DMAD - rozwiązywanie rekurencji

Jak przygotować się do rozwiązywania zadań?

Przeczytaj rozdział 4.2 i 4.3 z podręcznika/wykładu.

Co powinnaś/powinieneś wiedzieć:

- Jak rozwiązać rekurencję jednorodną? (lemat 4.1 i twierdzenie 4.2)
- Jak rozwiązać niejednorodną liniową zależność rekurencyjną? (początek rozdziału 4.3)

Proponowane rozwiązania szczególne (tego nie musisz umieć na pamięć!!!)

Jeśli $f(n)$	i $a_n^{(1)}$	to $a_n^{(2)} =$
wielomian (zmiennej n) st. d	1 nie jest pierwiastkiem wiel. char.	$D_d n^d + D_{d-1} n^{d-1} + \ldots + D_0$
wielomian (zmiennej n) st. d	1 jest k–krotnym pierwiastkiem wiel. char.	$n^k(D_d n^d + D_{d-1} n^{d-1} + \ldots + D_0)$
$=C\beta^n$	β nie jest pierwiastkiem wiel. char.	$A\beta^n$
$=C\beta^n$	β jest k–krotnym pierwiastkiem wiel. char.	$An^k\beta^n$

UWAGA: stała $f(n) = C$ jest zarówno wielomianem st. 0 postaci $f(n) = C$ jak i $f(n) = C \cdot 1^n$.

A Zadania treningowe

Zadanie A.1. Znajdź wzór na n-ty wyraz ciągu danego rekurencją

$$a_n = \frac{7a_{n-1}}{n^2}, \quad \text{dla } n \geqslant 1, \quad a_0 = 13$$

i udowodnij go indukcyjnie.

Zadanie A.2.

a) Przeczytaj rozwiązanie przykładu 4.6 i na tej podstawie rozwiąż równanie rekurencyjne $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}$ dla $n \geqslant 2$, $a_0 = 1$, $a_1 = 0$.

b) Przeczytaj rozwiązanie przykładu 4.7 i na tej podstawie rozwiąż równanie rekurencyjne $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}$ dla $n \geqslant 2$, $a_0 = 2$, $a_1 = 5$.

Zadanie A.3. Przeczytaj rozwiązanie przykładu 4.13 i na tej podstawie rozwiąż równanie rekurencyjne $a_n = 5a_{n-1} - 8a_{n-2} + 4a_{n-3}$ dla $n = 3, 4, 5, \ldots$, z warunkami początkowymi $a_0 = 1$, $a_1 = 1$, $a_2 = 3$. (wsk.:$\alpha_1 = 1$).

Zadanie A.4.

a) Przeczytaj rozwiązania przykładów 4.16 i 4.17 i na tej podstawie rozwiąż równanie rekurencyjne $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2} - 3 \cdot 2^n$, dla $n \geqslant 2$, $a_0 = 1$, $a_1 = 12$

b) Przeczytaj rozwiązania przykładów 4.16 i 4.17 i na tej podstawie rozwiąż równanie rekurencyjne $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2} + 6$ dla $n \geqslant 2$, $a_0 = 3$, $a_1 = 10$

c) Przeczytaj rozwiązanie przykładu 4.18 i na tej podstawie rozwiąż równanie rekurencyjne $a_n = 9a_{n-2} - 8n + 10$ dla $n \geqslant 2$, $a_0 = 1$, $a_1 = 20$

Wskazówki do zadań z części A

A.1. Spróbujmy „zgadnąć” wzór:

$$a_n = \frac{7}{n^2} \cdot a_{n-1} = \frac{7}{n^2} \cdot \frac{7}{(n-1)^2} \cdot a_{n-2} = \frac{7}{n^2} \cdot \frac{7}{(n-1)^2} \cdot \frac{7}{(n-2)^2} a_{n-3} = \ldots = \frac{7^n}{(n!)^2} \cdot a_0 = \frac{7^n}{(n!)^2} \cdot 13.$$

Teraz należy udowodnić indukcyjnie następujące stwierdzenie:

$$\forall_{n \geqslant 0} \quad a_n = \frac{7^n}{(n!)^2} \cdot 13.$$

A.2.

a) Równanie charakterystyczne: $x^2 - 5x + 6 = 0$.
Ponieważ $x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)$, mamy rozwiązanie ogólne: $a_n = C_1 \cdot 2^n + C_2 \cdot 3^n$
$\begin{cases} 1 = a_0 = C_1 + C_2 \\ 0 = a_1 = 2C_1 + 3C_2 \end{cases}$
odp: $a_n = 3 \cdot 2^n - 2 \cdot 3^n$

b) Równanie charakterystyczne: $x^2 - 2x + 1 = 0$,
Ponieważ $x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$, mamy rozwiązanie ogólne: $a_n = (C_1 n + C_2) \cdot 1^n$
$\begin{cases} 2 = a_0 = C_2 \\ 5 = a_1 = C_1 + C_2 \end{cases}$
odp: $a_n = 3n + 2$

A.3. Równanie charakterystyczne: $x^3 - 5x^2 + 8x - 4 = 0$.
Ponieważ $x^3 - 5x^2 + 8x - 4 = (x-2)^2(x-1)$, mamy rozwiązanie ogólne: $a_n = C_1 \cdot 1^n + (C_2 n + C_3) \cdot 2^n$
$\begin{cases} 1 = C_1 + C_3 \\ 1 = C_1 + 2C_2 + 2C_3 \\ 3 = C_1 + 8C_2 + 4C_3 \end{cases}$
odp: $a_n = 3 + (n-2) \cdot 2^n$

A.4.

a) rozwiązanie ogólne: $a_n^{(1)} = C_1 \cdot 2^n + C_2 \cdot 3^n$;
$f(n) = -3 \cdot 2^n$, 2– pierwiastek wielomianu char., $k = 1$;
rozwiązanie szczególne (z tabelki): $a_n^{(2)} = A \cdot n \cdot 2^n$;
po podstawieniu $a_n^{(2)}$ do rekurencji: $A \cdot n \cdot 2^n = 5 \cdot A \cdot (n-1) \cdot 2^{n-1} - 6 \cdot A \cdot (n-2) \cdot 2^{n-2} - 3 \cdot 2^n$;
$a_n^{(2)} = 6 \cdot n \cdot 2^n$
$a_n = C_1 \cdot 2^n + C_2 \cdot 3^n + 6 \cdot n \cdot 2^n$
$\begin{cases} 1 = C_1 + C_2 \\ 12 = 2C_1 + 3C_2 + 6 \cdot 2 \end{cases}$
odp: $a_n = 3 \cdot 2^n - 2 \cdot 3^n + 3n2^{n+1}$;

b) rozwiązanie ogólne: $a_n^{(1)} = C_1 n + C_2$;
$f(n) = 6$, wielomian stopnia $d = 0$, $a_n^{(1)}$–wielomian stopnia $k = 1$;
rozwiązanie szczególne (z tabelki): $a_n^{(2)} = An^2$;
po podstawieniu $a_n^{(2)}$ do rekurencji: $a_n^{(2)} = 3n^2$
$a_n = C_1 \cdot n + C_2 + 3n^2$
$\begin{cases} 3 = C_2 \\ 10 = C_1 + C_2 + 2 \end{cases}$
odp: $a_n = 3n^2 + 4n + 3$;

c) rozwiązanie ogólne: $a_n^{(1)} = C_1 3^n + C_2(-3)^n$;
rozwiązanie szczególne (z tabelki): $a_n^{(2)} = D_1 n + D_0$;
po podstawieniu $a_n^{(2)}$ do rekurencji: $a_n^{(2)} = n + 1$
$a_n = C_1 3^n + C_2(-3)^n + n + 1$
$\begin{cases} 1 = C_1 + C_2 + 1 \\ 20 = 3C_1 - 3C_2 + 2 \end{cases}$
odp: $a_n = 3^{n+1} + (-3)^{n+1} + n + 1$;

B Zadania dla zainteresowanych

Zadanie B.1. Rozwiąż równanie rekurencyjne $a_n = 6a_{n-1} - 12a_{n-2} + 8a_{n-3}, \quad n \geqslant 3$ z warunkami początkowymi $a_0 = 3, a_1 = 12, a_2 = 76$.
Wsk.: zastosuj wzory skróconego mnożenia.

Zadanie B.2. Rozwiąż równanie rekurencyjne

a) $a_n^2 = 2a_{n-1}^2 + 10 \cdot 7^n, n \geqslant 1, a_0 = 2$ zakładając, że $a_n \geqslant 0$, dla wszystkich n;
b) $a_n = 64\frac{a_{n-1}^2}{a_{n-2}}, n \geqslant 2, a_0 = 8, a_1 = 1024$;
c) $a_n = \frac{1-n}{n}a_{n-1} + \frac{1}{n}2^n, n \geqslant 1, a_0 = 3456$;
d) $a_n = na_{n-1} + n!, n \geqslant 1, a_0 = 2$.

C Zadania do samodzielnej pracy w domu

Zadanie C.1. Znajdź wzór na n-ty wyraz ciągu danego rekurencją

a) $a_n = \frac{2a_{n-1}}{n+2}, \quad$ dla $n \geqslant 1, \quad a_0 = 8$;
b) $a_n = \frac{a_{n-1}}{7} + 1, \quad$ dla $n \geqslant 1, \quad a_0 = 1$;
c) $a_n = a_{n-1} + \frac{1}{n(n+1)}, \quad$ dla $n \geqslant 1, \quad a_0 = 0$;
d) $a_n = 3a_{n-1} + 4, \quad$ dla $n \geqslant 1, \quad a_0 = 4$;

i udowodnij go indukcyjnie.

Zadanie C.2. Rozwiąż równanie rekurencyjne.

a) $a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2}$ dla $n \geqslant 2$, $a_0 = 6$, $a_1 = 8$
b) $a_n = 4a_{n-2}$ dla $n \geqslant 2$, $a_0 = 0$, $a_1 = 4$
c) $a_n = \frac{8}{3}a_{n-1} + a_{n-2}$, dla $n \geqslant 2$, $a_0 = -2$, $a_1 = 4$.
d) $a_n = a_{n-1} - \frac{1}{4}a_{n-2}$, dla $n \geqslant 2$, $a_0 = \frac{1}{2}$, $a_1 = \frac{1}{2}$.

Zadanie C.3. Rozwiąż równania rekurencyjnie:

a) $a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2} + 2^n$, dla $n \geqslant 2$, $a_0 = 4$, $a_1 = 9$.
b) $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2} + 16 \cdot 5^n$, dla $n \geqslant 2$, $a_0 = 0, a_1 = 101$.
c) $a_n = a_{n-1} + 8n$, dla $n \geqslant 1$, $a_0 = 2$;
d) $a_n = 3a_{n-1} + 3^n$, dla $n \geqslant 2$, $a_1 = 15$
e) $a_n = 2a_{n-1} + 10 \cdot 7^n$, dla $n \geqslant 1$, $a_0 = 4$;

Zadanie C.4. Rozwiąż równanie rekurencyjne
$a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2} - 2a_{n-3}$ dla $n = 3, 4, 5, \ldots$, z warunkami początkowymi $a_0 = 3$, $a_1 = 6$, $a_2 = 0$.
wsk. $\alpha_1 = 2$

Zadanie C.5. Rozwiąż równanie rekurencyjne
$a_n = 3a_{n-2} - 2a_{n-3}$ dla $n = 3, 4, 5, \ldots$,
z warunkami początkowymi $a_0 = 1$, $a_1 = 2$, $a_2 = 12$.
wsk. $\alpha_1 = -2$

Odpowiedzi do niektórych zadań

C.1. a) $a_n = \frac{2^{n+4}}{(n+2)!}$ b) $\frac{7^{n+1}-1}{6 \cdot 7^n}$ c) $\frac{n}{n+1}$ d) $2 \cdot (3^{n+1} - 1)$

C.2.

a) $a_n = (6 - 2n)2^n$ dla $n \geqslant 0$;
b) $a_n = 2^n - (-2)^n$ dla $n \geqslant 0$;
c) $a_n = 3^n - 3(-\frac{1}{3})^n$ dla $n \geqslant 0$;
d) $a_n = (1 + n)(\frac{1}{2})^{n+1}$ dla $n \geqslant 0$;

C.3.

a) $a_n = (1 + 2n)2^n + 3$ dla $n \geqslant 0$;
b) $a_n = n - 25 + 5^{n+2}$ dla $n \geqslant 0$;
c) $a_n = 4n^2 + 4n + 2$ dla $n \geqslant 0$;
d) $a_n = (n + 4)3^n$ dla $n \geqslant 1$;
e) $a_n = 2 \cdot 7^{n+1} - 5 \cdot 2^{n+1}$ dla $n \geqslant 0$;

C.4. $a_n = 2 \cdot (-1)^{n+1} - 2^n + 6$, $n \geqslant 0$

C.5. $a_n = 4n + (-2)^n$, $n \geqslant 0$