Práctica: Modelo Depredador-Presa

Objetivo

Esta práctica tiene como objetivo principal analizar el modelo depredador-presa descrito por las ecuaciones de Lotka-Volterra. Se utilizará una simulación la cual mediante métodos numéricos permitirá resolver las ecuaciones del sistema dinámico. Una vez resueltas, se podrá realizar un análisis cualitativo y cuantitativo del modelo de depredador-presa, en donde se podrán variar algunos los parámetros para encontrar puntos de equilibrio, puntos críticos y tener gráficas que brinden información sobre la evolución de los sistemas de manera individual y de manera conjunta.

Introducción

Los modelos matemáticos tienen diversas aplicaciones en las ciencias biológicas mediante sistemas dinámicos los cuales se encargan de describir la interacción entre especies. Existen diversos tipos de interacciones entre especies animales y vegetales, como lo son por ejemplo el mutualismo, el parasitismo, el neutralismo, etc. A inicios del siglo XX, los científicos Alfred Lotka y Vito Volterra, propusieron de manera independiente un modelo matemático el cual, bajo unas condiciones particulares, se encarga de describir una interacción de depredación entre dos especies en un ecosistema. La depredación consiste en que una especie (depredadora) se alimenta de otra (presa) y de esta manera surge lo que se conoce como modelo depredador-presa el cual ayuda tener una aproximación de la dinámica poblacional de un sistema formado por dos especies. Un ejemplo de este tipo de sistemas son la interacción entre los osos(depredadores) que se alimentan de salmones(presas), o de los tiburones que se alimentan de algunos peces etc. Este tipo de modelos ayudan a predecir la posible extinción o influencia que una especie causa en otra. La representación matemática se da mediante las conocidas ecuaciones de Lotka-Volterra.

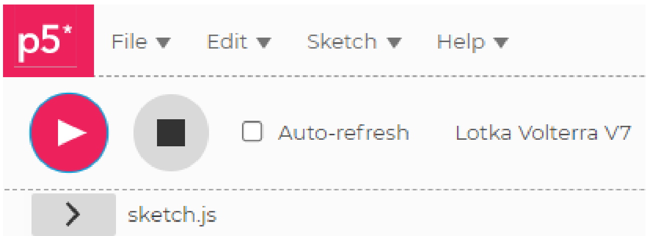
$$\frac{dx_1}{dt} = \alpha x_1(t) - \gamma x_1(t) x_2(t) \quad (1)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = -\beta x_1(t) + \delta x_1(t) x_2(t) \quad (2)$$

Las ecuaciones (1) y (2) son las ecuaciones de Lotka-Volterra que representan la variación poblacional de cada una de las especies, en donde las funciones $x_1(t)$ y $x_2(t)$ son variables que representan a las presas y los depredadores respectivamente, los parámetros α, β, γ y δ son parámetros constantes que intervienen en la dinámica del sistema. Dichos parámetros en las ecuaciones indican lo siguiente, α es la tasa de nacimiento de las presas cuando hay ausencia de depredadores, γ es la probabilidad de éxito en la caza del depredador, β es la tasa instantánea de disminución en la población de depredadores en ausencia de presas y finalmente δ se asocia con el éxito en el proceso de caza de los depredadores y en cuantas presas necesita cazar este para sobrevivir. Por último, los términos que se multiplican $x_1(t)x_2(t)$ representan la interacción entre las especies.

Instrucciones

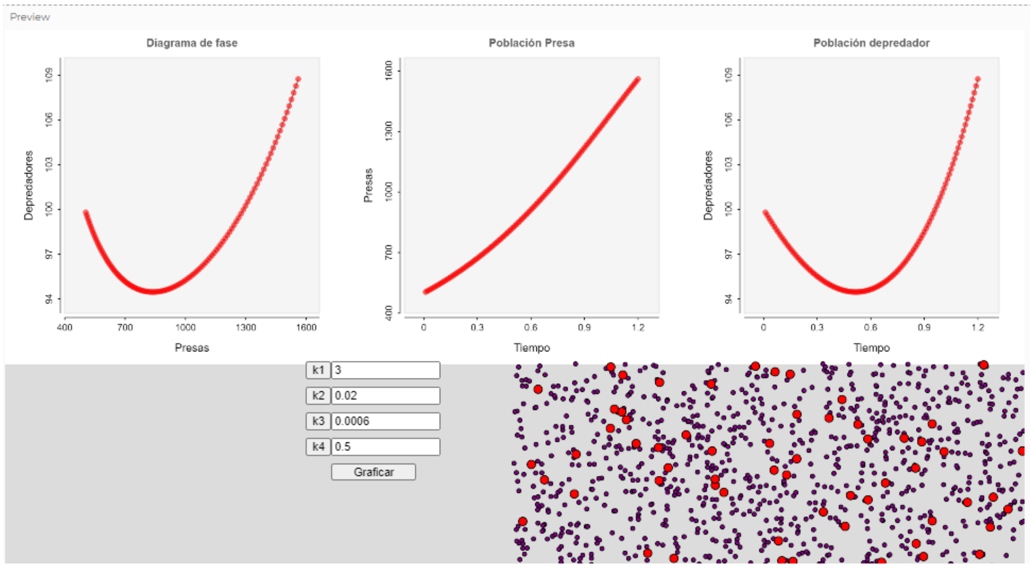
1. Abra la plataforma. Una vez abierta y se encuentre en la simulación haga click en correr (el círculo rojo con un triángulo blanco en el centro).



2. Una vez abierta la plataforma, se verá cuatro recuadros vacíos en donde cada uno a su izquierda tendrá un botón con el nombre de cada uno de los parámetros k1, k2, k3 y k4. Estos recuadros deberán llenarse con los números que se le asignen.

3. Para guardar los números dados en la simulación, es necesario que, una vez introducidos en el recuadro blanco, dar click a cada uno de los botones k1, k2, k3 y k4.

4. Finalmente, para ver la simulación, es necesario hacer click en el botón **Graficar**.



Actividades

Solucione el sistema dinámico para los siguientes valores de parámetros

A) k1=3 ; k2 = 0.02 ; k3=0.0006 ; k4=0.5

1. Un punto fijo se llama centro o ciclo límite si la ecuación diferencial evoluciona alrededor de éste de tal forma que complete una trayectoria cerrada. Este centro puede ser estimado mediante las siguientes relaciones $(\frac{\gamma}{\delta}, \frac{\alpha}{\beta})$. Determine si hay ciclos límite para el problema planteado y explique qué sucede con la dinámica en este punto.

2. De un estimado de los valores máximos y mínimos de presas y depredadores.

3. Observe detenidamente el diagrama de fase y describa brevemente lo que está sucediendo a medida que transcurre el tiempo.

4. El punto $(0, 0)$ Es llamado un punto fijo inestable ¿Explique por qué?

5. Justifique si a partir de las condiciones iniciales dadas la solución será estable a futuro, es decir, si ambas especies sobrevivirán, ¿habrá sobrepoblación de una de estas? ¿Alguna se extinguirá?

Referencias

[1] Aíza, R., (2014), *Modelos dinámicos de poblaciones simples y de sistemas depredador-presa*, Universidad Nacional Autónoma de México, México DF, México. Recuperado del sitio web: https://miscelaneamatematica.org/welcome/default/download/tbl_articulos.pdf2.93bd1238d803ed14.353830362e706466.pdf

[2] Cano, A., (2011), *Sistemas de Lotka-Volterra en dinámica poblacional*, Universidad Nacional de Educación a Distancia. San José, Costa Rica. Recuperado del sitio web: http://e-spacio.uned.es/fez/eserv/bibliuned:masterMatavanz-Acano/Documento.pdf