1

$$H \lhd G \Longleftrightarrow \forall g \in G\colon gHg^{-1} \subseteq H$$

$$g = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix}, g^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & 0 \\ \frac{b}{-ac} & \frac{1}{c} \end{pmatrix}$$

$$g \cdot \begin{pmatrix} x^3 & 0 \\ y & x^2 \end{pmatrix} \cdot g^{-1} = \begin{pmatrix} x^3 & 0 \\ bx^3 \dots & x^2 \end{pmatrix} \in H$$

Значит $H \lhd G$

2

$$G = \mathbb{Z}_{20}, H = \mathbb{Z}_{16}$$

$$\varphi(n) = n \cdot \varphi(1)$$

Гомоморфизм однозначно определяется тем, куда переходит 1.

$$20 \cdot \varphi(1_{20}) \equiv 0 \pmod{16}$$

$$\varphi(1_{20}) \equiv 0 \pmod{4}$$

$$\varphi(1_{20}) \in \{0, 4, 8, 12\}$$

3

$$H = \left\{ e^{(i\pi)^{2t}} \colon t \in \mathbb{Q} \right\}$$

$$\varphi\colon \mathbb{Q} \to H$$

$$\varphi(q) = e^{(i\pi)^{2q}}$$

$$\varphi(q_1 + q_2) = e^{(i\pi)^{2(q_1+q_2)}} = e^{(i\pi)^{2q_1}} \cdot e^{(i\pi)^{2q_2}} = \varphi(q_1) \cdot \varphi(q_2) \varphi \text{ - гомоморфизм.}$$

Очевидно, что $\varphi(q) = 1 \Longleftrightarrow q \in \mathbb{Z}$

$$\ker \varphi = \left\{ t \in \mathbb{Z}\colon e^{(i\pi)^{2t}} \right\} = \mathbb{Z}$$

По теореме о гомоморфизме для групп:

$$Q \backslash \mathbb{Z} = Q \backslash \ker \varphi \cong \mathrm{Im} \varphi = H \blacksquare$$

4

$$1) \to 2) \Longleftrightarrow \neg 2) \to \neg 1)$$

$A \cap B$ - подгруппа в G и следовательно в ней есть еще элементы, помимо e. Пусть этот элемент g

$$\mathrm{ord} g = k > 1 \overset{\text{по т. Лагранжа}}{\to} k \,\vdots\, m, n \to (m, n) \neq 1$$

В другую сторону это неверно, легко привести контрпример. Возьмем $\mathbb{Z}_5 = (0, 1, 2, 3, 4)$ и подгруппу $Z_2, Z_3 = (0, 1), (0, 1, 2)$

$$\mathbb{Z}_2 \cap \mathbb{Z}_3 = (0, 1) \neq \{1\}$$