

# Práctica de Simulación para el Sistema de Doble Péndulo Acoplado

Autor: Juan David Ramírez Cadavid  
Universidad de Antioquia - Instituto de Física. Medellín - Antioquia.

## 1. Introducción.

En esta sección de simulación colocará en práctica lo visto en el marco teórico sobre el péndulo doble acoplado. Para esto usted tendrá una interfaz realizada en p5.js, con código abierto el cuál podrá copiar y pegar para que pueda ser trabajado y analizado en visual studio code o en la web a través de p5js.org. La finalidad de la presente simulación es que el estudiante pueda entender los concepto físicos sobre el movimiento de un oscilador y como a través de la modificación de los parámetros físicos se puede inducir a movimientos caóticos.

La práctica de simulación contiene los objetivos de estudio, el resumen de la descripción del fundamento físico, el funcionamiento de la simulación y las actividades a desarrollar a través de la práctica.

## 2. Objetivo y Motivación.

### 2.1. Objetivo General.

Estudiar el movimiento de un péndulo doble acoplado a través de la modificación de los parámetros físicos que describen el sistema, entendiendo el concepto de movimiento determinista y movimiento caótico.

### 2.2. Motivación.

La principal motivación de la presenta práctica de simulación es el entendimiento del movimiento determinista y caótico de un péndulo doble acoplado a través de la variación de los parámetros físicos que describen el sistema, considerando que el movimiento mecánico de un sistema no solo se inscribe en el conocimiento y solución de las ecuaciones, sino que dependen de condiciones sensibles del sistema que pueden inducir trayectorias inesperadas.

Variable	Descripción	Rango	Unidad
$r_1$	Modifica la longitud de la cuerda de la masa 1.	1- 150	cm
$r_2$	Modifica la longitud de la cuerda de la masa 2.	1 - 150	cm
$m_1$	Modifica la cantidad de masa.	0.2 - 20	Kg
$m_2$	Modifica la cantidad de masa.	0.2 - 20	Kg
g	Modifica el valor de la aceleración de la gravedad.	0.0 - 30.0	$\frac{m}{s^2}$

Cuadro 1: Descripción de los sliders para el péndulo doble.

### 3. Descripción del Fundamento Físico.

El fundamento físico del péndulo doble, es similar al péndulo simple. A partir de una posición angular definida en  $m_1$  se libera el sistema y este empezará a realizar oscilaciones en el plano de acuerdo a la energía dada por la posición angular inicial. El sistema en general es sensible a las condiciones iniciales, cuando el sistema empieza con grandes cantidades de energía el movimiento del sistema es caótico e impredecible, con movimientos erráticos en su trayectoria. Sin embargo, cuando la energía dada el sistema es lo suficientemente pequeña que garantice el movimiento del péndulo, este se comporta de manera análoga a un péndulo simple. Si se incrementa gradualmente la energía en el sistema, el movimiento del péndulo estará asociado a trayectorias de tipo curvas de Lissajous, hasta que un evento externo o por la misma dinámica del sistema tienda a un movimiento caótico. El sistema en general puede pasar de un movimiento determinista a un movimiento caótico y viceversa. Para ampliar la información deberá recurrir al marco teórico.

### 4. Descripción de la Simulación.

Al ingresar aparecerá la siguiente interfaz (*figura 1*). En la margen izquierda de la pantalla encontrará el código, el cuál usted podrá modificar o revisar, encontrando los comentarios sobre cada una de las piezas o líneas de código. En la margen derecha verá la visualización de la simulación para el sistema. La simulación inicia con una posición angular de  $\frac{\pi}{6}$ , la cuál podrá modificar, considerando que posiciones angulares más grandes darán mas energía al sistema y por tal tenderá a un movimiento caótico más rápido y no podrá registrar datos de manera apropiada.

En la zona de visualización de la simulación encontrará una serie de sliders, estos le permitirán modificar los parámetros físicos del sistema. En la *tabla 01*, encontrará los rangos y la descripción de cada slider.

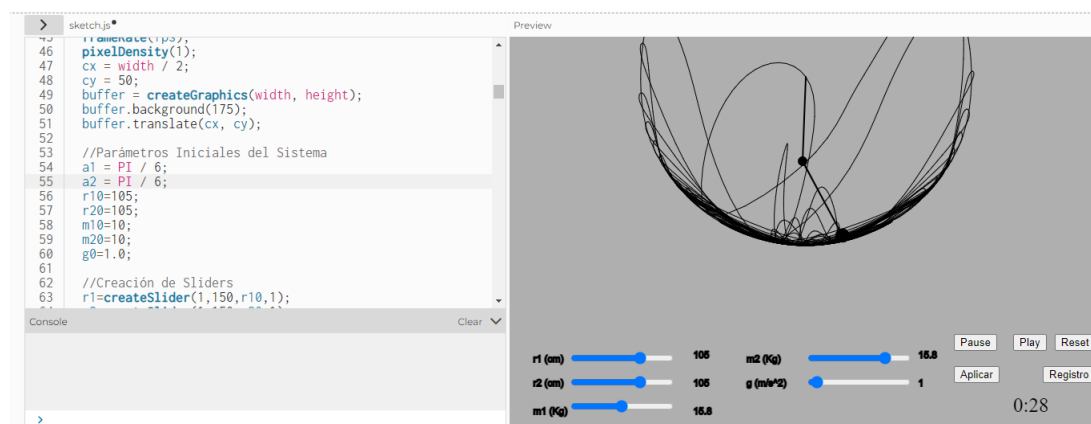


Figura 1:  
Interfaz o consola de simulación.

En la parte inferior derecha de la pantalla encontrará el cronometro, el cuál contabilizará el tiempo medido en segundos para el registro de datos. También encontrará cinco botones:

- **Pause:** detiene la simulación sin modificar los valores introducidos por el usuarios.
- **Play:** reinicia la simulación en el lapso de tiempo dejado por el usuario y con los parámetros introducidos.
- **Reset:** reinicia la simulación con los valores por default.
- **Aplicar:** permite aplicar los cambios introducidos a manipular los sliders.
- **Registro:** permite almacenar la información y ser exportados en un archivo .csv

Al momento de inicializar la interfaz la simulación empezará a correr con los valores por default. Si desea introducir valores nuevos y que estos sean aplicados deberá seguir el siguiente procedimiento:

- 1). Pausar la simulación.
- 2). Modificar los sliders.
- 3). Presionar el botón aplicar, esto reinicia con los valores aplicados y reinicia el contador.
- 4). Presionar el botón registro y luego el botón play, con esto inicializará la simulación y se irán guardando los datos, cuando crea usted que

tiene una suficiente cantidad de datos proceda a presionar el botón guardar y este descargará un archivo .csv en su computador, para que puedan ser cargados en el editor de su preferencia.

El archivo descargado tendrá los parámetros usados en el sistema en la parte inferior, las posiciones angulares y el tiempo.

## 5. Práctica de Simulación.

### 5.1. Práctica 01.

Para una amplitud de  $\frac{\pi}{6}$ , dada por el sistema por default, introduzca  $r_1 = r_2$ ,  $m_1 = m_2$  y  $g = 1$ , siga el procedimiento para iniciar desde cero la simulación y proceda a almacenar los datos, recuerde almacenar una cantidad de datos prudente, incluyendo el momento en el que se observa el movimiento caótico. Recuerde que  $\theta_1$  esta asociado a  $m_1$  y  $\theta_2$  asociado a  $m_2$ . Con los datos almacenados proceda a realizar el siguiente procedimiento:

- Proceda a determinar  $x_1, x_2, y_1$  y  $y_2$ , para esto debe apoyarse en el marco teórico.
- Grafiqué los pares ordenados  $x_1, y_1$  y  $x_2, y_2$ . ¿Qué puede decir sobre las figuras mostradas?
- Grafiqué ahora,  $t, \theta_1$  y  $t, \theta_2$ . ¿Qué puede decir acerca del comportamiento temporal del sistema?. Determine el momento en el que el sistema tiene mas energía. Determine el momento en el que el sistema pasa a ser determinista a caótico ¿coinciden ambos momentos?
- Grafiqué ahora la energía cinética, potencial y la energía total con respecto al tiempo. ¿Qué puede inferir sobre el comportamiento de la energía en el sistema? ¿Por qué antes de ingresar a un régimen caótico la curva de energía total tiende a cero, pero no es del todo cero? ¿Qué infiere usted sobre la energía cuando el péndulo pasa a un estado no determinista?. Determine el promedio de la energía cinética ¿qué infiere sobre este valor? ¿En que momento el sistema tiene mayor energía? ¿Coincide con el punto anterior?.
- Explique de manera breve la evolución del sistema.

Los gráficos aproximados que debería de obtener son los siguientes:

Realice el mismo procedimiento para los siguientes casos y proceda a comparar sus resultados con el caso anterior:

- $r_1 \gg r_2, m_1 = m_2$

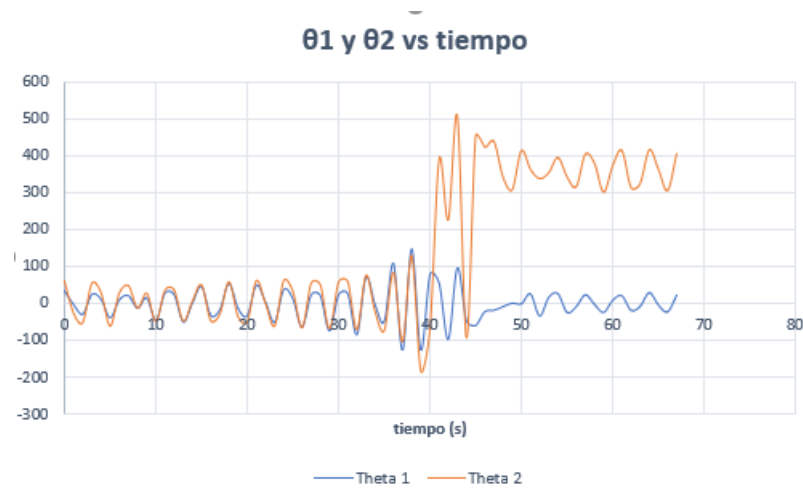


Figura 2:  
Gráfico de  $\theta$  vs  $t$ .

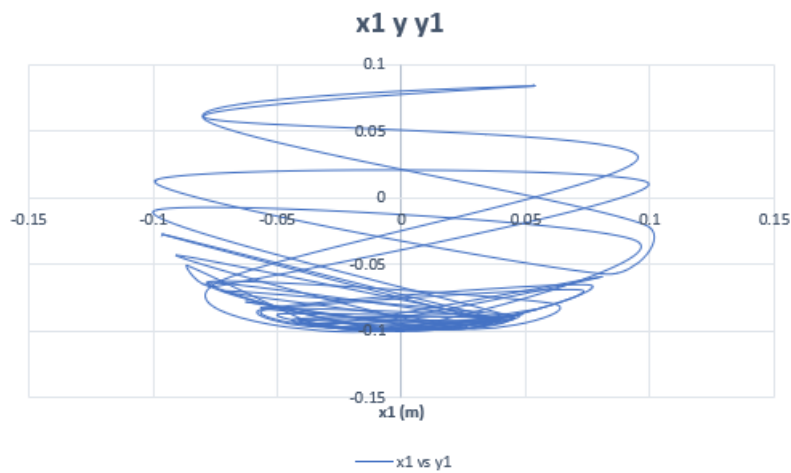


Figura 3:  
Gráfico de los pares coordenados.

- $r_1 \ll r_2, m_1 = m_2$
- $r_1 = r_2, m_1 > m_2$
- $r_1 = r_2, m_1 < m_2$

Responda las siguientes preguntas: ¿Qué sucede con la evolución del sistema?  
¿Qué sucede con la energía total del sistema?

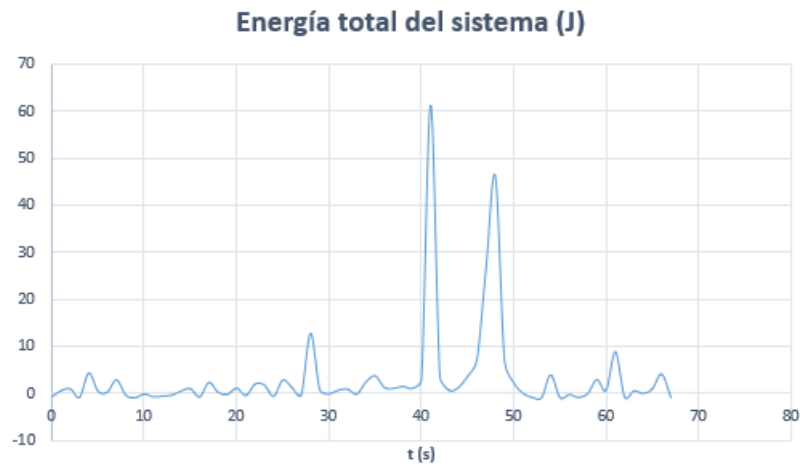


Figura 4:  
Gráfico de la energía total del sistema.

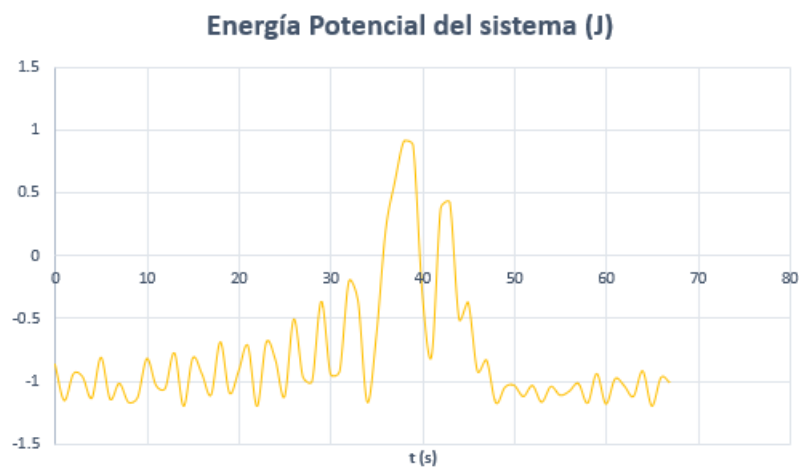


Figura 5:  
Gráfico de la energía potencial del sistema.

## 5.2. Práctica 02.

Reinicie la simulación e ingrese los siguientes valores:  $r_1 = r_2$ ,  $m_1 = m_2$ , pero esta vez modifique los valores de la gravedad, realice el procedimiento para tres valores  $g = g_1, g_2, g_3$ . Puede considerar los siguientes valores de la gravedad para nuestro sistema solar y observar como es el comportamiento del péndulo doble en diferentes campos gravitacionales.

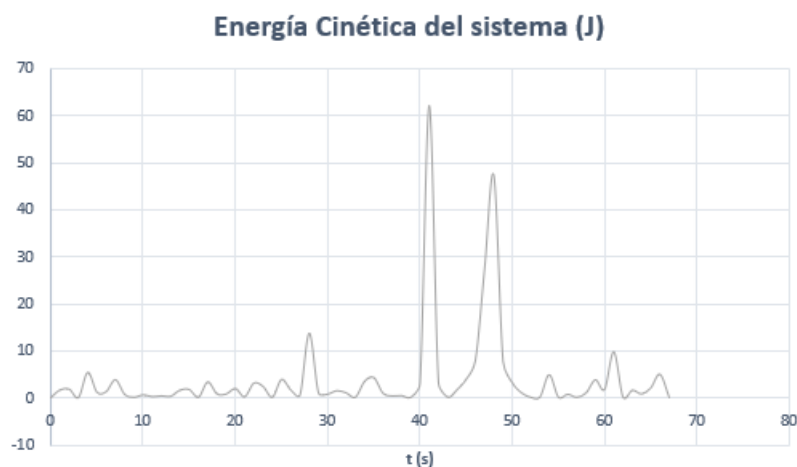


Figura 6:  
Gráfico de la energía cinética del sistema.

Planeta o Astro	Valor de la gravedad ( $\frac{m}{s^2}$ )
Espacio libre	0.0
Mercurio	3.7
Venus	8.87
Tierra	9.81
Saturno	10.47
Júpiter	24.79
Luna	1.62
Marte	3.72

Cuadro 2: Valores de la gravedad en el sistema solar.

Responda las siguientes preguntas (se recomienda que el estudiante empiece con valores de masa pequeños y de manera gradual aumente la gravedad para que el sistema no evolucione tan rápido al caos):

- Para  $g = 0$ , ¿qué puede describir sobre los pares ordenados (x,y)? ¿qué tipo de figuras describen?.
- ¿Qué sucede con el péndulo doble cuando la gravedad es mucho mayor, por ejemplo en Júpiter? ¿A qué sistema físico conocido es aproximado con una gravedad mayor? ¿Cómo es la evolución temporal del sistema con respecto a la energía y las posiciones angulares?

Proceda a comparar los resultados para los diferentes valores de la gravedad. Los resultados aproximados que debe obtener son los mostrados en los siguientes gráficos:

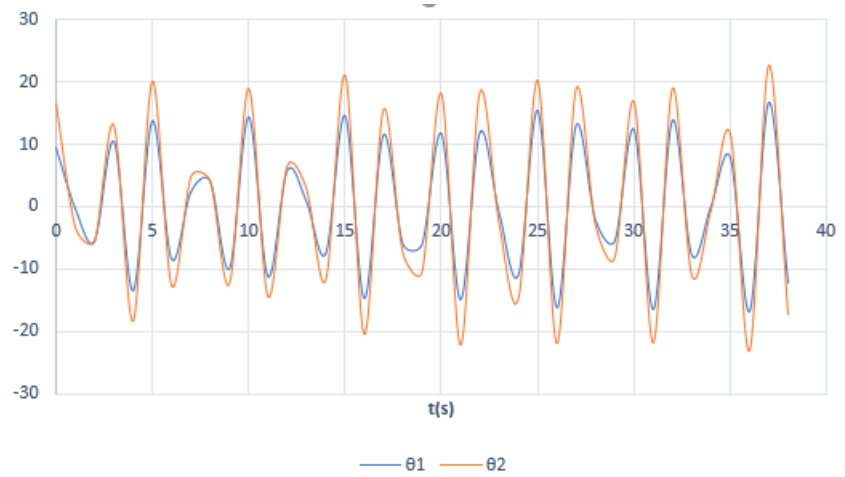


Figura 7:  
Gráfico de la evolución del sistema con una gravedad cercana a la de Júpiter.

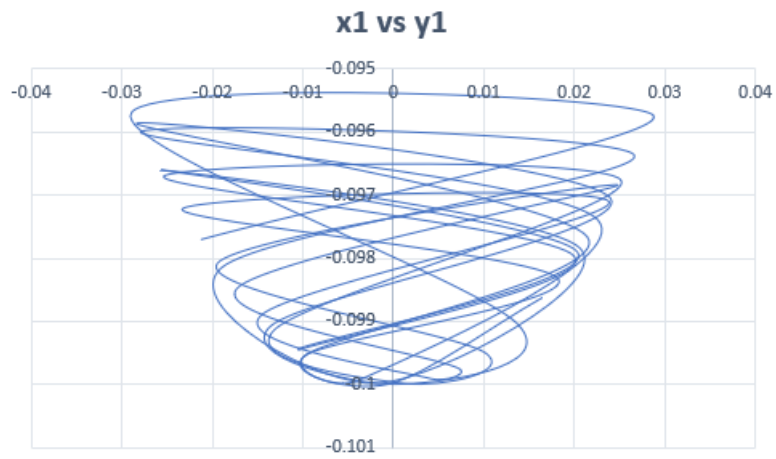


Figura 8:  
Gráfico de los pares coordenados para una gravedad cercana a la de Júpiter.