Funkcje uwikłane

Przykład 1.Rozważmy równanie $f(x, y) = 0$ np. $x^2 + y^2 - 1 = 0$ i niech $f(x_0, y_0) = 0$.

Pytanie: Czy dla dowolnego $x \in [-1,1]$ istnieje taki $y(x)$, że $f(x, y(x)) = 0$ i $y(x_0) = y_0$?

Niech $(x_0, y_0) = (0,1)$. Wówczas funkcja $y(x) = \sqrt{1 - x^2}$; $-1 \le x \le 1$ spełnia powyższe warunki. Ale spełnia je także funkcja $y(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x^2} & x \in [-1,1] \cap Q \\ -\sqrt{1-x^2} & x \in [-1,1] \cap (R - Q) \end{cases}$. Dokładając warunek ciągłości funkcji $y(x)$ eliminujemy ten przypadek.

Jeżeli $(x_0, y_0) = (1,0)$, to nie istnieje funkcja $y(x)$ będąca rozwiązaniem problemu, ale istnieje funkcja $x(y)$ spełniająca warunki zadania.

Powód. W punkcie (1,0) nie istnieje styczna $Ax+By+C=0$ dająca się rozwikłać ze względu na y ale daje się rozwikłać ze względu na x.

Intuicja. Funkcja różniczkowalna w punkcie (x_0, y_0) zachowuje się w otoczeniu tego punktu podobnie do swej liniowej aproksymacji.

Twierdzenie o funkcji uwikłanej . (Prosty dowód Leja F. Rachunek różniczkowy i całkowy) . Jeżeli

- funkcja $f(x,y)$ ma ciągle pochodne cząstkowe $\frac{\partial f}{\partial x}$ i $\frac{\partial f}{\partial y}$ w otoczeniu punktu (x_0,y_0)
- $f(x_0,y_0)=0$ i $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$

to

1. dla każdej dostatecznie małej liczby $\varepsilon>0$ istnieje taka liczba $\delta>0$, że każdej wartości x z przedziału $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ odpowiada dokładnie jedno rozwiązanie $y(x)$ równania $f(x,y)=0$ należące do przedziału $(y_0-\varepsilon, y_0+\varepsilon)$
2. funkcja $y(x)$ jest ciągła w przedziale $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ i ma w nim ciągłą pochodną wyrażoną wzorem

$$y'(x) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)}{\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)}, \text{ gdzie } y=y(x)$$

Przykład.. Wykorzystując wzór Taylora znajdź przybliżenie funkcji uwikłanej $y = y(x)$ wielomianem stopnia trzeciego w otoczeniu punktu $(x_0, y_0) = (1,0)$. Funkcja uwikłana zadana jest równaniem $\cos(xy) - x - 2y = 0$.

W otoczeniu punktu $(x_0, y_0) = (1,0)$ są spełnione założenia tw. o funkcji uwikłanej więc równanie $\cos(xy) - x - 2y = 0$ określa w tym otoczeniu funkcję $y = y(x)$, przy czym $y(1) = 0$.

$$y(x) = y(1) + \tfrac{y'(1)}{1!}(x-1) + \tfrac{y''(1)}{2!}(x-1)^2 + \tfrac{y'''(1)}{3!}(x-1)^3 + r_4$$

Kolejne pochodne funkcji $y(x)$ w punkcie $x_0 = 1$ wyliczamy różniczkując równanie 1

(1) $\qquad \cos[xy(x)] - x - 2y[x] = 0$,

i otrzymujemy

(2) $\quad -\sin[xy(x)][y(x)+xy'(x)]-1-2y'[x]=0$,

a stąd dla $x=1$ uwzględniając że $y(1)=0$ otrzymujemy $y'(1)=-\frac{1}{2}$.

Różniczkując równanie 2 otrzymujemy

(3) $\quad -\cos[xy(x)][y(x)+xy'(x)]^2-\sin[xy(x)][2y'(x)+xy''(x)]-2y''(x)=0$

a stąd dla $x=1$ uwzględniając że $y(1)=0$ i $y'(1)=-\frac{1}{2}$ otrzymujemy $y''(1)=-\frac{1}{8}$.

Różniczkując równanie 3 otrzymujemy

(4) $$\begin{aligned}&\sin[xy(x)][y(x)+xy'(x)]^3-3\cos[xy(x)][y(x)+xy'(x)][2y'(x)+xy''(x)]\\&-\sin[xy(x)][3y''(x)+xy'''(x)]-2y'''(x)=0\end{aligned},$$

a stąd dla $x=1$ uwzględniając że $y(1)=0$ i $y'(1)=-\frac{1}{2}$ $y''(1)=-\frac{1}{8}$ otrzymujemy $y'''(1)=-\frac{27}{32}$

Ostatecznie $\quad y(x)=\frac{-\frac{1}{2}}{1!}(x-1)+\frac{-\frac{1}{8}}{2!}(x-1)^2+\frac{-\frac{27}{32}}{3!}(x-1)^3+r_4$

Ekstrema funkcji uwikłanych

- metoda rozwikłania ograniczeń (wyjaśnić)

Przykład (wprowadzający) Zbadać ekstrema funkcji uwikłanej $y=y(x)$ określonej równaniem $f(x,y)=0$.

Zakładamy regularność funkcji f tak, aby wyliczone poniżej pochodne miały sens, czyli, że są spełnione założenia twierdzenia o funkcji uwikłanej.

$$f(x,y(x))=0 \quad \Big/ \frac{d}{dx}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}y'(x)=0 \Rightarrow y'(x)=-\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}} \qquad \text{o ile} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}\neq 0$$

$y(x)$ ma ekstremum w punkcie $x \Leftrightarrow$ (z WK) $y'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial x}=0$

Otrzymaliśmy więc WK istnienia ekstremum funkcji uwikłanej

$$\text{WK:}\begin{cases}\begin{cases}\frac{\partial f}{\partial x}=0\\ f(x,y)=0\end{cases}\\ \frac{\partial f}{\partial y}\neq 0\end{cases}$$

Rozwiązujemy pierwszy układ i dostajemy punkty krytyczne P_i, dla których sprawdzamy ostatni warunek.

Badanie rodzaju ekstremum może przebiegać za pomocą badania znaku $y'(x)$ w otoczeniu punktu krytycznego P_i lub badania znaku $y''(x)$. Pierwszy sposób jest nieco kłopotliwy. Nawet badanie znaku formy kwadratowej wymagało specjalnego narzędzia – kryterium Sylvestera (są też inne).

Różniczkując ponownie otrzymamy

$$\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}y'(x)=0 \qquad \Big/ \frac{d}{dx}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}y'(x)+\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}y'(x)\right)y'(x)+\frac{\partial f}{\partial y}y''(x)=0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x^2}+2\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}y'(x)+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(y'(x)\right)^2+\frac{\partial f}{\partial y}y''(x)=0$$

w punktach krytycznych $y'(x)=0$ wiec

$y''(x)=-\frac{\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x^2}}{\frac{\partial f}{\partial y}}$ - <u>tylko</u> w punkcie krytycznym

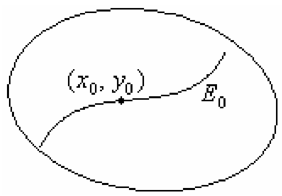
$y''(P_i)>0 \Rightarrow y(x)$ ma w punkcie x_i minimum lokalne właściwe $y(x_i)=y_i$

Ekstrema warunkowe

Np.: $f:R^2\supset E\to R$ $\quad E$ – otwarty

$g:R^2\supset E\to R$ $\quad$ ciągła

Oznaczmy $E_0=\{(x,y)\in E: g(x,y)=0\}$
i niech $(x_0,y_0)\in E_0$, czyli E_0 – niepusty.



Rozpatrzmy funkcję *f* obciętą do E_0:
Ekstremum funkcji *f* obciętej do E_0 nazywać będziemy ekstremum warunkowym funkcji *f* pod warunkiem $g(x,y)=0$

Def. Funkcja *f* ma w punkcie (x_0,y_0) maksimum lokalne warunkowe właściwe

$$\Leftrightarrow \exists_{S(x_0,y_0)}\forall_{(x,y)\in S(x_0,y_0)\cap E}\ f(x,y)<f(x_0,y_0)$$

Jak znaleźć ekstremum warunkowe? (**wprowadzenie do metody Lagrange'a**)

Zakładając, że równanie $g(x,y)=0$ określa funkcje uwikłaną $y(x)$ problem sprowadza się do szukania ekstremum funkcji jednej zmiennej $\varphi(x)=f(x,y(x))$. Zakładając regularność z WK istnienia ekstremum otrzymujemy $\varphi'(x)=0\Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}y'(x)=0$,

a z warunku $g(x,y(x))=0 \ \Big/\frac{d}{dx} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial g}{\partial x}+\frac{\partial g}{\partial y}y'(x)=0$ obliczamy $y'(x)$. Stąd otrzymujemy

$$\text{WK: }\begin{cases}\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial y}-\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial x}=0\Leftrightarrow \varphi'(x)=0\\ g(x,y(x))=0\end{cases}$$

Można zauważyć, że równanie pierwsze WK jest wynikiem rugowania parametru λ z następującego

układu równań: $\begin{cases}\frac{\partial f}{\partial x}+\lambda\frac{\partial g}{\partial x}=0\\ \frac{\partial f}{\partial y}+\lambda\frac{\partial g}{\partial y}=0\end{cases}$, gdzie

Lewe strony są pochodnymi cząstkowymi funkcji $L(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda g(x,y)$

WK jest więc $\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x}=0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial y}=0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda}=0 \end{cases}$

Badanie sprowadza się do badania funkcji Lagrange'a $L(x,y,\lambda)$ z mnożnikiem Lagrange'a λ. Metodę tę można uogólnić dla funkcji wielu zmiennych.

Metoda mnożników Lagrange'a szukanie ekstremum funkcji *f*(*x*,*y*) pod warunkiem *g*(*x*,*y*)=0

$$f: R^2 \supset E \to R$$
$$g: R^2 \supset E \to R$$
$$E_0=\{(x,y)\in E: g(x,y)=0\}$$

Algorytm: Tworzymy funkcję Lagrange'a

$$L(x,y;\lambda)=f(x,y)+\lambda g(x,y)$$

Warunek konieczny: $\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x}=0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial y}=0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda}=0 \end{cases} \to P(x_i,y_i,\lambda_i)$

Warunek wystarczający. Traktując mnożnik λ jako parametr, wyznaczyć w punktach krytycznych drugą różniczkę $d^2L((x_i,y_i;\lambda_i),(\Delta x,\Delta y))$ przy czym przyrosty $(\Delta x,\Delta y)$ spełniają równanie

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x_i,y_i;\lambda_i)\Delta x+\frac{\partial g}{\partial y}(x_i,y_i;\lambda_i)\Delta y=0$$

Wyznaczając jeden z przyrostów (np. Δy jako funkcję drugiego przyrostu Δx) badamy określoność $d^2L((x,\lambda),\Delta x)$.

Przykład. Wyznaczyć ekstrema warunkowe funkcji $f(x,y)=xy$ przy warunku $g(x,y)=x+y-1=0$

Pokazać obie metody. W metodzie Lagrange'a zwrócić szczególną uwagę na konieczność krępowania przyrostów w WW.

- metoda rozwikłania ograniczeń : $g(x,y)=x+y-1=0 \Leftrightarrow y=1-x$, $\varphi(x)=f(x,1-x)=x(1-x)$

Funkcja φ ma w punkcie $x_0=\frac{1}{2}$ maksimum lokalne równe $\frac{1}{4}$, więc funkcja f ma w punkcie $(x_0,y_0)=(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ maksimum lokalne warunkowe.

- Metoda Lagrange'a $L(x,y;\lambda)=xy+\lambda(x+y-1)$

WK: $\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y + \lambda = 0 \\ x + \lambda = 0 \\ x + y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow P(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\}$

WW : $d^2 L\big((x_1, y_1; \lambda_1), (\Delta x, \Delta y)\big) = 2\Delta x \Delta y$ przy czym $\Delta x + \Delta y = 0$. Wobec tego $d^2 L\big((\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; -\frac{1}{2}), (\Delta x, -\Delta x)\big) = -2(\Delta x)^2 < 0$ dla $\Delta x \neq 0$ wiec f ma w punkcie $(x_0, y_0) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ maksimum lokalne warunkowe.

Przykładowe zadania z funkcji uwikłanych

1. Znaleźć ekstrema lokalne funkcji uwikłanej $y(x)$ określonej równaniem
   a) x^2-$2xy$+$2y^2$+$2x$+1=0.
   b) x^2e^y-y^4+1=0.

2. W dostatecznie małym otoczeniu punktu $(1,y_0)$ narysować wykres funkcji uwikłanej $y(x)$ określonej równaniem $x^2 \ln y - y \ln x = 0$.