# 1

$$x^2 \equiv 2 \pmod{143}$$

Чтобы это сравнение было разрешимо, необходимо и достаточно, чтобы символ Якоби $\left(\frac{2}{143}\right) = 1$

$$\left(\frac{2}{143}\right) = \left(\frac{2}{13}\right) \cdot \left(\frac{2}{11}\right) = (-1)^{168/8} \cdot (-1)^{120/8} = 1$$

**Ответ:** Сравнение разрешимо.

# 2

Мы знаем, что:

$$\sum_{n=1}^{1000} \left(\frac{2n-1}{1001}\right) = 0$$

И еще мы знаем, что ровно половина чисел якоби равна $-1$. И поэтому

$$\sum_{n=1}^{500} \left(\frac{2n-1}{1001}\right) = 0$$

**Ответ :** $\sum\limits_{n=1}^{500} \left(\frac{2n-1}{1001}\right) = 0$

# 3

Числа $2, 3, 6, 7, 8$ -ПК по модулю 11
Числа $4, 5, 9, 10$

$$4^5 \equiv 1 \pmod{11}$$
$$5^5 \equiv 1 \pmod{11}$$
$$9^5 \equiv 1 \pmod{11}$$
$$10^2 \equiv 1 \pmod{11}$$

**Ответ:** $2, 3, 6, 7, 8$

# 4

$g$ - ПК по модую m. Пусть $g \equiv x^2 \pmod{m}$
Тогда рассмотрим $g^{\frac{\varphi(m)}{2}}$

$$g^{\frac{\varphi(m)}{2}} \equiv (x^2)^{\varphi(m)/2} \equiv x^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod{m} \text{Теорема Эйлера}$$

Противоречие, так как $g$ - первообразный корень ■

# 5

Пусть $g$ - ПК $\pmod{p}$, где $p$ простое

$$(p-1)! = \overbrace{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (p-1)}^{\text{полная система вычетво}} \equiv \overbrace{g^1 \cdot g^2 \cdot \dots \cdot g^{(p-1)}}^{\text{тоже полная система вычетво}} \equiv g^{\frac{(p-1)(p-2)}{2}} \cdot \equiv 1^{(p-2)/2} \equiv 1 \mod p \quad ■$$