# Analiza danych rzeczywistych przy pomocy modelu ARMA

## Autorzy

Kacper Budnik, 262286
Maciej Karczewski, 262282

Politechnika Wrocławska

Wydział Matematyki 9 lutego 2023

# Spis treści

**1 Wprowadzenie** **2**

**2 Przygotowanie danych do analizy** **2**
2.1 Sprawdzenie stacjonarności . . . . . 2

**3 Dekompozycja szeregu czasowego** **3**
3.1 Wykresy dla surowych danych . . . . . 3
3.2 Różnicowanie sezonowe . . . . . 3

**4 Dobranie modelu ARMA** **5**
4.1 Rząd modelu . . . . . 5
4.2 Estymacja paremetrów modelu . . . . . 5

**5 Ocena dopasowania modelu** **5**

**6 Analiza szumu** **6**
6.1 Stała średnia równa 0 . . . . . 6
6.2 Stała wariancja . . . . . 8
6.3 Niezależność szumu . . . . . 8
6.4 Założenie o normalności rozkładu . . . . . 9

**7 Wnioski autorów** **10**

# 1 Wprowadzenie

Analizowane dane pochodzą ze strony Kaggel. Zawierają one dane pogodowe z Indyjskiego miasta Delhi od dnia 1 listopada 1996 do 24 kwiecień 2017. Dane były pobierane w przynajmniej ośmiu ustalonych momentach dnia w odstępach trzygodzinnych. W pierwszych latach dane w większości były pobierane w odstępach godzinnych. Zawierają one informacje między innymi o wilogtności, temperaturze punktu rosy, zjawiskach atmosferycznych, czyli informacjie czy wystąpiły opady, burze, mgły i tym podobne oraz dacie pomiaru. Przykładowe dane przezentują się następująco.

| datetime_utc | _dewptm | _fog | _hail | _hum | _tempm |
|---|---|---|---|---|---|
| 19961101-11:00 | 9 | 0 | 0 | 27 | 30 |
| 19961101-12:00 | 10 | 0 | 0 | 32 | 28 |
| 19961101-13:00 | 11 | 0 | 0 | 44 | 24 |
| 19961101-14:00 | 10 | 0 | 0 | 41 | 24 |
| 19961101-16:00 | 11 | 0 | 0 | 47 | 23 |
| 19961101-17:00 | 12 | 0 | 0 | 56 | 21 |

W analizie interesują nas jedynie kolumny `datetime_utc` przechowująca informację o dacie pomiaru oraz `_tempm` zawierająca odnotowaną temperaturę. Będziemy analizować zachowanie średniej temperatury dziennej w zależności od średnich z poprzednich dni.

# 2 Przygotowanie danych do analizy

Analizowane dane obejmują okres od listopada 1996 roku, jednak w pierwszych latach dane były pobierane w nieregularnie. Dlatego rozpatrujemy dane z okresu od 1 stycznia 2008 do 31 grudnia 2015 roku, równo 8 lat. Pozostałe dane tj. pochodzące z okresu 1 styczeń 2016 – 24 kwiecień 2017 pozostawiliśmy jako dane testowe. W tych okresach pomiary były robione 8 razy dziennie, co 3 godziny każdy, rzadkie przypadki pomiarów w dodatkowych porach zostały pominięte. Za obserwacje odstające uznaliśmy te, które spełniają poniższą własność

$$y \notin (Q_1 - 1.5IQR, Q_3 + 1.5IQR)\,,$$

gdzie $y$ jest kandydatem na obserwacje odstającą, $Q_1$ i $Q_3$ to odpowiednio pierwszy i trzeci kwantyl, a $IQR$ jest rozstępem międzykwantylowym. W wyniku tej obserwacji odrzuciliśmy jedynie 4 obserwacje rzędu 90°C. Pozostałe wyniki należą do przedziału od 1°C do 47°C. Naszym celem jest analiza średniej dziennej temperatury, zatem w kolejnym kroku obliczyliśmy tą średnią. Jej wartości mieszą się w przedziale od 6°C do 40°C. Uzyskane średnie temperatury rzeczywiście były osiągane w Indiach w odpowiednich czasach.

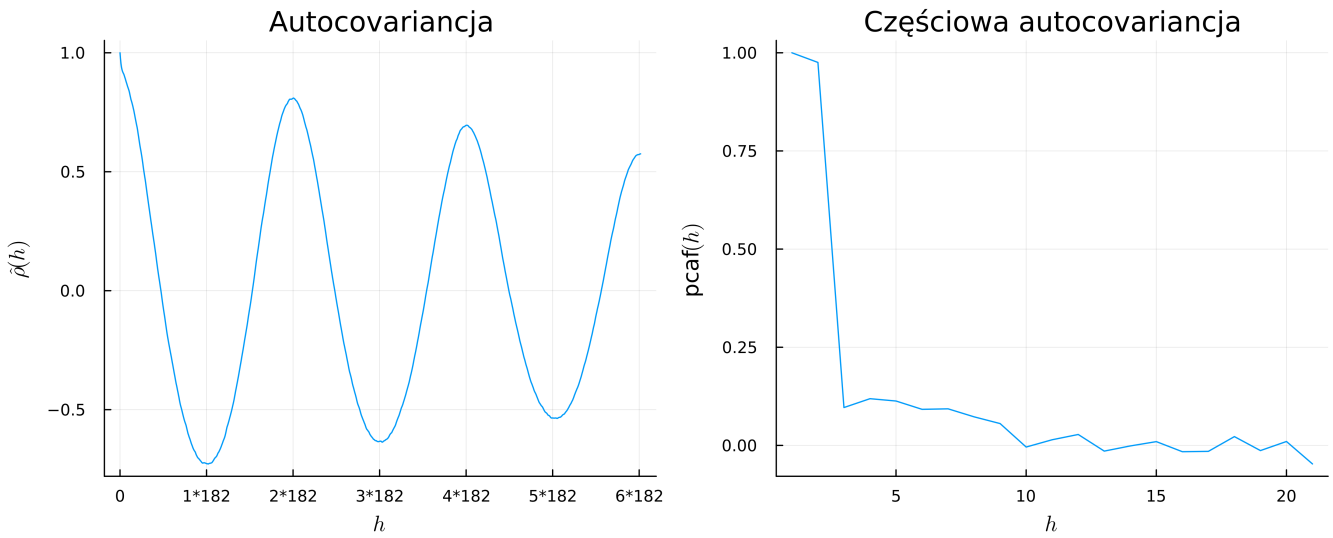
## 2.1 Sprawdzenie stacjonarności

W celu sprawdzenia, czy nasze dane w postaci surowej są stacjonarne, posłużymy się testem ADF (Augmented Dickey-Fuller Test). W tym celu skorzystaliśmy z funkcji `ADFTest` z pakietu `HypothesisTests` dla języka `Julia`. Ponieważ nasze dane są pobierane codziennie, rozpatrywaliśmy lag do wartości 365. W ten sposób p-value=$0.2619$, zatem nie mamy podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej głoszącej, że szereg nie jest stacjonarny.

# 3 Dekompozycja szeregu czasowego

## 3.1 Wykresy dla surowych danych

Dekompozycję zaczniemy od analizy wykresów funkcji autokowariancji oraz częściowej autokowariancji. Prezentują się one następująco




Rysunek 1: Funkcjie empircznej autokowariancji i częściowej autokowariancji.

Na powyższym wykresie widać okresowe zachowanie funkcji autokowariancji z okresem około 365. Liczba ta pokrywa się z liczbą dni w roku, co wydaje się intuicyjne. Z powodu na globalne ocieplenie możemy podejrzewać, że będzie istniał dodatni trend. Rzeczywiście, korzystając z funkcji `polyfit`, otrzymaliśmy trend

$$m(h) = 24.8564 + 9 \cdot 10^{-5} h,$$

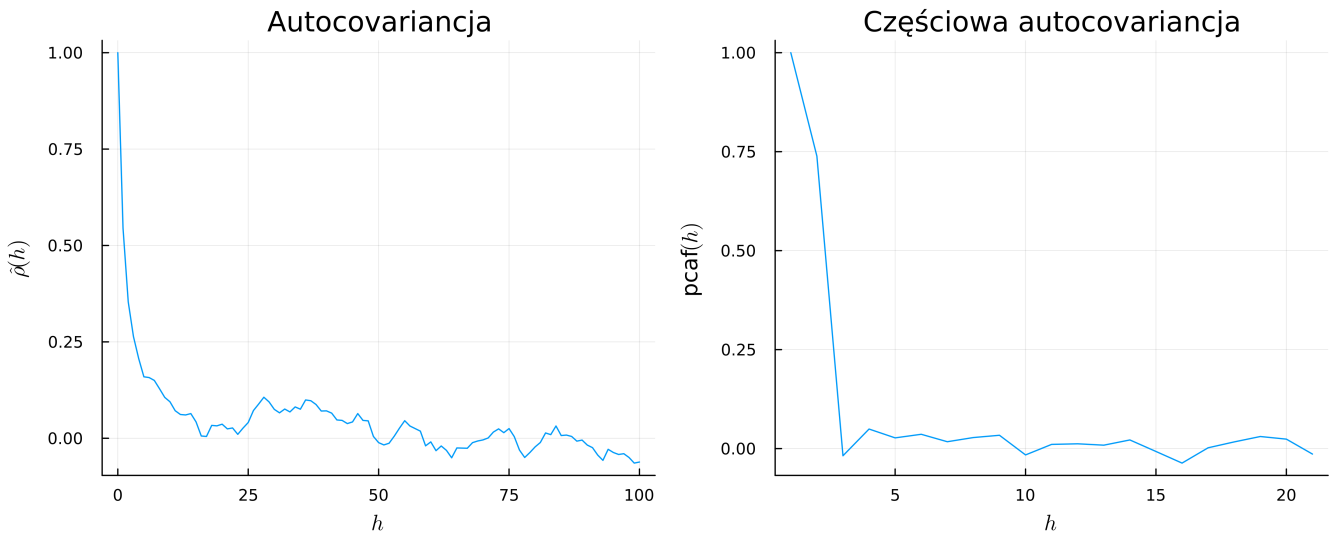
gdzie $m$ oznacza zmianę średniej temperatury w ciągu dnia. Zatem w ciągu 10 lat średnia temperatura w Delhi, według naszych obliczeń, wzrosła w przybliżeniu o $m(10 \cdot 365) - m(0) \approx 0.3287°$C. Według danych w tym samym okresie średnia temperatura na ziemi wzrosła, w zależności od regionu i źródeł, o więcej niż $0.2°$C, zatem nasze wyniki częściowo pokrywają się z obserwowanymi zdarzeniami.

## 3.2 Różnicowanie sezonowe

Tak jak już wspomnieliśmy, przy analizie wykresu 1, nasze dane wykazują okresowość z okresem ok. 365 dni. By pozbyć się tych sezonowości zastosowaliśm różnicowanie sezonowe, czyli analizowaliśmy dalej dane w postaci

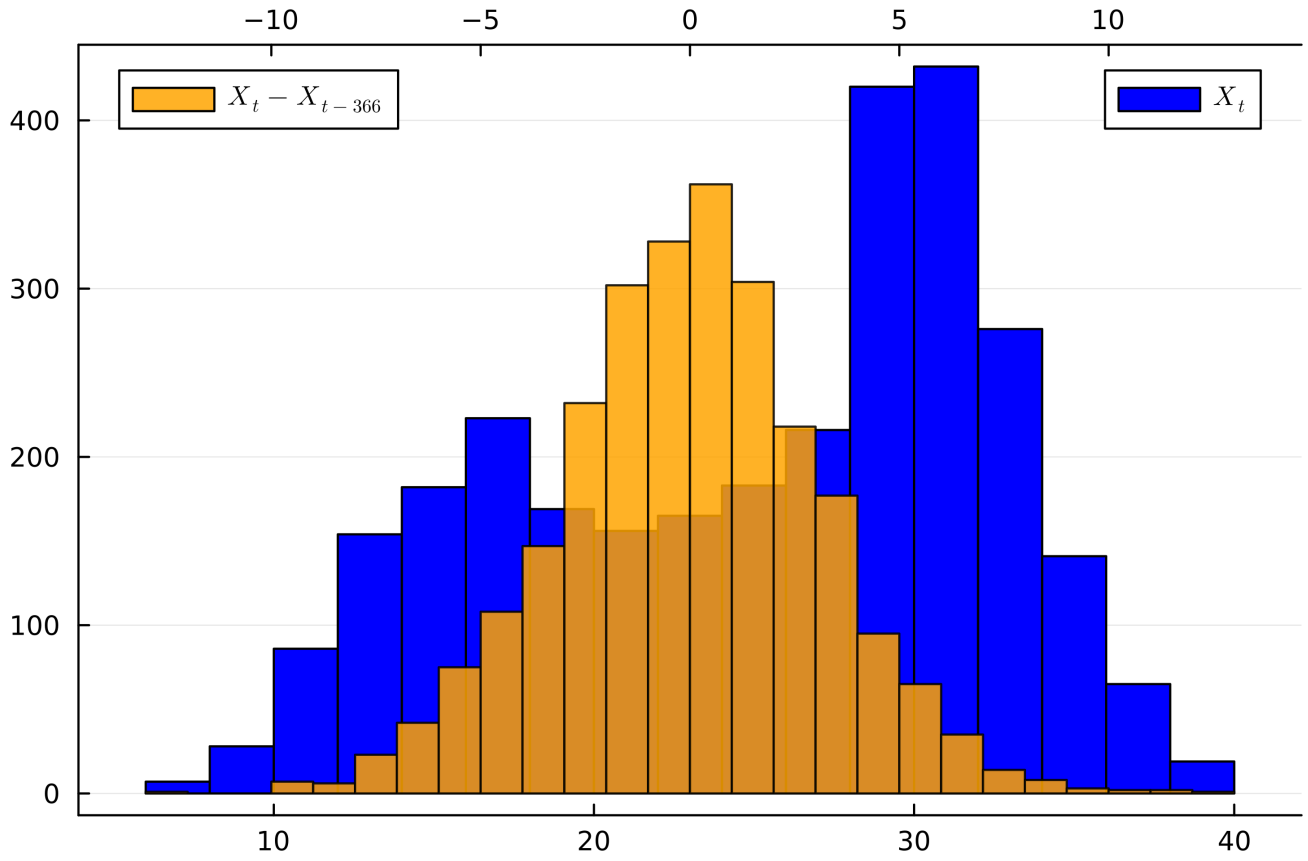
$$W_t = Y_t - Y_{t-a}.$$

W naszym przypadku $a$ powinno być blisko 365. Dokładną wartość $a = 366$ dobraliśmy w taki sposób, by funkcjia autokowariancji była jak najmniejsza dla początkowych 10 wartości. Dla szeregu $W_t = Y_t - Y_{t-366}$ wygenerowaliśmy ponownie wykresy autokowariancji i częściowej autokowariacji.




Rysunek 2: Funkcjie empircznej autokowariancji i częściowej autokowariancji.

Na wykresach widać, że funkcja częściowej i zwykłej autokowariancji szybko zbiega do wartości bliskich zeru i pozostaje w jego otoczeniu. Zatem możemy założyć, że nasz szereg jest już stacjonarny. By sprawdzić to założenie ponownie wykonaliśmy ADF-Test. W tym przypadku p-value$= 0.002$, zatem możemy odrzucić hipotezę głoszącą, że szereg nie jest stacjonarny. Histogram naszych danych po transformacji wygląda następująco.




Rysunek 3: Dane przed i po transformacji. Dolna oś wskazuje na dane oryginalne, na górze widnieje oś dla danych po transformacji.

# 4 Dobranie modelu ARMA

## 4.1 Rząd modelu

W celu znalezienia rzędu medelu skorzystaliśmy z kryterium informacyjnego Akkaike. Jest to metoda największej wiargodności z karą dla danego $p$ i $q$ w postaci

$$AIC = -2l(x; \phi; \theta, \sigma^2) + 2(p + q + 1),$$

gdzie $l$ jest funkcją wiarygodności. Zatem dla różnych wartości $p$ oraz $q$ otzrymamy różne wyniki. Wybieramy wtedy ten z najmniejszą wartością. W symulacji sprawdziliśmy krytorium AIC dla wartości $p$, $q$ od 0 do 10. Poniżej przedstawiliśmy jedynie część tabeli zawierającą wartość najmniejszą.

| | $q=0$ | $q=1$ | $q=2$ | $q=3$ | $q=4$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $p=0$ | 13053.2 | 11716.4 | 11333.5 | 11180.9 | 11124.3 |
| $p=1$ | 11039.6 | 11040.7 | 11035.9 | 11034.7 | 11032.6 |
| $p=2$ | 11040.8 | 11040.5 | 11027.3 | 11028.3 | 11030.2 |
| $p=3$ | 11036.6 | 11027.6 | 11030.0 | 11029.9 | 11031.7 |
| $p=4$ | 11036.7 | 11028.3 | 11030.4 | 11032.8 | 11030.8 |

Więc naszym modelem będzie model $ARMA(2, 2)$.

## 4.2 Estymacja paremetrów modelu

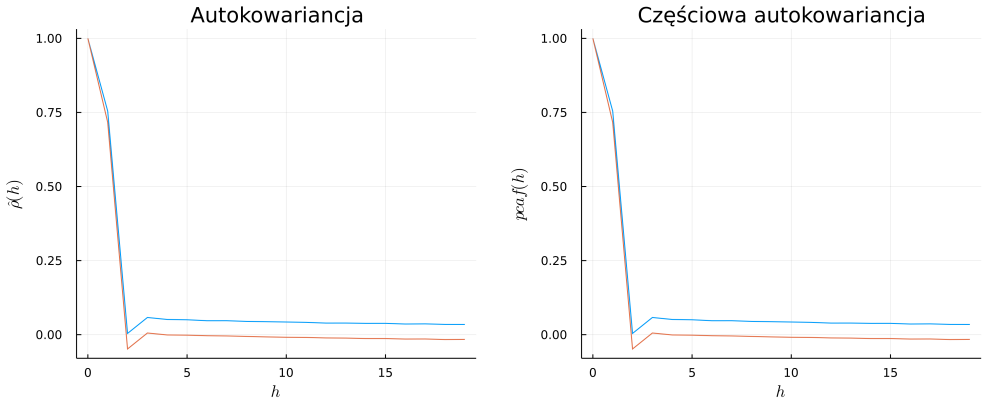
Przy znanych parametrach $p$ i $q$ możemy zacząć estymować współczynniki modelu. Do estymacji korzystaliśmy z metody największej wiarygodności. Skorzystaliśmy z numerycznego przybliżenia przy pomocy funkcji `ARIMA.fit()` z pakietu `statsmodels.tsa.arima.model` w języku `Python`. W wyniku dostaliśmy model

$$Y_t - 1.6118\, Y_{t-1} + 0.6232\, Y_{t-2} = Z_t - 0.8640\, Z_{t-1} - 0.0688\, Z_{t-2},$$

gdzie $Z_t$ jest białym szumem o wariancji $\sigma^2 = 4.3478$.

# 5 Ocena dopasowania modelu

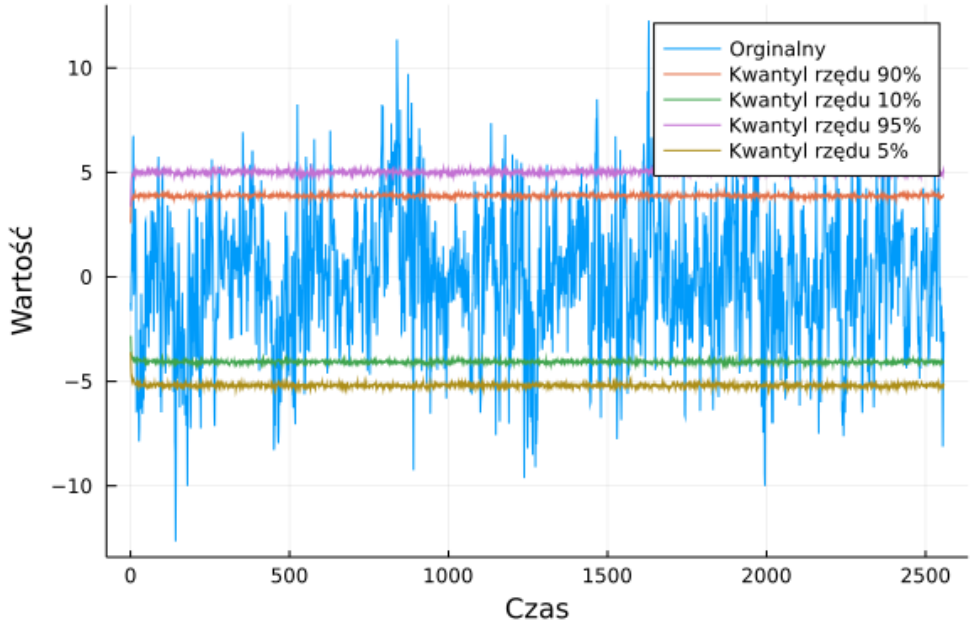
W celu oceny dopasowania modelu do danych zobaczymy jak wyglądają przedziały ufności,wyznaczone za pomocą Monte Carlo, na poziomie $\alpha = 5\%$ dla ACF i PACF




Rysunek 4: Przedziały ufności dla ACF i PACF dla naszego modelu

Jak możemy zobaczyć na wykresie 4 istnieje tylko krótko okresowa zależność pomiędzy danymi w modelu. Ta zależność pokrywa się z naszymi oczekiwaniami, ponieważ używamy modelu ARMA(2,2) o parametrach 4.2 gwarantujących racjonalność.

Następnie porównamy trajektorię z liniami kwantylowymi dla naszego modelu.




Rysunek 5: Porównanie orginalnych danych z liniami kwantylowymi modelu

Analizując linie kwantylowe naszego modelu,wyznaczone również za pomocą symulacji Monte Carlo, pokazane na wykresie 5 możemy zauważyć, że model w miarę dobrze się sprawdza dla naszych danych. $80\%$ danych leży pomiędzy linią kwantylową rzędu $0.9$ i $0.1$. Natomiast $89\%$ danych leży pomiędzy linią kwantylową rzędu $0.95$ i $0.05$

Patrząc na wykres zależności w modelu 4 oraz na wykres z liniami kwantylowymi 5 dochodzimy do wniosku, że model dobrze się sprawdza dla naszych danych.

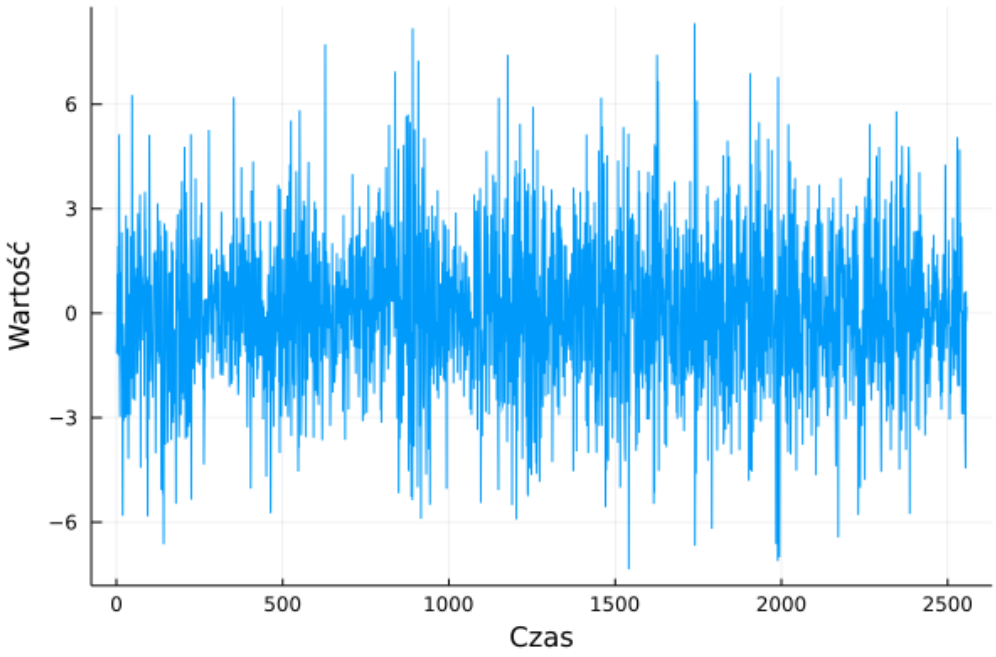
# 6 Analiza szumu

Podczas tworzenia modelu ARMA i późniejszej analizy zakładaliśmy następujące warunki odnośnie szumu

1. $\mathbb{E}\xi_i = 0 \; \forall i$ ,
2. $Var\xi_i = \sigma^2 < \infty \quad \forall i$,
3. $\xi_i \perp\!\!\!\perp \xi_j$ dla $i \neq j$,
4. $\xi_i$ mają rozkład normalny,

## 6.1 Stała średnia równa 0

Sprawdzimy, czy residua naszego modelu mają stałą średnią równą $0$. W tym celu zobaczymy jak wyglądają nasze wartości resztowe.




Rysunek 6: Residua naszego modelu

Jak możemy zobaczyć na wykresie 6 średnia jest stała w czasie i wynosi w przybliżeniu $0$ a dokładnie $7.9 \cdot 10^{-4}$. W celu upewnienia się wykonamy też t test dla jednej zmiennej.

```
One sample t-test
-----------------
Population details:
    parameter of interest:   Mean
    value under h_0:         0
    point estimate:          0.000791916
    95% confidence interval: (-0.08009, 0.08167)

Test summary:
    outcome with 95% confidence: fail to reject h_0
    two-sided p-value:           0.9847

Details:
    number of observations:   2557
    t-statistic:              0.019200134473658807
    degrees of freedom:       2556
    empirical standard error: 0.04124531616232871
```

Rysunek 7: Test t dla naszych wartości resztowych

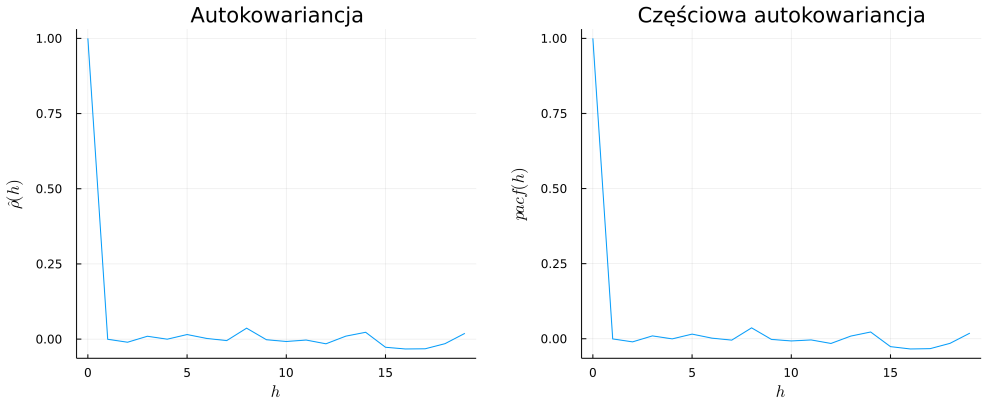
Jak możemy zobaczyć test t 7 nie miał podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej, która mówiła ,że średnia wynosi $0$. Test zwrócił $p$-value równe $0.9847$ co jest bardzo dużą wartością. Tak więc z pewnością możemy przyjąć, że średnia jest stała i równa $0$

## 6.2 Stała wariancja

Z wykresu 6 możemy odczytać,także że wariancja jest stała. Dodatkowo możemy obliczyć ,że należy ona do przedziału $[4.141; 4.554]$ na poziomie ufności $\alpha = 5\%$

## 6.3 Niezależność szumu

Sprawdzimy teraz założenie dotyczące niezależności szumu w czasie. Sprawdzimy na początek wykres autokowariancji i częściowej autokowariancji.




Rysunek 8: ACF i PACF dla wartości resztkowych modelu

Na wykresie 8 możemy zobaczyć, że mamy szum jest zależny tylko od siebie w tym samym momencie, ponieważ tylko dla $h = 0$ ACF oraz PACF przyjmują wartość niebędącą w otoczeniu zera.

Dodatkowo wykonamy test Ljunga-Boxa by upewnić się, że szum jest niezależny od siebie.

```
Ljung-Box autocorrelation test
------------------------------
Population details:
    parameter of interest:   autocorrelations up to lag k
    value under h_0:         "all zero"
    point estimate:          NaN

Test summary:
    outcome with 95% confidence: fail to reject h_0
    one-sided p-value:           0.9788

Details:
    number of observations:         2557
    number of lags:                 1
    degrees of freedom correction:  0
    Q statistic:                    0.000705594
```

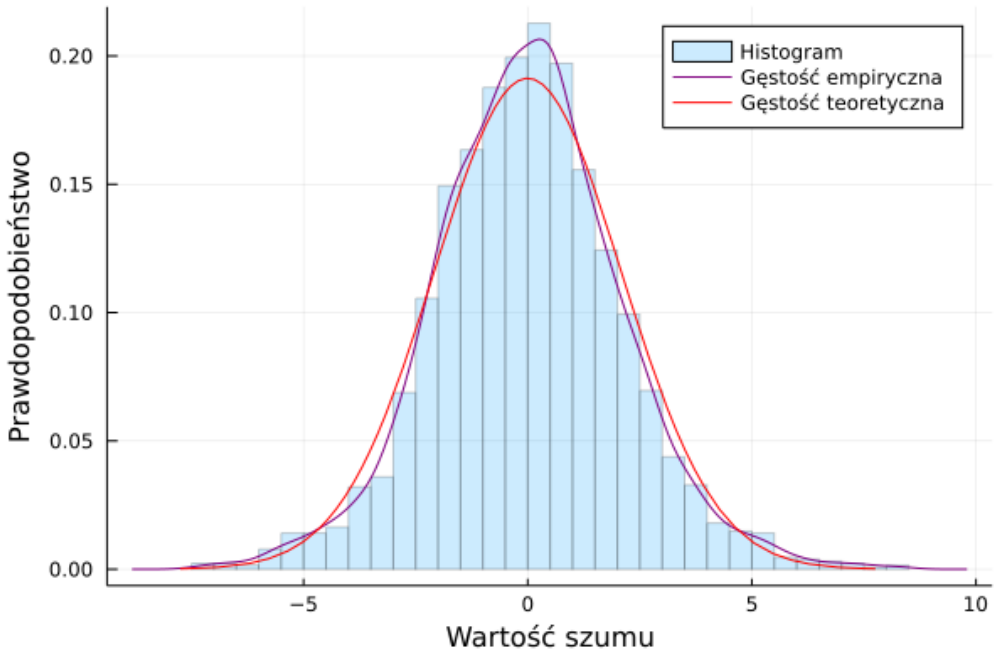
Rysunek 9: Test Ljunga Boxa dla naszych wartości resztowych

Test nam potwierdza, że nie mamy podstaw do odrzucenia hipotezy mówiącej, że szum jest niezależny od siebie. Otrzymaliśmy $p$-value równe $0.9847$ co jest bardzo dużą wartością.

Łącząc wykres 4 oraz test Ljunga Boxa stwierdzamy, że szum jest niezależny.

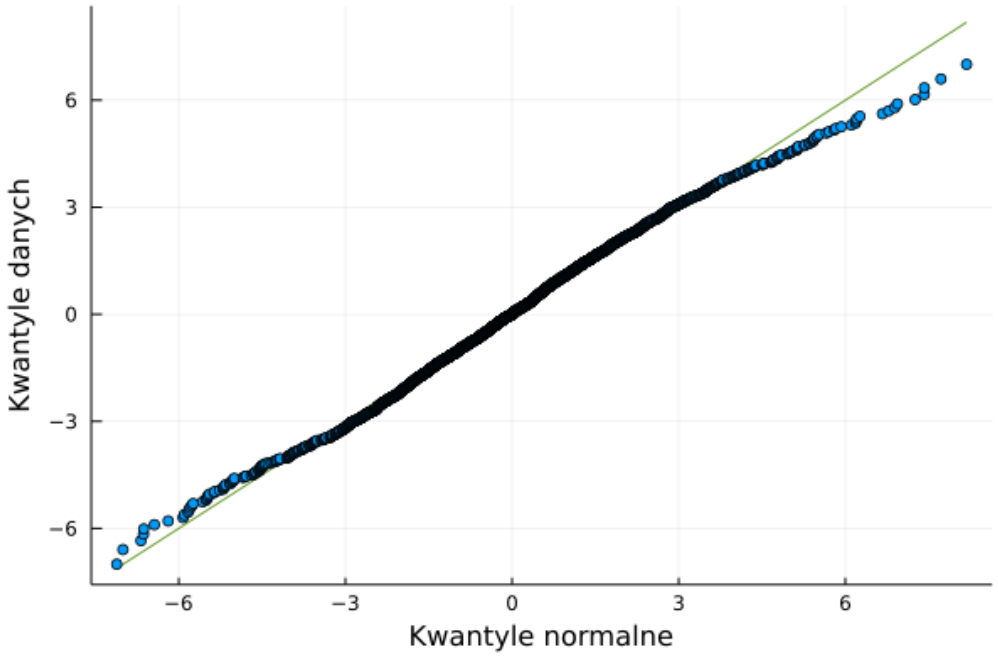
## 6.4 Założenie o normalności rozkładu

Sprawdzimy teraz założenie mówiące o tym, że szum ma rozkład normalny. Na początku sprawdzimy histogram wraz z gęstością empiryczną i teoretyczną rozkładu normalnego.




Rysunek 10: Histogram, gęstość rozkładu szumu wraz z rozkładem normalnym

Patrząc na histogram wraz z gęstościami 10 możemy załuważyć, że rozkład wartości resztowych może być normalny ale nie musi. W celu dalszego sprawdzenia normalności zobaczymy jak będzie wyglądał wykres kwantylowy.




Rysunek 11: Qqplot dla wartości resztowych

Analizując wykres kwantylowy 11 widzimy, że potencjalnie ogony rozkładu nie zgadzają się z rozkła-

dem normalnym. W celu ostatecznej weryfikacji normalności wykonamy test Andersona Darlinga.

```
One sample Anderson-Darling test
--------------------------------
Population details:
    parameter of interest:   not implemented yet
    value under h_0:         NaN
    point estimate:          NaN

Test summary:
    outcome with 95% confidence: reject h_0
    one-sided p-value:           0.0334

Details:
    number of observations:   2557
    sample mean:              0.0007919156167252843
    sample SD:                2.0856431385378396
    A² statistic:             2.830020981780576
```

Rysunek 12: Test Andersona Darlinga dla naszych wartości resztowych

Test Andersona Darlinga 12 odrzuca hipotezę o normalności rozkładu. Dla naszych danych $p$-value wynosi $3.3\%$.

Podsumowując rozkład szumu nie ma rozkładu normalnego.

# 7 Wnioski autorów

Pogodę w Indiach po odpowiednich przekształceniach można modelować modelem ARMA. W naszym przypadku udało się za modelować modelem o wartościach $p, q = 2$ 4.2. Parametry modelu mówią nam, że jest on stacjonarny i przyczynowy co pokrywa się z dalszymi testami. Model spełnia założenia, lecz biały szum nie ma rozkładu normalnego. Dużym atutem modelu jest fakt, że wykorzystuje on tylko dwie średnie temperatury z dwóch ostatnich dni. Warto pamiętać, że nadal jest to proces losowy więc nigdy temperatura nie będzie dokładnie się zgadzać z modelem.