1

$$Q(x_1,x_2,x_3,x_4)=25x_1^2+3x_2^2-9x_3^2-20x_1x_2-30x_1x_3+6x_2x_3$$

Запишем матрицу соотвествующей биленейную форму и приведем ее к диагональному виду с помощью симметричного Гаусса.

$$\begin{pmatrix}-25 & -10 & -15 \\ -10 & 3 & 3 \\ -15 & 3 & -9\end{pmatrix} \overset{\hat{\mathfrak{s}}_1(2,1,+1),}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc}25 & 15 & -15 & 1 & 0 & 0 \\ 15 & 8 & -12 & 1 & 1 & 0 \\ 15 & -12 & -9 & 0 & 0 & 1\end{array}\right) \overset{\hat{\mathfrak{s}}_1(3,2,+1),}{\rightsquigarrow}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}25 & 15 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 15 & 8 & -4 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -2 & 1 & 1 & 1\end{array}\right) \overset{\hat{\mathfrak{s}}_1(2,1,-3/5),}{\rightsquigarrow}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}25 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2/5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 1 & 1 & 1\end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & 1/25 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2/5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/9 & 1/9 & 1/9\end{array}\right)$$

Матрица, записанная справа, это матрица перехода, только траспонированная.

$$C=\begin{pmatrix}1/25 & 2/5 & 1/9 \\ 0 & 1 & 1/9 \\ 0 & 0 & 1/9\end{pmatrix}$$

2

Запишем матрицу билинейной формы

$$Q(x)=-3x_1^2+(-b-8)x_2^2+(-9b+8)x_3^2+8x_1x_2+2x_1x_3+2(3b-3)x_2x_3$$

$$\begin{pmatrix}-3 & 4 & 1 \\ 4 & -b-8 & 3b-3 \\ 1 & 3b-3 & -9b-8\end{pmatrix}$$

Посчитаем все угловые миноры:
1) $\delta_1=-3$
2) $\delta_2=3(-b-8)-16=3b+8$
3) $\delta_3=-3(b+8)(9b+8)+4(3b-3)+4(3b-3)+(3b-3)^2(-3)+(9b+8)16=-125b-53$
Теперь мы можем выписать нормальный вид, в зависимости от параметра b
$b=-\frac{8}{3}$: $-x_1^2-x_3^2$
$b=-\frac{53}{125}:-x_1^2+x_2^2$
$-\frac{8}{3}<b<-\frac{53}{125}:-x_1^2-x_2^2-x_3^2$ $b=-\frac{8}{3}$: $-x_1^2-x_3^2$
$b>-\frac{53}{125}:-x_1^2+x_2^2+x_3^2$
$b<-\frac{8}{3}:-x_1^2-x_2^2-x_3^2$

3

a)

$$Q(f)=\int\limits_0^2 f^2(x)\mathrm{d\underset{.}{x}}-\int\limits_1^3 f^2(x)\mathrm{d\underset{.}{x}}$$

Посчитаем значение функции на векторе $v = a + bx + cx^2 + dx^3$

$$Q(v) = \int\limits_0^2 v^2 \mathrm{d}x - \int\limits_1^3 v^2 \mathrm{d}x = -4ab - 12ac - 32ad - 6b^2 - 32bc - 84bd - 42c^2 - \frac{664}{3}cd - 294d^2$$

Получился однородный многочлен степени 2, а значит функция является квадратичной формой.

4

Чтобы билинейная форма задавала скалярное произведение, небходимо, чтобы матрица это формы была симметрична и положительно определена. Запишем матрицу этой билинейной формы.

$$\begin{pmatrix} -4b+13 & -2b+6 & -a+2.5 \\ -2b+6 & 2 & -2b+4 \\ -2b+5 & -2b+4 & 3 \end{pmatrix}$$

Чтобы матрица была симметрична, необходимо $-a + 2.5 = -2b + 5 \to a = 2b - 2.5$
Чтобы матрица была положительно определенной, необходимо, чтобы каждый угловой минор не меньше нуля

$$\begin{cases} \delta_1 = -4b + 13 \geqslant 0 \\ \delta_2 = -4b^2 + 16b - 10 \geqslant 0 \\ \delta_3 = 192b^3 - 732b^2 + 336b + 82 \geqslant 0 \end{cases}$$

$\delta_3 = (-4b+13)(2)(3) + (-2b+6)(-2b+4)(-2b+6) + (-2b+5)(-2b+6)(-2b+4) - 2(-2b+5)^2 - (-2b+4)^2(-4b+13)3(-2b+6)^2$

$$\begin{cases} \delta_1 = -4b + 13 \geqslant 0 \\ \delta_2 = -4b^2 + 16b - 10 \geqslant 0 \\ \delta_3 = 192b^3 - 732b^2 + 336b + 82 \geqslant 0 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} b \in \left[\frac{4-\sqrt{6}}{2}, \frac{4+\sqrt{6}}{2}\right] = I \\ 192b^3 - 732b^2 + 336b + 82 \geqslant 0 \end{cases} \to$$

$$b \in \left[\frac{63+\sqrt{2377}}{48}, \frac{4+\sqrt{6}}{2}\right]$$

Значение $192b^3 - 732b^2 + 336b + 82$ на концах интревала I равно -8. в этом интревале есть точка перегиба, то есть функция сначала убывала, потом возрастала или наоборот. Точка перегиба в точке $\frac{61}{48}$.Локальные эксремумы в точках $\frac{61-\sqrt{2377}}{48}$, $\frac{61+\sqrt{2377}}{48}$

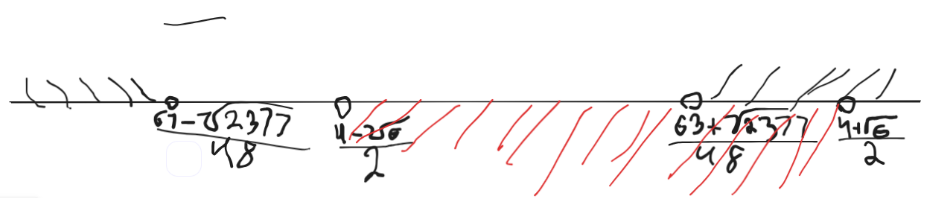

Рис. 1: Пересечение отрезков

5)

Заметим, что каждый минор неотрицателен и матрица симметрична, значит матрица является матрицей Грама какой-нибудь системы векторов.
Запишем матрицу и приведем ее к диагональнмоу виду, с помощью симметричного Гаусса, но слева запишем единчнкую матрицу, чтобы сохранить все преобразования.

$$\begin{pmatrix} 17 & 12 & -87 \\ 12 & 18 & -90 \\ -87 & -90 & 531 \end{pmatrix} \overset{\hat{э}_1(2,1,-\frac{12}{17}),\hat{э}_1(3,1,\frac{87}{17})}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 17 & 0 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 162/17 & -486/17 & | & -12/17 & 1 & 0 \\ 0 & -486/17 & 1458/17 & | & 87/17 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{\hat{э}_1(3,2,3,}{\rightsquigarrow}$$

$$\begin{pmatrix} 17 & 0 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 162/17 & 0 & | & -12/17 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Получившияся матрица тоже неотрицательна определена и симметрична, значит она тоже матрица Грама.

$$D = diag(17, \frac{162}{17}, 0), C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{12}{17} & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}, C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{12}{17} & 1 & 0 \\ -\frac{-87}{17} & -3 & 1 \end{pmatrix} = B$$

$$\sqrt{D}B = \begin{pmatrix} \sqrt{17} & 0 & 0 \\ \frac{108\sqrt{34}}{289} & \frac{9\sqrt{34}}{17} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

В столбцах искомой матрицы записаны искомые векторы.