

Задание 1

$$m \circ n = 2mn + \begin{matrix} \in \mathbb{Q} \setminus \{0\} \\ \backslash \end{matrix} \begin{matrix} \in \mathbb{Q} \\ \{0\} \end{matrix} 2m + \begin{matrix} \in \mathbb{Q} \setminus \{0\} \\ n \end{matrix} + 1$$

Значит \circ задает бинарную операцию на $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$

Проверим выполнение свойств группы

$$(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \circ)$$

1. Ассоциативность

$$a \circ (b \circ c) = a \circ (2bc + 2c + 2b + 1) = 2a(2bc + 2b + 2c + 1) + 2a + 2(2bc + 2b + 2c + 1) + 1$$

$$(a \circ b) \circ c = (2ab + 2a + 2b + 1) \circ c = 2c(2ab + 2a + 2b + 1) + 2c + 2(2ab + 2a + 2b + 1) + 1$$

После раскрытия скобок и приведения подобных слагаемых будет видно, что выражения совпадают.

2. Нейтральный элемент

$$a \circ e = e \circ a = a$$

$$a \circ e = 2ae + 2a + 2e + 1 = a$$

$$e = \frac{-1 - a}{2(a + 1)} = -\frac{1}{2}$$

3. Обратный элемент

$$a \circ b = b \circ a = -\frac{1}{2}$$

$$2ab + 2a + 2b + 1 = -\frac{1}{2}$$

$$b = -\frac{3 + 4a}{4a + 4} \blacksquare$$

Задание 2

$$m \circ n = 2mn + \begin{matrix} >2 \\ 2mn \end{matrix} + \begin{matrix} >-2 \\ 2n \end{matrix} + \begin{matrix} >-2 \\ 2m \end{matrix} + 1 > -1 \in H_a \forall a \geq -1$$

$$-\frac{1}{2} > -1 \forall a, \quad e \in H_a$$

Задание 3

Порядок элемента 1 равен 1

Порядок элемента 2 равен 18

Порядок элемента 3 равен 18

Порядок элемента 4 равен 9

Порядок элемента 5 равен 9

Порядок элемента 6 равен 9

Порядок элемента 7 равен 3

Порядок элемента 8 равен 6
 Порядок элемента 9 равен 9
 Порядок элемента 10 равен 18
 Порядок элемента 11 равен 3
 Порядок элемента 12 равен 6
 Порядок элемента 13 равен 18
 Порядок элемента 14 равен 18
 Порядок элемента 15 равен 18
 Порядок элемента 16 равен 9
 Порядок элемента 17 равен 9
 Порядок элемента 18 равен 2
 Обратный элемент к элементу 1 равен 1
 Обратный элемент к элементу 2 равен 10
 Обратный элемент к элементу 3 равен 13
 Обратный элемент к элементу 4 равен 5
 Обратный элемент к элементу 5 равен 4
 Обратный элемент к элементу 6 равен 16
 Обратный элемент к элементу 7 равен 11
 Обратный элемент к элементу 8 равен 12
 Обратный элемент к элементу 9 равен 17
 Обратный элемент к элементу 10 равен 2
 Обратный элемент к элементу 11 равен 7
 Обратный элемент к элементу 12 равен 8
 Обратный элемент к элементу 13 равен 3
 Обратный элемент к элементу 14 равен 15
 Обратный элемент к элементу 15 равен 14
 Обратный элемент к элементу 16 равен 6
 Обратный элемент к элементу 17 равен 9
 Обратный элемент к элементу 18 равен 18

Задание 4

Рассмотрим $a^n \in H$, где n — минимальное из возможных

Рассмотрим теперь $a^m \neq a^n$

$$a^m = a^{qn+r}$$

$a^{-qn} \cdot a^m = a^r \in H$. Если r не ноль, то мы нашли $r < n$, что противоречит минимальности последнего. Значит, что каждый элемент H представляется, как степень a^m