

# Titre du document

SOUS-TITRE DU DOCUMENT

*Texte central*

REALISÉ PAR  
ETUDIANT 1  
ET  
ETUDIANT 2

# Contents

<b>Contents</b>	<b>2</b>
I. Raisonnement par programmation dynamique . . . . .	3
1 - Première étape . . . . .	3
II. La PLNE à la rescousse . . . . .	4
1 - Modélisation . . . . .	4
2 - Implantation et tests . . . . .	5

## I. Raisonnement par programmation dynamique

### 1 - Première étape

#### Question 1:

Si l'on a calculé tous les  $T(j, l)$ , pour savoir si il est possible de colorier la ligne  $l_i$  entière avec la séquence entière il suffit de regarder  $T(m - 1, k)$ , si ce dernier vaut vrai alors il est possible de colorier la ligne entière avec la séquence entière. Si il vaut faux alors ce n'est pas possible.

#### Question 2:

- Cas  $l = 0, j \in \{0, \dots, m - 1\}$ : Vrai
- Cas  $l \geq 1, j < s_l - 1$ : Faux
- Cas  $l \geq 1, j = s_l - 1$ :
  - Si  $l = 1$  alors Vrai
  - Si  $l \neq 1$  alors Faux

#### Question 3:

La relation de récurrence permettant de calculer  $T(j, l)$  est la suivante:

$$T(j, l) = T(j - (s_l + 1), l - 1)$$

En effet si l'on se trouve à la case  $j$  et que l'on veut savoir si il est possible de colorier la sous séquence  $(s_1, \dots, s_l)$  il faut pouvoir colorier  $s_l$  case(s) et laisser une case de séparation entre les coloration de  $s_{l-1}$  et  $s_l$ , il faut donc regarder si l'on peut colorier la ligne de la case 0 à  $j - s_l - 1$  avec la sous séquence  $(s_1, \dots, s_{l-1})$

instances	nbCases	time
0	20	0.000452041625977
1	25	0.000588178634644
2	400	0.123682022095
3	481	0.0982971191406
4	625	0.17849612236
5	675	0.214619159698
6	900	0.559221982956
7	1054	0.331871986389
8	1400	0.481527090073
9	2500	5.98904299736
10	9801	9.75069284439

## II. La PLNE à la rescousse

### 1 - Modélisation

#### Question 10:

- $x_{ij}$  vaut 1 si la case (i, j) est coloriée en noir et 0 si coloriée en noir.
- $y_{ij}^t$  vaut 1 si le  $t_{ieme}$  bloc de la ligne  $l_i$  commence à la case (i, j) et 0 sinon.
- $z_{ij}^t$  vaut 1 si le  $t_{ieme}$  bloc de la colonne  $c_j$  commence à la case (i, j) et 0 sinon.

Par conséquent on a :  $y_{ij}^t = 1 \Rightarrow \sum_{k=j}^{j+s_t-1} x_{ik} = s_t$

Et donc  $\sum_{k=j}^{j+s_t-1} x_{ik} = y_{ij}^t \times s_t$

Par conséquent la condition est:  $\sum_{k=j}^{j+s_t-1} x_{ik} \geq y_{ij}^t \times s_t$

Avec le même raisonnement on a pour les colonnes:  $\sum_{k=i}^{i+s_t-1} x_{kj} \geq z_{ij}^t \times s_t$

#### Question 11:

On a:  $y_{ij}^t = 1 \Rightarrow \sum_{k=j}^{j+s_t} y_{ik}^{t+1} = 0$

et  $y_{ij}^t = 0 \Rightarrow \sum_{k=j}^{j+s_t} y_{ik}^{t+1} \in \{0, 1\}$

Et donc la condition est:  $y_{ij}^t + \sum_{k=j}^{j+s_t} y_{ik}^{t+1} \leq 1$

Avec le même raisonnement on a pour les colonnes:  $z_{ij}^t + \sum_{k=i}^{i+s_t} z_{kj}^{t+1} \leq 1$

**Question 12:**

Min  $z = ?$

$$s.c \left\{ \begin{array}{l} \sum_{k=j}^{j+s_t-1} x_{ik} \geq y_{ij}^t \times s_t \mid \forall i \in \{0, 1, 2, \dots, N-1\}, \forall t \in \{1, 2, \dots, k_i\} \\ \sum_{k=i}^{i+s_t-1} x_{kj} \geq z_{ij}^t \times s_t \mid \forall j \in \{0, 1, 2, \dots, M-1\}, \forall t \in \{1, 2, \dots, k_j\} \\ y_{ij}^t + \sum_{k=j}^{j+s_t} y_{ik}^{t+1} \leq 1 \mid \forall i \in \{0, 1, 2, \dots, N-1\}, \forall t \in \{1, 2, \dots, k_i\} \\ z_{ij}^t + \sum_{k=i}^{i+s_t} z_{kj}^{t+1} \leq 1 \mid \forall j \in \{0, 1, 2, \dots, M-1\}, \forall t \in \{1, 2, \dots, k_j\} \\ \sum_{j=0}^{M-1} y_{ij}^t = 1 \mid \forall i \in \{0, 1, 2, \dots, N-1\}, \forall t \in \{1, 2, \dots, k_i\} \\ \sum_{i=0}^{N-1} z_{ij}^t = 1 \mid \forall j \in \{0, 1, 2, \dots, M-1\}, \forall t \in \{1, 2, \dots, k_j\} \\ x_{ij} \in \{0, 1\} \mid \forall i \in \{0, 1, 2, \dots, N-1\}, \forall j \in \{0, 1, 2, \dots, M-1\} \\ y_{ij}^t \in \{0, 1\} \mid \forall i \in \{0, 1, 2, \dots, N-1\}, \forall j \in \{0, 1, 2, \dots, M-1\}, \forall t \in \{1, 2, \dots, k_i\} \\ z_{ij}^t \in \{0, 1\} \mid \forall i \in \{0, 1, 2, \dots, N-1\}, \forall j \in \{0, 1, 2, \dots, M-1\}, \forall t \in \{1, 2, \dots, k_j\} \end{array} \right.$$

**2 - Implantation et tests**

**Question 13:**

(N'oublions pas que j commence à 0 et termine à M-1)

- Pour une ligne  $l_i$  le  $l^{ieme}$  bloc ne peut commencer avant la case  $(i, \sum_{n=1}^{l-1} (s_n + 1))$  , ni commencer

après la case  $(i, M - s_l - \sum_{n=l+1}^{k_i} (s_n + 1))$  .