ECUACIONES DINÁMICAS DE LOTKA – VOLTERRA

Carlos Andrés Betancur, Yessica Lorena Lenis.

Instituto de Física, Universidad de Antioquia.

1. Introducción

Es bien conocida la existencia de varios sistemas dinámicos cuyos orígenes se remontan únicamente a la misma forma en la que se manifiesta la naturaleza o simplemente modelos creados por el hombre cuyo estudio da como resultado un sistema dinámico (los modelos de mercado en economía son un ejemplo claro de este último). La característica principal de estos modelos es que el estado de cada uno de estos sistemas no solo se ve afectado por el número de variables o elementos a considerar, si no que, su estado evoluciona a medida que transcurre el tiempo. A la hora de estudiar cualquier tipo de sistema dinámico es importante tener en cuenta varios elementos como lo son las relaciones o interacciones entre las variables o individuos que conformen el sistema. Adicional a lo anterior y muy importante es contar con expresiones matemáticas claras que provean información del sistema a estudiar, así como la posibilidad de predecir un cierto rasgo o característica de dichos sistemas en cualquier instante de tiempo. **[1]**

2. Marco Teórico y Metodología

Durante las últimas décadas se han introducido modelos matemáticos en las ciencias biológicas para predecir la posible extinción de una especie en un ecosistema. Este modelo fue propuesto simultáneamente por Alfred Lotka y Vito Volterra pero de manera independiente a inicios del siglo XX. El propósito de este sistema es predecir la evolución y coexistencia entre dos especies donde una es el alimento de la otra, a este modelo se le conoce como sistema presa-depredador. Este modelo se describe mediante un sistema de ecuaciones diferenciarles lineales de primer orden las cuales describen la dinámica poblacional de cada especie a considerar dentro del modelo.

Para construir el sistema dinámico imaginemos que tanto las presas como los depredadores pueden nacer y morir, entonces hay un cambio constante en la cantidad de animales de dicha especie, a este cambio lo conocemos como tasa de cambio y lo representamos matemáticamente mediante la definición de derivada como $\frac{dx}{dt}$, Ahora bien, si x_1 representa la cantidad de presas presentes en un instante de tiempo, entonces esta es directamente proporcional a la razón de cambio para las presas, supondremos que las presas no sufren de muerte natural, por otro lado los depredadores mueren naturalmente por ausencia de presas, por lo tanto la razón de cambio para los depredadores es directamente proporcional a la cantidad de depredadores x_2 presentes en un determinado instante de tiempo y de este modo tenemos las siguientes ecuaciones diferenciales. **[1,2]**

$$\frac{dx_1}{dt} = \alpha x_1 \ ; \ \frac{dx_2}{dt} = -\gamma x_2 \quad (1)$$

Si deseamos adicionar una interacción entre ambas especies, modelamos matemáticamente los encuentros como el producto $x_1 x_2$, término que agregamos a las dos ecuaciones diferenciales en (1). Es de notar que este encuentro es beneficioso para los depredadores pues es un indicador de que hubo éxito en su caza, mientras que para las presas es un evento desafortunado ya que perderán la vida y desaparecerían del ecosistema. Esta es la razón por la cual para la ecuación de las presas aparece con signo negativo mientras que para la ecuación depredador el término aparece con signo positivo quedando entonces de la siguiente manera:

$$\frac{dx_1}{dt} = \alpha x_1(t) - \gamma x_1(t)x_2(t) \quad (2)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = -\beta x_1(t) + \delta x_1(t) x_2(t) \quad (3)$$

De donde tenemos a las funciones $x_1(t)$ y $x_2(t)$ como las variables que representan a las presas y los depredadores respectivamente, los parámetros α, β, γ y δ son parámetros constantes que intervienen en la dinámica del sistema. Dichos parámetros en las ecuaciones indican lo siguiente, α es la tasa de nacimiento de las presas cuando hay ausencia de depredadores, γ es la probabilidad de éxito en la caza del depredador, β es la tasa instantánea de disminución en la población de depredadores en ausencia de presas y finalmente δ se asocia con el éxito en el proceso de caza de los depredadores y en cuantas presas necesita cazar este para sobrevivir. Es importante resaltar las diferentes condiciones e hipótesis que asume el modelo de ecuaciones diferenciales de Lotka-Volterra tales como: **[1,2]**

- **Ecosistema Aislado y Estable:** Se propone un ecosistema en el que solo existen dos poblaciones de animales: las presas y los depredadores. En esta hipótesis se descartan fenómenos de migración de las especies a estudiar o de otras que puedan introducirse al ecosistema. También excluye la aparición de parásitos en alguna de las dos especies las cuales pueden afectar e interferir en la calidad de vida de alguna de las dos partes. Las condiciones del ecosistema son las mismas en todo momento.

- **Poblaciones Homogéneas:** Las poblaciones de cada una de las especies es homogénea, es decir, los parámetros de edad y sexo no cuentan.

- **Condiciones de Vida Ideales:** Se considera que todos los individuos tanto de las presas como de los depredadores son animales que están en las mejores condiciones de salud, es decir, no existen enfermedades o mutaciones que puedan afectar la calidad de vida de alguna de las dos especies haciendo que una de estas se encuentre en desventaja respecto a la otra.

- **Alimento Ilimitado:** Las presas tendrán fuentes de alimento ilimitadas de manera tal que no se supondrá una escasez alimenticia que dé a lugar una disminución en la población de presas por falta de alimento.

- **Único Alimento:** La única fuente de alimento de la especie depredadora son las presas, lo que afecta directamente la taza crecimiento/ decrecimiento de la población de depredadores.

- **Crecimiento y Decrecimiento Exponencial:** La taza de crecimiento o decrecimiento de alguna de las especies implicadas en este modelo dependerá completamente de las condiciones bajo las cuales esté el ecosistema, es decir:

    - ❖ En ausencia de depredadores la población de presas crecerá exponencialmente debido a que estas desparecen únicamente por la presencia de los depredadores.
    - ❖ La población de depredadores decrecerá exponencialmente en ausencia de presas debido a que esta es la única fuente de alimento de los depredadores.
    - ❖ La población de presas y depredadores se ven mutuamente afectadas de dos maneras diferentes:

        - La población de presas afecta directamente la de sus depredadores ocasionando una tasa de natalidad (crecimiento) proporcional al número de presas y al número de encuentros entre los depredadores y las presas.

- Los depredadores afectan la población de las presas ocasionando una mortandad en esta (decrecimiento) proporcional al producto de la función que describe la población de presas y la de depredadores, o, dicho de otra manera, es proporcional al número de posibles encuentros entre estas dos especies.

Las ecuaciones de Lotka-Volterra pueden solucionarse mediante diversos métodos numéricos que brindan una buena aproximación a la solución real del sistema. El método que utilizado para resolver las ecuaciones anteriores es el Runge-Kutta de orden 4, el da soluciones con una muy buena precisión a diferencia de otros métodos. Este método consiste en resolver ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden mediante el siguiente esquema iterativo: **[3]**

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \qquad (4)$$

El elemento h que aparece en la ecuación es el tamaño del paso (o la distancia entre dos valores consecutivos para a variable x), mientras que los elementos k_1, k_2, k_3 y k_4 son la función evaluada en distintos valores tanto para x como para y de la siguiente manera: **[3]**

$$k_1 = f(x_k, y_k) \quad (5)$$

$$k_2 = f(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h\,k_1}{2}) \quad (6)$$

$$k_3 = f(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h\,k_2}{2}) \qquad (7)$$

$$k_2 = f(x_k + h, y_k + hk_3) \qquad (8)$$

Una vez se solucionan las ecuaciones de Lotka-Volterra mediante el método anteriormente descrito, tenemos como resultado un conjunto de datos que nos permiten realizar gráficos que muestran la manera en la que evolucionan la población de cada especie por separado y en conjunto (diagrama de fase). Con esta información podemos extraer datos como puntos críticos, puntos de estabilidad de las poblaciones implicadas y hacer posibles predicciones frente la evaluación de una u otra población. **[1,2]**

El sistema anteriormente descrito es un modelo simple, pues solo considera la interacción entre dos especies en unas condiciones supremamente ideales. Sin embargo, a este modelo se le pueden agregar más parámetros y factores de no linealidad que indiquen más eventualidades y aproxime el problema a la realidad. Un ejemplo de esto último sería la caza o captura tanto de depredadores como de presas parte de los humanos para que estos puedan beneficiarse de alguna manera de esto, como fuente de alimento, como fuente de vestimenta (la piel) o simplemente para vender estas especies. Vale la pena recalcar que esta intervención del hombre en el ecosistema suele tener un alto impacto negativo en la naturaleza, pero igualmente podría modelarse esta situación acompañada de una función exponencial para lograr tener un modelo predictivo.

3. Referencias

[1] Aíza, R., (2014), *Modelos dinámicos de poblaciones simples y de sistemas depredador-presa*, Universidad Nacional Autónoma de México, México DF, México. Recuperado del sitio web: https://miscelaneamatematica.org/welcome/default/download/tbl_articulos.pdf2.93bd1238d803ed14.353830362e706466.pdf

[2] Cano, A., (2011), *Sistemas de Lotka-Volterra en dinámica poblacional*, Universidad Nacional de Educación a Distancia. San José, Costa Rica. Recuperado del sitio web: http://e-spacio.uned.es/fez/eserv/bibliuned:masterMatavanz-Acano/Documento.pdf

[3] Calvo, M., (1998), *Los Métodos de Runge-Kutta en la Resolución Numérica de Ecuaciones Diferenciales*, Academia de Ciencias Exactas Físicas, Químicas y Naturales de Zaragoza, Zaragoza, España. Recuperado del sitio web: http://www.raczar.es/webracz/ImageServlet?mod=publicaciones&subMod=discursos&archivo=Calvo.pdf