1)

Найдем координаты $1-3x+3x^2$ в заданном базисе. Для этого нам надо решить СЛУ:

$$1-3x+3x^2 = \alpha_1(-2+4x-x^2)+\alpha_2(1-3x+2x^2)+\alpha_3(-2+2x+3x^2)$$
$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & -3 & 1 \\ 4 & -3 & 2 & -3 \\ -1 & 2 & 3 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Теперь найдем $\varphi(1-3x+3x^2)$

$$\varphi(1-3x+3x^2) = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 3 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \cdot (-2,-1,1)^T = (-6,5)^T$$

Найдем координаты полученного вектора в данном нам базисе.

$$(-6,5) = a_1 \cdot (3,2) + a_2 \cdot (-2,-1) \to a_1 = 16, a_2 = 27$$

2)

а)

Запишем векторы a в столбцы матрицы и приведем ее к УСВ.

$$\begin{pmatrix} -2 & -3 & -3 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & 4 & -1 & -3 \\ 1 & -1 & -3 & -4 & 2 \\ 4 & -1 & -4 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 5 & 4 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Следовательно, вектора $a_1 - a_5$ ЛНЗ и их 5, они являются базисами в$\mathbb{R}^5$. Так какЛО однозначно

б)

Запишем матрицу линейного отображения.

$$\begin{pmatrix} 36 & -73 & -139 & 6 & 84 \\ -20 & 43 & 82 & 1 & -49 \\ -36 & 73 & 139 & -6 & -84 \end{pmatrix}$$

Составим для этой матрицы ФСР и найдем ЛНЗ столбцы. ФСР будет образовывать базис ядра, а столбцы - образ.

$$\begin{pmatrix} 36 & -73 & -139 & 6 & 84 \\ -20 & 43 & 82 & 1 & -49 \\ -36 & 73 & 139 & -6 & -84 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{9}{88} & \frac{331}{88} & \frac{35}{88} \\ 0 & 1 & \frac{43}{22} & \frac{39}{22} & -\frac{21}{22} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$A_1 = \begin{pmatrix} 36 \\ -20 \\ -36 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} -73 \\ 43 \\ 73 \end{pmatrix}$ базис в $Im\varphi$

$\begin{pmatrix} -\frac{9}{88} \\ -\frac{43}{22} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{33}{88} \\ \frac{39}{22} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{35}{88} \\ -\frac{21}{22} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ базис в $\ker\varphi$

4

Найдем базис ядра и дополним его до базиса всего пространсва $\mathbb{R}^5$

$$\begin{pmatrix} 62 & 18 & -1 & 44 & 2 \\ 34 & 18 & -4 & 28 & 0 \\ -51 & 4 & -7 & -27 & -4 \\ -52 & -10 & -1 & -34 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{17}{41} & -\frac{2}{41} \\ 0 & 1 & 1 & \frac{45}{41} & \frac{14}{41} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{60}{41} & \frac{46}{41} \end{pmatrix}$$

$$\text{ФСР:} a_1 = \begin{pmatrix} -\frac{17}{41} \\ -\frac{45}{41} \\ -\frac{60}{41} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} \frac{2}{41} \\ -\frac{14}{41} \\ \frac{46}{41} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Вектора e_3, e_4, e_5 дополняют базис ядра до базиса всего пространтсва.

$$\begin{pmatrix} -\frac{17}{41} & \frac{2}{41} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{45}{41} & -\frac{14}{41} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{60}{41} & \frac{46}{41} & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Вектора a_1, a_2, e_3, e_4, e_5 - искомый базис для пространтсва $\mathbb{R}^5$ Теперь найдем $\varphi(e_3), \varphi(e_4), \varphi(e_5)$ И дополним эти вектора до базиса $\mathbb{R}^4$

$$\varphi(e_3) = A \cdot e_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ -7 \\ -1 \end{pmatrix} \varphi(e_4) = \begin{pmatrix} 44 \\ 28 \\ -27 \\ -34 \end{pmatrix} \varphi(e_5) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Вектор $(0, 0, 0, 1)^T$ дополняте эти векторы до базиса всего пространства.

$$\begin{pmatrix} -1 & 44 & 2 & 0 \\ -4 & 28 & 0 & 0 \\ -7 & -27 & -4 & 0 \\ -1 & -34 & -2 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Эти вектора и образуют искомый базис.

$$C_1 = \begin{pmatrix} -1 & 44 & 2 & 0 \\ -4 & 28 & 0 & 0 \\ -7 & -27 & -4 & 0 \\ -1 & -34 & -2 & 1 \end{pmatrix}, C_2 = \begin{pmatrix} -\frac{17}{41} & \frac{2}{41} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{45}{41} & -\frac{14}{41} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{60}{41} & \frac{46}{41} & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Диагональный вид матрицы:

$$D = \begin{pmatrix} \frac{120}{41} & \frac{92}{41} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A = C_1 \cdot D \cdot C_2^{-1}$$