

Teorema del eje intermedio (Teoría)

Cristian Serna y Juan Andrés González

3 de septiembre de 2022

1. Introducción

1.1. Conceptos fundamentales

En física, un cuerpo rígido es un objeto ideal que no se deforma bajo ninguna circunstancia, es decir, cada una de las partes que lo conforman se mantienen fijas y la distancia entre ellas siempre es la misma.

De manera general, estos cuerpos admiten 2 tipos de movimiento: traslación y rotación para cada uno de los ejes del cuerpo, los cuales se encuentran a lo largo, a lo alto y a lo ancho del mismo, como se muestra en la figura 1.

Para analizar la dinámica del movimiento de los cuerpos es necesario tener en cuenta la conservación de la energía cinética y del momento angular del sistema. La **energía cinética** es la energía asociada al movimiento del cuerpo, y es proporcional a la masa del cuerpo y a la velocidad al cuadrado del mismo.

El **momento o cantidad de movimiento** es una magnitud física relacionada con la capacidad de un cuerpo de inducir movimiento en otro mediante un choque, al igual que se relaciona con la dificultad para parar un cuerpo. Viene dado por la multiplicación de la masa y la velocidad, de tal manera que, por ejemplo, es mucho más fácil detener un avión de papel que se mueve a la misma velocidad que una botella de agua llena. El momento angular es análogo al momento, solo que se tiene en cuenta solo el movimiento rotacional.

Teniendo en cuenta estas cantidades conservadas y las fuerzas que experimenta un cuerpo rígido, se puede llegar a unas ecuaciones que describen cómo es el movimiento traslacional y rotacional del mismo. Estas ecuaciones se llaman **ecuaciones de Euler**, y al solucionarlas para cuerpos con determinadas características se llega a lo que es el Teorema del eje intermedio[Lif94].

1.2. Momentos de inercia

Para los cuerpos rígidos se pueden calcular tres cantidades llamadas momentos principales de inercia, los cuales están asociados a cada uno de los ejes del cuerpo. Estas cantidades dependen de la geometría del cuerpo a lo largo de su eje correspondiente y de su masa, de tal manera que los ejes

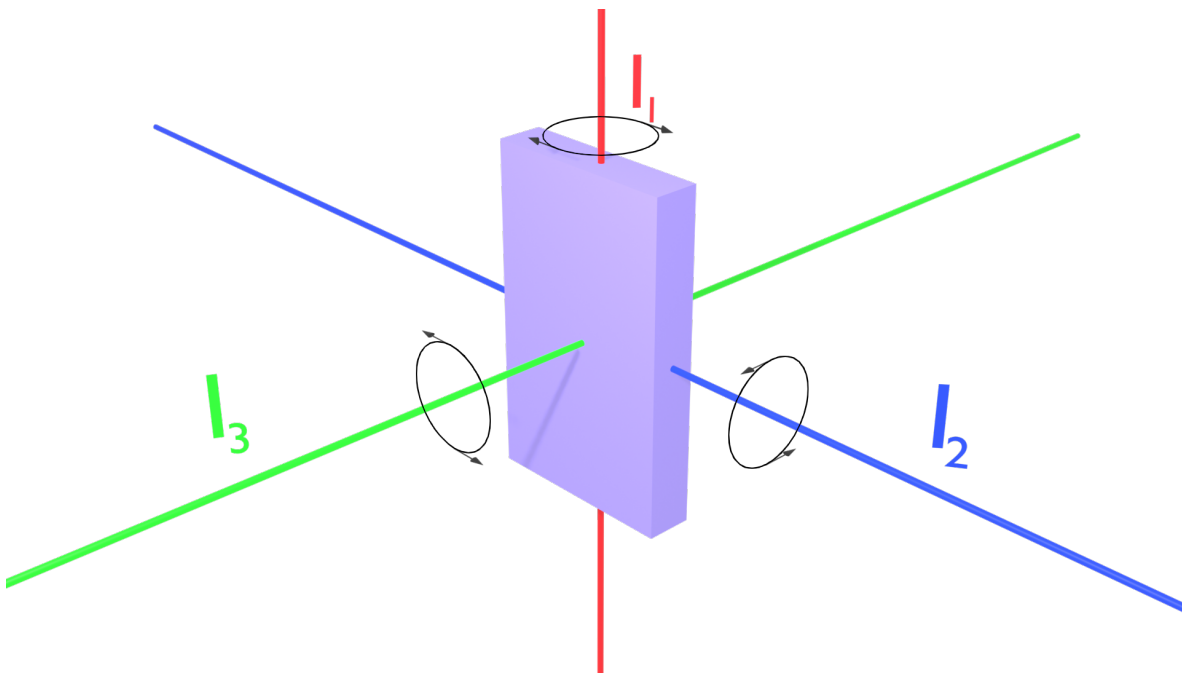


Figura 1: Figura asimétrica con 3 momentos principales de inercia distintos

para los cuales los puntos del objeto están más alejados tienen asociado un mayor momento de inercia. En la figura 1 se muestran los 3 ejes principales de un objeto con los momentos de inercia indicados, donde se cumple que I_1 es menor que I_2 , y ambos son menores que I_3 , nótese que I_3 corresponde al eje en el cual todos los puntos del borde del cuerpo quedan más alejados del eje.

El momento de inercia sirve para medir qué tan complicado es cambiar el movimiento de giro alrededor del eje considerado, así, a mayor momento de inercia es más difícil hacer girar un cuerpo alrededor de este eje.

1.3. Teorema del eje intermedio

El teorema del eje intermedio indica que para cuerpos asimétricos cuyos 3 momentos principales de inercia son distintos, se tiene que el giro alrededor del eje correspondiente al momento de inercia intermedio es inestable[NT21], es decir que al hacer girar el cuerpo alrededor de este eje se dan cambios abruptos en las velocidades de rotación. La forma más fácil de observar el fenómeno es tomar un objeto asimétrico, hacerlo girar alrededor de sus distintos ejes y observar que hay uno de estos giros que provoca medio giro adicional alrededor de otro de los ejes[MA91]. Para el objeto de la figura 1, al hacer girar alrededor del eje 2, es muy probable que también suceda medio giro alrededor del eje 1 en el tiempo que transcurre para dar una vuelta completa alrededor del eje 2.

2. Dinámica del cuerpo rígido[Lif94]

Empecemos por analizar la dinámica de un cuerpo rígido sujeto a rotaciones. Para esto debemos deducir las ecuaciones de Euler para el caso general en el que el cuerpo a estudiar tiene 3 momentos principales de inercia distintos. Matemáticamente, los momentos de inercia principales de un cuerpo se pueden calcular como

$$I_i = \sum_j m r_j^2, \quad (1)$$

donde $i = x, y, z$, m es la masa y r_j es la distancia de cada una de las partículas que compone el cuerpo al eje para el cual se calcula el momento de inercia. En el caso de los objetos continuos (compuestos por muchas partículas), los momentos principales de inercia se calculan mediante la integral

$$I_i = \int_M r^2 dm. \quad (2)$$

El momento de inercia se puede calcular para varias figuras geométricas. En la sección 3.1 se detalla un procedimiento para calcular los momentos de inercia a partir de otras cantidades más generales.

En coordenadas esféricas cualquier vector cumple que $\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \frac{d\phi}{dt} \times \mathbf{A}$, donde ϕ es la posición angular correspondiente. Esta ecuación se cumple para un vector en un sistema de coordenadas fijo, si consideramos que el sistema de coordenadas es móvil, entonces la forma general de la expresión es

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \frac{d'\mathbf{A}}{dt} + \frac{d\phi}{dt} \times \mathbf{A} = \frac{d'\mathbf{A}}{dt} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{A}, \quad (3)$$

donde $\frac{d'\mathbf{A}}{dt}$ denota la velocidad del vector respecto al sistema móvil.

Como consecuencia de la segunda ley de Newton, el torque \mathbf{M} cumple que:

$$\mathbf{M} = \frac{d\mathbf{L}}{dt}, \quad (4)$$

donde \mathbf{L} es el momento angular. De acuerdo con la ecuación 3, el torque se puede reescribir como:

$$\mathbf{M} = \frac{d'\mathbf{L}}{dt} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{L}. \quad (5)$$

Si tomamos los ejes de rotación como los ejes principales del cuerpo a analizar, se cumple que $L_1 = I_1\Omega_1$, $L_2 = I_2\Omega_2$ y $L_3 = I_3\Omega_3$, por tanto al sustituir estos valores en la ecuación 5 y escribiendo por componentes se llega a las ecuaciones diferenciales

$$M_1 = I_1\dot{\Omega}_1 + (I_3 - I_2)\Omega_2\Omega_3$$

$$M_2 = I_2\dot{\Omega}_2 + (I_1 - I_3)\Omega_3\Omega_1$$

$$M_3 = I_3\dot{\Omega}_3 + (I_2 - I_1)\Omega_1\Omega_2,$$

las cuales son las **ecuaciones de Euler**. Para simplificar el análisis del teorema podemos considerar un sistema sin torques externos, de tal manera que se tiene

$$\begin{aligned} I_1\dot{\Omega}_1 + (I_3 - I_2)\Omega_2\Omega_3 &= 0 \\ I_2\dot{\Omega}_2 + (I_1 - I_3)\Omega_3\Omega_1 &= 0 \\ I_3\dot{\Omega}_3 + (I_2 - I_1)\Omega_1\Omega_2 &= 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Para la solución analítica o numérica de estas ecuaciones para un cuerpo asimétrico con sus momentos de inercia distintos debemos de tener en cuenta la conservación de la energía E y la conservación del momento angular total L , los cuales vienen dados por

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2} \left(\frac{L_1^2}{I_1} + \frac{L_2^2}{I_2} + \frac{L_3^2}{I_3} \right) \\ L^2 &= L_1^2 + L_2^2 + L_3^2. \end{aligned} \quad (7)$$

Geoméricamente estas ecuaciones corresponden con una elipse y una esfera, por lo que las posibles soluciones a las ecuaciones de Euler deben de estar ubicadas en la intersección de estas dos figuras, la cual también marca la trayectoria de los ejes principales. Para solucionar las ecuaciones de Euler se reescriben Ω_1 y Ω_3 como función de Ω_2 haciendo uso de las ecuaciones 7, de tal manera que en este punto ya se puede solucionar mediante un método numérico como RK4 o hacer un desarrollo analítico que da como resultado:

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= \sqrt{\frac{2EI_3 - M^2}{I_1(I_3 - I_1)}} \operatorname{cn} \tau \\ \Omega_2 &= \sqrt{\frac{2EI_3 - M^2}{I_2(I_3 - I_2)}} \operatorname{sn} \tau \\ \Omega_3 &= \sqrt{\frac{M^2 - 2EI_1}{I_3(I_3 - I_1)}} \operatorname{dn} \tau, \end{aligned} \quad (8)$$

donde $\operatorname{cn} \tau$, $\operatorname{sn} \tau$ y $\operatorname{dn} \tau$ son las funciones elípticas de Jacobi, $\tau = t\sqrt{(I_3 - I_2)(L^2 - 2EI_1)/I_1I_2I_3}$ y t es el tiempo.

Finalmente para hallar la evolución dinámica angular del sistema se hace uso de los ángulos de Euler θ , ψ , ϕ y las proyecciones de las componentes del momento angular \mathbf{L} en los ejes principales. Estas proyecciones vienen dadas por

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{I_3 \Omega_3}{L} \\ \tan \psi &= \frac{I_1 \Omega_1}{I_2 \Omega_2}. \end{aligned} \quad (9)$$

Adicionalmente se tiene la siguiente ecuación diferencial para ϕ :

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{I_1 \Omega_1^2 + I_2 \Omega_2^2}{I_1^2 \Omega_1^2 + I_2^2 \Omega_2^2} L. \quad (10)$$

De esta manera, la dinámica del cuerpo rígido queda completamente determinada por las ecuaciones 8, 9 y 10.

3. Deducción del teorema

Si bien a partir de las ecuaciones indicadas previamente se puede hacer un análisis riguroso a partir del cual se concluyen las condiciones bajo las cuales se da que las rotaciones alrededor del eje intermedio son inestables tal y como hace Mark Ashbaugh [MA91] en su artículo, aquí presentaremos un análisis

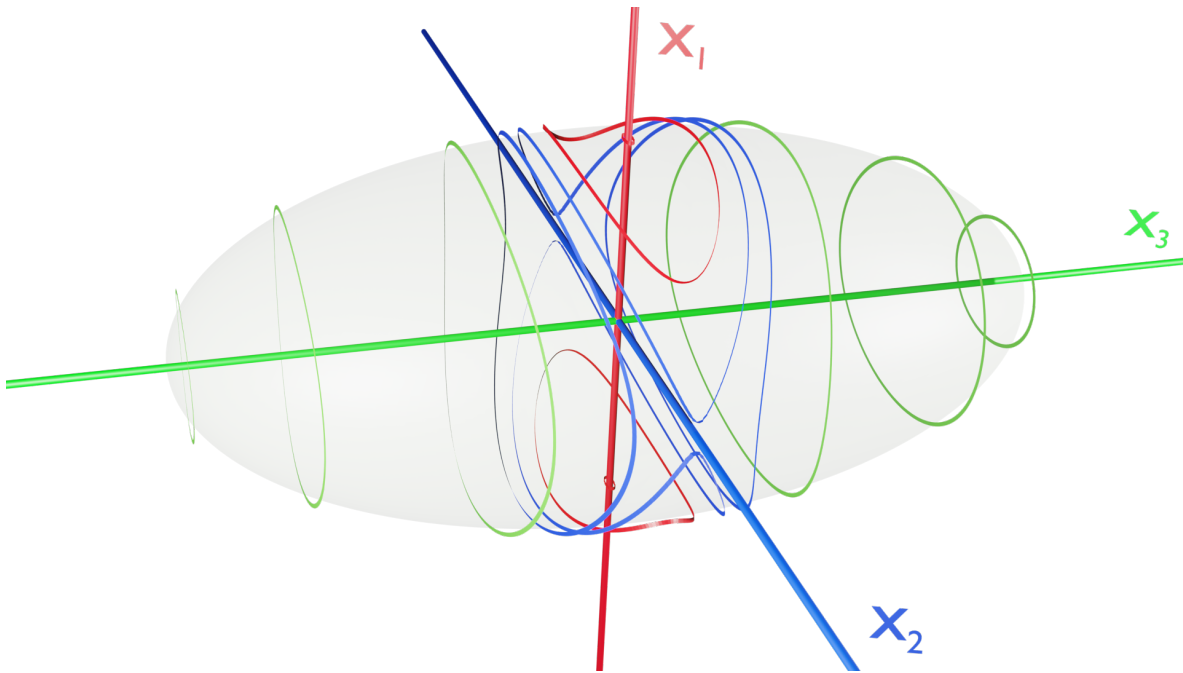


Figura 2: Representación geométrica de algunas soluciones de las ecuaciones de movimiento de un cuerpo rígido asimétrico para un momento angular dado. El color de cada trayectoria indica alrededor de qué eje se da el giro.

a partir de las trayectorias descritas sobre la intersección del elipsoide y la esfera correspondientes a las ecuaciones 7.

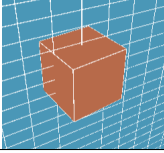
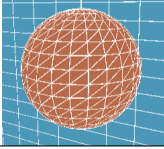
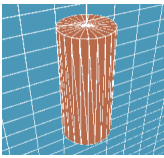
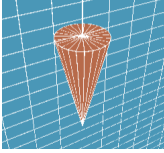
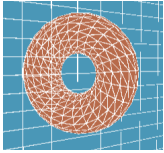
Como se ve en la figura 2, las trayectorias cuyas condiciones iniciales son cercanas a un giro alrededor del eje 1 o 3 son estables, y describen trayectorias cerradas alrededor del eje correspondiente, sin embargo, las trayectorias con valores cercanos al giro alrededor del eje 2 no tienden a establecerse alrededor de este eje, sino que barren curvas más amplias en el elipsoide, y oscilan entre valores positivos y negativos para su eje. A partir de esta representación geométrica se puede mostrar que hay ciertas trayectorias alrededor del eje 2 que sí son estables, pero la región es mucho más pequeña que para los otros ejes.

3.1. Simulación

En la simulación asociada a este documento se hacen cálculos de las trayectorias y velocidades angulares descritas por distintos tipos de figuras geométricas. Para el cálculo se tienen en cuenta las ecuaciones de Euler 6 y las ecuaciones de conservación de energía y momento angular 7, a partir de las cuales se obtiene la solución por RK4, y se obtienen los ángulos de Euler usando 9 y 10.

La solución para cada tipo de objeto tiene en cuenta los momentos de inercia correspondientes a este. Una forma fácil de calcular los momentos de inercia para objetos del mismo tipo, pero con dimensiones diferentes (por ejemplo, cajas con lados de distinto tamaño) es usando los valores medios del cuadrado de las posiciones espaciales del objeto $\langle x^2 \rangle$, $\langle y^2 \rangle$ y $\langle z^2 \rangle$, y calculando los momentos de

Cuadro 1: Valores medios de la posición al cuadrado para cada eje de las distintas figuras utilizadas en la simulación

Figura		Valores medios del cuadrado de las coordenadas
Cubo (Masa M Lado l)		$\langle x^2 \rangle = \langle y^2 \rangle = \langle z^2 \rangle = M \frac{l^2}{12}$
Esfera (Masa M Radio R)		$\langle x^2 \rangle = \langle y^2 \rangle = \langle z^2 \rangle = M \frac{R^2}{5}$
Cilindro (Masa M radio R altura h)		$\langle x^2 \rangle = \langle y^2 \rangle = M \frac{R^2}{4} \quad \langle z^2 \rangle = M \frac{h^2}{12}$
Cono (Masa M Radio de la base R Altura h)		$\langle x^2 \rangle = \langle y^2 \rangle = M \frac{3R^2}{20} \quad \langle z^2 \rangle = M \frac{3R^2}{80}$
Toroide (Masa M Radio principal R Radio secundario r)		$\langle x^2 \rangle = \langle y^2 \rangle = M \left(\frac{R^2}{2} + \frac{3r^2}{8} \right) \quad \langle z^2 \rangle = M \frac{r^2}{4}$

inercia mediante la ecuación:

$$I_i = \langle x_j^2 \rangle + \langle x_k^2 \rangle. \quad (11)$$

En el cuadro 1 se presentan estos valores medios para las distintas figuras utilizadas en la simulación. Al cambiar la forma de la figura a lo largo de un eje, el valor medio correspondiente a este eje se multiplica por un factor igual al de la deformación, por lo que el cálculo de los momentos de inercia se vuelve tan fácil como una multiplicación una vez que se hacen los cálculos iniciales, así, por ejemplo, se puede calcular el momento de inercia de un elipsoide a partir de estos valores para una esfera, ya que es posible obtener un elipsoide deformando una esfera a lo largo de sus ejes.

Referencias

- [Lif94] Landau Liftshiftz. *Física teórica Volumen 1*. Reverté, Barcelona, 1994.
- [MA91] Carmen Chicone Richard Cushman Mark Ashbaugh. The twisting tennis racket. *Journal of Dynamics and Differential Equations*, 3(1):67–85, 1991.

- [NT21] Luciano Garelli¹ Mario Storti Nicolas Trivisonno¹. The tennis racket theorem, analysis and numerical simulation of the intermediate axis theorem. *Mecánica computacional*, 38:1353–1365, 2021.