

*Задача:* определить количество точек пересечения окружности и треугольника

*Алгоритм:*

Алгоритм решения данной задачи заключается в вычислении точек пересечения каждого ребра треугольника и окружности и добавления этих точек в общий список точек пересечения с последующим удалением из него повторных вхождений элементов, которые могут появляться при пересечении окружностью одной или нескольких вершин треугольника. Длина полученного списка является ответом к задаче.

Рассмотрим подробнее алгоритм вычисления точек пересечения окружности и отрезка. Пусть концы отрезка имеют координаты  $(x_1, y_1)$  и  $(x_2, y_2)$ , координаты центра рассматриваемой окружности -  $(x_0, y_0)$ , а её радиус равен  $R$ . Окружность пересекает отрезок тогда, и только тогда, когда совместна система:

$$\begin{cases} x = tx_1 + (1-t)x_2 \\ y = ty_1 + (1-t)y_2 \\ (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2 \\ 0 \leq t \leq 1, \end{cases}$$

где компоненты решения  $(x, y)$  являются координатами точек пересечения. Подставим выражения для  $x$  и  $y$  в уравнение окружности:

$$((x_1 - x_2)t + x_2 - x_0)^2 + (t(y_1 - y_2) + y_2 - y_0)^2 = R^2$$

Обозначим  $x_1 - x_2 = a_1$ ,  $x_2 - x_0 = b_1$ ,  $y_1 - y_2 = a_2$ ,  $y_2 - y_0 = b_2$ . Тогда уравнение примет вид:

$$(a_1^2 + a_2^2)t^2 + 2(a_1b_1 + a_2b_2)t + b_1^2 + b_2^2 - R^2 = 0$$

Дискриминант уравнения равен:

$$D_1 = \frac{D}{2} = 2a_1b_1a_2b_2 - a_1^2b_2^2 - a_2^2b_1^2 + R^2(a_1^2 + a_2^2)$$

Если он отрицательный, то окружность и прямая, на которой лежит рассматриваемый отрезок, не пересекаются. Если дискриминант неотрицательный, то окружность и прямая пересекаются. Точки их пересечения могут быть вычислены, если в выражения для  $x$  и  $y$  в системе подставить решения уравнения:

$$\begin{cases} t_1 = \frac{-a_1b_1 - a_2b_2 - \sqrt{D_1}}{a_1^2 + a_2^2} \\ t_2 = \frac{-a_1b_1 - a_2b_2 + \sqrt{D_1}}{a_1^2 + a_2^2} \end{cases}$$

Если  $0 \leq t_i \leq 1, i = \overline{1, 2}$ , то  $(t_ix_1 + (1-t_i)x_2, t_iy_1 + (1-t_i)y_2)$  является точкой пересечения рассматриваемой окружности и отрезка.