема Кэли	2
1.7	Определение циклической группы. Определение образующего элемента циклической группы	3
1.8	Теорема Лагранжа. Следствия из теоремы Лагранжа	3
1.9	Определение нормальной подгруппы. Определение фактор-группы	3
1.10	Определение гомоморфизма групп	4
1.11	Основная теорема о гомоморфизмах	4
1.12	Определение кольца. Примеры колец	4
1.13	Определение гомоморфизма колец	4
1.14	Определение идеала. Определение главного идеала.	5
1.15	Построение факторкольца по идеалу $K \setminus I$	5
1.16	Функция Эйлера. Теорема Эйлера	5
1.17	Малая теорема Ферма	5
1.18	Определение поля. Пример	5
1.19	Простое поле. Пример	6
1.20	Теорема о простом подполе	6
1.21	Характеристика поля. Пример	6
1.22	Алгебраические и трансцендентные элементы поля.	6
1.23	Определение простого элемента поля. Определение неприводимого мно- гочлена над полем P	6
1.24	Построение конечного поля из p^n элементов	6
1.25	Мультипликативная группа конечного поля	6
1.26	Пример конечного поля	7
2	Задачи	7
2.1	1 задание	7
2.1.1	1 вариант	7
2.1.2	2 вариант	7
2.2	2 задание	7
2.2.1	1 вариант	7
2.2.2	2 вариант	8
2.3	3 задание	8
2.3.1	1 вариант	8
2.3.2	2 вариант	8
2.4	4 задание	8
2.4.1	1 вариант	8

1 Теоретические вопросы

1.1 Определение группы. Пример группы

Пусть M - некоторое множество

Бинарная операция на M - это отображение $\circ : M \times M \rightarrow M, (a, b) \rightarrow a \circ b$

Если на M задана бинарная операция, то множество (M, \circ) называют множеством с бинарной операцией.

(M, \circ) называется группой, если выполнены следующие три условия:

$$\begin{cases} a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c, \forall a, b, c \in M \text{ (ассоциативность)} \\ \text{существует нейтральный элемент } e \in M, e \circ a = a \circ e = a, \forall a \in M \\ \forall a \in M \exists b \in M : a \circ b = b \circ a = e \end{cases}$$

Группы матриц (с операцией умножения):

$$GL_n(\mathbb{R}) = \{A \in Mat_{n \times n} | \det A \neq 0\}$$

$$SL_n(\mathbb{R}) = \{A \in Mat_{n \times n} | \det A = 1\}$$

1.2 Примеры групп по сложению

Числовые аддитивные группы: $(\mathbb{Z}, +), (\mathbb{Q}, +), (\mathbb{R}, +), (\mathbb{C}, +), (\mathbb{Z}_n, +)$.

1.3 Примеры групп по умножению

Числовые мультипликативные группы: $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \times), (\mathbb{R} \setminus \{0\}, \times), (\mathbb{C} \setminus \{0\}, \times), (\mathbb{Z}_p \setminus \{0\}, \times)$, p - простое.

1.4 Группа кватернионов

$$Q_8 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix} \right\}.$$

1.5 Порядок элемента, порядок группы

Порядок элемента g - это величина

$$\text{ord}(g) := \begin{cases} \min\{n \in \mathbb{N} : g^n = e\}, & \text{если множество непусто} \\ \infty, & \text{если множество пусто} \end{cases}$$

Порядок группы - мощность носителя группы, то есть, для конечных групп - количество элементов группы

1.6 Группа подстановок. Теорема Кэли

симметрическая группа S_n - все перестановки длины n , $|S_n| = n!$

знакопеременная группа A_n - все четные перестановки длины n $|A_n| = n!/2$

Теорема Кэли: Всякая конечная группа G , $\text{ord} G = n$, изоморфна некоторой подгруппе группы перестановок S_n . При этом каждый элемент группы G сопоставляется с перестановкой $\pi_a, \pi_a(g) = a \circ g$, где g - произвольный элемент группы G . [пример здесь](#)

1.7 Определение циклической группы. Определение образующего элемента циклической группы

$$\langle g \rangle := \{g^n, n \in \mathbb{Z}\}$$

Группа G называется циклической, если существует такое $g \in G$, что $G = \langle g \rangle$

Элемент g называется образующим элементом циклической группы G

Пример: Группы $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Z}_n, +)$ при $n \geq 1$ являются циклическими.

1.8 Теорема Лагранжа. Следствия из теоремы Лагранжа

Множество $aH := \{ah \mid h \in H\}$ называется левым смежным классом элемента $a \in G$ по подгруппе H .

Индекс подгруппы H в группе G - это число левых смежных классов G по H . Обозначение $[G : H]$

Теорема Лагранжа: Пусть G - конечная группа, $H \subseteq G$ - подгруппа; тогда $|G| = |H| \cdot [G : H]$

Следствие 1: Пусть G - конечная группа и $H \subseteq G$. Тогда $|H|$ делит $|G|$

Следствие 2: Пусть G - конечная группа и $g \in G$. Тогда $\text{ord} g$ делит $|G|$

Следствие 3: Пусть G - конечная группа и $|G|$ - простое число. Тогда G - циклическая группа, порождаемая любым своим неединичным элементом.

1.9 Определение нормальной подгруппы. Определение факторгруппы

Подгруппа $H \subseteq G$ называется нормальной, если $gH = Hg \forall g \in G$. Обозначение $H \triangleleft G$

Пусть H — нормальная подгруппа группы G . Согласно определению, в этой ситуации левые и правые смежные классы G по H — это одно и то же, и тогда мы будем называть их просто смежными классами.

Обозначим через G/H множество всех смежных классов G по H . Оказывается, что на G/H можно ввести структуру группы.

Сначала введём на G/H бинарную операцию, положив $(g_1H) \cdot (g_2H) := (g_1g_2)H$ для любых $g_1, g_2 \in G$.

Как это понимать? Мы хотим перемножить два смежных класса и получить в результате третий смежный класс. Для этого мы берём какой-нибудь элемент g_1 из первого смежного класса, элемент g_2 из второго смежного класса и объявляем, что результатом перемножения наших двух смежных классов будет смежный класс элемента g_1g_2 . Однако тут возникает потенциальная проблема: а вдруг при другом выборе элементов g_1 и g_2 из тех же смежных классов смежный класс элемента g_1g_2 окажется другим? Оказывается, в нашей ситуации такое невозможно, что доказывается так называемой проверкой корректности.

Корректность: пусть элементы $g'_1, g'_2 \in G$ таковы, что $g'_1H = g_1H$ и $g'_2H = g_2H$ (то есть g'_1 и g'_2 — другие представители наших исходных смежных классов g_1H и g_2H соответственно). Тогда $g'_1 = g_1h_1$ и $g'_2 = g_2h_2$ для некоторых $h_1, h_2 \in H$. В соответствии с тем же определением должно выполняться равенство $(g'_1H) \cdot (g'_2H) = (g'_1g'_2)H$, потому нам нужно показать, что $(g'_1g'_2)H = (g_1g_2)H$. Имеем

$$g'_1g'_2 = g_1h_1g_2h_2 = g_1g_2g_2^{-1}h_1g_2h_2 \subseteq (g_1g_2)H$$

(в последнем переходе учтено, что $g_2^{-1}h_1g_2 \in H$ в силу нормальности подгруппы H), откуда вытекает $(g'_1g'_2)H = (g_1g_2)H$.

Итак, на множестве G/H корректно определена бинарная операция. Теперь легко проверить, что $(G/H, \cdot)$ является группой:

ассоциативность: $((aH)(bH))(cH) = ((ab)H)(cH) = ((ab)c)H = (a(bc))H = (aH)((bc)H) = (aH)((bH)(cH))$;

нейтральный элемент — это eH : $(eH)(aH) = (ea)H = aH = (ae)H = (aH)(eH)$;

обратный к gH элемент — это $g^{-1}H$: $(g^{-1}H)(gH) = (g^{-1}g)H = H = (gg^{-1})H = (gH)(g^{-1}H)$.

Как видно, все необходимые свойства вытекают из аналогичных свойств для группы G .

Группа $(G/H, \cdot)$ называется факторгруппой группы G по нормальной подгруппе H .

Пример. Пусть $G = (\mathbb{Z}, +)$ и $H = n\mathbb{Z}$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$. Тогда G/H — это знакомая нам группа вычетов $(\mathbb{Z}_n, +)$. Впрочем, некоторая тонкость тут в том, как именно определять группу $(\mathbb{Z}_n, +)$. С теоретической точки зрения наиболее удобно определение данной группы именно как факторгруппы $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. На практике же наиболее удобным для вычислений является определение «на пальцах», когда рассматривается множество $\{0, 1, \dots, n-1\}$ с операцией сложения по модулю n . С формальной точки зрения это будет группа, отличная от $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, но изоморфная ей (про изоморфизмы см. ниже).

1.10 Определение гомоморфизма групп

Пусть G, F — две группы

Отображение $\varphi : G \rightarrow F$ называется гомоморфизмом, если $\varphi(ab) = \varphi(a) \cdot \varphi(b)$ для любых $a, b \in G$. В каждой из групп своя бинарная операция (!)

1.11 Основная теорема о гомоморфизмах

Ядро гомоморфизма φ — это множество $\text{Ker} \varphi := \{g \in G | \varphi(g) = e_F\} \subseteq G$

Образ гомоморфизма φ — это множество $\text{Im} \varphi := \varphi(G) \subseteq F$

Теорема о гомоморфизме $G/\text{ker} \varphi \simeq \text{Im} \varphi$ (изоморфно)

1.12 Определение кольца. Примеры колец

Кольцо — это множество R , на котором заданы две бинарные операции $(+, \cdot)$, удовлетворяющие следующим условиям:

1) $(R, +)$ — абелева группа (аддитивная группа кольца R)

2) $\forall a, b, c \in R \begin{cases} a(b+c) = ab+ac \text{ (левая дистрибутивность)} \\ (a+b)c = ac+bc \text{ (правая дистрибутивность)} \end{cases}$ 3) $(ab)c = a(bc) \forall a, b, c \in R$

R (ассоциативность умножения)

4) существует элемент $1 \in R$ (называемый единицей), такой что $1 \cdot a = a \cdot 1 = a \forall a \in R$

$\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ — числовые кольца

1.13 Определение гомоморфизма колец

Отображение $\varphi : R \rightarrow Q$ называется гомоморфизмом (колец), если $\varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b)$, $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b) \forall a, b \in R$

1.14 Определение идеала. Определение главного идеала.

Подмножество I кольца R называется (двусторонним) идеалом, если выполнены следующие 2 условия:

- 1) I - подгруппа по сложению
- 2) для всех $a \in I, r \in R$ выполнено $ra \in I, ar \in I$

Пусть R - коммутативное кольцо. С каждым элементом $a \in R$ связан идеал $(a) := \{ra | r \in R\}$

Идеал называется **главным**, если существует такое $a \in R$, что $I = (a)$

Пример. Для всякого ≥ 0 главный идеал (k) в кольце \mathbb{Z} есть не что иное, как $k\mathbb{Z}$

1.15 Построение факторкольца по идеалу $K \setminus I$

Пусть R - произвольное кольцо, а I - идеал в R

Рассмотрим факторгруппу $(R/I, +)$. Её элементами являются смежные классы по идеалу I , то есть множества вида $a + I$, где $a \in R$. Мы хотим превратить R/I в кольцо; для этого введём на R/I операцию умножения, полагая $(a + I) \cdot (b + I) := ab + I$ для всех $a, b \in R$. Иными словами, чтобы перемножить два смежных класса в R/I , мы выбираем в каждом из них по представителю, перемножаем их и смежный класс результата объявляем произведением двух исходных смежных классов.

Как и в случае с определением факторгруппы, здесь нужна проверка корректности. Пусть $a + I = a' + I$, $b + I = b' + I$, то есть a' и b' — другие представители смежных классов $a + I$ и $b + I$ соответственно. Тогда $a' = a + x$, $b' = b + y$ для некоторых $x, y \in I$. Тогда то же определение даёт $(a' + I)(b' + I) = a'b' + I$, и потому нам нужно показать, что $a'b' + I = ab + I$. В самом деле,

$$a'b' + I = (a + x)(b + y) + I = ab + \underbrace{ay + xb + xy}_{\in I} + I = ab + I.$$

Обратим внимание, что в последнем переходе существенно используется то, что I является идеалом в R .

1.16 Функция Эйлера. Теорема Эйлера

Функция Эйлера $\varphi(n)$ - мультипликативная арифметическая функция, значение которой равно количеству натуральных чисел не превосходящих n и взаимно простых с ним.

Теорема Эйлера - если $a, m = 1$, то $a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod{m}$, где $\varphi(m)$ — функция Эйлера.

$$\varphi(p) = p - 1$$

$$\varphi(p^n) = p^n - p^{n-1}, \text{ где } p - \text{ простое число}$$

1.17 Малая теорема Ферма

Если p - простое число и $a, p = 1$, то $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$

1.18 Определение поля. Пример

Поле называется коммутативное ассоциативное кольцо с единицей, в котором $0 \neq 1$ и всякий ненулевой элемент необратим. **Примеры полей:** $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$.

1.19 Простое поле. Пример

Простое поле - это поле, которое не имеет нетривиальных подполей

1.20 Теорема о простом подполе

Любое поле имеет ЕДИНСТВЕННОЕ тривиальное подполе, которое изоморфно либо полю рациональных чисел \mathbb{Q} , либо полю целых чисел по вычету p (\mathbb{Z}_p).

1.21 Характеристика поля. Пример

Определение 1. *Характеристикой* поля K называется наименьшее натуральное число p , для которого $\underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_p = 0$. Если такого p не существует, то говорят, что характеристика поля K равна нулю.

Характеристика поля K обозначается через $\text{char } K$.

Примеры. $\text{char } \mathbb{Q} = \text{char } \mathbb{R} = \text{char } \mathbb{C} = 0$, $\text{char } \mathbb{Z}_p = p$.

1.22 Алгебраические и трансцендентные элементы поля.

Если K, F - два поля - $K \subseteq F$, то поле F называется расширением поля K

Элемент $\alpha \in F$ называется **алгебраическим** над K , если существует ненулевой многочлен $f \in K[x]$ со свойством $f(\alpha) = 0$. В противном случае элемент α называется **трансцендентным** над K

Пример: Рассмотрим расширение полей $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$. Элемент $\sqrt{2}$ является алгебраическим над \mathbb{Q} , так как он аннулируется многочленом $x^2 - 2 \in \mathbb{Q}[x]$. Элементы π, e - трансценденты над \mathbb{Q}

1.23 Определение простого элемента поля. Определение неприводимого многочлена над полем P

Простой элемент поля - элемент, который нельзя представить в виде произведения двух элементов, которые необратимы. **Неприводимый многочлен над полем P** - нетривиальный многочлен, неразложимый в произведение нетривиальных многочленов. То есть многочлен $p \in P[x]$ называется неприводимым, если не существует $q, r \in P[x]$, таких, что $p = qr$

1.24 Построение конечного поля из p^n элементов

Пусть $h \in \mathbb{Z}_p[x]$ - неприводимый многочлен степени n . Тогда мы знаем, что факторкольцо $F = \mathbb{Z}_p[x]/(h)$ является полем. Также мы знаем, что F имеет размерность n как векторное пространство над \mathbb{Z}_p , а тогда $|F| = p^n$, то есть F - искомое поле из p^n элементов.

1.25 Мультипликативная группа конечного поля

. Пусть K - произвольное конечное поле из p^n элементов (p - простое и $n \in \mathbb{N}$). Имеем $\text{char } K = p$, и в частности $\mathbb{Z}_p \subseteq K$

Рассмотрим группу $K^\times := (K \setminus \{0\}, \times)$, она называется мультипликативной группой поля K .

1.26 Пример конечного поля

Пример. Построим поле из 4 элементов. В соответствии с описанной выше конструкцией возьмём многочлен

$$h = x^2 + x + 1 \in \mathbb{Z}_2[x].$$

Поскольку $h(0) = h(1) = 1 \neq 0$, этот многочлен не имеет корней в \mathbb{Z}_2 . А так как $\deg h = 2$, то отсюда следует, что h неприводим. Значит, факторкольцо

$$F = \mathbb{Z}_2[x]/(h)$$

является искомым полем из 4 элементов. Имеем $F = \{0, 1, \bar{x}, \bar{x} + 1\}$, где черта означает класс соответствующего элемента в факторкольце. На этом множестве операция сложения выполняется по модулю 2, а чтобы перемножить два элемента, их нужно сначала умножить как многочлены от \bar{x} , а затем понизить все степени выше 1 по правилу

$$\bar{x}^2 = \bar{x} + 1.$$

2 Задачи

2.1 1 задание

2.1.1 1 вариант

Найдите остаток от деления $2^{5432675}$ на 13

$$5432657 = 12 \cdot 45722 + 11 =$$

$$2^{12k+11} \equiv 1 \cdot 2^{11} \equiv 1 \pmod{13}$$

2.1.2 2 вариант

Найдите остаток от деления 48^{5n+3} на 11

$$48 \equiv 4 \pmod{11} \mapsto 4^{5n+3} \equiv 48^{5n+3} \pmod{11}$$

$$4^{5n+3} \equiv 4^{5n} \cdot 4^3 \equiv 4^{5n} \cdot 9 \equiv 9 \pmod{11}$$

$$4^2 \equiv 5 \pmod{11}$$

$$4^3 \equiv 9 \pmod{11}$$

$$4^4 \equiv 3 \pmod{11}$$

$$4^5 \equiv 1 \pmod{11}$$

2.2 2 задание

2.2.1 1 вариант

Найдите обратную матрицу в поле \mathbb{Z}_{13} для матрицы

$$\begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} = A$$

$$A \cdot A^{-1} = E$$

$$\begin{aligned}
\left(\begin{array}{cc|cc} 7 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 6 & 0 & 1 \end{array} \right) &\mapsto \left(\begin{array}{cc|cc} 7 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 7 \end{array} \right) \mapsto \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 3 & 9 \\ 1 & 3 & 0 & 7 \end{array} \right) \mapsto \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 3 & 9 \\ 1 & 0 & 4 & 6 \end{array} \right) \mapsto \\
&\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 3 & 9 \end{array} \right) \\
A^{-1} &= \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 3 & 9 \end{pmatrix} \\
A \cdot A^{-1} &= \begin{pmatrix} 40 & 78 \\ 26 & 66 \end{pmatrix} = E
\end{aligned}$$

2.2.2 2 вариант

$$\begin{aligned}
\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 6 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{array} \right) &\mapsto \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 6 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 1 & 4 \end{array} \right) \mapsto \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 6 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \end{array} \right) \mapsto \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \end{array} \right) \\
A^{-1} &= \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

2.3 3 задание

2.3.1 1 вариант

Найти обратный элемент к элементу 28 в поле \mathbb{Z}_{167} . Воспользуемся обратным алгоритмом Евклида

$$\begin{aligned}
28x + 167y &= 1 \\
167 &= 28 \cdot 5 + 27 \\
28 &= 27 + 1 \\
1 &= 28 - 27 = 28 - 167 + 28 \cdot 5 = 28 \cdot 6 - 167 \mapsto 28^{-1} = 6
\end{aligned}$$

2.3.2 2 вариант

Найти обратный к элементу 19 в поле \mathbb{Z}_{98}

$$\begin{aligned}
19x + 98y &= 1 \\
98 &= 19 \cdot 5 + 3 \\
19 &= 6 \cdot 3 + 1 \\
1 &= 19 - 6 \cdot 3 = 19 - 6 \cdot (98 - 19 \cdot 5) = 19 \cdot 31 - 6 \cdot 98 \mapsto 19^{-1} = 31
\end{aligned}$$

2.4 4 задание

2.4.1 1 вариант

Найти НОД двух многочлен и его линейное выражение в поле $F_2[x]$

$$\begin{aligned}
&(x^5 + x^2 + 1, x^4 + x + 1) \\
x^5 + x^2 + 1 &= (x^5 + x + 1) \cdot x + (x + 1) \\
x^4 + x + 1 &= (x^3 + x^2 + x) \cdot (x + 1) + 1 \\
1 &= (x^4 + x + 1) - (x^3 + x^2 + x) \cdot (x + 1) = (x^4 + x + 1) - (x^3 + x^2 + x)(x^5 + x^2 + 1 - (x^4 + x + 1) \cdot x) \\
1 &= (x^4 + x + 1)(x^4 + x^3 + x^2) + (x^5 + x^2 + 1) \cdot (x^3 + x^2 + x)
\end{aligned}$$