Grafika Komputerowa. Rzutowanie

Aleksander Denisiuk
Polsko-Japońska Akademia Technik Komputerowych
Wydział Informatyki w Gdańsku
ul. Brzegi 55
80-045 Gdańsk

denisjuk@pja.edu.pl

Najnowsza wersja tego dokumentu dostępna jest pod adresem

http://users.pja.edu.pl/~denisjuk

Rzutowanie

- Równoległe
- Perspektywiczne

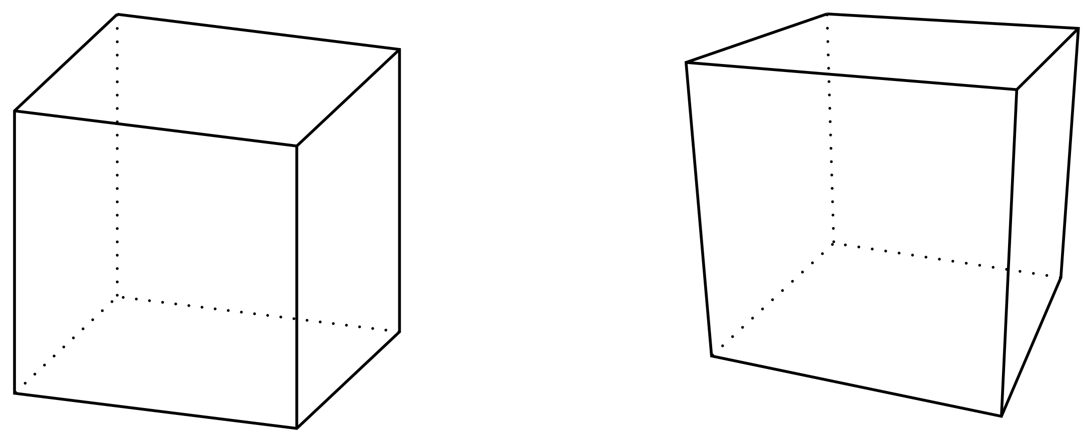


Figure II.18: The cube on the left is rendered with an orthographic projection. The one on the right with a perspective transformation. With the orthographic projection, the rendered size of a face of the cube is independent of its distance from the viewer; compare, for example, the front and back faces. Under a perspective transformation, the closer a face is, the larger it is rendered.

- Algorytm malarza
- Algorytm buforu głębokości

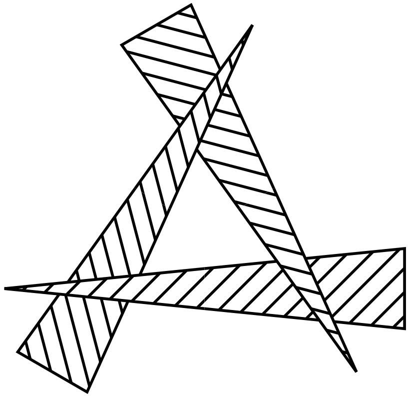
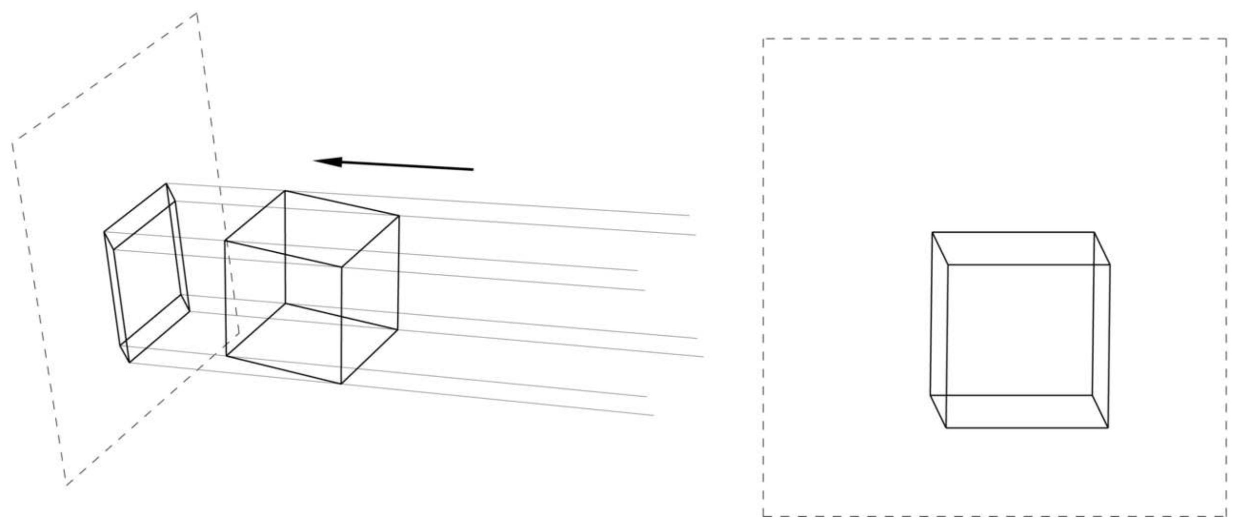


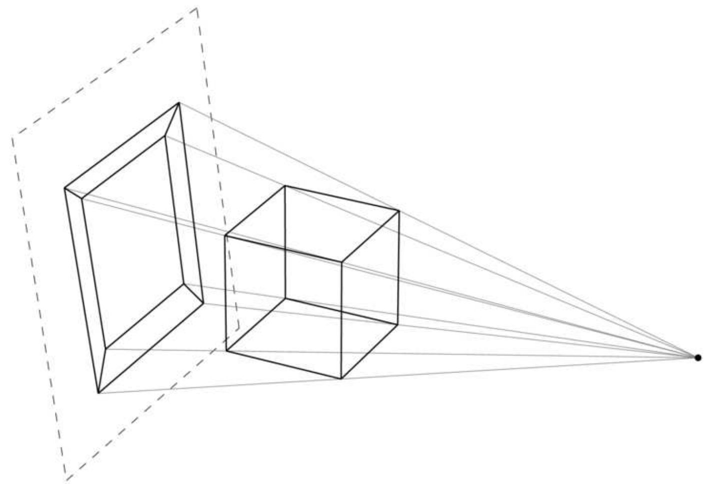
Figure I.12: Three triangles. The triangles are turned obliquely to the viewer so that the top portions of each triangle is in front of the base portion of another.

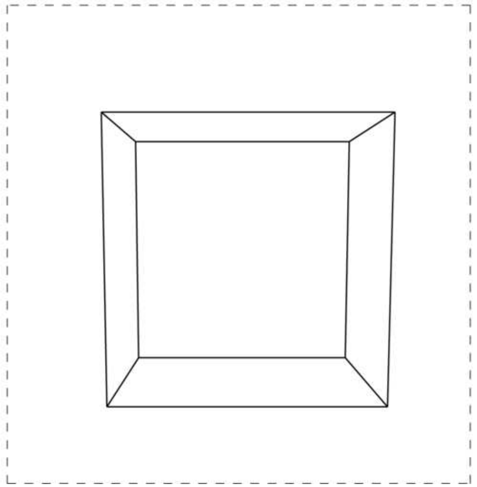
Rzutowanie równoległe



$$
\begin{aligned}
l \leqslant x \leqslant r, &\quad \textit{left, right}\\
b \leqslant y \leqslant t, &\quad \textit{bottom, top}\\
n \leqslant -z \leqslant f, &\quad \textit{near, far}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{pmatrix}
\frac{2}{r-l} & 0 & 0 & -\frac{r+l}{r-l}\\
0 & \frac{2}{t-b} & 0 & -\frac{t+b}{t-b}\\
0 & 0 & -\frac{2}{f-n} & -\frac{f+n}{f-n}\\
0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}
$$





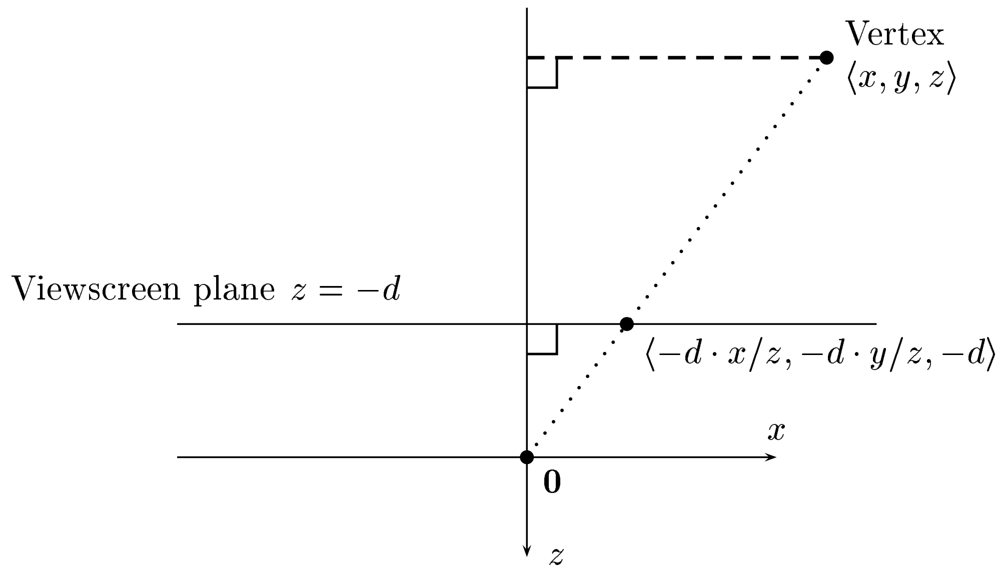


Figure II.19: Perspective projection onto a viewscreen at distance d. The viewer is at the origin, looking in the direction of the negative z axis. The point $\langle x, y, z\rangle$ is perspectively projected onto the plane $z = -d$, which is at distance d in front of the viewer at the origin.

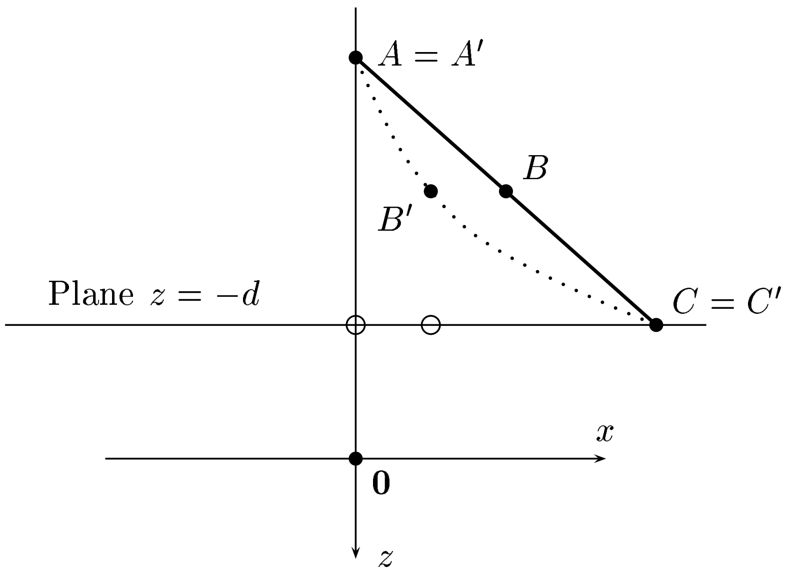


Figure II.20: The undesirable transformation of a line to a curve. The mapping used is $\langle x, y, z\rangle \mapsto \langle -d\cdot x/z, -d\cdot y/z, z\rangle$. The points A and C are fixed by the transformation and B is mapped to B'. The dotted curve is the image of the line segment AC. (The small unlabeled circles show the images of A and B under the mapping of figure II.19.)

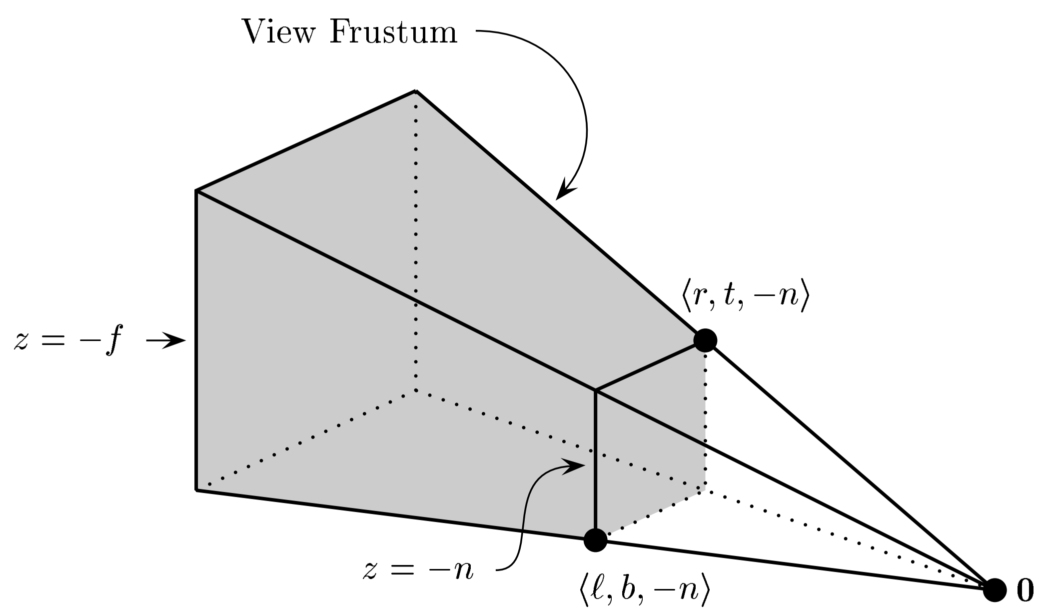
- głębokość$(z) = A + \frac{B}{z}$

Macierz rzutowania

- $(x, y, z) \mapsto (-\frac{dx}{z}, -\frac{dy}{z}, A + \frac{B}{z})$
- we współrzędnych jednorodnych
  $(x : y : z : 1) \mapsto (dx : dy : -Az - B : -z)$
- macierz:

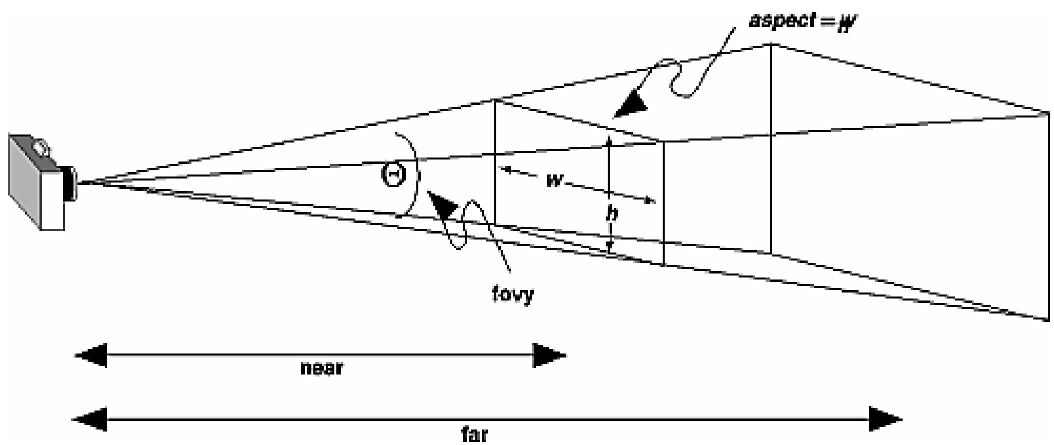
$$\begin{pmatrix} d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -A & -B \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Bryła widzenia



- głębokość$(z) = A + \frac{B}{z}$, gdzie $A = \frac{f+n}{f-n}, \quad B = \frac{2fn}{f-n}$.
- macierz: $\begin{pmatrix} \frac{2n}{r-l} & 0 & \frac{r+l}{r-l} & 0 \\ 0 & \frac{2n}{t-b} & \frac{t+b}{t-b} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{f+n}{f-n} & -\frac{2fn}{f-n} \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

Macierz rzutowania



- θ — kąt widzenia
- $a = \frac{w}{h}$ — *aspect ratio,* format obrazu
- macierz:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{a}\operatorname{ctg}(\theta/2) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \operatorname{ctg}(\theta/2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{f+n}{f-n} & -\frac{2fn}{f-n} \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Macierze w modelowaniu

- Macierz `ModelMatrix`
- Macierz `ViewMatrix`
- Macierz `ProjectionMatrix`

Case study: modelowanie cienia

$$(x, y, z) \mapsto \left(\frac{x}{1 - y/y_0}, 0, \frac{z}{1 - y/y_0}\right)$$

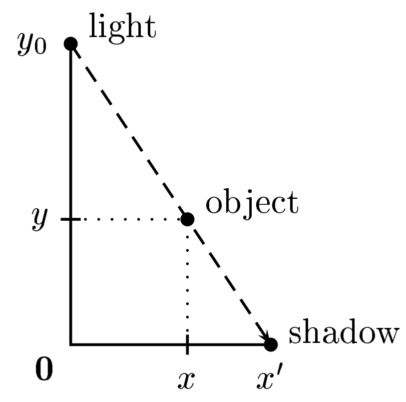
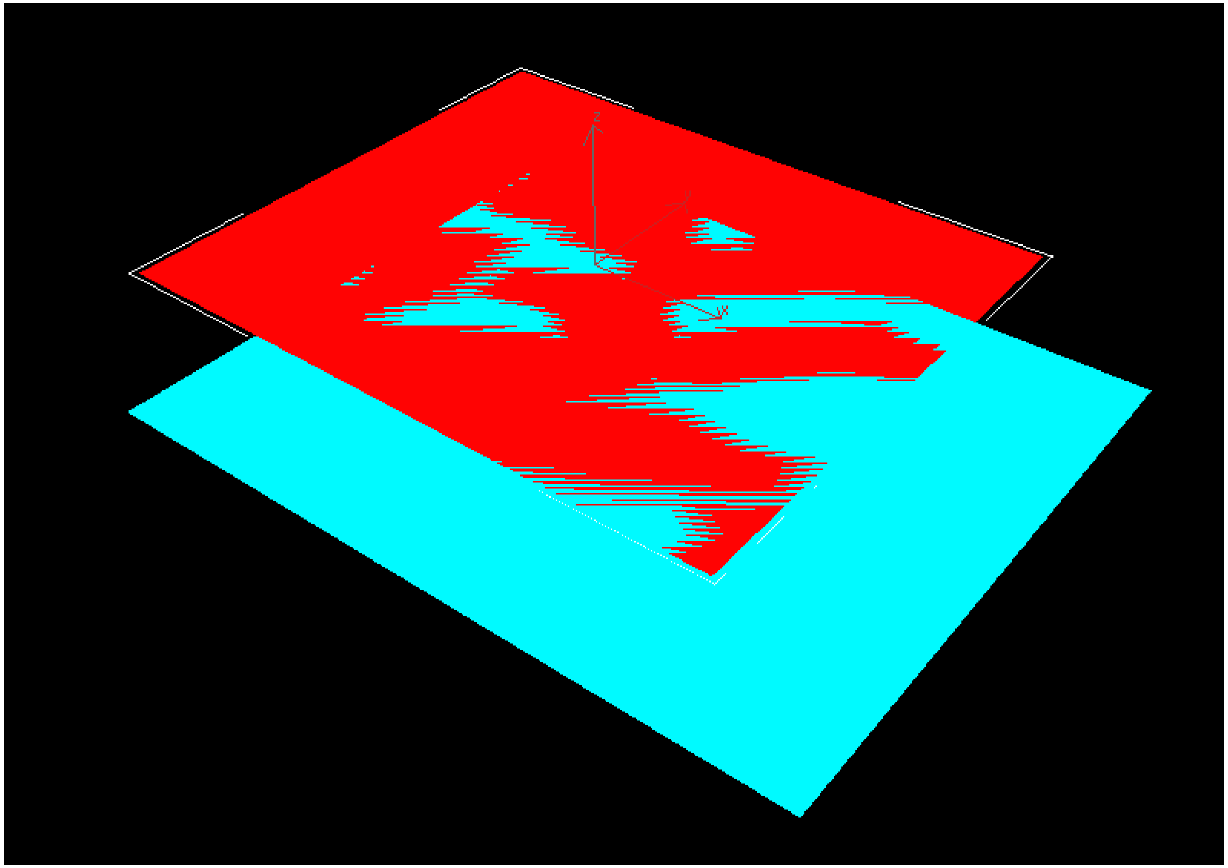


Figure II.22: A light is positioned at $\langle 0, y_0, 0\rangle$. An object is positioned at $\langle x, y, z\rangle$. The shadow of the point is projected to the point $\langle x', 0, z'\rangle$, where $x' = x/(1 - y/y_0)$ and $z' = z/(1 - y/y_0)$.

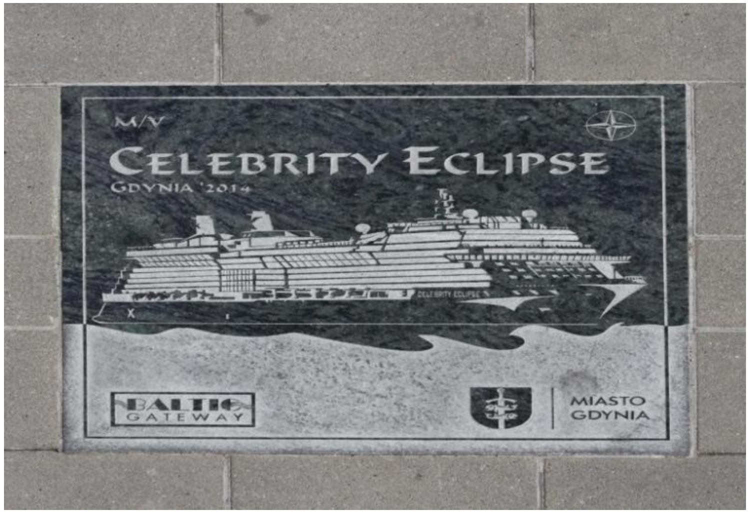
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{y_0} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Z-fighting



Przykład w blenderze

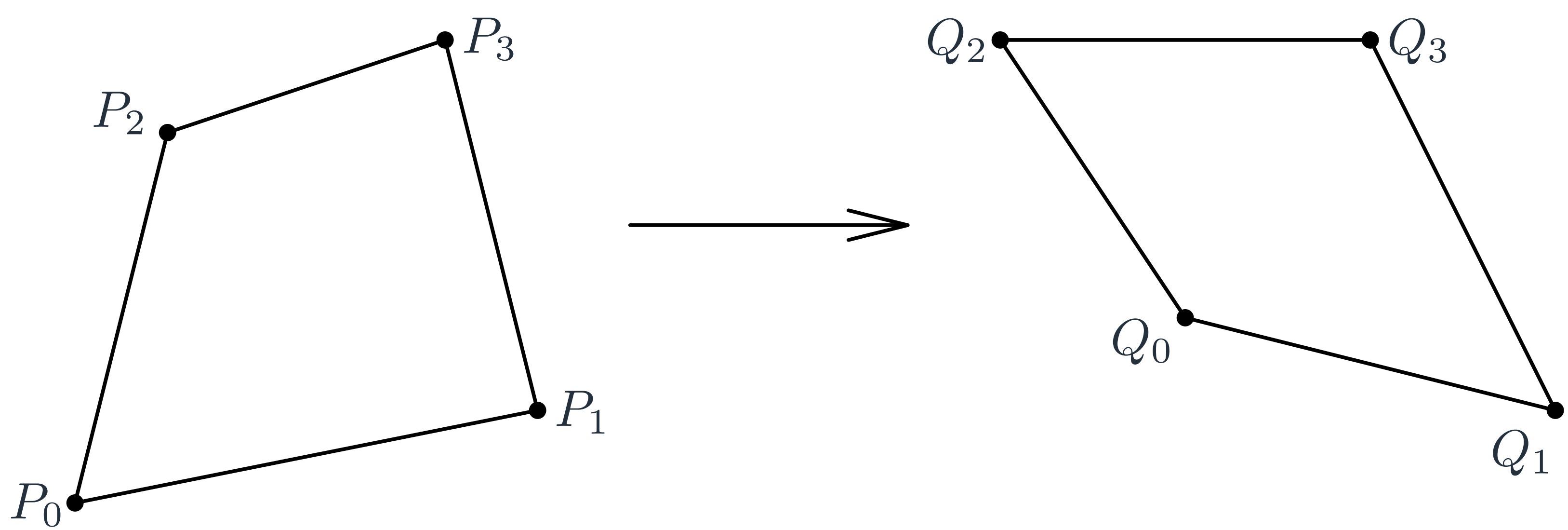
Case study: przekształcenie rzutowe obrazów



- $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$
  - zazwyczaj wymaga się $\det A \neq 0$.
    - czemu?

Transformacja po czterech punktach

- Dane są dwie czwórki punktów na płaszczyźnie: $P = (P_0, P_1, P_2, P_3)$ oraz $Q = (Q_0, Q_1, Q_2, Q_3)$.
  - $P_j = (x_j, y_j), Q_j = (s_j, t_j), j = 0, \ldots, 3$.
- Znaleźć taką transformację perspektywiczną $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, że $A(P_j) = Q_j, j = 0, \ldots, 3$.

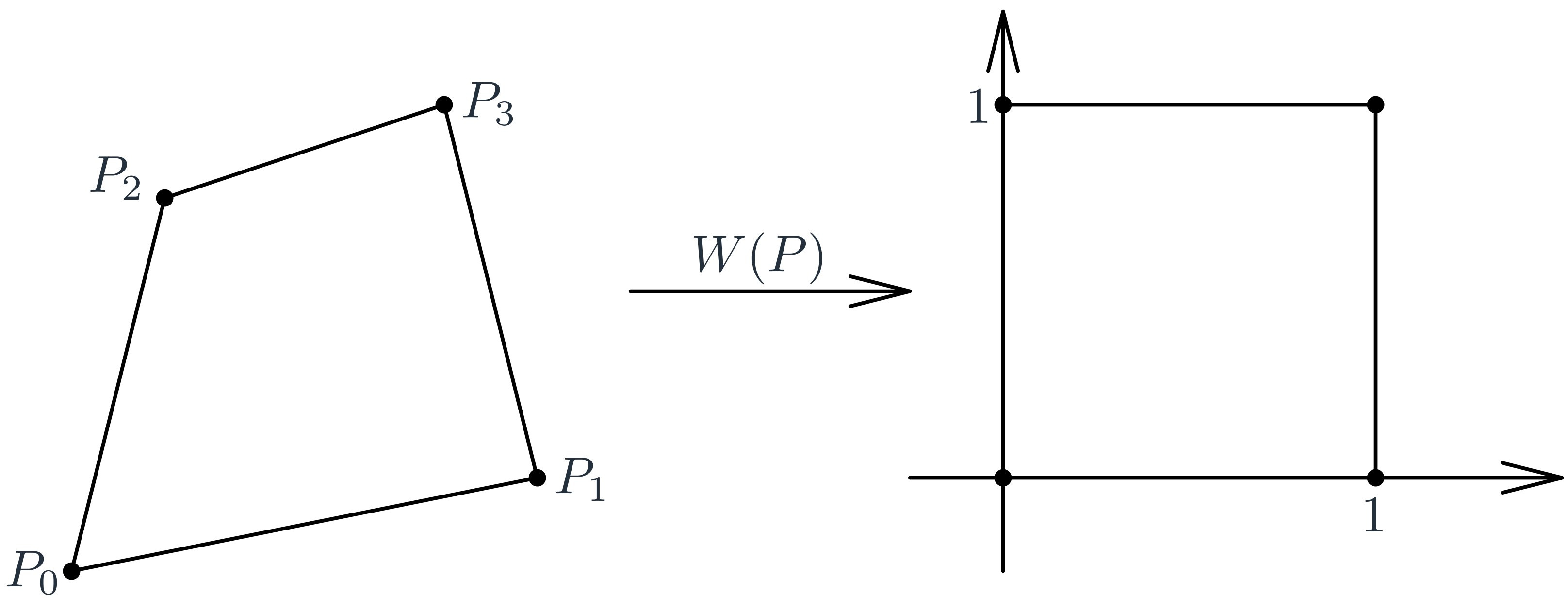


Metoda algebraiczna

- Rozwiązywanie jednorodnego układu równań liniowych
  - 8 równań
  - 9 zmiennych

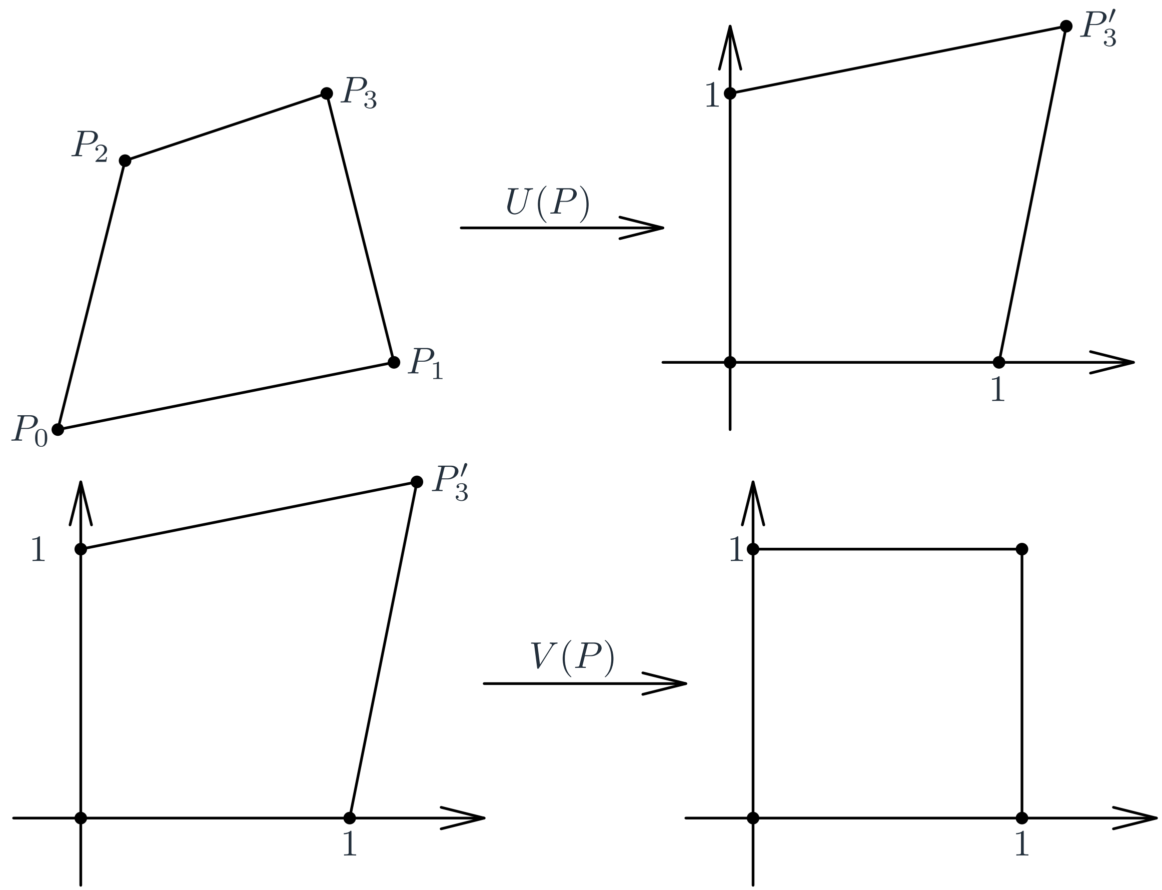
Metoda geometryczna

- Przekształcenie pomocnicze $W(P) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$
  - $A = \left(W(Q)\right)^{-1} W(P)$

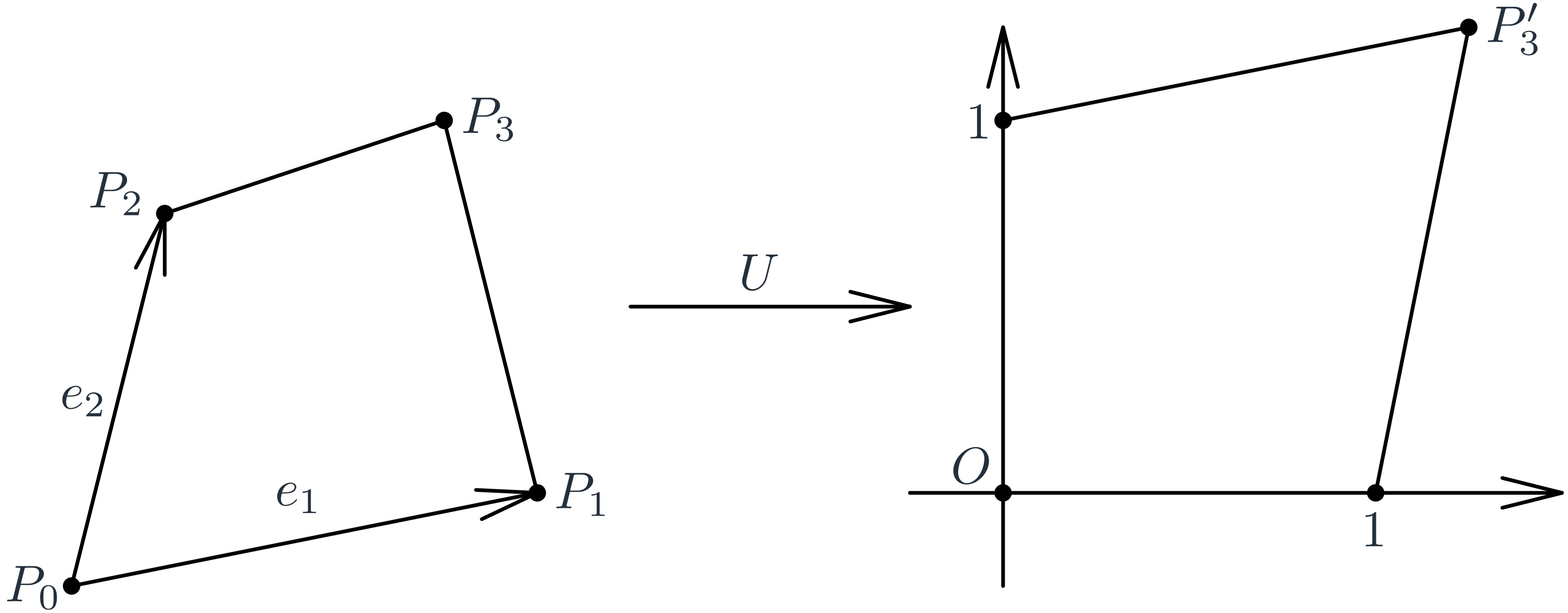


Przekształacenie W

- Rozkładamy W w iloczyn $W(P) = V(P)U(P)$, gdzie
  - $U(P)$ będzie przekształceniem afinicznym,
  - $V(P)$ — rzutowym.



- Przekształcenie U to zamiana standardowego układu współrzędnych (O, i, j) na (P_0, e_1, e_2).



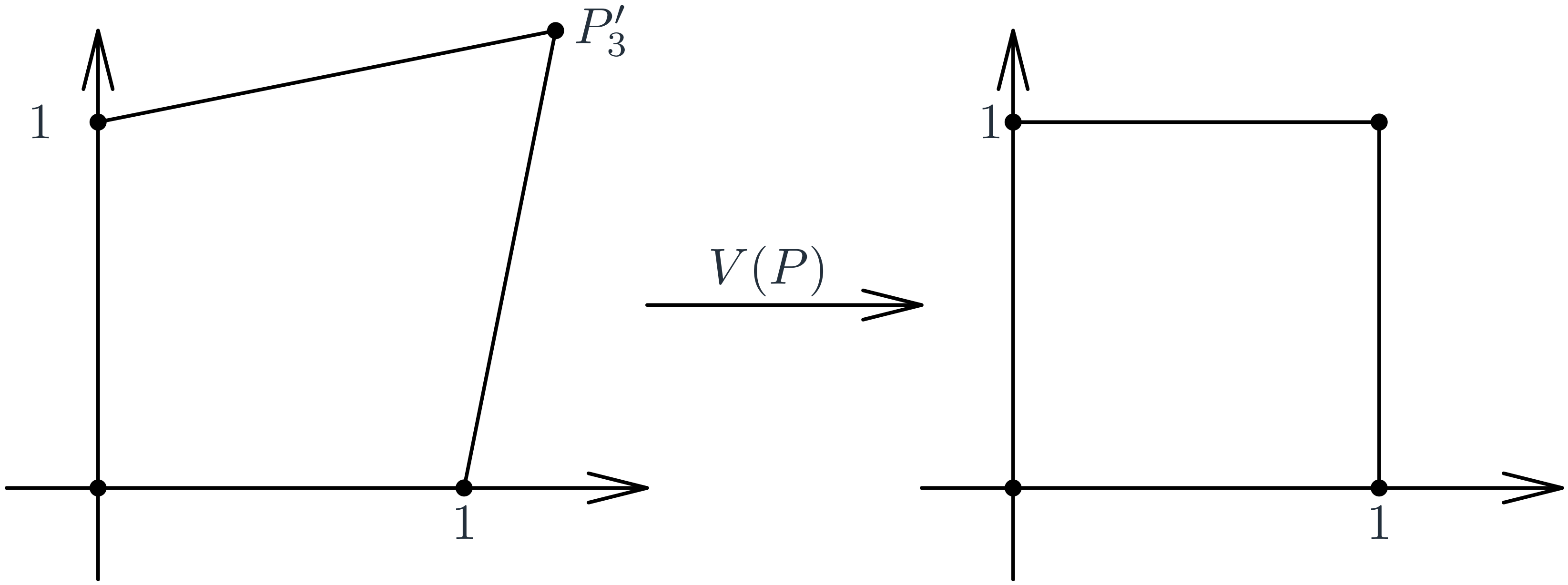
- $(e_1 \quad e_2) = (i \quad j)\, M = (i \quad j) \begin{pmatrix} dx_1 & dx_2 \\ dy_1 & dy_2 \end{pmatrix}$, gdzie
  - $dx_k = x_k - x_0,\ dy_k = y_k - y_0,\ k = 1, 2, 3.$
- $(i \quad j) = (e_1 \quad e_2)\, M^{-1} = (e_1 \quad e_2) \cdot \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} dy_2 & -dx_2 \\ -dy_1 & dx_1 \end{pmatrix}$, gdzie
  - $\Delta = \det M = dx_1 dy_2 - dy_1 dx_2.$
- W szczególności,

  $\mathbf{OP_0} = (e_1 \quad e_2)\, M^{-1} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = (e_1 \quad e_2) \begin{pmatrix} x'_0 \\ y'_0 \end{pmatrix}$, gdzie
  - $x'_0 = (x_0 dy_2 - y_0 dx_2)/\Delta,$
  - $y'_0 = (-x_0 dy_1 + y_0 dx_1)/\Delta.$
- Więc $U : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto M^{-1} \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} = M^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x'_0 \\ y'_0 \end{pmatrix}$

Macierz przekształcenia U

- $U = \begin{pmatrix} \frac{dy_2}{\Delta} & -\frac{dx_2}{\Delta} & \frac{-x_0 dy_2 + y_0 dx_2}{\Delta} \\ -\frac{dy_1}{\Delta} & \frac{dx_1}{\Delta} & \frac{x_0 dy_1 - y_0 dx_1}{\Delta} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
  - W szczególności, $P_3 \mapsto \begin{pmatrix} x_3' \\ y_3' \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} dx_3 dy_2 - dy_3 dx_2 \\ -dx_3 dy_1 + dy_3 dx_1 \end{pmatrix}$
- Przekształcenie odwrotne $U^{-1} = \begin{pmatrix} dx_1 & dx_2 & +x_0 \\ dy_1 & dy_2 & +y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
- Stosowanie współrzędnych jednorodnych pozwala zamienić U na prostszą macierz: $\begin{pmatrix} dy_2 & -dx_2 & -x_0 dy_2 + y_0 dx_2 \\ -dy_1 & dx_1 & x_0 dy_1 - y_0 dx_1 \\ 0 & 0 & \Delta \end{pmatrix}$.

- $P'_3 = (x'_3, y'_3)$, określone na slajdzie 28



Równania na macierz V

- $(0,0) \mapsto (0,0)$:
  - $a_{13} = a_{23} = 0$, $a_{33} = 1$.
- $(1,0) \mapsto (1,0)$:
  - $a_{11} = \lambda_1$, $a_{21} = 0$, $a_{31} + 1 = \lambda_1$.
    - $a_{31} = a_{11} - 1$.
- $(1,0) \mapsto (1,0)$:
  - $a_{12} = 0$, $a_{22} = \lambda_2$, $a_{32} + 1 = \lambda_2$.
    - $a_{32} = a_{22} - 1$.
- $P_3' \mapsto (1,1)$
  - $a_{11}x_3' = \lambda, \quad a_{22}y_3' = \lambda, \quad -x_3' - y_3' + 1 = -\lambda.$

- Rozwiązanie równań: $\begin{pmatrix} \frac{x'_3+y'_3-1}{x'_3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{x'_3+y'_3-1}{y'_3} & 0 \\ \frac{y'_3-1}{x'_3} & \frac{x'_3-1}{y'_3} & 1 \end{pmatrix}$
- Inna postać macierzy V:

$$\begin{pmatrix} \frac{\begin{vmatrix} x_2-x_3 & y_2-y_3 \\ x_1-x_3 & y_1-y_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_3-x_0 & y_3-y_0 \\ x_2-x_0 & y_2-y_0 \end{vmatrix}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\begin{vmatrix} x_2-x_3 & y_2-y_3 \\ x_1-x_3 & y_1-y_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1-x_0 & y_1-y_0 \\ x_3-x_0 & y_3-y_0 \end{vmatrix}} & 0 \\ \frac{\begin{vmatrix} x_2-x_3 & y_2-y_3 \\ x_1-x_0 & y_1-y_0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_3-x_0 & y_3-y_0 \\ x_2-x_0 & y_2-y_0 \end{vmatrix}} & \frac{\begin{vmatrix} x_2-x_0 & y_2-y_0 \\ x_1-x_3 & y_1-y_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1-x_0 & y_1-y_0 \\ x_3-x_0 & y_3-y_0 \end{vmatrix}} & 1 \end{pmatrix}$$

Macierz V^{-1}

- $V^t = TS$, gdzie S jest skalowaniem, a T — przesunięciem równoległym
- $(V^t)^{-1} = S^{-1}T^{-1}$
- $V^{-1} = \left((V^t)^{-1}\right)^t = (S^{-1}T^{-1})^t$
- $V^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{x'_3}{x'_3+y'_3-1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{y'_3}{x'_3+y'_3-1} & 0 \\ \frac{1-y'_3}{x'_3+y'_3-1} & \frac{1-x'_3}{x'_3+y'_3-1} & 1 \end{pmatrix} \sim$
  $\begin{pmatrix} x'_3 & 0 & 0 \\ 0 & y'_3 & 0 \\ 1-y'_3 & 1-x'_3 & x'_3+y'_3-1 \end{pmatrix}$

- $P_j = (x_j, y_j), Q_j = (s_j, t_j), j = 0, \ldots, 3$

1. $dx_j = x_j - x_0, dy_j = y_j - y_0, j = 1, 2, 3$
2. $\Delta_p = dx_1 dy_2 - dy_1 dx_2$
3. $x_3' = \frac{dx_3 dy_2 - dy_3 dx_2}{\Delta_p}, y_3' = \frac{-dx_3 dy_1 + dy_3 dx_1}{\Delta_p}$
4. $U(P) = \begin{pmatrix} dy_2 & -dx_2 & -x_0 dy_2 + y_0 dx_2 \\ -dy_1 & dx_1 & x_0 dy_1 - y_0 dx_1 \\ 0 & 0 & \Delta_p \end{pmatrix}$
5. $V(P) = \begin{pmatrix} \frac{x_3' + y_3' - 1}{x_3'} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{x_3' + y_3' - 1}{y_3'} & 0 \\ \frac{y_3' - 1}{x_3'} & \frac{x_3' - 1}{y_3'} & 1 \end{pmatrix}$

Algorytm obliczenia przekształcenia, cd

6. $ds_j = s_j - s_0, dt_j = t_j - t_0, j = 1, 2, 3$
7. $\Delta_q = ds_1 dt_2 - dt_1 ds_2$
8. $s_3' = \frac{ds_3 dt_2 - dt_3 ds_2}{\Delta_q}, t_3' = \frac{-ds_3 dt_1 + dt_3 ds_1}{\Delta_q}$
9. $V^{-1}(Q) = \begin{pmatrix} s_3' & 0 & 0 \\ 0 & t_3' & 0 \\ 1 - t_3' & 1 - s_3' & t_3' + s_3' - 1 \end{pmatrix}$
10. $U^{-1}(Q) = \begin{pmatrix} ds_1 & ds_2 & +s_0 \\ dt_1 & dt_2 & +t_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
11. $A = U^{-1}(Q) V^{-1}(Q) V(P) U(P)$
12. $\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \lambda s \\ \lambda t \\ \lambda \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}$

- Jeżeli punkty P tworzą kwadrat $[0, 1] \times [0, 1]$, to
  - $U(P) = V(P) = I$
  - $A = U^{-1}(Q)V^{-1}(Q)$
- Jeżeli punkty Q tworzą kwadrat $[0, 1] \times [0, 1]$, to
  - $U^{-1}(Q) = V^{-1}(Q) = I$
  - $A = V(P)U(P)$