Proof of Slutsky's Theorem

Kacper Budnik

Wrocław University of Science and Technology

20 marca 2023

Rodzaje zbieżności

Zbieżność według prawdopodobieństwa

Ciąg zmiennych losowych (X_n) jest zbieżny według prawdopodobieństwa do X, jeśli

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(|X_n - X| > \varepsilon\right) = 0.$$

Oznaczamy $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$.

Rodzaje zbieżności

Zbieżność według rozkładu

Ciąg zmiennych losowych (X_n) jest zbieżny według rozkładu do X, jeśli

$$\forall f \in C_b(\mathbb{R}) \quad \lim_{n\to\infty} \mathbb{E} f(X_n) = \mathbb{E} f(X),$$

gdzie $C_b(\Omega)$ jest to zbiór funkcji ciągłych i ograniczonych na Ω. Oznaczamy $X_n \xrightarrow{d} X$.

Rodzaje zbieżności

Zbieżność według rozkładu

Ciąg zmiennych losowych (X_n) jest zbieżny według rozkładu do X, jeśli

$$\forall f \in C_b(\mathbb{R}) \quad \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}f\left(X_n\right) = \mathbb{E}f\left(X\right),$$

gdzie $C_b(\Omega)$ jest to zbiór funkcji ciągłych i ograniczonych na Ω. Oznaczamy $X_n \xrightarrow{d} X$.

Równoważny warunek

Niech X_n – ciąg o dystrybuantach F_n oraz X – zmienna losowa o dystrybuancie F, wtedy

$$X_n \xrightarrow{d} X \quad \Longleftrightarrow \quad F_n(x) \to F(x)$$

dla każdego punktu x ciągłości dystrybuanty F.

Slutsky's Theorem

Twierdzienie Słuckiego

Niech X_n i Y_n będą ciągami zmiennych losowych, takich, że

$$X_n \xrightarrow{d} X \quad \text{oraz} \quad Y_n \xrightarrow{\mathbb{P}} c$$

dla pewnej zmiennej losowej X i stałej c. Wtedy

- $X_n + Y_n \xrightarrow{d} X + c$
- $Y_n X_n \xrightarrow{d} cX$

Dowód dla sumy

Niech $x - c$ będzie punktem ciągłości dystrybuanty F zmiennej losowej X, wtedy dla dowolnego $\varepsilon > 0$

Dowód dla sumy

Niech $x - c$ będzie punktem ciągłości dystrybuanty F zmiennej losowej X, wtedy dla dowolnego $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(X_n + Y_n < x\right) = {} & \mathbb{P}\left(X_n + Y_n < x,\ |Y_n - c| < \varepsilon\right) \\ & + \mathbb{P}\left(X_n + Y_n < x,\ |Y_n - c| \geqslant \varepsilon\right)\end{aligned}$$

Dowód dla sumy

Niech $x - c$ będzie punktem ciągłości dystrybuanty F zmiennej losowej X, wtedy dla dowolnego $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(X_n + Y_n < x\right) = & \ \mathbb{P}\left(X_n + Y_n < x,\ |Y_n - c| < \varepsilon\right) \\ & + \mathbb{P}\left(X_n + Y_n < x,\ |Y_n - c| \geqslant \varepsilon\right)\end{aligned}$$

Ponieważ $Y_n \xrightarrow{\mathbb{P}} c$, to

$$0 \leqslant \mathbb{P}\left(X_n + Y_n < x,\ |Y_n - c| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \mathbb{P}\left(|Y_n - c| \geqslant \varepsilon\right) \to 0.$$

Dowód cd.

Dodatkowo

$$|Y_n - c| < \varepsilon \iff c - \varepsilon < Y_n < c + \varepsilon,$$

Dowód cd.

Dodatkowo

$$|Y_n - c| < \varepsilon \iff c - \varepsilon < Y_n < c + \varepsilon,$$

zatem

$$X_n + c - \varepsilon < X_n + Y_n < X_n + c + \varepsilon,$$

Dowód cd.

Dodatkowo

$$|Y_n - c| < \varepsilon \iff c - \varepsilon < Y_n < c + \varepsilon,$$

zatem

$$X_n + c - \varepsilon < X_n + Y_n < X_n + c + \varepsilon,$$

a więc

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(X_n + Y_n < x,\ |Y_n - c| < \varepsilon\right) \leqslant \mathbb{P}\left(X_n + c - \varepsilon < x,\ |Y_n - c| < \varepsilon\right) \\ \leqslant \mathbb{P}\left(X_n + c - \varepsilon < x\right)\end{aligned}$$

Dowód cd.

Z drugiej strony, korzystając z nierówności

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right) \geqslant \left(\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}\left(A_n\right)\right) - (n-1)$$

dla $n = 2$

Dowód cd.

Z drugiej strony, korzystając z nierówności

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right) \geqslant \left(\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_n)\right) - (n-1)$$

dla $n = 2$ otrzymujemy oszacowanie dolne postaci

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_n + Y_n < x, \ |Y_n - c| < \varepsilon) &\geqslant \mathbb{P}(X_n + c + \varepsilon < x, \ |Y_n - c| < \varepsilon) \\ &\geqslant \mathbb{P}(X_n + c + \varepsilon < x) + \mathbb{P}(|Y_n - c| < \varepsilon) - 1.\end{aligned}$$

Dowód cd.

Z drugiej strony, korzystając z nierówności

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right) \geqslant \left(\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}\left(A_n\right)\right) - (n-1)$$

dla $n = 2$ otrzymujemy oszacowanie dolne postaci

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(X_n + Y_n < x,\ |Y_n - c| < \varepsilon\right) &\geqslant \mathbb{P}\left(X_n + c + \varepsilon < x,\ |Y_n - c| < \varepsilon\right)\\ &\geqslant \mathbb{P}\left(X_n + c + \varepsilon < x\right) + \mathbb{P}\left(|Y_n - c| < \varepsilon\right) - 1.\end{aligned}$$

Dodatkowo, ponieważ $Y_n \xrightarrow{\mathbb{P}} c$, to

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(|Y_n - c| < \varepsilon\right) - 1 = 0$$

Dowód cd.

Więc zbierając wszystko razem i dobierając tak epsilona, by F była ciągła na $[x-c-\varepsilon, x-c+\varepsilon]$, otrzymujemy

$$\begin{aligned}\limsup_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(X_n + Y_n < x\right) \leqslant \limsup_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(X_n + c - \varepsilon < x\right) \\ + \limsup_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(X_n + Y_n < x,\ |Y_n - c| \geqslant \varepsilon\right) \\ = \mathbb{P}\left(X + c - \varepsilon < x\right) + 0.\end{aligned}$$

Dowód cd.

Więc zbierając wszystko razem i dobierając tak epsilona, by F była ciągła na $[x-c-\varepsilon, x-c+\varepsilon]$, otrzymujemy

$$\begin{aligned}
\limsup_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(X_n + Y_n < x\right) \leqslant \limsup_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(X_n + c - \varepsilon < x\right) \\
+ \limsup_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(X_n + Y_n < x,\ |Y_n - c| \geqslant \varepsilon\right) \\
= \mathbb{P}\left(X + c - \varepsilon < x\right) + 0.
\end{aligned}$$

Analogicznie

$$\begin{aligned}
\liminf_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(X_n + Y_n < x\right) \geqslant \liminf_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(X_n + c + \varepsilon < x\right) \\
+ \liminf_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(X_n + Y_n < x,\ |Y_n - c| \geqslant \varepsilon\right) \\
+ \liminf_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(|Y_n - c| < \varepsilon\right) - 1 \\
= \mathbb{P}\left(X + c - \varepsilon < x\right) + 0 + 0.
\end{aligned}$$

Dowód cd.

Mamy więc oszacowanie górne i dolne na szukaną granicę

$$\mathbb{P}(X + c < x - \varepsilon) \leqslant \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n + Y_n < x) \leqslant \mathbb{P}(X + c < x + \varepsilon).$$

Dowód cd.

Mamy więc oszacowanie górne i dolne na szukaną granicę

$$\mathbb{P}\left(X + c < x - \varepsilon\right) \leqslant \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(X_n + Y_n < x\right) \leqslant \mathbb{P}\left(X + c < x + \varepsilon\right).$$

Korzystając teraz z ciągłości drystrybuanty w $x - c$ przechodzimy z $\varepsilon \to 0^+$ otrzymując

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(X_n + Y_n < x\right) = \mathbb{P}\left(X + c < x\right),$$

zatem $X_n + Y_n \xrightarrow{d} X + c$.

Dowód dla iloczynu

Dla dowolnego $\varepsilon > 0$ doieramy $\delta > 0$ taką, by punkty $\pm\varepsilon/\delta$ były punktami ciągłości dystrybuanty F zmiennej losowej X, BSO załóżmy, że $Y_n \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$, wtedy

Dowód dla iloczynu

Dla dowolnego $\varepsilon > 0$ doieramy $\delta > 0$ taką, by punkty $\pm\varepsilon/\delta$ były punktami ciągłości dystrybuanty F zmiennej losowej X, BSO załóżmy, że $Y_n \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$, wtedy

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(|X_n Y_n| > \varepsilon\right) = &\ \mathbb{P}\left(|X_n Y_n| > \varepsilon, |Y_n| < \delta\right) \\ &+\mathbb{P}\left(|X_n Y_n| > \varepsilon, |Y_n| \geqslant \delta\right)\end{aligned}$$

Dowód dla iloczynu

Dla dowolnego $\varepsilon > 0$ doieramy $\delta > 0$ taką, by punkty $\pm\varepsilon/\delta$ były punktami ciągłości dystrybuanty F zmiennej losowej X, BSO załóżmy, że $Y_n \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$, wtedy

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(|X_n Y_n| > \varepsilon\right) = &\ \mathbb{P}\left(|X_n Y_n| > \varepsilon, |Y_n| < \delta\right) \\ &+ \mathbb{P}\left(|X_n Y_n| > \varepsilon, |Y_n| \geqslant \delta\right)\end{aligned}$$

Analogicznie jak wcześniej, ponieważ $Y_n \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$, to

$$\mathbb{P}\left(|X_n Y_n| > \varepsilon, |Y_n - 0| \geqslant \delta\right) \to 0.$$

Dowód cd.

Dodatkowo dla pierwszego zdarzenia $\{|X_n Y_n| > \varepsilon, |Y_n| < \delta\}$ zachodzi ciąg wynikań

$$|Y_n| < \delta \implies \frac{1}{|Y_n|} > \frac{1}{\delta} \implies \frac{|X_n Y_n|}{|Y_n|} > \frac{\varepsilon}{\delta} \implies |X_n| > \frac{\varepsilon}{\delta}$$

Dowód cd.

Dodatkowo dla pierwszego zdarzenia $\{|X_n Y_n| > \varepsilon, |Y_n| < \delta\}$ zachodzi ciąg wynikań

$$|Y_n| < \delta \implies \frac{1}{|Y_n|} > \frac{1}{\delta} \implies \frac{|X_n Y_n|}{|Y_n|} > \frac{\varepsilon}{\delta} \implies |X_n| > \frac{\varepsilon}{\delta}$$

Zatem

$$\mathbb{P}\left(|X_n Y_n| > \varepsilon, |Y_n| \geqslant \delta\right) \leqslant \mathbb{P}\left(|X_n| > \frac{\epsilon}{\delta}, |Y_n| \geqslant \delta\right) \leqslant \mathbb{P}\left(|X_n| > \frac{\epsilon}{\delta}\right)$$

Dowód cd.

Zbierając teraz wszystkie nierówności razem otrzymujemy

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(|X_n Y_n| > \varepsilon\right) \leqslant \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(|Y_n| \geqslant \delta\right) + \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(|X_n| > \frac{\varepsilon}{\delta}\right) = 0 + \mathbb{P}\left(|X| > \frac{\varepsilon}{\delta}\right).$$

Dowód cd.

Zbierając teraz wszystkie nierówności razem otrzymujemy

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(|X_n Y_n| > \varepsilon\right) \leqslant \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(|Y_n| \geqslant \delta\right) + \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(|X_n| > \frac{\varepsilon}{\delta}\right) = 0 + \mathbb{P}\left(|X| > \frac{\varepsilon}{\delta}\right).$$

Zmniejszając teraz $\delta \to 0^+$ otrzymujemy

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(|X_n Y_n| > \varepsilon\right) \leqslant \mathbb{P}\left(|X| = \infty\right) = 0$$

Więc $X_n Y_n \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$, czyli w szczególności $X_n Y_n \xrightarrow{d} 0 \cdot X$.

Dowód cd.

Zbierając teraz wszystkie nierówności razem otrzymujemy

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(|X_n Y_n| > \varepsilon\right) \leqslant \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(|Y_n| \geqslant \delta\right) + \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(|X_n| > \frac{\varepsilon}{\delta}\right) = 0 + \mathbb{P}\left(|X| > \frac{\varepsilon}{\delta}\right).$$

Zmniejszając teraz $\delta \to 0^+$ otrzymujemy

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(|X_n Y_n| > \varepsilon\right) \leqslant \mathbb{P}\left(|X| = \infty\right) = 0$$

Więc $X_n Y_n \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$, czyli w szczególności $X_n Y_n \xrightarrow{d} 0 \cdot X$. W ogólnym przypadku, gdy $Y_n \xrightarrow{\mathbb{P}} c$ rozpatrujemy Z_n takie, że $Y_n = Z_n + c$ i wtedy $X_n Y_n = X_n Z_n + cX_n$. Zmienna $X_n Z_n \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$, a $cX_n \xrightarrow{d} cX$ i stosujemy udowodnione już twierdzenie Słuckiego dla sumy.

Przykłady zastosowania

Rozpatrzmy szereg stacjonarny X_t dany wzorem

$$X_t - \mu = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j Z_{t-j}, \quad \text{gdzie} \;\; Z_t \sim IID(0, \sigma^2),$$

gdzie $\sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j^2 j < \infty$. Wówczas dla $h \in \{1, 2, \dots\}$

$$\hat{\boldsymbol{\rho}}(h) \sim AN(\boldsymbol{\rho}(h), n^{-1} W),$$

gdzie

- $\hat{\boldsymbol{\rho}}(h) = [\hat{\rho}(1), \hat{\rho}(2), \dots, \hat{\rho}(h)]$, $\hat{\rho}(h)$ – estymator funkcji autokorelacji
- $\boldsymbol{\rho}(h) = [\rho(1), \rho(2), \dots, \rho(h)]$, $\rho(h)$ – funkcja autokorelacji
- W– macierz kowariancji, której element (i, j) określa tzw. *wzór Bartletta*.

Przykłady zastosowania cd.

Dodatkowo niech $\hat{\gamma}(h)$ będzie estymatorem funkcji autokowariancji oraz $\hat{\sigma}^2 = \hat{\gamma}(0)$ będzie zbieżna wg. $\mathbb{P}$ do wariancji σ^2 szeregu X_t. Przekształcając wzór

$$\hat{\rho}(h) = \frac{\hat{\gamma}(h)}{\hat{\gamma}(0)}$$

możemy otrzymać wzór na $\hat{\gamma}(h)$ w postaci

$$\hat{\gamma}(h) = \hat{\sigma}^2 \hat{\rho}(h)$$

Przykłady zastosowania cd.

Korzystając teraz z twierdzenia słuckiego dla iloczynu ciągów otrzymujemy

$$\hat{\gamma}(h) \sim \sigma^2 \hat{\boldsymbol{\rho}}(h) \sim AN\left(\sigma^2 \boldsymbol{\rho}(h), \frac{\sigma^4}{n} W\right) \sim AN\left(\boldsymbol{\gamma}(h), \frac{\sigma^4}{n} W\right).$$

Przykłady zastosowania cd.

Korzystając teraz z twierdzenia słuckiego dla iloczynu ciągów otrzymujemy

$$\hat{\gamma}(h) \sim \sigma^2 \hat{\boldsymbol{\rho}}(h) \sim AN\left(\sigma^2 \boldsymbol{\rho}(h), \frac{\sigma^4}{n} W\right) \sim AN\left(\boldsymbol{\gamma}(h), \frac{\sigma^4}{n} W\right).$$

W szczególnym przypadku, gdy X_t są niezależne, to

$$\gamma(h) \sim AN\left(0, \frac{\sigma^4}{n}\right).$$