1

$$\text{По теореме Вильсона мы имеем} \quad (p-1)! \equiv -1(modp),$$
$$(p-2)!c\dot{-}1 \equiv -1(modp)| \cdot (-1)$$
$$(p-2)! \equiv 1(modp)$$

2

Для доказательства достаточно показать, что все числа $xn + ym$ различны.
Пусть нашлись такие числа $x_0 \neq x1, y_0 \neq y_1$ что $x_0n + y_0 \equiv x_1n + y_1m(\mod mn)$

$$n(x_0 - x_1) + m(y_0 - y_0) \equiv 0(modmn) \leftrightarrow x_0 - x_1 + y_0 - y_1 \equiv 0(\mod mn)$$

Противоречие с тем, что у нас полная система вычетов.

3

$$x_0n + y_0 \equiv x_1n + y_1m \pmod{mn}$$
$$x_0 - x_1 \equiv (y_0 - y_1) \pmod{mn}$$
$$x \text{ по } \pmod{m} \text{ имеет } \varphi(m) \text{ остатков.}$$
$$y \text{ по } \pmod{n} \text{ имеет } \varphi(n) \text{ остатков.}$$
$$x, y \text{ по } \pmod{mn} \text{ имеет } \varphi(m) \cdot \varphi(n) \text{ остатков}$$

Покажем, что все числа вида $xn + ym$ взимнопросты с mn

$$(xn + ym, mn) = d \to d|mn$$

Пусть, без ограничения общности $d|m$. Тогда $d|(xn + ym) \to d|x \to (x, m) = d$ Такое может быть, если $d = 1$. В остальных случаях это неверно.

$$\text{Очевидно, что } x, y \text{ по } \pmod{mn} \text{ имеет } \varphi(m) \cdot \varphi(n) = \varphi(mn)$$

4

$$\begin{cases} x \equiv 4(mod15) \\ x \equiv -1(mod16)x \equiv 11(mod17) \end{cases}$$
$$x = 16t + 1 \to 16t - 1 \equiv 4(mod15)$$

$$16t \equiv 5(mod15)$$
$$t \equiv 5(mod15) \to t = 15u + 5$$
$$x = 16(15u + 5) + 1 = 15 \cdot 16u + 79$$
$$15 \cdot 16u + 79 \equiv 11(mod17)$$
$$16 \cdot 15 \equiv 0(mod17)$$
$$u = 17k$$
$$x = 15 \cdot 16 \cdot 17 + 79 \leftrightarrow x \equiv 79(mod15 \cdot 16 \cdot 17)$$