DMAD - podstawowe pojęcia grafowe

Jak przygotować się do rozwiązywania zadań?

Przeczytać rozdziały 7.1 – 7.5 z materiałów.

Przed zajęciami powinnam/powinienem wiedzieć co to jest:

$G(V, E, \psi)$ – graf; $G(V, E)$ – graf prosty

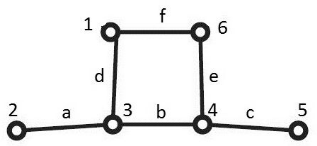
stopień wierzchołka $d_G(v)$
maksymalny/minimalny stopień wierzchołka $\Delta(G)/\delta(G)$
graf pusty i graf pełny (graf pełny K_n na n wierzchołkach)
dopełnienie G^c grafu prostego G
macierz przyległości ($a_{ij} = 1$ gdy v_i i v_j przyległe)
macierz incydencji ($m_{ij} = 1$ gdy v_i i e_j incydentne i e_j nie jest pętlą)

i znać twierdzenie:

$$\sum_{v \in V} d_G(v) = 2|E|$$

A Zadania na ćwiczenia

Zadanie A.1.



Dla grafu G na rysunku odpowiedz na pytania/wykonaj polecenia:
- ile ma krawędzi/wierzchołków?
- podaj funkcję incydencji,
- ile wynoszą stopnie wierzchołków?
- ile wynosi $\Delta(G)$ i $\delta(G)$?
- jak wygląda jego dopełnienie?
- podaj jego macierz przyległości?
- podaj jego macierz incydencji?

Zadanie A.2. Bez rysowania grafu, na podstawie podanej poniżej macierzy przyległości, określ liczbę wierzchołków, liczbę krawędzi i stopnie wierzchołków grafu. Następnie narysuj ten graf i sprawdź wynik.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Zadanie A.3. Uzasadnij, że $\delta \leqslant 2\varepsilon/\nu \leqslant \Delta$, gdzie ν jest liczbą wierzchołków a ε liczbą krawędzi.

Zadanie A.4. Uzasadnij, że w każdym grafie liczba wierzchołków stopnia nieparzystego jest parzysta.

Zadanie A.5. W grafie G o 19 krawędziach są tylko wierzchołki stopnia 3 i stopnia 5. Są cztery wierzchołki stopnia 5. Ile jest wszystkich wierzchołków?

Zadanie A.6. (Przykład 7.2. z wykładu)

a) Pokaż, że jeżeli graf G jest grafem prostym na zbiorze wierzchołków $\{1, \ldots, \nu\}$ o ε krawędziach, to $\varepsilon(G) \leqslant \binom{\nu}{2}$.
b) Ile można utworzyć grafów prostych na zbiorze wierzchołków $\{1, \ldots, \nu\}$, które mają dokładnie ε krawędzi?
c) Ile jest wszystkich grafów prostych na zbiorze wierzchołków $\{1, \ldots, \nu\}$?

B Zadania na ćwiczenia - jeśli czas pozwoli

Zadanie B.1. Grafy mają macierze przyległości:

$$G_1 : \begin{bmatrix} 0 & A_{n\times m} \\ A_{m\times n} & 0 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad G_2 : \begin{bmatrix} B_n & 0 \\ 0 & B_m \end{bmatrix},$$

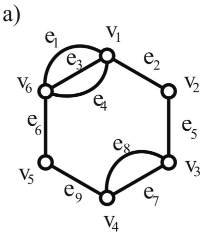
gdzie przez 0 oznaczamy macierz składającą się z samych 0, przez $A_{k\times l}$ oznaczamy macierz o k wierszach i l kolumnach składającą się z samych 1 oraz przez B_k macierz o k wierszach i k kolumnach składającą się z samych 0 na przekątnej, a poza tym samych jedynek. Narysuj te grafy dla $n = 4$ i $m = 5$. Następnie dla dowolnego n i m:

a) Wyznacz liczbę wierzchołków dla każdego z tych grafów.
b) Podaj stopnie każdego wierzchołka.
c) Podaj ile krawędzi ma każdy z tych grafów.
d) Czy któryś z tych grafów jest dwudzielny?

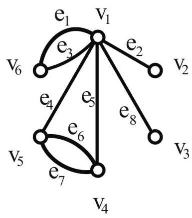
C Zadania do samodzielnej pracy w domu

Zadanie C.1. Dla podanego grafu podaj zbiór wierzchołków, krawędzi i zapisz funkcję incydencji.

a)

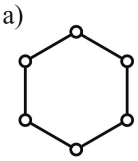


b)

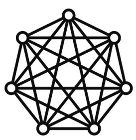


Zadanie C.2. Narysuj dopełnienie grafu

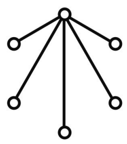
a)



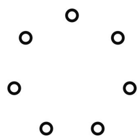
b)



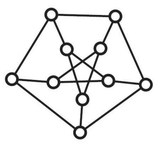
c)

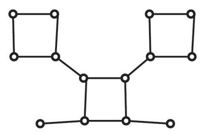


d)



Zadanie C.3.

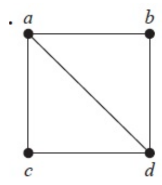




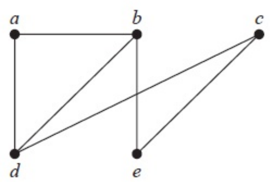
Dla grafów na rysunkach odpowiedz na pytania:
- ile mają krawędzi/wierzchołków?
- ile wynoszą stopnie wierzchołków?
- ile wynosi $\Delta(G)$ i $\delta(G)$?

Zadanie C.4. Znajdź macierz przyległości i incydencji następujących grafów

a)



b)



Zadanie C.5. Bez rysowania grafu, na podstawie macierzy przyległości, określ liczbę wierzchołków, liczbę krawędzi i stopnie wierzchołków grafu. Następnie narysuj ten graf i sprawdź wynik.

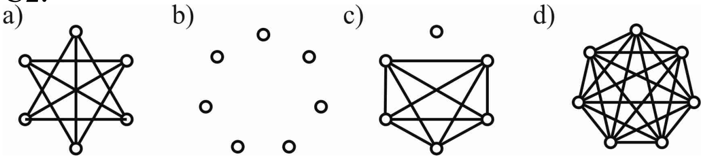
$$a. \begin{bmatrix} 0&0&0&1&1&1&1 \\ 0&0&0&1&1&1&1 \\ 0&0&0&1&1&1&1 \\ 1&1&1&0&0&0&0 \\ 1&1&1&0&0&0&0 \\ 1&1&1&0&0&0&0 \\ 1&1&1&0&0&0&0 \end{bmatrix} \quad b. \begin{bmatrix} 0&1&0&1&0&1 \\ 1&0&1&0&1&0 \\ 0&1&0&1&0&1 \\ 1&0&1&0&1&0 \\ 0&1&0&1&0&1 \\ 1&0&1&0&1&0 \end{bmatrix} \quad c. \begin{bmatrix} 0&1&1&0&1&1 \\ 1&0&1&1&1&0 \\ 1&1&0&1&1&1 \\ 0&1&1&0&1&0 \\ 1&1&1&1&0&1 \\ 1&0&1&0&1&0 \end{bmatrix}$$

Zadanie C.6. Graf prosty G ma 40 wierzchołków. Ile krawędzi ma graf G jeżeli jego dopełnienie G^c ma 480 krawędzi?

Odpowiedzi do niektórych zadań

C1. a) $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_6\}$, $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_9\}$, $\psi(e_1) = \psi(e_3) = \psi(e_4) = v_1v_6$, $\psi(e_2) = v_1v_2$, $\psi(e_5) = v_2v_3$, $\psi(e_7) = \psi(e_8) = v_3v_4$, $\psi(e_9) = v_4v_5$, $\psi(e_6) = v_5v_6$
b) $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_6\}$, $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_8\}$, $\psi(e_1) = \psi(e_3) = v_1v_6$, $\psi(e_2) = v_1v_2$, $\psi(e_8) = v_1v_3$, $\psi(e_5) = v_1v_4$, $\psi(e_4) = v_1v_5$, $\psi(e_6) = \psi(e_7) = v_4v_5$

C2.
a) b) c) d)



C3. a) $|E| = 15$, $|V| = 10$, $\forall v : d_G(v) = 3$, $\Delta(G) = \delta(G) = 3$
b) $|E| = 16$, $|V| = 14$, $d_G(v) = 1, 2, 3$, $\Delta(G) = 3$, $\delta(G) = 1$

C4. a) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

C5. a) $|V| = 7$, $|E| = 12$, $3, 3, 3, 3, 4, 4, 4$
b) $|V| = 6$, $|E| = 9$, $3, 3, 3, 3, 3, 3$
c) $|V| = 6$, $|E| = 12$, $3, 3, 4, 4, 5, 5$

C6. 300

DMAD - podgrafy, izomorfizm, ciągi stopni

Jak przygotować się do rozwiązywania zadań?

Przeczytać rozdziały 7.3 – 7.7 (definicje) z materiałów.

Przed zajęciami powinnam/powinienem wiedzieć co to jest:

izomorfizm grafów (grafy izomorficzne), automorfizm grafu

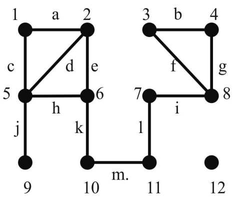
podgraf grafu G, $H \subseteq G$,
$G[V_1]$ – podgraf indukowany na wierzchołkach z $V_1 \subset V$
$G[E_1]$ – podgraf indukowany na krawędziach z $E_1 \subset E$
$G \setminus V_1$ $(V_1 \subset V)$
$G \setminus E_1$ $(E_1 \subset E)$
podgraf rozpięty
ciag stopni grafu
ciąg graficzny

graf dwudzielny, graf dwudzielny pełny $K_{n,m}$,
graf regularny (k–regularny)

cykl na n wierzchołkach C_n,
ścieżka na n wierzchołkach P_n,
n–kostka Q_n,

A Zadania na ćwiczenia

Zadanie A.1.



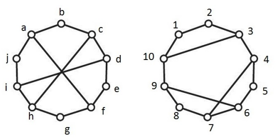
Dla grafu G na rysunku oznaczmy

$$\hat{V} = \{1, 2, 5, 6, 7\} \quad \text{i} \quad \hat{E} = \{b, f, g, i\}.$$

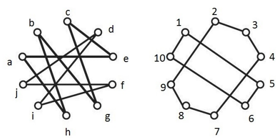
Narysuj następujące grafy: $G[\hat{V}]$, $G[V \setminus \hat{V}]$, $G - \hat{V}$, $G[\hat{E}]$, $G[E \setminus \hat{E}]$, $G - \hat{E}$.

Zadanie A.2. Dla każdej z podanych par grafów rozstrzygnij, czy grafy są izomorficzne.

a)



b)



Zadanie A.3. (Przykład 7.5. z materiałów) Narysuj wszystkie nieizomorficzne grafy proste o 5 wierzchołkach i 5 krawędziach.

Zadanie A.4. Dla poniższych grafów odpowiedz na pytania:
- ile mają krawędzi/wierzchołków?
- czy są grafami regularnymi?
- czy są grafami dwudzielnymi?
- ile krawędzi mają ich dopełnienia?

a) $K_{3,4}$ b) $K_{n,m}$ (Przykład 7.6 z materiałów) c) Q_4 d) Q_n (Przykłady 7.7. i 7.8. z materiałów)

Zadanie A.5. Czy podany ciąg jest graficzny? Jeśli tak, to narysuj wszystkie nieizomorficzne grafy o podanym ciągu stopni. Jeśli nie – uzasadnij dlaczego tak sądzisz.

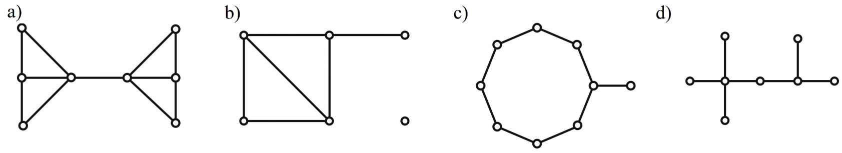
a) (2,2,2,1,1) b) (3,3,3,3,3) c) (6,1,1,1,1)

B Zadania na ćwiczenia - jeśli czas pozwoli

Zadanie B.1.

a) Ile jest **oznaczonych** grafów prostych o 5 wierzchołkach i 5 krawędziach?
b) Dla każdego narysowanego w **Zadaniu A.3** grafu określ ile ma on izomorficznych oznaczonych kopii o danym zbiorze wierzchołków $\{a, b, c, d, e\}$. Sprawdź, czy po zsumowaniu po wszystkich nieizomorficznych grafach otrzymasz wynik z (a).

Zadanie B.2. Ile jest grafów oznaczonych o zbiorze wierzchołków $\{1, 2, \ldots, n\}$ (n oznacza liczbę wierzchołków rozpatrywanego grafu) izomorficznych z podanym poniżej grafem (tzn. na ile sposobów możemy ponumerować wierzchołki tego grafu tak, aby za każdym razem uzyskać inny graf)? Odpowiedź uzasadnij.



Zadanie B.3. (Przykład 7.10 z materiałów) Niech $d = (d_1, d_2, \ldots, d_n)$ będzie nierosnącym ciągiem nieujemnych liczb całkowitych, a $d' = (d_2 - 1, d_3 - 1, ..., d_{d_1+1} - 1, d_{d_1+2}, \ldots, d_n)$.

a) Pokaż, że jeśli d' jest graficzny to d jest graficzny.
b) Prawdą jest też stwierdzenie: Jeśli d jest graficzny to d' jest graficzny. Dlaczego dowód tej implikacji jest trudniejszy?
c) Na podstawie a) i b) napisz algorytm rostrzygający, czy ciąg d jest graficzny. Opisz słownie jak wyglądałby algorytm konstruujący graf prosty z ciągiem stopni d.

Zadanie B.4. Rozstrzygnij, czy podany ciąg jest graficzny. Jeśli tak, to korzystając z algorytmu z poprzedniego zadania narysuj graf o tym ciągu stopni. Jeśli nie, to uzasadnij, dlaczego tak sądzisz.

a) (5,5,4,4,3,3,3,2,1)
b) (6,6,6,5,5,4,4,3,3,1)
c) (5,5,5,5,2,2,1,1)

Zadanie B.5. Grafy G i H mają ten sam ciąg stopni:

a) (4,2,2,2,2,2,2,2,1,1);
b) (8,1,1,1,1,1,1,1,1).

Czy G i H muszą być izomorficzne?

C Zadania do samodzielnej pracy w domu

Zadanie C.1. Graf G ma macierz incydencji:

$$\begin{array}{c|ccccccccc}
 & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 & e_8 & e_9 \\
v_1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
v_2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
v_3 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
v_4 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
v_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
v_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
v_7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
v_8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1
\end{array}$$

Oznaczmy

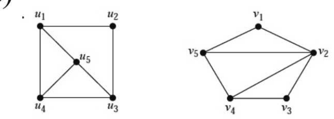
$$\hat{V} = \{v_4, v_6, v_7, v_8\} \quad \text{i} \quad \hat{E} = \{e_6, e_7, e_8, e_9\}$$

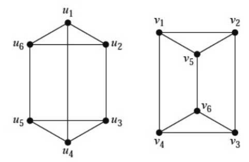
Narysuj następujące grafy:

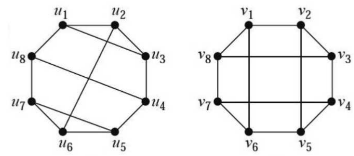
$$G,\ G[\hat{V}],\ G[V \setminus \hat{V}],\ G - \hat{V},\ G[\hat{E}],\ G[E \setminus \hat{E}],\ G - \hat{E}.$$

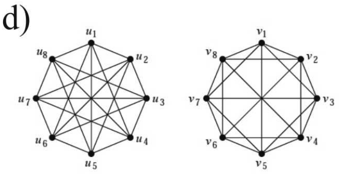
Zadanie C.2. Narysuj wszystkie nieizomorficzne grafy proste na 5 wierzchołkach, które nie zawierają cykli.

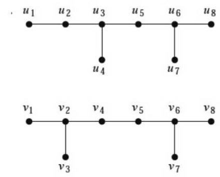
Zadanie C.3. Dla każdej pary grafów określ, czy są izomorficzne. Jeśli tak, to wskaż izomorfizm. Jeśli nie, to uzasadnij, dlaczego tak sądzisz.

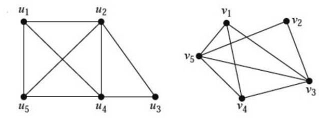
a)


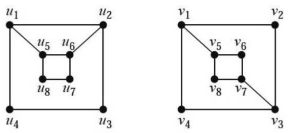
b)


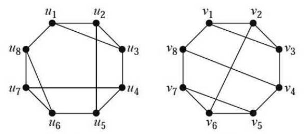
c)


d)


e)


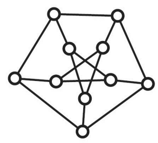
f)


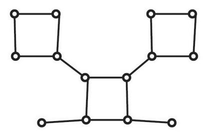
g)


h)


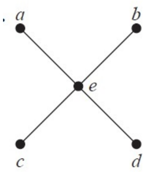
Zadanie C.4. Dla poniższych grafów odpowiedz na pytania:
- ile mają krawędzi/wierzchołków?
- jaki mają ciąg stopni?
- ile krawędzi mają ich dopełnienia?
- jak może wyglądać ich macierz przyległości?
- czy są regularne (jeśli nie zawsze, to dla jakich l, n i m są)?
- czy są dwudzielne (jeśli nie zawsze, to dla jakich l, n i m są)?

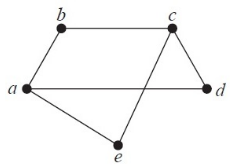
a. C_n b. P_n c. $K_{l,n,m}$ (graf pełny trójdzielny) d. e.

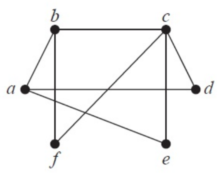


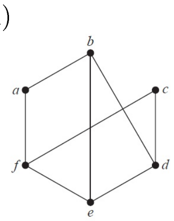


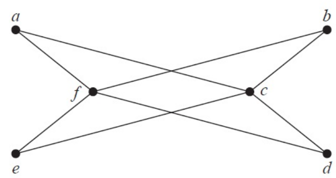
Zadanie C.5. Określ, które z poniższych grafów są dwudzielne?

a)


b)


c)


d)


e)


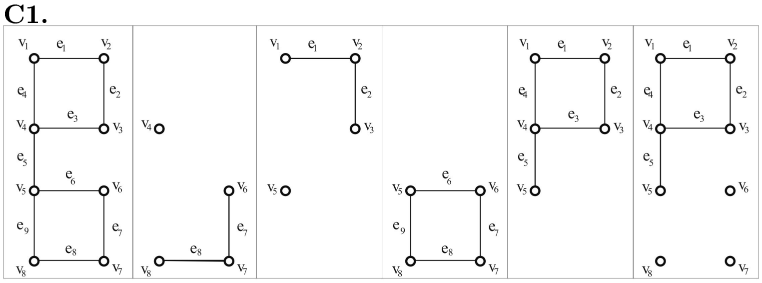
Które z nich mają cykle nieparzyste? Dlaczego?

Zadanie C.6. Rozstrzygnij, czy podany ciąg jest graficzny. Jeśli tak, to korzystając z algorytmu z Przykładu 7.10 z materiałów narysuj graf o tym ciągu stopni. Jeśli nie, to uzasadnij, dlaczego tak sądzisz.

a) (5,5,4,4,3,3,3,3,1);
b) (6,6,6,5,5,4,4,3,2,1);
c) (6,6,6,6,2,2,1,1);
d) (7,7,5,5,5,5,2,2,2).
e) (3,3,3,3,3,3,3,3,3);
f) (8,8,7,7,7,7,7,1,1,1,1);

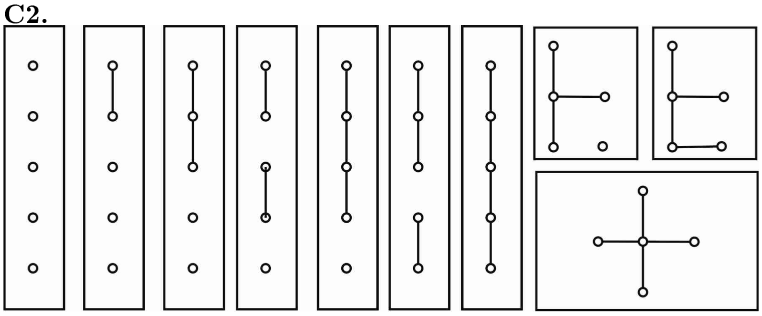
Odpowiedzi do niektórych zadań

C1.



G $G[\hat{V}]$ $G[V \setminus \hat{V}]$, $G - \hat{V}$ $G[\hat{E}]$ $G[E \setminus \hat{E}]$ $G - \hat{E}$

C2.



C3. a) nie, sprawdź cykle C_5
b) tak, $f(u_1) = v_5$, $f(u_4) = v_6$, $f(u_2) = v_2$, $f(u_3) = v_3$, $f(u_5) = v_4$, $f(u_6) = v_1$
c) nie, sprawdź cykle C_3
d) nie, rozważ sąsziedztwo dowolnego wierzchołka
e) nie, wierzchołki stopnia 3 w różnej odległosci
f) tak, $f(u_3) = v_2$, $f(u_2) = v_5$, $f(u_4) = v_3$, $f(u_1) = v_1$, $f(u_5) = v_4$
g) nie, porównaj cykle C_4 lub C_6
h) nie, graf po lewej zawiera cykl C_6 bez przekątnej

C4. a) $|E| = n$, $|V| = n$, ciąg stopni: $2, 2, \ldots, 2$, $|E^c| = \binom{n}{2} - n$, graf regularny, dwudzielny tylko dla n parzystych
b) $|E| = n - 1$, $|V| = n$, ciąg stopni:$1, 1, 2, 2, \ldots, 2$, $|E^c| = \binom{n}{2} - n + 1$, graf nie jest regularny, dwudzielny dla każdego n
c) $|E| = ln + lm + nm$, $|V| = l + n + m$, ciąg stopni: l wierzchołków stopnia $n + m$, n wierzchołków stopnia $l + m$, m wierzchołków stopnia $l+n$, $|E^c| = \binom{l+n+m}{2} - lnm$, graf regularny wtedy i tylko wtedy, gdy $l = n = m$, nie jest dwudzielny
d) $|E| = 15$, $|V| = 10$, ciąg stopni: $3, 3, \ldots, 3$, $|E^c| = 30$, graf regularny, nie jest dwudzielny
e) $|E| = 16$, $|V| = 14$, ciąg stopni: $1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 3, 3$, $|E^c| = 75$, graf nie jest regularny, jest dwudzielny

a) $\begin{bmatrix} 0 & & & & & & & & \\ 1 & 0 & & & & & & & \\ 0 & 1 & 0 & & & & & & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & & & & & \\ \vdots & \vdots & & & & \ddots & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$
b) $\begin{bmatrix} 0 & & & & & & & & \\ 1 & 0 & & & & & & & \\ 0 & 1 & 0 & & & & & & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & & & & & \\ \vdots & \vdots & & & & \ddots & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$
c) $\begin{bmatrix} \mathbf{0}_{l\times l} & \mathbf{1}_{l\times n} & \mathbf{1}_{l\times m} \\ \mathbf{1}_{n\times l} & \mathbf{0}_{n\times n} & \mathbf{1}_{n\times m} \\ \mathbf{1}_{m\times l} & \mathbf{1}_{m\times n} & \mathbf{0}_{m\times m} \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 0&1&0&0&1&0&1&0&0&0 \\ 1&0&1&0&0&0&0&1&0&0 \\ 0&1&0&1&0&0&0&0&1&0 \\ 0&0&1&0&1&0&0&0&0&1 \\ 1&0&0&1&0&1&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&1&0&0&1&1&0 \\ 1&0&0&0&0&0&0&0&1&1 \\ 0&1&0&0&0&1&0&0&0&1 \\ 0&0&1&0&0&1&1&0&0&0 \\ 0&0&0&1&0&0&1&1&0&0 \end{bmatrix}$ e) $\begin{bmatrix} 0&1&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 1&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&1&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&1&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0 \\ 1&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&1&0&0&1&0&0&0&1&0&0&0&0&0 \\ 0&0&1&0&0&0&0&1&0&1&0&0&0&0 \\ 0&0&0&1&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&1&0&0&0&1&0&1&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&1&0&1&0&0&0&1&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&1&0&1&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&1&0&1 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0 \end{bmatrix}$

C5. Grafy dwudzielne to: a), b), e).
c) zawiera cykl bcf, d) zawiera cykl bde

C6. a), e), f) nie są graficzne, sprawdź liczbę wierzchołków nieparzystego stopnia
c) nie jest graficzny, sprawdź algorytm
b) i d) są graficzne

DMAD - spójność, lasy i drzewa, krawędzie i wierzchołki cięcia, oszacowania liczby krawędzi

Jak przygotować się do rozwiązywania zadań?

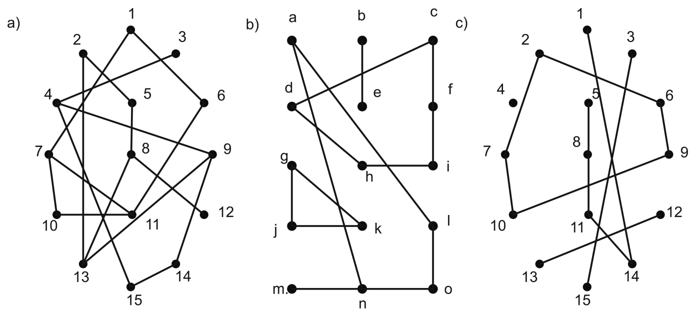
Przeczytać rozdziały 7.8 – 7.9 z materiałów.

Przed zajęciami powinnam/powinienem znać:

– twierdzenie 7.3, twierdzenia 7.4 – 7.9;
– definicje 7.21 – 7.26;

A Zadania na ćwiczenia

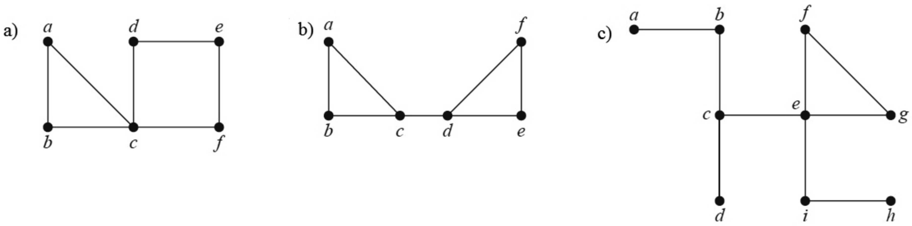
Zadanie A.1. Znajdź wszystkie składowe spójności grafu a).



Zadanie A.2. Pokaż, że jeżeli L jest lasem, to liczba jego drzew $\omega = \omega(L)$ dana jest wzorem

$$\omega(L) = \nu(L) - \varepsilon(L).$$

Zadanie A.3. Wyznacz wszystkie wierzchołki i krawędzie cięcia w grafach poniżej.



Jak może się zmienić liczba składowych grafu po usunięciu jednej krawędzi? A jak może się zmienić po usunięciu jednego wierzchołka?

Zadanie A.4. Udowodnij, że e jest krawędzią cięcia grafu G wtedy i tylko wtedy, gdy e nie należy do żadnego cyklu grafu G. Wyciągnij z tego wniosek, że graf L jest lasem wtedy i tylko wtedy, gdy każda krawędź L jest krawędzią cięcia.

Zadanie A.5. Grafy G_1 i G_2 składają się z dwóch składowych spójności, które są grafami pełnymi. Niech $G_1 = K_\ell \oplus K_k$, $G_2 = K_{\ell+1} \oplus K_{k-1}$ i $\ell \geqslant k \geqslant 2$. Pokaż, że $\varepsilon(G_2) \geqslant \varepsilon(G_1)$.

Zadanie A.6. Ile najmniej i ile najwięcej krawędzi może mieć graf prosty o 16 wierzchołkach i 5 składowych spójności? Jak zmieni się odpowiedź, jeśli graf ten ma minimalny stopień co najmniej 1?

B Zadania na ćwiczenia - jeśli czas pozwoli

Zadanie B.1. Ile należy usunąć krawędzi ze spójnego grafu o n wierzchołkach i m krawędziach, aby uzyskać drzewo rozpięte?

Zadanie B.2. Ile najmniej i ile najwięcej krawędzi może mieć graf prosty o 23 wierzchołkach i 7 składowych spójności? Jak zmieni się odpowiedź, jeśli graf ten ma minimalny stopień co najmniej 2?

Zadanie B.3. Rozstrzygnij ile najmniej i ile najwięcej składowych spójności może mieć graf prosty, który ma 50 wierzchołków i 45 krawędzi. Podaj przykłady takich grafów o najmniejszej i największej liczbie składowych?

C Zadania do samodzielnej pracy w domu

Zadanie C.1. Znajdź wszystkie składowe spójności grafów b) i c) z zadania A.1.

Zadanie C.2. Czy każde drzewo jest grafem dwudzielnym?

Zadanie C.3. Drzewo T ma dwa wierzchołki stopnia 4, jeden wierzchołek stopnia 3, dwa wierzchołki stopnia 2 i n wierzchołków stopnia 1. Wyznacz n.

Zadanie C.4. Zarówno G jak i G^c jest drzewem. Ile wierzchołków ma G?

Zadanie C.5. Ile najmniej i ile najwięcej krawędzi może mieć graf prosty o 23 wierzchołkach i 7 składowych spójności? Jak zmieni się odpowiedź, jeśli graf ten ma minimalny stopień co najmniej 2?

Zadanie C.6. Ile najmniej i ile najwięcej składowych spójności może mieć graf prosty o 100 wierzchołkach i 54 krawędziach?

Zadanie C.7. Dany jest graf prosty G o 12 wierzchołkach i 56 krawędziach.

a) Ile najmniej i ile najwięcej składowych może mieć G?
b) Ile najmniej i ile najwięcej składowych może mieć G^c?

Zadanie C.8. Narysuj wszystkie nieizomorficzne drzewa na siedmiu wierzchołkach o maksymalnym stopniu równym 3.

Odpowiedzi do niektórych zadań

C1. graf b: $\{b, e\}$, $\{a, l, m, n, o\}$, $\{g, j, k\}$, $\{c, d, f, h, i\}$. graf c: $\{1, 5, 8, 11, 14\}$, $\{12, 13\}$, $\{3, 15\}$, $\{2, 4, 6, 7, 9, 10\}$.

C2. TAK

C3. $n = 7$

C4. $\nu(G) = 1$ lub $\nu(G) = 4$

C5. $\varepsilon \in \{16, \ldots, 136\}$.
($\delta \geqslant 2 : \varepsilon \in \{23, \ldots, 28\}$).

C6. $\omega \in \{46, \ldots, 90\}$.

C7. a) $\omega = 1$. b) $\omega \in \{2, \ldots, 8\}$.

DMAD - kod Prüfera, algorytm Kruskala, grafy Eulera i Hamiltona

Jak przygotować się do rozwiązywania zadań?

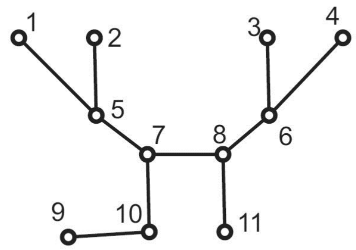
Przeczytać rozdziały 7.10 – 7.11, 8.2, 8.3 i 8.4 z materiałów.

Przed zajęciami powinnam/powinienem znać:

– definicję drzewa rozpiętego;
– twierdzenia 7.8, 7.10, 7.11;
– działanie kodu Prüfera;
– działanie **algorytmu Kruskala**.
– definicje grafu Eulera i grafu Hamiltona, Tw. 8.2, 8.4

A Zadania na ćwiczenia

Zadanie A.1. Podaj kod Prüfera poniższego drzewa:

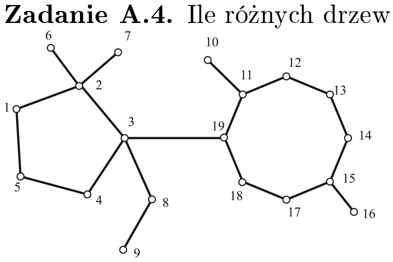


Zadanie A.2. Narysuj drzewo o podanym kodzie Prüfera: (1,1,2,5,2,2,6,8).

Zadanie A.3. Bez rysowania drzewa odpowiedz na poniższe pytania dotyczące drzewa o kodzie Prüfera (8,1,1,1,4,3,3,4,3,7).

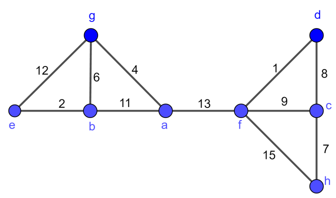
a) Ile ma ono wierzchołków?
b) Ile ma ono wierzchołków o stopniu 1?
c) Jaki ma stopień wierzchołek 3 w tym drzewie?

Zadanie A.4. Ile różnych drzew rozpiętych ma graf na poniższym rysunku?

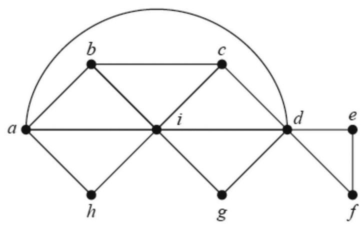


Zadanie A.5. W podanym niżej grafie wyznaczyć za pomocą algorytmu Kruskala optymalne drzewo rozpięte (o minimalnej wadze). Wykorzystaj etykiety korzeni w trakcie działania algorytmu.

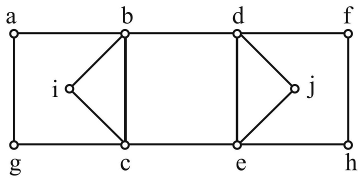
$$\begin{bmatrix} 0 & 11 & \infty & \infty & \infty & 13 & 4 & \infty \\ 11 & 0 & \infty & \infty & 2 & \infty & 6 & \infty \\ \infty & \infty & 0 & 8 & \infty & 9 & \infty & 7 \\ \infty & \infty & 8 & 0 & \infty & 1 & \infty & \infty \\ \infty & 2 & \infty & \infty & 0 & \infty & 12 & \infty \\ 13 & \infty & 9 & 1 & \infty & 0 & \infty & 15 \\ 4 & 6 & \infty & \infty & 12 & \infty & 0 & \infty \\ \infty & \infty & 7 & \infty & \infty & 15 & \infty & 0 \end{bmatrix}$$



Zadanie A.6. Czy poniższy graf ma obchód/szlak Eulera?

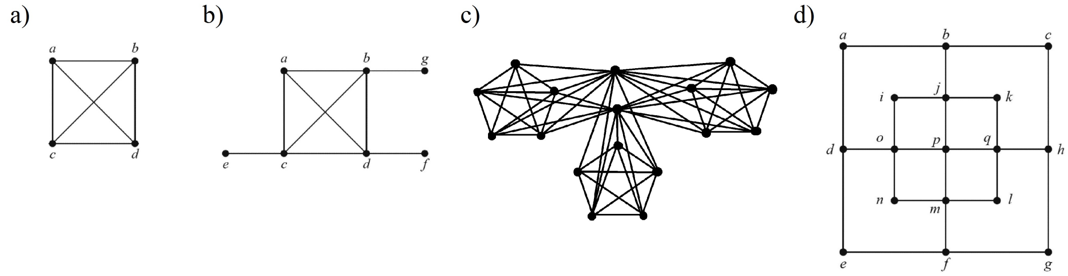


Zadanie A.7. Korzystając z Algorytmu Fleury'ego wyznacz obchód Eulera w grafie poniżej (rozpatruj krawędzie uwzględniając wierzchołki w kolejności alfabetycznej).



Zadanie A.8. Które z poniższych grafów mają cykl/ścieżkę Hamiltona? Odpowiedzi uzasadnij.

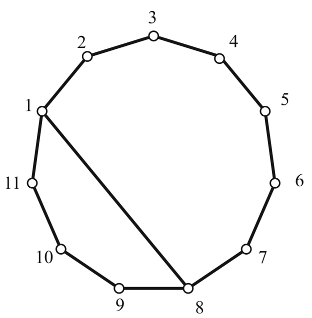
a) b) c) d)



B Zadania na ćwiczenia - jeśli czas pozwoli

Zadanie B.1. Wyznacz liczbę drzew rozpiętych grafu $K_{2,3}$.

Zadanie B.2. Ile różnych drzew rozpiętych ma graf na rysunku poniżej? Ile najmniej i najwięcej może mieć drzew rozpiętych cykl na n ($n \geqslant 5$) wierzchołkach z jedną przekątną (np. graf na rysunku 4 jest cyklem na 11 wierzchołkach z przekątną $\{1, 8\}$)? Odpowiedź uzasadnij.



Zadanie B.3. Ile jest drzew na zbiorze wierzchołków $\{1, 2, \ldots, 2n\}$ ($n \geqslant 3$) o dwóch wierzchołkach stopnia n? Zadanie rozwiąż na dwa sposoby, bezpośrednio i korzystając z kodu Prüfera.

Zadanie B.4. Wyjaśnij jak, korzystając z algorytmu Kruskala, znaleźć minimalny rozpięty las w grafie niespójnym.

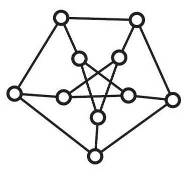
Zadanie B.5. Czy każdy graf, który posiada obchód Eulera ma parzystą liczbę krawędzi? Jeśli tak, to podaj uzasadnienie. Jeśli nie, to podaj kontrprzykład.

Zadanie B.6. Dla jakich k, k–kostka Q_k, $k \geqslant 2$, jest grafem eulerowskim/hamiltonowskim?

Zadanie B.7. Narysuj, o ile istnieje, najmniejszy graf spójny bez krawędzi cięcia i bez wierzchołka cięcia, który nie posiada cyklu Hamiltona.

Zadanie B.8. Ile różnych cykli Hamiltona jest w grafach K_n i $K_{n,n}$?

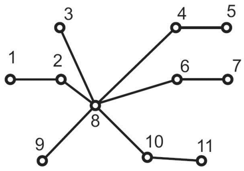
Zadanie B.9. Pokaż, że graf Petersena nie ma cyklu Hamiltona.



C Zadania do samodzielnej pracy w domu

Zadanie C.1. Ile drzew rozpiętych ma: K_6 i C_8?

Zadanie C.2. Podaj kod Prüfera drzewa na rysunku poniżej.



Zadanie C.3. Narysuj (o ile istnieją) drzewa o podanym kodzie Prüfera (zakładamy, że zbiór wierzchołków jest zbiorem kolejnych liczb naturalnych):

a) (9,7,7,7,3,4,5,4,10)
b) (9,7,7,7,3,10,5)
c) (9,7,10,7,2,4,2,4,1)
d) (8,7,7,7,11,5,1)

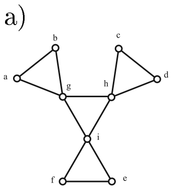
Zadanie C.4. Dla grafu podanego poniżej macierzą wag wyznacz drzewo rozpięte o minimalnej wadze za pomocą algorytmu Kruskala. Wykorzystaj etykiety korzeni w trakcie działania algorytmu.

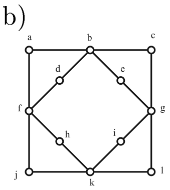
a) $\begin{bmatrix} \infty & \infty & 5 & 3 & 9 & \infty \\ \infty & \infty & 6 & 2 & 8 & 10 \\ 5 & 6 & \infty & 1 & \infty & \infty \\ 3 & 2 & 1 & \infty & 7 & \infty \\ 9 & 8 & \infty & 7 & \infty & 4 \\ \infty & 10 & \infty & \infty & 4 & \infty \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} \infty & \infty & 6 & 4 & 15 & \infty \\ \infty & \infty & 7 & 3 & 13 & 20 \\ 6 & 7 & \infty & 2 & \infty & \infty \\ 4 & 3 & 2 & \infty & 10 & \infty \\ 15 & 13 & \infty & 10 & \infty & 5 \\ \infty & 20 & \infty & \infty & 5 & \infty \end{bmatrix}$

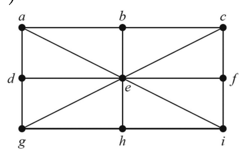
Zadanie C.5. Czy każdy graf prosty o danym ciągu stopni ma obchód Eulera?

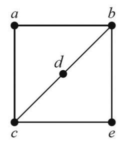
a) (4,4,4,4,4,4,4,4,4,4)
b) (6,4,4,4,4,4,4,4,4,4)

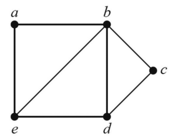
Zadanie C.6. Dla poniższych grafów rozstrzygnij, czy ma obchód/szlak Eulera, cykl/ścieżkę Hamiltona.
Jeśli TAK podaj go/ją (tzn. podaj w jakiej kolejności odwiedzane są wierzchołki w obchodzie/cyklu). Jeśli NIE, uzasadnij, dlaczego tak sądzisz.

a)


b)


c)


d)


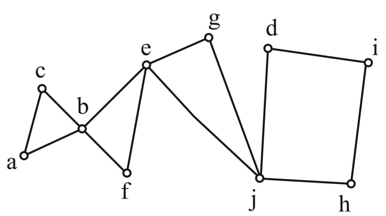
e)


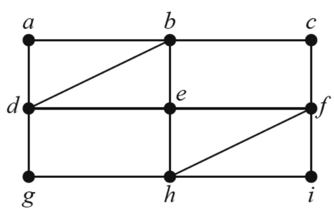
Zadanie C.7. Kiedy

a) graf pełny K_n, $n \geqslant 3$;
b) graf dwudzielny $K_{n,m}$, $n, m \geqslant 2$;
c) graf prosty o ciągu stopni $(2, 2, 2, 2, 2, 2)$;

jest grafem eulerowskim/hamiltonowskim?

Zadanie C.8. Korzystając z Algorytmu Fleury'ego wyznacz obchód Eulera w poniższych grafach.

a)


b)


Zadanie C.9. Udowodnij, że jeśli graf G ma ścieżkę Hamiltona, to dla dowolnego niepustego podzbioru $S \subset V(G)$ mamy

$$\omega(G - S) \leqslant |S| + 1$$

WSKAZÓWKA: Spójrz na dowody z wykładu.

Zadanie C.10. Zadania B.6, B.7 i B.8, jeśli nie były zrobione na zajęciach.

Odpowiedzi do niektórych zadań

C.1 $\tau(K_6) = 6^4$. $\tau(C_8) = 8$.

C.2 $(4, 1, 6, 1, 2, 1, 1, 1, 3)$

C.3 a i c to kody Prüfera, b i d nie.

C.4 kolejność krawędzi dodawanych do drzewa: cd, bd, ad, ef de
a) waga: 17
b) waga: 24

C.5 a) Nie b) Tak

C.6 a) Ma obchód Eulera - wszystkie stopnie parzyste. Nie ma cyklu Hamiltona. Nie ma ścieżki Hamiltona. b) Ma obchód Eulera. Nie ma cyklu Hamiltona. Nie ma ścieżki Hamiltona. c) Nie ma obchodu ani szlaku Eulera (8 wierzchołków stopnia nieparzystego). Ma cykl Hamiltona. d) Nie ma obchodu, tylko szlak Eulera. Nie ma cyklu Hamiltona. Ma ścieżkę Hamiltona. e) Nie ma obchodu, tylko szlak Eulera. Ma cykl Hamiltona.

C.7 a) K_n jest zawsze hamiltonowski. Jest eulerowski, gdy n jest nieparzyste. b) $K_{n,m}$ jest hamiltonowski dla $n = m$. Jest eulerowski, gdy n i m są parzyste. c) Jest eulerowski i hamiltonowski wtw gdy jest spójny (jest wtedy cyklem C_6.)

C.8 Kolejność krawędzi: a) $ab, be, eg, gj, jd, di, ih, hj, je, ef, fb, bc, ca$ b) $ab, bc, cf, fe, eb, bd, de, eh, hf, fi, ih, hg, gd, da$

B.6 Q_k jest grafem eulerowskim dla parzystych k. Jest grafem hamiltonowskim dla $k \geqslant 2$.

B.7 Graf składający się z 3 trójkątów o jednej wspólnej krawędzi.

B.8 W K_n jest $\frac{(n-1)!}{2}$ cykli, a w $K_{n,n}$: $\frac{(n-1)!}{2}n!$.

DMAD - układanie rekurencji

Jak przygotować się do rozwiązywania zadań?

Przeczytaj przykłady 4.1, 4.2, 4.6, 4.8, 4.9, 4.11 i 4.12 z podręcznika/wykładu.

A Zadania na ćwiczenia

Zadanie A.1. Osobniki pewnego gatunku bakterii rozmnażają się co godzinę przez podział komórkowy (tzn. bakteria dzieli się na dwie). Wylicz ile wynosi a_n – liczba bakterii w populacji zaczętej 5 nowymi bakteriami po n godzinach (w środowisku bez zagrożeń dla życia tej bakterii).

Zadanie A.2. Znajdź zależność rekurencyjną na a_n – liczbę n–elementowych ciągów binarnych bez dwóch kolejnych zer.

Zadanie A.3. Znajdź zależność rekurencyjną na a_n – liczbę nieuporządkowanych podziałów zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$ na 2 niepuste podzbiory. Spróbuj, korzystając z rekurencji, wyznaczyć a_n.

Zadanie A.4. Bankomat ma w zasobach tylko banknoty o wartości 20 i 50 PLN. Znajdź zależność rekurencyjną na liczbę sposobów na które może bankomat nam wydać $10 \cdot n$ złotych ($n \geqslant 4$). Zakładamy, że kolejność wydawania banknotów jest istotna i może być dowolna.

Zadanie A.5. Pojawił się nowy portal społecznościowy FACEMAD. Każdy nowy użytkownik tego portalu zachowuje się identycznie. Najpierw spędza 2 dni na zapoznaniu się z portalem. W momencie upływu drugiego dnia zachęca (skutecznie) jedną nową osobę do korzystania z portalu. Po tym jest już tak zainteresowany, że w momencie upływu każdego kolejnego dnia znajduje (skutecznie) dwóch nowych użytkowników. Na początku funkcjonowania portalu jest jeden nowy użytkownik portalu. Znajdź zależność rekurencyjną na a_n – liczbę użytkowników po n dniach funkcjonowania FACEMADu.

B Zadania na ćwiczenia - jeśli czas pozwoli

Zadanie B.1. System komputerowy uznaje ciąg cyfr za słowo kodu, jeśli zawiera ono parzystą liczbę zer (np. 1230407869 jest słowem kodu a 120987045608 nie jest). Znajdź zależność rekurencyjną na a_n – liczbę n–elementowych słów kodu.

Zadanie B.2. Znajdź zależność rekurencyjną na liczbę sposobów wypełnienia planszy o wymiarach

a) $2 \times n$
b) $3 \times 2n$

nierozróżnialnymi kostkami domina o wymiarach 1×2.

Zadanie B.3. Znajdź zależność rekurencyjną na a_n – liczbę n–elementowych ciągów ternarnych z

a) parzystą liczbą zer;
b) parzystą liczbą zer i parzystą liczbą jedynek.

Zadanie B.4. Jest $2^{n-1} - 1$ nieuporządkowanych podziałów zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$ na dwa niepuste podzbiory. Znajdź rekurencję na a_n – liczbę nieuporządkowanych podziałów zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$ na trzy niepuste podzbiory.

C Zadania do samodzielnej pracy w domu

Zadanie C.1. Znajdź zależność rekurencyjną na a_n – liczbę podzbiorów zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$ (wliczając zbiór pusty), które nie zawierają dwóch kolejnych liczb.

Zadanie C.2. Wiadomo, że co roku pewien pracownik otrzymuje podwyżkę pensji, która wynosi 20% kwoty pensji wypłacanej przez ostatni rok pomniejszone o 11% kwoty pensji wypłacanej rok wcześniej. Na początku pracownik zarabia 1 tysiąc złotych. Wyznacz wzór rekurencyjny na a_n – wysokość pensji po n latach.

Zadanie C.3. Franek pożyczył od chłopaków z miasta 1 mln złotych na 50% rocznie (odsetki są naliczane na koniec każdego roku). Na koniec każdego roku spłaca 0,2 mln. złotych. Ile będzie wynosił jego dług po n latach?

Zadanie C.4. Na ile sposobów można wciągnąć na n–metrowy maszt ($n \geqslant 1$) flagi, jeśli mamy do dyspozycji nieograniczoną liczbę

a) nierozróżnialnych flag w kolorze czerwonym o szerokości 2 metry, nierozróżnialnych flag w kolorze zielonym o szerokości 1 metra i nierozróżnialnych flag w kolorze niebieskim o szerokości 1 metra;
b) flag w kolorze białym i czarnym o szerokości 1 metra (flagi w tym samym kolorze są nierozróżnialne), ale żadne dwie białe flagi nie mogą ze sobą sąsiadować na maszcie.

Proszę podać rozwiązanie w postaci rekurencyjnej i nie rozwiązywać rekurencji. UWAGA: Ważna jest dla nas kolejność flag na maszcie i ich szerokość, np. w (a) dla $n = 4$ przykładowo można powiesić najpierw jedną czerwoną flagę a po niej dwie zielone i zapełnimy cały maszt.

Zadanie C.5. Niech a_n będzie liczbą podzbiorów zbioru $[n]$ bez par typu $k, k+2$. Znajdź zależność rekurencyjną na a_n.

Zadanie C.6. W populacji królików każda nowo narodzona para królików po miesiącu rodzi 2 nowe pary królików. Po drugim miesiącu życia nie rodzi nic. Natomiast po trzecim i każdym kolejnym miesiącu rodzi jedną parę. W chwili zero są trzy nowo narodzone pary królików. Podaj rekurencję na a_n – liczbę par królików po n miesiącach. Zakładamy, że króliki nie umierają.

Zadanie C.7. Znajdź zależność rekurencyjną na a_n–liczbę sposobów wypełnienia planszy o wymiarach $2 \times n$ nierozróżnialnymi klockami o wymiarach: 1×2 i 2×2.

Zadanie C.8. (*) W kwalifikacjach do konkursu skoków narciarskich bierze udział n zawodników, którzy po kolei oddają skoki. Aktualnie prowadzącym nazwiemy skoczka, który już oddał skok i uzyskał najlepszy wynik spośród wszystkich, którzy skakali do danego momentu. Niech $G(n, k)$ $(n \geqslant 1, 0 \leqslant k \leqslant n)$ oznacza liczbę wszystkich możliwych ostatecznych wyników kwalifikacji (czyli uszeregowań wszystkich skoczków po wszystkich skokach), w których startowało n zawodników i w których dokładnie k skoczków było w pewnym momencie aktualnie prowadzącymi (Uwaga! Zakładamy, że w kwalifikacjach nie było remisów, czyli każdy skoczek uzyskał inny wynik). Znajdź zależność rekurencyjną na $G(n, k)$ i wyznacz odpowiednie warunki początkowe $G(1, 1)$ i $G(n, 0)$ dla $n \geqslant 1$.

Odpowiedzi do niektórych zadań

C.1 $\begin{cases} a_1 = 2; \\ a_2 = 3; \\ a_n = a_{n-1} + a_{n-2},\ n \geqslant 3. \end{cases}$

C.2 $\begin{cases} a_0 = 1; \\ a_1 = 1,2; \\ a_n = 1,2 \cdot a_{n-1} - 0,11 \cdot a_{n-2},\ n \geqslant 2. \end{cases}$

C.3 $\begin{cases} a_0 = 1; \\ a_n = 1,5 \cdot a_{n-1} - 0,2,\ n \geqslant 1; \end{cases}$ $\quad a_n = 0,6 \cdot (1,5)^n + 0,4.$

C.4 a) $\begin{cases} a_1 = 2; \\ a_2 = 5; \\ a_n = 2 \cdot a_{n-1} + a_{n-2},\ n \geqslant 3. \end{cases}$ b) $\begin{cases} a_1 = 2; \\ a_2 = 3; \\ a_n = a_{n-1} + a_{n-2},\ n \geqslant 3. \end{cases}$

C.5 $\begin{cases} a_1 = 2; \\ a_2 = 4; \\ a_3 = 6; \\ a_4 = 9; \\ a_n = a_{n-1} + a_{n-3} + a_{n-4},\ n \geqslant 5. \end{cases}$

C.6 $\begin{cases} a_0 = 3; \\ a_1 = 9; \\ a_2 = 21; \\ a_n = 3 \cdot a_{n-1} - 2 \cdot a_{n-2} + a_{n-3},\ n \geqslant 3. \end{cases}$

C.7 $\begin{cases} a_1 = 1; \\ a_2 = 3; \\ a_n = a_{n-1} + 2 \cdot a_{n-2},\ n \geqslant 3. \end{cases}$

DMAD - rozwiązywanie rekurencji

Jak przygotować się do rozwiązywania zadań?

Przeczytaj rozdział 4.2 i 4.3 z podręcznika/wykładu.

Co powinnaś/powinieneś wiedzieć:

- Jak rozwiązać rekurencję jednorodną? (lemat 4.1 i twierdzenie 4.2)
- Jak rozwiązać niejednorodną liniową zależność rekurencyjną? (początek rozdziału 4.3)

Proponowane rozwiązania szczególne (tego nie musisz umieć na pamięć!!!)

Jeśli $f(n)$	i $a_n^{(1)}$	to $a_n^{(2)} =$
wielomian (zmiennej n) st. d	1 nie jest pierwiastkiem wiel. char.	$D_d n^d + D_{d-1} n^{d-1} + \ldots + D_0$
wielomian (zmiennej n) st. d	1 jest k–krotnym pierwiastkiem wiel. char.	$n^k(D_d n^d + D_{d-1} n^{d-1} + \ldots + D_0)$
$=C\beta^n$	β nie jest pierwiastkiem wiel. char.	$A\beta^n$
$=C\beta^n$	β jest k–krotnym pierwiastkiem wiel. char.	$An^k\beta^n$

UWAGA: stała $f(n) = C$ jest zarówno wielomianem st. 0 postaci $f(n) = C$ jak i $f(n) = C \cdot 1^n$.

A Zadania treningowe

Zadanie A.1. Znajdź wzór na n-ty wyraz ciągu danego rekurencją

$$a_n = \frac{7a_{n-1}}{n^2}, \quad \text{dla } n \geqslant 1, \quad a_0 = 13$$

i udowodnij go indukcyjnie.

Zadanie A.2.

a) Przeczytaj rozwiązanie przykładu 4.6 i na tej podstawie rozwiąż równanie rekurencyjne $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}$ dla $n \geqslant 2$, $a_0 = 1$, $a_1 = 0$.

b) Przeczytaj rozwiązanie przykładu 4.7 i na tej podstawie rozwiąż równanie rekurencyjne $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}$ dla $n \geqslant 2$, $a_0 = 2$, $a_1 = 5$.

Zadanie A.3. Przeczytaj rozwiązanie przykładu 4.13 i na tej podstawie rozwiąż równanie rekurencyjne $a_n = 5a_{n-1} - 8a_{n-2} + 4a_{n-3}$ dla $n = 3, 4, 5, \ldots$, z warunkami początkowymi $a_0 = 1$, $a_1 = 1$, $a_2 = 3$. (wsk.:$\alpha_1 = 1$).

Zadanie A.4.

a) Przeczytaj rozwiązania przykładów 4.16 i 4.17 i na tej podstawie rozwiąż równanie rekurencyjne $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2} - 3 \cdot 2^n$, dla $n \geqslant 2$, $a_0 = 1$, $a_1 = 12$

b) Przeczytaj rozwiązania przykładów 4.16 i 4.17 i na tej podstawie rozwiąż równanie rekurencyjne $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2} + 6$ dla $n \geqslant 2$, $a_0 = 3$, $a_1 = 10$

c) Przeczytaj rozwiązanie przykładu 4.18 i na tej podstawie rozwiąż równanie rekurencyjne $a_n = 9a_{n-2} - 8n + 10$ dla $n \geqslant 2$, $a_0 = 1$, $a_1 = 20$

Wskazówki do zadań z części A

A.1. Spróbujmy „zgadnąć” wzór:

$$a_n = \frac{7}{n^2} \cdot a_{n-1} = \frac{7}{n^2} \cdot \frac{7}{(n-1)^2} \cdot a_{n-2} = \frac{7}{n^2} \cdot \frac{7}{(n-1)^2} \cdot \frac{7}{(n-2)^2} a_{n-3} = \ldots = \frac{7^n}{(n!)^2} \cdot a_0 = \frac{7^n}{(n!)^2} \cdot 13.$$

Teraz należy udowodnić indukcyjnie następujące stwierdzenie:

$$\forall_{n \geqslant 0} \quad a_n = \frac{7^n}{(n!)^2} \cdot 13.$$

A.2.

a) Równanie charakterystyczne: $x^2 - 5x + 6 = 0$.
Ponieważ $x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)$, mamy rozwiązanie ogólne: $a_n = C_1 \cdot 2^n + C_2 \cdot 3^n$
$\begin{cases} 1 = a_0 = C_1 + C_2 \\ 0 = a_1 = 2C_1 + 3C_2 \end{cases}$
odp: $a_n = 3 \cdot 2^n - 2 \cdot 3^n$

b) Równanie charakterystyczne: $x^2 - 2x + 1 = 0$,
Ponieważ $x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$, mamy rozwiązanie ogólne: $a_n = (C_1 n + C_2) \cdot 1^n$
$\begin{cases} 2 = a_0 = C_2 \\ 5 = a_1 = C_1 + C_2 \end{cases}$
odp: $a_n = 3n + 2$

A.3. Równanie charakterystyczne: $x^3 - 5x^2 + 8x - 4 = 0$.
Ponieważ $x^3 - 5x^2 + 8x - 4 = (x-2)^2(x-1)$, mamy rozwiązanie ogólne: $a_n = C_1 \cdot 1^n + (C_2 n + C_3) \cdot 2^n$
$\begin{cases} 1 = C_1 + C_3 \\ 1 = C_1 + 2C_2 + 2C_3 \\ 3 = C_1 + 8C_2 + 4C_3 \end{cases}$
odp: $a_n = 3 + (n-2) \cdot 2^n$

A.4.

a) rozwiązanie ogólne: $a_n^{(1)} = C_1 \cdot 2^n + C_2 \cdot 3^n$;
$f(n) = -3 \cdot 2^n$, 2– pierwiastek wielomianu char., $k = 1$;
rozwiązanie szczególne (z tabelki): $a_n^{(2)} = A \cdot n \cdot 2^n$;
po podstawieniu $a_n^{(2)}$ do rekurencji: $A \cdot n \cdot 2^n = 5 \cdot A \cdot (n-1) \cdot 2^{n-1} - 6 \cdot A \cdot (n-2) \cdot 2^{n-2} - 3 \cdot 2^n$;
$a_n^{(2)} = 6 \cdot n \cdot 2^n$
$a_n = C_1 \cdot 2^n + C_2 \cdot 3^n + 6 \cdot n \cdot 2^n$
$\begin{cases} 1 = C_1 + C_2 \\ 12 = 2C_1 + 3C_2 + 6 \cdot 2 \end{cases}$
odp: $a_n = 3 \cdot 2^n - 2 \cdot 3^n + 3n2^{n+1}$;

b) rozwiązanie ogólne: $a_n^{(1)} = C_1 n + C_2$;
$f(n) = 6$, wielomian stopnia $d = 0$, $a_n^{(1)}$–wielomian stopnia $k = 1$;
rozwiązanie szczególne (z tabelki): $a_n^{(2)} = An^2$;
po podstawieniu $a_n^{(2)}$ do rekurencji: $a_n^{(2)} = 3n^2$
$a_n = C_1 \cdot n + C_2 + 3n^2$
$\begin{cases} 3 = C_2 \\ 10 = C_1 + C_2 + 2 \end{cases}$
odp: $a_n = 3n^2 + 4n + 3$;

c) rozwiązanie ogólne: $a_n^{(1)} = C_1 3^n + C_2(-3)^n$;
rozwiązanie szczególne (z tabelki): $a_n^{(2)} = D_1 n + D_0$;
po podstawieniu $a_n^{(2)}$ do rekurencji: $a_n^{(2)} = n + 1$
$a_n = C_1 3^n + C_2(-3)^n + n + 1$
$\begin{cases} 1 = C_1 + C_2 + 1 \\ 20 = 3C_1 - 3C_2 + 2 \end{cases}$
odp: $a_n = 3^{n+1} + (-3)^{n+1} + n + 1$;

B Zadania dla zainteresowanych

Zadanie B.1. Rozwiąż równanie rekurencyjne $a_n = 6a_{n-1} - 12a_{n-2} + 8a_{n-3}, \quad n \geqslant 3$ z warunkami początkowymi $a_0 = 3, a_1 = 12, a_2 = 76$.
Wsk.: zastosuj wzory skróconego mnożenia.

Zadanie B.2. Rozwiąż równanie rekurencyjne

a) $a_n^2 = 2a_{n-1}^2 + 10 \cdot 7^n, n \geqslant 1, a_0 = 2$ zakładając, że $a_n \geqslant 0$, dla wszystkich n;
b) $a_n = 64\frac{a_{n-1}^2}{a_{n-2}}, n \geqslant 2, a_0 = 8, a_1 = 1024$;
c) $a_n = \frac{1-n}{n}a_{n-1} + \frac{1}{n}2^n, n \geqslant 1, a_0 = 3456$;
d) $a_n = na_{n-1} + n!, n \geqslant 1, a_0 = 2$.

C Zadania do samodzielnej pracy w domu

Zadanie C.1. Znajdź wzór na n-ty wyraz ciągu danego rekurencją

a) $a_n = \frac{2a_{n-1}}{n+2}, \quad$ dla $n \geqslant 1, \quad a_0 = 8$;
b) $a_n = \frac{a_{n-1}}{7} + 1, \quad$ dla $n \geqslant 1, \quad a_0 = 1$;
c) $a_n = a_{n-1} + \frac{1}{n(n+1)}, \quad$ dla $n \geqslant 1, \quad a_0 = 0$;
d) $a_n = 3a_{n-1} + 4, \quad$ dla $n \geqslant 1, \quad a_0 = 4$;

i udowodnij go indukcyjnie.

Zadanie C.2. Rozwiąż równanie rekurencyjne.

a) $a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2}$ dla $n \geqslant 2$, $a_0 = 6$, $a_1 = 8$
b) $a_n = 4a_{n-2}$ dla $n \geqslant 2$, $a_0 = 0$, $a_1 = 4$
c) $a_n = \frac{8}{3}a_{n-1} + a_{n-2}$, dla $n \geqslant 2$, $a_0 = -2$, $a_1 = 4$.
d) $a_n = a_{n-1} - \frac{1}{4}a_{n-2}$, dla $n \geqslant 2$, $a_0 = \frac{1}{2}$, $a_1 = \frac{1}{2}$.

Zadanie C.3. Rozwiąż równania rekurencyjnie:

a) $a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2} + 2^n$, dla $n \geqslant 2$, $a_0 = 4$, $a_1 = 9$.
b) $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2} + 16 \cdot 5^n$, dla $n \geqslant 2$, $a_0 = 0, a_1 = 101$.
c) $a_n = a_{n-1} + 8n$, dla $n \geqslant 1$, $a_0 = 2$;
d) $a_n = 3a_{n-1} + 3^n$, dla $n \geqslant 2$, $a_1 = 15$
e) $a_n = 2a_{n-1} + 10 \cdot 7^n$, dla $n \geqslant 1$, $a_0 = 4$;

Zadanie C.4. Rozwiąż równanie rekurencyjne
$a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2} - 2a_{n-3}$ dla $n = 3, 4, 5, \ldots$, z warunkami początkowymi $a_0 = 3$, $a_1 = 6$, $a_2 = 0$.
wsk. $\alpha_1 = 2$

Zadanie C.5. Rozwiąż równanie rekurencyjne
$a_n = 3a_{n-2} - 2a_{n-3}$ dla $n = 3, 4, 5, \ldots$,
z warunkami początkowymi $a_0 = 1$, $a_1 = 2$, $a_2 = 12$.
wsk. $\alpha_1 = -2$

Odpowiedzi do niektórych zadań

C.1. a) $a_n = \frac{2^{n+4}}{(n+2)!}$ b) $\frac{7^{n+1}-1}{6\cdot 7^n}$ c) $\frac{n}{n+1}$ d) $2\cdot(3^{n+1}-1)$

C.2.

a) $a_n = (6-2n)2^n$ dla $n \geqslant 0$;
b) $a_n = 2^n - (-2)^n$ dla $n \geqslant 0$;
c) $a_n = 3^n - 3(-\frac{1}{3})^n$ dla $n \geqslant 0$;
d) $a_n = (1+n)(\frac{1}{2})^{n+1}$ dla $n \geqslant 0$;

C.3.

a) $a_n = (1+2n)2^n + 3$ dla $n \geqslant 0$;
b) $a_n = n - 25 + 5^{n+2}$ dla $n \geqslant 0$;
c) $a_n = 4n^2 + 4n + 2$ dla $n \geqslant 0$;
d) $a_n = (n+4)3^n$ dla $n \geqslant 1$;
e) $a_n = 2\cdot 7^{n+1} - 5\cdot 2^{n+1}$ dla $n \geqslant 0$;

C.4. $a_n = 2\cdot(-1)^{n+1} - 2^n + 6$, $n \geqslant 0$

C.5. $a_n = 4n + (-2)^n$, $n \geqslant 0$