1

a)

$f(x) = \begin{cases} \ln x, x \in (0,1] \\ 0, x = 0 \end{cases}$ интегрируема по Риману на отрезке $[0,1]$ т.к функция ограничена на этом отрезке, и имеет всего одну точку разрыва.

b)

$$g(x) = \begin{cases} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n, x \in \left(\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n-1}}\right] \\ e, \quad x = 0 \end{cases}$$

Эта функция интегрируема по Риману на отрезке $[0,1]$, т.к функция ограничена на этом отрезке (в силу ограниченности $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$) и имеет счетное число точек разрыва (в каждой степени двойки и плюс одна точка разрыва в нуле.)

c)

$$h(x) = \begin{cases} 1, x \in [0,1] \cap \mathbb{Q} \\ -1, x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q} \end{cases} \quad \text{Не интегрируема по Риману}$$

В каждой точке эта функция имеет разрыв. И следовательно , по **Факт 2** она не интегрируема по Риману(так же, как и функция Дирихле).

2

a)

$$\lim_{n\to\infty} \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{4n^2 - 1^2}} + \frac{1}{\sqrt{4n^2 - 2^2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{4n^2 - n^2}} \right) = \frac{1}{n} \left(\frac{1}{4 - 1/n^2} + \dots + \frac{1}{4 - n^2/n^2} \right) \right\} = (*)$$

Введем функцию $f(x) = (\sqrt{4 - x^2})^{-1}$ и точками разбиения будут точки $x_k = \frac{k}{n}$

$$(*) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{4 - x^2}} \mathrm{d}x = \arcsin(x/2)|_0^1 = \frac{\pi}{6}$$

b)

3

a)

$$\int_1^e \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1 + \ln x}} = \begin{bmatrix} l \ln x = t \\ \mathrm{d}t = x^{-1}\mathrm{d}x \end{bmatrix} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1 + t}} = 2\sqrt{1 + t}\ |_0^1 = 2\sqrt{2} - 2$$

b)

Сначала вычислим неопределенный интеграл от это функции.

$$\int x\arctan x \mathrm{d}x = \frac{x^2}{2}\cdot\arctan x - \frac{1}{2}\cdot\int\frac{x^2}{x^2+1} = \frac{x^2}{2}\cdot\arctan x - \frac{1}{2}(x+\arctan x)$$

$$\int\frac{x^2}{x^2+1} = x - \arctan x + C$$

$$\frac{x^2}{2}\cdot\arctan x - \frac{1}{2}(x+\arctan x)|_0^{\sqrt{3}} = \frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

c)

$$\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{2x^7-x^5+2x^3-1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{2x^7-x^5+2x^3}{\cos^2 x} + \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{-1}{\cos^2 x} = 0 - \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{\cos^2 x} = -\operatorname{tg} x|_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} = 2\sqrt{3}$$