1

a)

$$a = p_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot_s^{\alpha_s}$$
$$b = p_1^{\beta_1} \cdot \cdots \cdot p_s^{\beta_s}$$
$$(a, b) = p_1^{min(\alpha_1,\beta_1)} \cdot \ldots \cdot_1^{min(\alpha_s,\beta_s)}$$
$$(a + b, [a, b]) = (a + b, p_1^{max(\alpha_1,\beta_1)} \cdot \ldots \cdot_1^{max(\alpha_s,\beta_s)})$$

Из суммы $a+b$ можно повыносить минимальные степени каждого p_i и выражение примет вид: $p_1^{min(\alpha_1,\beta_1)} \cdot \cdots \cdot p_1^{min(\alpha_s,\beta_s)} \cdot (p_1^{max(\alpha_1,\alpha_1-\beta_1)} \cdots)$

$$(p_1^{min(\alpha_1,\beta_1)} \cdot \cdots \cdot p_1^{min(\alpha_s,\beta_s)} \cdot (p_1^{max(\alpha_1,\alpha_1-\beta_1)} \cdots), p_1^{max(\alpha_1,\beta_1)} \cdot \ldots \cdot_1^{max(\alpha_s,\beta_s)}) = p_1^{min(\alpha_1,\beta_1)} \cdot \ldots \cdot_1^{min(\alpha_s,\beta_s)}$$

б)

$$a = p_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot_s^{\alpha_s}$$
$$b = p_1^{\beta_1} \cdot \cdots \cdot p_s^{\beta_s}$$
$$c = p_1^{\gamma_1} \cdot \cdots \cdot p_s^{\gamma_s}$$
$$(a, b, c) = ((a, b), c) = p_1^{min(\alpha_1,\beta_1,\gamma_1)} \cdot \ldots \cdot_1^{min(\alpha_s,\beta_s,\gamma_s)}$$

Без ограничение общности будем считать, что $\alpha_i \leqslant \beta_i \leqslant \gamma_i \quad \forall i$

$$\frac{(a,b)(b,c)(c,a)}{(a,b,c)^2} = \frac{p_1^{min(\alpha_1,\beta_1)} \cdot \cdots \cdot p_1^{min(\alpha_s,\beta_s)} \cdot p_1^{min(\gamma_1,\beta_1)} \cdot \ldots \cdot_1^{min(\gamma_s,\beta_s)} \cdot p_1^{min(\alpha_1,\gamma_1)} \cdot \cdots \cdot p_1^{min(\alpha_s,\gamma_s)}}{p_1^{2min(\alpha_1,\beta_1,\gamma_1)} \cdot \cdots \cdot p_1^{2min(\alpha_s,\beta_s,\gamma_s)}}$$
$$= p_1^{\beta_1} \ldots p_s^{\beta_s}$$
$$\frac{[a,b][b,c][c,a]}{[a,b,c]} = \frac{p_1^{\beta_1} \cdots p_s^{\beta_s} p_1^{\gamma_1} \cdots p_s^{\gamma_s} p_1^{\gamma_1} \cdots p_s^{\gamma_s}}{p_1^{2\gamma_1} \cdots p_s^{2\gamma_s}} = p_1^{\beta_1} \ldots p_s^{\beta_s} \blacksquare$$

2)

Так как чисел, кратных 2 больше, чем чисел кратных 5, то нам надо посчитать количество чисел, кратных 5. Посчитаем количество чисел, кратных 5: $1000/5 = 200$
Чисел, кратных 25: $1000/25 = 40$
Чисел, кратных 125: $1000/125 = 8$ Чисел кратных 625 : 1.
Каждая степень 5 дает свой ноль на конец числа. Следовательно нулей 249. в интервале от 1 до 1000 - 1000/5 = 200. - чисел, кратных 25 1000/25

3

$$n = p_1^{\alpha_1} \cdot \cdots \cdot p_s^{\alpha_s}$$

Сумму всех делителей числа n можно предствить так:

$$\sum_{b_i = 0, \cdots \alpha_i} p_1^{b_1} \cdots p_s^{b_s}$$

Раскрыв эту сумму, получим выражение

$$(1 + p_1 + \cdots + p_1^{\alpha_1}) \ldots (1 + p_s + \cdots + p_s^{\alpha_s}) = \frac{p_1^{\alpha_1+1} - 1}{p_1 - 1} \ldots \frac{p_s^{\alpha_s+1} - 1}{p_s - 1} \blacksquare$$

4)

$108 = 2^2 \cdot 3^3$
$\sigma(108) = \frac{2^3-1}{1}\frac{3^4-1}{2} = 2^3 \cdot 5 \cdot 7$
$\mathcal{T}(2^3 \cdot 5 \cdot 7) = 16$

5

а)

$$19x + 88y = 2$$

88 = 4*19 + 12
19 = 12 + 7
12 = 7+5
7 = 5 + 2
2 = 7-5 = (19-12)- (12-7) = (19 - (88-4*19)) - (88-4*19-5*19) = -3*88 + 14*19
частное решение $x = 14, y = -3$

$$\begin{cases} 19x + 88y = 2 \\ 19 * 14 - 3 * 88 = 2 \end{cases}$$

$$19(x - 14) + 88(y + 3) = 0$$

$$x = 88t + 14, t \in \mathbb{Z}$$

$$y = 19t - 3$$

б)

$$102x + 165y = 9$$

$$34x + 55y = 3$$

55 =34+21
34 =21+13
21 = 13+ 8
13 = 8 + 5
8 = 5+ 3
3 = -8*34+5*55

$$x = -8, y = 5\text{- частное решение.}$$

$$\begin{cases} 34x + 55y = 3 \\ -8 * 34 + 5 * 55 = 3 \end{cases}$$

$$34(x + 8) + 55(y - 5) = 0$$

$$\begin{cases} x = 55t - 8 \\ y = -34t + 5 \end{cases}, t \in \mathbb{Z}$$