1

$$f(x) = \frac{3x-7}{(x^2-1)^2}$$

$$f^{'}(x) = \frac{-(9x-1)(x-3)}{(x^2-1)^3}$$

$$\text{Точки } -\frac{1}{9}, 3, -1, 1 - \text{точки экстремума}$$

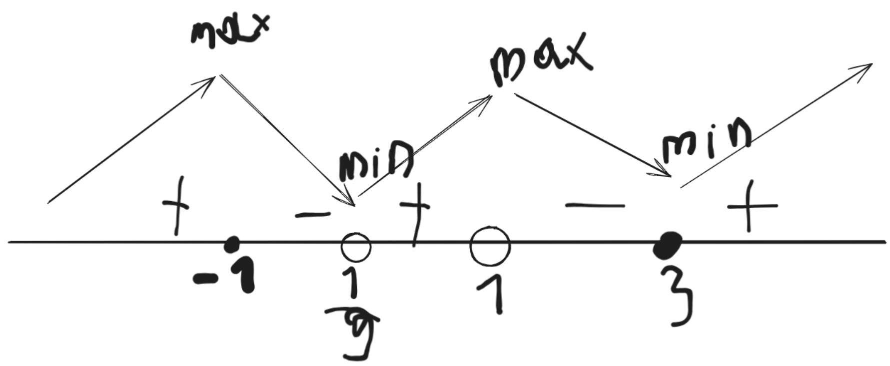

Рис. 1: Точки экстремумов

$$f(\frac{1}{9}) = -\frac{2187}{320}$$

$$f(3) = \frac{5}{16}$$

3 - точка глобального максимума. Глобального максимума нет.

2)

$$f(x) = \begin{cases} x^{x \ln x}, x > 0 \\ 1, x = 0 \end{cases}$$

$(x^{x \ln x})' = (e^{x \ln^2 x})' = x^{x \ln x} \cdot (2 \ln x + \ln^2 x)$
$f^{'}(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0+h-f(0))}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h^{h \ln h} - 1}{h} \nexists$

$$f^{'}(x) = \left\{ (x^{x \ln x})' = (e^{x \ln^2 x})' = x^{x \ln x} \cdot (2 \ln x + \ln^2 x), \quad x > 0 \right.$$

$$x^{x \ln x} \cdot (2 \ln x + \ln^2 x) = 0$$

$$x = 1 || x = \frac{1}{e^2}$$

$$f(1) = 1$$

1 и 0 точки глобальных минимумов

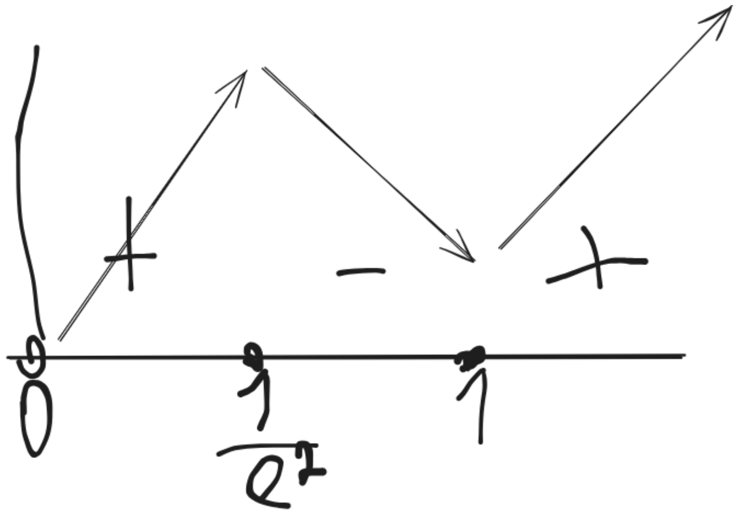

Рис. 2: Точки экстремумов

2

$$f(x) = \begin{cases} \sin x, x \geqslant 0 \\ x^2, x < 0 \end{cases}$$

$$f^{'}(x) = \begin{cases} \cos x, x \geqslant 0 \\ 2x, x < 0 \end{cases}$$

$\cos x = 0 \iff x = \frac{\pi}{2} + \pi n$ - точки экстремум. Чтобы узнать, когда функция выпуклая возьмем вторую производную и узнаем знаки функции в точках экстремум.

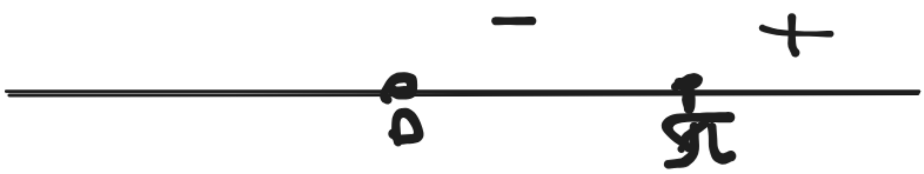

Рис. 3:

на интервалах вида $(2n\pi; (2n+1)\pi)$ функция выпукла

на интервалах вида $((2n+1)\pi; 2n\pi)$ функция вогнута

3

a)

$$1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} < \sqrt{1+x} < 1 + \frac{x^2}{2}$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + R_n(x)$$

$$1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} < 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + R_n(x) < 1 + \frac{x^2}{2}$$

$$\begin{cases} 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} < 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + R_n(x) \\ \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + R_n(x) < \frac{x^2}{2} \end{cases}$$

Очевидно, что эти неравенства выполняются при любом положительном x

b)

$$\frac{b-a}{b} < \ln\frac{b}{a} < \frac{b-a}{a}, 0 < a < b$$

4

a)

$$\text{Рассмотрим функцию} f(t) = t^t - \text{ она выпуклая.}$$

$$\pi^\pi = f\left(\frac{x+y+z}{3}\right) < \frac{f(x)+f(y)+f(z)}{3}$$

$$108 < 3\pi^\pi < x^x + y^y + z^z$$

b)

$$\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{x_1 \ldots x_n}$$

$$\ln\left(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}\right) \geqslant \frac{1}{n}\ln x_1 + \cdots + \frac{1}{n}\ln x_n$$

$$-\ln\left(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}\right) \leqslant -\frac{1}{n}\ln x_1 + \cdots + -\frac{1}{n}\ln x_n$$

Так как -lnx функция выпуклая, то для нее выполняется неравенство Йенсена

5

$$\sin\left(\frac{A+B+C}{3}\right) \leqslant \frac{\sin A + \sin B + \sin C}{3}$$

$$3\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \leqslant \sin A + \sin B + \sin C$$

$$\text{Равенство достигается. когда } A = B = C = \frac{pi}{3}$$

$$\sin A + \sin B + \sin C = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$