# CAŁKI PODWÓJNE

Niech $\mathbf{r}:[\alpha,\beta]\ni t\to \mathbf{r}(t)=\begin{bmatrix}x(t)\\ y(t)\end{bmatrix}\in R^2$ będzie ciągłą funkcją wektorową.

**Def**. Zbiór $K=\{\mathbf{r}(t):t\in[\alpha,\beta]\}$ nazywamy **krzywą płaską**, a funkcję $\mathbf{r}$ nazywamy parametryzacją krzywej płaskiej. (inaczej **-krzywa, to ciągły obraz odcinka**)

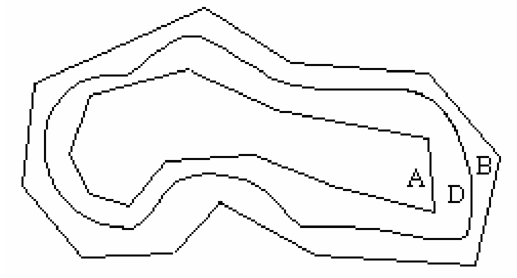
Jeśli dodatkowo założymy, że $\mathbf{r}$ jest różnowartościowa, to $K$ nazywamy **łukiem zwykłym**.
Jeśli parametryzacja $\mathbf{r}$ jest **różniczkowalna w sposób ciągły** (czyli $x(t),y(t)\in C^1_{[\alpha,\beta]}$) oraz $\forall t\in[\alpha,\beta]\ \ \mathbf{r}'(t)\neq\mathbf{0}$, to $K$ nazywamy **łukiem gładkim**.

**Def**. **Łuk regularny**, to łuk zwykły i gładki.
**Krzywa regularna**, to krzywa dająca się podzielić na skończoną ilość łuków regularnych.
**Krzywa zamknięta**, to krzywa, dla której $\mathbf{r}(\alpha)=\mathbf{r}(\beta)$.

**Def**. **Obszar płaski** $D\in R^2$, to **otwarty** i **spójny** podzbiór płaszczyzny.
Brzeg obszaru, to zbiór jego punktów skupienia nie należących do obszaru.
Obszar domknięty, to obszar z brzegiem.
Obszar wielokątny, to obszar ograniczony skończoną liczbą łamanych.
Pole obszaru wielokątnego – intuicja (suma pól trójkątów na które można podzielić wielokąt)

## Pole (miara Jordana) obszaru płaskiego

$D-$ obszar **domknięty** i **ograniczony**
$A-$ wielokąt zawarty w obszarze ( $A\subset D$ )
$B-$ wielokąt nakrywający obszar ( $B\supset D$ )
$|A|-$ pole wielokąta $A$
$|B|-$ pole wielokąta $B$
$|A|\le|B|$




Istnieją więc kresy: $|D_*|=\sup\limits_{A\subset D,\,A\text{ wielokąt}}|A|$ i $|D^*|=\inf\limits_{B\supset D:B\text{ wielokąt}}|B|$

**Def**. Jeżeli $|D_*|=|D^*|$, to obszar $D$ nazywamy mierzalnym w sensie Jordana, a $|D|=|D_*|=|D^*|$ nazywamy jego miarą Jordana, czyli polem.

Dowodzi się, że prawdziwe są następujące warunki

**Tw**.(WKW mierzalności) Obszar płaski i ograniczony jest mierzalny w sensie Jordana $\Leftrightarrow$ brzeg da się pokryć wielokątami o dowolnie małym (sumarycznym) polu. Inaczej, brzeg musi być zawarty w wielokącie o dowolnie małym polu.

**Tw**.(WW mierzalności). Jeżeli obszar $D$ jest ograniczony i jego brzeg jest sumą skończonej ilości krzywych ciągłych postaci $y=f(x)$ lub $x=g(y)$, to $D$ jest mierzalny w sensie Jordana.

**Tw**.(WW mierzalności).Jeżeli obszar $D$ jest ograniczony skończoną liczbą zamkniętych krzywych regularnych, to jest mierzalny w sensie Jordana.

## Całka podwójna

Niech: $D \in R^2$ będzie **płaskim ograniczonym obszarem domkniętym o brzegu będącym krzywą zamkniętą o polu zero** (czyli można ją nakryć wielokątem o dowolnie małym polu)

Dzielimy obszar $D$ skończoną ilością krzywych o polu zero na obszary $P_1,...,P_n$ o rozłącznych wnętrzach uzyskując podział $\wp = \{P_1,....,P_n\}$ $\quad D = P_1 \cup ... \cup P_n$

$i \neq j \Rightarrow \operatorname{int} P_i \cap \operatorname{int} P_j = \emptyset$


Przez $|P_i|$ oznaczać będziemy pole obszaru $P_i$.

**Średnicą zbioru** $A \subset X$ ($X$-przestrzeń unormowana) nazywamy: $d(A) = \sup\limits_{x,y \in A} \|x - y\| = \sup\limits_{x,y \in A} \rho(x,y)$.

**Średnicą podziału** $\wp$ nazywamy liczbę $d(\wp) = \max\limits_{1 \le i \le n} d(P_i)$.

Niech $f : R^2 \supset D \to R^2$.Wybierając w każdym zbiorze $P_i$ punkt $(\xi_i, \eta_i) \in P_i$ tworzymy sumę

$$\sigma\left(f, \wp, (\xi_i, \eta_i)_{\,i=1,...,n}\right) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i) \cdot |P_i|.$$

**Def**. Liczbę rzeczywistą $I$ nazywamy całką podwójną funkcji $f$ po obszarze $D$ gdy

$$\forall_{\varepsilon>0} \exists_{\delta>0} \forall_{\wp} \forall_{(\xi_i,\eta_i)_{i=1,...,n}} \; d(\wp) \le \delta \Rightarrow \left| \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i) |P_i| - I \right| \le \varepsilon \text{ i oznaczamy}$$

$$I \overset{df}{=} \iint_D f(x,y)dP = \iint_D f(x,y)dxdy = \lim_{d(\wp)\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i) \cdot |P_i|$$

**Def.** (typu Heinego) Liczbę rzeczywistą $I$ nazywamy całką podwójną funkcji $f$ po obszarze $D$ jeżeli dla każdego normalnego ciągu podziałów $\wp_n$ ciąg odpowiadających sum całkowych $\sigma_n$ zbiega do $I$ niezależnie od wyboru punktów „pośrednich".

Podobnie jak w przypadku pojedynczej całki Riemanna można zdefiniować sumy Darboux górną $S(f, \wp)$ i dolną $s(f, \wp)$ oraz ich kresy – całki górną i dolną. Pojęcia te pozwalają łatwo wykazać następujące warunki całkowalności:

**WKW** $f$ jest całkowalna na $D \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists \wp : \; S(f, \wp) - s(f, \wp) \le \varepsilon$

**WK** Jeżeli funkcja określona na ograniczonym obszarze jest całkowalna, to jest ograniczona.

**WW** Jeżeli funkcja jest ciągła w $D$, to jest całkowalna.

**WW** Jeżeli funkcja jest ograniczona na $D$ i ma nieciągłości na skończonej liczbie krzywych o polu zero, to funkcja ta jest całkowalna na $D$.

## Własności całki

1. Jeżeli funkcja jest całkowalna na $D$ i zmienimy ją dowolnie z zachowaniem ograniczoności wzdłuż krzywej o polu równym zero, to otrzymana funkcja jest także całkowalna i całki obu funkcji są równe.

2. Jeżeli obszar $D$ podzielmy krzywą o polu zero na obszary $D_1$ i $D_2$, to funkcja jest całkowalna na $D \Leftrightarrow$ funkcja ta jest całkowalna na $D_1$ i $D_2$ oraz $\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D_1} f(x,y)dxdy + \iint\limits_{D_2} f(x,y)dxdy$.
3. Jeżeli funkcja $f$ jest całkowalna na $D$ i $k \in R$, to funkcja $(kf)$ też jest całkowalna na $D$ i $\iint\limits_D kf(x,y)dxdy = k\iint\limits_D f(x,y)dxdy$.
4. Jeżeli funkcje $f$ i $g$ są całkowalne na $D$, to $f+g$ też jest całkowalna na $D$ i $\iint\limits_D \big(f(x,y)+g(x,y)\big)dxdy = \iint\limits_D f(x,y)dxdy + \iint\limits_D g(x,y)dxdy$.
5. Jeżeli funkcje $f$ i $g$ są całkowalne na $D$, i $f(x,y) \le g(x,y)$ na $D$, to wówczas $\iint\limits_D f(x,y)dxdy \le \iint\limits_D g(x,y)dxdy$.
6. Jeżeli funkcja $f$ jest całkowalna na $D$, to $|f|$ też jest całkowalna na $D$ i
$$\left|\iint\limits_D f(x,y)dxdy\right| \le \iint\limits_D |f(x,y)|dxdy.$$
7. Jeżeli funkcja $f$ jest całkowalna na $D$, i $m \le f(x,y) \le M$, to $m|D| \le \iint\limits_D f(x,y)dxdy \le M|D|$,

   czyli istnieje $\mu = \frac{1}{|D|}\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ - wartość średnia funkcji $f$ na zbiorze $D$.
8. Jeżeli funkcja $f$ jest ciągła na $D$ (**zwartym i spójnym**), to $\exists_{\xi^*,\eta^*} : \mu = f(\xi^*,\eta^*)$ - czyli istnieje punkt, w którym $f$ przyjmuje wartość średnią, czyli $\iint\limits_D f(x,y)dxdy = f(\xi^*,\eta^*)|D|$.

## OBLICZANIE CAŁEK PODWÓJNYCH

**Tw.**(o zamianie całki podwójnej na iterowaną – wariant dla prostokąta) Jeżeli

- $f:[a,b]\times[c,d] \to R$ jest całkowalna oraz
- $\forall_{x\in[a,b]}$ istnieje $I(x) = \int\limits_c^d f(x,y)dy$,

to funkcja $I(x) \in R([a,b])$ i $\iint\limits_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b \left[\int\limits_c^d f(x,y)dy\right]dx$ (całka iterowana - całka z całki).

**Dowód**. Z założonej całkowalności funkcji $f$ na prostokącie $P$ wynika, że możemy podzielić prostokąt $P$ na $nm$ prostokątów dzieląc przedział $[a,b]$ na $n$ przedziałów a przedział $[c,d]$ na $m$ przedziałów tak, aby sumy górna i dolna różniły się dowolnie mało. Wówczas dla dowolnego $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ mamy $I(\xi_i) = \int\limits_c^d f(\xi_i, y)dy = \sum\limits_{j=1}^m \int\limits_{y_{j-1}}^{y_j} f(\xi_i, y)dy$. Z twierdzenia o wartości średniej dla całki Riemanna mamy

$m_{ij}\Delta y_j \le \int\limits_{y_{j-1}}^{y_j} f(\xi_i, y)dy \le M_{ij}\Delta y_j$, $j$=1,...,$m$. Wobec tego $\sum\limits_{j=1}^m m_{ij}\Delta y_j \le I(\xi_i) \le \sum\limits_{j=1}^m M_{ij}\Delta y_j$.

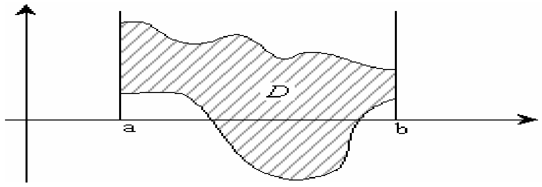
Mnożąc każdą z tych nierówności przez $\Delta x_i$ i sumując po $i$ otrzymujemy

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} m_{ij}\Delta x_i \Delta y_j \le \sum_{i=1}^{n}[\int_c^d f(\xi_i, y)dy]\Delta x_i \le \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} M_{ij}\Delta x_i \Delta y_j \; .$$

Gdy średnica podziału zmierza do 0, to skrajne sumy zmierzają do $\iint_P f(x,y)dxdy$ a środkowa do $\int_a^b [\int_c^d f(x,y)dy]dx$

**Uogólnienie**

Niech $D = \{(x,y) : a \le x \le b,\ \varphi(x) \le y \le \psi(x),\ \varphi,\psi -$ ciągłe$\}$ będzie **trapezem krzywoliniowym**




**Def**. **Obszar normalny** względem osi *OX*, to obszar, którego rzut na oś *OX* jest przedziałem $[a,b]$ i każdy przekrój prostą $x=x_0$ , $x_0 \in [a,b]$ jest przedziałem $[\varphi(x), \psi(x)]$

**Tw**.(w wersji dla obszaru normalnego) Jeżeli

- $f : D \to R$ jest całkowalna na *D* oraz
- $\forall_{x\in[a,b]}$ istnieje $I(x) = \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy$ ,

to funkcja $I(x) \in R([a,b])$ i $\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b \left[ \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy \right] dx$ .

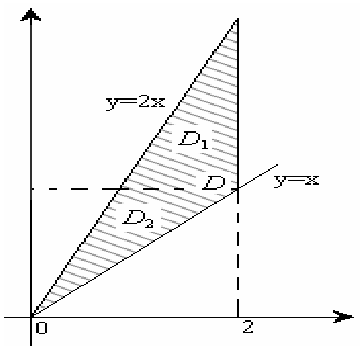
**Dow**. Obszar *D* można nakryć prostokątem *P* (bo *D* – ograniczony) $P \supset D$

$$f^*(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & (x,y) \in D \\ 0 & (x,y) \in P \setminus D \end{cases}$$

$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_D f^*(x,y)dxdy$ ..., (bo można podzielić obszar *P* na 3 obszary, przy czym w dwóch z nich funkcja $f^*$ jest zerem i stosujemy poprzednie twierdzenie:

$$\dots = \int_a^b \left[ \int_c^{\varphi(x)} f^*(x,y)dy + \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f^*(x,y)dy + \int_{\psi(x)}^{d} f^*(x,y)dy \right] dx = \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy$$

**Przykład**. Zmienić kolejność całkowania




$$\int_0^2\left[\int_x^{2x} f(x,y)dy\right]dx = \iint_D f(x,y)dxdy =$$

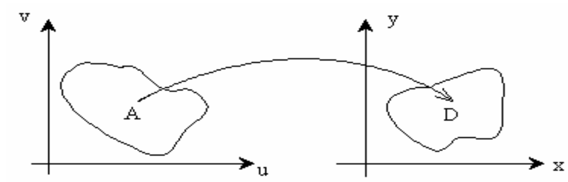
$$= \iint_{D_1} f(x,y)dxdy + \iint_{D_2} f(x,y)dxdy = \left\{\begin{matrix} y = x \to x = y \\ y = 2x \to x = \frac{1}{2}y \end{matrix}\right\}$$

$$= \int_0^2\left[\int_{\frac{y}{2}}^{y} f(x,y)dx\right]dy + \int_2^4\left[\int_{\frac{y}{2}}^{2} f(x,y)dx\right]dy$$

Jeżeli obszar nie jest normalny, to dzielimy go na skończoną liczbę obszarów normalnych i dodajemy całki.

## Zmiana zmiennych w całce podwójnej

Funkcja wektorowa: $T := \begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{cases}$ $(u,v) \in \Delta$ – otwarty, spójny.




Załóżmy, że $T$ jest różniczkowalna w $\Delta$ (czyli istnieją ciągłe pochodne cząstkowe w $\Delta$)

$$\text{jakobian: } J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \stackrel{df}{=} \det\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix} \neq 0 \text{ w } \Delta.$$

Przy powyższych założeniach można dowieść, że ***T* przekształca obszar na obszar i łuk zwykły na łuk zwykły.**

Niech $\Delta$, $D$ będą domkniętymi **obszarami regularnymi** (dające się podzielić na skończoną ilość obszarów normalnych).

$T := \begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{cases}$ odwzorowuje obszar regularny $\Delta$ na obszar regularny D.

Ponadto $f : D \to R$ - ciągła (więc ograniczona z ograniczoności obszaru)

**Tw.** Jeżeli

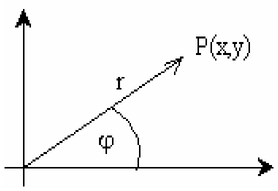
1° $T$ jest klasy $C^1$ w obszarze nakrywającym $\Delta$

2° $T : \operatorname{int}\Delta \to D$ jest różnowartościowa (*T* nie musi być różnowartościowa na brzegu $\Delta$)

3° $J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \neq 0$ w $\operatorname{int}\Delta$

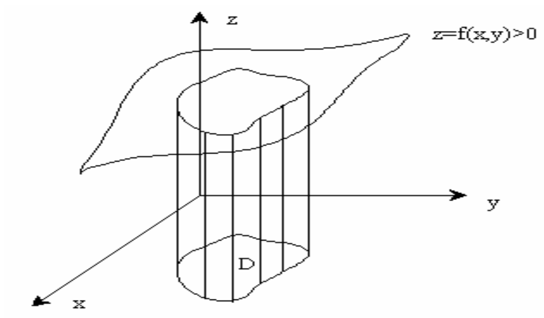
4° $f : D \to R$ jest ciągła na $D$ (wiec także ograniczona) to: $$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_\Delta f\big(x(u,v),y(u,v)\big)\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|dudv$$

## Transformacja biegunowa




$$T_B = \begin{cases} x = r\cos\varphi & 0 \le r \le \infty \\ y = r\sin\varphi & 0 \le \varphi \le 2\pi \end{cases}$$

$$J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\varphi)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r\cos^2\varphi + r\sin^2\varphi = r \qquad (J \ne 0 \text{ dla } r \ne 0)$$




$$V = \{(x,y,z) : x,y \in D,\ 0 \le z \le f(x,y)\}$$

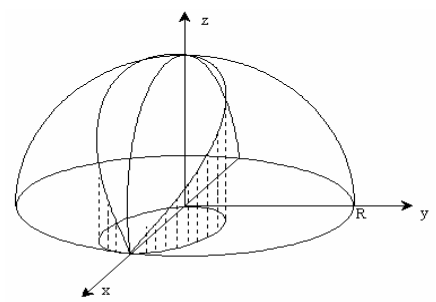
$$|V| = \iint_D f(x,y)dxdy$$

**Przykład** Obliczyć objętość bryły wyciętej walcem z kuli

Walec: $x^2 + y^2 = Rx \Leftrightarrow (x - \frac{R}{2})^2 + y^2 = (\frac{R}{2})^2$

Kula: $x^2 + y^2 + z^2 \le R^2$

Bryła Vivaniego:




- górna połówka

$$V = 2\iint_D \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}\,dxdy = \begin{array}{l} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ J = r \end{array} = 2\iint_{\substack{-\frac{\pi}{2}\le\varphi\le\frac{\pi}{2} \\ 0\le r\le R\cos\varphi}} \sqrt{R^2 - r^2}\,rdrd\varphi = ..$$

$$... = 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left[\int_0^{R\cos\varphi}\sqrt{R^2 - r^2}\,rdr\right]d\varphi = 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left[-\tfrac{1}{3}(R^2 - r^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{R\cos\varphi}\right]d\varphi = \tfrac{2}{3}R^3\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\big(1 - |\sin^3\varphi|\big)d\varphi =$$

$$= \tfrac{4}{3}R^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\big(1 - \sin^3\varphi\big)d\varphi = \tfrac{2}{9}R^3(3\pi - 4).$$