



LOKALIZACJA PUNKTU W PRZESTRZENI 2D

METODĄ
TRAPEZOWĄ

Kopiec Kacper
Zwonek Aleksandra

OPIS PROBLEMU

Płaszczyzna S jest podzielona na poligony, czyli jest planarana tzn. krawędzie się nie przecinają. Naszym zadaniem jest takie przetworzenie tej płaszczyzny aby w sposób optymalny być w stanie określić w jakim poligonie znajduje się dany punkt.

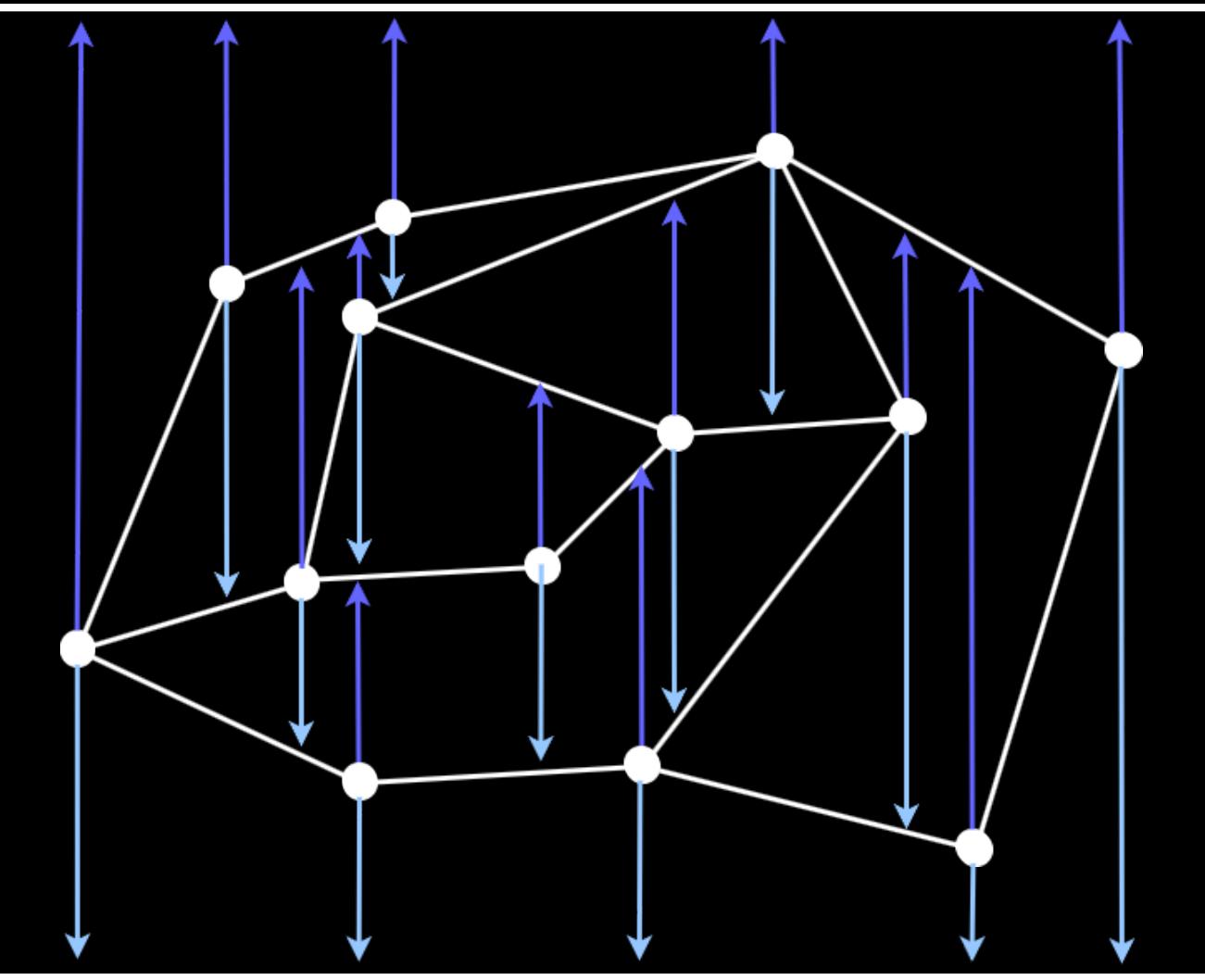
PRZYKŁAD PROBLEMU

Mając współrzędne geograficzne danej osoby należy określić w jakim państwie aktualnie się znajduje.



MAPA TRAPEZOWA

Mapa trapezowa to podział obszaru na trapezy lub zdegradowane trapezy, czyli trójkąty. Tworzy się ją poprzez prowadzenie prostych linii od każdego punktu w góre i w dół, aż do momentu, gdy napotkają inną linię.



POŁOŻENIE OGÓLNE ODCINKÓW

Reprezentacja w postaci zbioru odcinków:

$S = \{S_1, S_2, S_3, S_4, \dots, S_n\}$ spełniające warunki:



BRAK PRZECIĘĆ

Odcinki nie przecinają się w punktach, które nie są wierzchołkami.

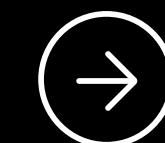


Unikatowe współrzędne x-owe

Wierzchołki żadnych dwóch odcinków z S nie mają takiej samej współrzędnej x-owej, chyba że dzielą wierzchołek.



Brak pionowych odcinków



MAPA TRAPEZOWA ZE ZBIORU S:

LICZBA BOKÓW



Każdy element ma dwa boki poziome oraz dwa lub jeden bok pionowy (w przypadku zdegenerowanym).



OGRANICZENIA

Mapa trapezowa zawiera co najwyżej $6n + 4$ wierzchołków oraz $3n + 1$ trapezów.

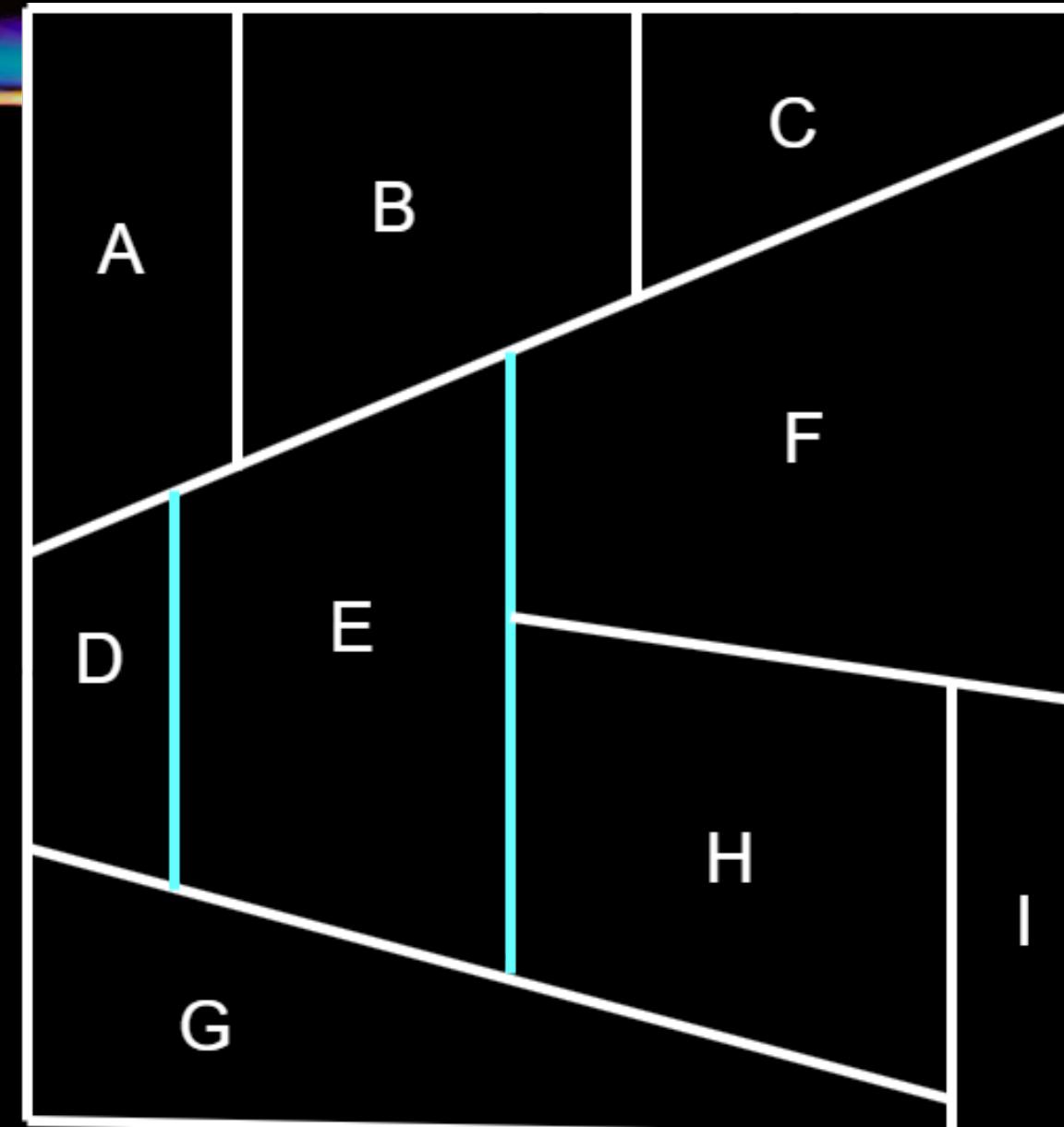
SĄSIEDZIEDZTWO

KRYTERIUM SĄSIADA

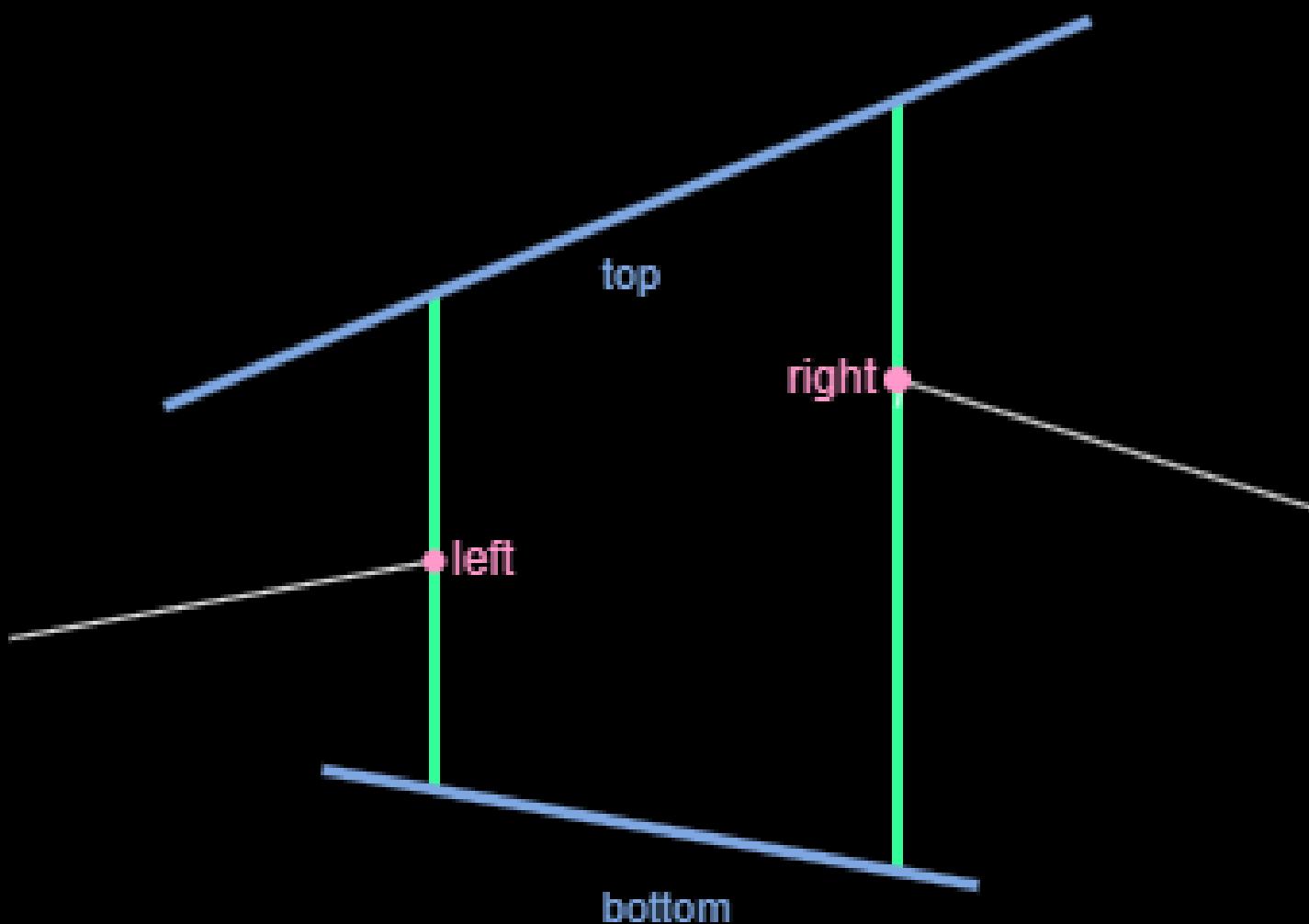
Dwa trapezy są sąsiadami \Leftrightarrow Dwa trapezy mają wspólną krawędź pionową.

LICZBA SĄSIADÓW

Każdy trapez ma co najwyżej 4 sąsiadów, wynika to z tego faktu, że jest to zbiór odcinków o położeniu ogólnym, gdyby tak nie było to tych sąsiadów byłoby o wiele więcej.



STRUKTURA UTRZYMUJĄCA TRAPEZ



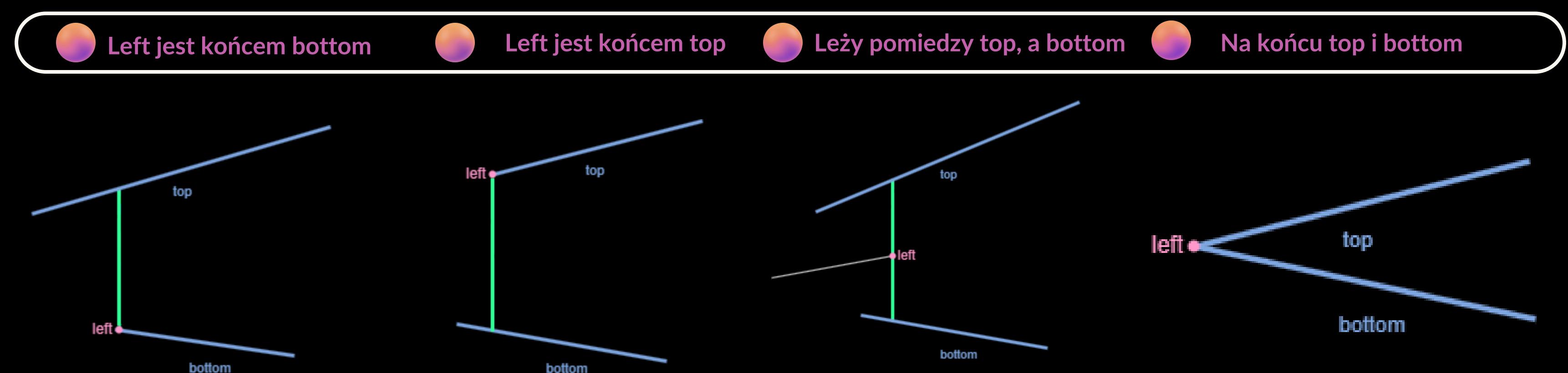
TRAPEZ DEFINIOWANY JEST PRZEZ:

Każdy trapez posiada odcinki **top** oraz **bottom**, czyli odcinki należące do zbioru S, które w całości zawierają w sobie górny i dolny bok trapezu.

Dodatkowo utrzymuje punkt **left**, czyli punkt leżący na lewym odcinku pionowym trapezu oraz **right** analogicznie, ale na prawym.

POZYCJE LEFT I RIGHT WZGLEDEM ODCINKÓW

Dla left jak i right są 4 możliwe przypadki w jaki sposób ułożone są względem top i bottom (są one względem siebie analogiczne)



Należy poprowadzić prostą pionową z punktu left do punktu, który należy do top(bottom) o współrzędnej x-takiej jak left

Przeprowadzamy odcinek pionowy przechodzący mający końce w top i bottom

Nie prowadzimy prostej

RANDOMIZOWANY ALGORYTM PRZYROSTOWY

Algorytm ten buduje mapę trapezową zbioru S zawierającego n odcinków w położeniu ogólnym. Dodatkowo tworzy strukturę, w której można tworzyć zapytania w jakim trapezie znajduje się punkt.

Przyjmuje:	zbiór odcinków: $S = \{S_1, S_2, S_3, S_4, \dots, S_n\}$ spełniające warunki:
Zwraca:	Mape Trapezoidowa oraz Strukturę przeszukiwań D
Złożoność:	Tworzenie mapy: $O(n)$ Zapytanie w jakim trapezie leży dany punkt: $O(\log n)$

W tym algorytmie odcinki z S dodawane są w losowej kolejności. Używamy do tego losowej permutacji zbioru. Z racji, że jest to algorytm randomizowany mówimy o złożoności oczekiwanej.

OPIS ALGORYTMU:

1. Określenie Ograniczenia Płaszczyzny:

Tworzymy prostokątną ramkę, która zawiera wszystkie odcinki ze zbioru S.

2. Tworzenie losowej permutacji S' zbioru S:

4. Dla każdego odcinka ze zbioru S' :

- znajdujemy wszystkie trapezy przecinane przez ten odcinek, a następnie usuwamy je z Trapezów i dodajemy nowo stworzone trapezy. Usuwamy wszystkie liście, które odpowiadają usuniętym trapezom, a następnie dodajemy nowe trapezy wraz ze zmienionymi węzłami wewnętrznymi.

STRUKTURA PRZESZUKIWAŃ

JEST TO ACYKLIKiczny
SKIEROWANY GRAF (DAG)

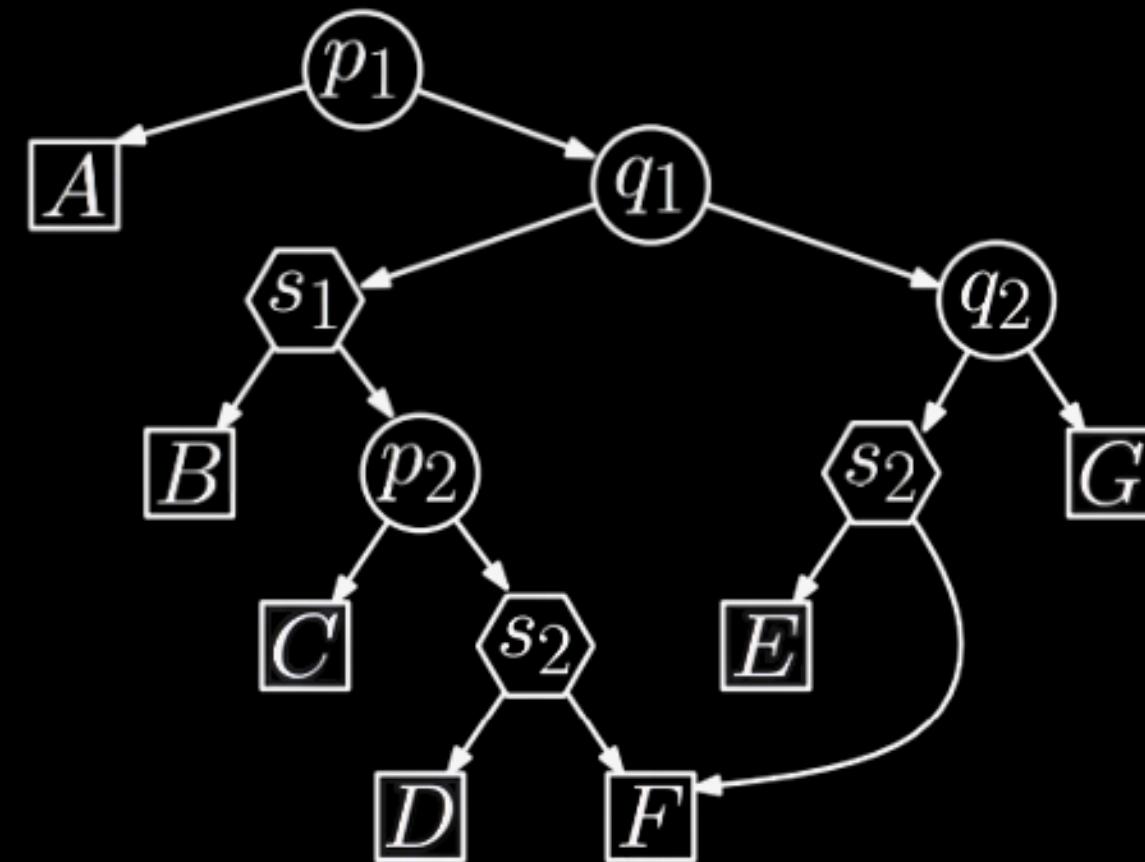
- z każdego węzła wychodzą 0 lub 2 krawędzie.

LIŚCIE
brak

WEWNĘTRZNE
dwie

LIŚCIE TRZYMAJĄ INFORMACJE O
POSZCZEGÓLNYCH TRAPEZACH.

PRZYKŁAD STRUKTURY



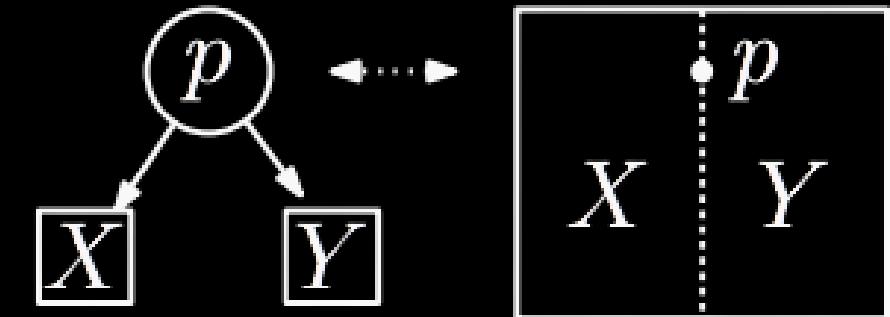
RODZAJE WĘZŁÓW WEWNĘTRZNYCH



X-WĘZEŁ

Zawiera punkt, czyli wierzchołek początkowy lub końcowy danego odcinka

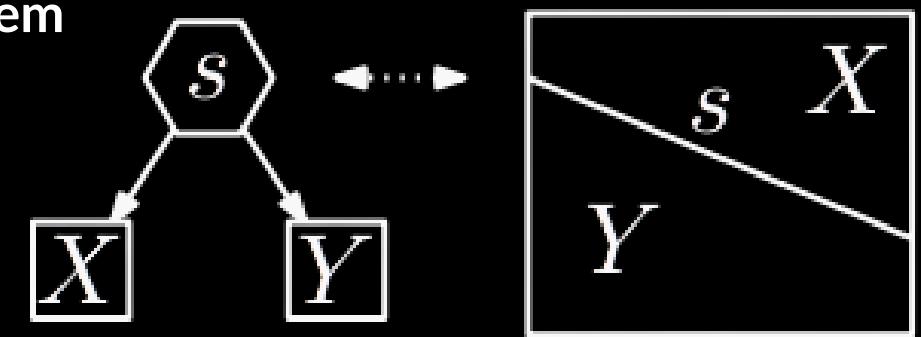
- dwójka dzieci odpowiada leżeniu po prawej i po lewej stronie względem prostej pionowej poprowadzonej przez p.



Y-WĘZEŁ

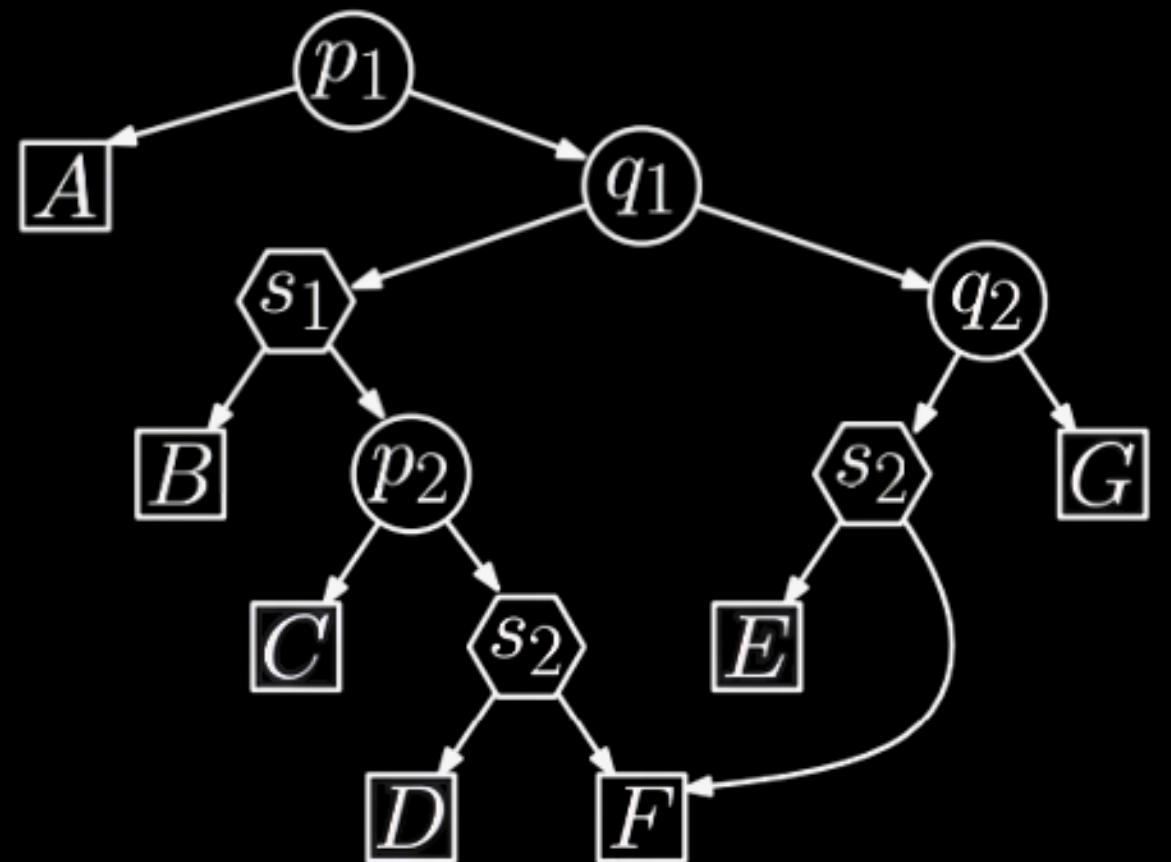
Zawiera odcinek

- dwójka dzieci odpowiada leżeniu nad czy pod względem odcinka s.



ZNAJDYWANIE PUNKTU

MAJĄC GOTOWĄ STRUKTURĘ PRZESZUKIWAŃ MOŻEMY W OCZEKIWANYM LOGN ZNALEŹĆ, W JAKIM TRAPEZIE ZNAJDUJE SIĘ PUNKT.



Przechodząc przez kolejne węzły określamy położenie naszego szukanego punktu względem aktualnego węzła.

ALGORYTM DO WYSZUKIWANIA POZYCJI PUNKTU

Dane: punkt p oraz mapa trapezoidalna i struktura przeszukiwań

curr := korzeń naszej struktury

Dopóki curr nie jest trapezoidem:

Jeżeli cur jest punktem:

 curr := curr.left

W przeciwnym wypadku:

 curr := curr.right

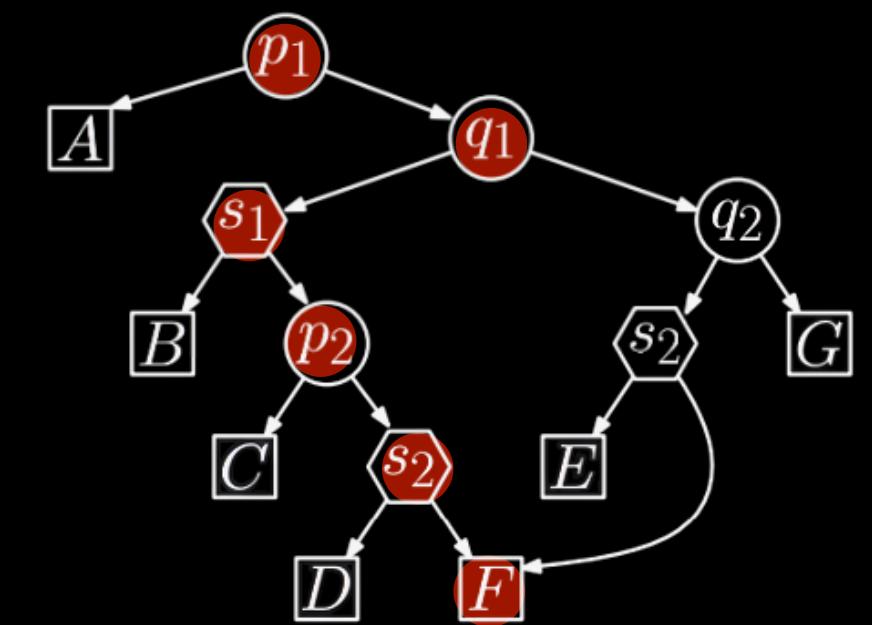
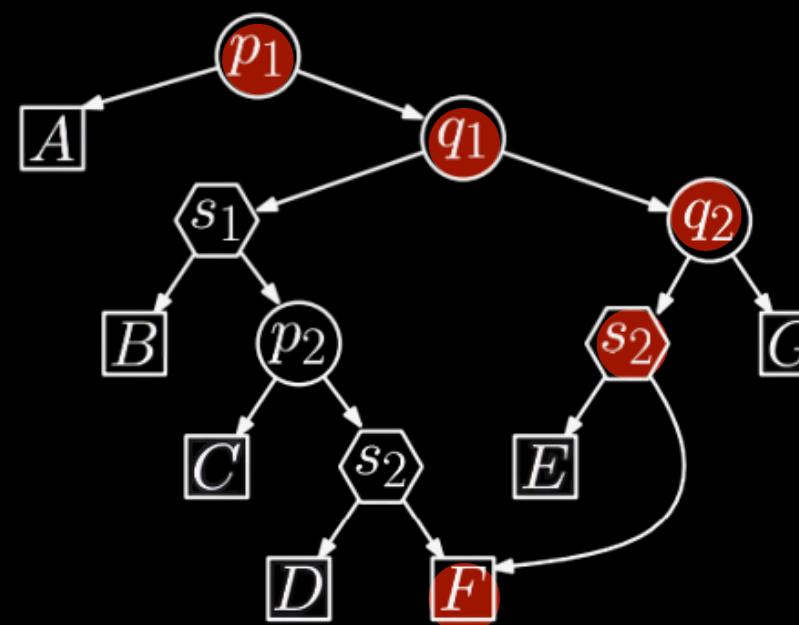
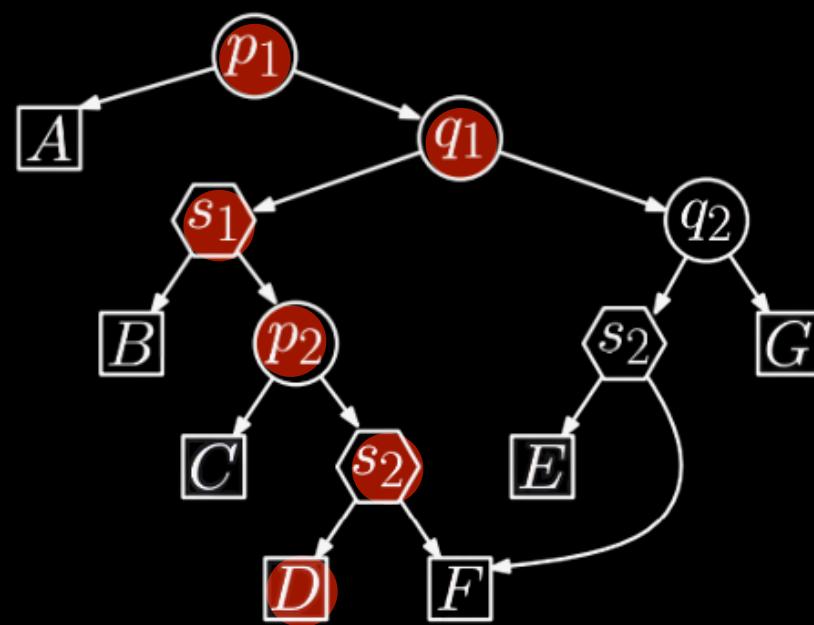
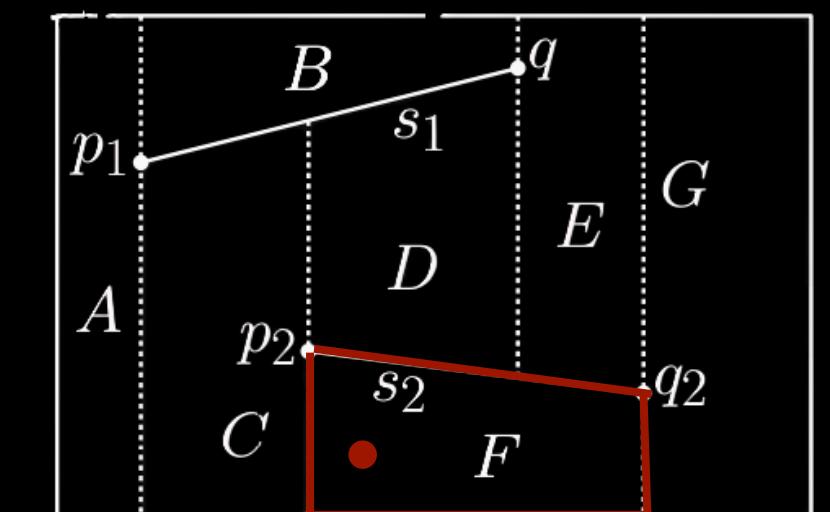
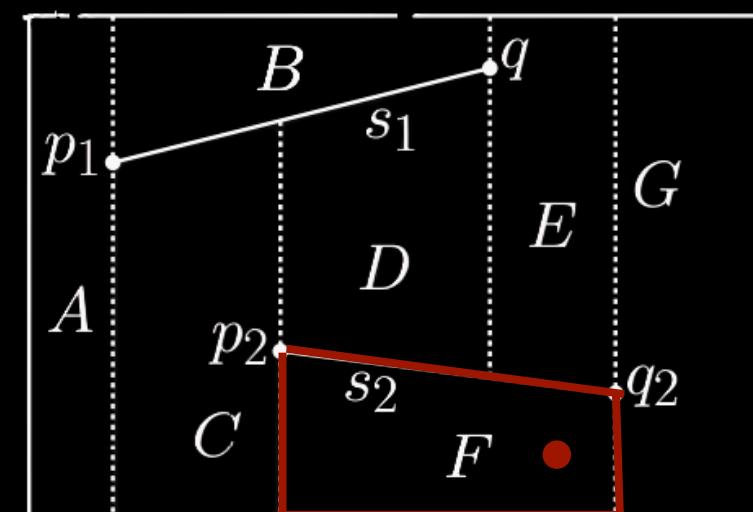
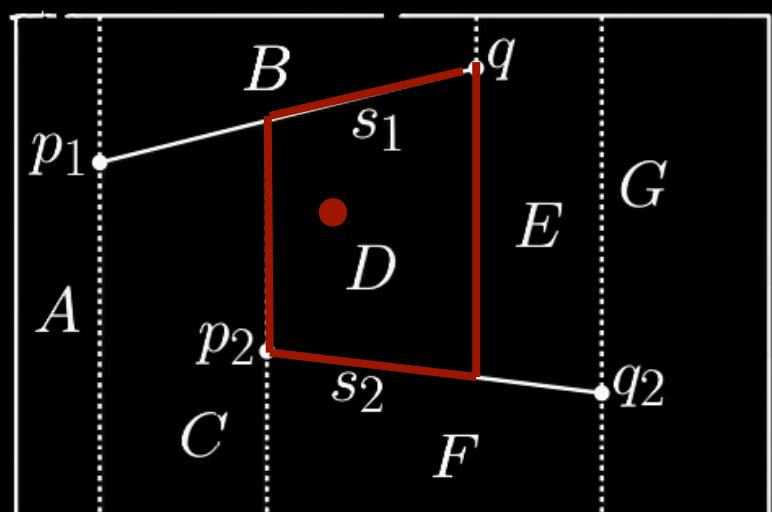
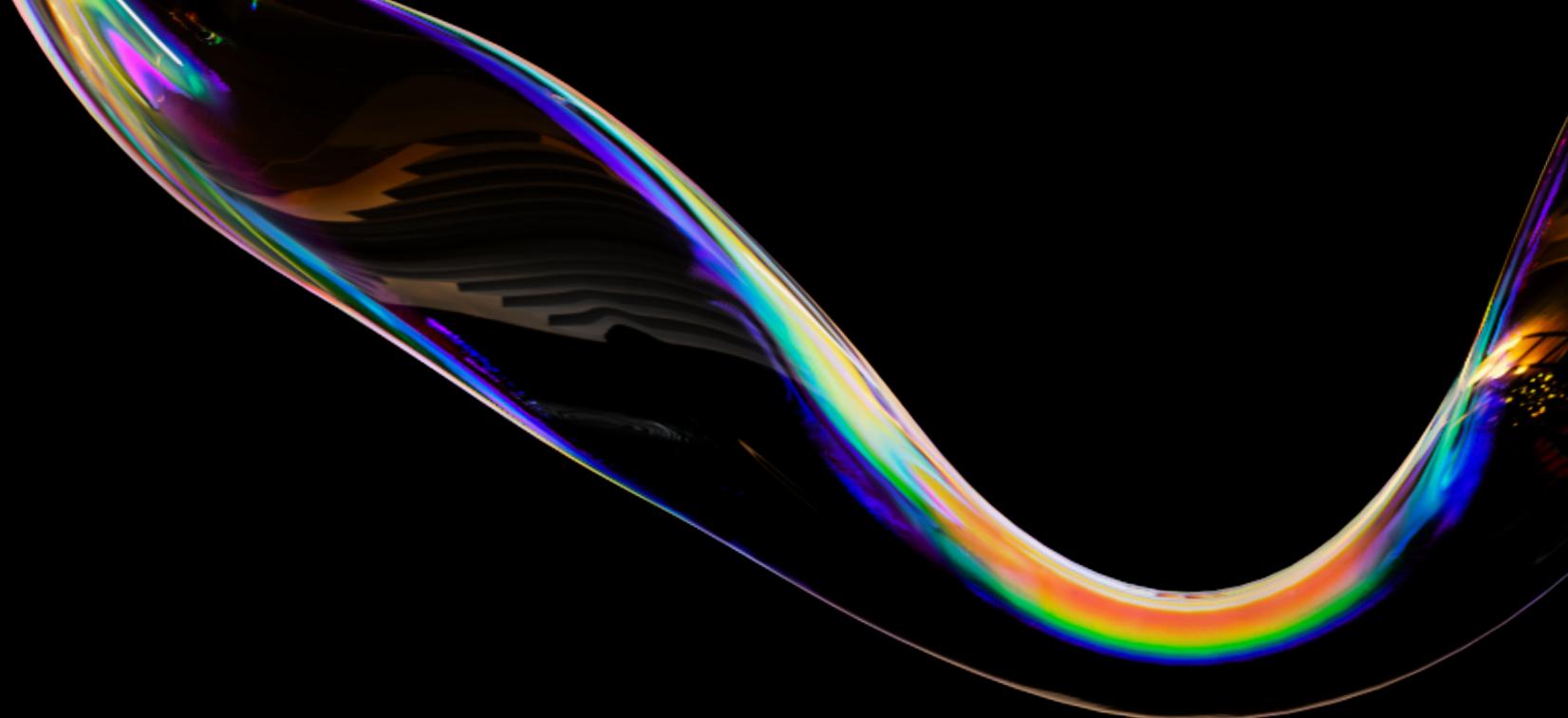
Zwracamy curr

Szukane: lokalizacja punktu p na mapie

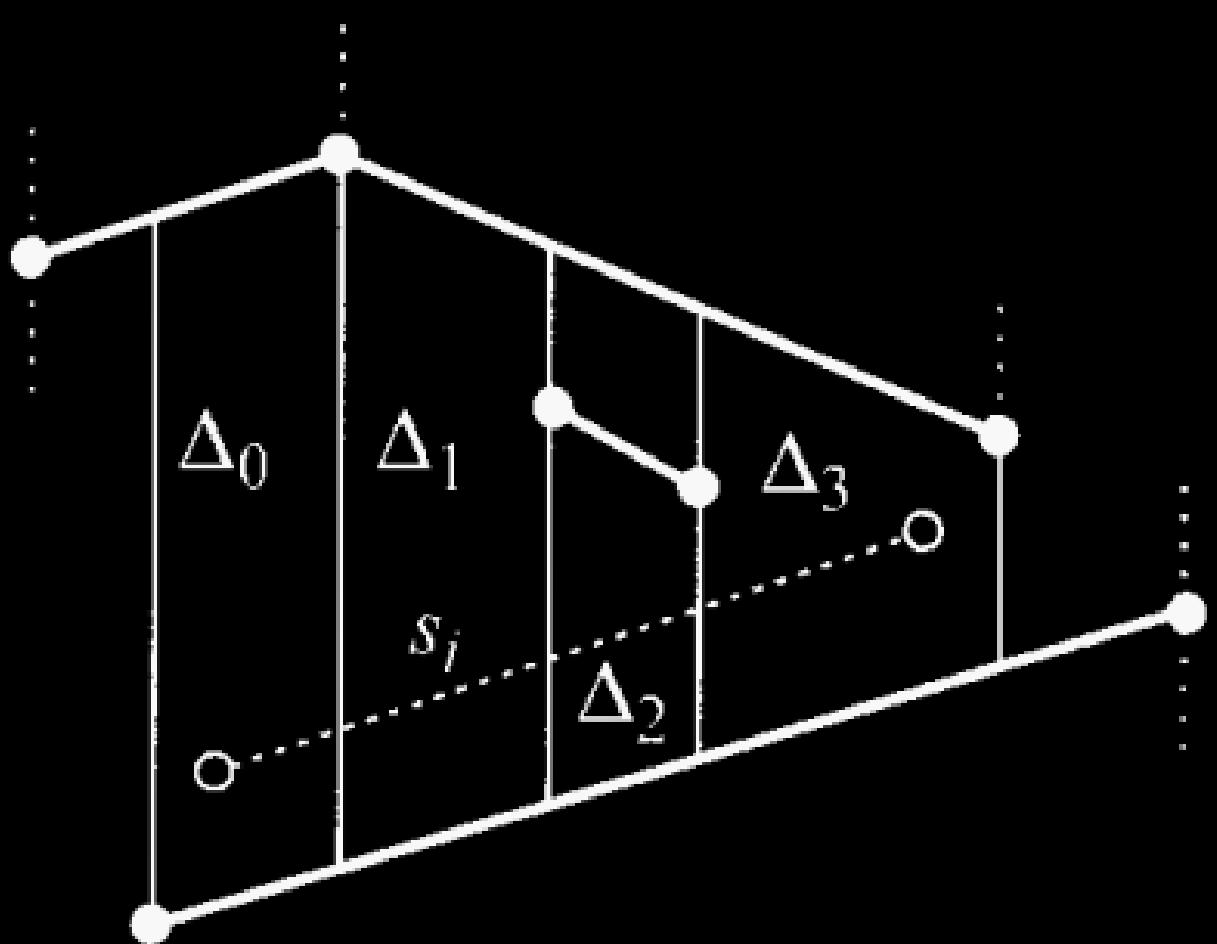
Złożoność oczekiwana: logn



SZUKANY PUNKT I ODPOWIADAJĄCA ŚCIEŻKA



WYZNACZENIE TRAPEZÓW PRZECINANYCH PRZEZ DANY ODCINEK



- ODCINEK BĘDZIE PRZECINAĆ TYLKO TRAPEZY, KTÓRE ZE SOBĄ SĄSIADUJĄ.
- Z MAPY TRAPEZOIDALNEJ JESTEŚMY W STANIE ZNALEŹĆ WSZYSTKIE SĄSIADUJĄCE TRAPEZY.
- KAŻDY TRAPEZ MA MAKSYMALNIE 4 SĄSIADÓW.

ALGORYTM DO ZNALEZIENIA TRAPEZÓW PRZECIĘTYCH

1. Znajdowanie pierwszego trapezu T_1 :

Korzystamy ze struktury przeszukiwań, aby znaleźć pierwszy trapez T_1 , w którym leży lewy punkt odcinka.

2. Przechodzenie przez kolejne trapezy:

Poruszamy się po trapezach przecinanych przez odcinek, przechodząc do lewych sąsiadów kolejnych trapezów.

3. Kontynuacja, dopóki:

Przechodzenie trwa, dopóki współrzędna x punktu p jest mniejsza niż współrzędna x prawego końca odcinka s .

4. Zmiana trapezu na sąsiada:

- Jeśli prawy wierzchołek obecnego trapezu znajduje się nad odcinkiem s , przechodzimy do **dolnego prawego** sąsiada trapezu.
- W przeciwnym przypadku przechodzimy do **górнего prawego** sąsiada.

W obu przypadkach przesuwamy punkt p na prawy koniec aktualnie rozpatrywanego trapezu.

DODAWANIE KOLEJNYCH ODCINKÓW

ZMIANA W STRUKTURZE NASTĘPUJE PO DODANIU NOWEGO ODCINKA

Usunięte zostają wszystkie trapezoidy, przez które przechodzi nowy odcinek s, a następnie są zamienione na nowy zbiór trapezoidów.

Dla każdego trapezu, zmienianego mogą zachodzić trzy przypadki.
W jaki sposób odcinek przecina trapez.

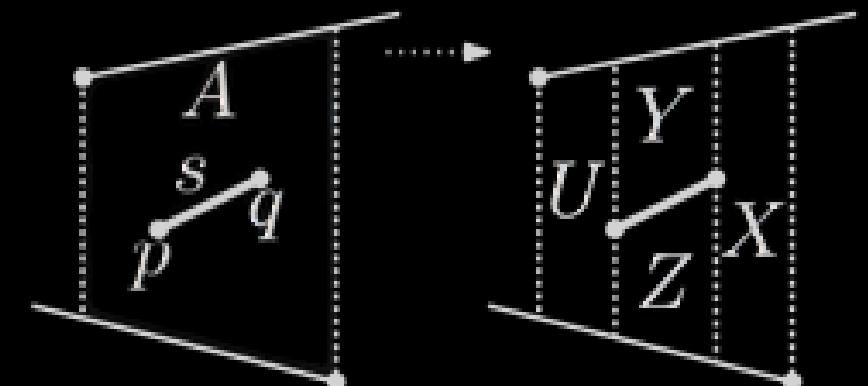
ODCINEK ZNAJDUJE SIĘ CAŁKOWICIE W TRAPEZIE

W takim przypadku usuwamy dany trapez i powstają cztery nowe

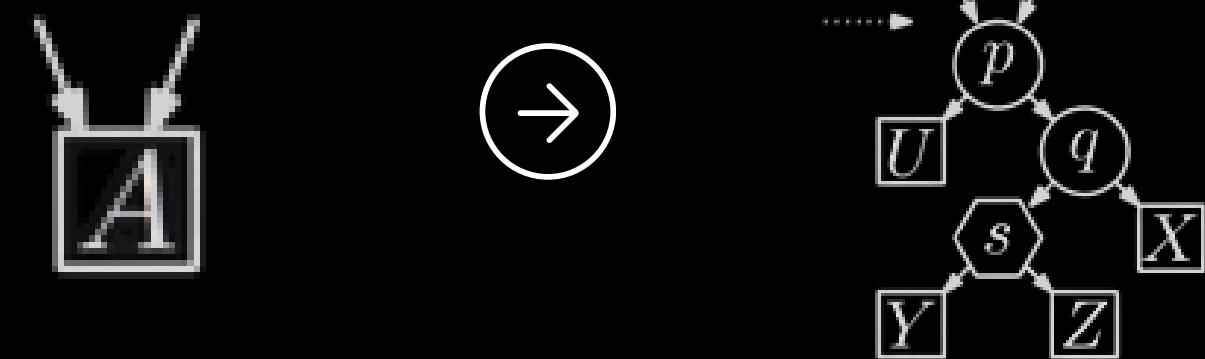
Ze struktury przeszukiwań usuwamy trapez, który zostaje zastąpiony przez:

1. Wstawienie dwóch węzłów x-owych oraz jednego węzła y-owego.
2. Dodanie czterech nowych liści, reprezentujących nowe trapezy.

MAPA TRAPEZOWA



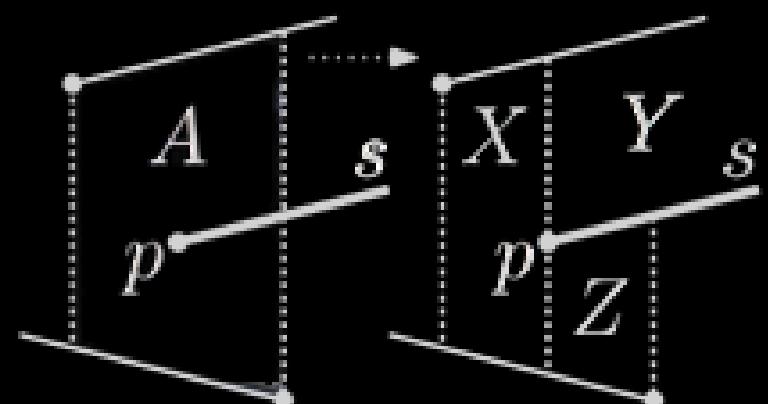
STRUKTURA PRZESZUKIWAŃ



JEDEN KONIEC ODCINKA LEŻY W TRAPEZIE

W takim przypadku usuwamy dany trapez i powstają trzy nowe

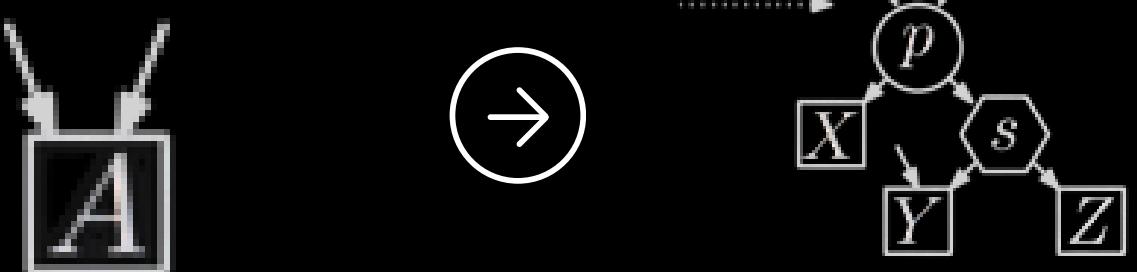
MAPA TRAPEZOWA



STRUKTURA PRZESZUKIWAN

Ze struktury przeszukiwań usuwamy trapez, który zostaje zastąpiony przez:

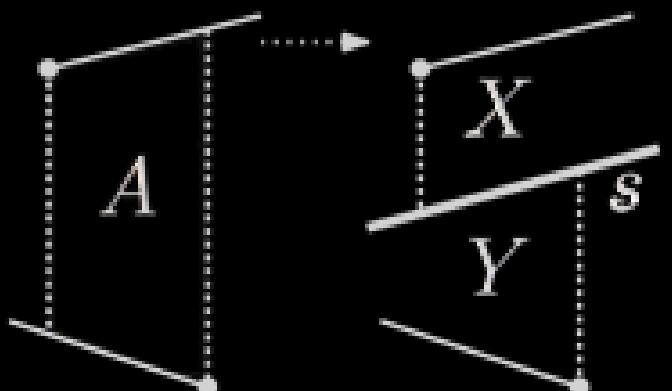
1. Wstawienie jednego węzła x-owego oraz jednego węzła y-owego.
2. Dodanie trzech nowych liści, reprezentujących nowe trapezy.



ŻADEN KONIEC ODCINKA NIE LEŻY W TRAPEZIE

W takim przypadku usuwamy dany trapez i powstają dwa nowe nad i pod odcinkiem

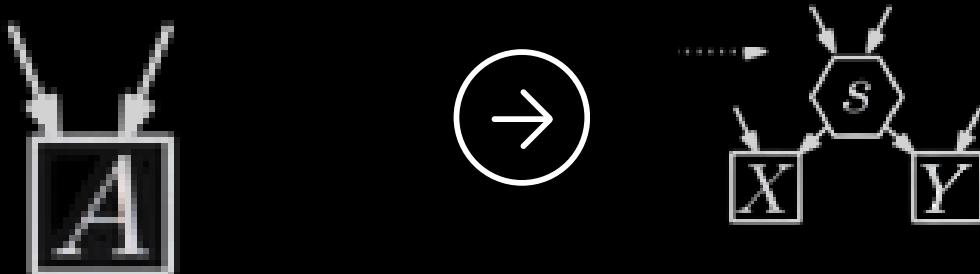
MAPA TRAPEZOWA



STRUKTURA PRZESZUKIWAN

Ze struktury przeszukiwań usuwamy trapez, który zostaje zastąpiony przez:

1. Wstawienie jednego węzła y-owego.
2. Dodanie dwóch nowych liści, reprezentujących nowe trapezy.



DZIEKUJEMY

za uwagę!

Kopiec Kacper
Zwonek Aleksandra



ŽRÓDŁA:

Computational Geometry – Algorithms and Applications

CMSC 754: Lecture 9 [Trapezoidal Maps and Planar Point Location]

Point Location in Trapezoidal Maps, Claudio Mirolo, Dip. di Scienze Matematiche, Informatiche e Fisiche Università di Udine, via delle Scienze 206 – Udine

Trapezoidal Map library – a data structure for fast point location queries, micycl1, github

Geometria obliczeniowa Wykład 13 Algorytmy randomizowane

Point Location and Trapezoidal Map | Computational Geometry – Lecture 06