Задача: вычислить площадь пересечения двух кругов.

Введём следующие обозначения:
d - расстояние между центрами кругов,
R - радиус круга большего радиуса,
r - радиус круга меньшего радиуса.

Алгоритм:

1 Если $d \geq R + r$ пустое пересечение, то площадь пересечения равна 0, иначе если $R \geq r + d$, то круг меньшего радиуса находится полностью внутри круга большего радиуса и площадь пересесечения равна площади круга меньшего радиуса,
иначе если $R - r < d < R + r$: круги пересекаются, и круг с меньшим радиусом целиком не лежит внутри круга с большим радиусом. Переход к шагу 2.

2 Пусть O_1 - центр окружности большего радиуса,
O_2 - центр окружности меньшего радиуса,
A и B - точки пересечения окружностей,
C - основание перпендикуляров, опущенных из точек A и B на прямую O_1O_2,
$d1 = O_1C$,
$d2 = O_2C$,
$h = AC = BC$,
$\alpha = AO_2B$,
$\beta = AO_1B$ (см. рисунок).

Из системы

$$\begin{cases} d_1^2 + h^2 = R^2 \\ d_2^2 + h^2 = r^2 \\ d_1 + d_2 = d \end{cases}$$

получим

$$\begin{cases} d_1 = \frac{r^2+R_1^2-R_2^2}{2r} \\ d_2 = r - d_1 \\ h = \sqrt{R_2^2 - d_2^2} \end{cases}$$

3 Угол $\beta = 2arctg(\frac{h}{d_1})$, площадь сегмента O_1AB $S_1 = \frac{1}{2}R_1^2(\beta - sin(\beta))$.

4 Если O_2 совпадает с C, то $d_2 = 0$ и $\alpha = \pi$, иначе $\alpha = 2arctg(\frac{h}{d_2})$.

5 Если O_2 лежит между O_1 и C, то при вычислении угла α по формуле из пункта 4 результат окажется отрицательным. Для правильного ответа положим $\alpha = \alpha + 2\pi$.

6 Площадь сегмента O_2AB $S_2 = \frac{1}{2}R_2^2(\alpha - sin(\alpha))$.

7 Площадь пересечения окружностей $S = S_1 + S_2$.