1

$$x^{242}-1\equiv 0 \pmod{286} \leftrightarrow \begin{cases} x^{242}-1\equiv 0 \pmod{2} \\ x^{242}-1\equiv 0 \pmod{11} \\ x^{242}-1\equiv 0 \pmod{13} \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x\equiv 1 \pmod{2} \\ x\equiv \pm 1 \pmod{11} \\ x\equiv \pm 1 \pmod{13} \end{cases} \leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x\equiv 1 \pmod{286}(+1_{11},+1_{13}) \\ x\equiv 131 \pmod{286}(-1_{11},+1_{13}) \\ x\equiv 155 \pmod{286}(+1_{11},-1_{13}) \\ x\equiv 285 \pmod{286}(-1_{11},-1_{13}) \end{cases}$$

2

$$x^2-1\equiv 0 \pmod{2^{10}\cdot 3^{11}\cdot 5^{12}\cdot 7^{13}} \leftrightarrow \begin{cases} x^2-1\equiv 0 \pmod{2^{10}\cdot 3^{11}} \\ x^2-1\equiv 0 \pmod{5^{12}\cdot 7^{13}} \end{cases} \leftrightarrow$$

$$\begin{cases} (x-1)(x+1)\equiv 0 \pmod{2^{10}\cdot 3^{11}} \\ (x-1)(x+1)\equiv 0 \pmod{5^{12}\cdot 7^{13}} \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} (x-1)(x+1)\equiv 0 \pmod{2^{10}} \\ (x-1)(x+1)\equiv 0 \pmod{3^{11}} \\ (x-1)(x+1)\equiv 0 \pmod{5^{12}} \\ (x-1)(x+1)\equiv 0 \pmod{7^{13}} \end{cases}$$

Как видно, эта система имеет 10 решений. 4 решения от первого уравнения(± 1, ± 511), и по 2 решения от остальных уравнения(± 1).

3

$$x^2\equiv y^2 \pmod{p} \leftrightarrow (x-y)(x+y)\equiv 0 \pmod{p}$$

Для каждого x у нас есть пара $(+y,-y)$, которая дает ответ. Так как x пробегает полную систему вычетов, то всего $2p$, но ноль и минус ноль это одно и тоже, так что ответ $2p-1$

4

$(x^2-ab)(x^2-bc)(x^2-ac)\equiv 0 \pmod{p}$
Рассмотрим символ Лежандра для каждой пары. Без ограничения общности рассмотрим только пару ab

$$1)\ \left(\frac{ab}{p}\right)=0$$

То есть $p|ab$ и $x=0$ - решение.

$$2)\ \left(\frac{ab}{p}\right)=1$$

$ab-$ квадратичный вычет и есть решение, равное $\sqrt{ab}\in\mathbb{Z}$.

$$3)\ \left(\frac{ab}{p}\right)=-1$$

В таком случае смотрим на пару, где символ Лежандра равен ноль или один.

5

а)

$$\sum_{x=0}^{58} \left(\frac{15x+79}{59}\right) = 0,$$

59− простое число.

б)

$$\sum_{x=0}^{57} \left(\frac{15x+79}{59}\right) = 0 - 1 = -1 \left(\frac{15 \cdot 58 + 79}{59}\right)$$

$$15 \cdot 58 + 79 \equiv 934 \equiv 49 \pmod{59}$$

$$\left(\frac{49}{59}\right) = 1$$