1

a)

$$2x^4 - x^3 - 2x^2 - 2x - 12$$
$$x^5 + x^4 + x^2 - 4x - 2$$
$$f = g \cdot (\frac{1}{2}x + \frac{3}{4}) + \frac{7}{4}x^3 + \frac{7}{2}x^2 + \frac{7}{2}x + 7 = r_1$$
$$g = r_1 \cdot (\frac{8}{7}x - \frac{20}{7}) + (4x^2 + 8)$$
$$r_1 = (4x^2 + 8)(\frac{7}{16}x + \frac{7}{8})$$

НОД $= 4x^2 + 8$

$4x^2+8 = g-(f-g(1/2x+3/4))\cdot(8/7x-20/7) = f(-8/7x+20/7)+g(1+(1/2x+3/4)(8/7x-20/7))$

b)

$$f = x^5 + 2x^3 - x^2 - 4x - 2, g = x^4 + x^3 - x^2 - 2x - 2$$
$$f = g \cdot (5x + 2) + (2x^3 + x^2 + 2x + 1)$$
$$g = r_1(2x^3 + x^2 + 2x + 1) + (5x^2 + 3x + 2)$$
$$r_1 = (6x + 5)r_2 + 3x + 5$$
$$r_2 = r_3 \cdot (4x + 6)$$

НОД $= 3x + 5$

$$r3x + 5 = r_1 - r_2(6x + 5) = f(2x^2 + 5x + 3) + g(4x^3 + 6x^2 + 4x + 3)$$

2

a)

$x^5+6x^3-2x^2-12 = x^3(x^2+6)-2(x^2+6) = (x^3-2)(x^2+6) = (x^2 + 6)(x - \overset{\text{над } \mathbb{R}}{\sqrt[3]{2}})(x^2 + \sqrt[3]{2} + 2^{2/3}) =$

$$(x - \sqrt[3]{2})(x - i\sqrt{6})(x + i\sqrt{6})(x - i\sqrt{6})(x \overset{\text{над } \mathbb{C}}{-} i(\sqrt[3]{2} + 2^{2/3})(x + i\sqrt{6})(x - i(\sqrt[3]{2} + 2^{2/3}))$$

b)

$$x^5 + x^4 + 3x^2 + x + 3 = (x + 1)(x^4 + 3x + 3) = (x + 1)(x + 3)^2(x^2 + 4x + 2) - \mathbb{Z}_5$$

3

1)

$$x^3 + x^2 + 2x + 1$$
$$x^3 + x^2 + 2x + 2$$
$$x^3 + 2x^2 + 2x + 1$$
$$x^3 + 2x^2 + 2x + 2$$
$$x^2 + 1$$
$$x^2 + x + 1$$
$$x^2 + x + 2$$
$$x^2 + 2x + 1$$
$$x^2 + 2x + 2$$
$$x + 1$$
$$x + 2$$
$$x$$

2)

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$$
$$f(0) = d \neq 0$$
$$f(1) = 1 + a + b + c + d \neq 0$$
$$f(2) = 1 + 2a + b + 2c + d \neq 0$$
$$\begin{cases} a + b + c + d \neq 2 \\ 2a + b + 2c + d \neq 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a + b + c + d \neq 2 \\ b + d \neq 2 \end{cases}$$
$$d = 1 \rightarrow \begin{cases} b = 0, a + c \neq 1, 2(a + c) \neq 1 \\ b = 2, a + c \neq 2, 2(a + c) \neq 1 \end{cases}$$
$$d = 2 \rightarrow \begin{cases} b = 1, a + c \neq 2, 2(a + c) \neq 2 \\ b = 2, a + c \neq 1, 2(a + c) \neq 2 \end{cases} \rightarrow a + c = 0$$

Всего $2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$ решений, но надо исключить 6 многочленов, которые раскладываются на приводимые квадратные многчлены. Всего 6 решений

4

Если есть один комлесный корень, то есть и второый комплексный корень, сопряженный первому.

$$f = (x - ai - b)(x - ai + b) \cdot h, g = (x - ai - b)(x - ai + b) \cdot s$$

Но так как многочлены неприводимые, то больше многочлен разлагаться не может. А значит, f, g пропрорциональны.