1 Réponses aux questions théoriques

1.1 Question 1 :

On a le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} 3x^4 + 2xy^2z + xy^2 + 2z^3 - 6x^2 + xy - y + 3 = 0 & (1) \\ x^4 + xy^2z + +z^3 - 2x^2 + 1 = 0 & (2) \\ 2x^4 + 2xy^2z + xy^2 + 2z^3 - 4x^2 + xy - y + 2 = 0 & (3) \end{cases}$$

On peut voir facilement que (1)-(3) nous donne :
$x^4 - 2x^2 + 1 = 0$.

1.2 Question 2 :

Avec un changement de variable $y = x^2$, qui nous ramenera à une équation du 2e degré, on trouvera comme solution : $x = \pm 1$
On a donc deux valeurs possibles pour la variable x, on va d'abord remplacer la valeur de $x = 1$ dans chaque équation, ça nous donne :

$$\begin{cases} 2y^2z + 2z^3 + y^2 = 0 & (1) \\ y^2z + z^3 = 0 & (2) \\ 2y^2z + 2z^3 + y^2 = 0 & (3) \end{cases}$$

la 1ére et la 3e équation sont équivalentes, d'après la 2e équation, on a : $z(y^2 + z^2) = 0$, donc soit $z = 0$ et y quelconque, soit $y^2 + z^2 = 0$ et z quelconque, or cette dernière équation admet une unique solution $z = y = 0$.
On a donc une première solution au système : $(x, y, z) = (1, 0, 0)$.
Pour $x = -1$, on obtient ce système :

$$\begin{cases} -2y^2z + 2z^3 - y^2 - 2y = 0 & (1) \\ -y^2z + z^3 = 0 & (2) \end{cases}$$

La 2e équation nous donne, $z(z^2 - y^2) = 0$.
première solution : $z = 0$, on remplace dans la (1), on obtient $-y^2 - 2y = 0$, donc $y(y + 2) = 0$, ça implique $y = 0$ ou $y = -2$. On remplace $y = 0$, on obtient $z = 0$. $y = -2$, on obtient $-4z + z^3 = 0$, donc $z = 0$ ou $z = \pm 2$
On a finalement comme solution générale : $(x, y, z) = \{(1, 0, 0), (-1, 0, 0), (-1, -2, 0), (-1, -2, 2), (-1, -2, -2)\}$.

1.3 Question 3 :

— Classer dans l'ordre décroissant pour $\succ_{lex}$:
$x^2y \succ_{lex} x^2z \succ_{lex} xyz \succ_{lex} xy \succ_{lex} xz \succ_{lex} x \succ_{lex} y^9 \succ_{lex} yz^4$. On peut voir le calssement de ces monômes comme : $(2, 1, 0) \succ_{lex} (2, 0, 1) \succ_{lex} (1, 1, 1) \succ_{lex} (1, 1, 0) \succ_{lex} (1, 0, 1) \succ_{lex} (1, 0, 0) \succ_{lex} (0, 9, 0) \succ_{lex} (0, 1, 4)$
En regardant la première valeur non nulle, en partant de la gauche, de $U_n - U_{n+1}$, On peut facilement vérifier que ce classement est juste (pour$\succ_{lex}$), i.e qu'elle est strictement positive
$(2, 1, 0) - (2, 0, 1) = (0, 1, -1), (2, 0, 1) - (1, 1, 1) = (1, -1, 0).....(0, 9, 0) - (0, 1, 4) = (0, 8, -4)$.

— Classer dans l'ordre décroissant pour $\succ_{grevlex}$:
$y^9 \succ_{grevlex} yz^4 \succ_{grevlex} x^2y \succ_{grevlex} x^2z \succ_{grevlex} xyz \succ_{grevlex} xy \succ_{grevlex} xz \succ_{grevlex} x$.
On peut également vérifier ce classement en représentant chaque mônome comme un 3-uplet, et on commence par mettre en avant les mônomes qui ont le plus grand degrè, puis si deux mônomes ont le même degrè, on vérifie que la première coordonnée non nulle, en partant de la droite, de $U_n - U_{n+1}$ est strictement négative.
Par exemple, pour $x^2y = (2, 1, 0), x^2z = (2, 0, 1)$, on a $(2, 1, 0) - (2, 0, 1) = (0, 1, -1)$, on a bien $-1 < 0$.

1.4 Question 4 :

Démontrer que l'ordre lexicographique est un ordre monomial.
Pour que l'ordre lexicographique soit un ordre monomial, il faut qu'il verifie 3 propriétés, autrement dit, un

ordre monomial sur M est une relation d'ordre qui est :

— **1.Total sur M :** deux mônomes peuvent toujours êtres comparés.
En effet, en représentant les mônomes comme des n-uplets, pour la $\succ_{lex}$, on peut toujours comparer deux mônomes.

— **2.Compatible avec le produit :** $m1 \succ m2 \implies m'm1 \succ m'm2$
Soit $m1 = (a1, a2, a3), m2 = (b1, b2, b3), m' = (a'1, a'2, a'3)$
On a $m'm1 = (a1 + a'1, a2 + a'2, a3 + a'3), m'm2 = (a'1 + b'1, a'2 + b'2, a'3 + b'3)$
$m'm1 - m'm2 = (a'1 + a1 - a'1 - b1, a'2 + a2 - a'2 - b2, a'3 + a3 - a'3 - b3)$
$m'm1 - m'm2 = (a1 - b1, a2 - b2, a3 - b3) = m1 - m2$
Donc pour $\succ_{lex}$, si $m1 \succ m2$ on a bien $m'm1 \succ m'm2$

— **3.Un bon ordre :** tout ensemble non vide de monômes a un plus petit elément, ou de façon equivalente, toute suite strictement décroissante de monômes termine. Ce qui est le cas pour l'ordre lexicographique, $1 = X_1^0 X_2^0 .....X_n^0$ qui est le plus petit élement de M.

1.5 Question 5 :

1.5.1 exécuter l'algorithme pour $P = xy^3 + x, G = [G1, G2]$ avec $G1 = y^2 + x$ et $G2 = xy$, avec l'ordre $\succ_{lex}$

On va d'abord intialiser nos variables :
$F = P, Q1 = Q2 = 0, R = 0$
Tant que $F \neq 0$:
$i = 1$
test-division=$False$
tant que $i = 1 \leq k = 2$:
$LT(G1) = x$ divise $LT(F) = xy^3$, donc :
$Q1 = LT(F)/LT(G1) = y^3$
$F = xy^3 + x - (x + y^2)y^3 = x - y^5$
test-division= $False$
$F = x - y^5 \neq 0$, On revient donc à la boucle avec $i = 1$
$i = 1$
test-division=$False$
tant que $i = 1 \leq k = 2$:
$LT(G1) = x$ divise $LT(F) = x$, donc :
$Q1 = y^3 + LT(F)/LT(G1) = y^3 + x/x = y^3 + 1$
$F = x - y^5 - (x + y^2) = -y^5 - y^2$
test-division= $False$
$F = -y^5 - y^2 \neq 0$, On revient donc à la boucle avec $i = 1$
$i = 1$
test-division=$False$
tant que $i = 1 \leq k = 2$:
$LT(G1) = x$ ne pas divise $LT(F) = -y^5$ donc :
$i = i + 1 = 2$
tant que $i = 2 \leq k = 2$:
$LT(G2) = xy$ ne divise pas $LT(F) = -y^5$, donc :
$i = 3$
test-divison=$False$, donc :
$R = LT(F) = -y^5$
$F = -y^5 - y^2 - (-y^5) = -y^2$
On a $F = -y^2 \neq 0$, donc on revient à la boucle avec $i = 1$
test-division=$False$:
$LT(G1) = x$ ne divise pas $LT(F) = -y^2$, et $LT(G2) = xy$ ne divise pas $LT(F) = -y^2$ donc :
$R = -y^5 + (-y^2) = -y^5 - y^2$
$F = -y^2 - (y^2) = 0$
on a $F = 0$ donc l'algorithme s'arrête et renvoie :

$(Q1, Q2) = (y^3 + 1, 0), R = -y^5 - y^2$

1.5.2 exécuter l'algorithme pour $P = xy^3 + x, G = [G1, G2]$ avec $G2 = y^2 + x$ et $G1 = xy$, avec l'ordre $\succ_{lex}$

De la même manière, on va exécuter cet algorithme, mais cette fois-ci, on va juste écrire les résultats à chaque tour de boucle (histoire d'éviter de trop écrire).
$F = P, Q1 = Q2 = 0, R = 0$
$LT(G1) = xy$ divise $LT(F) = xy^3$
$Q1 = LT(F)/LT(G2) = y^2$
$F = xy^3 + x - xy(y^2) = x$
on revient au début :
$LT(G1) = xy$ ne divise pas $LT(F) = x$
, donc :
$i = 2$
tant que $i = 2 \leq k = 2$:
$LT(G2) = x$ divise $LT(F) = x$, donc :
$Q2 = LT(F)/LT(G2) = 1$
$F = x - (x + y^2) = -y^2$
$i = 1$
tant que $i = 1 \leq k = 2$:
$LT(G1) = xy$ ne divise pas $LT(F) = -y^2$
, donc :
$i = 2$
$LT(G2) = x$ ne divise pas $LT(F) = -y^2$
$i = 3$
$R = -y^2$
$F = -y^2 - (-y^2) = 0$
on a donc comme résultat : $(Q1, Q2) = (y^2, 1), R = -y^2$

1.5.3 exécuter l'algorithme pour $P = xy^3 + x, G = [G1, G2]$ avec $G1 = y^2 + x$ et $G2 = xy$, avec l'ordre $\succ_{grevlex}$

C'est exactement le mêmee procédé, on change juste l'ordre.
$F = P, Q1 = Q2 = 0, R = 0$
$LT(G1) = y^2$ divise $LT(F) = xy^3$
$Q1 = LT(F)/LT(G1) = xy$
$F = xy^3 + x - (x + y^2) * xy = x - x^2y$ on revient au début :
$LT(G1) = y^2$ ne divise pas $LT(F) = -x^2y$
, donc :
$i = 2$
tant que $i = 2 \leq k = 2$:
$LT(G2) = xy$ divise $LT(F) = -x^2y$, donc :
$Q2 = LT(F)/LT(G2) = -x$
$F = x - x^2y + x^2y = x$
$i = 1$
$LT(G1) = y^2$ ne divise pas $LT(F) = x$
, donc :
$i = 2$
$LT(G2) = xy$ ne divise pas $LT(F) = x$
$i = 3$
$R = x$
$F = x - (x) = 0$
L'algorithme renvoie : $(Q1, Q2) = (xy, -x), R = x$.
Commentaires :
On remarque qu'en changeant d'ordre, et en inversant l'ordre des polynômes, on obtient des résultats différents mais qui sont tous correctes, c'est à dire en faisant la somme des produits Q_iG_i et en rajoutant R, on obtient le même résultat qui est P. On peut donc améliorer la performance de notre algorithme en choisissant le bon ordre pour réduire le nombre d'instructions.
C'est beaucoup plus simple dans le cas de polynômes à une seule variable, car il est très simple de

comparer deux monômes grâce à la relation d'ordre naturelle de N

1.6 Question 6 :

Pour la fonction de test de validité et un jeu de tests, veuillez voir le fichier Kaci.zip

1.7 Question 7 :

Donner un contre exemple à l'inclusion réciproque de $\langle LT(P_1), LT(P_1), ..., LT(P_k)\rangle \subseteq \langle LT(I)\rangle$:
Soit $I = \langle P_1, P_2\rangle$ l'idéal de $R[x, y]$ avec l'ordre $\succ_{lex}$ et $P_1 = xy + 1$, $P_2 = y^2 - 1$. Et Soit $F = xy^2 - x$
On peut écrire $F = x(y^2-1)+0(xy+1)$, donc F s'écrit comme $F = H_1P_1+H_2P_2$ avec $H_1, H_2 \in R[x, y]$, par conséquent , $F \in I$.
On peut aussi écrire $F = yP_1 + 0P_2 + (-x - y)$, donc $-x - y = F - yP_1$, puisque $F \in I$ et $P_1 \in I$, alors $x + y \in I$ et $LT(x + y) = x \in \langle LT(I)\rangle$.
mais d'un autre coté, $\langle LT(P1), LT(P2)\rangle = \langle xy, y^2\rangle$, et puisque x n'est divisible ni par xy ni par y^2, alors $x \notin \langle LT(P1), LT(P2)\rangle$.

1.8 Question 8 :

Montrer que G' est une base de Grobner pour l'idéal I

— **1ère méthode** :
  Soit I l'idéal engendré par $G = \{x + y^2, xy\}$ et soit $G' = \{x + y^2, y^3\}$.
  On va raisonner par l'absurde ; on suppose que G' n'est pas une base de Grobner pour l'idéal I,c'est à dire qu'il existe un polynôme $P \in I$ tel que $LT(P) \notin \langle LT(x + y^2), LT(y^3)\rangle = \langle x, y^3\rangle$, Donc x ne divise pas P, y^3 ne divise pas P, donc P est un polynôme en la seule indéterminée y,et puisque $P \in I$, on peut le décomposer en :
  $P = h_1(x + y^2) + h_2(xy)$.
  Pour tout $a \in Q[x, y]$, on a :
  $P(-a^2, a) = h_1(-a^2 + a^2) + h_2(-a^3) = h_2(-a^3)$.
  Comme x n'apparait pas dans P et Q est infini, $P = h_1(-y^2, y)(-y^3)$, par la suite y^3 divise P, ce qui est contradictoire avec le fait que y^3 ne divise pas $LT(P)$, donc G' est une base de Grobner pour l'idéal I.

— **2e méthode** :
  On a $\langle LT(x + y^2), LT(y^3)\rangle = \langle x, y^3\rangle$.
  $\langle LT(I)\rangle = \langle LT(x + y^2), LT(xy)\rangle = \langle x, xy\rangle = \langle x, (-y^2)y\rangle = \langle x, -y^3\rangle = \langle x, y^3\rangle$.
  Donc $\langle LT(x + y^2), LT(y^3)\rangle = \langle LT(I)\rangle$,ainsi G' est une base de Grobner pour l'idéal I.

1.9 Question 9 :

Voir le fichier Kaci.zip

1.10 Question 10 :

Voir le fichier Kaci.zip

1.11 Question 11 :

Voir le fichier Kaci.zip

1.12 Question 12 :

Calculer les bases de Grobner réduites pour :

coo$I = \langle y^2 + x, xy\rangle$ **avec** $\succ_{lex}$:
On exécute les 2 algorithmes (2 et 3) avec la commande : $Base - reduite(Buchberger([y^2 + x, xy]))$, on obtient : $G = [y^3, x + y^2]$.
$I = \langle y^2 + x, xy\rangle$ **avec** $\succ_{grevlex}$:
On exécute les 2 algorithmes (2 et 3) avec la commande : $Base - reduite(Buchberger([y^2 + x, xy]))$, on obtient : $G = [y^2 + x, xy, x^2]$.
$I = \langle x^2 + y^2 - 1, xy - 1/2\rangle$ **avec** $\succ_{lex}$:
On exécute les 2 algorithmes (2 et 3) avec la commande : $Base - reduite(Buchberger([x^2 + y^2 - 1, xy - 1/2]))$, on obtient : $G = [-2y^4 + 2y^2 - 1/2, x/2 + y^3 - y]$.
Remarques :
En comparant ces résultats avec la commande integré de sage $I.groebner - basis()$,on n'obtient pas exactement les mêmes résultats, mais ce sont des résultats égaux (équivalents), par exemple pour la 3e, sur sage on obtient $G = [x + 2y^3 - 2y, y^4 - y^2 + 1/4]$, et sur l'algorithme qu'on a implanté $G = [-2y^4 + 2y^2 - 1/2, x/2 + y^3 - y]$. Puisqu'on parle de base, multiplier ou diviser par un nombre non nul qui appartient au corps, ne change rien.

1.13 Question 13 :

— — **retrouver les deux solutions réelles du système** :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 1 = 0 \\ xy - 1 = 0 \end{cases}$$

On essaye d'aboutir à une équation avec une seule variable, pour cela, on appelle les 2 algorithmes, $Base - reduite(Buchberger([x^2 + y^2 - 1, xy - 1/2]))$, et ça nous donne : $[-2y^4 + 2y^2 - 1/2, x/2 + y^3 - y]$.
On résout l'équation $-2y^4 + 2y^2 - 1/2 = 0$, on trouve comme solutions : $y = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$.
Il suffit de remplacer la valeur de y, puis on trouvera exactement 2 solutions ($x = \frac{\sqrt{2}}{2}$,$y = \frac{\sqrt{2}}{2}$) et ($x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$,$y = -\frac{\sqrt{2}}{2}$)

— **calculer la valeur exacte des points d'intersections réels de ces trois surfaces de l'espace à trois dimensions** :
L'idée pour trouver ces points est de considérer l'idéal engendré par ces 3 équations, puis d'en calculer une base de Grobner réduite afin de tomber sur une équation à une seule variable puis de la résoudre, substituer cette valeur et ainsi de suite. Le systère d'équation est le suivant :

$$\begin{cases} x + y - z - 1 = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0 \\ x^3 + y^3 + z^3 + 1 - (x + y + z + 1)^3 = 0) \end{cases}$$

On utilisant l'algorithme 2 et 3 à la fois (comme précédemment), une base de Grobner réduite est donnée par : $G = [-3z^3 - 9z^2 - 8z - 2, -2y^2 + 2yz + 2y - 2z^2 - 2z, x + y - z - 1]$
On a réussi à avoir une équation avec un seul inconnu en z.
J'ai trouvé les solutions réelles de z sur sage avec la méthode :
-$var = ('x_1')$
-$solve(-3x_1^3 - 9x_1^2 - 8x_1 - 2, x_1)$.
il y a trois valeurs pour z, $= \{\frac{\sqrt{3}}{3} - 1, -\frac{\sqrt{3}}{3} - 1, -1\}$.
On va maintenant remplacer les 3 valeurs de z dans l'équation $-2y^2+2yz+2y-2z^2-2z = 0$, et de résoudre cette dernière pour chaque valeur de z.
à l'aide de sage, avec la méthode d'évaluation de polynôme, on obtient les équations suivantes :
-Pour $z = \frac{\sqrt{3}}{3} - 1$, on obtient : $-2y^2 + 1.15470053837925y + 0.488033871712585 = 0$, et elle a comme solution : $y = \{-0.28347018714576194, 0.8608204563353878\}$.
-Pour $z = -\frac{\sqrt{3}}{3} - 1$, il n'y a pas de solutions réelles pour y, donc on élimine cette valeur de z.
-Pour $z = -1$, on a comme solution $y = 0$.
Finalement, on va remplacer la valeur des couples :

$(z,y)=\{(\frac{\sqrt{3}}{3}-1,-0.28347018714576194),(\frac{\sqrt{3}}{3}-1,0.8608204563353878),(-1,0)\}$ dans l'équation $x+y-z-1=0$ afin d'obtenir la/les valeur/s de x.
On a donc une solution, qui les points d'intersections des trois surfaces données :

$(x,y,z)=\{(0.860820456335388,-0.28347018714576194,\frac{\sqrt{3}}{3}-1),$
$(-0.283470187145762,0.8608204563353878,\frac{\sqrt{3}}{3}-1),(0,0,-1)\}$

— **déterminer l'ensemble des parallelépidèdes rectangles** :
On va essayer de traduire les données en un système d'équation polynomiale.
On note x la longueur du parallélépipède rectangle, y sa largeur et z sa hauteur.
-le volume vaut 24, c'est à dire $xyz-24=0$
-l'aire vaut 52, c'est à dire $2zx+2zy+2xy-52=0$
-la grande diagonale vaut 29, c'est à dire $x^2+y^2+z^2-29^2=0$, car la grande diagonale $d=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$
On a donc ce système :
$$\begin{cases} xyz-24=0 \\ zx+zy+xy-26=0 \\ x^2+y^2+z^2-841=0 \end{cases}$$
On obtient comme précédemment, une base de Grobner réduite, avec les 2 algorithmes qu'on a implanté (elle contient des fractions un peu longues, mais qui sont justes).

On a $G=[-z^6+841z^4+48z^3-676z^2+1248z-576, -2032567056/2380756849y^2+183495637/4761513698yz^5+84690294/2380756849yz^4-154319830717/4761513698yz^3-75628432542/2380756849yz^2+57956391194/2380756849yz-57250638744/2380756849y+84690294/2380756849z^5-71224537254/2380756849z^3-4065134112/2380756849z^2+57250638744/2380756849z-105693486912/2380756849, -26x-26y+169/144z^5+13/12z^4-142129/144z^3-11609/12z^2+26689/36z-2197/3]$

Cette fois-ci on va utiliser la méthode $factor()$ de sage, qui factorise des polynômes, car cette dernière renvoie des valeurs numériques au lieu de grandes fractions.
On va donc factoriser le polynôme $P(z)=-z^6+841z^4+48z^3-676z^2+1248z-576$, on obtient comme solutions : $z=(29.0155409651938, 0.558227822342823, -1.48474679795362, -28.9565866193571)$.
On remplace chaque valeur de z dans le 2e polynôme de la base G, qui est un polynômes à 2 variables (z et y), puis on résout l'équation du 2e degré associée et on récupère la valeur de y. On obtient donc ces couples :
$(z,y)=\{(0.558227822342823,-1.48474679795362),(0.558227822342823,-28.9565866193571),$
$(-1.48474679795362,0.558227822342790),(-1.48474679795362,-28.9565866193575)$
$,(-28.9565866193571,0.558227820937095),(-28.956586619357,-1.48474679833549)\}$
Pour la première valeur de z, il n'y a pas de solutions réelles , on a donc 6 couples de (z,y) au total.
Finalement, on remplace ces valeurs dans le 3e polynôme de la base G,et une fois qu'on obtenu les 6 3-uplets (x,y,z), on en prend ceux qui satisfont le système d'équation initial, on aura donc comme solution générale, qui est l'ensemble des parallelépidèdes rectangles demandé, dont les coordonnées sont exactement les (x,y,z) suivants :
$(x,y,z)=\{(-28.9565240080969,-1.48474679795362,0.558227822342823),$
$(-1.46842692707840,-28.9565866193571,0.558227822342823)\}$