МА-2, дз 1

Студент:	Кондратьев Никита
Группа:	238

1

Привести двойной интеграл $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$к повторному во всех возможнных порядках .

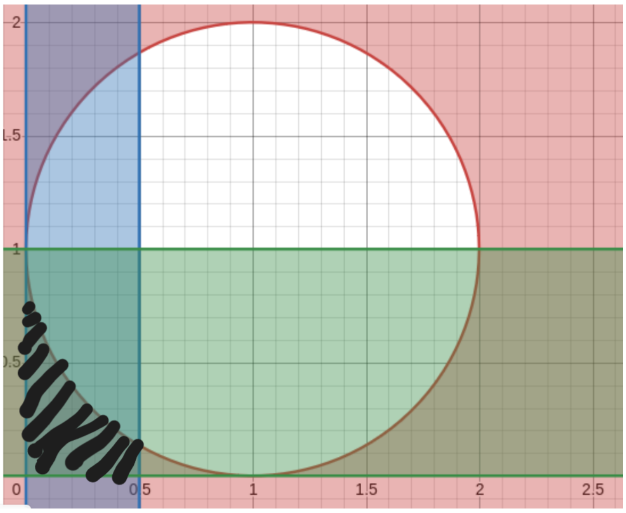

Рис. 1: Заштрихованная область - то что мы ищем

(x,y)

$$(y-1)^2 = 1-(x-1)^2$$
$$|y-1| = \sqrt{1-(x-1)^2} \text{ (раскроем с плюсом, т.к 1 четверть)}$$
$$y = 1+\sqrt{1-(x-1)^2}$$
$$\int\limits_0^1 dy \int\limits_0^{\sqrt{1-(y-1)^2}} f dx$$

(y,x)

$$\int\limits_0^{\frac{1}{2}} dx \int\limits_0^{\sqrt{1-(x-1)^2}} f dy$$

2

Изменить порядок интегрированя в повторном интеграле.

$$\int\limits_0^1 dy \int\limits_{\sqrt{4-4y}}^{\sqrt{4-y^2}} f dx + \int\limits_1^2 dy \int\limits_0^{\sqrt{4-y^2}} f dx$$

Чтобы найти площадь этого куска можно сложить две части - верхнюю и нижнюю, но это муторно. А можно просто из четверти круга вычесть незаштрихованную часть.

$$\int\limits_0^2 dx \int\limits_0^{\sqrt{4-x^2}} f dy - \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x^2/4} f dy$$

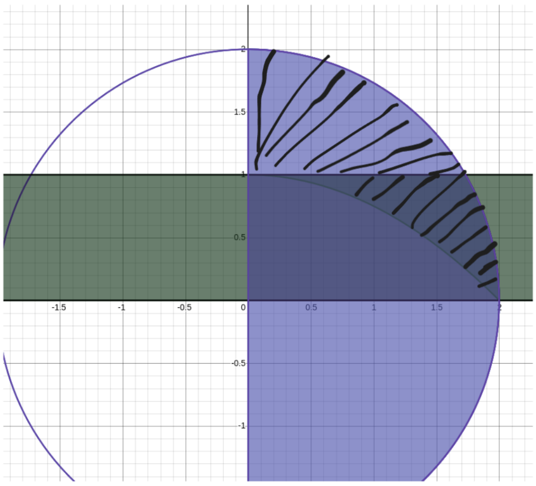

Рис. 2: Заштрихованная область - то что мы ищем

3

Вычислить интеграл

$$\int_0^2 x^2 dx \int_x^2 \ln(1+y^2) dy$$

Чтобы было легче считать, поменяем порядок интгерирования.

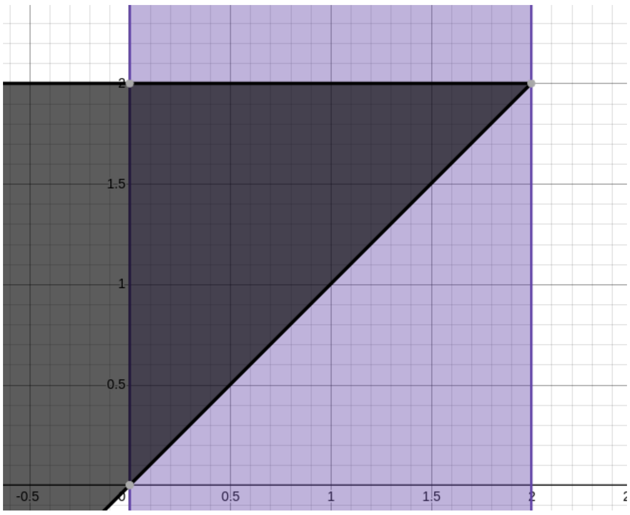

Рис. 3: Мы считаем вот этот треугольник

$$\int_0^2 x^2 dy \int_y^2 \ln\left(1+y^2\right) dx = \int_0^2 \ln\left(1+y^2\right) dy \int_y^2 x^2 dx$$

$$\int_y^2 x^2 dx = \frac{1}{3}\left(y^3-8\right)$$

$$\frac{1}{3}\int_0^2 \ln\left(1+y^2\right)\cdot\left(y^3-8\right) dy$$

$$\text{(интегрируем по частям)}\ \ln(1+y^2)(y^4/4-8y)|_0^2 - \frac{1}{4}\int\limits_0^2 \left(\frac{2y}{1+y^2}\right)\cdot\bigl(y^2-2y\bigr)$$

$$= \frac{1}{3}\cdot(-11\ln 5 - 12 - 4\,\mathrm{arcctg}\,2)$$