

Układy równań liniowych

1. Wstęp:

Celem niniejszego projektu jest implementacja oraz analiza wybranych metod służących do rozwiązywania układów liniowych. Metody, które tutaj zostaną poruszone są to metody iteracyjne Jacobiego i Gaussa-Seidla oraz bezpośrednia oparta na faktoryzacji LU. Przetestujemy je pod względem dokładności jak i czasu wykonywania.

Będziemy rozwiązywać równania w takiej formie: $Ax = b$. Gdzie A to macierz kwadratowa o rozmiarze N nazywana systemową, ona zawiera współczynniki każdej zmiennej każdego równania z naszego układu równań. Wektor pobudzenia b ma długość N i zawiera wartość jaką powinny osiągnąć poszczególne równania przy poprawnie wyliczonych zmiennych. Wektor x jest wektorem rozwiązań, który reprezentuje szukane wielkości. Na potrzeby analizy, nasza macierz A będzie trzymała się takiego schematu:

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_2 & a_1 & a_2 & a_3 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_2 & a_3 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_3 & a_2 & a_1 & a_2 & a_3 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_3 & a_2 & a_1 \end{bmatrix}$$

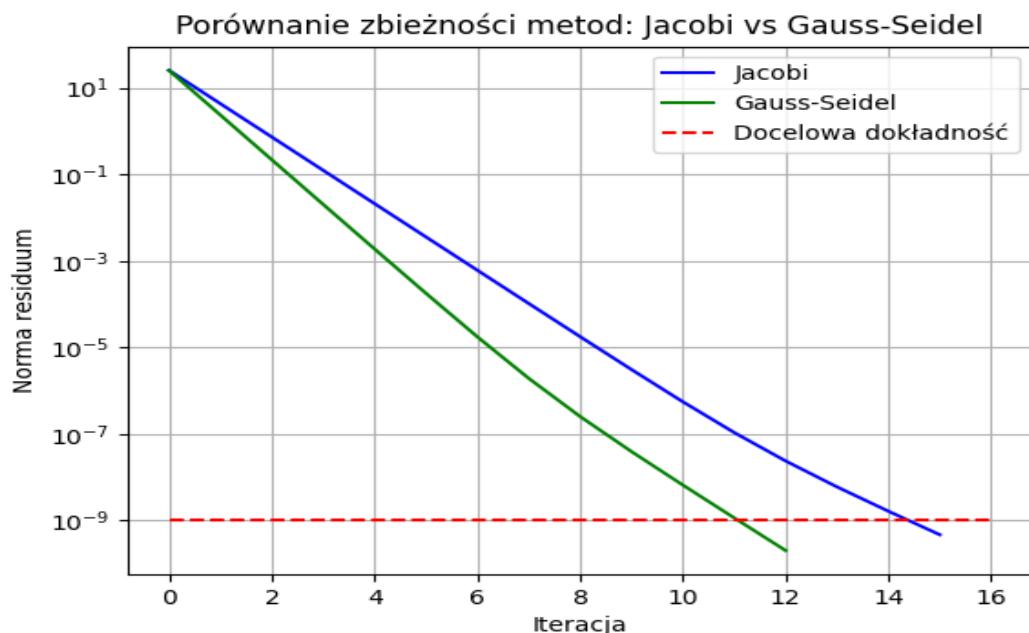
Dwie spośród trzech omawianych przeze mnie metod są iteracyjne. Oznacza to, że polegają one na wyznaczeniu kolejnych przybliżeń rozwiązań na podstawie wartości z poprzednich iteracji. Nie wiadomo ile dokładnie jest potrzebnych iteracji, aby rozwiązać układ równań, dodatkowo nie dla każdej macierzy takie metody działają, mają one swoje kryteria. Złożoność czasowa takich metod wynosi $O(n^2)$, jednak pod warunkiem, że się zbiegają. W metodach tych dzielimy macierz A na trzy części: L , U i D . Są to kolejno macierz trójkątna dolna, trójkątna góra i diagonalna. W metodzie Jacobiego kolejne wartości rozwiązań x bierzemy z równania $x_n = D^{-1}(L + U)x_{n-1} + D^{-1}b$, co można przekształcić w $x_n = Mx_{n-1} + w$, gdyż M i w się nie zmieniają. W metodzie Gaussa-Seidla wzór jest trochę różni: $x_n = -(D + L)^{-1}(Ux_{n-1}) + (D + L)^{-1}b$, co można przekształcić na $x_n = -T^{-1}(Ux_{n-1}) + T^{-1}b$. W tej sytuacji jesteśmy zmuszeni w każdej iteracji rozwiązywać osobne równanie z podstawieniem wprzód, ponieważ macierz T jest macierzą trójkątną, sprawia to, że pojedyncza iteracja Gaussa-Seidla będzie zajmowała więcej czasu niż w metodzie Jacobiego, jednak zaletą tej metody jest to, że jest mniej tych iteracji.

Trzecia metoda jest bezpośrednią, oznacza to, że rozwiązanie uzyskuje się bez konieczności iteracji i ilość operacji koniecznych do obliczenia równania jest z góry znana. Często takie metody są znacznie bardziej dokładne, jak i mogą być stosowane do szerszej grupy macierzy, jednak ich dużym minusem jest czas wykonywania, gdyż złożoność takich metod wynosi $O(n^3)$. Metoda faktoryzacji LU polega na podziale macierzy A tak, że $A = LU$. Następnie rozwiążujemy układ równań $Ly = b$ za pomocą powstawiania wprzód, a potem układ $Ux = y$ za pomocą podstawiania wstecz.

2. Porównanie metody Jacobiego i Gaussa-Seidela:

Na początku dokonamy porównania dwóch metod iteracyjnych opisanych we wstępie: metody Jacobiego oraz metody Gaussa-Seidela. Zgodnie z treścią zadania, rozważany układ równań ma rozmiar $N = 1297$. Macierz współczynników A jest macierzą trójdagonalną, w której elementy głównej przekątnej a_1 wynoszą 13, natomiast elementy przekątnych sąsiednich a_2 i a_3 są równe -1. Element b_n wektora prawej strony przyjmuje wartość $\sin(n * 8)$. Macierz A jest symetryczna oraz diagonalnie dominująca, co sprzyja zbieżności metod iteracyjnych.

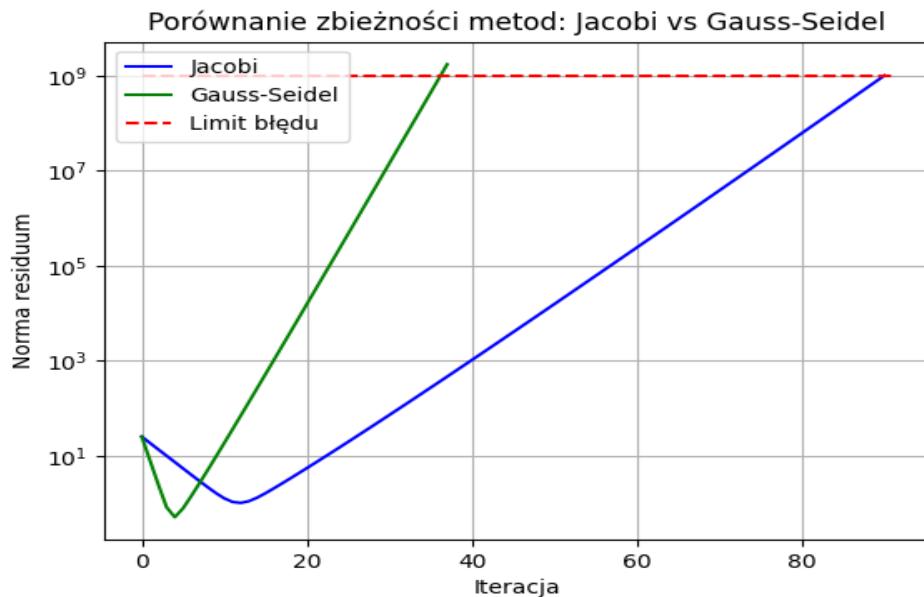
Metoda	Liczba iteracji	Czas [s]	Norma residuum
Jacobiego	15	0.091	$4.63 * 10^{-10}$
Gaussa-Seidela	12	0.140	$2.00 * 10^{-10}$



Jak widać na powyższym wykresie, obie metody wykazały zbieżność i osiągnęły zadany próg dokładności, czyli normę residuum mniejszą niż 10^{-9} . Metoda Gaussa-Seidela wymagała mniejszej liczby iteracji w porównaniu do metody Jacobiego. Jednakże, mimo większej liczby iteracji, metoda Jacobiego okazała się szybsza pod względem czasu wykonania – prawdopodobnie ze względu na krótszy czas wykonywanie pojedynczej iteracji.

W dalszej części porównamy te same metody dla nieco zmodyfikowanego układu równań. Zmienimy wartości na głównej przekątnej macierzy A tak, aby wszystkie elementy wynosiły 3, zamiast 13.

Metoda	Liczba iteracji	Czas [s]	Norma residuum
Jacobiego	37	0.160	$1.00 * 10^9$
Gaussa-Seidela	90	0.335	$1.72 * 10^9$



W tym przypadku obserwujemy zupełnie inny przebieg zbieżności – norma residuum zamiast maleć, zaczyna rosnąć wraz z kolejnymi iteracjami. Początkowo, przez kilka iteracji, obserwujemy spadek normy residuum, jednak w dalszym przebiegu następuje jej gwałtowny wzrost. Dla metody Gaussa-Seidela wartość błędu osiągnęła zdefiniowane maksimum już po 37 iteracjach, natomiast dla metody Jacobiego – po 90 iteracjach.

Taki przebieg jednoznacznie wskazuje na brak zbieżności obu metod dla tej wersji macierzy. Analizując warunki zbieżności, można zauważyc, że zmodyfikowana macierz A nie spełnia już kryteriów, które umożliwiają zbieżność metod iteracyjnych takich jak dominacja diagonalna.

3. Faktoryzacja LU:

Faktoryzacja LU to metoda bezpośredniego rozwiązywania układów równań liniowych, oparta na rozkładzie macierzy A na iloczyn dwóch macierzy trójkątnych: dolnotrójkątnej L oraz górnortrójkątnej U , czyli $A = LU$. W przeciwieństwie do metod iteracyjnych, LU nie wymaga spełnienia warunków zbieżności – można ją zastosować do znacznie szerszej klasy układów równań.

Zaletą metody LU jest bardzo wysoka dokładność – osiągnięty błąd (residuum) może być znacznie mniejszy niż wymagany próg 10^{-9} , co stanowi przewagę nad metodami iteracyjnymi. Sprawdźmy, jak poradzi sobie z układem równań, z którym metoda Jacobiego oraz Gaussa-Seidela sobie nie poradziły.

Metoda	Czas [s]	Norma residuum
Faktoryzacja LU	7.699	$5.86 \cdot 10^{-13}$

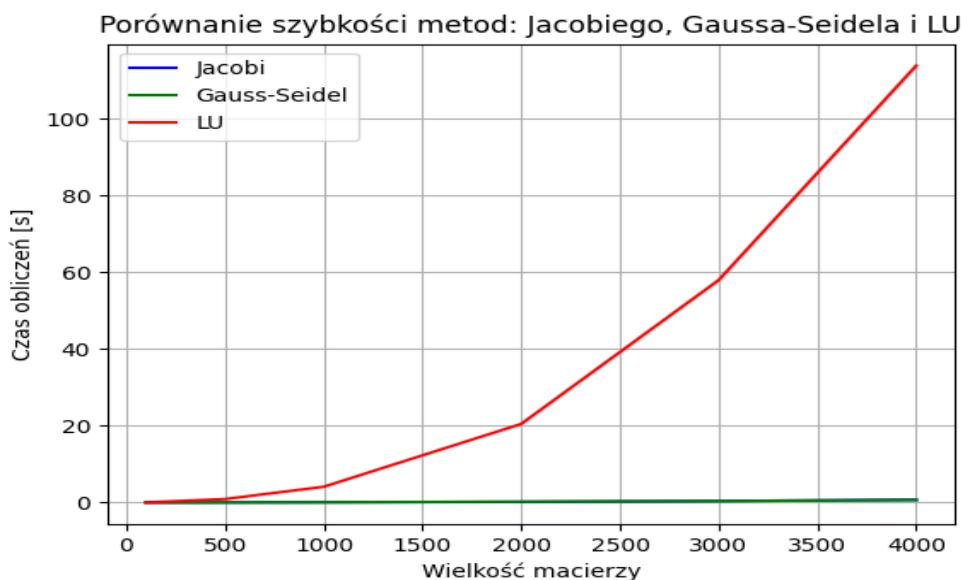
Jak widać, metoda LU poradziła sobie bez problemu z rozwiązyaniem tego układu i osiągnęła bardzo wysoką dokładność. Jednak jej wadą jest czas wykonania – dla rozmiaru macierzy zaledwie $N = 1297$, łączny czas wykonania wyniósł około 8 sekund, co jest znacznie dłużej niż w przypadku metod iteracyjnych.

Analizując szczegółowo czas działania, warto zauważyc, że algorytm LU można podzielić na dwa etapy: faktoryzację oraz substytucję. W tym przypadku większość czasu (około 99,8%) zajęła faktoryzacja, która trwała 7.685 s, natomiast etap rozwiązywania układu (substytucja w przód i w tył) zajął jedynie 0.014 s. Wynika to ze złożoności obliczeniowej obu etapów: faktoryzacja ma złożoność $O(n^3)$, natomiast substytucja $O(n^2)$.

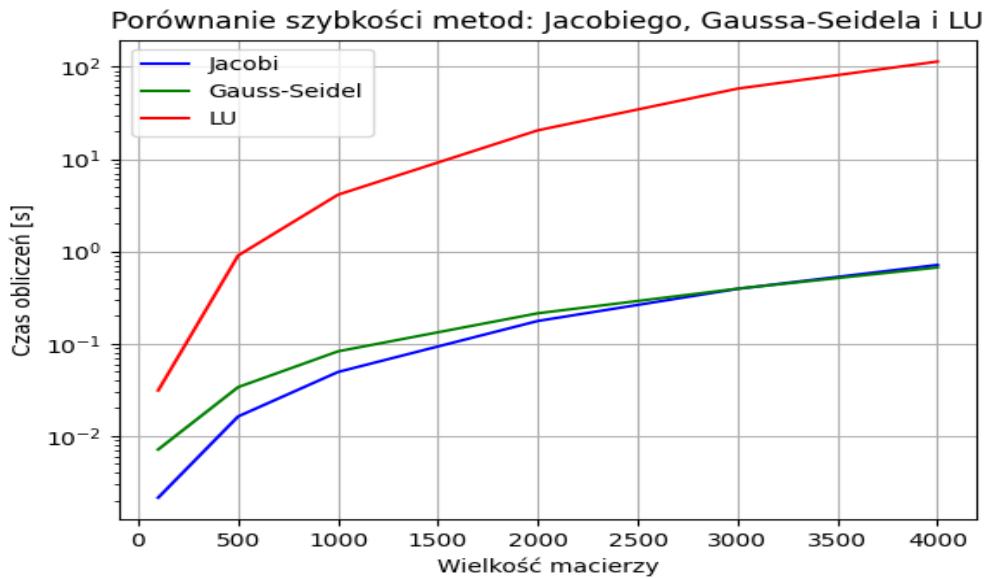
Warto podkreślić, że skoro faktoryzacja jest niezależna od wektora prawej strony b , to przy wielokrotnym rozwiązywaniu układów z tą samą macierzą A , ale różnymi wektorami b , etap faktoryzacji można wykonać tylko raz. Dzięki temu metoda LU staje się bardzo efektywna w przypadku konieczności rozwiązywania wielu układów z tą samą macierzą współczynników.

4. Czas obliczeń w zależności od rozmiaru macierzy:

W tym rozdziale przeanalizujemy, jak zmienia się czas obliczeń dla wszystkich wcześniej omówionych metod w zależności od rozmiaru macierzy A . Struktura macierzy pozostaje taka sama jak w pierwszym porównaniu metod Jacobiego i Gaussa-Seidela – na głównej przekątnej znajdują się elementy o wartości 13, a na przekątnych sąsiednich wartości -1. Dzięki temu macierz zachowuje właściwości symetrii i dominacji diagonalnej.



Z pierwszego wykresu (z liniową skalą osi Y) można zauważyć, że czas obliczeń w przypadku faktoryzacji LU rośnie bardzo gwałtownie wraz z rozmiarem macierzy, a dla $N = 4000$, czas wykonania przekracza już 2 minuty. W porównaniu do tego, czasy metod iteracyjnych pozostają na tyle niskie, że w tej skali trudno dostrzec różnice między nimi – obie utrzymują się bardzo blisko zera.



Na drugim wykresie, tym razem w skali logarytmicznej, wyraźnie widać subtelne różnice w efektywności dwóch metod iteracyjnych. Czas działania metody Jacobiego rośnie szybciej niż w przypadku metody Gaussa-Seidela, co sugeruje, że w ujęciu ogólnym Gauss-Seidel jest nieco bardziej efektywny obliczeniowo – zwłaszcza dla większych macierzy. Różnice te nie są jednak znaczące przy mniejszych rozmiarach układów.

Podsumowując, dla dużych układów równań metoda LU, mimo swojej dokładności, staje się kosztowna czasowo. Metody iteracyjne, choć mniej precyzyjne, oferują znacznie lepszą skalowalność i są bardziej praktyczne w przypadku bardzo dużych macierzy, szczególnie gdy zależy nam na czasie obliczeń.

5. Podsumowanie:

Przeprowadzone testy wykazały, że metody iteracyjne mogą być znacznie szybsze od metod bezpośrednich, pod warunkiem że macierz spełnia odpowiednie warunki zbieżności. W przeciwnym razie metody te mogą nie zbiegać się do rozwiązania lub dostarczać przybliżeń o dużym błędzie.

Z kolei metody bezpośrednie, takie jak faktoryzacja LU, charakteryzują się złożonością obliczeniową wynoszącą $O(n^3)$ przez co ich czas wykonania może być dłuższy, zwłaszcza dla dużych układów równań. Jednak ich istotną zaletą jest większa uniwersalność i dokładność – są w stanie rozwiązywać szeroką klasę układów, niezależnie od ich własności numerycznych.

W praktyce wybór metody zależy od charakterystyki macierzy, wymaganej dokładności oraz dostępnych zasobów obliczeniowych. Metody iteracyjne są preferowane w przypadku dużych, rzadkich macierzy, pod warunkiem spełnienia kryteriów zbieżności, natomiast metody bezpośrednie pozostają niezastąpione tam, gdzie wymagana jest stabilność i precyzja niezależna od warunków macierzy.