Symulacje Komputerowe

Raport: **1**

Temat sprawozdania .... **Coś kreatywnego** ....
Nazwisko i Imię prowadzącego kurs ....**dr Michał Balcerek** ....

Wykonawca:	
Imię i Nazwisko, nr indeksu	Kacper Budnik, 262286 Szymon Malec, 262276
Wydział	Wydział matematyki, W13
Termin zajęć:	Wtorek, 15^{15}
Numer grupy ćwiczeniowej	T00-70d
Data oddanie sprawozdania:	24 kwietnia 2022
Ocena końcowa	

Adnotacje dotyczące wymaganych poprawek oraz daty otrzymania poprawionego sprawozdania

1. Wstęp - Koniec

2. Liniowy generator kongruentny - Kiedyś

3. Metoda odwrotnej dystrybuanty - Malec

3.1. Opis

Metoda ta polega na generowaniu zmiennej losowej X generując zmienną U z rozkładu jednostajnego oraz nakładając na nią funkcję odwrotną dystrybuanty.

Algorytm dla rozkładów dyskretnych

Załóżmy, że rozkład X ma postać $\mathrm{P}(X = x_i) = p_{\mathrm{i}},\ i = 1, 2, \ldots.$

1. Generuj $U \sim \mathcal{U}(0, 1)$.
2. Wyznacz $j \in \mathbb{N}$ takie, że $\sum_{i=1}^{j-1} p_i < U \leqslant \sum_{i=1}^{j} p_i$.
3. Zwróć $X = x_i$.

Algorytm dla rozkładów ciągłych

Załóżmy, że X ma dystrybuantę $F(x)$.

a) Jeśli dystrybuanta jest ściśle rosnąca:
   1. Generuj $U \sim \mathcal{U}(0, 1)$.
   2. Zwróć $X = F_X^{-1}(U)$.

b) Jeśli dystrybuanta nie jest ściśle rosnąca:
   1. Generuj $U \sim \mathcal{U}(0, 1)$.
   2. Zwróć $X = \tilde{F}_X^{-1}(U)$, gdzie $\tilde{F}_X^{-1}(y) = \inf\{x \in \mathbb{R} : F_X(x) \geqslant y\}$.

3.2. Przykłady

Dyskretny - chuj

Ciągły - rozkład Cauchy'ego

Chcemy wygenerować $X \sim C(\mu, \sigma)$. Dystrybuanta rozkładu Cauchy'ego ma postać

$$F(x) = \frac{1}{\pi} \arctan\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right) + \frac{1}{2}.$$

Za pomocą elementarnych przekształceń jesteśmy w stanie otrzymać funkcję odwrotną

$$F^{-1}(y) = \sigma \tan\left(\pi\left(y - \frac{1}{2}\right)\right) + \mu.$$

Zatem, żeby wygenerować X, należy najpierw wygenerować $U \sim \mathcal{U}(0, 1)$ i zwrócić $F^{-1}(U)$. Możemy to jednak lekko uprościć. Niech $Z \sim \mathcal{U}\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Wtedy

$$Z \stackrel{d}{=} \pi\left(U - \frac{1}{2}\right).$$

Ostatecznie algorytm będzie wyglądał następująco:

1. Generuj $Z \sim \mathcal{U}\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

2. Zwróć $X = \sigma \tan(Z) + \mu$.

Aby przetestować powyższy algorytm, generujemy wektor 1000 realizacji zmiennej X, a następnie porównujemy dystrybuantę empiryczną tej próbki z dystrybuantą teoretyczną oraz tworzymy histogram i porównujemy go z gęstością. Jak możemy zauważyć dystrybuanty empiryczna i teoretyczna są do siebie zbliżone. To samo możemy powiedzieć o krzywej gęstości, której kształt jest podobny do histogramu próby.

4. Metoda akceptacji i odrzucenia[1] - Budnik

4.1. Opis metody dla przypadku dyskretnego[1]

Metoda akceptacji i odrzucenia służy do generowania zmiennej losowej **X** przy użyciu innych zmiennych. By móc wykorzystać tą metodę muszą być spełnione:

— Potrafimy efektywnie generować inną zmienną losową **Y**
— Zmienne **X** oraz **Y** muszą być skupione na tym samym zbiorze
— Potrafimy wyznaczyć stałą c taką że $\dfrac{\mathbb{P}(X=i)}{\mathbb{P}(Y=i)} \leqslant c$ dla każdego i

Jeśli są spełnione powyższe założenia możemy użyć poniższego algorytmu do generowania zmiennej **X**.

Algorytm

1. Generuj jedną realizację **Y**
2. Generuj U~U(0,1) $\sim \mathcal{U}(0,1)$, $\mathbf{U} \perp\!\!\!\perp \mathbf{Y}$
3. Jeśli $\mathbf{U} \leqslant \frac{p_{\mathbf{Y}}}{c q_{\mathbf{Y}}}$ zwróć **X=Y**, w przeciwnym wróć do 1.

4.2. Opis metody dla przypadku ciągłego[2]

Metoda akceptacji i odrzucenia służy do generowania zmiennej losowej **X** o gęstości $f(x)$ przy użyciu innych zmiennych. By móc wykorzystać tą metodę muszą być spełnione:

— Potrafimy efektywnie generować inną zmienną losową **Y** o gęstości $g(x)$
— Zmienne **X** oraz **Y** muszą być skupione na tym samym zbiorze
— Potrafimy wyznaczyć stałą c taką że $\sup \dfrac{f(x)}{g(x)} \leqslant c$ dla każdego x, gdzie $g(x) \neq 0$ (więc również $f(x) \neq 0$)

Algorytm

1. Generuj jedną realizację **Y**
2. Generuj U~ $\mathcal{U}(0,1)$, $\mathbf{U} \perp\!\!\!\perp \mathbf{Y}$
3. Jeśli $\mathbf{U} \leqslant \dfrac{f(Y)}{cg(Y)}$ zwróć **X=Y**, w przeciwnym wróć do 1.

4.3. cos

W obu przypadkach, ciągłym i dyskretnym, prawdopodobieństwo, że zmienna zostanie zaakceptowana wynosi $\frac{1}{c}$. Średnia liczba powtórzeń algorytmu wynosi c, zatem stałą tę powinniśmy dobierać jak najmniejszą spełniającą wymagane kryteria.

4.4. Przykład

5. Metoda splotowa - Malec

5.1. Opis

Metoda ta pozwala wygenerować pewną zmienną losową X, przy pomocy innych zmiennych, które potrafimy efektywnie generować, i zsumowaniu ich. Załóżmy, że

$$X \stackrel{d}{=} Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n,$$

gdzie Y_i to zmienne losowe niezależne. Wtedy algorytm wygląda następująco:

1. Generuj $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$.
2. Zwróć $X = Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n$.

5.2. Przykłady

Dyskretny -

Ciągły -

6. Metoda kompozycji - Malec

7. Metoda Boxa-Mullera - Budnik

8. Metoda biegunowa - Budink

9. Zakończenie - Początek

Bibliografia

[1] https://youtu.be/NFmbgbyj5M0?t=1323
[2] TBA