

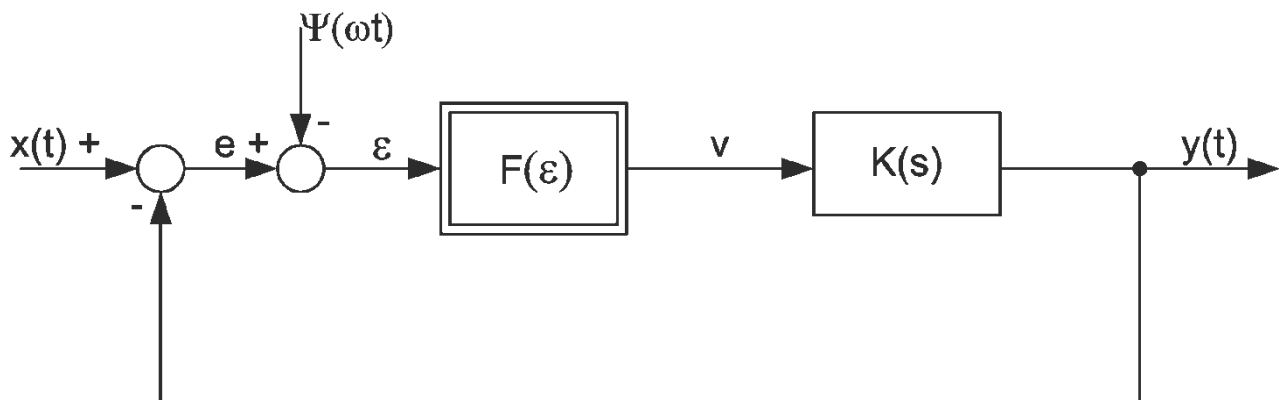
## Ćwiczenie 6: LINEARYZACJA WIBRACYJNA

Linearyzacja wibracyjna jest głównie wykorzystywana w regulacji przekąźnikowej. Rozróżnia się dwa rodzaje linearyzacji wibracyjnej:

1. Linearyzacja za pomocą oscylacji wymuszonych z zewnątrz.
2. Linearyzacja z wykorzystaniem oscylacji samowzbudnych, po objęciu elementu przekąźnikowego sprzężeniem zwrotnym, zwykle za pomocą członów inercyjnych.

### 1. Linearyzacja wibracyjna za pomocą drgań wymuszonych

Linearyzacja taka może mieć miejsce w układzie przekąźnikowym z częścią dynamiczną o charakterze filtra dolnoprzepustowego. Schemat układu przedstawiono na Rys. 1.



Rys. 1. Schemat układu zlinearyzowanego za pomocą drgań zewnętrznych.

Na wejście elementu przekąźnikowego  $F(\varepsilon)$  jest podawany wolnozmienny sygnał  $x(t)$ , sygnał sprzężenia zwrotnego  $-y(t)$  i sygnał  $\Psi(\omega t)$  o wysokiej częstotliwości. Jeśli transmitancję części liniowej  $K(s)$  da się przedstawić w postaci sumy elementarnych transmitancji pierwszego rzędu

$$K(s) = \sum_{i=1}^n \frac{k_i}{s + c_i}$$

to równanie układu z Rys. 1 można zapisać następująco

$$\frac{dy_i}{dt} + c_i y_i = k_i F(\varepsilon) \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (1)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} \varepsilon &= x(t) + \Psi(\omega t) - \sum_{i=1}^n y_i(t) && \text{- sygnał wejściowy na element przekąźnikowy,} \\ F(\varepsilon) &&& \text{- charakterystyka statyczna przekąźnika,} \\ y(t) &= \sum_{i=1}^n y_i(t) && \text{- wielkość regulowana.} \end{aligned}$$

Przyjmijmy, że przy  $x(t)=0$  układ równań (1) ma rozwiązanie okresowe:

$$y_i(t) = \varphi_i(\omega t) \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Jeśli  $x(t)$  jest wolnozmiennym się przebiegiem w porównaniu z  $\Psi(\omega t)$ , można rozwiązanie układu (1) przedstawić w formie

$$y_i(t) = \bar{y}_i^*(t) + \varphi_i^*(\omega t) \quad (2)$$

gdzie:

$$\bar{y}_i^*(t) = \frac{1}{T^*} \int_t^{t+T^*} y_i(t) dt \quad - \text{uśredniona wartość } y_i(t) \text{ za okres } T^*$$

$$T^* = \frac{2\pi}{\omega^*}$$

$$\omega^* \quad - \text{częstotliwość bliska } \omega,$$

$$\varphi_i^*(\omega t) \quad - \text{przebieg bliski okresowemu } \varphi_i(\omega t).$$

Sens fizyczny wyrażenia (2) zawiera się w tym, że w układzie z działającym sprzężeniem zwrotnym sygnał  $x(t)$  deformuje kształt i zmienia częstotliwość drgań przebiegu wyjściowego  $y(t)$ , w wyniku czego pojawia się składowa wolnozmienna

$$\bar{y}_i^*(t) = \sum_{i=1}^n \bar{y}_i^*(t).$$

Przy powyższych założeniach również można określić pochodną  $\bar{y}_i^*(t)$ , korzystając z przybliżenia:

$$\frac{d\bar{y}_i^*}{dt} \approx \frac{1}{T^*} \int_t^{t+T^*} \left( \frac{dy_i}{dt} \right) dt.$$

Wobec tego dla wartości średnich układ równań (1) można zapisać następująco:

$$\frac{d\bar{y}_i^*}{dt} + c_i \bar{y}_i^* = k_i \eta(\bar{\varepsilon}^*),$$

gdzie:

$$\bar{\varepsilon}^* \approx x(t) - y(t) \quad - \text{wolnozmienna składowa } \varepsilon(t).$$

Część liniowa układu ma charakter filtru dolnoprzepustowego i o ile przekładnik jest elementem bezinercyjnym, to częstotliwość  $\omega$  można wybrać dostatecznie wysoką, tak by były spełnione warunki:

$$\sum_{i=1}^n k_i \varphi_i(\omega t) \approx \sum_{i=1}^n k_i \varphi_i^*(\omega^* t) \approx 0.$$

Wówczas zlinearyzowaną vibracyjnie charakterystykę elementu przekładnikowego w układzie regulacji można określić następująco:

$$\eta(\bar{\varepsilon}^*) \approx \frac{1}{T^*} \int_t^{t+T^*} F[\bar{\varepsilon}^* + \Psi(\omega t)] dt.$$

Funkcja  $\eta(\bar{\varepsilon}^*)$  zależy od charakterystyki elementu przekąźnikowego, amplitudy i kształtu drgań  $\Psi(\omega t)$ , a nie zależy od dynamiki liniowego filtra dolnoprzepustowego  $K(s)$ .

Pomijając wpływ sprzężenia zwrotnego  $\bar{\varepsilon}^*$  (idealne uśrednianie) można praktycznie otrzymać zlinearyzowaną wibracyjnie charakterystykę przekąźnika w oparciu o wzory:

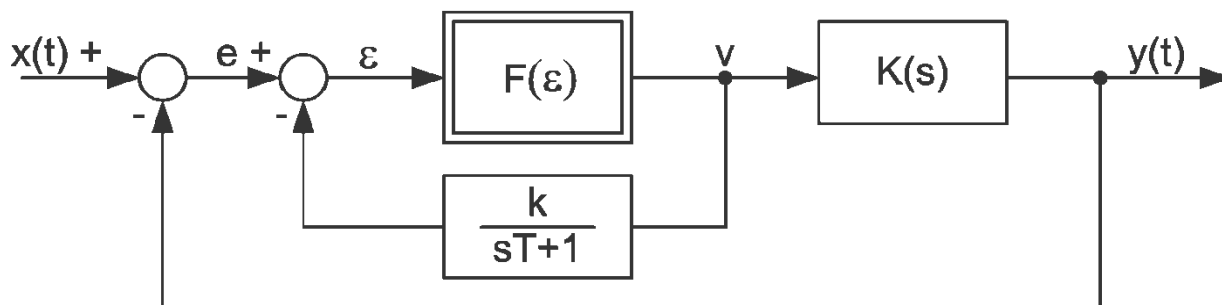
$$\eta(\bar{\varepsilon}^*) \approx \eta(x),$$

$$\eta(x) = \frac{1}{T} \int_0^T F[x + \Psi(\omega t)] dt.$$

Wykresy i równania zlinearyzowanych charakterystyk przekąźników zamieszczono w *Tab. 1*.

## 2. Linearyzacja z wykorzystaniem oscylacji samowzbudnych

W układzie przedstawiony na *Rys. 2* sprzężenie zwrotne obejmujące element przekąźnikowy umożliwia zaobserwowanie linearyzacji wibracyjnej z wykorzystaniem oscylacji samowzbudnych.



*Rys. 2. Schemat układu z linearyzacją wibracyjną realizowaną za pomocą sprzężenia zwrotnego.*

W obwodzie sprzężenia zwrotnego, obejmującego przekąźnik, znajduje się człon inercyjny o stałej czasowej  $T$  i współczynniku wzmocnienia  $k$ . W wewnętrznej pętli układu powstają drgania relaksacyjne, których częstotliwość musi być odpowiednio wysoka, by można było zaniedbać składową drgającą w sygnale wyjściowym  $y(t)$ . Drgania wysokiej częstotliwości w obwodzie relaksacyjnym, przy rozwartym torze głównego sprzężenia zwrotnego dają podstawę do napisania następujących równań dla wartości średnich sygnałów:

$$\bar{v} = \eta(e) = \frac{\omega_e}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega_e}} F[\bar{\varepsilon}] dt \quad - \text{postać zlinearyzowanej wibracyjnie charakterystyki przekąźnika,}$$

$$\bar{\varepsilon} = e - \bar{u} \quad - \text{uśredniony sygnał wejściowy przekąźnika,}$$

$$T \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} = k \bar{v} \quad - \text{równanie sprzężenia zwrotnego dla sygnałów uśrednionych,}$$

$$\omega_e \quad - \text{częstotliwość drgań relaksacyjnych zależna od określonej wartości sygnału e i strefy histerezy przekąźnika.}$$

Zatem widać, że uśrednione sygnały  $\bar{u}$  i  $\bar{v}$  oraz częstotliwość oscylacji  $\omega_e$  zależą od sygnału uchybu regulacji  $e$ .

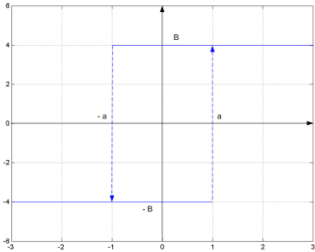
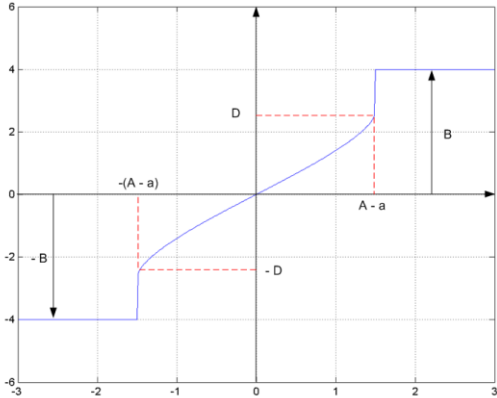
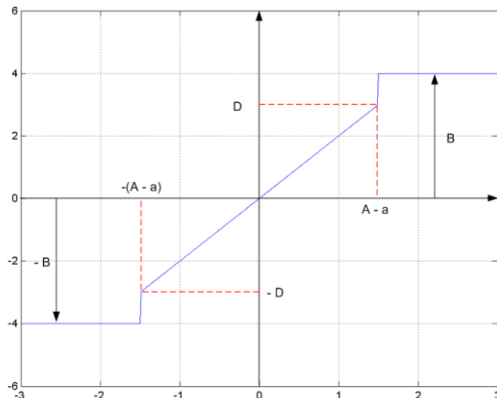
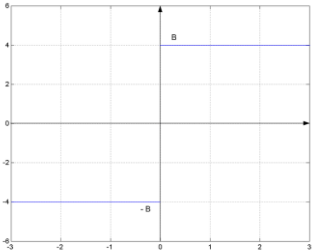
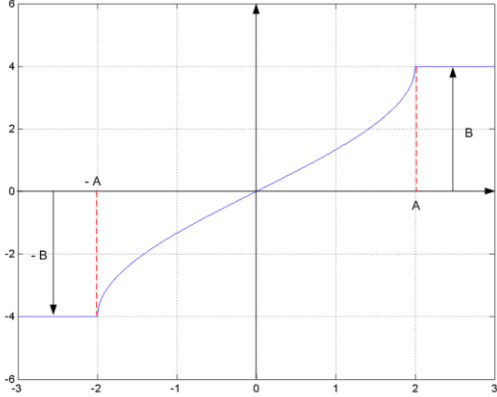
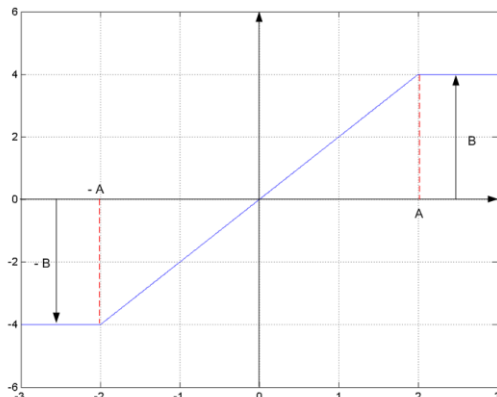
A. Dla przekąźników 1, 2 z *Tab. 1* średnią wartość sygnału wyjściowego obwodu relaksacyjnego można obliczyć ze wzoru:

$$\eta(e) = B \frac{T^+ - T^-}{T^+ + T^-}$$

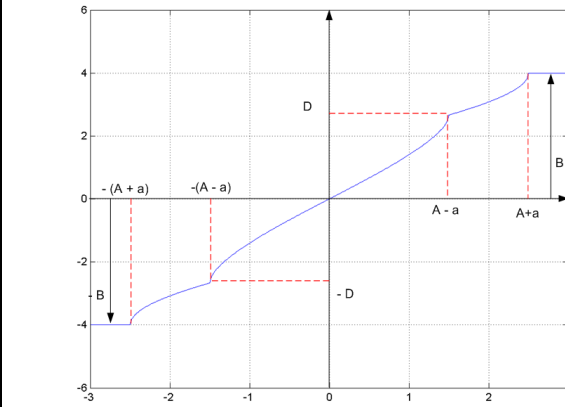
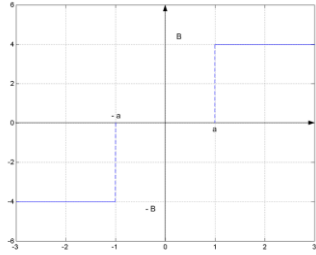
gdzie:

$$T^+ \quad - \text{długość impulsu dodatniego,}$$

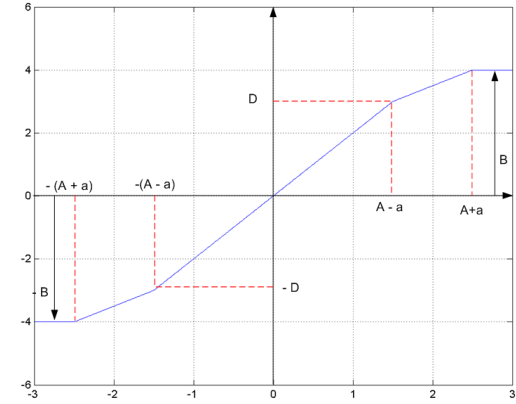
Tab. 1. Charakterystyki przekaźników zlinearyzowanych wibracyjnie sygnałem zewnętrznym.

Lp.	Charakterystyka przekaźnika	Zewnętrzny sygnał sinusoidalny	Zewnętrzny sygnał trójkątny
1		 $\eta(x) = \begin{cases} \frac{B}{\pi} \left[ \arcsin\left(\frac{x+a}{A}\right) + \arcsin\left(\frac{x-a}{A}\right) \right] & ,  x  < A-a \\ B \operatorname{sign}(x) & ,  x  > A-a \end{cases}$	 $\eta(x) = \begin{cases} \frac{B}{A} x & ,  x  < A-a \\ B \operatorname{sign}(x) & ,  x  > A-a \end{cases}$
2		 $\eta(x) = \begin{cases} \frac{2B}{\pi} \left[ \arcsin\left(\frac{x}{A}\right) \right] & ,  x  < A \\ B \operatorname{sign}(x) & ,  x  > A \end{cases}$	 $\eta(x) = \begin{cases} \frac{B}{A} x & ,  x  < A \\ B \operatorname{sign}(x) & ,  x  > A \end{cases}$

3

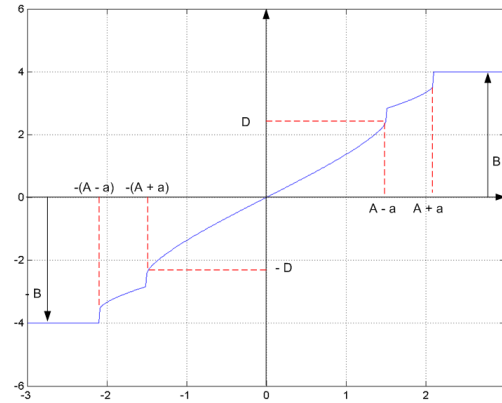
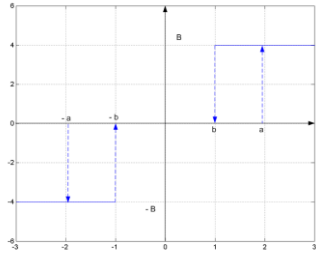


$$\eta(x) = \begin{cases} \frac{B}{\pi} \left[ \arcsin\left(\frac{x+a}{A}\right) + \arcsin\left(\frac{x-a}{A}\right) \right] & , |x| < A-a \\ B \left[ \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arcsin\left(\frac{x-a}{A}\right) \right] & , A-a < |x| < A+a \\ B \operatorname{sign}(x) & , |x| > A+a \end{cases}$$

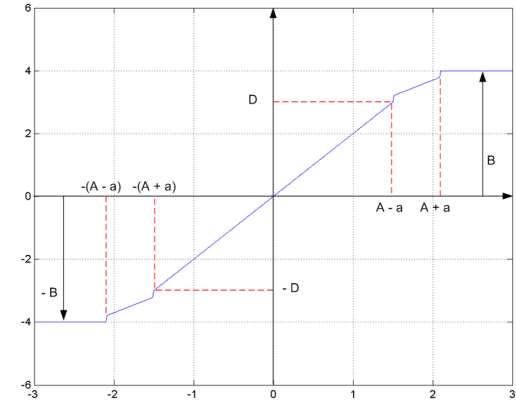


$$\eta(x) = \begin{cases} \frac{B}{A} x & , |x| < A-a \\ B \left[ \frac{1}{2} + \frac{x-a}{2A} \right] & , A-a < |x| < A+a \\ B \operatorname{sign}(x) & , |x| > A+a \end{cases}$$

4



$$\eta(x) = \begin{cases} \frac{B}{\pi} \left[ \arcsin\left(\frac{x+a}{A}\right) + \arcsin\left(\frac{x-a}{A}\right) + \arcsin\left(\frac{x+b}{A}\right) + \arcsin\left(\frac{x-b}{A}\right) \right] & , |x| < A-a \\ B \left[ \frac{1}{2} + \frac{1}{2\pi} \left( \arcsin\left(\frac{x-a}{A}\right) + \arcsin\left(\frac{x-b}{A}\right) \right) \right] & , A-a < |x| < A+b \\ B \operatorname{sign}(x) & , |x| > A+b \end{cases}$$



$$\eta(x) = \begin{cases} \frac{B}{A} x & , |x| < A-a \\ B \left[ \frac{1}{2} + \frac{x-a+b}{2A} \right] & , A-a < |x| < A+b \\ B \operatorname{sign}(x) & , |x| > A+b \end{cases}$$

$T^-$  - długość impulsu ujemnego.

Dla  $e = 0$  drgania są symetryczne względem osi poziomej  $T^+ = T^-$ , wobec czego  $\eta(e) = 0$ , wówczas można obliczyć okres oscylacji z zależności:

$$T^e = T^+ + T^- = 2T^+ = 2T \ln \frac{kB + a}{kB - a}.$$

Dla  $e \neq 0$  symetria drgań zanika, stosunek  $T^+$  do  $T^-$  wynika ze znaku  $e$ . Przy wyznaczaniu  $\bar{v} = \eta(e)$  można skorzystać z funkcji  $u_-(\tau)$  i  $u_+(\tau)$  odpowiadających impulsom z czasem trwania  $T^+$  i  $T^-$ .

Zatem:

$$u_-(\tau) = (e + a)e^{-\frac{\tau}{T^-}} - kB \left(1 - e^{-\frac{\tau}{T^-}}\right) \quad \text{dla przedziału czasu } 0 \leq \tau \leq T^-,$$

$$u_+(\tau) = (e - a)e^{-\frac{\tau}{T^+}} + kB \left(1 - e^{-\frac{\tau}{T^+}}\right) \quad \text{dla przedziału czasu } 0 \leq \tau \leq T^+.$$

Stąd można wyznaczyć  $T^+$  i  $T^-$  oraz określić średnią wartość  $\bar{v}$  dla przekątnika 1 jako funkcję  $e$ :

$$\eta(e) = \begin{cases} B \frac{\ln \frac{kB - e + a}{kB - e - a} - \ln \frac{kB + e + a}{kB + e - a}}{\ln \frac{kB - e + a}{kB - e - a} + \ln \frac{kB + e + a}{kB + e - a}}, & |e| < kB \\ B \operatorname{sign}(e) & |e| > kB \end{cases}$$

W przypadku  $a \rightarrow 0$  otrzymuje się:

$$\eta(e) = \begin{cases} \frac{1}{k} e & |e| < kB \\ B \operatorname{sign}(e) & |e| > kB \end{cases}$$

B. Dla przekątników trójpołożeniowych 3, 4 z *Tab. 1* drgania relaksacyjne będą zachodziły, jeśli  $|e| < a$ .

Impulsy  $v(t)$  będą wówczas miały stałą polaryzację, dodatnią lub ujemną w zależności od znaku  $e$ , o ile wzmocnienie obwodu drgającego będzie spełniało warunek:

$$kB < a - b \quad \text{przy } 0 \leq b \leq a.$$

Średnia wartość sygnału na wyjściu układu drgającego rośnie wraz ze wzrostem  $e$ , czyli

$$\eta(e) = B \frac{T_i}{T_i + T_p},$$

gdzie:

$T_i$  - zależny od  $e$  czas trwania impulsu,

$T_p$  - zależny od  $e$  czas trwania przerwy.

Tak jak poprzednio dla przedziałów czasu  $0 \leq \tau \leq T_i$  oraz  $0 \leq \tau \leq T_p$  można podać funkcje  $u_i(\tau)$  i  $u_p(\tau)$ :

$$u_i(\tau) = kB \left[ 1 - e^{-\frac{\tau}{T}} \frac{1 - e^{-\frac{T_p}{T}}}{1 - e^{-\frac{T_i+T_p}{T}}} \right] \quad \text{dla przedziału czasu } 0 \leq \tau \leq T_i,$$

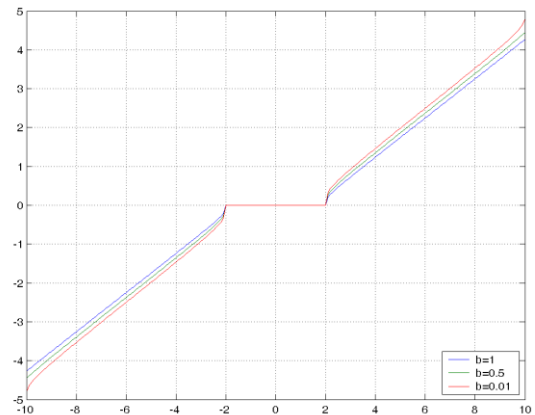
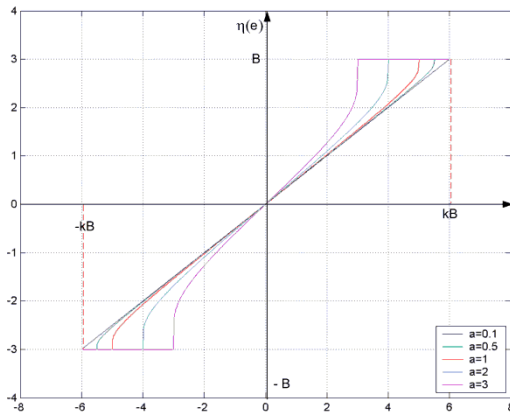
$$u_p(\tau) = kB \frac{1 - e^{-\frac{T_i}{T}}}{1 - e^{-\frac{T_i+T_p}{T}}} e^{-\frac{\tau}{T}} \quad \text{dla przedziału czasu } 0 \leq \tau \leq T_p.$$

Zatem:

$$\eta(e) = \begin{cases} B \frac{\ln \frac{kB - e + a}{kB - e + b}}{\ln \frac{kB - e + a}{kB - e + b} + \ln \frac{e - b}{e - a}} & , a < |e| < a + kB \\ B \operatorname{sign}(e) & , |e| > a + kB \end{cases}$$

W przypadku granicznym  $b \rightarrow a$  zlinearyzowana charakterystyka przekaźnika 3 wyraża się zależnością:

$$\eta(e) = \begin{cases} \frac{1}{k}(e - a) & , a < |e| < a + kB \\ B \operatorname{sign}(e) & , |e| > a + kB \end{cases}$$



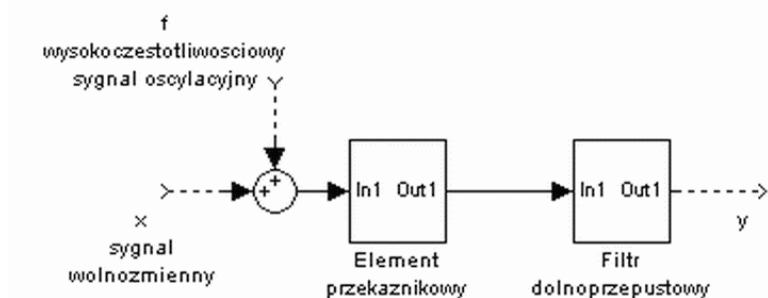
Rys. 3. Zlinearyzowane wibracyjnie za pomocą sprzężenia zwrotnego charakterystyki przekaźnika dwupołożeniowego.

Rys. 3. Zlinearyzowane wibracyjnie za pomocą sprzężenia zwrotnego charakterystyki przekaźnika trójpółożeniowego.

## Laboratorium Teorii Sterowania

### Ćwiczenie 6: LINEARYZACJA WIBRACYJNA

1. Dla schematu podanego na Rys. 1 wykreślić charakterystykę statyczną zlinearyzowanego przekaznika.



Rys. 1. Schemat układu zlinearyzowanego za pomocą drgań zewnętrznych.

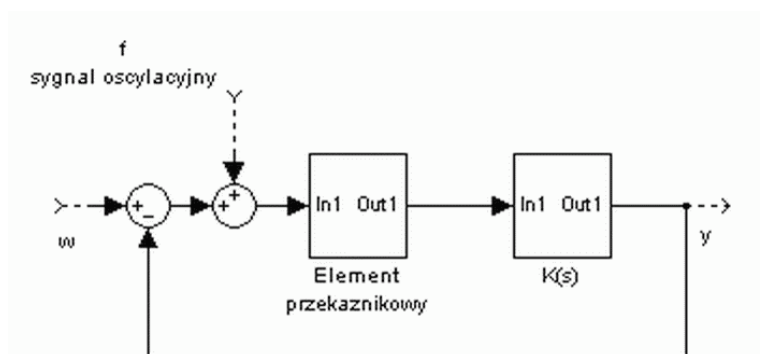
2. Przeanalizować wpływ rzędu filtru n dolnoprzepustowego (wieloinercyjnego) na charakterystykę statyczną zlinearyzowanego przekaznika.
3. Dla schematu podanego na Rys. 1. zbadać wpływ jednego z podanych poniżej parametrów na charakterystykę statyczną odpowiedniego przekaznika:
 

a) <b>B</b> (wzmocnienie przekaznika)	- przekaznik dwupołożeniowy,
b) <b>A</b> (amplituda sygnału oscylacyjnego)	- przekaznik dwupołożeniowy,
c) <b>a1</b> (szerokość strefy histerezy)	- przekaznik dwupołożeniowy z histerezą,
d) <b>a2</b> (szerokość strefy nieczułości)	- przekaznik trójpokożeniowy,
e) <b>b</b> (szerokość strefy histerezy)	- przekaznik trójpokożeniowy z histerezą.

 Analizę przeprowadzić dla trójkątnego oraz sinusoidalnego sygnału oscylacyjnego.
4. Porównać przebiegi wartości regulowanej układu przedstawionego na rys. 2 (przyjąć  $w=B/2 \mathbf{1}(t)$ ) z układem regulacji dwupołożeniowej (bez sygnału szybkozmiennego  $f$ ) oraz z układem regulacji proporcjonalnej o wzmocnieniu równym  $k_{zas}$ . Otrzymane przebiegi porównać z układem regulacji ciągłej P pracującym według kryterium  $M_{max}$ .

$$K_1(s) = \frac{1}{(s+1)^3}$$

$$K_2(s) = \frac{1}{T_c s(s+1)^2}$$



Rys. 2. Schemat układu regulacji ze zlinearyzowanym elementem przekaznikowym (przekaznik dwupołożeniowy z histerezą).