Zadanie 1. *(6 pkt)*
Dana jest tablica $T[1..n]$ zawierająca liczby naturalne. Napisz pseudokod algorytmu, który obliczy, ile razy pojawiają się w niej wartości mniejsze od liczby x, zanim po raz pierwszy wystąpi liczba z przedziału domkniętego $[y, z]$ (tablicę przeglądamy od indeksu 1 do indeksu n). Jeśli w tablicy nie ma żadnej liczby z przedziału $[y, z]$, to należy wyznaczyć liczbę wszystkich wystąpień wartości mniejszych od x. Określ pesymistyczną złożoność swojego algorytmu, używając notacji Θ (odpowiedź uzasadnij).

Zadanie 2. *(5 pkt)*
Niech $A[1..n]$ będzie tablicą zawierającą liczby naturalne. Napisz pseudokod **rekurencyjnego** algorytmu obliczającego liczbę podzielnych przez 7 elementów tej tablicy. Podaj równanie rekurencyjne opisujące czas działania tego algorytmu.

Zadanie 3. *(5 pkt)*
Stosując metodę **programowania dynamicznego**, napisz pseudokod algorytmu znajdującego dla danych liczb całkowitych dodatnich n, k wartość funkcji $f(n, k)$ określonej wzorami:

$$f(n,k) = \begin{cases} k & \text{dla } n = 1 \\ 2n & \text{dla } k = 1 \text{ i } n > 1 \\ 3f(n-1,k) + 2f(n,k-1) & \text{dla } n,k > 1 \end{cases}$$

Określ pesymistyczną złożoność swojego algorytmu, używając notacji Θ (odpowiedź uzasadnij).

Zadanie 4. *(4 pkt)*

a. Korzystając z definicji, sprawdź, czy prawdziwe jest oszacowanie: $2n^3 - 4n^2 + 3 = \Theta(n^3)$.

b. Określ ograniczoność asymptotyczną funkcji $T(n)$ danej wzorem: $T(n) = 3T(n/3) + n^3$.

c. Określ ograniczoność asymptotyczną funkcji $T(n)$ danej wzorem: $T(n) = 7T(n/2) + n^2$.

d. Określ ograniczoność asymptotyczną funkcji $T(n)$ danej wzorem: $T(n) = T(n-1) + 5$.

Uzasadnij wszystkie odpowiedzi.

Zadanie 5. *(5 pkt)*
Dany jest ciąg n par liczb $(A[1], B[1]), \ldots, (A[n], B[n])$, reprezentujących długości boków n prostokątów. Napisz pseudokod algorytmu sortującego te prostokąty według nierosnących wartości ich obwodów, dowolną metodą **za wyjątkiem** sortowania bąbelkowego i sortowania przez wybieranie. W wyniku prostokąty mają być reprezentowane tak samo jak w danych wejściowych. Np. dla danych wejściowych $[(3,2),(7,1),(4,3)]$ prawidłowym wynikiem jest $[(7,1),(4,3),(3,2)]$. Określ pesymistyczną złożoność tego algorytmu, używając notacji Θ. Odpowiedź uzasadnij.

Twierdzenie o rekurencji uniwersalnej. Niech $a \geqslant 1$ i $b > 1$ będa stałymi, niech $f(n)$ będzie pewną funkcją i niech $T(n)$ będzie zdefiniowane dla nieujemnych liczb całkowitych przez rekurencję

$$T(n) = aT(n/b) + f(n),$$

gdzie n/b interpretujemy jako $\lfloor n/b \rfloor$ lub $\lceil n/b \rceil$. Wtedy funkcja $T(n)$ może być ograniczona asymptotycznie w następujący sposób:

1. Jeśli $f(n) = O(n^{\log_b a - \varepsilon})$ dla pewnej stałej $\varepsilon > 0$, to $T(n) = \Theta(n^{\log_b a})$.
2. Jeśli $f(n) = \Theta(n^{\log_b a})$, to $T(n) = \Theta(n^{\log_b a} \lg n)$.
3. Jeśli $f(n) = \Omega(n^{\log_b a + \varepsilon})$ dla pewnej stałej $\varepsilon > 0$ oraz $af(n/b) \leqslant cf(n)$ dla pewnej stałej $c < 1$ i wszystkich dostatecznie dużych n, to $T(n) = \Theta(f(n))$.