Sistema de Doble Péndulo Acoplado

Autor: Juan David Ramírez Cadavid
Universidad de Antioquia - Instituto de Física. Medellín - Antioquia.

1. Definiciones.

1). **Péndulo Simple:** es un sistema idealizado constituido por una partícula de masa **m** que está suspendida de un punto fijo o mediante un hilo al que se le puede regular su longitud y su peso (Marion, 1995).

2). **Péndulo Plano:** es un sistema físico que puede oscilar bajo la acción gravitatoria u otra característica física (elasticidad, por ejemplo) y que está configurado por una masa suspendida de un punto o de un eje horizontal fijos mediante un hilo, una varilla, u otro dispositivo que pueda mantener fijo el sistema (Marion, 1995).

3). **Grados de libertad:** es el número de coordenadas independientes (escalares) necesarias para determinar simultáneamente la posición de cada partícula en un sistema dinámico (Bernal et al., 2009).

4). **Movimiento Caótico:** es un sistema complejo no lineal muy sensibles a las variaciones en las condiciones iniciales, tal que pequeñas variaciones en dichas condiciones iniciales pueden implicar grandes diferencias en el comportamiento futuro, imposibilitando la predicción a corto plazo (Strogatz, 2018).

5). **Energía:** capacidad para obrar, surgir, transformar o poner en movimiento (Marion, 1995).

6). **Trayectoria:** es el lugar geométrico de las posiciones sucesivas por las que pasa un cuerpo en su movimiento. La trayectoria depende del sistema de referencia en el que se describe el movimiento; es decir el punto de vista del observador (Marion, 1995).

7). **Ángulo:** parte del plano determinada por dos semirrectas llamadas lados que tienen el mismo punto de origen llamado vértice del ángulo (Marion, 1995).

8). **Desplazamiento:** es el cambio de posición de un cuerpo entre dos instantes o tiempos bien definidos (Marion, 1995).

Variable	Representación	Unidad
Ángulo 01	θ_1	**Rad**
Ángulo 02	θ_2	**Rad**
Masa 01	$\mathbf{M_1}$	**Kg**
Masa 02	$\mathbf{M_2}$	**Kg**
Longitud 01	$\mathbf{L_1}$	**m**
Longitud 02	$\mathbf{L_2}$	**m**
Gravedad	$\mathbf{g}$	$\mathbf{\frac{m}{s^2}}$
Velocidad 01	$\dot{\theta}_1$	$\mathbf{\frac{m}{s}}$
Velocidad 02	$\dot{\theta}_1$	$\mathbf{\frac{m}{s}}$
Posición eje x	$\mathbf{x_1, x_2}$	**m**
Posición eje y	$\mathbf{y_1, y_2}$	**m**

Cuadro 1: Variables que describen el movimiento de un péndulo doble.

2. Aproximaciones y Variables.

En este caso de estudio del péndulo doble acoplado se considerará que el sistema no interacciona con fuerzas externas que impulsan o limitan su movimiento, como por ejemplo fuerzas generadoras o fuerzas de disipación ocasionadas por algún medio. También se supone que la geometría de las masas no limita el movimiento y la cuerda que une estas masas son inextensibles y de masa despreciable.

Las variables que describen el sistema serán las relacionadas en la *tabla 1*.

3. Descripción del Fundamento Físico.

En general, un doble péndulo (*figura 01*) es un sistema compuesto por dos péndulos, con el segundo colgando del extremo del primero. En el caso mas simple, se trata de dos péndulos simples, con el inferior colgando de la masa pendular del superior. Este sistema físico posee dos grados de libertad y exhibe un rico comportamiento dinámico. Su movimiento esta gobernado por dos ecuaciones diferenciales ordinarias acopladas (Maraz and Burgoa, 2014).

El sistema en general es sensible a las condiciones iniciales, de acuerdo a Strogatz (2018) cuando el sistema empieza con grandes cantidades de energía el movimiento del sistema es caótico e impredecible, con movimientos erráticos en su trayectoria. Sin embargo, cuando la energía dada el sistema es lo suficientemente pequeña que garantice el movimiento del péndulo, este se

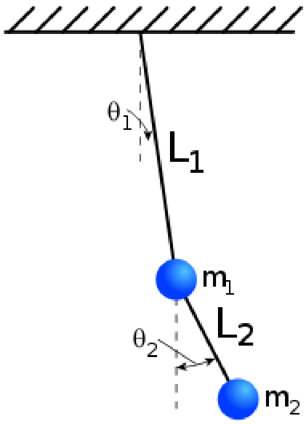

Figura 1:
Péndulo doble. Tomado de wikipedia.org

comporta de manera análoga a un péndulo simple. Si se incrementa gradualmente la energía en el sistema, el movimiento del péndulo estará asociado a trayectorias de tipo curvas de Lissajous, hasta que un evento externo o por la misma dinámica del sistema tienda a un movimiento caótico. El sistema en general puede pasar de un movimiento determinista a un movimiento caótico y viceversa.

El fundamento físico del péndulo doble, es similar al péndulo simple. A partir de una posición angular definida en m_1 se libera el sistema y este empezará a realizar oscilaciones en el plano de acuerdo a la energía dada por la posición angular inicial. Un ejemplo de la trayectoria de un péndulo doble se puede observar en la *figura 02*.

4. Ecuaciones de Movimiento.

A partir de consideraciones trigonométricas escribimos las expresiones de las posiciones x_1, y_1, x_2, y_2 en términos de los ángulos θ_1, θ_2:

$$x_1 = l_1 \sin\theta_1 \tag{1}$$

$$y_1 = -l_1 \cos\theta_1 \tag{2}$$

$$x_2 = x_1 + l_2 \sin\theta_2 \tag{3}$$

$$y_2 = y_1 - l_2 \cos\theta_2 \tag{4}$$

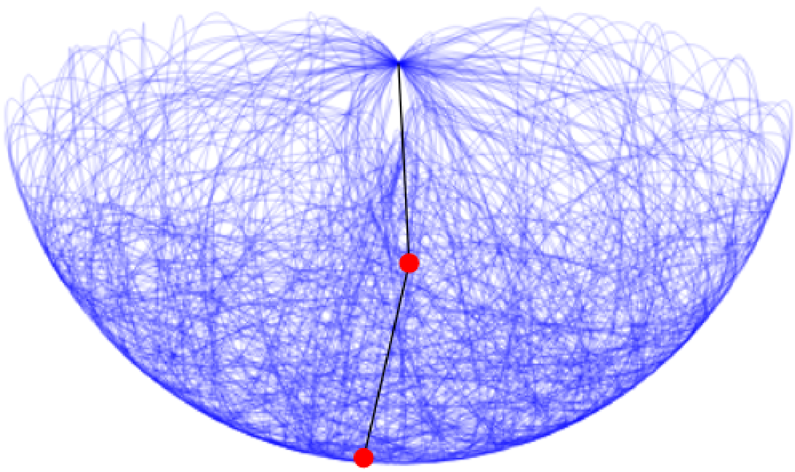

Figura 2:
Trayectoria del péndulo doble. Tomado de i-ciencias.com

Derivado las relaciones (1-4) respecto al tiempo dos veces, con el fin de obtener las aceleraciones:

$$\ddot{x}_1 = -\dot{\theta}_1^2 l_1 \sin\theta_1 + \ddot{\theta}_1 l_1 \cos\theta_1 \tag{5}$$

$$\ddot{y}_1 = \dot{\theta}_1^2 l_1 \cos\theta_1 + \ddot{\theta}_1 l_1 \sin\theta_1 \tag{6}$$

$$\ddot{x}_2 = \ddot{x}_1 - \dot{\theta}_2^2 l_2 \sin\theta_2 + \ddot{\theta}_2 l_2 \cos\theta_2 \tag{7}$$

$$\ddot{y}_2 = \ddot{y}_1 + \dot{\theta}_2^2 l_2 \cos\theta_2 + \ddot{\theta}_2 l_2 \sin\theta_2 \tag{8}$$

Despejando $\ddot{\theta_1}$ y $\ddot{\theta_2}$ de las relaciones (5-8) se obtienen las ecuaciones respecto a las posiciones angulares y velocidades que describen las ecuaciones de movimiento para el péndulo doble. La componente del movimiento asociada a la masa 1 es:

$$\ddot{\theta}_1 = \frac{-g(2m_1+m_2)\sin\theta_1 - m_2 g\sin(\theta_1 - 2\theta_2) - 2\sin(\theta_1-\theta_2)m_2(\dot{\theta}_2^2 l_2 + \dot{\theta}_1^2 l_1\cos(\theta_1-\theta_2))}{l_1(2m_1+m_2-m_2\cos(2\theta_1-2\theta_2))} \tag{9}$$

La componente del movimiento asociada a la masa 2 es:

$$\ddot{\theta}_2 = \frac{2\sin(\theta_1-\theta_2)(\dot{\theta}_1^2 l_1(m_1+m_2) + g(m_1+m_2)\cos\theta_1 + \dot{\theta}_2^2 l_2 m_2\cos(\theta_1-\theta_2))}{l_2(2m_1+m_2-m_2\cos(2\theta_1-2\theta_2))} \tag{10}$$

Nótese que las ecuaciones que describen el movimiento de las masas en el péndulo doble, se encuentran acopladas por las masas y posiciones angulares. Por último una expresión para la energía cinética y potencial se encuentran dadas por las siguientes expresiones respectivamente. Energía cinética en función a las posiciones cartesianas:

$$T = \frac{1}{2}m_1(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \frac{1}{2}m_2(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) \tag{11}$$

En función de las coordenadas polares o angulares:

$$T = \frac{1}{2}m_1 l_1^2\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}m_2[l_1^2\dot{\theta}_1^2 + l_2^2\dot{\theta}_2^2 + 2l_1l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\cos(\theta_1 - \theta_2)] \tag{12}$$

La energía potencial en coordenadas cartesianas:

$$V = m_1gy_1 + m_2gy_2 \tag{13}$$

En función de las componentes angulares:

$$V = -(m_1 + m_2)gl_1\cos\theta_1 - m_2gl_2\cos\theta_2 \tag{14}$$

Por tanto, la energía total del sistema puede ser expresada como la suma de la energía cinética y la energía potencial:

$$E = T + V \tag{15}$$

Referencias

Bernal, J., Flowers-Cano, R., and Carbajal-Dominguez, A. (2009). Exact calculation of the number of degrees of freedom of a rigid body composed of n particles. *Revista mexicana de física E*, 55(2):191–195. 1

Maraz, E. and Burgoa, O. (2014). Simulacion del movimiento de un péndulo doble en un medio viscoso. *Revista Boliviana de Física*, 25(25):27–30. 3

Marion, J. B. (1995). *Dinámica clásica de las partículas y sistemas.* Reverté. 1

Strogatz, S. H. (2018). *Nonlinear dynamics and chaos: with applications to physics, biology, chemistry, and engineering.* CRC press. 1, 3