# 1

$$\begin{pmatrix} -2 & 6 & 15 & 17 & -17 \\ -10 & -25 & -13 & -34 & 23 \\ 6 & -7 & -31 & -38 & 33 \\ 13 & 16 & -11 & 4 & 4 \\ -21 & -36 & 3 & -24 & 12 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{УСВ}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{67}{11} & -\frac{1}{11} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{29}{11} & -\frac{4}{11} \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$a_{(5)} = -\frac{1}{11}a_{(1)} - \frac{4}{11}a_{(2)} - a_{(3)}$$

$$a_{(4)} = \frac{67}{11}a_{(1)} - \frac{29}{11}a_{(2)} - 3a_{(3)}$$

$$A = \left(a_{(1)}| \quad 0| \quad 0|\frac{67}{11}a_{(1)}| - \frac{1}{11}a_{(1)}\right) + \left(0| \quad a_2| \quad 0| \quad -\frac{29}{11}a_{(2)}| - \frac{4}{11}a_{(2)}\right) + \left(0| \quad 0| \quad a_{(3)}|3a_{(3)}| \quad -a_{(3)}\right)$$

# 2

## а)

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 \\ -2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{УСВ}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} -3 & -5 & 3 \\ 7 & 9 & 5 \\ 5 & 3 & 11 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{УСВ}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Эти вектора базисы в $\mathbb{R}^3$

## б)

$$A \cdot C = B, \text{ где } C \text{ - матрица перехода.}$$

$$C = A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} \frac{15}{8} & \frac{1}{8} & \frac{49}{8} \\ \frac{9}{2} & \frac{7}{2} & \frac{15}{2} \\ -\frac{11}{8} & -\frac{5}{8} & -\frac{21}{8} \end{pmatrix}$$

## в)

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} = C \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \leftrightarrow C^{-1} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{91}{4} \\ \frac{73}{4} \\ \frac{75}{2} \end{pmatrix}$$

# 3

Среди векторов $a_1 - a_4$ найдем ЛНЗ. Они будут базисом в $L_1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 & -3 \\ -4 & -20 & 4 & -4 \\ -2 & 5 & -3 & 2 \\ 2 & -2 & 2 & -2 \\ -1 & 4 & -2 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{СВ}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Вектора $a_1, a_2, a_4$ - ЛНЗ и размер $\dim L_1 = 3$
Аналогично для $L_2$

$$\begin{pmatrix} 3 & -7 & -9 & -3 \\ -12 & -4 & 23 & -1 \\ -1 & 6 & -3 & -5 \\ 2 & -6 & -8 & -4 \\ 0 & -3 & 4 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{СВ}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Вектора $b_1, b_2, b_3$ - ЛНЗ и размер $\dim L_2 = 3$
Найдем базис суммы подпространств.

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & -3 & 3 & -7 & -9 \\ -4 & -20 & -4 & -12 & -4 & 23 \\ -2 & 5 & 2 & -1 & 6 & -3 \\ 2 & -2 & -2 & 2 & -6 & -8 \\ -1 & 4 & -2 & 0 & -3 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{СВ}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to$$

вектора$a_1, a_2, a_4, b_3$ образуют базис в сумме подпространств. Его размрность 4 .

Найдем базис и размерность пересечения.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Найдем ФСР

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_4 & b_1 & b_2 \\ -4 & -\frac{1}{3} & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Запишем получившиеся векторы в фундаментальную матрицу

$$\begin{pmatrix} -4 & 1 \\ -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & -2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & -3 \\ -4 & -20 & -4 \\ -2 & 5 & 2 \\ 2 & -2 & -2 \\ -1 & 4 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{17}{3} & 7 \\ \frac{68}{3} & 4 \\ \frac{19}{3} & -6 \\ -\frac{22}{3} & 6 \\ \frac{8}{3} & 3 \end{pmatrix}$$

Первый и второй столбец матрицы - базис в $L_1 \cap L_2, \dim L_1 \cap L_2 = 2$