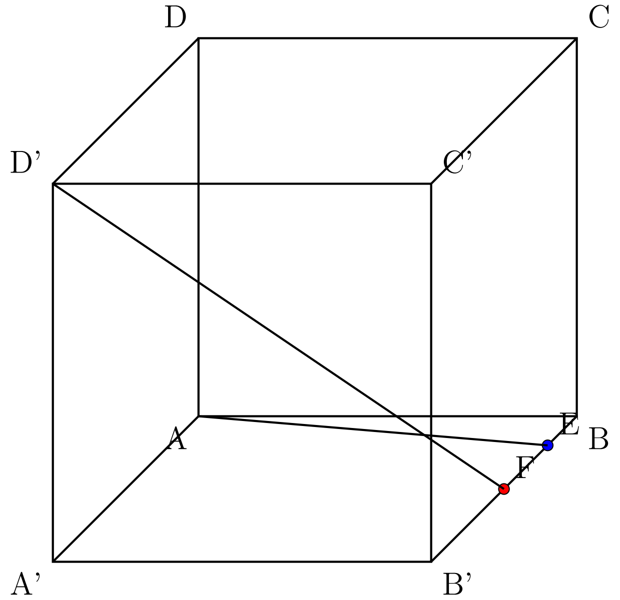
1

Сначала найдем вектор нормали плоскости : $4x - 3y + 3z = -3$, $n = (4, -3, 3)$
Теперь найдем вектор, перпендикулярный к вектору нормали : $d_x = 1, d_y = 1, d_z = \frac{1}{3}$
Теперь направляющий вектор для искомой прямой будет равен :

$$v = (-4.5 + 5, -8.75 + 13, -3.75 + 3) = (0.5, 4.25, -0.75)$$

$$\begin{cases} x = -5 + 0.5t \\ y = -13 + 4.25t \\ z = -3 - 0.75t \end{cases} \quad \text{- искомая прямая}$$

2



$$BE : EB' = 1 : 4$$

a)

Пусть точка A имеет координаты $(0, 0, 0)$, $B = (10, 0, 0), C = (10, 10, 0), D = (0, 10, 0)$
A' имеет координаты $(0, 0, 10)$, $B' = (10, 0, 10), C' = (10, 10, 10), D' = (0, 10, 10)$

$$\overrightarrow{AE} = (10, 0, 2)$$

$$\overrightarrow{D'E} = (10, -10, -5)$$

$$\cos\varphi = \frac{(\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{D'E})}{|AE| \cdot |D'F|} = \frac{6}{\sqrt{104}}$$

$$\varphi = \arccos\frac{6}{\sqrt{104}}$$

b)

Искомое расстояние - расстояние между скрещивающимися прямыми, которое можно найти по формулу

$$\rho(AE, D'F) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

, где $ax+by+cz+d=0$ - уравнение плоскости, параллельной первой прямой и в которой лежит вторая прямая. $(x_0, y_0, z_0)-$ - точка на первой прямой
Найдем эту плоскость.

$$\alpha\colon 10x + 2z = d$$

В точке D'

$$10 \cdot 0 + 2 \cdot 10 = d = 20$$

$$\alpha\colon 10x + 2z = 20-$$

$A = (0,0,0)-$ точка на первой прямой.

$$\rho(AE, D'F) = \frac{10}{\sqrt{26}}$$

3)

$$A = \begin{pmatrix} -7 & -11 & -7 \\ 3 & 7 & 1 \\ 3 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{X}_A(\lambda) = \lambda^3 + 5\lambda^2 - 2\lambda - 8 = -(\lambda-4)(\lambda-2)(\lambda+1)$$

$$\begin{cases} \lambda_1 = -1 \\ \lambda_2 = 4 \\ \lambda_3 = 2 \end{cases} - \text{ собственные числа}$$

Теперь найдем собственные векторы, решив ОСЛУ для каждого собсвенного числа.

$$\lambda_1\colon \begin{pmatrix} -6 & -11 & -7 \\ 3 & 8 & 1 \\ 3 & 3 & 6 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, v_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2\colon \begin{pmatrix} -11 & -11 & -7 \\ 3 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_3\colon \begin{pmatrix} -6 & -11 & -7 \\ 3 & 8 & 1 \\ 3 & 3 & 6 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Каждый из собственных векторо ЛНЗ и встречается ровно один раз. Поэтому размерность каждого из собственныч подпространств имеет размерность один. Оператор φ диагонализируем.

$diag = C^{-1}AC = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ $-$где C - матрица перехода между исходным базисом и базисом,

составленным из собственных векторов.

b)

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -8 & 10 & 4 \\ 12 & -10 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{X}_A(\lambda) = -\lambda^3 + 12\lambda^2 - 60\lambda - 80 =$$

$$\lambda_1 = 2\left(2 - \frac{1}{\sqrt[3]{\sqrt{145} - 12}} + \sqrt[3]{\sqrt{145} - 12}\right)$$

Линейный оператор не диагонализируем.

4

$$Q(x) = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

Выполним аналогичные действия и найдем собственные числа и вектора

$$\lambda_1 = -4, \lambda_3 = 2$$

$$v_1 = (-1, 0, -1), v_2 = (-2, 1, 0), v_3 = (1, 2, 1)$$

$$Q(x) = -4x_1^2 - 4x_2^2 + 2x_3^2 \text{ - канонический вид}$$

$$\text{Ортогональное преобразование -: } \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{2}{\sqrt{3}} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

5

Найдем собственные значения и вектора для этого оператора.

$$\lambda_1 = 1, v_1 = (1, 1, 5)$$