

1

Найдем порядок каждого элемента в каждой группе прямого произведения

$$\mathbb{Z}_2 : \text{ord}(0) = 0, \text{ord}(1) = 2$$

$$\mathbb{Z}_6 : \text{ord}(0) = 0, \text{ord}(1) = 6, \text{ord}(2) = 3, \text{ord}(3) = 2, \text{ord}(4) = 3, \text{ord}(5) = 6$$

$$\mathbb{Z}_9 : \text{ord}(0) = 0, \text{ord}(1) = 9, \text{ord}(2) = 9, \text{ord}(3) = 6, \text{ord}(4) = 9, \text{ord}(5) = 9, \text{ord}(6) = 3, \text{ord}(7) = 9, \text{ord}(8) = 9$$

Воспользуемся фактом: $\text{ord}(a, b) = [\text{ord}(a), \text{ord}(b)]$

НОК = 2: 3 элементов

НОК = 3: 4 элементов

НОК = 6: 5 элементов

НОК = 9: 12 элементов

2

$G \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_5$ нециклическая абелева группа

$$x = (a, b, c)$$

$$5x = (0, 0, 0) = \begin{cases} 5a = 0 - 1 \text{ решения} \\ 5b = 0 - 5 \text{ решений} \\ 5c = 0 - 5 \text{ решений} \end{cases} \quad - \text{ всего } 25 - 1 = 24 \text{ подгрупп (-1 т.к. } x = 0, \text{ одно решение)}$$

$$10x = (0, 0, 0) = \begin{cases} 10a = 0 - 1 \text{ решения} \\ 10b = 0 - 5 \text{ решений} \\ 10c = 0 - 5 \text{ решений} \end{cases} \quad - \text{ всего } 50 - 2 - 24 + 1 - 1 = 24 \text{ подгрупп}$$

вычитаем $2x = 0, 5x = 0, x = 0$

3

$$\mathbb{Z}_{2^3 3^3} \times \mathbb{Z}_{5^3} \cong \mathbb{Z}_{15} \times \mathbb{Z}_{36} \times \mathbb{Z}_{50} \not\cong \mathbb{Z}_{2^3 3^3 5^3}$$

Значит $\min n = 2$

4

$$k = \max \text{ord}$$

Пусть $\exists m \neq e : \text{ord} = m$ и $(n, m) = 1 \rightarrow \exists p, q : pk + qm = 1$

$$a^{pk+qm} = a^{pk} \cdot a^{qm} = e$$

$$a^{pk+qm} = a^1 = a - \text{Противоречие}$$