Logika i teoria mnogości

Zadanie 1. Za pomocą (Ext) wyprowadzić następujace prawa (dodatkowo narysować diagramy Venna):

- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
- $(A \backslash B) \backslash C = A \backslash (B \cup C)$
- $A \backslash (B \backslash C) = (A \backslash B) \cup (A \cap C)$
- $A \backslash (B \cup C) = (A \backslash B) \cap (A \backslash C)$
- $A \backslash (B \cap C) = (A \backslash B) \cup (A \backslash C)$
- $A \cup (A \cap B) = A$
- $A \cap (A \cup B) = A$
- $(A \backslash B) \cap (C \backslash D) = (A \cap C) \backslash (B \cup D)$
- $A \cap (B \div C) = (A \cap B) \div (A \cap C)$

Zadanie 2. Sprawdzić, czy prawdziwe są równości:

- $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$
- $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$
- $(A \backslash B) \times C = (A \times C) \backslash (B \times C)$
- $A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$

Zadanie 3. Znaleźć złożenia $R \circ S, S \circ R, R \circ R, R \circ S \circ T$ następujących relacji określonych w zbiorze $\{a, b, c, d\}$:
$R = \{< a, b >, < b, a >, < c, d >, < d, a >\}$
$S = \{< a, c >, < c, d >, < d, d >\}$
$T = \{< a, a >, < b, b >, < d, c >\}$

Zadanie 4. Scharakteryzować własności następujących relacji:

- $R \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : xRy \leftrightarrow 2|(x + y)$
- $R \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R} : xRy \leftrightarrow |x| + |y| = 3$
- $R \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R} : xRy \leftrightarrow |x| + |y| \neq 3$
- $R \subset X \times X, X$-zbiór ludzi: $xRy \leftrightarrow x$ jest siostrą y

- $R \subset X \times X, X$-zbiór ludzi: $xRy \leftrightarrow x$ jest ojcem y

Zadanie 5. Sprawdzić, że relacja $R \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ zdefiniowana równoważnością:
$xRy \leftrightarrow \exists_z (x - y) = z$
jest relacją równoważności i znaleźć klasy abstrakcji dla $\sqrt{2}$ i dla 0.

Zadanie 6. Znaleźć obrazy i przeciwobrazy zbiorów A i B w następujących odwzorowaniach:

- $f(x) = (x-2)^2, A =< -1, 5 >, B =< 0, 8)$
- $f(x) = (x+1)(x-3), A = (-5, 5), B =< 1, 2)$
- $f(x) = \begin{cases} x - 1 \text{ dla } x < 1 \\ x + 3 \text{ dla } x \geq 1 \end{cases} \quad A =< 0, 4 >, B = (-1, 1)$
- $f(x) = \begin{cases} x - 2 \text{ dla } x < 1 \\ x^2 \text{ dla } 1 \leq x < 3 \\ x + 2 \text{ dla } x \geq 3 \end{cases} \quad A =< -4, 4 >, B = (0, 1)$

Zadanie 7. Udowodnić:

- $\bigcup_{i \in I} (A \cap B_i) = A \cap \bigcup_{i \in I} B_i$
- $\bigcap_{i \in I} (A \cup B_i) = A \cup \bigcap_{i \in I} B_i$
- $\bigcup_{i \in I} A_k \times \bigcup_{j \in J} B_j = \bigcup_{<i,j> \in I \times J} (A_i \times B_j)$
- $f^{-1}[\bigcup_{i \in I} A_i] = \bigcup_{i \in I} f^{-1}[A_i]$
- $f^{-1}[\bigcap_{i \in I} A_i] = \bigcap_{i \in I} f^{-1}[A_i]$

Zadanie 8. Narysować diagramy zbiorów częściowo uporządkowanych:

- $(\{x \in \mathbb{N} : 1 \leq x \leq 10\}, |)$
- $(\{2, 3, 5, 6, 10, 15\}, |)$
- $(\{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}\}, \subseteq)$

Wskazać elementy: maksymalny, minimalny, największy, najmniejszy.

Zadanie 9. Relacja R jest określona w zbiorze $\mathbb{Z}$ następująco:

1. $aRb \Leftrightarrow |a| < |b|$
2. $aRb \Leftrightarrow |a| \leq |b|$

dla $a, b \in \mathbb{Z}$. Zbadać, czy relacja R jest relacją częściowo porządkującą, liniowo porządkującą zbiór $\mathbb{Z}$?

Zadanie 10. Relacja R jest określona w zbiorze $\mathbb{R}$ następująco:

1. $xRy \Leftrightarrow x^2 < y^2$
2. $xRy \Leftrightarrow x^2 \leq y^2$
3. $xRy \Leftrightarrow x^3 < y^3$
4. $xRy \Leftrightarrow x^3 \leq y^3$

dla $a, b \in \mathbb{R}$. Zbadać, czy relacja R jest relacją częściowo porządkującą, liniowo porządkującą zbiór $\mathbb{R}$?

1. R.Murawski, K.Świrydowicz, Wstęp do teorii mnogości, Wyd.Naukowe UAM

   Rozdział 3: Podstawy teorii zbiorów: zad. 1,4,5,6,7,8,10,11

   Rozdział 4: Relacje: zad. 2,5,8,10,11,13,15,16

   Rozdział 5: Funkcje: zad. 1,17,18, tw. 5.4.2, 5.4.3, 5.4.5

   Rozdział 6: Relacje porządkujące: zad. 5, 6, 7, 8, 9,

2. A.Chronowski, Zadania z elementów teorii mnogości i logiki matematycznej, Wyd. Dla szkoły

   Rozdział. 1.3: Algebra zbiorów: zad. 3.1, 3.2, 3.8, 3.9, 3.17, 3.19, 3.22-3.28, 3.34, 3.44-3.46, 3.48-3.54

   Rozdział 1.4: Relacje: zad. 4.1-4.4, 4.6-4.11, 4.16, 4.17, 4.19, 4.20-4.23, 5.1-5.7

   Rozdział 1.5: Relacje równoważności: zad. 5.21-5.25

   Rozdział 1.6: Funkcje: zad. Tw.6.7-6.18

   Rozdział 1.7: Relacje porządkujące: zad. 7.1-7.4