Kacper Puda s188625

Metody Numeryczne Projekt 2
Aproksymacja profilu wysokościowego

Wstęp

Celem projektu jest implementacja dwóch metod aproksymacji interpolacyjnej:
- metodę wykorzystującą wielomian interpolacyjny Lagrange'a,
- metodę wykorzystującą funkcje sklejane trzeciego stopnia.

Interpolacja jest techniką matematyczną wykorzystywaną do przybliżania nieznanych wartości danych na podstawie dostępnych pomiarów lub punktów. Polega ona na konstrukcji funkcji, która przechodzi przez te punkty i umożliwia oszacowanie wartości dla innych argumentów znajdujących się pomiędzy danymi punktami. Interpolacja jest szeroko stosowana w wielu dziedzinach, takich jak nauki przyrodnicze, inżynieria, ekonomia czy grafika komputerowa.

Interpolacja **Lagrange'a** jest jedną z najpopularniejszych metod interpolacji. Opiera się ona na konstrukcji wielomianu, który przechodzi przez zadane punkty danych. Wielomian ten jest tworzony za pomocą wzoru Lagrange'a:

$$\phi_i(x) = \prod_{j=1, j\neq i}^{n+1} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}$$

który uwzględnia wartości funkcji dla każdego punktu danych oraz odpowiednie współczynniki. Interpolacja Lagrange'a ma zaletę prostoty implementacji i zrozumienia, jednak dla większej liczby punktów danych może być czasochłonna obliczeniowo

Interpolacja **funkcjami sklejanymi trzeciego stopnia**, to bardziej zaawansowana technika interpolacji. W tej metodzie dane są dzielone na mniejsze przedziały, a następnie dla każdego z tych przedziałów jest konstruowany wielomian 3. stopnia:

$$S_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2 + d_i(x - x_i)^3$$

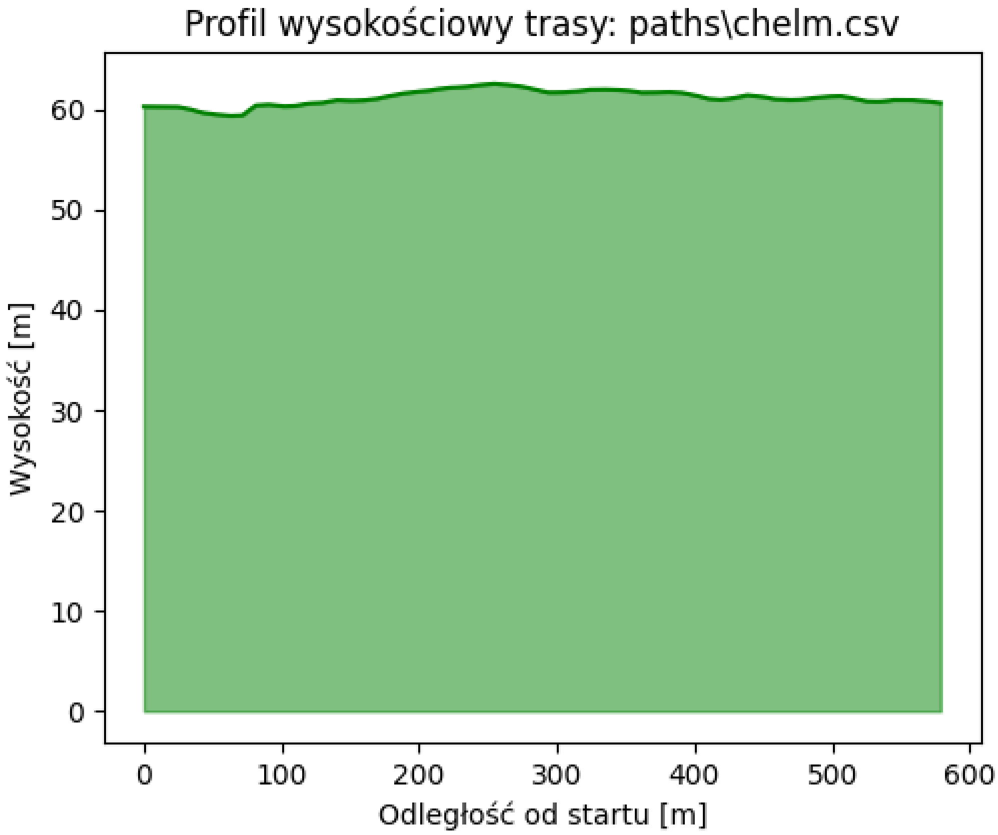
który najlepiej pasuje do danych. Wielomiany te są następnie łączone w sposób ciągły, tworząc gładką krzywą. Interpolacja splajnami 3. stopnia umożliwia elastyczne dostosowanie krzywej do danych, zapewniając jednocześnie gładkość przejść pomiędzy segmentami. Jest często stosowana w grafice komputerowej, animacji czy projektowaniu krzywych.

Do realizacji projektu wykorzystałem język ***python***, z wykorzystaniem bibliotek:
- `csv, glob` - do wczytywania danych z plików csv
- `matplotlib` - do stworzenia wykresu
- `numpy` - do działań matematycznych, określania punktów węzłowych oraz obliczania układu równań

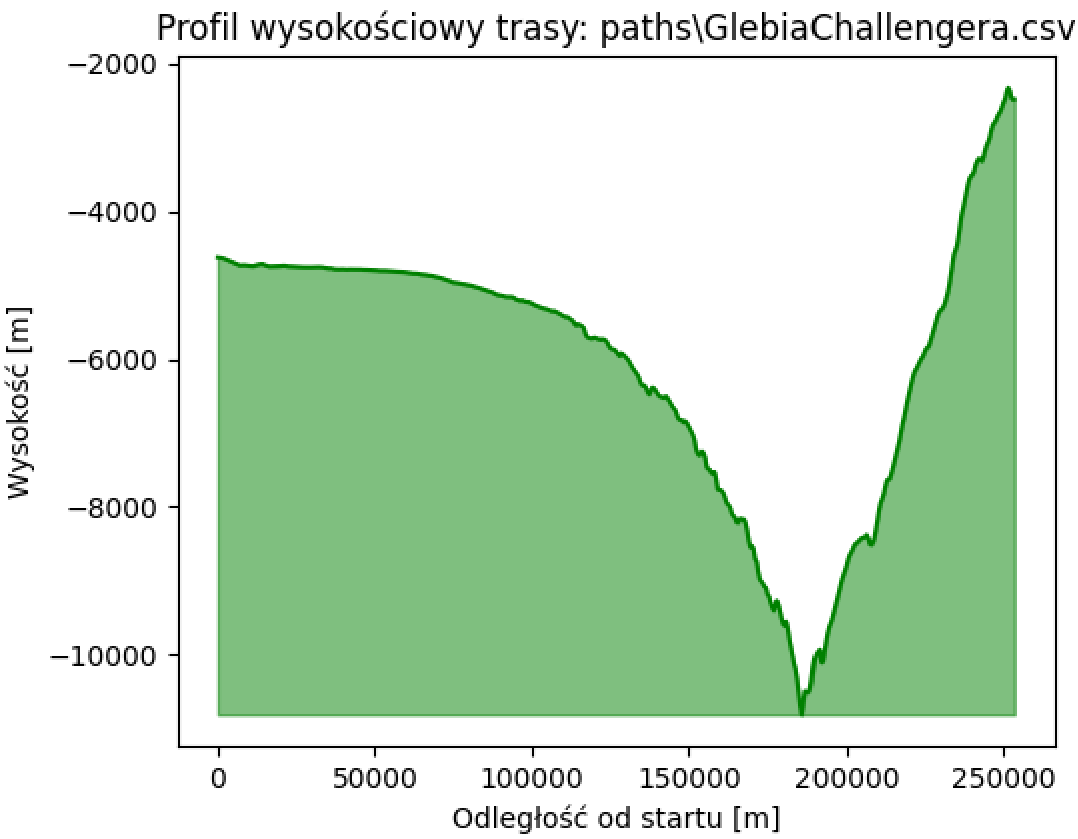
Wykorzystane profile wysokościowe

W celu realizacji projektu wykorzystałem załączone w projekcie profile wysokościowe:

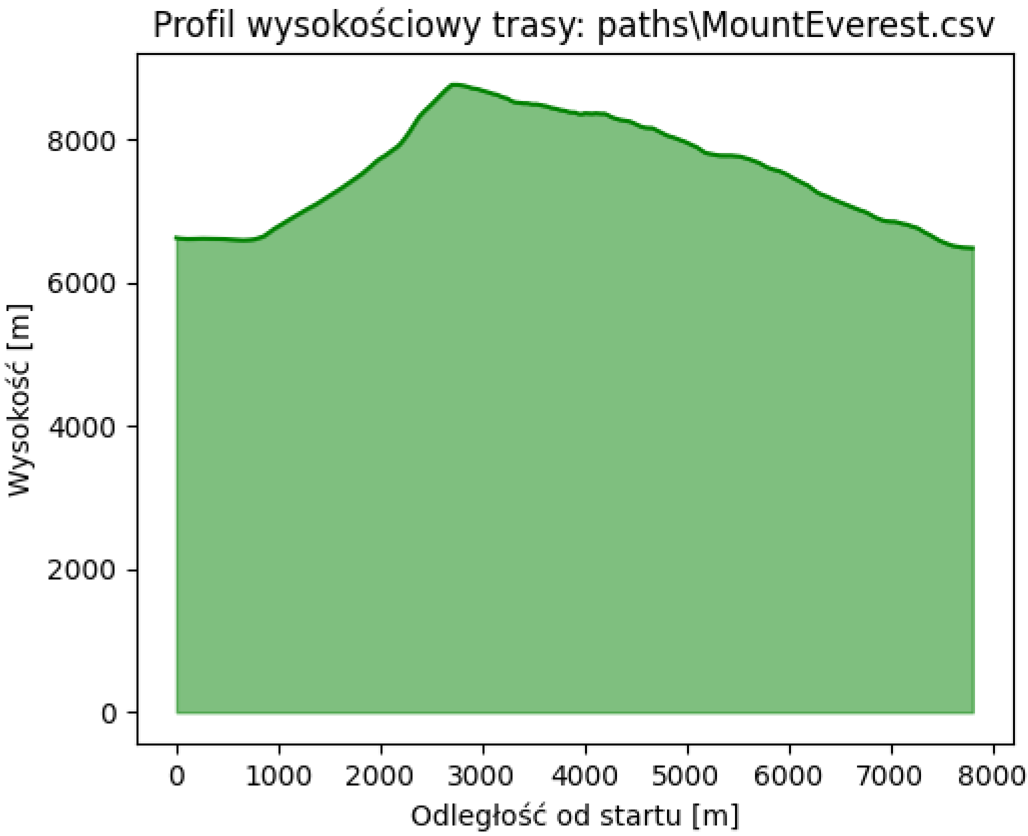
- **Chełm** - profil płaski bez dużych skoków wysokości,



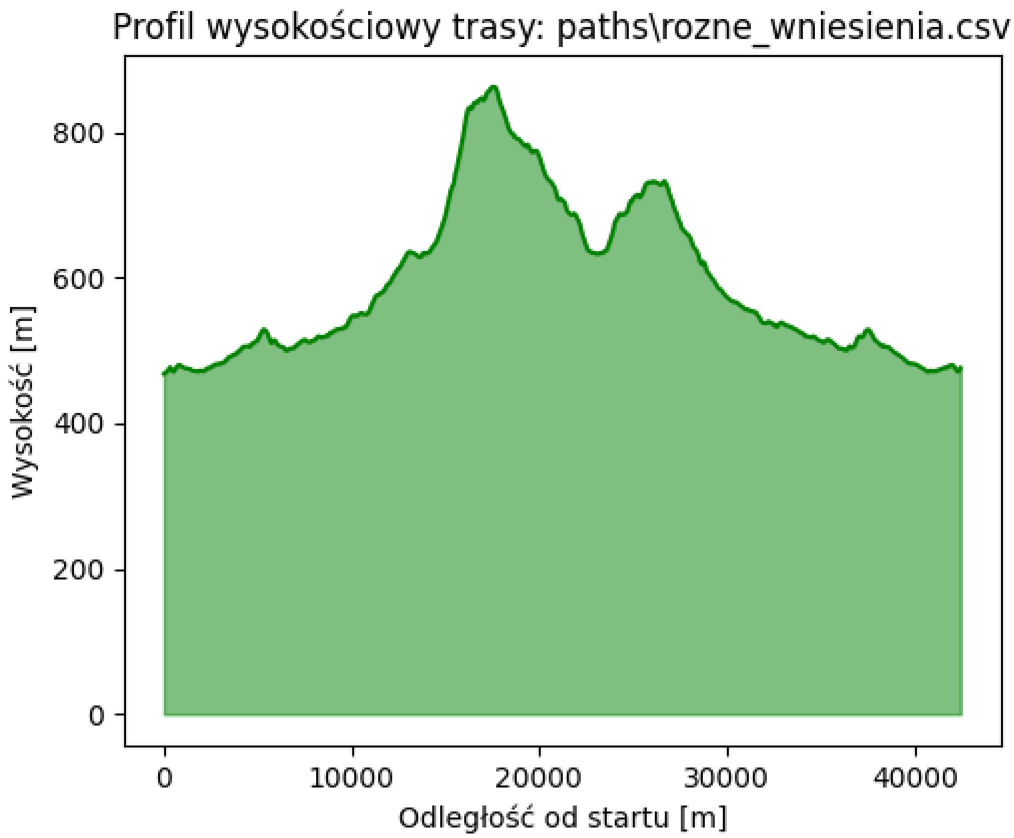
- **Głębia Challengera** - profil z wyraźnym dużym spadkiem wysokości,



- **Mount Everest** - profil z wyraźnym dużym wzniesieniem,



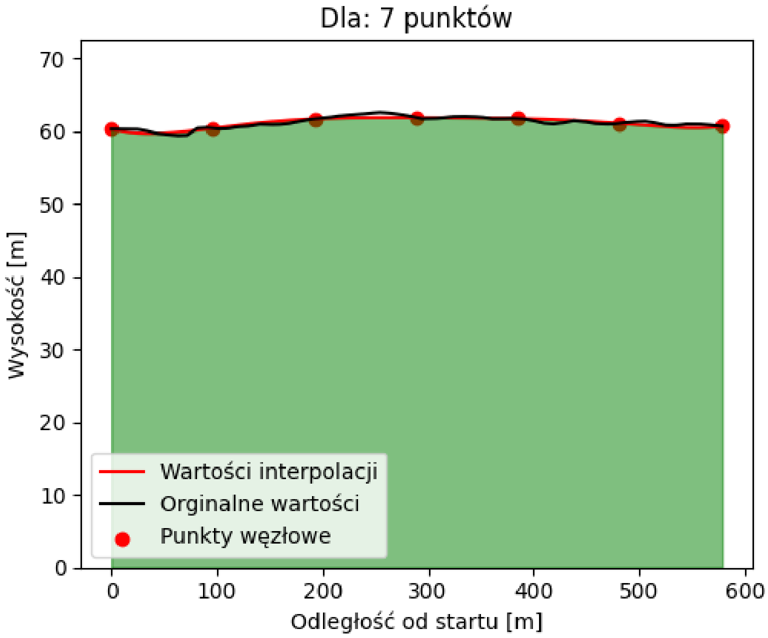
- **Różne wzniesienia** - profil z dwoma wyraźnymi stromymi wzniesieniami.



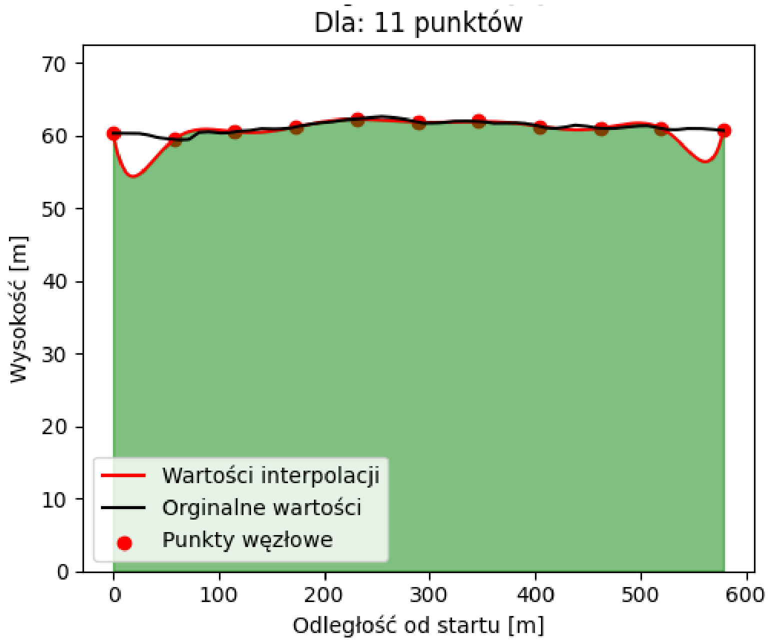
Interpolacja Lagrange’a:

Chełm

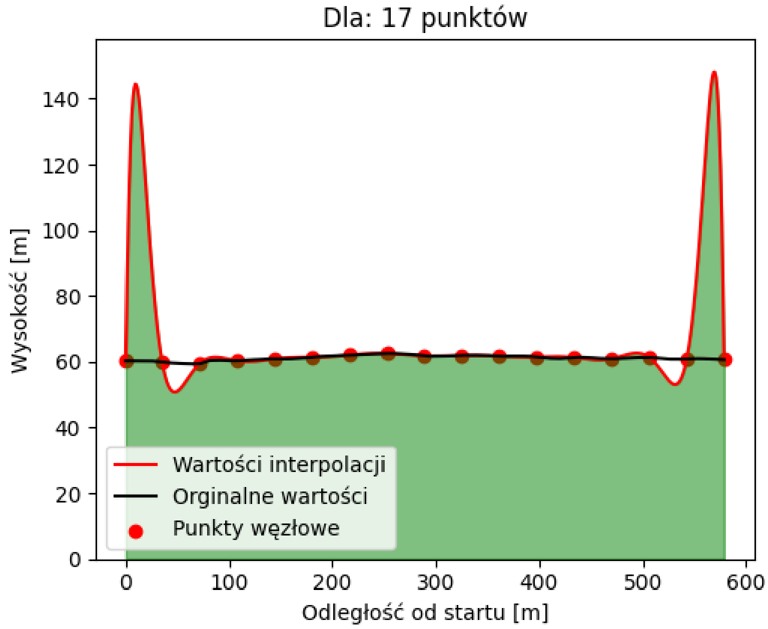
Równomierne rozłożenie punktów węzłowych



Jak widać dla takiego płaskiego terenu i 7 punktów węzłowych interpolacja Lagrange’a poradziła sobie dobrze, jednak nie idealnie. Spróbujmy zatem zwiększyć ilość punktów węzłowych.



Da się zauważyć, że dla większej ilości punktów węzłowych (11), wartości środkowe są dokładniejsze, jednak na krańcach występuje duże zmniejszenie dokładności.

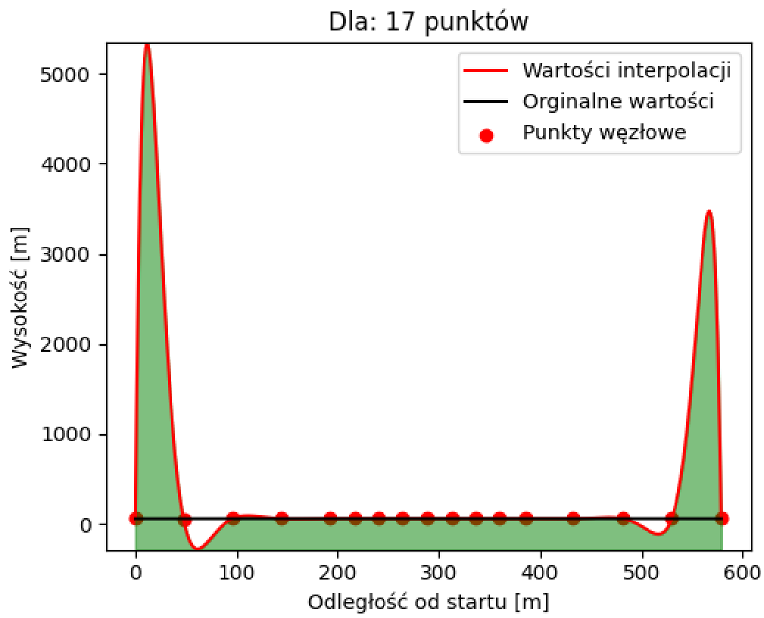


Jak widać im większa ilość punktów węzłowych tym większe oscylacje na krańcach przedziałów, jest to tak zwany **efekt Rungego.**

Nierównomierne rozłożenie punktów węzłowych

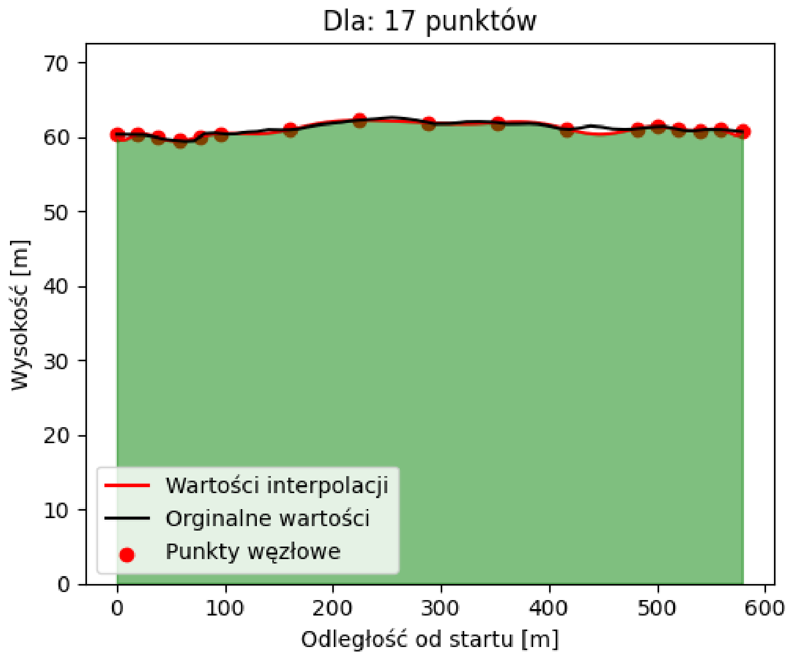
Przy równomiernym rozkładzie krańce przedziałów mają znaczne oscylacje, sprawdźmy więc co się stanie gdy punkty nie będą rozłożone równomiernie.

Zagęszczenie punktów w środku

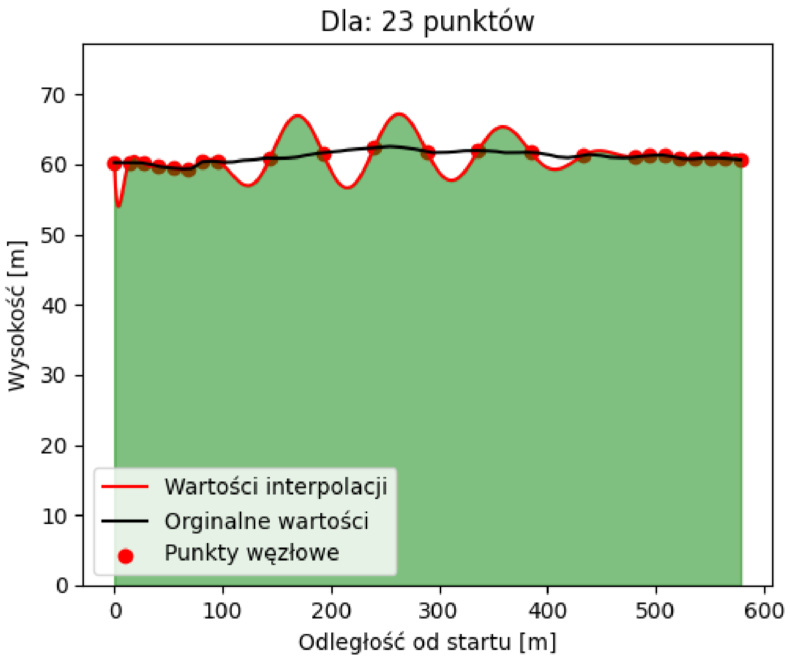


Zagęszczając punkty w środku oscylacje na krańcach są znacznie większe niż przedtem.

Zagęszczenie punktów na krańcach przedziałów



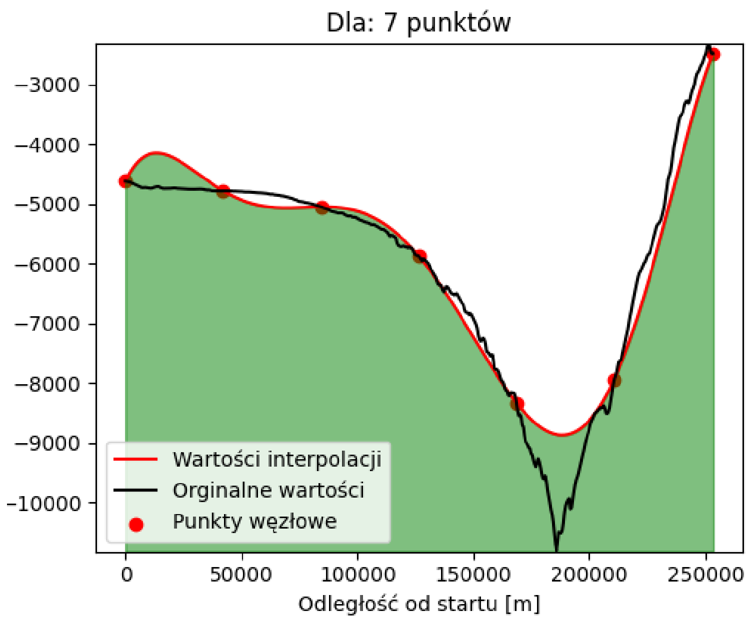
Zagęszczając punkty w na krańcach przedziałów, dla 17 punktów oscylacje są znacznie mniejsze niż wcześniej, można wnioskować, że większa ilość punktów na krańcach hamuje oscylacje.



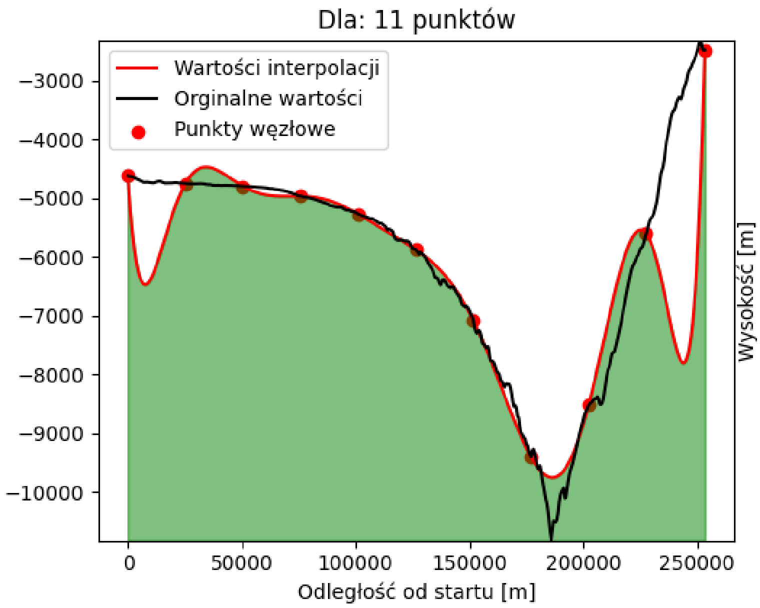
Jednak jak widać hamowanie oscylacji na krańcach może skutkować oscylacjami w środkowych częściach przedziału.

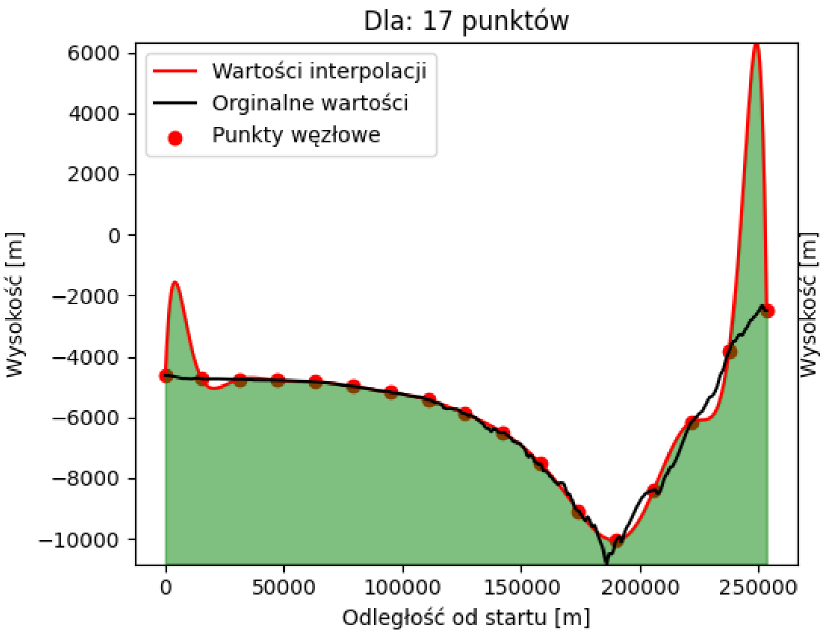
Głębia Challengera

Równomierne rozłożenie punktów węzłowych



Jak widać dla takiego terenu z widocznym spadkiem wysokości i 7 punktów węzłowych interpolacja Lagrange'a nie poradziła sobie tak dobrze jak wcześniej, już przy 7 punktach występują oscylacje na początku przedziału.

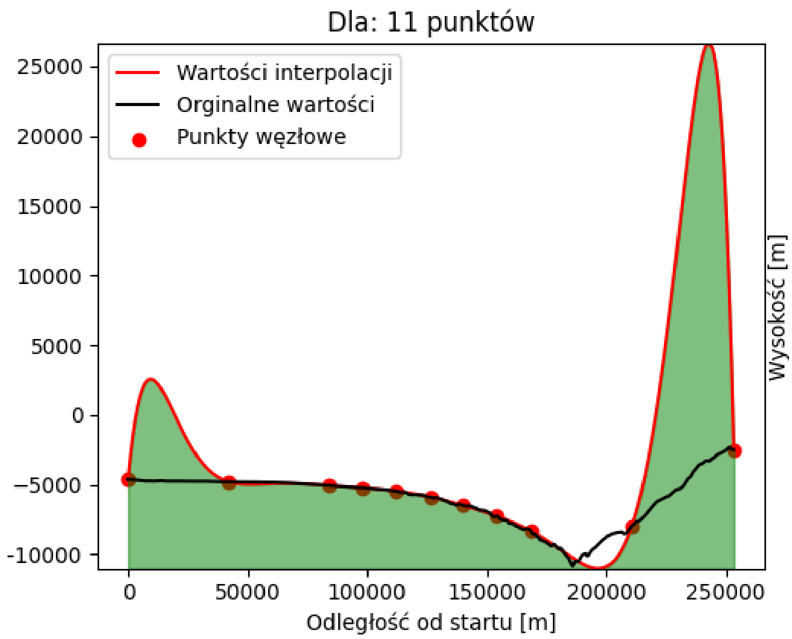




Dla większej ilości punktów pomimo lepszego dopasowania w środku przedziału, tak jak poprzednia widać znaczne oscylacje na krańcach,

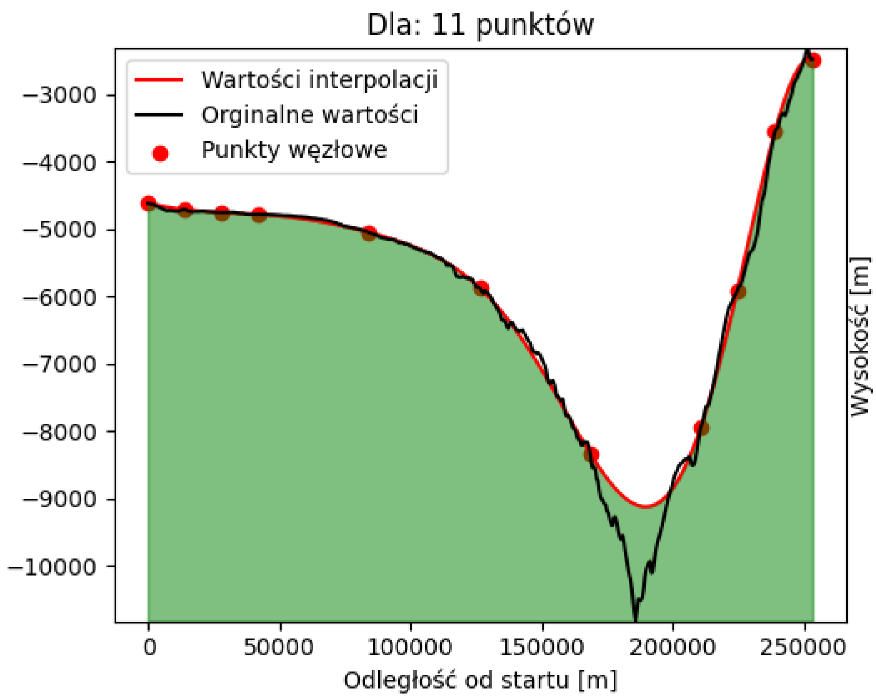
Nierównomierne rozłożenie punktów węzłowych

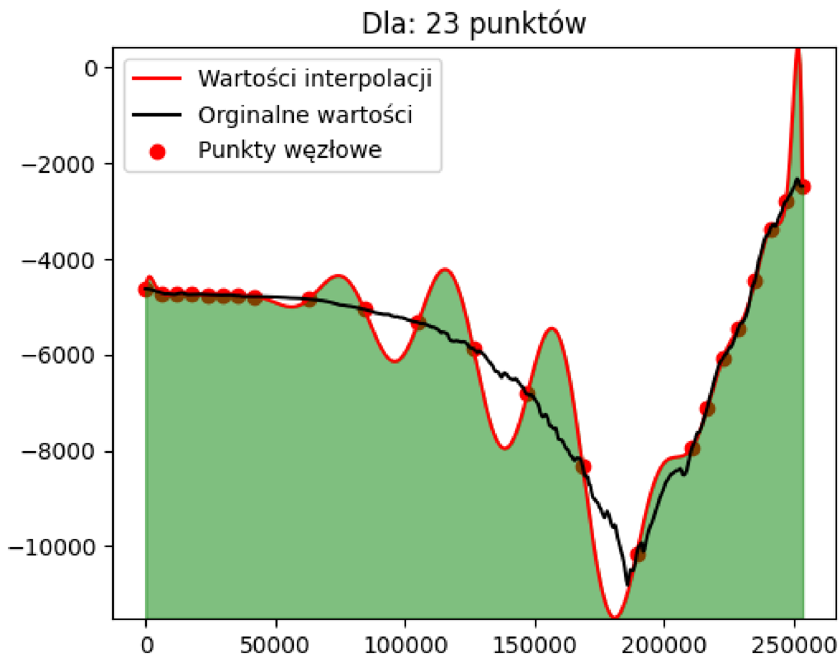
Zagęszczenie punktów w środku



Tak jak wcześniej zagęszczenie punktów w środku powoduje dużo większe oscylacje na krańcach przedziału.

Zagęszczenie punktów na krańcach przedziałów

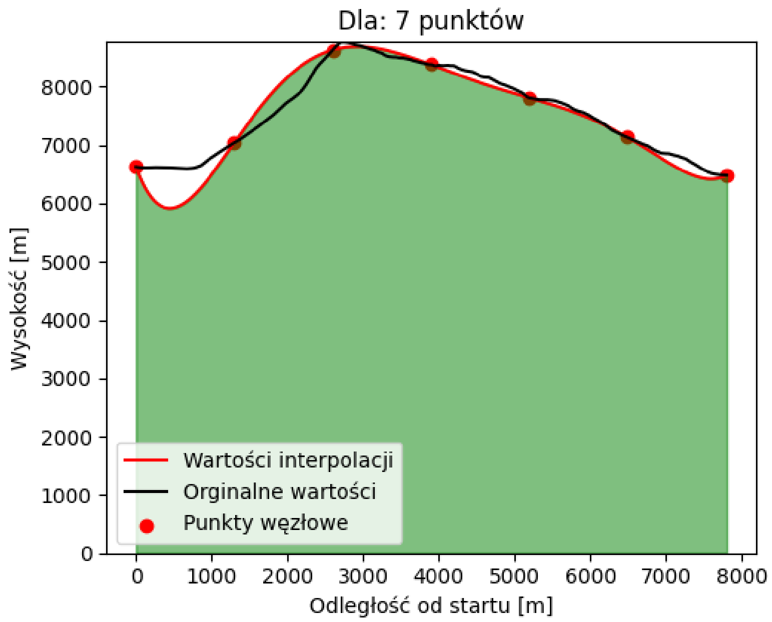




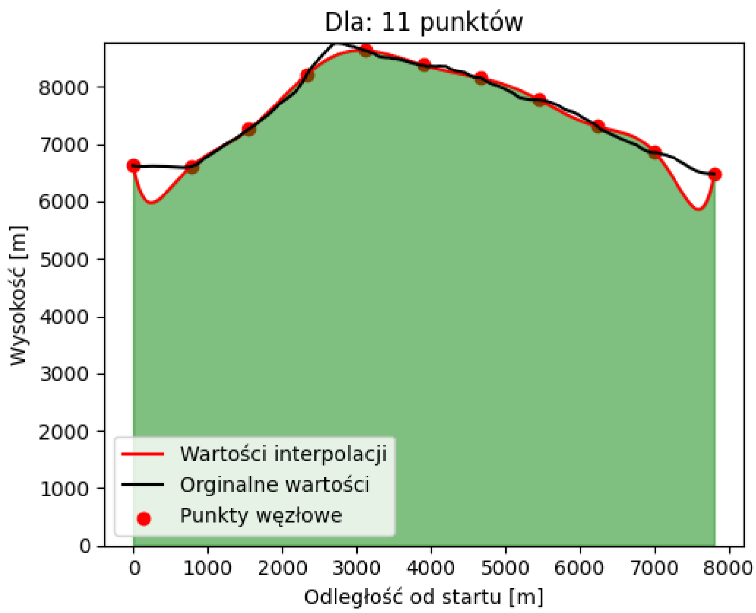
Tak jak wcześniej zagęszczenie punktów na krańcach powoduje wyhamowanie oscylacji na krańcach i może powodować oscylacje na środku przedziału.

Mount Everest

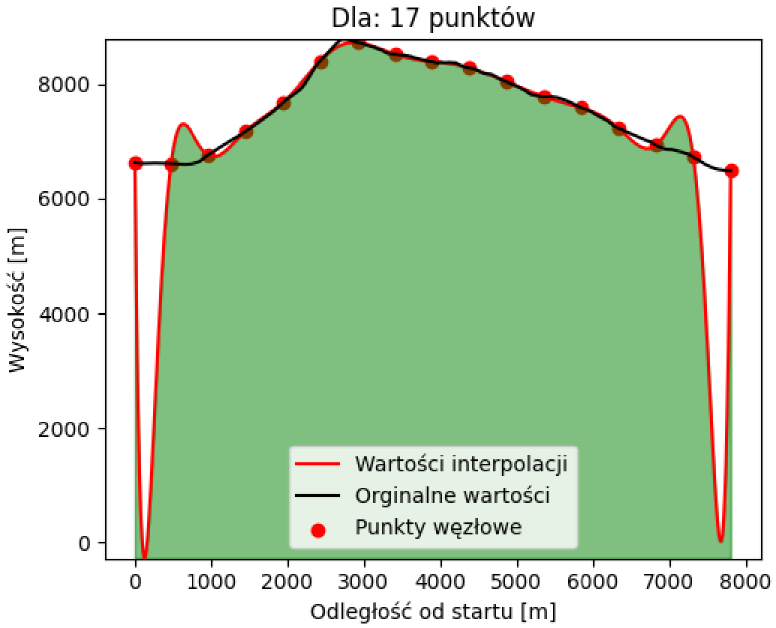
Równomierne rozłożenie punktów węzłowych



Tak jak wcześniej dla terenu z widocznym jednym stromym wzniesieniem i 7 punktów węzłowych interpolacja Lagrange'a nie poradziła sobie najlepiej, na początku przedziału przed wzniesieniem widać duży błąd, lepsze przybliżenie mamy w drugiej części wykresu gdzie występuje łagodny i równomierny spadek wysokości.



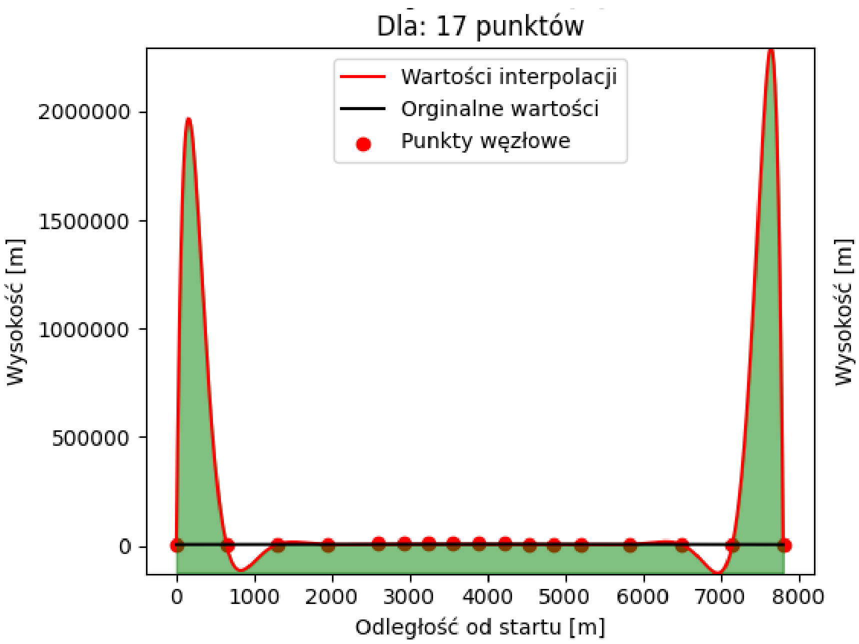
W tym przypadku przy większej liczbie punktów mamy lepsze przybliżenia jednak oscylacje pojawiły się również na końcu przedziału.



Im więcej punktów tym lepsze wyniki w środku, ale większe oscylacje na krańcach.

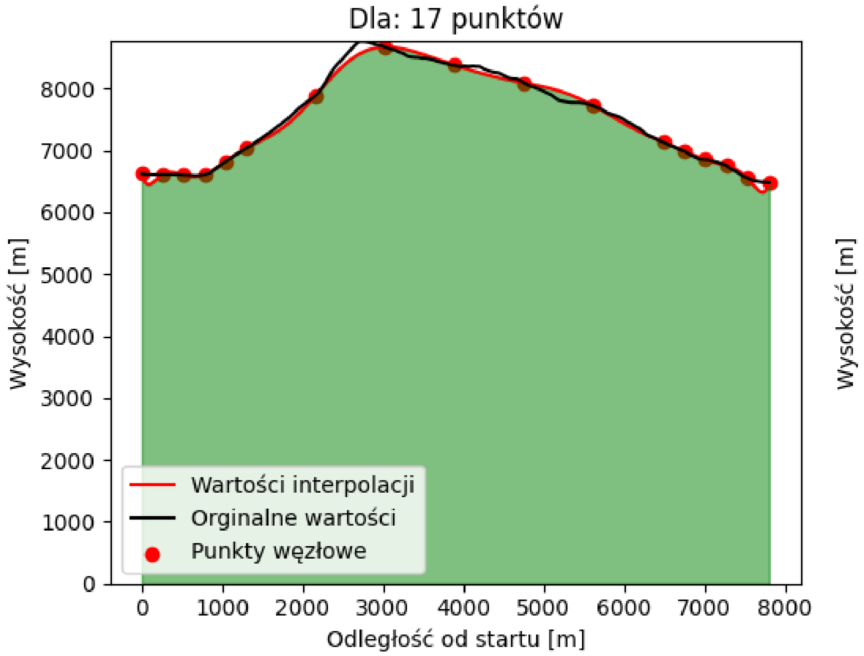
Nierównomierne rozłożenie punktów węzłowych

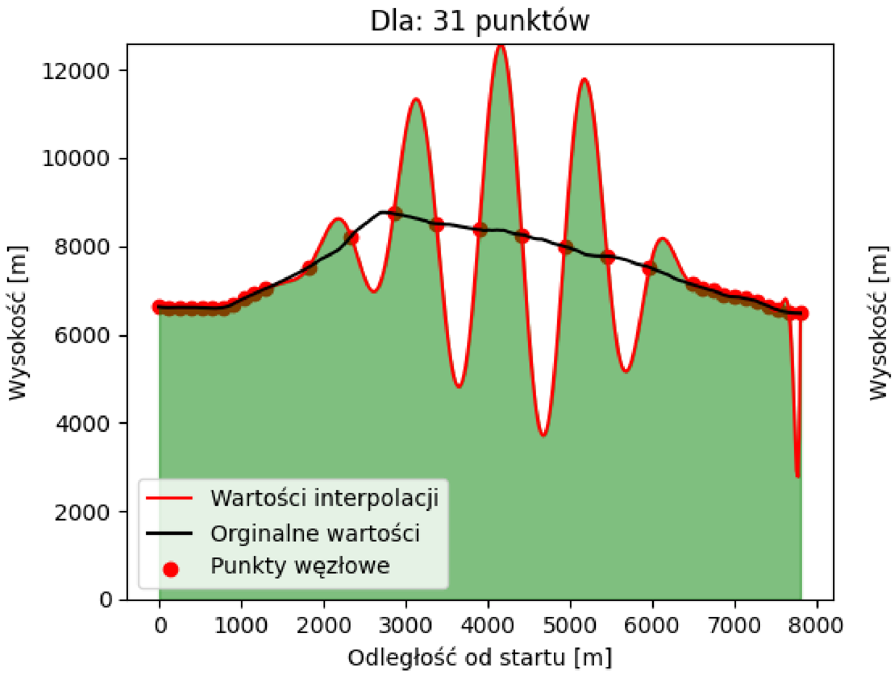
Zagęszczenie punktów w środku



Tak jak we wcześniejszych przypadkach zagęszczenie punktów w środku skutkuje dużo większymi błędami na krańcach przedziału.

Zagęszczenie punktów na krańcach przedziałów

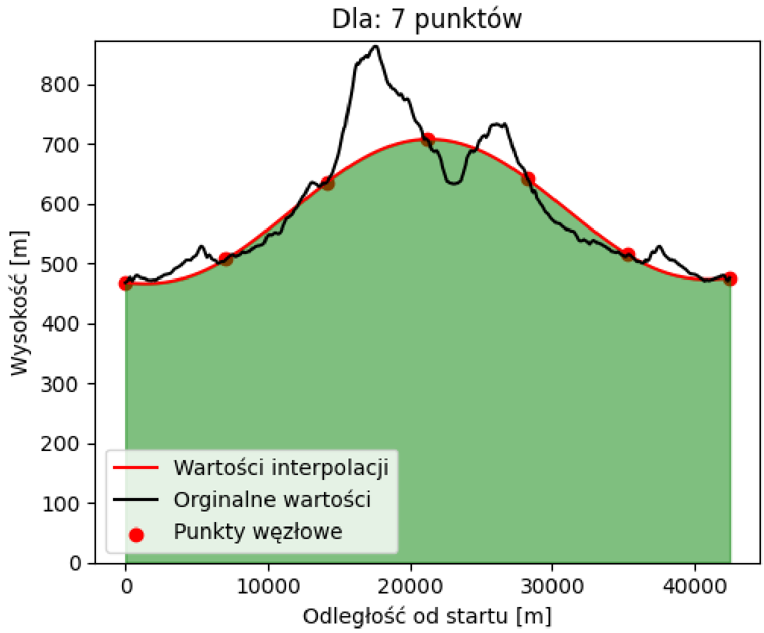




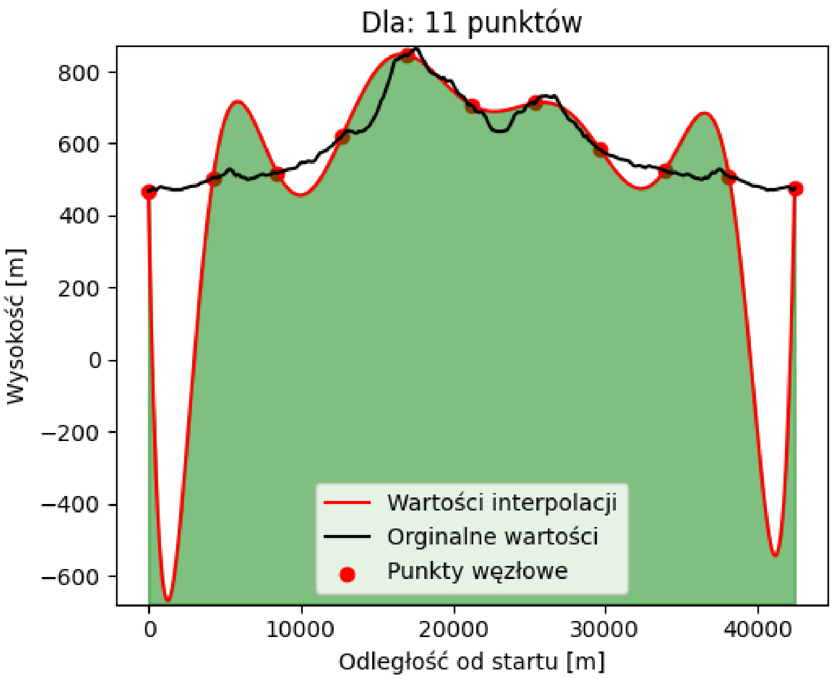
Tak jak we wcześniejszych przypadkach zagęszczenie punktów na krańcach przedziału do pewnego momentu powoduje polepszenie naszych przybliżeń i hamowanie oscylacji krańcowych, ale przy zbyt dużej liczbie punktów występują oscylacje w środkowej części przedziału.

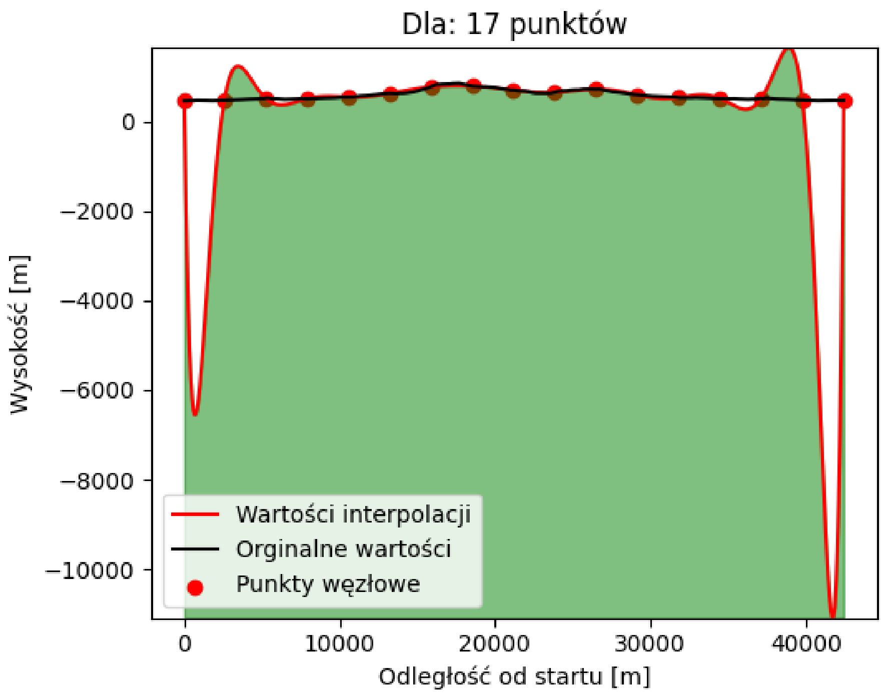
Różne wzniesienia

Równomierne rozłożenie punktów węzłowych



W przypadku terenu z większą ilością wzniesień i małej liczbie punktów węzłowych, mamy bardzo niezadowalający wynik, cały profil jest bardzo uogólniony do tylko jednego wzniesienia.

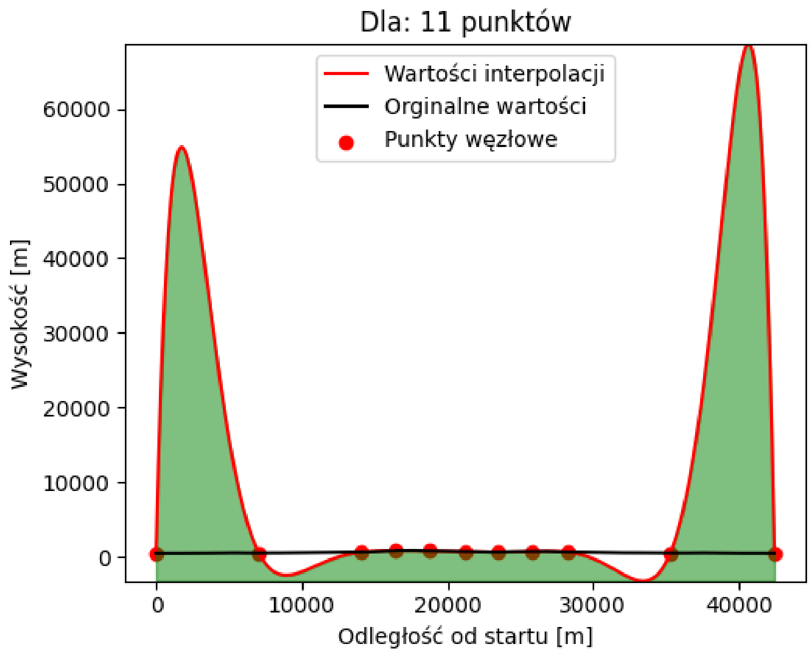




Większa ilość punktów skutkuje tym co w poprzednich przypadkach, większą dokładnością dla środka przedziału i coraz większymi błędami na jego krańcach.

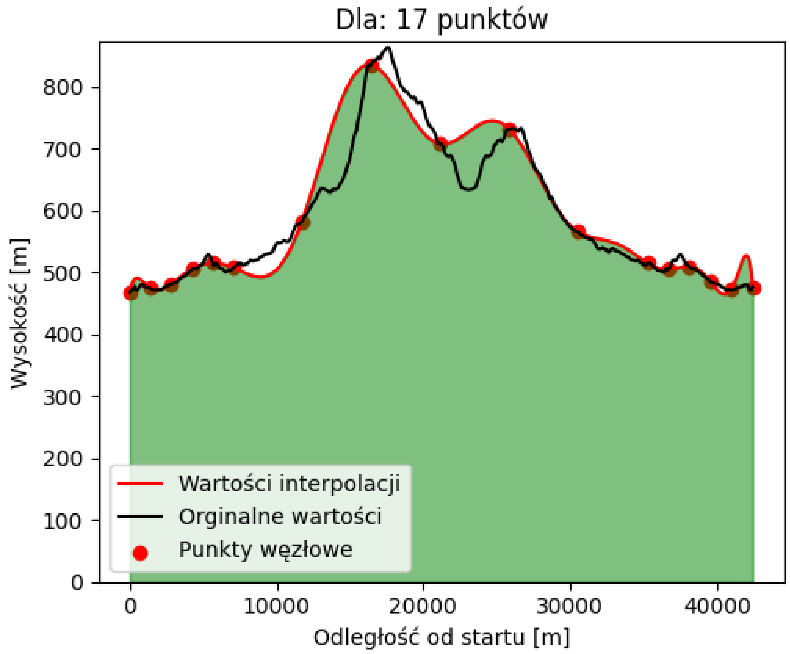
Nierównomierne rozłożenie punktów węzłowych

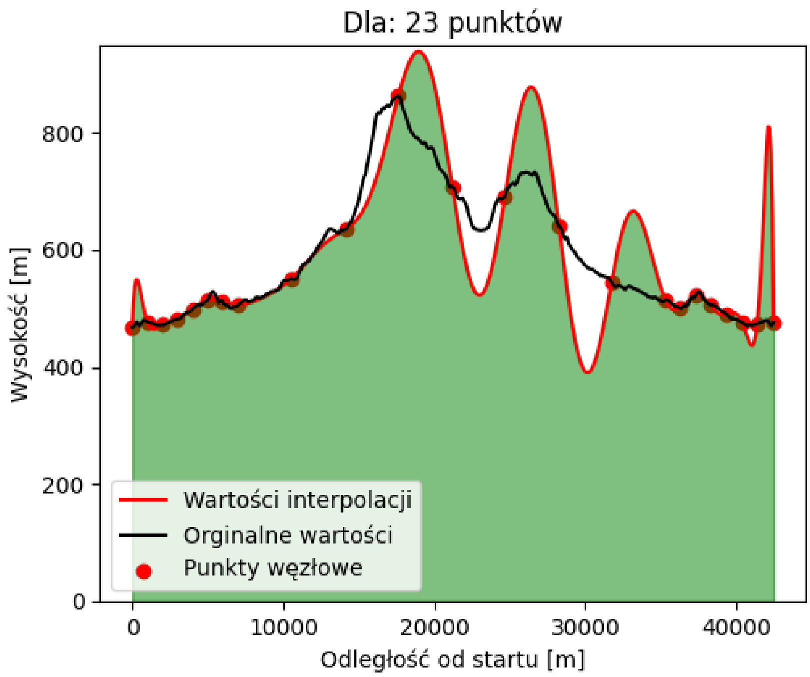
Zagęszczenie punktów w środku



Tak jak wcześniej, zagęszczenie w środku zwiększa błędy na krańcach.

Zagęszczenie punktów na krańcach przedziałów





Tak jak we wcześniejszych przypadkach zagęszczenie punktów na krańcach przedziału do pewnego momentu powoduje polepszenie naszych przybliżeń i hamowanie oscylacji krańcowych, ale przy zbyt dużej liczbie punktów występują oscylacje w środkowej części przedziału.

Wnioski do interpolacji Lagrange'a

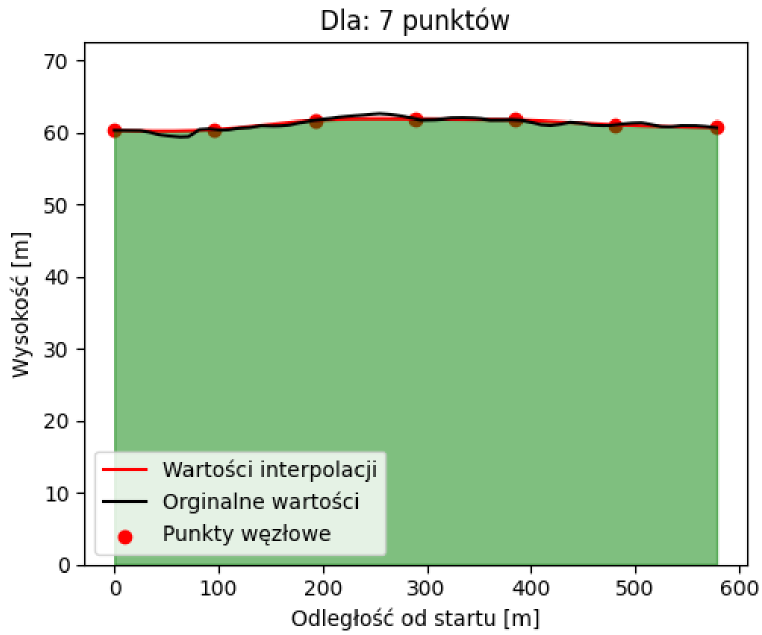
Jak widać interpolacja Lagrange'a nie daje nam najlepszych przybliżeń wartości prawdziwych. Przy większej liczbie punktów interpolacyjnych, choć przybliżenia w środkowej części przedziału mogą być dokładniejsze, na krańcach przedziału występują duże błędy (związane jest to z efektem Rungego). Im bardziej zróżnicowane są wartości prawdziwe, tym większa liczba punktów jest potrzebna, ale równocześnie zwiększa to ryzyko większych błędów na krańcach przedziału. Aby zmniejszyć efekt Rungego, można zwiększyć liczbę punktów węzłowych na krańcach przedziału, jednak należy uważać, aby uniknąć oscylacji w innych częściach przedziału.

Dla uzyskania lepszych wyników warto rozważyć zebranie większej liczby danych spoza interesującego nas przedziału, aby efekt Rungego występował w obszarze, który nas nie interesuje. Można również zagęścić te dane w celu złagodzenia efektu Rungego.

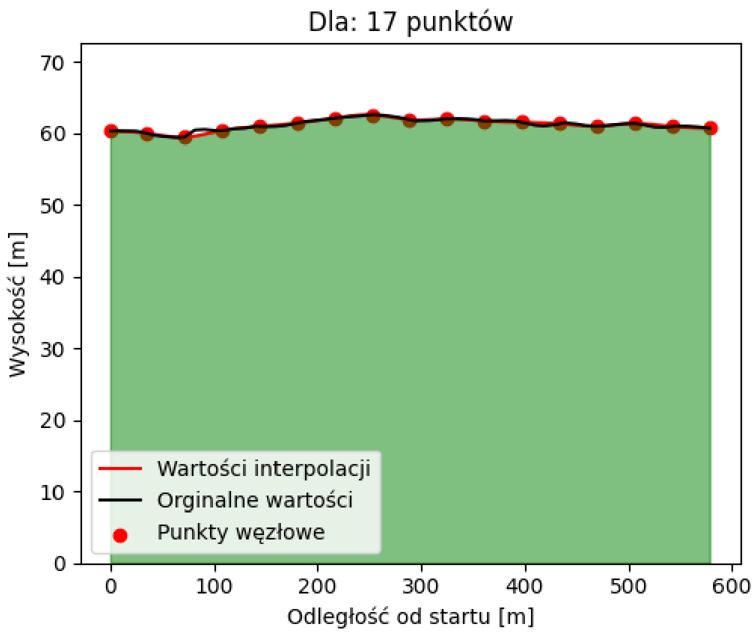
Interpolacja funkcjami sklejanymi trzeciego stopnia:

Chełm

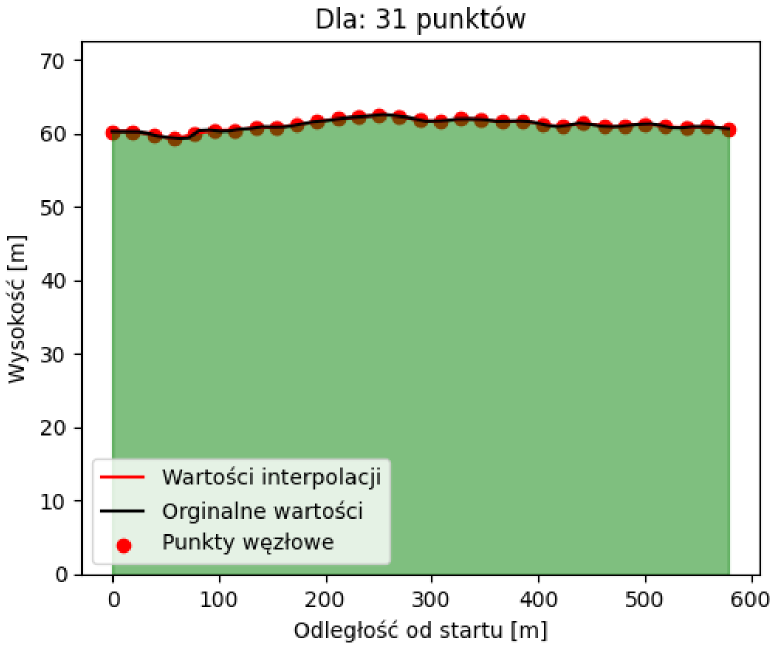
Równomierne rozłożenie punktów węzłowych



W tym przypadku dla 7 punktów węzłowych oraz płaskiego terenu interpolacja funkcjami sklejanymi dała nam taki sam efekt jak interpolacja Lagrange'a.



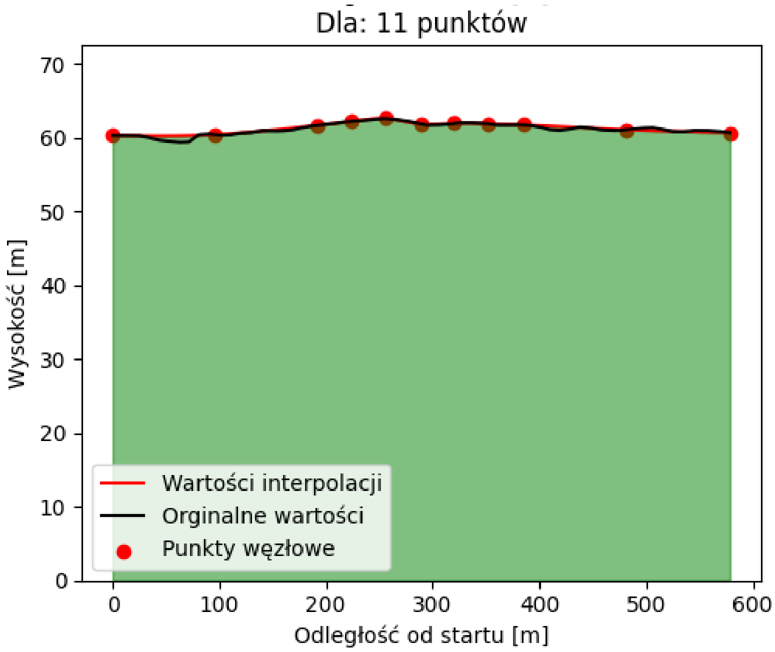
Dla większej liczby punktów węzłowych widać już przewagę interpolacji funkcjami sklejanymi nad interpolacją Lagrange'a, interpolacja ta ma bardzo dobre przybliżenie i brak oscylacji na krańcach przedziału.



Większa ilość punktów węzłowych jedynie poprawia nam nasze przybliżenia, nie występuje tu efekt Rungego, więc jedynym minusem związanym z większą liczbą punktów węzłowych jest czas wykonywania.

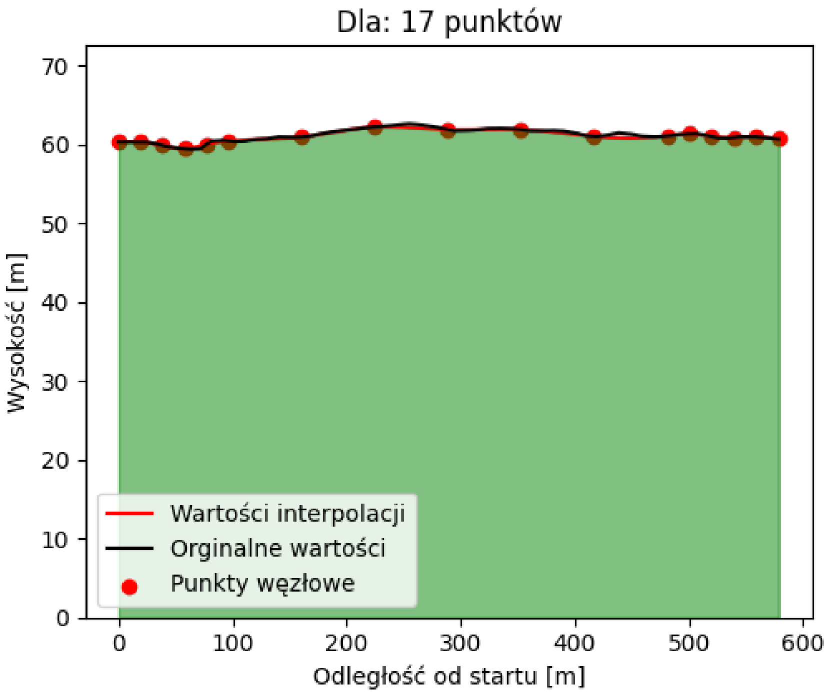
Nierównomierne rozłożenie punktów węzłowych

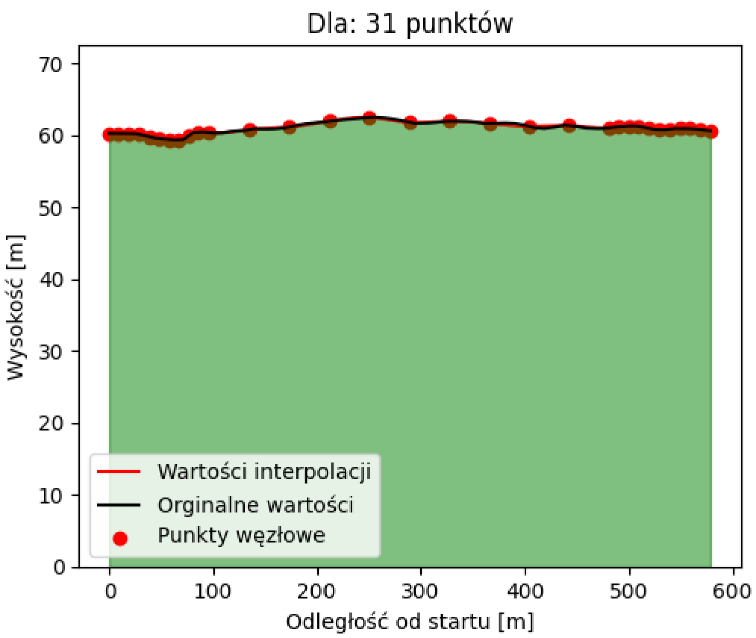
Zagęszczenie punktów w środku



Zagęszczenie punktów w środku wiąże się jedynie z pogorszeniem przybliżeń na krańcach.

Zagęszczenie punktów na krańcach przedziałów



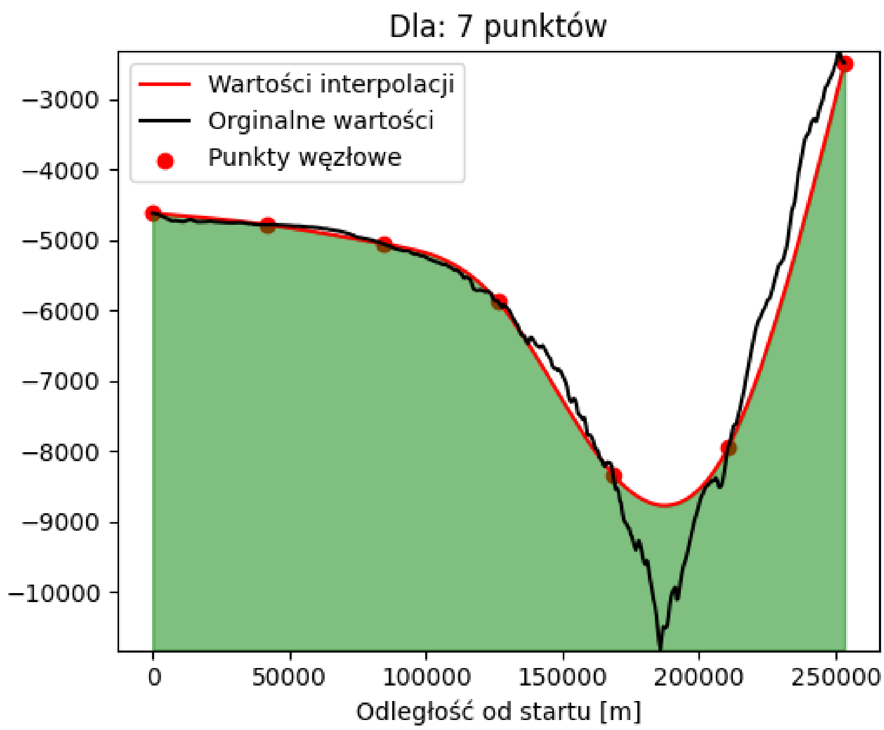


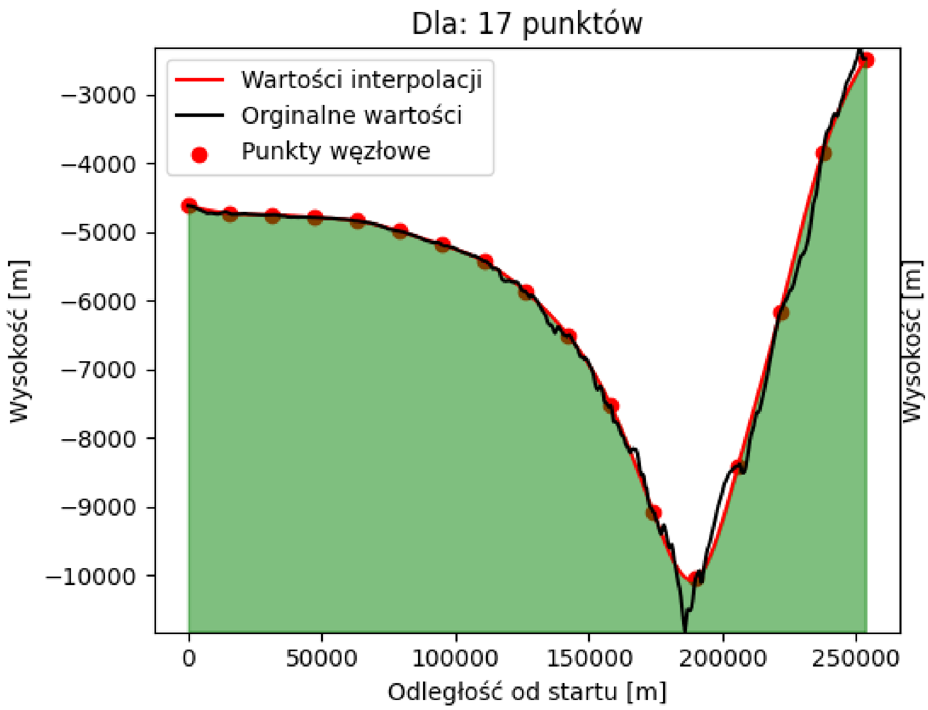
Zagęszczenie punktów na krańcach wiąże się jedynie z pogorszeniem przybliżeń w środku przedziału.

Lepiej zatem stosować równomierne rozmieszczenie punktów.

Głębia Challengera

Równomierne rozłożenie punktów węzłowych

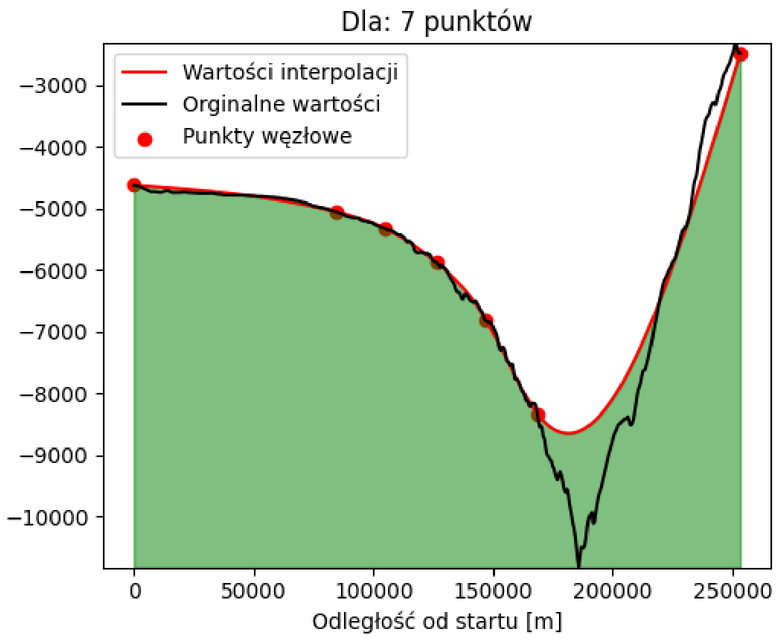




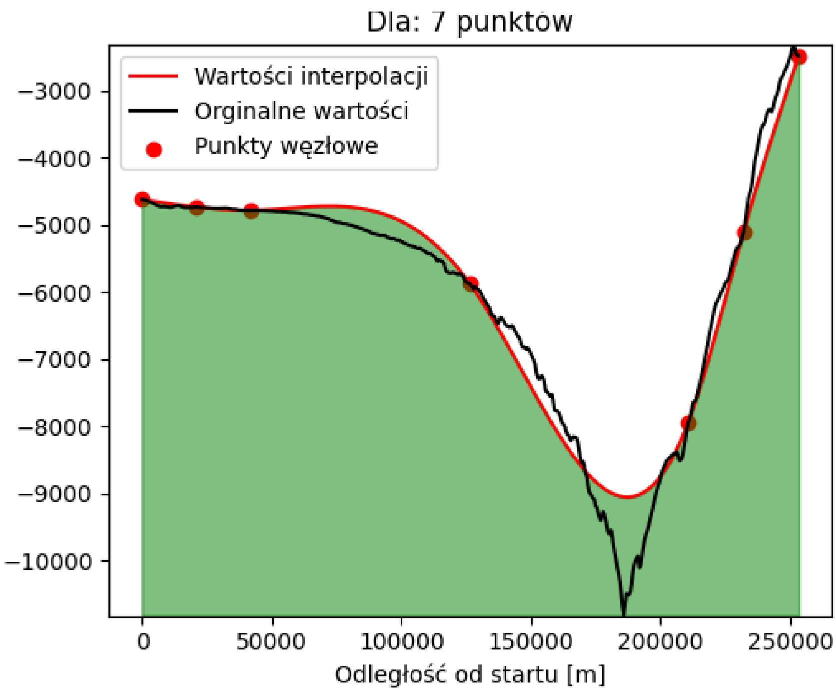
Większa ilość punktów zwiększa nam dokładność. Dla terenu bardziej zróżnicowanego potrzeba więcej punktów aby uzyskać satysfakcjonujące przybliżenia.

Nierównomierne rozłożenie punktów węzłowych

Zagęszczenie punktów w środku



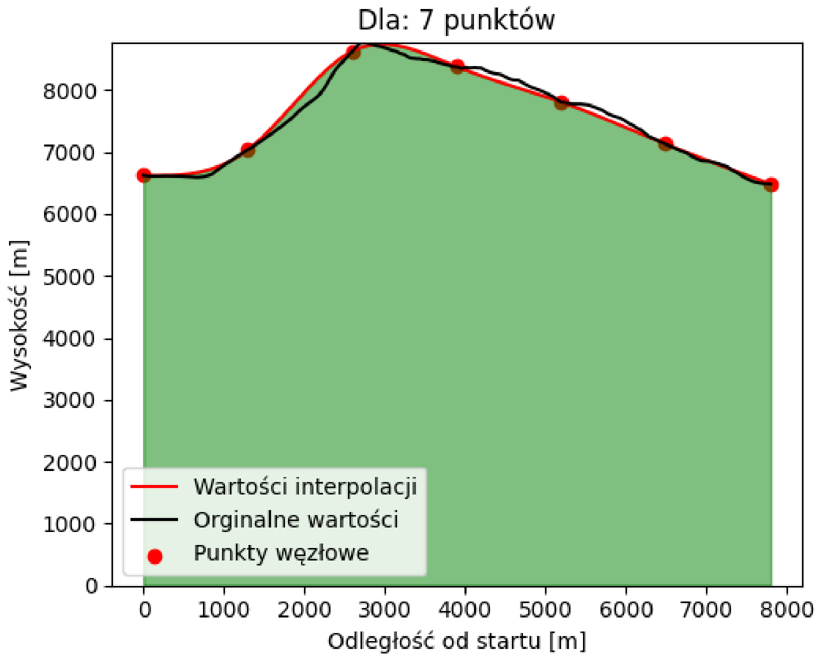
Zagęszczenie punktów na krańcach przedziałów

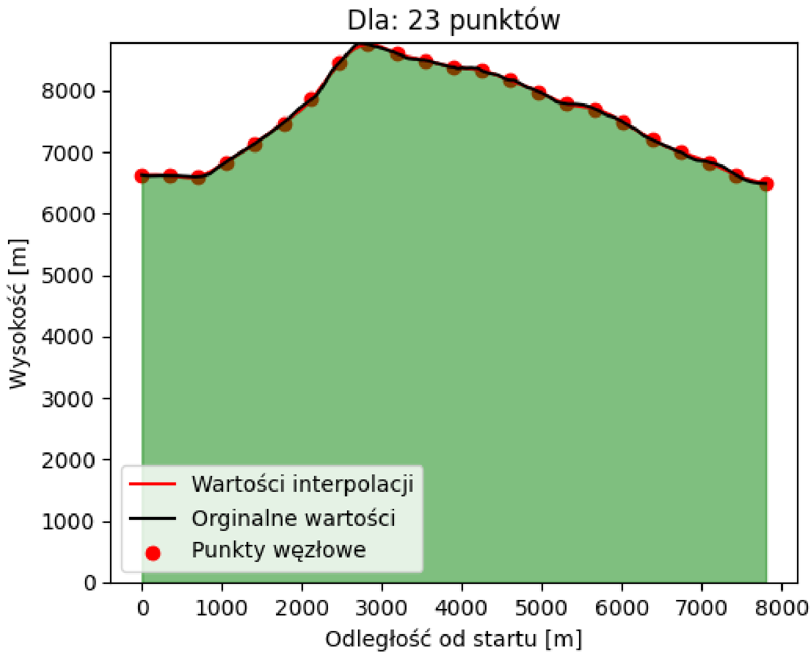


Tak jak wcześniej, zmiana rozmieszczenia punktów skutkuje jedynie nierównomiernymi przybliżeniami na całym przedziale.

Mount Everest

Równomierne rozłożenie punktów węzłowych

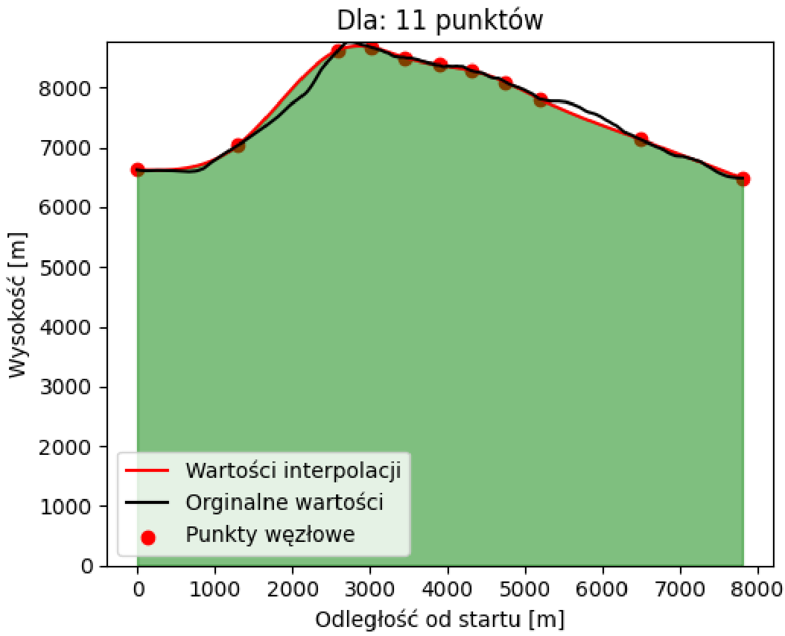




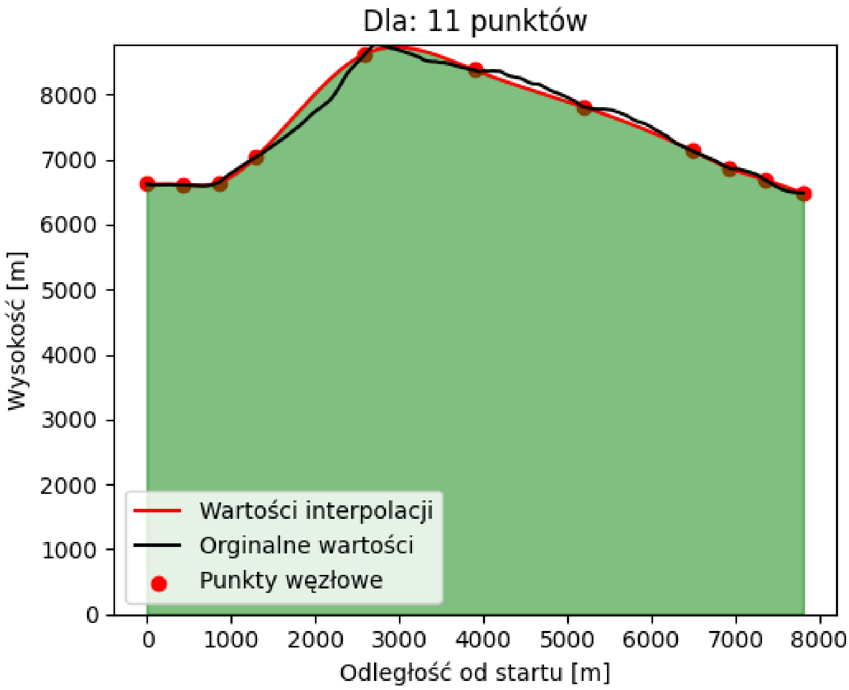
Tak jak wcześniej, większa ilość punktów zwiększa nam dokładność. Dla terenu bardziej zróżnicowanego potrzeba więcej punktów aby uzyskać satysfakcjonujące przybliżenia

Nierównomierne rozłożenie punktów węzłowych

Zagęszczenie punktów w środku



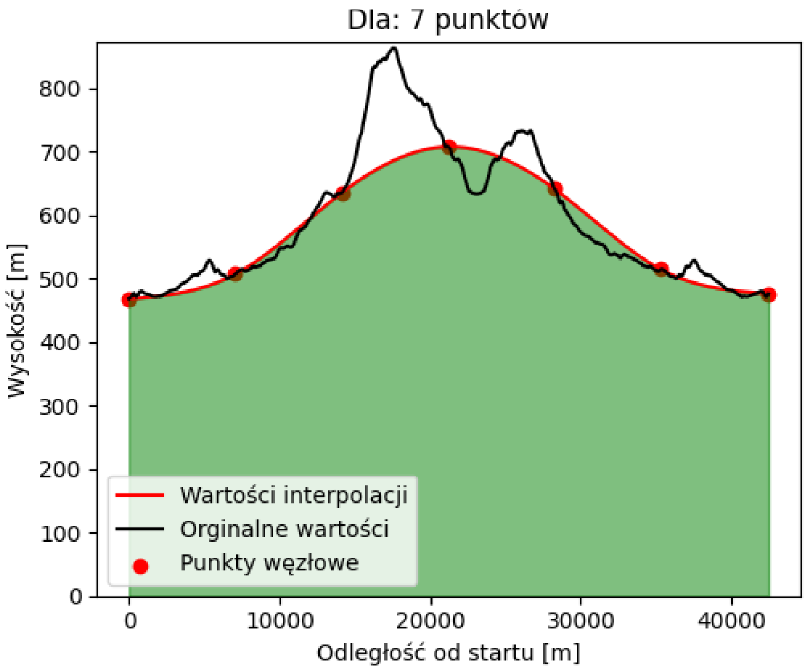
Zagęszczenie punktów na krańcach przedziałów

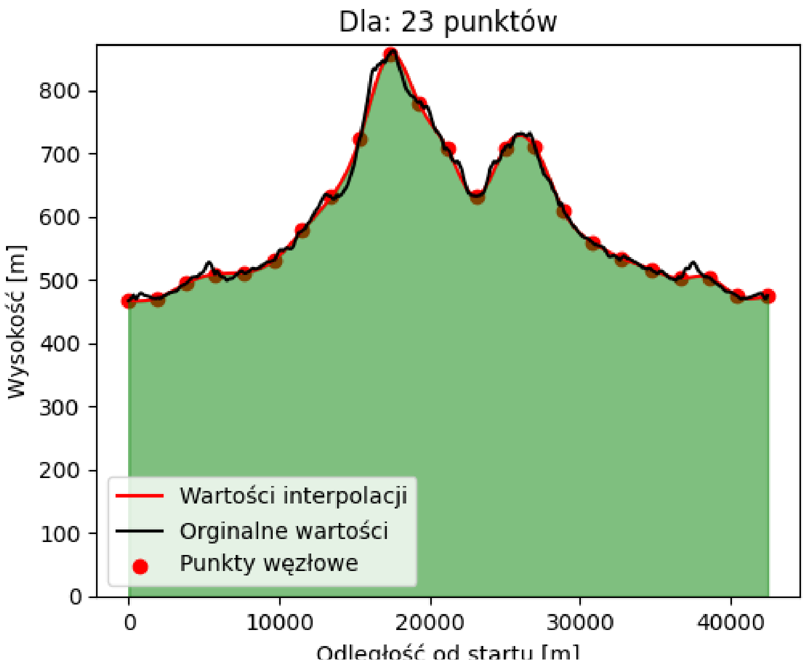


Tak jak wcześniej, zmiana rozmieszczenia punktów skutkuje jedynie nierównomiernymi przybliżeniami na całym przedziale.

Różne wzniesienia

Równomierne rozłożenie punktów węzłowych

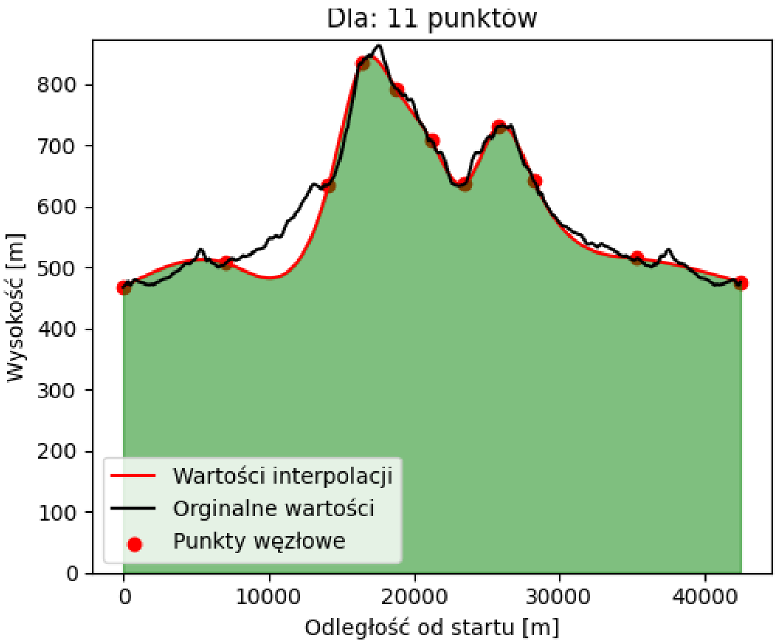




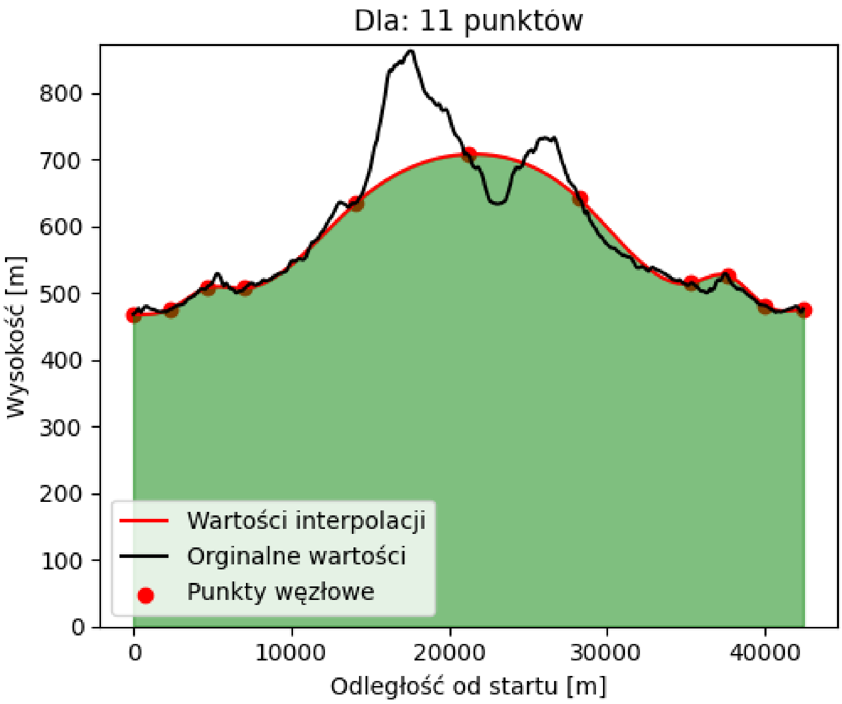
Tak jak wcześniej, większa ilość punktów zwiększa nam dokładność. Dla tak zróżnicowanego terenu potrzeba dużo więcej punktów aby uzyskać satysfakcjonujące przybliżenia

Nierównomierne rozłożenie punktów węzłowych

Zagęszczenie punktów w środku



Zagęszczenie punktów na krańcach przedziałów



Tak jak wcześniej, zmiana rozmieszczenia punktów skutkuje jedynie nierównomiernymi przybliżeniami na całym przedziale. Im bardziej zróżnicowany teren tym przybliżenia w miejscach z mniejszą ilością punktów są gorsze.

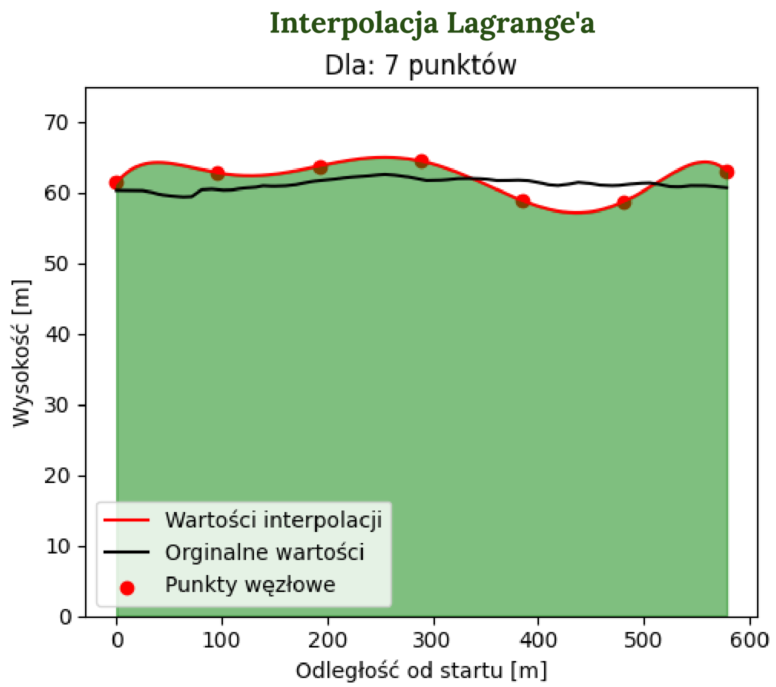
Wnioski do interpolacji funkcjami sklejanymi trzeciego stopnia

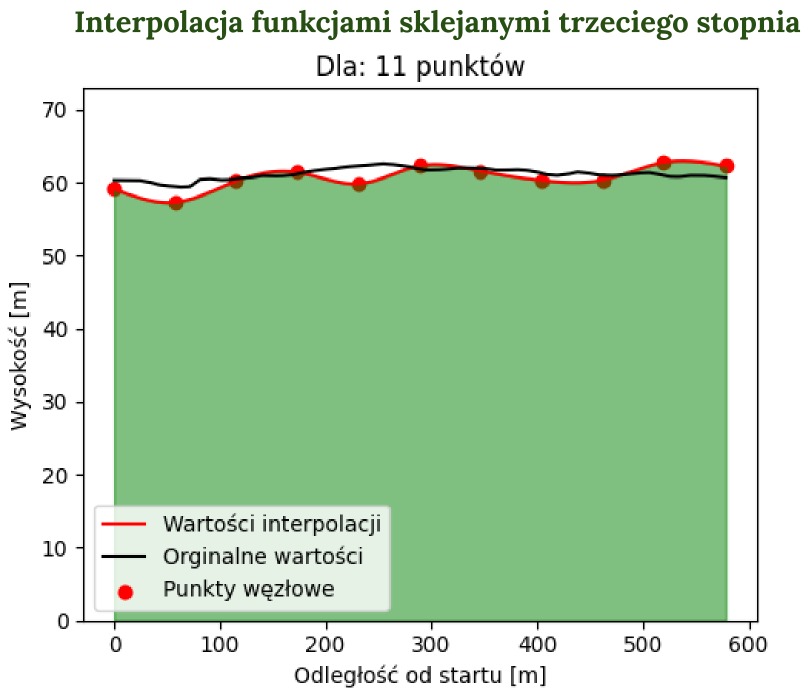
Interpolacja funkcjami sklejanymi trzeciego stopnia daje bardzo dobre rezultaty. Metoda ta jest bardziej przewidywalna od metody wielomianowej metodą Lagrange'a, nie występuje w niej Rungego, dlatego większa liczba punktów pogarsza jedynie czas wykonania.

Aby uzyskać najlepsze wyniki, najlepiej stosować równomiernie rozmieszczonych punktów interpolacyjnych, aby nie utracić dokładności w innych przedziałach.

Dane metody a błędy pomiaru

Zobaczmy jak wpływają błędy pomiaru na nasze przybliżenia (symulacja zbierania danych z 5% błędem pomiaru)





Jak widać interpolacja przy błędach pomiaru daje dużo gorsze wyniki niż normalnie. Związane jest to z tym, że interpolacja zawsze przechodzi przez punkty węzłowe, a co za tym idzie jeśli występują błędy pomiaru, nasze przybliżenia będą gorsze.