Logika i teoria mnogości

Ćwiczenia 11

Dla zbioru $A \subset U$ (uniwersum) określamy zbiór:
$A' = U \backslash A = \{x \in U : x \notin A\}$
zwany *dopełnieniem* zbioru A (do uniwersum U).

Różnica symetryczna zbiorów A i B:
$A \div B = \{x : (x \in A \land x \notin B) \lor (x \notin A \land x \in B)\}$
$x \in A \div B \Leftrightarrow (x \in A \land x \notin B) \lor (x \notin A \land x \in B)$

Zadanie 1. Wyprowadzić następujące prawa:

(a) $(A \cup B)' = A' \cap B'$
(b) $(A \cap B)' = A' \cup B'$
(c) $(A \backslash B) \cap C' = A \cap (B \cup C)'$
(d) $A \div B = (A \cup B) \backslash (A \cap B)$
(e) $A \cap (B \div C) = (A \cap B) \div (A \cap C)$

Zadanie 2. Wykazać, że dla wszystkich zbiorów A, B, C zachodzą następujące implikacje:
(a) $A \subseteq B \Rightarrow A \cap C \subseteq B \cap C$
(b) $A \subseteq B \Rightarrow C \backslash B \subseteq C \backslash A$
(c) $A \subseteq B \land C \subseteq D \Rightarrow A \cap C \subseteq B \cap D$
(d) $A \subseteq B \land C \subseteq D \Rightarrow A \backslash D \subseteq B \backslash C$

Działania nieskończone

Indeksowana rodzina zbiorów: $\{A_i\}_{i \in I}$. Poszczególne zbiory tej rodziny są oznaczone indeksami.
I to ustalony zbiór indeksów.
Inne oznaczenie: $\{A_i : i \in I\}$
Określamy działania sumy i iloczynu indeksowanej rodziny zbiorów $\{A_i\}_{i \in I}$

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{x : \exists_{i \in I} (x \in A_i)\}$$

$$\bigcap_{i \in I} A_i = \{x : \forall_{i \in I} (x \in A_i)\}$$

Słownie: Suma rodziny $\{A_i\}_{i\in I}$ jest zbioren tych wszystkich elementów, które należą do przynajmniej jednego zbioru A_i.

Iloczyn rodziny $\{A_i\}_{i\in I}$ jest zbioren tych wszystkich elementów, które należą do każdego zbioru A_i.

Mamy:

$$\bigcup_{i\in I} A_i = \bigcup \{A_i\}_{i\in I}, \qquad \bigcup_{i\in\{1,2\}} A_i = A_1 \cup A_2$$

$$\bigcap_{i\in I} A_i = \bigcap \{A_i\}_{i\in I}, \qquad \bigcap_{i\in\{1,2\}} A_i = A_1 \cap A_2$$

Uwaga. Dla $I = \emptyset$, $\forall_{i\in I}(x \in A_i)$ jest prawdą dla dowolnego obiektu x, więc $\bigcap_{i\in\emptyset} A_i$ nie istnieje (jako zbiór). Zatem powyższą definicję iloczynu przyjmujemy tylko dla $I \neq \emptyset$. Dla sumy to ograniczenie nie jest potrzebne. Mamy $\bigcup_{i\in\emptyset} A_i = \emptyset$.

Uwaga. Gdy wszystkie zbiory A_i są podzbiorami ustalonego uniwersum U, często przyjmuje się inną definicję iloczynu:

$$\bigcap_{i\in I} A_i = \{x \in U : \forall_{i\in I}(x \in A_i)\}$$

Zgodnie z tą defincją $\bigcap_{i\in\emptyset} A_i = U$, czyli iloczyn pustej rodziny zbiorów jest określony. Dalej przyjmujemy poprzednią definicję (bez U).

Zadanie 3. Dane są nieskończone ciągi zbiorów:
(a) $\{x : -1 < x < 1\}, \{x : -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}\}, \{x : -\frac{1}{3} < x < \frac{1}{3}\}, \ldots$
(b) $\{x : 0 \leq x \leq 1\}, \{x : 0 \leq x \leq 1\frac{1}{2}\}, \{x : 0 \leq x \leq 1\frac{2}{3}\}, \ldots$
Wyznaczyć sumę i iloczyn tych zbiorów.

Prawa dla działań nieskończonych

Bezpośrednio z definicji działań nieskończonych wynikają równoważności:

$$x \in \bigcup_{i\in I} A_i \Leftrightarrow \exists_{i\in I}(x \in A_i)$$

$$x \in \bigcap_{i\in I} A_i \Leftrightarrow \forall_{i\in I}(x \in A_i)$$

Te równoważności stosujemy przy wyprowadzaniu praw dla działań nieskończonych za pomocą (Ext).

Zadanie 4. Za pomocą (Ext) wyprowadzić następujące prawa.
(a) $\bigcup_{i\in I}(A_i \cup B_i) = \bigcup_{i\in I} A_i \cup \bigcup_{i\in I} B_i$
(b) $\bigcap_{i\in I}(A_i \cap B_i) = \bigcap_{i\in I} A_i \cap \bigcap_{i\in I} B_i$
(c) $(\bigcup_{i\in I} A_i)' = \bigcap_{i\in I} A_i'$
(d) $(\bigcap_{i\in I} A_i)' = \bigcup_{i\in I} A_i'$