1

Поле $\mathbb{F}_9$ состоит из элементов $\{0, 1, 2, x, x+1, x+2, 2x, 2x+1, 2x+2\}$.
Формула понижения степени: $x^2 = 2x + 1$.
Циклическое поле $\mathbb{F}_9$ порождается элементами $(x, x+1, 2x, 2x+2)$ Это легко проверяется перебором. Программа для перебора . Константы точно не порождают наше поле. А остальный элементы в меньшей степени равны единице.

2

Рассмотрим поля $\mathbb{Z}_5[x]/(x^2+3)$ и $\mathbb{Z}_5[y]/(y^2+y+1)$.

Пусть α - корень многочлена x^2+3 в $\mathbb{Z}_5[x]/(x^2+3)$:

$$\alpha^2 = -3 \equiv 2 \mod 5$$

Пусть β - корень многочлена y^2+y+1 в $\mathbb{Z}_5[y]/(y^2+y+1)$:

$$\beta^2 + \beta + 1 = 0$$

или

$$\beta^2 = -\beta - 1 \equiv 4 - \beta \mod 5$$

Чтобы установить изоморфизм между этими полями, найдем такой элемент $\varphi(\alpha)$, который переводит α в β:

$$\varphi(\alpha) = a + b\beta$$

где $a, b \in \mathbb{Z}_5$.

Пусть $\varphi(\alpha) = a + b\beta$. Подставим в уравнение:

$$\alpha^2 = 2 \Rightarrow \varphi(\alpha^2) = 2$$

С другой стороны:

$$\varphi(\alpha^2) = \varphi((a+b\beta)^2) = \varphi(a^2 + 2ab\beta + b^2\beta^2) = a^2 + 2ab\beta + b^2\varphi(\beta^2)$$

Так как $\beta^2 = 4 - \beta$:

$$\varphi(\alpha^2) = a^2 + 2ab\beta + b^2(4-\beta) = a^2 + 4b^2 + (2ab - b^2)\beta$$

Сравним это с $\varphi(\alpha^2) = 2$:

$$a^2 + 4b^2 = 2 \mod 5$$

и

$$2ab - b^2 = 0 \mod 5 \Rightarrow b(2a-b) = 0$$

Отсюда $b \neq 0$, тогда $2a = b$.

Подставим $a = \frac{b}{2}$ в уравнение $a^2 + 4b^2 = 2 \mod 5$:

$$\left(\frac{b}{2}\right)^2 + 4b^2 = 2 \mod 5$$

Так как $\frac{1}{2} \equiv 3 \mod 5$, $a = 3b$:

$(3b)^2+4b^2 = 2 \mod 5 \Rightarrow 9b^2+4b^2 = 2 \mod 5 \Rightarrow 13b^2 = 2 \mod 5 \Rightarrow 3b^2 = 2 \mod 5 \Rightarrow b^2 = \frac{2}{3} \equiv 4$

Таким образом, $b = 2$ (или $b = -2 \equiv 3$).
Тогда $a = 3b = 6 \equiv 1 \mod 5$.
Таким образом, изоморфизм:

$$\varphi(\alpha) = 1 + 2\beta$$

$$\varphi(\alpha) = 1 + 2\beta$$

Тогда это является нашим изоморфизмом.

Изоморфизм между полями $\mathbb{Z}_5[x]/(x^2+3)$ и $\mathbb{Z}_5[y]/(y^2+y+1)$ устанавливается функцией:

$$\varphi(\alpha) = 1 + 2\beta$$

где α соответствует $1 + 2\beta$.

3

$$f(x) = x^3 + x^2 + 1$$

Все подполя поля $\mathbb{F}_{2^{18}}$ имеют вид $\mathbb{F}_{2^k}$, где k делитель 18. $k \in \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$
1) $\mathbb{F}_2$ - многочлен не имеет корней.
2) $\mathbb{F}_4 = \{0, 1, x, x + 1\}$

$$\begin{cases} f(0) \neq 0 \\ f(1) \neq 0 \\ f(x) \neq 0 \\ f(x+1) \neq 0 \end{cases}$$

3) $\mathbb{F}_{2^3} = \mathbb{F}_4 \cup \{x^2, x^2 + 1, x^2 + x, x^2 + x + 1\}$ $f(x^2 + 1)) = 0$. Значит берем это поле.
Все оставшиеся подполя содержат $x^2 + 1$. Значит они нам подходят.
Ответ: $\mathbb{F}_{2^3}, \mathbb{F}_{2^6}, \mathbb{F}_{2^9}, \mathbb{F}_{2^{18}}$