Universidad de Antioquia
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Tarea 2: Física Computacional I. Semestre 2021-2

December 13, 2021

Métodos con Multiples pasos

Los métodos discutidos en su mayoría hasta el momento se denominan métodos de un paso, porque la aproximación para el siguiente punto, t_{i+1} involucra información de solo uno de los puntos anteriores, t_i. Por ejemplo, el método de Euler se refiere solo a un punto anterior y a su derivada para determinar el valor buscado. Los métodos que utilizan varios pasos para determinar la aproximación en el siguiente punto se denominan *métodos multipaso*.

Dos métodos multipaso para resolver un problema de valor inicial son el de Adams-Bashforth y el de Adams-Moulton de cuarto orden.

Método de Adams-Bashforth de 4 pasos

En este método se emplean los puntos $(t_{i-3}\ ,\ y(t_{i-3}))$, $(t_{i-2}\ ,\ y(t_{i-2}))$, $(t_{i-1}\ ,\ y(t_{i-1}))$ y $(t_i\ ,\ y(t_i))$, para calcular el punto $(t_{i+1}\ ,\ y(t_{i+1}))$; es decir, utiliza los cuatro puntos anteriores para calcular el punto actual. El métodos junto con sus valores iniciales requeridos se muestra a continuación,

$$y(t_{i+1}) = y(t_i) + \frac{h}{24}(55f(t_i\ ,\ y(t_i)) - 59f(t_{i-1}\ ,\ y(t_{i-1})) + 37f(t_{i-2}\ ,\ y(t_{i-2})) - 9f(t_{i-3}\ ,\ y(t_{i-3})))$$

o también,

$$\begin{aligned} \omega_0 &= \alpha, \quad \omega_1 = \alpha_1, \quad \omega_2 = \alpha_2, \quad \omega_3 = \alpha_3, \\ w_{i+1} &= w_i + \frac{h}{24}\left[55f(t_i\ ,\ w_i) - 59f(t_{i-1}\ ,\ w_{i-1}) + 37f(t_{i-2}\ ,\ w_{i-2}) - 9f(t_{i-3}\ ,\ w_{i-3})\right] \end{aligned}$$

con $i = 3, 4, ..., N-1$. w_0, w_1, w_2 y w_3 son los pasos anteriores.

Método de Adams-Moulton de 3 pasos

Similar al método de Adams-Bashforth, el método de Adams-Moulton se puede representar por,

$$y(t_{i+1}) = y(t_i) + \frac{h}{24}(9f(t_{i+1}\ ,\ y(t_{i+1})) - 19f(t_i\ ,\ y(t_i)) - 5f(t_{i-1}\ ,\ y(t_{i-1})) + f(t_{i-2}\ ,\ y(t_{i-2})))$$

o también,

$$\begin{aligned} \omega_0 &= \alpha, \quad \omega_1 = \alpha_1, \quad \omega_2 = \alpha_2, \\ w_{i+1} &= w_i + \frac{h}{24}\left[9f(t_{i+1}\ ,\ w_{i+1}) + 19f(t_i\ ,\ w_i) - 5f(t_{i-1}\ ,\ w_{i-1}) + f(t_{i-2}\ ,\ w_{i-2})\right] \end{aligned}$$

con $i = 2, 3, ..., N-1$

Los valores iniciales en ambos métodos deben ser especificados, generalmente son obtenidos partiendo desde la condición inicial dada y generando los valores restantes mediante el método de Runge-Kutta o Taylor. En otras palabras; si usamos el método de Runge-Kutta de cuarto orden para aproximar las soluciones al problema de valor inicial planteado, las primeras cuatro aproximaciones $(y(t_i),\ y(t_{i+1}),\ y(t_{i+2}),\ y(t_{i+3}))$ obtenidas por RK4, serán usadas como los valores iniciales para el método de Adams-Bashforth de cuarto orden y por lo tanto, se podrán calcular nuevas aproximaciones como $y(t_{i+4}),\ y(t_{i+5})$....

La combinación de un método de Adams-Bashforth para predecir y un método de Adams-Moulton para mejorar la predicción se denomina método **predictor-corrector**. Así que considerando un problema de valor inicial, debemos hacer lo siguiente:

1. El primer paso es calcular los valores iniciales w_0, w_1, w_2 y w_3 para el método de Adams-Bashforth de cuatro pasos. Para hacer esto, usamos un método de un paso de cuarto orden; por ejemplo, el método de Runge-Kutta de orden cuatro (RK4).
2. El siguiente paso es calcular la aproximación w_4, el cual llamaremos w_{4p} utilizando el método explícito de Adams-Bashforth como predictor.

$$w_{4p} = w_3 + \frac{h}{24}\left[55f(t_3\ ,\ w_3) - 59f(t_2\ ,\ w_2) + 37f(t_1\ ,\ w_1) - 9f(t_0\ ,\ w_0)\right].$$

3. Esta aproximación se mejora insertando w_{4p} en el método de Adams-Moulton de tres pasos y usando ese método como corrector.

$$w_4 = w_3 + \frac{h}{24}\left[9f(t_4\ ,\ w_{4p}) + 19f(t_3\ ,\ w_3) - 5f(t_2\ ,\ w_2) + f(t_1\ ,\ w_1)\right]$$

4. El valor w_4 se usa luego como aproximación para $y(t_4)$. Por ende, la técnica de usar el método Adams-Bashforth como predictor y el método Adams-Moulton como corrector se repite para encontrar w_{5p} y w_5, y así encontrar la aproximación de $y(t_5)$. Este proceso continúa hasta que se obtiene la aproximación deseada.

Problema 1:

Suponga que un estudiante es portador de un virus y regresa a su aislado campus de 1000 estudiantes. Si se supone que la razón con que se propaga el virus es proporcional no sólo a la cantidad x de estudiantes infectados sino también a la cantidad de estudiantes no infectados. Determine la cantidad de estudiantes infectados después de 12 días.

Suponiendo que nadie deja el campus mientras dura la enfermedad, debemos resolver el siguiente problema de valor inicial

$$\frac{dx}{dt} = kx(1000 - x), \quad x(0) = 1, \quad k = 0.0009906$$

Encuentre una solución aproximada aplicando el método predictor-corrector de Adams-Bashforth-Moulton de cuarto orden con $h = 1$. El algoritmo se basa en el método Adams-Bashforth de cuarto orden como predictor y el método de Adams-Moulton como corrector, con los valores iniciales obtenidos del método Runge-Kutta de cuarto orden (RK4).

Presente una tabla mostrando

t_i	Solución Analítica	Runge-Kutta w_i	Error (RK4)	Adams-Bashforth w_i	Error (A-B)	Adams-Moulton w_i	Error (A-M)	Predictor-Corrector	Error (P-C)

La solución analítica para este problema es: $x(t) = \dfrac{1000}{1 + 999e^{-1000kt}}$.
Grafique el número de estudiantes infectados en función del tiempo, usando los datos obtenidos mediante la solución analítica y los 4 métodos utilizados (RK4, Adams-Basforth, Adams-Moulton y Predictor-Corrector).

Problema 2

Es posible realizar un control adaptativo de paso en el método predictor-corrector realizado en la problema 1. Use un $h_{max} = 1$, $h_{min} = 0.1$ y una tolerancia de $TOL = 10^{-5}$ para encontrar la solución aproximada de $x(t)$.

- Comience con $h = h_{max} = 1$, y obtenga w_0, w_1, w_2 y w_3 usando Runge-Kutta, encuentre w_{4p} y w_{4c} aplicando el método predictor-corrector. Estos cálculos se realizaron en el problema 1.
- Luego determine si estas aproximaciones son lo suficientemente precisas o si es necesario un cambio en el tamaño del paso. Para ello, encuentre el error
  $\epsilon = \dfrac{19}{270h}(w_{4p} - w_{4c})$
- Si $\epsilon > TOL$, será necesario un nuevo tamaño de paso
  $h = q * h$, donde $q = \left(\dfrac{TOL}{2\epsilon}\right)^{1/4}$
- Comience el procedimiento nuevamente calculando RK4 con el nuevo tamaño de paso, y entonces, usando el método predictor-corrector con el nuevo tamaño de paso, se calcular de nuevo w_{4p} y w_{4c}
- Continúe hasta que llegue a la aproximación deseada

Presente sus resultados en una tabla
(Nota: Si va a asumir alguna restricción en alguna de las variables, haga el comentario respectivo en el código.)

t$_i$	Solución Analítica	Predictor-Corrector Adaptativo	Error (P-C-A)

¡Éxitos!