Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики
Кафедра математической физики

Кабдуали Бек Ильясулы

«Исследование нелокальной задачи для уравнения переноса при специальных предположениях»

Выпускная квалификационная работа

Научный руководитель:
профессор кафедры математической физики,
доктор физико-математических наук
Тихонов И. В.

Нур-Султан, 2020

Содержание

Введение **2**

1 Обзор литературы **3**

2 Постановка задачи **4**
2.1 Постановка нелокальной задачи 4
2.2 Редуцированная задача 5

3 Абстрактная задача **6**
3.1 Основные определения 6
3.2 Свойства производящего оператора полугруппы 7
3.3 Общая постановка нелокальной задачи 9
3.4 Вывод операторного уравнения 10
3.5 Разрешающая формула 11
3.6 Важный частный случай 14
3.7 Характер получаемых решений 14

4 Пример: оператор простого переноса **16**

5 Пример: оператор переноса с поглощением **17**

6 Описание программы **18**
6.1 Краткий обзор 18
6.2 Алгоритм 19

7 Результаты вычислений **20**

Заключение **30**

Литература **31**

Введение

Рассматривается нелокальная задача для уравнения простого переноса с поглощением. Физическая интерпретация: вдоль тонкого цилиндра движется потоков электрически и магнитно нейтральных частиц; вдоль всего цилиндра измеряется концентрация частиц. Особенность данного процесса состоит во мгновенном изменении чуствительности измерительных приборов, быть может, более одного раза. Иными словами, в определённые моменты времени показания приборов на всём протяжении анализируемой области изменяют свои показания на одну и ту же кратность, или изменяется масштаб измерения. Такое нетипичное поведение техники теоретически может быть вызвано в резком изменении электромагнитного поля вокруг изучаемой области.

Что касается математической стороны задачи, она состоит в следующем. В силу линейности задачи её решение представляется в виде суммы решений двух аналогичных задач. Одна из этих задач имеет, и притом единственное, решение в явном виде и выписывается сразу. Вторая задача, отличающаяся от исходной нулевым граничным условием, решается далее.

Полученная редуцированная задача является частным случаем иной, абстрактной задачи — нелокальной задачи для линейного обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка в банаховом пространстве. Эта задача и есть основной объект исследования данной работы. Поэтому последующий анализ проводится в строгом соответствии "канонам"функционального анализа. Для начала необходимые определения и теоремы функционального анализа приводятся в достаточном для неподготовленного читателя объёме. Далее следует подробный вывод решения абстрактной задачи по схеме, использованной в работе [1]. В целом данный материал должен быть понятен студентам старших курсов ВМК.

В результате, полученная формула решения абстрактной задачи, после аккуратного обобщения редуцированной задачи, легко применяется для решения последней.

В качестве иллюстрации приведены примеры редуцированной задачи в виде пар графиков функций $\psi(x)$ и $\varphi(x) = u(x, 0)$.

1 Обзор литературы

Общая постановка нелокальной задачи и полное исследование в случае произвольной суперустойчивой полугруппы имеются в [1]. Теоретический пример, связанный с многомерным уравнением простого переноса, подробно разобран в [2]. Суперустойчивые полугруппы подробно изучались в работах [3, 4]. При подготовке отчёта использовались стандартные понятия из теории полугрупп [5, 7], а также из теории функций и функционального анализа [8], [9]. Основные сведения из теории дифференциальных уравнений в частных производных можно найти в [10].

2 Постановка задачи

2.1 Постановка нелокальной задачи

Пусть некоторая субстанция перемещается вдоль одномерной среды с постоянной скоростью и, быть может, поглащается этой средой. Такой процесс моделирует уравнение простого переноса

$$u_t + au_x + \sigma(x)u = 0, \qquad 0 \leqslant x \leqslant l, \quad 0 \leqslant t \leqslant T. \tag{1}$$

Здесь x — пространственная координата, t — время, $u(x,t)$ — плотность вещества в точке x в момент времени t, константа $a > 0$ — скорость переноса, функция $\sigma(x) \geqslant 0$ при $0 \leqslant x \leqslant l$ — коэффициент поглощения.

К уравнению (1) добавляем граничное условие

$$u(0,t) = \gamma(t), \qquad t \geqslant 0, \tag{2}$$

и нелокальное усреднение по времени

$$\int\limits_0^T \eta(t)u(x,t)\,dt = \psi(x), \qquad 0 \leqslant x \leqslant l. \tag{3}$$

Начальное условие

$$u(x,0) = u_0(x), \qquad 0 \leqslant x \leqslant l,$$

сейчас не задано.

В совокупности соотношения (1)–(3) образуют задачу

$$\begin{cases} u_t + au_x + \sigma(x)u = 0, \qquad 0 \leqslant x \leqslant l, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \\ u(0,t) = \gamma(t), \\ \int\limits_0^T \eta(t)u(x,t)\,dt = \psi(x). \end{cases} \tag{4}$$

Функции $\gamma(t)$, $\eta(t)$, $\psi(x)$ заданы. Коэффициенты a, $\sigma(x)$ тоже заданы. Неизвестной являетя функция $u(x,t)$.

Основное предположение: считаем, что весовая функция $\eta(t)$ является кусочно постоянной

$$\eta(t) = \begin{cases} \alpha_1, & \tau_0 \leqslant t < \tau_1, \\ \alpha_2, & \tau_1 < t < \tau_2, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \\ \alpha_p, & \tau_{p-1} < t \leqslant \tau_p. \end{cases} \tag{5}$$

Здесь α_1, α_2, ..., α_p — вещественные константы, такие, что

$$0 \neq \alpha_1 \neq \alpha_2 \neq \ldots \neq \alpha_p \neq 0.$$

Точки τ_0, τ_1, τ_2, ..., τ_{p-1}, τ_p задают разбиение отрезка $[0,T]$ по правилу

$$0 = \tau_0 < \tau_1 < \tau_2 < \ldots < \tau_{p-1} < \tau_p = T.$$

Назовём задачу (4) нелокальной задачей.

2.2 Редуцированная задача

Итак, рассматриваем задачу (4). Положим в нелокальном условии (3) $x = 0$. Получим условие согласования

$$\int\limits_0^T \eta(t)\gamma(t)\,dt = \psi(0). \tag{6}$$

Равенство (6) есть необходимое условие разрешимости нелокальной задачи.

Решение задачи (4) представим в виде

$$u(x,t) = v(x,t) + w(x,t),$$

где функция $v(x,t)$ неизвестна, а $w(x,t)$ задаётся в явном виде

$$w(x,t) = \begin{cases} \gamma\left(t - \dfrac{x}{a}\right), & x < at, \\ \gamma(0), & x \geqslant at. \end{cases} \tag{7}$$

Так определённая функция $w(x,t)$ является решением задачи

$$\begin{cases} w_t + aw_x + \sigma(x)w = 0, \qquad 0 \leqslant x \leqslant l, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \\ w(0,t) = \gamma(t), \\ w(x,0) = \gamma(0). \end{cases}$$

Для $v(x,t)$ получаем задачу

$$\begin{cases} v_t + av_x + \sigma(x)v = 0, \qquad 0 \leqslant x \leqslant l, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \\ v(0,t) = 0, \\ \int\limits_0^T \eta(t)v(x,t)\,dt = \widetilde{\psi}(x). \end{cases} \tag{8}$$

Здесь

$$\widetilde{\psi}(x) = \psi(x) - \int\limits_0^T \eta(t)w(x,t)\,dt, \qquad 0 \leqslant x \leqslant l,$$

есть новая заданная функция.

Прежде чем изучать поставленную нелокальную задачу для уравнения переноса (1), выясним, как обстоят дела с аналогичными нелокальными задачами для дифференциальных уравнений в банаховом пространстве.

3 Абстрактная задача

3.1 Основные определения

Всюду далее считаем, что E — банахово пространство. Рассматриваем линейный оператор A, действующий в пространстве E. Область определения оператора A обозначим через $D(A)$, а множество значений — через $R(A)$.

Определение 1. Подмножество L линейного пространства называется линейным многообразием, если

$$x, y \in L \quad \Longrightarrow \quad c_1 x + c_2 y \in L,\ \forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Определение 2. Оператор A такой, что $D(A)$ — линейным многообразие, называется *замкнутым*, если $\forall \{x_n\} \in D(A)$ справедлива следующая импликация:

$$x_n \to x,\ Ax_n \to y, \quad n \to \infty \quad \Longrightarrow \quad x \in D(A),\ Ax = y.$$

В силу этого определения будем априори считать, что у замкнутого оператора область определения является линейным многообразием.

Определение 3. Оператор A *непрерывно обратим*, если $R(A) = E$, оператор A обратим и A^{-1} ограничен.

Далее полагаем λ — действительное число, I — единичный оператор в E.

Определение 4. Точка λ называется *регулярной* точкой оператора A, если оператор $A - \lambda I$ непрерывно обратим.

Определение 5. Совокупность регулярных точек оператора A называется *резольвентным множеством* оператора A и обозначается $\rho(A)$.

Определение 6. Если $\lambda \in \rho(A)$, то ограниченный линейный оператор $R(\lambda; A) = (A - \lambda I)^{-1}$ называется *резольвентой* оператора A.

Определение 7. Однопараметрическое семейство ограниченных линейных операторов $U(t) : E \to E,\ t \in [0, +\infty)$ называется полугруппой ограниченных линейных операторов в E или просто *полугруппой*, если
1) $U(0) = I$;
2) $U(t + s) = U(t)U(s), \qquad \forall t, s \geqslant 0.$

Определение 8. Полугруппа $U(t)$ в пространстве E называется *сильно непрерывной*, если

$$\lim_{t \to 0+} U(t)x = x, \qquad \forall x \in E.$$

Такую полугруппу также называют полугруппой класса C_0 или просто C_0-полугруппой.

Определение 9. Оператор A с областью определения

$$D(A) = \left\{ x \in E \;\middle|\; \exists \lim_{t\to 0+} \frac{U(t)x - x}{t} \right\}$$

и такой, что

$$Ax = \lim_{t\to 0+} \frac{U(t)x - x}{t} = \frac{d^+}{dt} \left[U(t)x \right] \Big|_{t=0}, \qquad \forall x \in D(A),$$

называется *производящим оператором* полугруппы $U(t)$ (или просто *генератором* полугруппы $U(t)$). Также говорят, что оператор A *порождает* полугруппу $U(t)$.

Определение 10. Полугруппа $U(t)$ класса C_0 называется *квазинильпотентной* (или *суперустойчивой*), если она имеет бесконечный отрицательный экспоненциальный тип:

$$\omega_0 \equiv \lim_{t\to +\infty} \frac{\ln \| U(t) \|}{t} = -\infty.$$

Определение 11. Полугруппа $U(t)$ называется *нильпотентной*, если $\exists\, t_0 > 0$ такое, что

$$U(t) = 0, \qquad \forall t \geqslant t_0.$$

3.2 Свойства производящего оператора полугруппы

Утверждение 1. *Пусть оператор A порождает полугруппу $U(t)$ класса C_0. Тогда, если $x \in D(A)$, то $U(t)x \in D(A)$, $\forall t \geqslant 0$.*

Доказательство. По определению

$$Ax = \lim_{s\to 0+} \frac{U(s)x - x}{s}.$$

При каждом фиксированном $t \geqslant 0$ оператор $U(t)$ ограничен и линеен, следовательно, непрерывен. С учётом изложенного получаем

$$AU(t)x = \lim_{s\to 0+} \frac{U(s)U(t)x - U(t)x}{s} = \lim_{s\to 0+} U(t)\frac{U(s)x - x}{s} =$$

$$= U(t) \lim_{s\to 0+} \frac{U(s)x - x}{s} = U(t)Ax.$$

При каждом фиксированном $t \geqslant 0$ элемент $U(t)Ax$ существует, поскольку $x \in D(A)$, $Ax \in E$. $\square$

Утверждение 2. *Пусть оператор A порождает полугруппу $U(t)$ класса C_0. Тогда справедливо следующее равенство*

$$A\int\limits_{t_1}^{t_2} U(s)x\,ds = U(t_2)x - U(t_1)x, \qquad \forall t_1, t_2 \geqslant 0, \quad \forall x \in E. \tag{9}$$

Доказательство. Для начала докажем

$$\lim_{h\to 0+} \frac{1}{h}\int\limits_{t}^{t+h} U(s)x\,ds = U(t)x, \qquad \forall t \geqslant 0, \quad \forall x \in E. \tag{10}$$

Фиксируем $h > 0$, $x \in E$. Тогда

$$\frac{1}{h}\int\limits_{t}^{t+h} U(s)x\,ds - U(t)x = \frac{1}{h}\int\limits_{t}^{t+h} [\,U(s) - U(t)\,]x\,ds =$$

$$= U(t)\int\limits_{t}^{t+h} \frac{U(s-t) - I}{h}\,x\,ds = U(t)\int\limits_{0}^{h} \frac{U(s) - I}{h}\,x\,ds =$$

$$= U(t)\int\limits_{0}^{h} \frac{s}{h}\,\frac{U(s) - I}{s}\,x\,ds.$$

Оценим последнее выражение.

$$\left\| U(t)\int\limits_{0}^{h} \frac{s}{h}\,\frac{U(s) - I}{s}\,x\,ds \right\|_E \leqslant \|\, U(t)\,\|_{\mathfrak{L}(E)} \int\limits_{0}^{h} \left\| \frac{U(s) - I}{s}\,x \right\|_E ds.$$

При $h \to 0+$ получим

$$\|\, U(t)\,\|_{\mathfrak{L}(E)} \int\limits_{0}^{0} \|\, Ax\,\|_E\, ds = 0,$$

что и доказывает равенство (10).

Вернёмся к доказательству утверждения. Фиксируем $h > 0$, $t_1, t_2 \geqslant 0$, $x \in E$. Рассмотрим следующее выражение:

$$\frac{U(h) - I}{h}\int\limits_{t_1}^{t_2} U(s)x\,ds = \frac{1}{h}\left(\int\limits_{t_1}^{t_2} U(s+h)x\,ds - \int\limits_{t_1}^{t_2} U(s)x\,ds\right). \tag{11}$$

Преобразуем первый интеграл в правой части равенства (11).

$$\int_{t_1}^{t_2} U(s+h)x\,ds = \int_{t_1+h}^{t_2+h} U(s)x\,ds \;=\; \int_{t_2}^{t_2+h} U(s)x\,ds + \int_{t_1}^{t_2} U(s)x\,ds + \int_{t_1+h}^{t_1} U(s)x\,ds.$$

Тогда в соотношении (11) имеем

$$\frac{U(h)-I}{h}\int_{t_1}^{t_2} U(s)x\,ds = \frac{1}{h}\int_{t_2}^{t_2+h} U(s)x\,ds - \frac{1}{h}\int_{t_1}^{t_1+h} U(s)x\,ds.$$

Последнее выражение в силу (10) стремится к $U(t_2)x - U(t_1)x$ при $h \to 0+$. С другой стороны, имеем

$$\lim_{h\to 0+}\frac{U(h)-I}{h}\int_{t_1}^{t_2} U(s)x\,ds = A\int_{t_1}^{t_2} U(s)x\,ds,$$

откуда и следует равентсво (9). □

3.3 Общая постановка нелокальной задачи

В вещественном банаховом пространстве E рассматривается дифференциальное уравнение

$$\frac{du(t)}{dt} = Au(t), \qquad t \geqslant 0, \tag{12}$$

с замкнутым линейным оператором A. Область определения $D(A)$ плотна в E. Оператор A порождает в E нильпотентную полугруппу $U(t)$ класса C_0.

Поскольку нильпотентная полугруппа $U(t)$, очевидно, квазинильпотентна, справедливо равенство [см. определение 10]

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{\ln\|\,U(t)\,\|}{t} = -\infty.$$

Тогда, согласно [5, теорема VIII.1.11], резольвента $R(\lambda; A)$ определена при $\forall\lambda \in \mathbb{R}$ по формуле

$$R(\lambda; A)x = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}\,U(t)x\,dt, \qquad \forall x \in E.$$

Положим в этой формуле $\lambda = 0$. Получим

$$A^{-1}x = \int_0^{+\infty} U(t)x\,dt, \qquad \forall x \in E.$$

Таким образом, оператор A^{-1} существует и определён определён на всём E.

Обобщённым решением уравнения (12) назовём векторную функцию $u(t) = U(t)u_0$, заданную при $t \geqslant 0$, с элементом $u_0 \in E$. При этом $u_0 = u(0)$ есть начальное состояние решения. В случае, когда $u_0 \in D(A)$, решение $u(t) = U(t)u_0$ называем классическим.

Отметим, что так определённое обобщённое решение $u(t) = U(t)u_0$ есть векторная функция из класса $C([0, +\infty); E)$, удовлетворяющая проинтегрированной версии уравнения (12) в том смысле, что

$$u(t_2) - u(t_1) = A \int\limits_{t_1}^{t_2} u(t)\, dt, \qquad \forall t_1, t_2 \geqslant 0.$$

Последнее равенство в наших предположениях заведомо выполнено в силу утверждения 2.

Что касается классичекого решения, оно удовлетворяет уравнению (12) в строгом смысле, являясь функцией из класса $C^1([0, +\infty); E)$ со значениями в $D(A)$.

В качестве дополнительного условия возьмём интеграл

$$\int\limits_0^T \eta(t)u(t)\, dt = \psi. \tag{13}$$

Здесь элемент $\psi \in E$ задан, функция $\eta(t)$ известна, кусочно постоянна и определяется по формуле (5).

Обобщённым решением задачи (12), (13) назовём векторную функцию $u(t) = U(t)u_0$, где элемент $u_0 \in E$ выбран так, что выполнено условие (13). Если $u_0 \in D(A)$, решение $u(t) = U(t)u_0$ называем классическим.

Поставленную задачу (12)–(13) коротко называем абстрактной задачей.

3.4 Вывод операторного уравнения

Подставим $u(t) = U(t)u_0$ в (13). Получим

$$\int\limits_0^T \eta(t)U(t)u_0\, dt = \psi.$$

Учитывая конкретный вид функции $\eta(t)$ [см. формула (5)], получим

$$\sum_{k=1}^{p} \alpha_k \int\limits_{\tau_{k-1}}^{\tau_k} U(t)u_0\, dt = \psi.$$

Предположим $\psi \in D(A)$. Подействуем на обе части равенства оператором $(-A)$. В силу утверждения 2 имеем

$$-\sum_{k=1}^{p} \alpha_k \left[U(\tau_k) - U(\tau_{k-1}) \right] u_0 = -A\psi.$$

Далее, применим преобразование Абеля, обозначив $\alpha_{p+1} = 0$.

$$\sum_{k=1}^{p} \alpha_k \left[U(\tau_k) - U(\tau_{k-1}) \right] = \sum_{k=1}^{p} \alpha_k U(\tau_k) - \sum_{k=1}^{p} \alpha_k U(\tau_{k-1}) =$$

$$= \sum_{k=1}^{p} \alpha_k U(\tau_k) - \sum_{k=0}^{p-1} \alpha_{k+1} U(\tau_k) = \sum_{k=1}^{p} \alpha_k U(\tau_k) -$$

$$- \sum_{k=1}^{p} \alpha_{k+1} U(\tau_k) - \alpha_1 U(\tau_0) = -\alpha_1 + \sum_{k=1}^{p} (\alpha_k - \alpha_{k+1}) U(\tau_k).$$

Таким образом

$$\alpha_1 u_0 - \sum_{k=1}^{p} (\alpha_k - \alpha_{k+1}) U(\tau_k) u_0 = -A\psi.$$

Обозначим $B = \sum\limits_{k=1}^{p} (\alpha_k - \alpha_{k+1}) U(\tau_k),\ g = -A\psi$. Получим операторное уравнение

$$\alpha_1 u_0 - B u_0 = g. \tag{14}$$

3.5 Разрешающая формула

Заметим, что оператор B является линейной комбинацией значений нильпотентной полугруппы $U(\tau_k)$ при $k = 1, ..., p$. В свою очередь, оператор B^n будет являться линейной комбинацией выражений вида

$$U(\tau_{k_1}) U(\tau_{k_2}) ... U(\tau_{k_n}) = U\left(\sum_{i=1}^{n} \tau_{k_i} \right), \quad k_i \in \{1, ..., p\},\ i = 1, ..., n.$$

Поскольку $\tau_{k_i} > 0$, найдётся такое $n \in \mathbb{N}$, что

$$\sum_{i=1}^{n} \tau_{k_i} \geqslant t_0, \quad \forall (k_1, ..., k_n) : k_i \in \{1, ..., p\},\ i = 1, ..., n.$$

В силу определения $U(t)$ это означает, что $B^n = 0$, то есть оператор B является нильпотентным.

Прежде чем найти индекс нильпотентности оператора B, выведем формулу для оператора B^n, $n \geqslant 2$. Обозначим

$$C_n^{k_1,\dots,k_p} \equiv \frac{n!}{k_1! \cdots k_p!}.$$

Учитывая, что $\alpha_{p+1} = 0$, имеем

$$\begin{aligned}
B^n = {} & \left[\sum_{k=1}^{p} (\alpha_k - \alpha_{k+1}) U(\tau_k) \right]^n = \\
= & \sum_{\substack{k_i \geqslant 0 \\ k_1+\ldots+k_p=n}} C_n^{k_1,\dots,k_p} \, [\,(\alpha_1 - \alpha_2) U(\tau_1)\,]^{k_1} \times \\
& \times [\,(\alpha_2 - \alpha_3) U(\tau_2)\,]^{k_2} \ldots [\,(\alpha_p - \alpha_{p+1}) U(\tau_p)\,]^{k_p} = \\
= & \sum_{\substack{k_i \geqslant 0 \\ k_1+\ldots+k_p=n}} C_n^{k_1,\dots,k_p} \, (\alpha_1 - \alpha_2)^{k_1} \, U(k_1 \tau_1) \times \\
& \times (\alpha_2 - \alpha_3)^{k_2} \, U(k_2 \tau_2) \ldots (\alpha_p - \alpha_{p+1})^{k_p} \, U(k_p \tau_p) = \\
= & \sum_{\substack{k_i \geqslant 0 \\ k_1+\ldots+k_p=n}} C_n^{k_1,\dots,k_p} \, (\alpha_1 - \alpha_2)^{k_1} \, (\alpha_2 - \alpha_3)^{k_2} \ldots (\alpha_p - \alpha_{p+1})^{k_p} \, U\left(\sum_{i=1}^{p} k_i \tau_i \right).
\end{aligned}$$

Таким образом

$$B^n = \sum_{\substack{k_i \geqslant 0 \\ k_1+\ldots+k_p=n}} C_n^{k_1,\dots,k_p} \prod_{m=1}^{p} (\alpha_m - \alpha_{m+1})^{k_m} \, U\left(\sum_{i=1}^{p} k_i \tau_i \right). \tag{15}$$

Обозначим

$$S_n^p = \left\{ (k_1, \dots, k_p) \;\middle|\; k_i \in \mathbb{N}_0,\ i = 1, \dots, p;\ \sum_{i=1}^{p} k_i = n \right\}.$$

Найдём n_0 — индекс нильпотентности оператора B. Из фомрулы (15) вытекает, что число n_0 определяется следующим образом:

$$\sum_{i=1}^{p} k_i \tau_i \geqslant t_0, \quad \forall (k_1, \dots, k_p) \in S_{n_0}^p.$$

Здесь $t_0 > 0$ из определения 11. Это условие выполнено тогда и только тогда, когда

$$\min_{(k_1,\dots,k_p) \in S_{n_0}^p} \sum_{i=1}^{p} k_i \tau_i \geqslant t_0. \tag{16}$$

Поскольку $\tau_{i-1} < \tau_i$, $i = 1, ..., p$, минимум в (16) достигается при $k_1 = n_0$, $k_2 = ... = k_p = 0$. Следовательно,

$$n_0\tau_1 \geqslant t_0 \quad \Longrightarrow \quad n_0 \geqslant \frac{t_0}{\tau_1} \quad \Longrightarrow \quad n_0 = \left\lceil \frac{t_0}{\tau_1} \right\rceil.$$

Итак, оператор B имеет индекс нильпотентности $n_0 = \lceil t_0/\tau_1 \rceil$.

Найдём начальное состояние u_0. Для этого рассмотрим операторное уравнение (14). Разделим обе части равенства на α_1. Обозначим $\widetilde{B} = B/\alpha_1$, $\widetilde{g} = g/\alpha_1$. Имеем

$$u_0 - \widetilde{B}u_0 = \widetilde{g}. \tag{17}$$

Последовательно подействуем операторами $\widetilde{B}^n$, $n = 1, 2, ..., n_0 - 1$, на равенство (17). Получим

$$\begin{gathered}
\widetilde{B}u_0 - \widetilde{B}^2 u_0 = \widetilde{B}\,\widetilde{g}, \\
\widetilde{B}^2 u_0 - \widetilde{B}^3 u_0 = \widetilde{B}^2\,\widetilde{g}, \\
\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
\widetilde{B}^{n_0-2} u_0 - \widetilde{B}^{n_0-1} u_0 = \widetilde{B}^{n_0-2}\,\widetilde{g}, \\
\widetilde{B}^{n_0-1} u_0 = \widetilde{B}^{n_0-1}\,\widetilde{g}.
\end{gathered}$$

Складывая полученные равенства с равенством (17), получим

$$u_0 = \sum_{n=0}^{n_0-1} \widetilde{B}^n\,\widetilde{g} = \sum_{n=0}^{n_0-1} \frac{1}{\alpha_1^{n+1}} B^n g. \tag{18}$$

С учётом формулы (15) и обозначения элемента g, окончательно получим

$$u_0 = \sum_{n=0}^{n_0-1} \frac{1}{\alpha_1^{n+1}} \sum_{\substack{k_i \geqslant 0 \\ k_1 + ... + k_p = n}} C_n^{k_1, ..., k_p} \prod_{m=1}^{p} (\alpha_m - \alpha_{m+1})^{k_m}\, U\left(\sum_{i=1}^{p} k_i\tau_i\right)(-A\psi), \tag{19}$$

где $n_0 = \left\lceil \dfrac{t_0}{\tau_1} \right\rceil$, $\alpha_{p+1} = 0$.

3.6 Важный частный случай

Рассмотрим формулу (19) при $p = 2$. Обозначим $\tau_1 = \tau$. С учётом $\tau_2 = T$, имеем

$$u_0 = \sum_{n=0}^{n_0-1} \frac{1}{\alpha_1^{n+1}} \sum_{\substack{k_i \geqslant 0 \\ k_1+k_2=n}} C_n^{k_1,\ldots,k_2} \prod_{m=1}^{2} (\alpha_m - \alpha_{m+1})^{k_m} U\left(\sum_{i=1}^{2} k_i \tau_i\right)(-A\psi) =$$

$$= \sum_{n=0}^{n_0-1} \frac{1}{\alpha_1^{n+1}} \sum_{k=0}^{n} C_n^k (\alpha_1 - \alpha_2)^k \, \alpha_2^{n-k} \, U(\, k\tau + [n-k]T\,)(-A\psi) =$$

$$= \frac{1}{\alpha_1} \sum_{n=0}^{n_0-1} \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)^n \sum_{k=0}^{n} C_n^k \left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2} - 1\right)^k U(\, k\tau + [n-k]T\,)(-A\psi).$$

Обозначим $\alpha \equiv \alpha_1$, $r \equiv \alpha_1/\alpha_2$. В итоге, получим

$$u_0 = \frac{1}{\alpha} \sum_{n=0}^{n_0-1} \left(\frac{1}{r}\right)^n \sum_{k=0}^{n} C_n^k \,(\, r-1\,)^k \, U(\, k\tau + [n-k]T\,)\,(-A\psi). \qquad (20)$$

Формула (20) есть частный случай общего соотношения (19). Этот вариант удобно применять в случае, когда весовая функция $\eta(t)$ имеет лишь одну точку разрыва.

3.7 Характер получаемых решений

Прежде всего отметим, что абстрактная задача неразрешима при $\psi \in E \setminus D(A)$. Действительно, подставим $u(t) = U(t)u_0$ в (13) и воспользуемся определением $\eta(t)$. Получим

$$\sum_{k=1}^{p} \alpha_k \int_{\tau_{k-1}}^{\tau_k} U(t)u_0 \, dt = \psi. \qquad (21)$$

Так как оператор А порождает полугруппу $U(t)$ класса C_0, справедливо утвержедене 2. Следовательно,

$$\int_{\tau_{k-1}}^{\tau_k} U(t)u_0 \, dt \in D(A), \qquad k = 1, ..., p.$$

В силу линейности оператора А

$$\sum_{k=1}^{p} \alpha_k \int_{\tau_{k-1}}^{\tau_k} U(t)u_0 \, dt \in D(A).$$

Отсюда следует неразрешимость абстрактной задачи при $\psi \in E \setminus D(A)$.

Теперь предположим, что $\psi \in D(A)$. Тогда решение абстрактной задачи задаётся формулой (19), что и означает разрешимость абстрактной задачи.

Пусть абстрактная задача разрешима. Тогда она эквивалентна операторному уравнению (14) в том смысле, что множества их решений совпадают. Действительно, учитывая обратмость оператора A, все преобразования при получении операторного уравнения (14) являются эквивалентными.

Выясним, при каких $\psi \in D(A)$ задача будет иметь классическое решение, то есть будет выполнено условие $u_0 \in D(A)$. Рассмотрим операторное уравнение (14) с учётом обозначений.

$$\alpha_1 u_0 - \sum_{k=1}^{p} (\alpha_k - \alpha_{k+1}) U(\tau_k) u_0 = -A\psi.$$

Положим в этом уравнении $u_0 \in D(A)$. Тогда, в силу утверждения 1, имеем $U(\tau_k)u_0 \in D(A)$, $k = 1, ..., p$. Следовательно,

$$\alpha_1 u_0 - \sum_{k=1}^{p} (\alpha_k - \alpha_{k+1}) U(\tau_k) u_0 \in D(A).$$

Тогда

$$A\psi \in D(A) \quad \Longleftrightarrow \quad \psi \in A^{-1}(D(A)) = D(A^2),$$

так как оператор A^2 действует по схеме $A^{-1}(D(A)) \xrightarrow{A} D(A) \xrightarrow{A} R(A)$.

В итоге,

1) при $\psi \in E \setminus D(A)$ абстрактная задача неразрешима;
2) при $\psi \in D(A)$ решение абстрактной задачи является обобщённым;
3) при $\psi \in D(A^2)$ решение абстрактной задачи является классическим.

4 Пример: оператор простого переноса

Перейдём к конкретным примерам. Пусть $E = L_1[0, l]$ с обычной лебеговой нормой

$$\| f \| = \int\limits_0^l |f(x)|\, dx. \tag{22}$$

Число $l > 0$ считаем фиксированным.

В пространстве $E = L_1[0, l]$ рассмотрим оператор простого переноса

$$A = -a\frac{d}{dx} \tag{23}$$

с фиксированным числом $a > 0$. Считаем, что оператор (23) имеет область определения

$$D(A) = \{\, f \in AC[0, l] \ \mid\ f(0) = 0 \,\}, \tag{24}$$

где $AC[0, l]$ — пространство абсолютно непрерывных на отрезке $[0, l]$ функций [см. [8], стр. 342-347].

Полугруппа $U(t)$, порождаемая оператором A, имеет вид

$$U(t)f(x) = \begin{cases} f(x - at), & x > at, \\ 0, & x \leqslant at, \end{cases}$$

или

$$U(t)f(x) = \Theta(x - at)f(x - at), \qquad 0 \leqslant x \leqslant l, \quad 0 \leqslant t \leqslant T.$$

Здесь и далее $\Theta(x)$ — функция Хевисайда, определённая следующим образом:

$$\Theta(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x \leqslant 0. \end{cases}$$

Отметим, что число t_0 из определения нильпотентной полугруппы (11) в данном случае равно x/a, поскольку действие полугруппы рассматривается при фиксированном x.

В этом случае разрешающая формула (19) имеет вид

$$\begin{gathered} u_0(x) = a \sum_{n=0}^{n_0-1} \frac{1}{\alpha_1^{n+1}} \sum_{\substack{k_i \geqslant 0 \\ k_1+\ldots+k_p=n}} C_n^{k_1,\ldots,k_p} \prod_{m=1}^{p} (\alpha_m - \alpha_{m+1})^{k_m} \times \\ \times \Theta\left(x - a\sum_{i=1}^{p} k_i\tau_i\right) \psi'\left(x - a\sum_{i=1}^{p} k_i\tau_i\right), \qquad 0 \leqslant x \leqslant l, \end{gathered} \tag{25}$$

где $n_0 = \lceil x/(a\tau_1) \rceil$, $\alpha_{p+1} = 0$.

5 Пример: оператор переноса с поглощением

Пусть значение $l > 0$ фиксировано. В пространстве $E = L_1[0,l]$ с лебеговой нормой рассмотрим (22) оператор переноса с поглощением

$$A = -a\,\frac{d}{dx} - \sigma. \tag{26}$$

Здесь коэффициенты

$$a \in \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}, \quad \sigma \in \{\, f \in C[0,l] \;|\; f(x) \geqslant 0,\ x \in [0,l]\,\}$$

фиксированы. Оператор (26) имеет область определения

$$D(A) = \{\, f \in AC[0,l] \;|\; f(0) = 0\,\}.$$

Полугруппа $U(t)$, порождённая оператором A, имеет вид

$$U(t)f(x) = \begin{cases} f(x-at)\exp\left(-\frac{1}{a}\int\limits_0^{at}\sigma(x-s)\,ds\right), & x > at,\\ 0, & x \leqslant at. \end{cases}$$

или

$$U(t)f(x) = \Theta(x-at)f(x-at)\exp\left(-\frac{1}{a}\int\limits_0^{at}\sigma(x-s)\,ds\right), \tag{27}$$

$$0 \leqslant x \leqslant l, \quad 0 \leqslant t \leqslant T.$$

В этом случае разрешающая формула (19) имеет вид

$$u_0(x) = a\sum_{n=0}^{n_0-1}\frac{1}{\alpha_1^{n+1}}\sum_{\substack{k_i\geqslant 0\\ k_1+\ldots+k_p=n}} C_n^{k_1,\ldots,k_p}\prod_{m=1}^{p}(\alpha_m-\alpha_{m+1})^{k_m}\times$$

$$\times\,\Theta\left(x - a\sum_{i=1}^{p}k_i\tau_i\right)\psi'\left(x - a\sum_{i=1}^{p}k_i\tau_i\right)\exp\left(-\frac{1}{a}\int\limits_0^{a\sum\limits_{i=1}^{p}k_i\tau_i}\sigma(x-s)\,ds\right), \tag{28}$$

$$0 \leqslant x \leqslant l,$$

где $n_0 = \lceil x/(a\tau_1)\rceil$, $\alpha_{p+1} = 0$.

6 Описание программы

6.1 Краткий обзор

Программа написана на языке Python.

Ввод данных осуществляется через диалоговое окно. На вход подаются следующие параметры.

1. l — положительное число, длина рассматриваемого отрезка $[0, l]$.

2. T — положительное число, время наблюдения за процессом.

3. a — положительное число, скорость переноса вещества.

4. $[\tau_1, \tau_2, ..., \tau_{p-1}]$ — массив чисел из интервала $(0, T)$, упорядоченных по возрастанию; внутренние точки разбиения отрезка $[0, T]$.

5. $[\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_p]$ — массив чисел; последовательные дискретные значения кусочно постоянной весовой функции $\eta(t)$, заданные по следующиму принципу
$$\eta(0) = \alpha_1,\ \eta(T) = \alpha_p; \qquad \eta(t) = \alpha_i, \quad t \in (\tau_{i-1}, \tau_i), \quad i = 1, ..., p.$$

6. $\gamma(t)$ — действительная функция, соответствующая граничному значению $u(0, t) = \gamma(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T$.

7. $\psi(x)$ — действительная функция, соответствующая нелокальному по времени t условию
$$\int\limits_0^T \eta(t) u(x, t)\, dt = \psi(x), \qquad 0 \leqslant x \leqslant l.$$

Дополнительно предусмотрена возможность ввода натурального числа N — количества точек на единичном отрезке. Количество точек сетки $\omega = \omega[0, l]$ по формуле $|\,\omega\,| = \lceil\, N\!\cdot\! l\,\rceil$.

Напомним, что сеткой $\omega[0, l]$ называется совокупность точек x_0, x_1, ..., x_n из отрезка $[0, l]$ таких, что
$$0 = x_0 < x_1 < ... < x_{n-1} < x_n = l.$$

Сетка $\omega[0, l]$ выбрана равномерной. В точках сетки $\omega[0, l]$ вычисляется искомая функция $\varphi(x)$ и по полученному массиву значений строится её график.

В программе реализована валидация (проверка на корректность) входных данных. Все поля ввода снабжены значениями по умолчанию.

На выходе получаем график функции $\varphi(x) = u(x, 0)$ — начального состояния системы.

6.2 Алгоритм

1. Определяются константы l, T, a, массивы $[\tau_1, \tau_2, ..., \tau_p]$, $[\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_p]$.

2. Определяются функции $\gamma(t)$, $\psi(x)$.

3. Вычисляется константа
$$\int\limits_0^T \eta(t)\gamma(t)\,dt.$$

4. Определяются функции
$$\int\limits_0^T \eta(t)w(x,t)\,dt, \quad \frac{d}{dx}\int\limits_0^T \eta(t)w(x,t)\,dt.$$

5. Определяются функции $\widetilde{\psi}(x)$, $\widetilde{\psi}\,'(x)$
$$\widetilde{\psi}(x) = \psi(x) - \int\limits_0^T \eta(t)w(x,t)\,dt - \psi(0) + \int\limits_0^T \eta(t)\gamma(t)\,dt,$$
$$\widetilde{\psi}\,'(x) = \psi'(x) - \frac{d}{dx}\int\limits_0^T \eta(t)w(x,t)\,dt.$$

6. Определяется функция $\varphi(x) = u(x,0)$ по формуле
$$\varphi(x) = a\sum_{n=0}^{n_0-1}\frac{1}{\alpha_1^{n+1}}\sum_{\substack{k_i\geqslant 0\\ k_1+\ldots+k_p=n}} C_n^{k_1,\ldots,k_p}\prod_{m=1}^{p}(\alpha_m-\alpha_{m+1})^{k_m}\times$$
$$\times\,\Theta\left(x - a\sum_{i=1}^{p}k_i\tau_i\right)\psi'\left(x - a\sum_{i=1}^{p}k_i\tau_i\right), \qquad 0\leqslant x\leqslant l.$$

7. Строится сетка $\omega[0,l]$.

8. В узлах сетки вычисляется функция $\varphi(x)$ и по получаемому массиву значений строится график этой функции.

9. В узлах сетки вычисляется функция
$$E(x) = \widetilde{\psi}(x) - \int\limits_0^T \eta(t)u(x,t)\,dt \quad \text{(погрешность аппроксимации)}$$
и по получаемому массиву значений строится её график.

7 Результаты вычислений

Во всех следующих наборах входных данных $l = 10$, $T = 5$, $a = 1$, $\gamma(t) \equiv 0$. Поэтому в качестве ввода будут указаваться массивы $[\alpha_1; \alpha_2; ...\alpha_p]$, $[\tau_1; \tau_2; ...\tau_{p-1}]$ и функция $\psi(x)$.

Входные данные: $\tau_1 = 2.5$, $[\alpha_1; \alpha_2] = [2; 1]$, $\psi(x) = x\exp(-x)$.

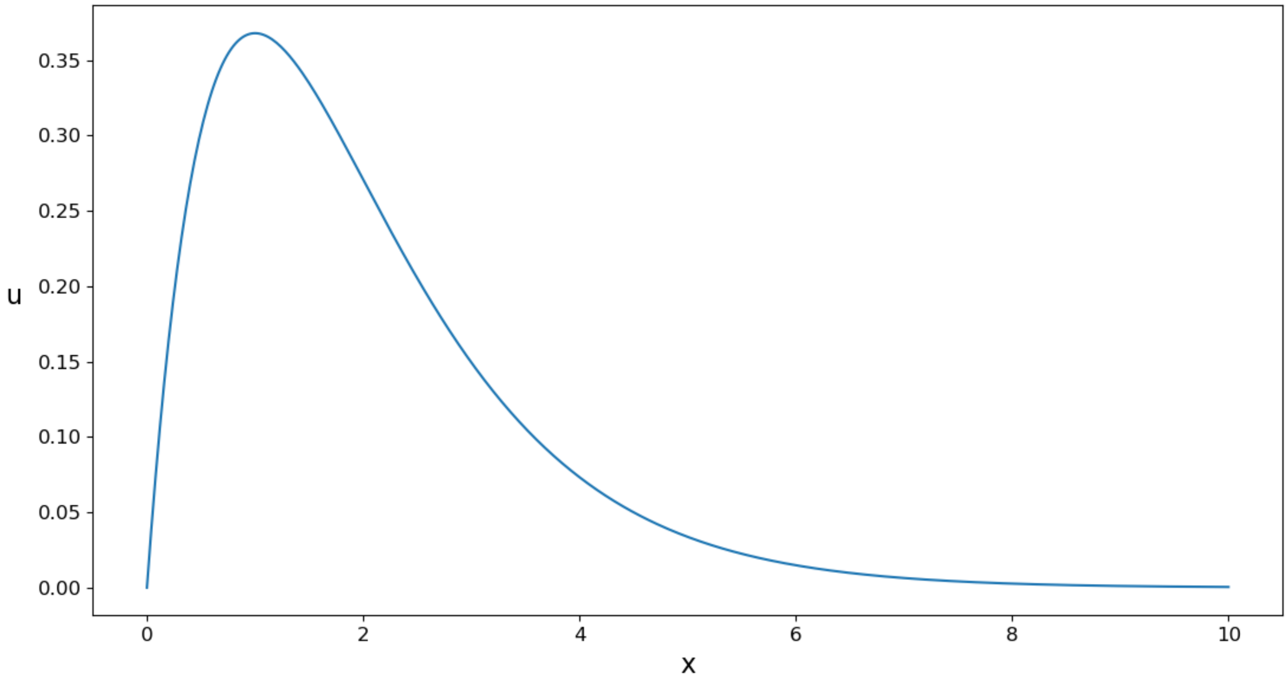

Рис. 1: Заданная функция $\psi(x)$

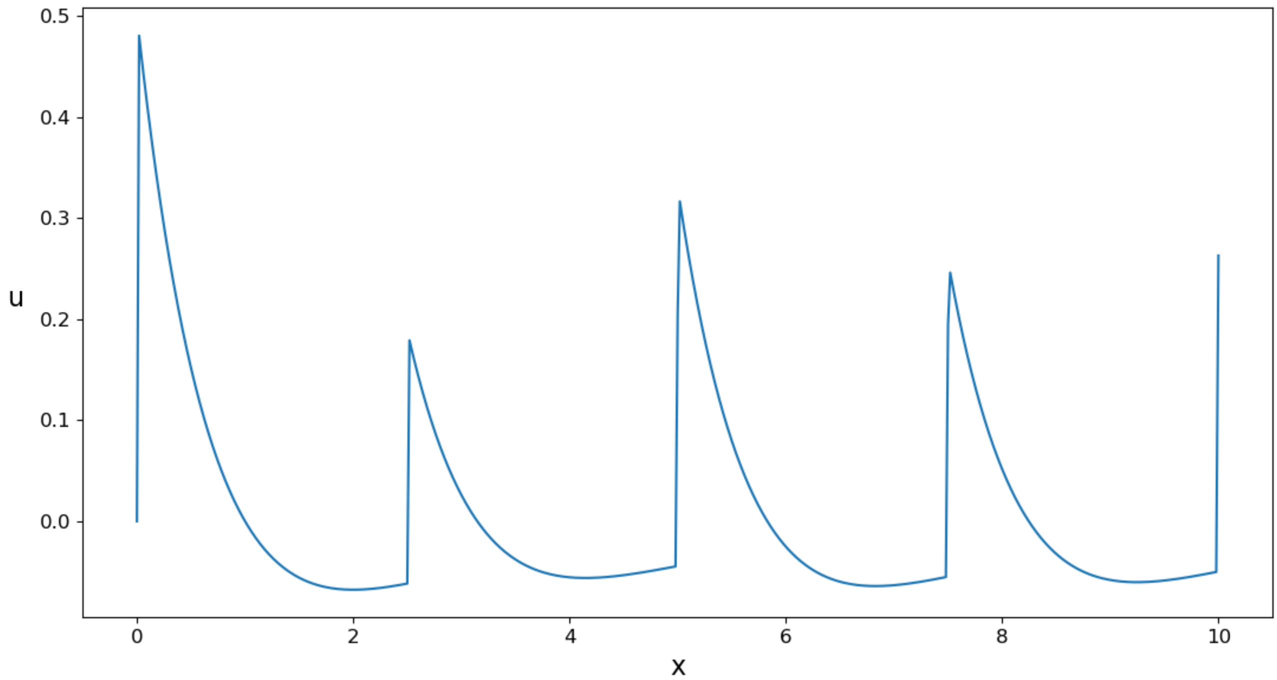

Рис. 2: Найденная функция $\varphi(x)$

Начальное условие $\varphi(x)$ соответствует обобщённому решению $u(x,t)$ в пространстве $L_1[0,l]$.

Входные данные: $\tau_1 = 2.5$, $[\alpha_1;\ \alpha_2] = [1;\ 2]$, $\psi(x) = x\,\mathrm{arctg}(x)$.

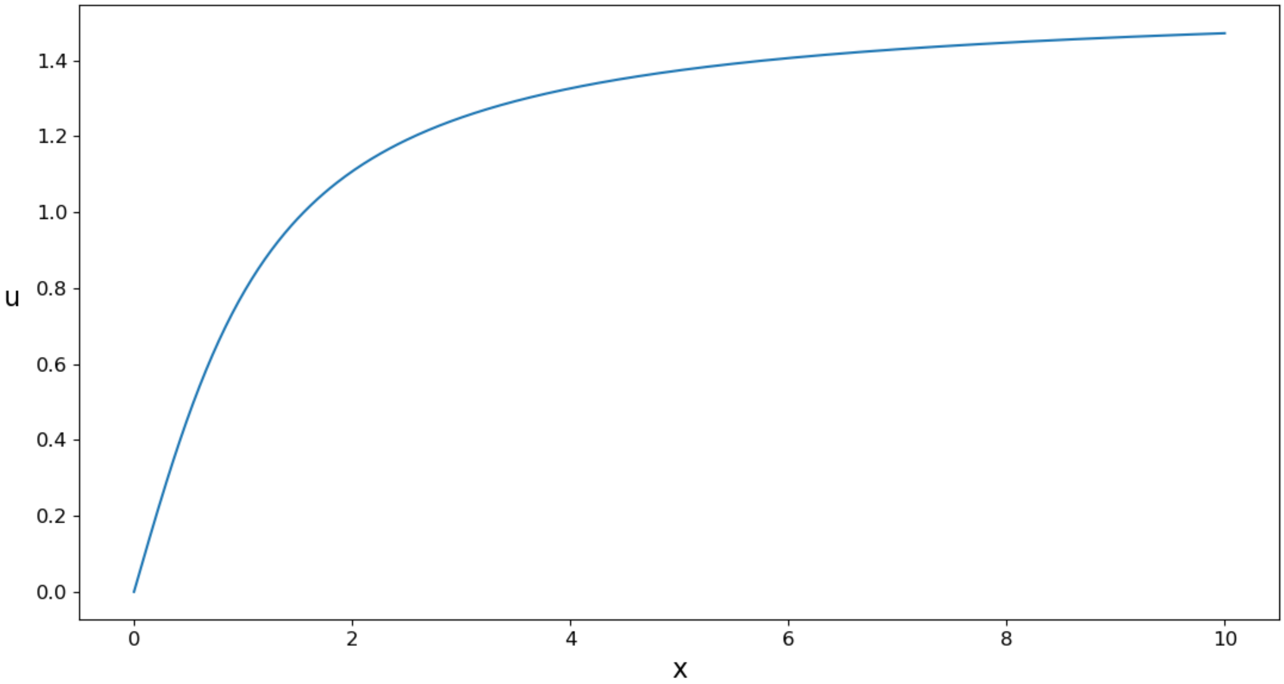

Рис. 3: Заданная функция $\psi(x)$

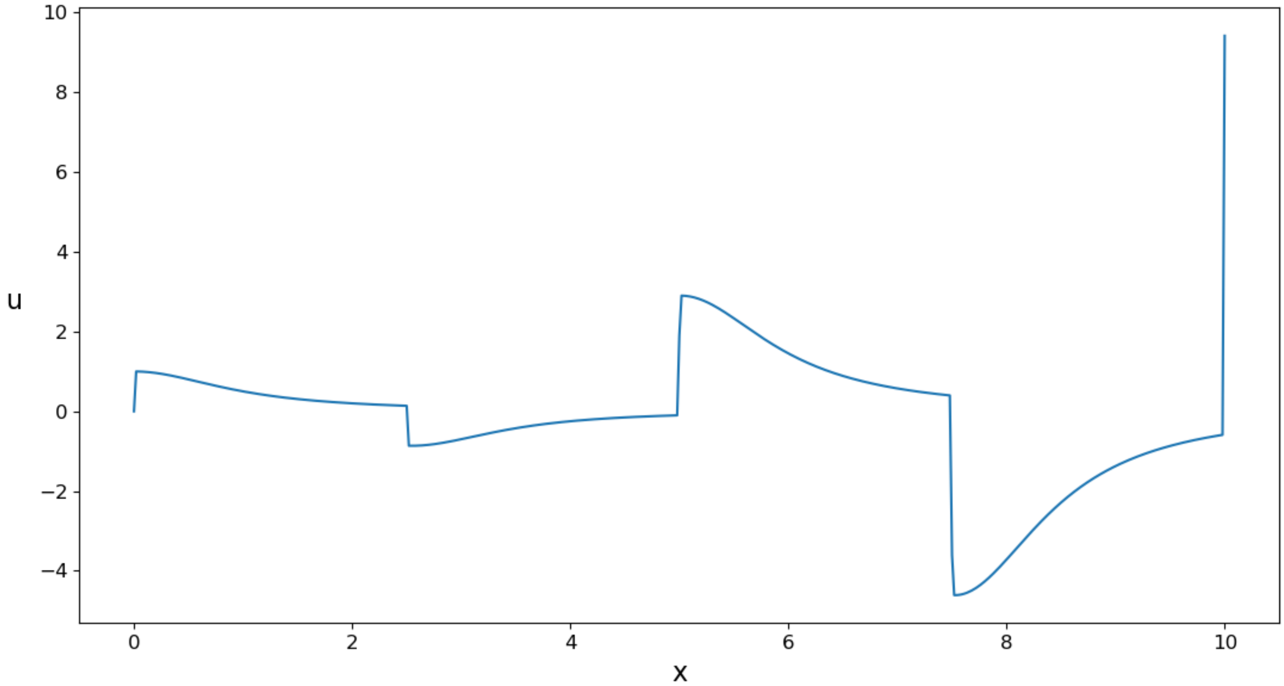

Рис. 4: Найденная функция $\varphi(x)$

Начальное условие $\varphi(x)$ соответствует обобщённому решению $u(x,t)$ в пространстве $L_1[0,l]$. При этом $\varphi(x) \in C[0,l]$.

Входные данные: $\tau_1 = 2.5$, $[\alpha_1; \alpha_2] = [1; 2]$, $\psi(x) = x^3(10 - x)$.

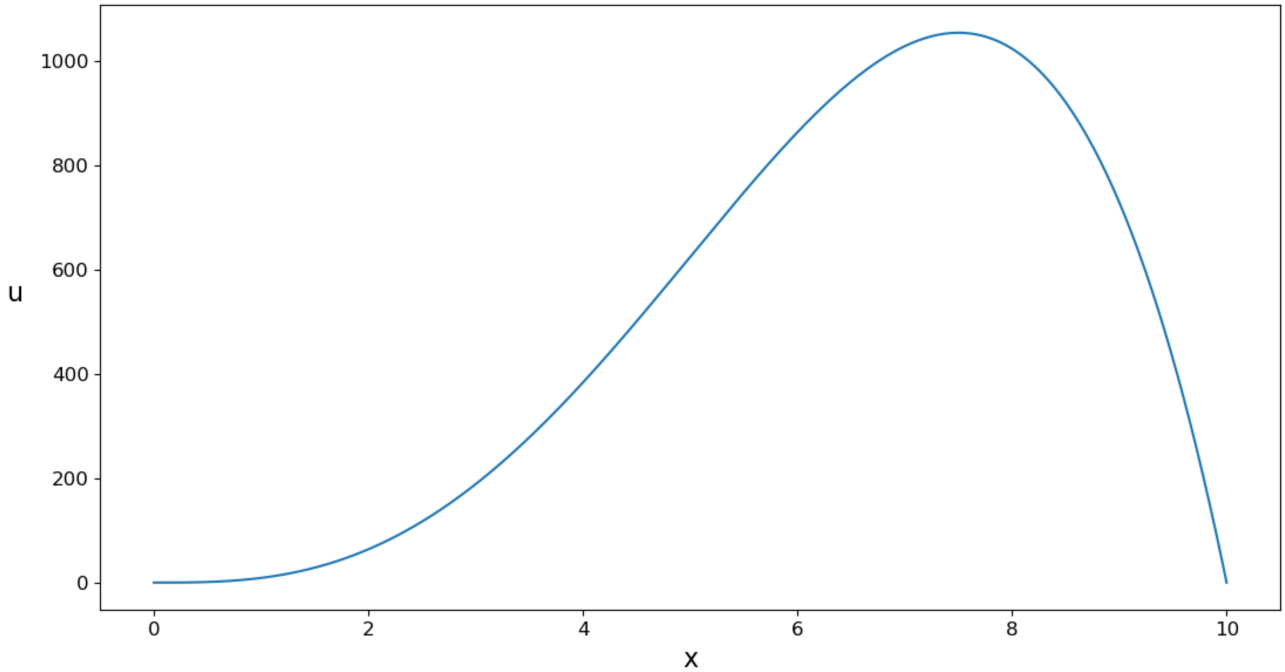

Рис. 5: Найденная функция $\psi(x)$

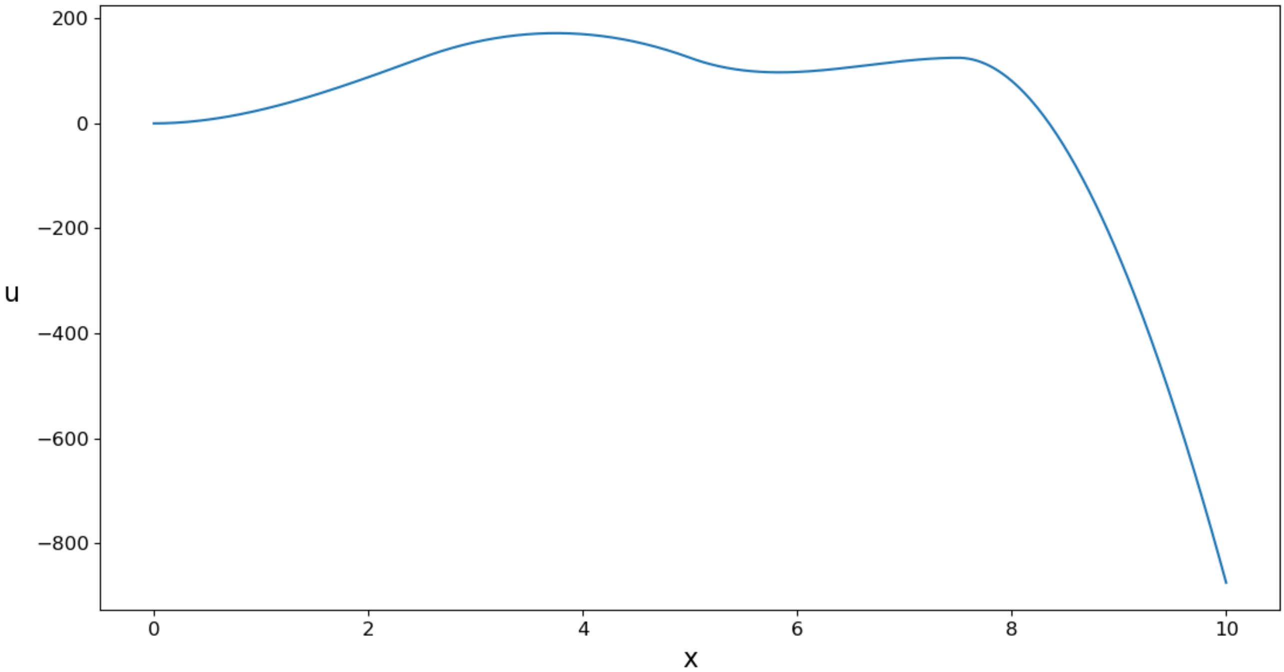

Рис. 6: Найденная функция $\varphi(x)$

Начальное условие соответсвует классическому решению $u(x, t)$ в пространстве $L_1[0, l]$. При этом $\varphi(x) \in C^2[0, l]$.

Входные данные:
$[\tau_1; \tau_2] = [1.666; 3.333]$, $[\alpha_1; \alpha_2; \alpha_3] = [3; 2; 1]$, $\psi(x) = x - \sin(x)$.

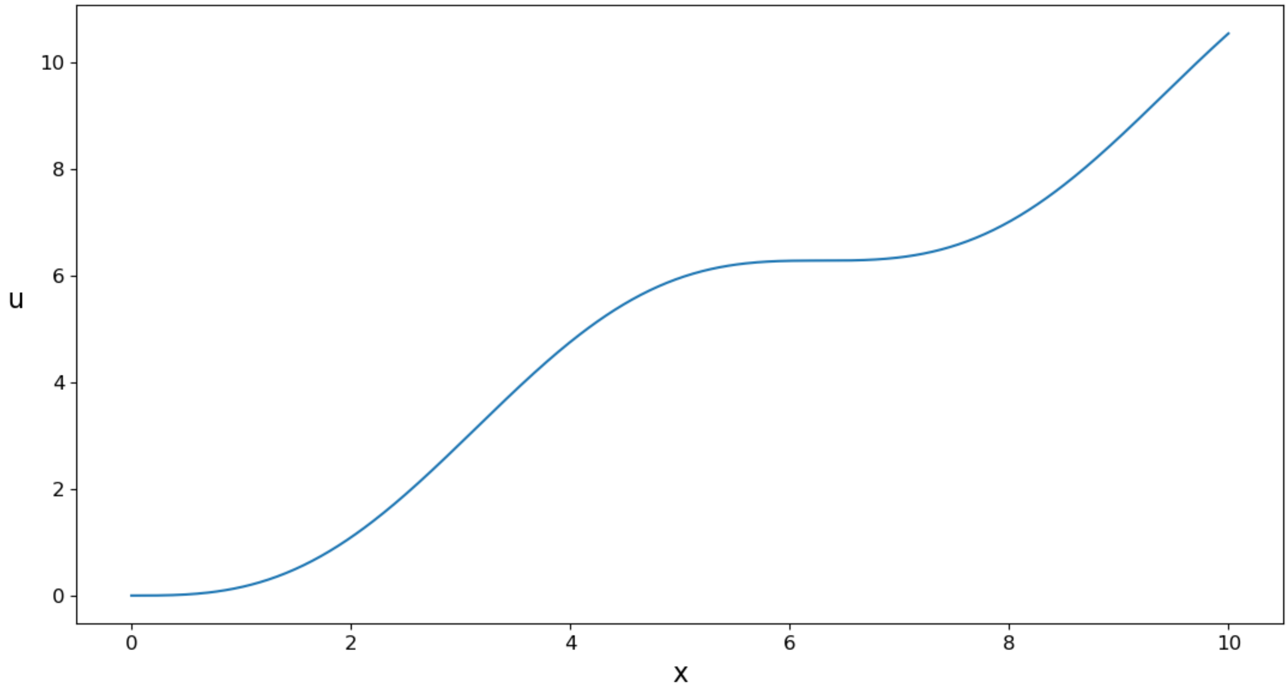

Рис. 7: Заданная функция $\psi(x)$

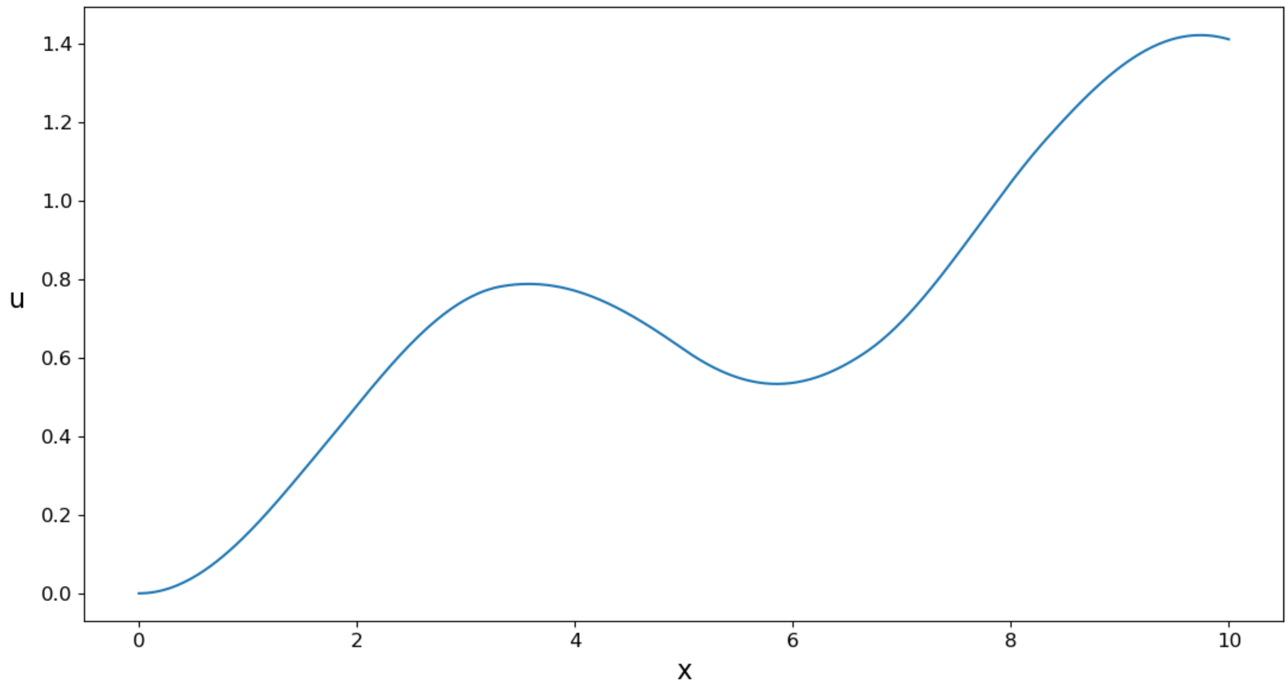

Рис. 8: Найденная функция $\varphi(x)$

Входные данные:
$[\tau_1;\ \tau_2] = [1.666;\ 3.333]$, $[\alpha_1;\ \alpha_2;\ \alpha_3] = [1;\ 2;\ 3]$, $\psi(x) = x - \sin(x)$.

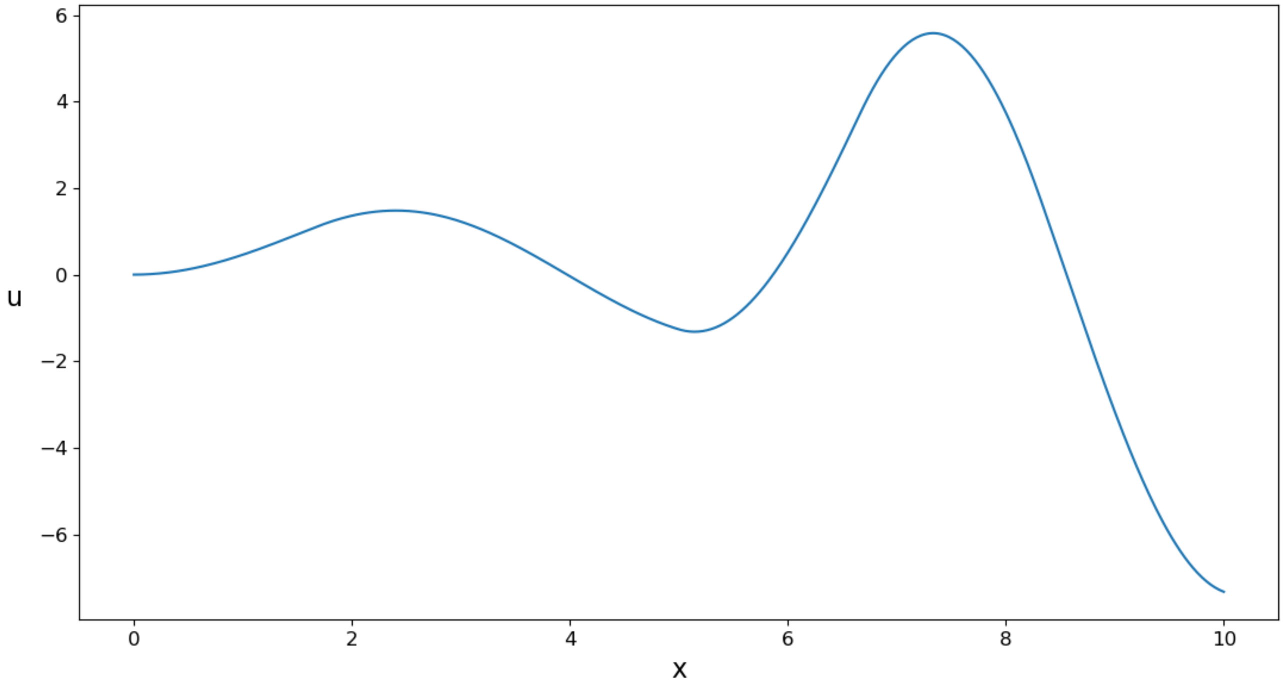

Рис. 9: Найденная функция $\varphi(x)$

Входные данные: $[\tau_1;\ \tau_2;\ \tau_3;\ \tau_4] = [1;\ 2;\ 3;\ 4]$,
$[\alpha_1;\ \alpha_2;\ \alpha_3;\ \alpha_4;\ \alpha_5] = [2;\ 1;\ 2;\ 1;\ 2]$, $\psi(x) = \arctan(x)(1-\cos(x))$.

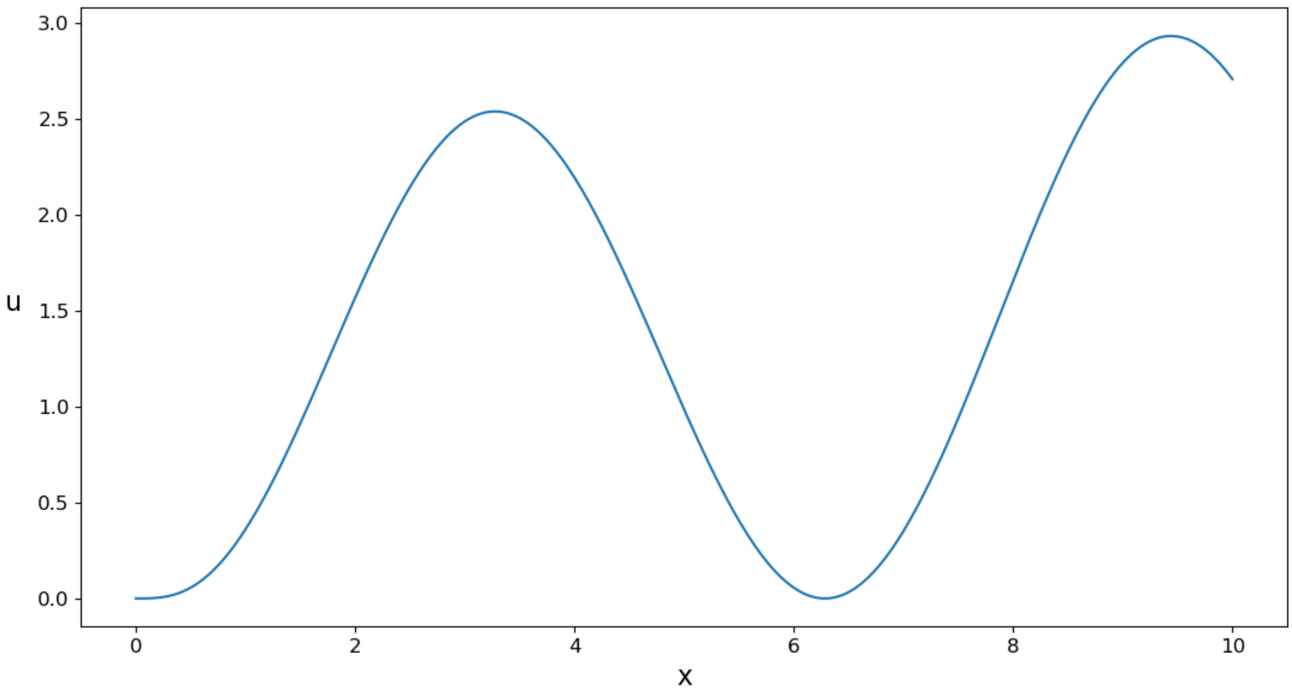

Рис. 10: Заданная функция $\psi(x)$

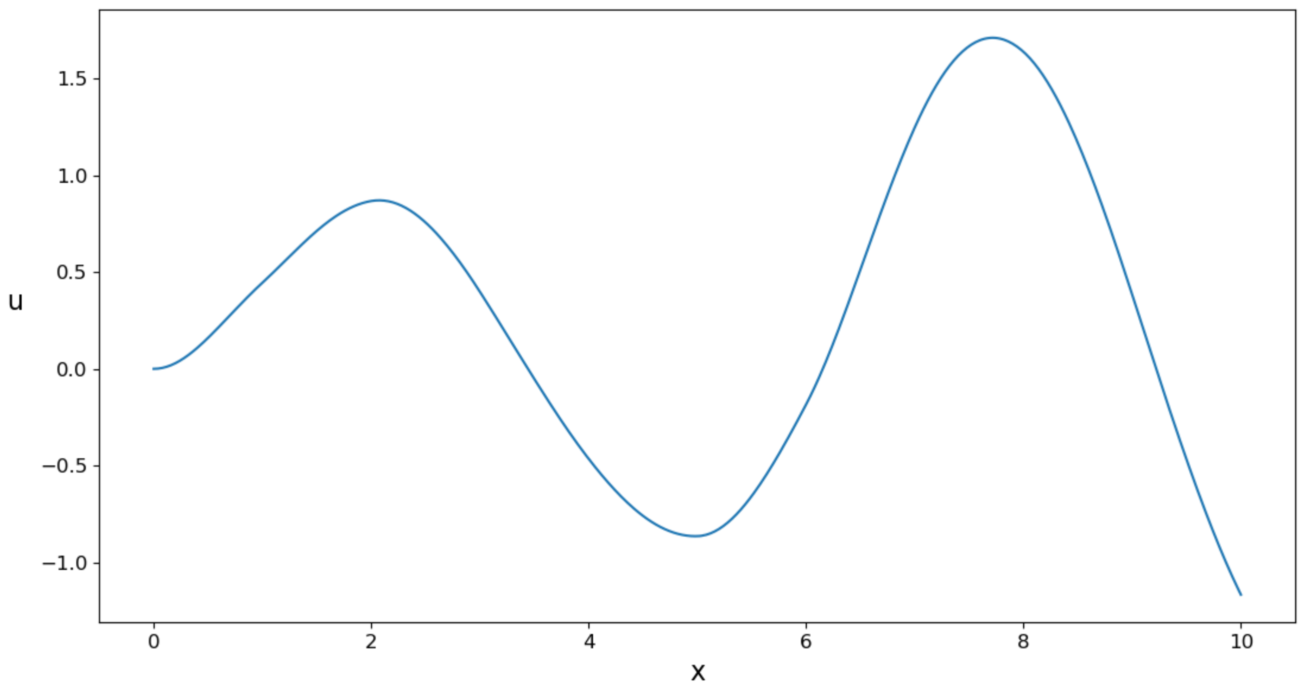

Рис. 11: Найденная функция $\varphi(x)$

Входные данные: $[\tau_1;\ \tau_2;\ \tau_3;\ \tau_4] = [1;\ 2;\ 3;\ 4]$,

$[\alpha_1;\ \alpha_2;\ \alpha_3;\ \alpha_4;\ \alpha_5] = [1;\ 2;\ 1;\ 2;\ 1]$, $\psi(x) = \arctan(x)(1 - \cos(x))$.

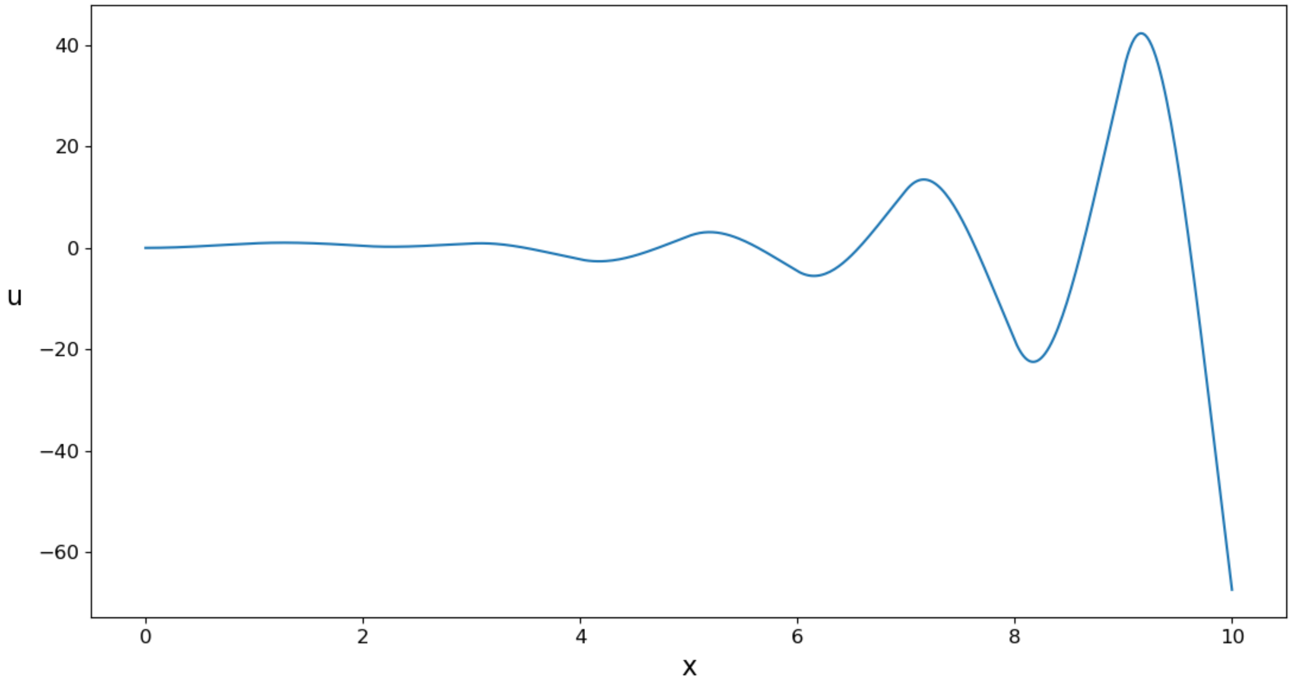

Рис. 12: Найденная функция $\varphi(x)$

Входные данные:
$[\tau_1;\ \tau_2] = [1.666;\ 3.333]$, $[\alpha_1;\ \alpha_2;\ \alpha_3] = [1;\ 2;\ 3]$, $\psi(x) = x^3$.

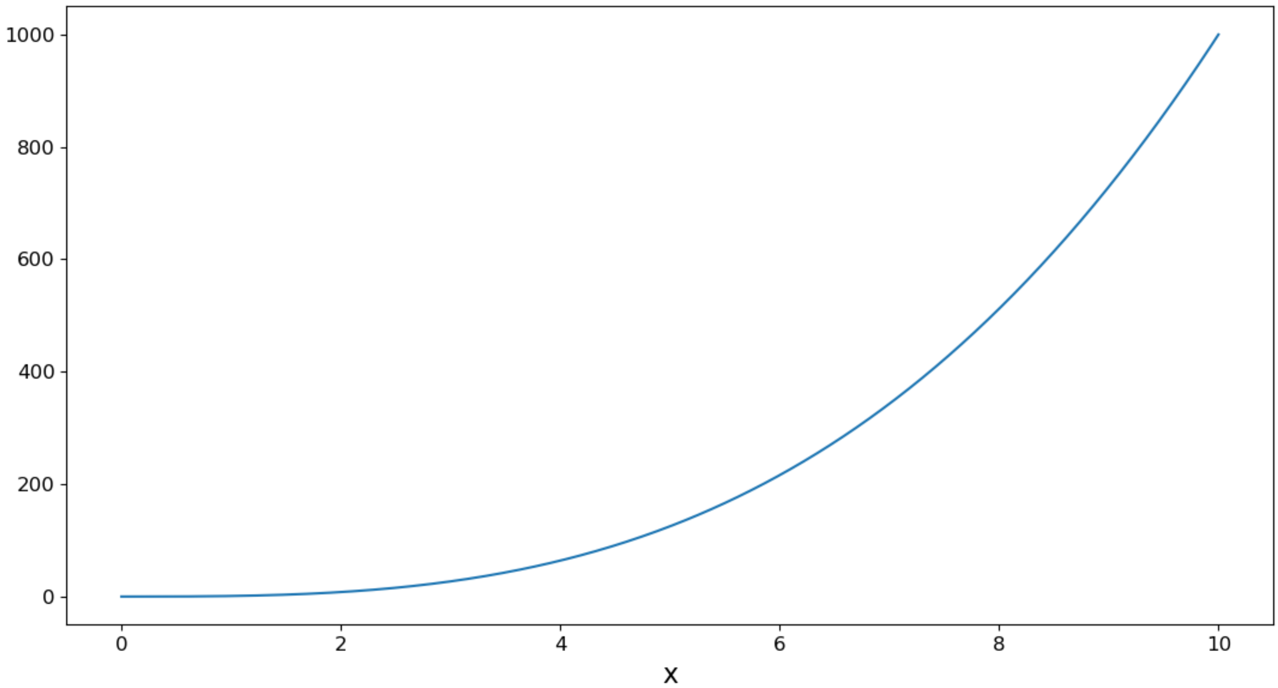

Рис. 13: Заданная функция $\psi(x)$

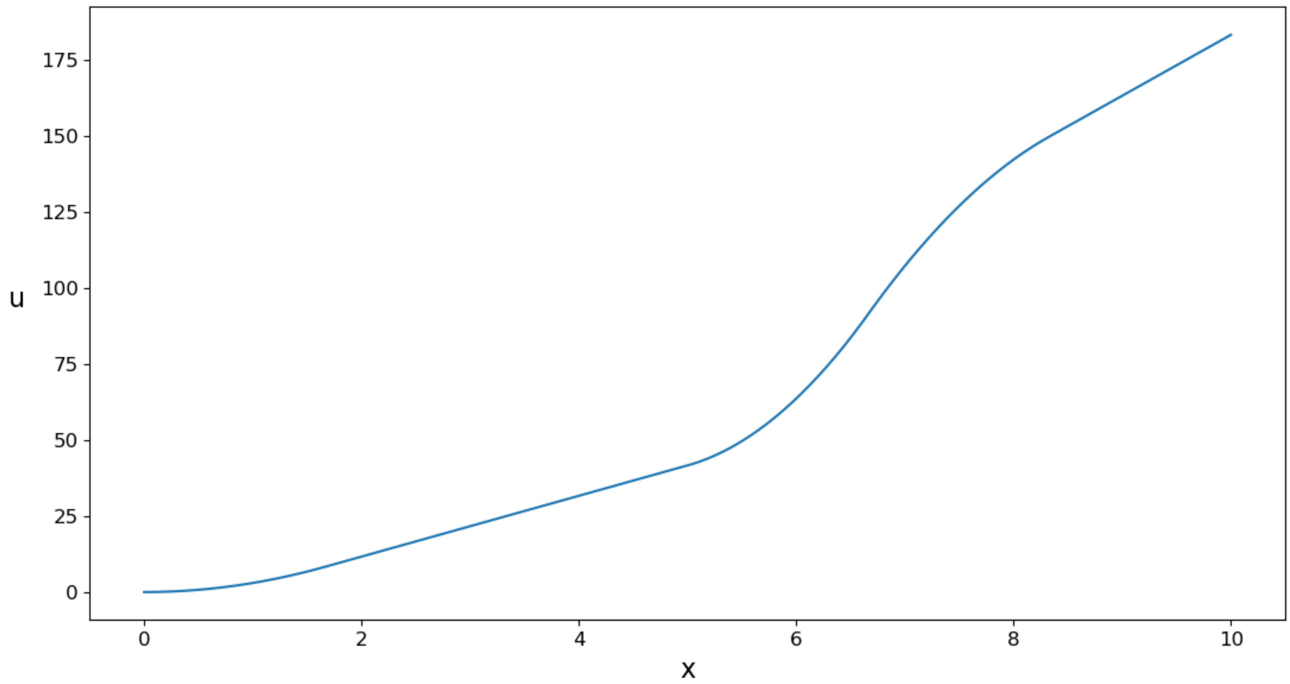

Рис. 14: Найденная функция $\varphi(x)$

Входные данные:
$[\tau_1;\ \tau_2;\ \tau_3;\ \tau_4] = [1;\ 2;\ 3;\ 4]$, $[\alpha_1;\ \alpha_2;\ \alpha_3;\ \alpha_4;\ \alpha_5] = [1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5]$, $\psi(x) = x^3$.

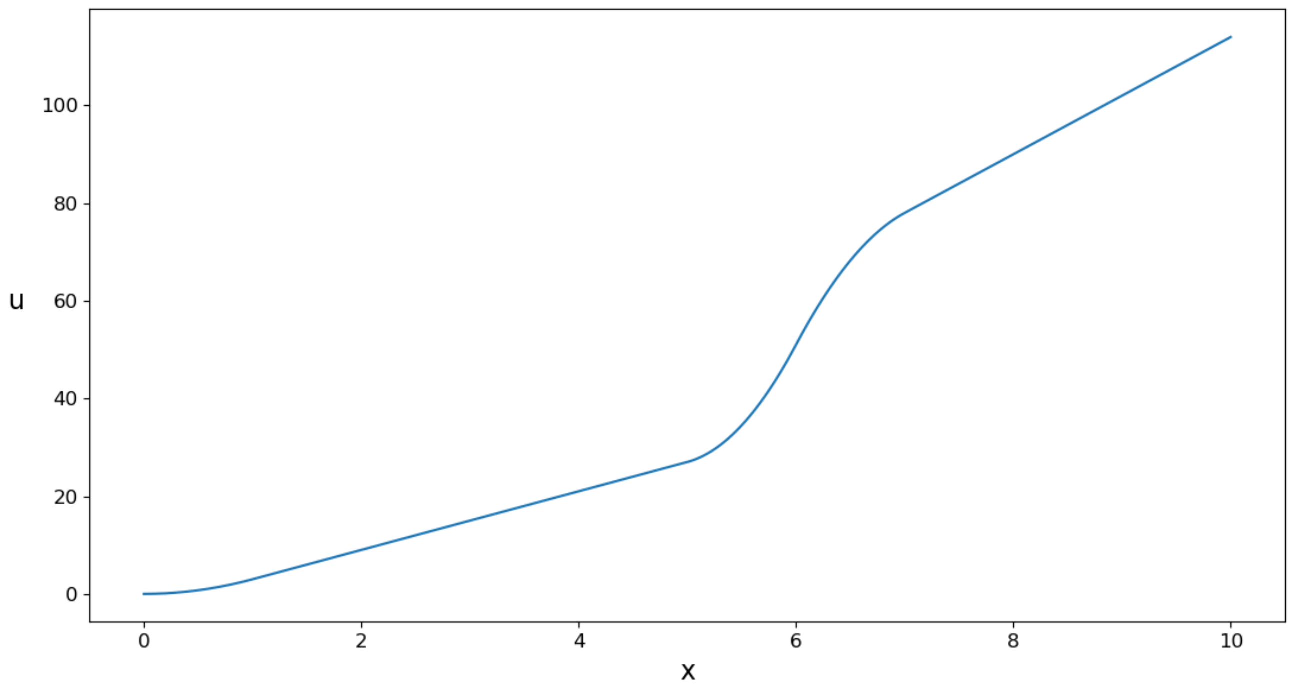

Рис. 15: Найденная функция $\varphi(x)$

Входные данные:
$[\tau_1;\ \tau_2;\ \tau_3;\ \tau_4;\ \tau_5;\ \tau_6;\ \tau_7] = [0.625;\ 1.25;\ 1.875;\ 2.5;\ 3.125;\ 3.75;\ 4.375]$,

$[\alpha_1;\ \alpha_2;\ \alpha_3;\ \alpha_4;\ \alpha_5;\ \alpha_6;\ \alpha_7;\ \alpha_8] = [1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6;\ 7;\ 8],\ \psi(x) = x^3.$

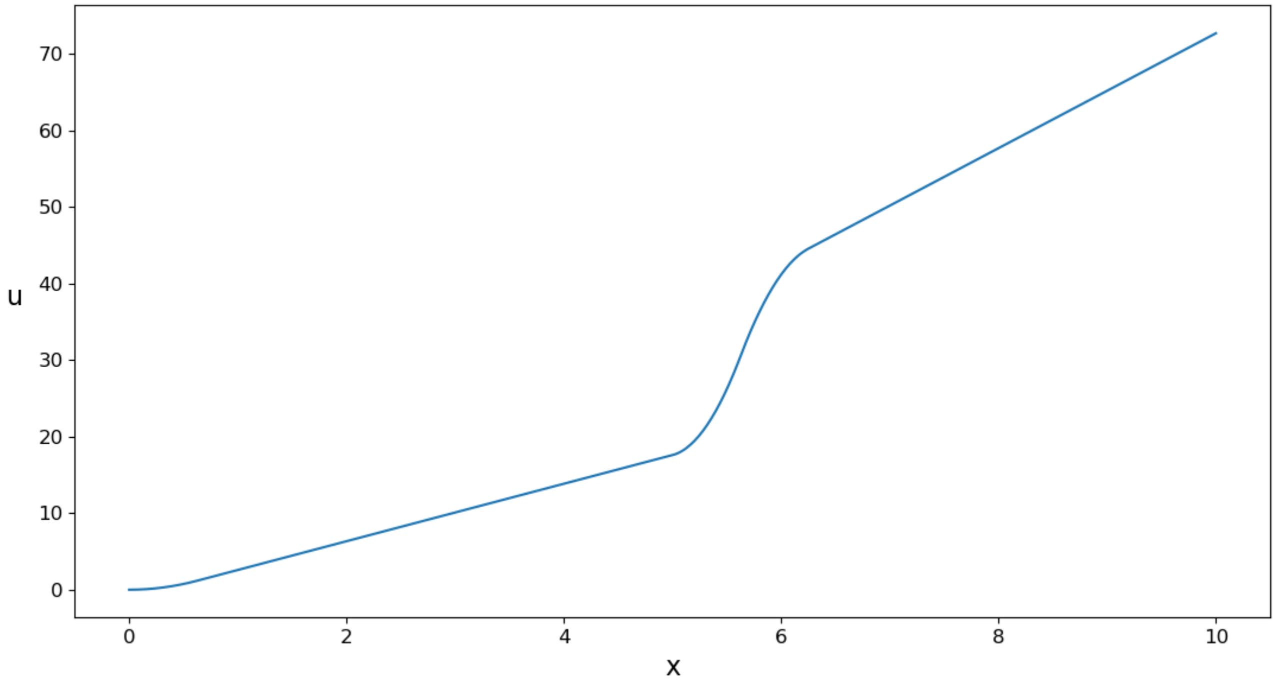

Рис. 16: Найденная функция $\varphi(x)$

Заключение

Работа является хорошим примером следующего методологического подхода: исходная задача, сформулированная в терминах математического анализа, обобщается языком функционального анализа и решается в рамках последнего. Этот трюк полезен, когда процесс аналитического решения задачи средствами математического анализа сильно затруднителен, что и побуждает нас прибегнуть к более простому аппарату. Редуцированная задача (8) относится к такому типу задач. И для её решения мы прибегли к теории полугрупп операторов, хорошо развитой ([6]) и широко применяемой ([3], [4]).

Список литературы

[1] Тихонов И. В., Ву Нгуен Шон Тунг. *Разрешимость нелокальной задачи для эволюционного уравнения с суперустойчивой полугруппой* // Дифференциальные уравнения. 2020. Т. 56. №4. С. 490-510.

[2] Тихонов И. В., Ву Нгуен Шон Тунг. *Формулы явного решения в модельной нелокальной задаче для уравнения простого переноса* // Математические заметки СВФУ. 2017. Т. 24, № 1 (93). С. 57-73.

[3] Balakrishnan A. V. *On superstability of semigroups* // In: M.P. Polis et al (eds.). Systems modelling and optimization. Proceedings of the 18th IFIP conference on system modelling and optimization. CRC research notes in mathematics. Chapman and Hall. 1999. P. 12–19.

[4] Balakrishnan A. V. *Smart structures and super stability* // In: G. Lumer, L. Weis (eds.). Evolution equations and their applications in physical and life sciences. Lecture notes in pure and applied mathematics. Marcel Dekker. 2001. V. 215. P. 43–53.

[5] Данфорд Н., Шварц Д. *Линейные операторы.* М., 1962, Т.1. Общая теория.

[6] Хилле Э., Филлипс Р. *Функциональный анализ и полугруппы.* М., 1962.

[7] Pazy A. *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations.* N.Y.: Springer Verlag, 1983.

[8] Колмогоров А. Н., Фомин С. В. *Элементы теории функций и функционального анализа.* М.: Наука, 1976.

[9] Треногин В. А. *Функциональный анализ.* 4-е изд. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007.

[10] Филиппов А. Ф. *Введение в теорию дифференциальных уравнений.* М.: Едиториал УРСС, 2004.