Sistema Masa Resorte Amortiguado

Autor: Juan David Ramírez Cadavid
Universidad de Antioquia - Instituto de Física. Medellín - Antioquia.

1. Definiciones.

1). **Resorte:** es un elemento elástico capaz de almacenar energía y liberarla sin deformarse (Young et al., 2009).

2). **Energía Potencial Elástica:** es la energía mecánica asociada a la existencia de un campo de fuerza en el interior de un cuerpo (Young et al., 2009).

3). **Oscilador Armónico:** es un sistema que cuando se deja en libertad fuera de su posición de equilibrio, vuelve hacia ella describiendo oscilaciones sinusoidales, o sinusoidales amortiguadas en torno a dicha posición estable (Sears et al., 2006).

4). **Viscosidad:** es una medida de su resistencia a las deformaciones graduales producidas por tensiones cortantes o tensiones de tracción en un fluido (Mott, 2006).

5). **Ley Hooke:** establece que el alargamiento unitario que experimenta un cuerpo elástico es directamente proporcional a la fuerza aplicada sobre el mismo (Sears et al., 2006).

6). **Factor de Calidad:** es una cantidad igual a 2π veces el inverso de las pérdidas relativas de energía por período (Young et al., 2009).

7). **Frecuencia:** es el número de repeticiones por unidad de tiempo de cualquier evento periódico medido en Hertz (Hz) (Young et al., 2009).

8). **Constante Elástica del Resorte:** es un parámetro físicamente medible que caracteriza el comportamiento elástico de un sólido deformable elástico (Young et al., 2009).

2. Aproximaciones y Variables Físicas.

En el sistema del oscilador amortiguado se supone un resorte ideal, es decir, que sin importar el esfuerzo aplicado mantiene su forma. También

Variable	Representación	Unidad
Elongación	$\mathbf{y}$	$\mathbf{m}$
Amplitud	$\mathbf{A}$	$\mathbf{m}$
Frecuencia angular	ω	$\mathbf{\frac{rad}{s}}$
Tiempo	$\mathbf{t}$	$\mathbf{s}$
Fase	ϕ	$\mathbf{rad}$
Masa	$\mathbf{M}$	$\mathbf{Kg}$
Constante Elástica	$\mathbf{K}$	$\mathbf{\frac{N}{m}}$
Coeficiente de amortiguamiento	$\mathbf{b}$	$\mathbf{\frac{N*s}{m}}$

Cuadro 1: Variables que describen el movimiento de un oscilador amortiguado.

se considera una masa cuya geometría no afecta el movimiento. Se considera además, una fuerza de fricción o fuerza de rozamiento proporcional a la velocidad con potencia igual a la unidad, es decir, aquella que deviene de los efectos producidos por la viscosidad del medio en el que se mueve la masa. No se consideran rozamientos secos, es decir, aquellos producidos por fuerzas o agentes externos que no dependen de la posición y la velocidad.

La variables físicas que describen el sistema se encuentran relacionados en la *tabla 1.*

3. Descripción del Fundamento Físico.

Los objetos físicos que describen el sistema es una particula puntual adherida a un resorte que se encuentran en un medio que les ofrece resistencia para el movimiento como se ilustra en la *figura 01.* A diferencia de un oscilador armónico, en el que el sistema independiente de las condiciones físicas que describen los objetos físicos seguirá oscilando, en el caso de un oscilador físico las constantes o parámetros toman especial relevancia, ya que describirán tres tipos diferentes de movimientos, siendo uno de ellos oscilatorio, pero que no permanece de manera perpetua, sino que se detiene de manera gradual.

Como se comenta el sistema solo podrá oscilar con la selección adecuada de los parámetros físicos, siendo la masa (**m**), la constante elástica (**k**) y el coeficiente de amortiguamiento (**b**), este último asociado a la viscosidad del medio. La elección de estos parámetros permitirá observar el estado oscilatorio, si el coeficiente de amortiguamiento es muy grande o la constante elástica es débil, el sistema no oscilará.

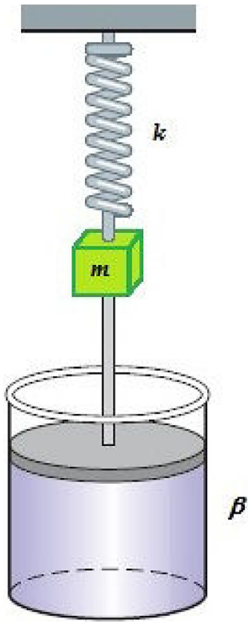

Figura 1:
Diagrama del sistema masa resorte con amortiguamiento. Tomado de Escalante-Martínez et al. (2016)

4. Ecuaciones de Movimiento.

En ausencia de otra fuerza que actúe en el sistema, se tiene por la segunda ley de Newton que:

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = -ky - b\frac{dy}{dt} \tag{1}$$

Donde, y es el desplazamiento de la masa medido desde su punto de equilibrio, positivo hacia abajo y negativo hacia arriba. Además, el signo negativo en el lado derecho de la Ec. (1) se debe a que, tanto resorte como amortiguador, actúan en dirección opuesta al movimiento. A esta ecuación se le llama ED del movimiento libre amortiguado (Escalante-Martínez et al., 2016) y Osorio Velez (2021). Haciendo un cambio de variables:

$$2\lambda = \frac{b}{m} \quad \omega^2 = \frac{k}{m} \tag{2}$$

La ecuación (01) se puede escribir como:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\lambda\frac{dy}{dt} + \omega^2 y = 0 \tag{3}$$

La ecuación (3) tiene la siguiente ecuación característica:

$$m^2 + 2\lambda m + \omega^2 = 0 \tag{4}$$

Cuyas raíces son: $m_{1,2} = -\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - \omega^2}$. Por lo tanto hay tres posibles casos:

1). **CASO I:** $\lambda^2 - \omega^2 > 0$ **Caso sobreamortiguado**. La solución de la ecuación de movimiento es: $y(t) = c_1 e^{m_1 t} + c_2 e^{m_2 t}$

2). **CASO II:** $\lambda^2 - \omega^2 = 0$ **Caso críticamente amortiguado**. La solución de la ecuación de movimiento es: $y(t) = c_1 e^{m_1 t} + c_2 t e^{m_1 t}$

3). **CASO III:** $\lambda^2 - \omega^2 < 0$ **Caso subamortiguado**. La solución de la ecuación de movimiento es: $y(t) = e^{-\lambda t}(c_1 cos(\sqrt{\omega^2 - \lambda^2} t) + c_2 sin(\sqrt{\omega^2 - \lambda^2} t))$

Donde c_1 y c_2 se determinan por las condiciones iniciales. Como se comento en el apartado anterior, el caso oscilatorio dependerá de los parámetros físicos del sistema. Para el caso amortiguado y críticamente amortiguado, se observa que no son casos oscilatorios, sino que disminuyen su amplitud con el tiempo de manera asintótica hasta ser cero, como se ilustra en la *figura 02.* En ambos casos de estudio, el coeficiente de amortiguamiento del medio es mas grande que la combinación de la constante elástica y la masa del sistema, por lo que frena el sistema antes de empezar a oscilar, en otras palabras también se puede aludir a un medio con una viscosidad grande.

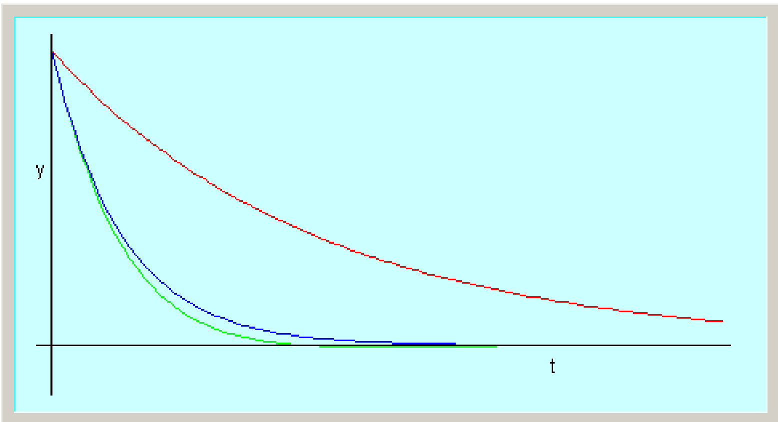

Figura 2:
Evolución del movimiento para un oscilador amortiguado respecto al tiempo. Tomado de wikipedia.org

En el caso oscilatorio, se observa que no completa oscilaciones completas sino en cambio que disminuyen con respecto a una tasa exponencial y un factor de proporcionalidad asociada al coeficiente de amortiguamiento tal y como se observa en la *figura 3.*

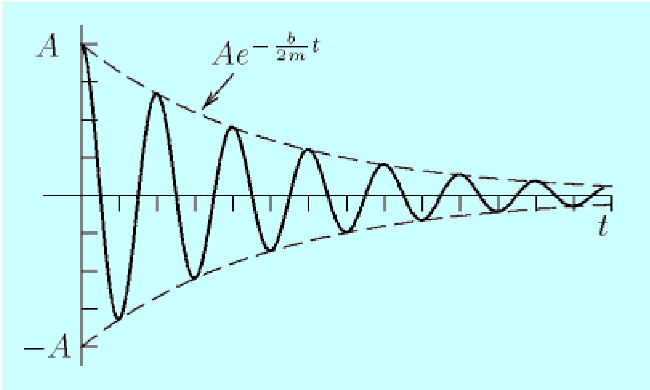

Figura 3:
Evolución del movimiento para un oscilador subamortiguado respecto al tiempo. Tomado de wikipedia.org

La ecuación de movimiento del caso III, puede ser reescrita de la siguiente manera:

$$y(t) = Ae^{-\lambda t}(sin(\sqrt{\omega^2 - \lambda^2}t + \phi)) \tag{5}$$

donde $A = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$ y $tan(\phi) = \frac{c_1}{c_2}Ae^{-\lambda t}$. Como es posible observar en la relación (5) el sistema presenta una parte oscilatoria dependiente de la función seno, pero una parte disipativa dependiente a una tasa exponencial. El sistema oscilará y disminuirá la amplitud hasta que este se detenga por completo. De acuerdo a Escalante-Martínez et al. (2016) la pulsación del sistema amortiguado es un poco menor que la pulsación del sistema no amortiguado $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ porque la fuerza que lo amortigua, frena la masa y la retarda.

En el caso subamortiguado, la oscilación del sistema está descrita por una sinusoide de frecuencia $f=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}-\left(\frac{b}{2m}\right)^2}$, cuya amplitud está multiplicada por una exponencial decreciente cuya constante de tiempo es $\tau=\frac{2m}{b}$. En un sistema poco amortiguado es interesante definir el factor de calidad (Quality factor en inglés) o simplemente Q como:

$$Q = \frac{\sqrt{km}}{b} \tag{6}$$

esta cantidad es igual a 2π veces el inverso de las pérdidas relativas de energía por período. Como ejemplos, el Q de un vehículo con los amortiguadores en buen estado es un poco más grande que 1. El Q de una cuerda de guitarra es de varios miles. El Q de los cristales de cuarzo utilizados en electrónica como referencia de frecuencia es el orden de 1 millón. Una copa de vidrio ordinario tiene un Q mucho más pequeño que una copa de vidrio de plomo (cristal).

La energía de la partícula que describe una oscilación amortiguada es la suma de la energía cinética de la partícula y de la energía potencial del muelle elástico deformado, la cuál puede ser descrita a través de la siguiente relación:

$$E = \frac{1}{2}m\dot{y}^2 + \frac{1}{2}ky^2 \tag{7}$$

Referencias

Escalante-Martínez, J., Laguna-Camacho, J., Gómez-Aguilar, J., Calderón-Ramón, C., Cruz-Orduña, M., Varguez-Fernández, R., and Anzelmetti-Zaragoza, J. (2016). Análisis del coeficiente de amortiguamiento viscoso en un sistema masa-resorte-amortiguador utilizando pplane y geogebra. *Revista mexicana de física E*, 62(2):66–72.

Mott, R. L. (2006). *Mecanica de Fluidos 6/e.* Pearson educación.

Osorio Velez, J. A. (2021). *Experimentos de Fisica para Hacer en Casa.* Universidad de Antioquia.

Sears, F. W., Zemansky, M. W., Young, H. D., Vara, R. H., García, M. G., Gümes, E. R., Cook, P. M., and Benites, F. G. (2006). *Física universitaria.* Number 530.076 530.076 S4F5 1986 S43F5 1986 QC23 S45 1986. Fondo Educativo Interamericano.

Young, H. D., Lewis Ford, A., and Freedman, R. A. (2009). *Física universitaria. Volumen 1.* México: Pearson Educación.