$u'' - xu' - e^{\frac{x}{3}} u = -\frac{x}{2} - 1$, $-1 < x < 1$, $u'(-1) = 1$, $u'(1) = 0$.

Исходное уравнение имеет сл. порядок:

$u'' \sim O(h^2)$, $u' \sim O(h)$ $\Rightarrow O(h)$. Нам же нужен $O(h^2) \Rightarrow$ найдем такую разност. производную для u', чтобы $u' \sim O(h^2)$. Запишем разложение $u(x_{k-1})$, $u(x_{k+1})$ в окрестности точки x_k: $u(x_{k+1}) = u(x_k) + hu'(x_k) + \frac{h^2}{2}u''(x_k) + O(h^2)$

$u(x_{k-1}) = u(x_k) - hu'(x_k) + \frac{h^2}{2}u''(x_k) + O(h^2)$. Взяв полуразн. этого: получим: $u'(x_k) + O(h^2) = \frac{u(x_{k+1}) - u(x_{k-1})}{2h}$ $\Rightarrow$ Основную часть мы сделали точной $\sim O(h^2)$ значение. Теперь правые

Пусть $y_x(-1) = \bar{\sigma}_0 y(-1) + \bar{\mu}_0$; $y_{\bar{x}}(1) = \bar{\sigma}_1 y(1) + \bar{\mu}_1$.

$\nu_h(-1) = y_x(-1) - \bar{\sigma}_0 u(-1) - \bar{\mu}_0 = u' + \frac{h}{2}u'' + O(h^2) - \bar{\sigma}_0 u - \bar{\mu}_0 =$

$= [u'(-1) = 1$ (из условие$] = 1 + 0.025 \cdot (-\frac{x}{2} - 1 + e^{\frac{x}{3}} u + xu') + O(h^2) -$

$- \bar{\sigma}_0 u - \bar{\mu}_0 = 1 + 0.025(\frac{1}{2} - 1 + e^{-\frac{1}{3}} u - 1) + O(h^2) - \bar{\sigma}_0 u - \bar{\mu}_0 =$

$= u(\underbrace{-\bar{\sigma}_0 + 0.025e^{-\frac{1}{3}}}_{=0}) + (\underbrace{1 + 0.025 \cdot (-\frac{3}{2}) - \mu_0}_{=0}) + O(h^2)$. Отсюда имеем: $\bar{\sigma}_0 = 0.025e^{-\frac{1}{3}}$, $\mu_0 = 0.9625$.

Аналогично для $\nu_h(1) = [u'(1) = 0$ (по условию)$] = u_{\bar{x}} - \bar{\sigma}_1 u - \bar{\mu}_1$

$= u' - \frac{h}{2}u'' + O(h^2) - \bar{\sigma}_1 u - \bar{\mu}_1 = 0 - 0.025u'' + O(h^2) - \bar{\sigma}_1 u - \bar{\mu}_1 =$

$= -0.025(-\frac{x}{2} - 1 + e^{\frac{x}{3}} u + x\underset{0}{u'}) + O(h^2) - \bar{\sigma}_1 u - \bar{\mu}_1 =$

$= -0.025(-\frac{3}{2} + e^{\frac{1}{3}} u) + O(h^2) - \bar{\sigma}_1 u - \bar{\mu}_1 \Rightarrow$

$u(\underbrace{-\bar{\sigma}_1 - 0.025e^{\frac{1}{3}}}_{=0}) + (\underbrace{0.0375 - \bar{\mu}_1}_{=0}) + O(h^2) \Leftrightarrow$

$\bar{\sigma}_1 = -0.025e^{\frac{1}{3}}$; $\mu_1 = 0.0375$.

Теперь построим матрицу:

$$\begin{cases} y_x(-1) = \dfrac{y_1 - y_0}{h} = \overline{\sigma_0} y_0 + \overline{\mu_0} \\ y_{x\bar{x}} - x y_{\overset{\circ}{x}} - e^{\frac{x}{3}} y_i = -\dfrac{x_i}{2} - 1, \quad i = \overline{1, N-1} \sim \dfrac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} - \dfrac{x_i(y_{i+1} - y_{i-1})}{2h} + \\ - e^{\frac{x}{3}} y_i = -\dfrac{x_i}{2} - 1. \\ y_{\bar{x}}(1) = \dfrac{y_N - y_{N-1}}{h} = \overline{\sigma_1} y_N + \overline{\mu_1}. \end{cases}$$

Как видим:

$$\begin{cases} y_0\left(-\dfrac{1}{h} - \overline{\sigma_0}\right) + y_1\left(\dfrac{1}{h}\right) = \overline{\mu_0} \\ y_{i-1}\left(\dfrac{1}{h^2} + \dfrac{x_i}{2h}\right) + y_i\left(-\dfrac{2}{h^2} - e^{\frac{x}{3}}\right) + y_{i+1}\left(\dfrac{1}{h^2} - \dfrac{x_i}{2h}\right) = -\dfrac{x_i}{2} - 1, \quad i = \overline{1, N-1} \\ y_{N-1}\left(-\dfrac{1}{h}\right) + y_N\left(\dfrac{1}{h} - \overline{\sigma_1}\right) = \overline{\mu_1}. \end{cases}$$

Как видим, с-ма образует м-цу A – трехдиагон. A тогда м-ца подходит для решения методом прогонки.* М-тод прогонки:

$i = 0 \to N-1$, $\alpha_{i+1} = \dfrac{-B_i}{a_i \alpha_i + C_i}$; $\beta_{i+1} = \dfrac{F_i - a_i \beta_i}{a_i \alpha_i + C_i}$.

Потом обратно:

$x_i = \alpha_{i+1} x_{i+1} + \beta_{i+1}$. $i = N-1, 1$.

М-ца A имеет вид:

C_0	B_0	0	0
A_1	C_1	B_1	0
0	A_2	C_2	B_2

и т.д.

* Проверим св-во диаг. преобладания.

$\left|-\dfrac{2}{h^2} - e^{\frac{x}{3}}\right| \geq \left|\dfrac{1}{h^2} + \dfrac{x_i}{2h} + \dfrac{1}{h^2} - \dfrac{x_i}{2h}\right| \sim \left|\dfrac{2}{h^2} + e^{\frac{x}{3}}\right| > \left|\dfrac{2}{h^2}\right|$ – для строк $1 \to N-1$.

Для первой и последней: $\sigma_0 \geq 0 \Rightarrow$ выполн.

$\left|-\dfrac{1}{h} - \sigma_0\right| \geq \left|\dfrac{1}{h}\right| \sim \left|\dfrac{1}{h} + \sigma_0\right| \geq \dfrac{1}{h}$ – 1ая строка

$\left|\dfrac{1}{h} - \sigma_1\right| \geq \left|\dfrac{1}{h}\right|$ – также вып. т.к $\sigma_1 \leq 0$. – посл. строка