1

1)

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \text{ - матрица обратима, если она не вырожденная}$$

$$ac \neq 0 \to a, c \neq 0$$

2)Теперь рассмотрим произведение матриц

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax & ay + bz \\ 0 & cz \end{pmatrix} = 0$$

Если $a, c, z = 0$, то матрица нулевая и матрица слева - левый делитель, матрица справа - правый делитель
Аналогично рассматривается случай

$$\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$$

3)

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}^n = 0 \text{ при } a, c = 0, n \geq 2$$

2

Пусть $(x, y-1)$ - главный идеал, т.е $(x, y-1) = (f), f \in \mathbb{Q}(x, y)$
Значит, каждый элемент идеала имеет вид $f \cdot g, g \in \mathbb{Q}(x, y)$
Рассмотрим многочлен из идеала $a = f \cdot g$ в точке (x,1). Получился многочлен от одной переменной из $\mathbb{Q}(x)$.
Т.к $a(x, 1)$ неприводим, то $g = \text{const}$ или $f = \text{const}$. Иначе произведение будет зависеть не только от x, что приводит к противоречию

3

Рассмотрим отображение $\varphi(f) = (f(\sqrt{3}), f(-\sqrt{3}))$. Докажем, что это гомоморфизм.

$$\varphi(f+g) = ((f+g)(\sqrt{3}), (f+g)(-\sqrt{3})) = (f(\sqrt{3}) + g(\sqrt{3}), f(-\sqrt{3}) + g(-\sqrt{3})) =$$
$$(f(\sqrt{3}), f(-\sqrt{3})) + (g(\sqrt{3}), g(-\sqrt{3})) = \varphi(f) + \varphi(g)$$
$$\varphi(f \cdot g) = ((f \cdot g)(\sqrt{3}), (f \cdot g)(-\sqrt{3})) = (f(\sqrt{3}) \cdot g(\sqrt{3}), f(-\sqrt{3}) \cdot g(-\sqrt{3})) =$$
$$(f(\sqrt{3}), f(-\sqrt{3})) \cdot (g(\sqrt{3}), g(-\sqrt{3})) = \varphi(f) \cdot \varphi(g)$$
$$\ker \varphi = (x^2 + 3x) \cdot p(x)$$
$$\mathrm{Im} = \mathbb{C} \otimes \mathbb{C}(\text{ все остальные многочлены. })$$
$$\mathbb{C}(x) \backslash (x^2 + 3x) \simeq \mathbb{C} \otimes \mathbb{C}$$

4

Пусть I - идеал, удоволетворяющим всем свойствам из условия. Тогда рассмотрим элемент $r + I \in R\backslash I, r \notin I$
Рассмотрим главный идеал rR .
Т Множество $\{ra + x \colon a \in R, x \in I\}$ будет идеалом и оно содержит I. Но т.к $\nexists J \subseteq I \to J = R$
Единица может представлена в виде $ra + x, a \in R, x \in I$ ТАким образом класс элемента a обратен классу элемента r в кольце $R\backslash I \to$ - это поле
Пусть теперь $R\backslash I$ - поле и $\exists J \lhd R, J \subseteq I$. Тогда идеал $(r, I) \subseteq J, r \in J\backslash I$. Единица не лежит в этом идеале, а значит класс элемента r необратим в фактор-кольце. Противоречие