1

$$\frac{9-40\sqrt[3]{6}-6\sqrt[3]{36}}{1-3\sqrt[3]{6}-\sqrt[3]{36}} \in \mathbb{Q}(x) \simeq Q[x]/(x^3-6)$$

$\frac{9-40\sqrt[3]{6}-6\sqrt[3]{36}}{1-3\sqrt[3]{6}-\sqrt[3]{36}} = a_0+a_1x+a_2x^2 \to 9-40\sqrt[3]{6}-6\sqrt[3]{36} = (1-3\sqrt[3]{6}-\sqrt[3]{36})\cdot(a_0+a_1x+a_2x^2)$

Понижение степени $x^3=6, x^4=3x$

$$\begin{cases} 9 = a_0-6a_2-18a_1 \\ -40 = a_1-a_0-18a_2 \\ -6 = a_2-a_2-3a_2 \end{cases} \to \begin{cases} a_0 = 3, \\ a_1 = -1, \\ a_2 = 2 \end{cases}$$

$$\frac{9-40\sqrt[3]{6}-6\sqrt[3]{36}}{1-3\sqrt[3]{6}-\sqrt[3]{36}} = 3-x+x^2$$

2

$$a=\sqrt{7}-\sqrt{3}-1 \to (a-1)^2 = 10-2\sqrt{21} \to (a^2+2a-9)^2 = 84 \to$$
$$x^4+4x^3-14x^2-36x-3 - \text{ минимальный многочлен для } a$$

Теперь покажем, что $[\mathbb{Q}(\sqrt{7})(\sqrt{3})\colon \mathbb{Q}] = 4$

$$[\mathbb{Q}(\sqrt{7})\colon Q] = 2, min_{\text{многочлен}} = x^2-7$$
$$[\mathbb{Q}(\sqrt{3})\colon Q(\sqrt{7})] = 2$$

Пусть $\sqrt{3}\in\mathbb{Q}(\sqrt{7}) \to \sqrt{3} = a+b\sqrt{7} \to 7 = a^2+7b^2+2\sqrt{7}ab \to \begin{cases} 7 = a^2+7b^2 \\ 0 = 2\sqrt{7}ab \end{cases} \to$
$a=0$ или $b=0$ - Противоречие.

$$[\mathbb{Q}(\sqrt{7})(\sqrt{3})\colon \mathbb{Q}] = 2\cdot 2 = 4, \text{ базис } \mathbb{Q}(\sqrt{7})(\sqrt{3}) = \{1,\sqrt{3},\sqrt{7},\sqrt{21}\}$$

3

x^3+x+1 - неприводимый многочлен степени 3 над полем $\mathbb{Z}_2$. $|\mathbb{Z}_2/(x^3+x+1)| = 2^3 = 8$

$\mathbb{Z}_2/(x^3+x+1) = F_8 = \{0,1,x,x+1,x^2,x^2+1,x^2+x,x^2+x+1,x^2+x\} = \{0,1,\alpha,\alpha^2,\alpha^3,\alpha^4,\alpha^5,\alpha^6,\alpha^7,\}$, где α корень многочлена x^3+x+1

$$\alpha^3 = \alpha+1, \alpha^4 = \alpha^2+\alpha, \alpha^5 = \alpha^2+\alpha+1, \alpha^6 = \alpha^2+1, \alpha^7 = 1$$

Сложение идет по модулю 2.

$\times$	0	1	α	α^2	α^3	α^4	α^5	α^6
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	α	α^2	α^3	α^4	α^5	α^6
α	0	α	α^2	α^3	α^4	α^5	α^6	1
α^2	0	α^2	α^3	α^4	α^5	α^6	1	α
α^3	0	α^3	α^4	α^5	α^6	1	α	α^2
α^4	0	α^4	α^5	α^6	1	α	α^2	α^3
α^5	0	α^5	α^6	1	α	α^2	α^3	α^4
α^6	0	α^6	1	α	α^2	α^3	α^4	α^5

Таблица 1: Таблица умножения в поле F_8

4

Поле $K[\alpha] \subseteq K(\alpha)$ по определению.
Надо доказать включение в обратную сторону.

$K[\alpha] -$ конечно, значит можно рассматривать его как векторное пространство над K

Теперь рассмотрим минимальнй многочлен $p(x)$ для α.
Он неприводим над K, его степень равна степени расширения $[K[\alpha] : K]$.
Теперь рассмотрим элемент из $K(\alpha)$. Любой его элемент может быть представлен в виде $\frac{g(\alpha)}{h(\alpha)}$. Но в тоже время $\frac{g(\alpha)}{h(\alpha)} \in K[\alpha] \rightarrow \frac{g(\alpha)}{h(\alpha)} = \gamma_0 + \gamma_1 \cdot \alpha + \cdots + \gamma_n \cdot a^n$ (т.к для всех степеней, начиная с n будет формула понижения степени). $\rightarrow K(\alpha) \subseteq K[\alpha] \rightarrow K(\alpha) = K[\alpha]$