Sistema libre de dos osciladores acoplados no amortiguados.

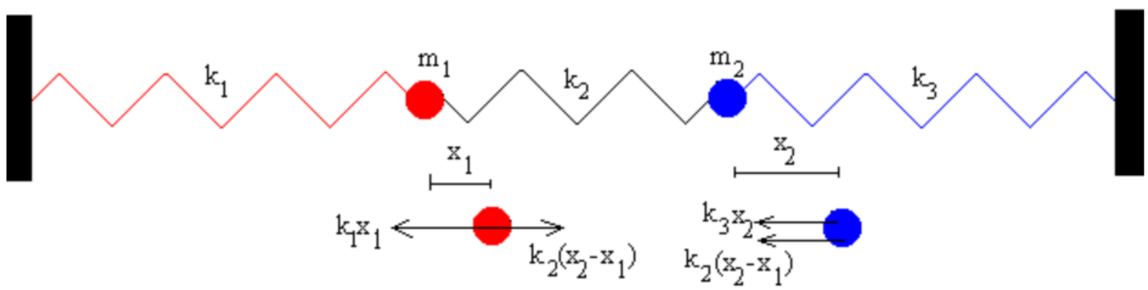
Rafael Barrera Quiroz, Andrea Valencia Cortés.

El presente texto tiene por objeto, explicar de manera clara y sencilla, la física que rige el comportamiento de un sistema libre de dos osciladores acoplados no amortiguados; por sistema libre, entendemos aquel que está exento de la acción de fuerzas externas, incluyendo también la ausencia de fricción característica de la interacción entre la superficie de los osciladores y la superficie sobre la que se mueven estos. Diremos también que un cuerpo oscila cuando se mueve periódicamente con respecto a la posición de equilibrio. Un caso bastante especial de los movimientos oscilatorios, es el movimiento armónico simple, el cual cuenta con un aparataje matemático relativamente sencillo, y el cual a su vez constituye una herramienta bastante útil a la hora de abordar distintos fenómenos de la naturaleza. En términos matemáticos, el movimiento armónico simple puede ser descrito por la expresión: $x = \mathrm{A}\sin(\omega t + \alpha)$, siendo x el desplazamiento con respecto al origen de coordenadas (posición de equilibrio) y t el tiempo. La cantidad $\omega t + \alpha$, se conoce como fase y para cuando $t = 0$, α es la fase inicial. En vista que la función seno, varía entre -1 y 1, el desplazamiento de dicho cuerpo se logra entre $x = -A$ y $x = A$, donde A toma el nombre de amplitud del movimiento. El termino ω, se conoce como frecuencia angular del objeto que oscila, la cual puede ser expresada matemáticamente como $\omega = 2\pi/P$, donde P es el periodo (tiempo necesario para completar un ciclo).

Es común, encontrase con situaciones en las que dos o más osciladores están acoplados (unidos, agrupados mediante una pieza o un mecanismo), cuyo funcionamiento combinado puede llegar a producir un resultado conveniente. Un caso común que pretendemos estudiar en esta simulación es el siguiente:

Un sistema conformado por dos osciladores, de masa m_1 y m_2 respectivamente, y tres resortes de constantes elásticas k_1, k_2 y k_3 como se muestra en el anterior gráfico.

Para comprender el comportamiento de dicho sistema, consideremos x_1 y x_2 como los desplazamientos con respecto a la posición de equilibrio de m_1 y m_2 respectivamente (medidos como positivos cuando están a la derecha de la posición de equilibrio). Cada resorte ha de ejercer una fuerza conservativa en dirección contraria a la dirección de movimiento de cada oscilador. Suponiendo entonces un desplazamiento inicial de ambos cuerpos a la derecha, tenemos que el resorte de constante k_1 sufre un estiramiento x_1 y el resorte de constante k_3 sufre una compresión x_2, mientras que el resorte de constante elástica k_2 sufre un desplazamiento $x_2 - x_1$. Según esto, la fuerza que ejercen los resortes de contante $k_1$sobre m_1 y de constante k_2 sobre m_2, son respectivamente $-k_1x_1$ y $-k_2x_2$. El resorte de constante k_3 ejerce una fuerza $k_3(x_2 - x_1)$ sobre m_1 y una fuerza $-k_3(x_2 - x_1)$ sobre m_2.



La ecuación diferencial de segundo orden para cada partícula está dada por (aplicando la segunda ley de Newton):

$$m_1 \frac{d^2x_1}{dt^2} = -k_1x_1 + k_2(x_2 - x_1)$$

y

$$m_2 \frac{d^2x_2}{dt^2} = -k_3x_2 - k_2(x_2 - x_1)$$

Las cuales pueden ser reescritas en forma matricial como:

$$\begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix} \frac{d^2}{dt^2} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (k_1 + k_2) & -k_2 \\ -k_2 & (k_2 + k_3) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0$$

Es decir $\boldsymbol{M}\frac{d^2\boldsymbol{x}}{dt^2}+\boldsymbol{Kx}=\boldsymbol{0}$

Proponiendo soluciones de la forma

$$x_1 = X_1\sin(\omega t+\varphi) \text{ y } x_2 = X_2\sin(\omega t+\varphi)$$

Para las anteriores ecuaciones diferenciales de segundo orden, obtenemos el sistema:

$$\begin{cases} (k_2 - m_1\omega^2)X_1 - k_2X_2 = 0 \\ -k_2X_1 + (k_2+k_3-m_2\omega^2)X_2 = 0 \end{cases}$$

El cual puede ser reescrito de forma matricial como:

$$\begin{pmatrix} \frac{(k_1+k_2)}{m_1}-\omega^2 & -\frac{k_2}{m_1} \\ \frac{-k_2}{m_2} & \frac{(k_2+k_3)}{m_2}-\omega^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = 0$$

Para hallar las frecuencias de los modos normales de vibración, calculamos el determinante de los coeficientes igualados a cero

$$\begin{vmatrix} \frac{(k_1+k_2)}{m_1}-\omega^2 & -\frac{k_2}{m_1} \\ \frac{-k_2}{m_2} & \frac{(k_2+k_3)}{m_2}-\omega^2 \end{vmatrix} = 0$$

Por modos normales de vibración entendemos casos especiales del movimiento de osciladores acoplados, que corresponden al caso en que los dos cuerpos se mueven con la misma frecuencia y mantienen una diferencia de fase constante.

Una vez resuelto el determinante, obtenemos una ecuación cuadrática de segundo grado, y de ella obtenemos las siguientes matrices:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{1}{2}(\frac{k_1 + k_2}{m_1} + \frac{k_2 + k_3}{m_2} + \sqrt{(\frac{k_1 + k_2}{m_1} - \frac{k_2 + k_3}{m_2})^2 - 4\left(\frac{k_2}{m_1}\right)\left(\frac{k_2}{m_2}\right)})}$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{1}{2}(\frac{k_1 + k_2}{m_1} + \frac{k_2 + k_3}{m_2} - \sqrt{(\frac{k_1 + k_2}{m_1} - \frac{k_2 + k_3}{m_2})^2 - 4\left(\frac{k_2}{m_1}\right)\left(\frac{k_2}{m_2}\right)})}$$

El movimiento resultante de cada una de los cuerpos es la combinación lineal de los dos monos normales de vibración de frecuencias angulares

$x_1 = X_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_1) + X_1 \sin(\omega_2 t + \varphi_2)$ y

$x_1 = X_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_1) + X_1 \sin(\omega_2 t + \varphi_2)$