Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Instituto de Física
Simulación:
Péndulo Simple

DESCRIPCIÓN DEL FENÓMENO.

1. **Módulo Básico. Introducción Conceptual:**

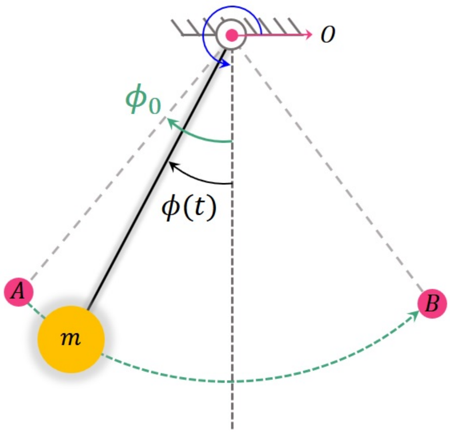

Figura 1: Movimiento de un Péndulo.

El péndulo simple es un sistema idealizado en un marco de referencia fijo, compuesto por una partícula de masa m que está suspendida de un punto fijo O; a través de un cable, una cuerda o un hilo. Al péndulo se le puede regular su longitud L y el peso de la masa. Cuando está oscilando, la masa suspendida se mueve cambiando su posición con el tiempo: se desplaza de un lado a otro, comenzando desde un punto inicial A, en el cual la amplitud angular del péndulo está fijada por un valor ϕ_0; luego llega hasta un punto B, en donde el valor de la amplitud angular $\phi(t)$, depende de la evolución que presenta el sistema a medida que avanza el tiempo.

Una situación particular que puede ocurrir en el comportamiento de un péndulo simple es la siguiente:

- **Despues de que comienza el movimiento de la masa m, el período de oscilación cambia.** Un período de oscilación, es la fracción de tiempo que tarda la masa en completar un movimiento de ida y retorno hasta cierto punto (por ejemplo, el tiempo que transcurre en partir de A hacia B y devolverse de B nuevamente hacia A). Si la cuerda es ideal, es decir, carece de masa; entonces actúa como un objeto rígido, de modo que la longitud del péndulo no se altera por efectos de la elasticidad de la cuerda. Por lo tanto, el péndulo permanecerá oscilando y nunca cambiará su período, en ausencia de la fricción provocada por el contacto del aire con la cuerda.

Las cuerdas ideales no existen y en un experimento real tampoco hay escenarios sin fricción, por lo cual, los efectos generados sobre el movimiento de la masa y de la cuerda son bien apreciables en el tiempo.

Un péndulo que se mueve más rápido, comparado con otro que se mueve más lento; tiene un período de oscilación más pequeño.

2. **Módulo Avanzado. Análisis conceptual:**

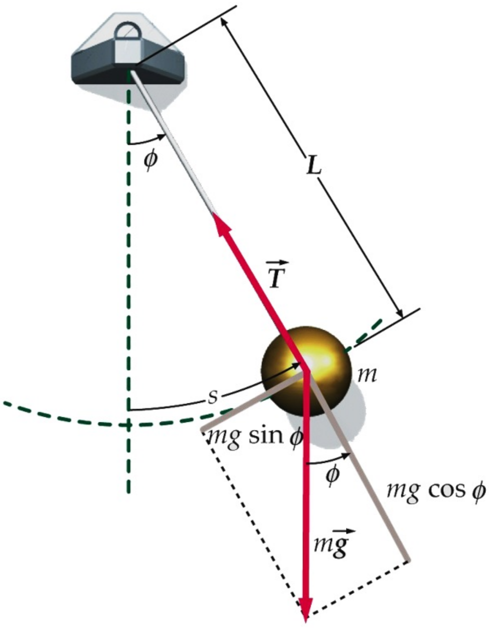

Figura 2: Diagrama de Fuerzas.

Cuando el péndulo se encuentra en reposo hay un estado de equilibro: la partícula de masa m está suspendida verticalmente y estática en el punto más bajo de la oscilación. Esto se debe a que la fuerza ejercida por el peso actuando en la masa, $m\vec{g}$, es contrarrestada por la tensión $\vec{T}$, en la cuerda. Si la partícula se desplaza a una posición ϕ_0 (esto es, a una amplitud angular de la cuerda con respecto a la vertical) y luego se suelta, el péndulo comienza a oscilar y describe el segmento de una trayectoria circular, dado por el arco s que representa la porción de una circunferencia de radio L. Cuando el péndulo se ha separado de la posición de equilibrio, el peso se descompone en la acción simultánea de dos componentes: la componente tangencial ($mg \sin\phi$) responsable de la fuerza resultante que produce el movimiento; y la componente normal en la dirección radial ($mg \cos\phi$) contrarrestada por la tensión T.

La fuerza resultante produce el efecto de acelerar la masa ($\vec{F} = m\vec{a}$), tratando de hacer que se detenga y que el péndulo recupere su estado de equilibrio.

Ecuaciones de movimiento:

- **(a) En la dirección radial.** Si v, es la velocidad a la que se mueve la partícula, entonces su aceleración dirigida radialmente hacia el centro de la trayectoria circular, está dada por la expresión $a_\text{n} = v^2/L$. Aplicando la segunda ley de Newton, se obtiene

$$ma_\text{n} = T - mg\cos\phi \tag{1}$$

  Conociendo el valor de la velocidad v, se puede determinar el valor de la tensión T de la cuerda, que será máxima cuando el péndulo pasa por la posición de equilibrio, $T = mg + mv^2/L$; y mínima en los extremos de la trayectoria cuando la velocidad de la partícula es cero, $T = mg\cos\phi_0$

- **(b) En la dirección tangencial (la dirección del movimiento).** La aceleración de la partícula es $a_\text{t} = dv/dt$. Aplicando la segunda ley de Newton, se obtiene

$$ma_\text{t} = -mg\sin\phi \tag{2}$$

  Usando la relación entre la aceleración tangencial y la aceleración angular $a_\text{t} = \alpha L$, la ecuación del movimiento se transforma en una ecuación diferencial

$$\frac{d^2\phi}{dt^2} + \frac{g}{L}\sin\phi = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{d^2\phi}{dt^2} = \frac{d\omega}{dt} = -\frac{g}{L}\sin\phi \tag{3}$$

  siendo $\omega = v/L$, la velocidad angular del desplazamiento.

El péndulo simple como un oscilador armónico.

Un péndulo simple se comporta como un oscilador armónico cuando oscila con amplitudes pequeñas. La aceleración hace que el péndulo oscile en torno a su posición de equilibrio, siguiendo el patrón de un movimiento armónico simple, solo si la amplitud angular de la oscilación está entre 15° y 20°, lo que implica que:

- $\sin\phi \approx \phi$
- La longitud del arco s de la trayectoria curva y el desplazamiento x en el eje horizontal, tienden a igualarse.
- La aceleración normal es despreciable.
- Se puede considerar que la trayectoria descrita por el movimiento de la partícula es horizontal.
- La posición de la partícula estará dada por la separación x, respecto a la vértical de equilibrio.

Por lo tanto, introduciendo al péndulo simple la aproximación de ángulos pequeños en la ecuación (3), la expresión que resulta y su solución serán idénticas a las del movimiento armónico simple:

$$\frac{d^2\phi}{dt^2} + \frac{g}{L}\phi = 0 \Rightarrow \phi(t) = \phi_0 \sin(\omega t + \delta), \quad \omega = \sqrt{\frac{g}{L}} \tag{4}$$

donde las magnitudes ϕ_0 y δ con dimensiones de ángulo plano, son constantes arbitrarias determinadas por las condiciones iniciales del sistema y corresponden respectivamente, a la amplitud angular y la fase inicial del movimiento.

Período del péndulo simple: isocronismo de las pequeñas oscilaciones.

El período de oscilación de un péndulo simple, corresponde al tiempo que tarda la masa en soltarse y regresar al punto de partida. Para un péndulo simple ideal de longitud L, oscilando con amplitudes pequeñas sobre la superficie terrestre y con un valor de la aceleración de la gravedad definido por $g = 9.8\ \mathrm{m/s^2}$, el período queda determinado simplemente por la longitud de la cuerda y la gravedad del planeta. Su valor está dado por:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \tag{5}$$

La aproximación de pequeñas oscilaciones implica que en el período del péndulo, no hay una influencia directa de la masa de la partícula que oscila, ni de la amplitud. Esta propiedad es conocida como isocronismo de las pequeñas oscilaciones y fue descubierta por el científico italiano Galileo Galilei en el año de 1581, en la catedral de Pisa.

Propiedad de la inercia.

Aunque la magnitud de la masa no sea considerada para determinar el valor del período, su inercia sí condiciona el movimiento de un péndulo simple, ya que la inercia es la propiedad que tiene un cuerpo para resistirse al cambio en su estado de movimiento: es más factible cambiar el estado de movimiento de un cuerpo de masa pequeña porque tiene menos inercia.

Fuentes de Información:

- Franco, G. (2021). Física con Ordenador: El péndulo Simple; [en línea]. Disponible en: http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica/default.htm. [2021, 01 de septiembre]
- FISICALAB (2021). Movimiento Armónico Simple en Péndulos; [en línea]. Disponible en: https://www.fisicalab.com/apartado/mas-y-pendulos. [2021, 01 de septiembre]
- PHET, (2021). Laboratorio de péndulo, Movimiento Períodico, Movimiento Armónico Simple; [en línea]. Disponible en: https://phet.colorado.edu/es/simulations/pendulum-lab. [2021, 01 de septiembre]