1)

$$F = \mathbb{Q}[z]/(z^3 - z^2 + 1) - \text{ поле} \Longleftrightarrow f(\pm 1) \neq 0$$
$$f(1) = 1, f(-1) = -1$$

Значит F - поле.

$$F = \{a\alpha^2 + b\alpha + c, a, b, c \in \mathbb{Q}\}\alpha - \text{ представитель класса z}$$

$$\frac{3\alpha^2 - 12\alpha + 7}{\alpha^2 - 3\alpha + 1} = a\alpha^2 + b\alpha + c \Longleftrightarrow 3\alpha^2 - 12\alpha + 7 = (\alpha^2 - 3\alpha + 1)(a\alpha^2 + b\alpha + c)(*)$$

В нашем поле выполнено $a^3 - a^2 + 1 \equiv 0 \Longleftrightarrow a^3 = a^2 - 1$,
$a^4 = a \cdot a^3 = a^2 - a - 1$

$$(*) \to \begin{cases} 3 = -a - 2b + c \\ -12 = -a + b - 3c \\ 7 = -2a - b + c \end{cases} \to \begin{cases} a = -\frac{17}{9} \\ b = \frac{19}{9} \\ c = \frac{16}{3} \end{cases}$$

$$\frac{3\alpha^2 - 12\alpha + 7}{\alpha^2 - 3\alpha + 1} = \frac{-17}{9}\alpha^2 + \frac{19}{9}\alpha + \frac{16}{3}$$

2

$x_2^4 x_3^6 + 2x_1 + x_2^4 x_3 + x_1^2 + x_2^2 \quad \overrightarrow{-x_1} \quad x_2^4 x_3^6 + x_1 x_2^4 x_3 \quad \overrightarrow{-x_1} \quad x_2^4 x_3^6 + x_1^2 x_2^2 \quad \overrightarrow{-1} \quad 2x_1 x_2 x_3^2 -$ остаток

4

Пусть F - система Гребнера. Тогда для любых $f_1, f_2 \in F, (f_1, f_2) \in F$. Тогда $(f_1, 0) \in F$
Следовательно, любой многочлен из F делит f_1
В обратную сторону
Пусть f - многочлен, который делит любой многочлен из F. Тогда $\forall f_1, f_2 \in F (f_1, f_2) \in F$
и делится на f. Следовательно, F- система Гребнера.