Wstęp do rachunku prawdopodobieństwa

2. Prawdopodobieństwo geometryczne. Niezależność zdarzeń.

Zadanie 1. *Rzucamy trzy razy kostką. Przez A oznaczamy zdarzenie, że w pierwszym rzucie wypadła parzysta liczba oczek, przez B, że w drugim rzucie wypadła nieparzysta liczba oczek, a przez C, że w każdym z trzech rzutów otrzymaliśmy inny wynik.*

(a) *Czy zdarzenia A i B są niezależne?*
(b) *Czy zdarzenia A i C są niezależne?*

Skoro nasze doświadczenie polega na trzykrotnym rzucie sześcienną kostką, to jego wyniki możemy opisać jako ciągi długości trzy (a_1, a_2, a_3) o wyrazach w zbiorze $\{1,2,3,4,5,6\}$. Stąd:

$$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\} \times \{1,2,3,4,5,6\} \times \{1,2,3,4,5,6\}.$$

A ponieważ wszystkie zdarzenia elementarne są równoprawdopodobne, mamy do czynienia z klasycznym modelem prawdopodobieństwa. Zatem

$$\forall_{\omega \in \Omega} \mathbb{P}(\omega) = \frac{1}{|\Omega|} = \frac{1}{6^3}.$$

Zastanówmy się teraz, jakie ciągi wyników należą do każdego z opisanych w zadaniu zdarzeń:

$$\begin{aligned} A &= \Big\{(a_1,a_2,a_3) : a_1 \in \{2,4,6\},\ a_2,\ a_3 \in \{1,2,3,4,5,6\}\Big\}, \\ B &= \Big\{(a_1,a_2,a_3) : a_2 \in \{1,3,5\},\ a_1,\ a_3 \in \{1,2,3,4,5,6\}\Big\}, \\ C &= \Big\{(a_1,a_2,a_3) : a_1,\ a_2,\ a_3 \in \{1,2,3,4,5,6\},\ a_i \neq a_j \text{ dla } i \neq j\Big\}. \end{aligned}$$

Korzystając z prawa mnożenia i uogólnionego prawa mnożenia możemy też w prosty sposób obliczyć moce tych zbiorów i w konsekwencji także ich prawdopodobieństwa:

$$\begin{aligned} |A| &= 3 \cdot 6 \cdot 6, \quad \mathbb{P}(A) = \frac{3 \cdot 6 \cdot 6}{6^3} = \frac{1}{2}, \\ |B| &= 6 \cdot 3 \cdot 6, \quad \mathbb{P}(B) = \frac{6 \cdot 3 \cdot 6}{6^3} = \frac{1}{2}, \\ |C| &= 6 \cdot 5 \cdot 4, \quad \mathbb{P}(C) = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{6^3} = \frac{5}{9}. \end{aligned}$$

Zgodnie z definicją para zdarzeń A i B jest niezależna, jeśli zachodzi równość $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B)$. Oznacza to, że musimy jeszcze wyznaczyć prawdopodobieństwo części wspólnej odpowiednich par zdarzeń. Najpierw warto zastanowić się jakie ciągi należą do odpowiednich zbiorów, a następnie skorzystać z (uogólnionego) prawa mnożenia, żeby obliczyć moce tych zbiorów:

$$\begin{aligned} A \cap B &= \{(a_1,a_2,a_3) : a_1 \in \{2,4,6\}, a_2 \in \{1,3,5\}, a_3 \in \{1,2,3,4,5,6\}\}, \\ |A \cap B| &= 3 \cdot 3 \cdot 6, \quad \mathbb{P}(A \cap B) = \frac{3 \cdot 3 \cdot 6}{6^3} = \frac{1}{4}, \\ A \cap C &= \Big\{(a_1,a_2,a_3) :\ a_1 \in \{2,4,6\},\ a_i \neq a_j \text{ dla } i \neq j\Big\}, \\ |A \cap C| &= 3 \cdot 5 \cdot 4, \quad \mathbb{P}(A \cap C) = \frac{3 \cdot 5 \cdot 4}{6^3} = \frac{5}{18}. \end{aligned}$$

Ostatecznie otrzymujemy:

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B),$$

oraz

$$\mathbb{P}(A \cap C) = \frac{5}{18} = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{9} = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(C),$$

co oznacza, że zarówno zdarzenia A i B, jak i zdarzenia A i C są niezależne.

(c) *Czy zdarzenia A, B i C są niezależne?*

Zdarzenia A, B i C są niezależne, jeśli spełnione są cztery warunki:

(i) $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$,
(ii) $\mathbb{P}(A \cap C) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(C)$,
(iii) $\mathbb{P}(B \cap C) = \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C)$,

(iv) $\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C)$.

W poprzednich podpunktach pokazaliśmy, że warunki (i) oraz (ii) są spełnione, więc pozostają nam do sprawdzenia dwa ostatnie warunki. Podobnie jak w poprzednich podpunktach możemy pokazać, że

$$\mathbb{P}\left(B \cap C\right) = \frac{5 \cdot 3 \cdot 4}{6^3} = \frac{5}{18} = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{9} = \mathbb{P}\left(B\right) \cdot \mathbb{P}\left(C\right).$$

Oznacza to, że warunek (iii) również jest spełniony. Przy okazji pokazaliśmy, że zdarzenia B i C są niezależne. Uwzględniając wyniki z poprzednich podpunktów, oznacza to, że zdarzenia A, B i C są **parami niezależne**. Wciąż jednak trzeba sprawdzić warunek (iv). W tym celu musimy wyznaczyć $\mathbb{P}\left(A \cap B \cap C\right)$:

$$\begin{aligned} A \cap B \cap C &= \Big\{(a_1, a_2, a_3) : a_1 \in \{2,4,6\}, a_2 \in \{1,3,5\}, a_i \neq a_j \text{ dla } i \neq j\Big\}, \\ |A \cap B \cap C| &= 3 \cdot 3 \cdot 4, \quad \mathbb{P}\left(A \cap B \cap C\right) = \frac{3 \cdot 3 \cdot 4}{6^3} = \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

Sprawdzamy warunek (iv):

$$\mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B) \cdot \mathbb{P}(C) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{9} = \frac{5}{36} \neq \frac{1}{6} = \mathbb{P}\left(A \cap B \cap C\right).$$

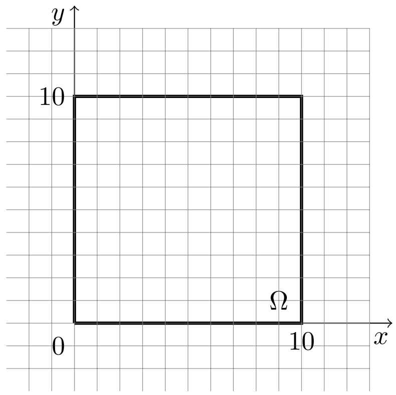
Warunek ten nie jest spełniony, więc zdarzenia A, B i C **nie są niezależne**.

Zadanie 2. *Na odcinku o długości 10 wybrano losowo dwa punkty. Jakie jest prawdopodobieństwo zdarzenia D_3, że odległość między nimi jest równa 3, a jakie zdarzenia, $D_{>3}$, że jest ona większa niż 3?*

W tym doświadczeniu losujemy dwa punkty, powiedzmy x, y, z odcinka o długości 10. Ponieważ losujemy elementy ze zbioru, który ma nieskończenie wiele elementów, ale jego miara jest skończona, to możemy przyjąć, że będziemy stosować **prawdopodobieństwo geometryczne**. Ponadto, skoro losujemy **dwa punkty**, potrzebna będzie nam przestrzeń **2-wymiarowa**, czyli pewien podzbiór $\mathbb{R}^2$ o skończonym polu. Naturalnym kandydatem na przestrzeń zdarzeń elementarnych w tym zadaniu jest:

$$\Omega = [0, 10] \times [0, 10],$$

co graficznie możemy przedstawić w następujący sposób:



Zdarzenia elementarne $\omega = (x, y) \in \Omega$ interpretujemy w ten sposób, że pierwsza współrzędna punktu z kwadratu oznacza pierwszą wylosowaną przez nas liczbę, a druga współrzędna oznacza drugą z nich. Przypomnijmy ponadto, że w tym modelu prawdopodobieństwo zdarzenia $A \subseteq \Omega$ obliczamy jako:

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\lambda(A)}{\lambda(\Omega)},$$

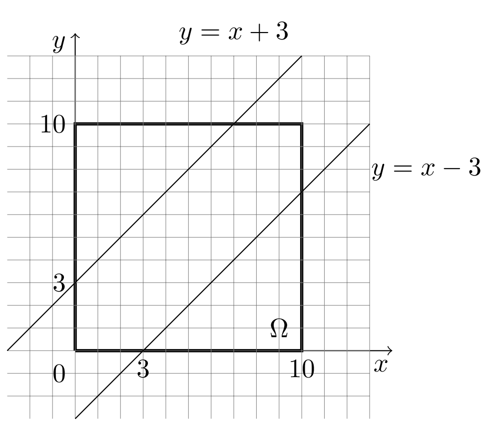
gdzie miarę $\lambda(.)$ interpretujemy jako pole, bo $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$.
Zajmiemy się teraz zdarzeniem D_3, polegającym na tym, że odległość między wylosowanymi punktami jest równa 3. Ponieważ odległość między punktami na prostej obliczamy używając wartości bezwzględnej, zbiór par punktów (x, y) należących do D_3 musi spełniać zależność:

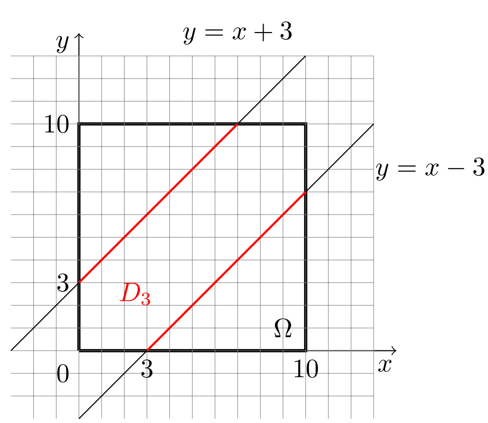
$$|x - y| = 3,$$

co można też zapisać w następujący sposób:

$$x - y = 3 \text{ lub } x - y = -3.$$

Zanim przystąpimy do obliczania prawdopodobieństwa zdarzenia D_3 przedstawimy jeszcze ten zbiór graficznie:





Na lewym rysunku widzimy zbiór wszystkich rozwiązań równania $|x - y| = 3$, a na prawym te z nich, które należą do zbioru $D_3 \subseteq \Omega$ (kolor czerwony). Łatwo teraz zauważyć, że:

$$\mathbb{P}(D_3) = \frac{\lambda(D_3)}{\lambda(\Omega)} = \frac{0}{100} = 0.$$

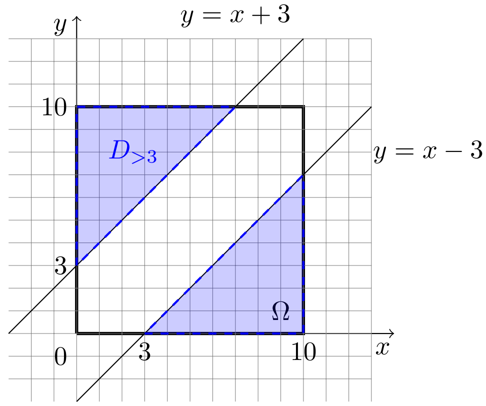
Pozostaje nam do obliczenia $\mathbb{P}\,(D_{>3})$. Zauważmy, że w tym przypadku zbiór punktów $(x,y) \in D_{>3}$ musi spełniać nierówność:

$$|x-y| > 3,$$

co oznacza, że punkty te muszą spełniać jedną z dwóch nierówności:

$$x - y > 3 \quad \text{lub} \quad x - y < -3.$$

Graficznie zbiór rozwiązań tych nierówności należących do zbioru Ω możemy przedstawić w następujący sposób:



Ostatecznie, prawdopodobieństwo zdarzenia $D_{>3}$ to

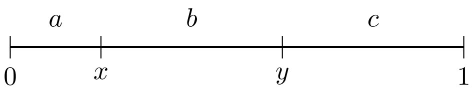
$$\mathbb{P}(D_{>3}) = \frac{\lambda(D_{>3})}{\lambda(\Omega)} = \frac{49}{100}.$$

Zadanie 3. *W przedziale $[0,1]$ wybrano losowo dwa punkty, które podzieliły go na 3 odcinki. Jakie jest prawdopodobieństwo zdarzenia A, że z tych odcinków da się zbudować trójkąt?*

Podobnie jak w poprzednim zadaniu losujemy dwa punkty z odcinka, a więc będziemy stosować prawdopodobieństwo geometryczne oraz przyjmiemy, że

$$\Omega = [0,1] \times [0,1].$$

Oznaczmy przez x, y punkty, które wylosujemy z odcinka. Interesuje nas zdarzenie A, że z tych odcinków da się zbudować trójkąt. Spójrzmy na rysunek pomocniczy:



Wylosowane punkty dzielą przedział $[0,1]$ na trzy odcinki, których długości oznaczmy kolejno przez a, b, c. Przypomnijmy, że z trzech odcinków o długościach a, b, c da się zbudować trójkąt, jeśli spełniają one następujące nierówności (tzw. **nierówności trójkąta**):

$$a + b > c,$$

$$a + c > b,$$

$$b + c > a.$$

Zastanówmy się teraz, jak możemy zapisać zależność pomiędzy długościami otrzymanych odcinków, a wartościami wylosowanych punktów. W tym celu rozważymy dwa przypadki:

- pierwszy wylosowany punkt jest nie większy niż drugi wylosowany punkt, czyli $x \leqslant y$;
- pierwszy wylosowany punkt jest większy niż drugi wylosowany punkt, czyli $x > y$.

W pierwszym przypadku, korzystając z wcześniejszego rysunku pomocniczego, możemy łatwo zauważyć, że

$$a = x, \quad b = y - x, \quad c = 1 - y.$$

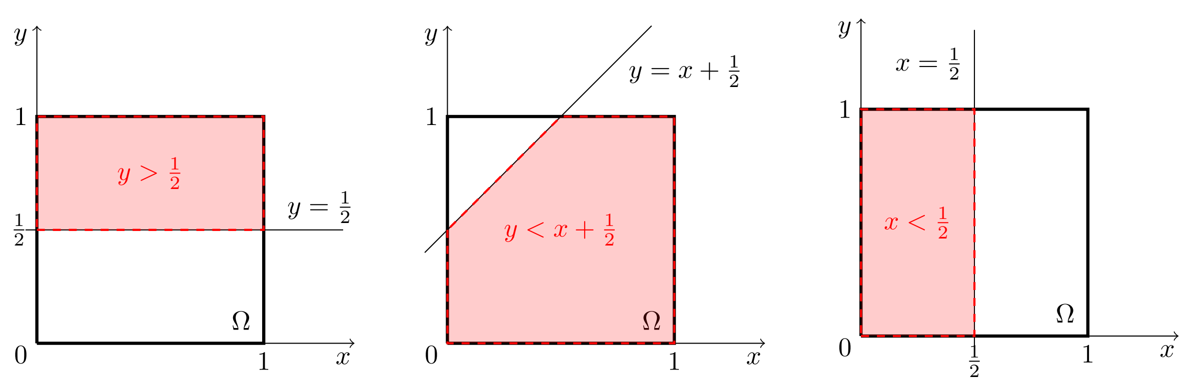
Podstawiając te wartości do wcześniejszych nierówności otrzymujemy nowy układ nierówności:

$$\begin{cases} y > 1 - y \\ x + 1 - y > y - x \\ 1 - x > x \end{cases}$$

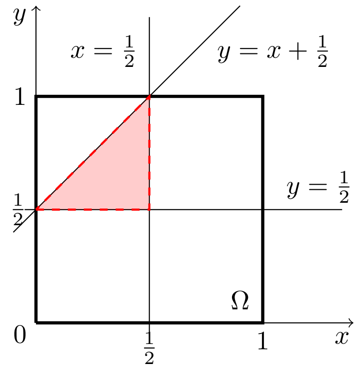
co można uprościć do postaci:

$$\begin{cases} y > \frac{1}{2} \\ y < x + \frac{1}{2} \\ x < \frac{1}{2} \end{cases}$$

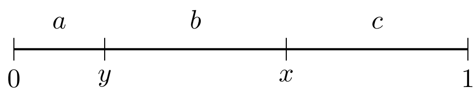
Przedstawmy teraz graficznie zbiór tych punktów $(x, y) \in \Omega$, które spełniają te nierówności:



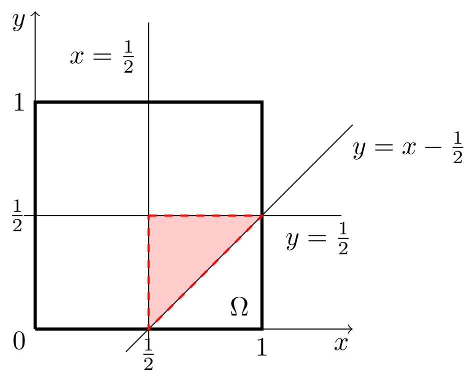
Na powyższych rysunkach przedstawiono zbiory rozwiązań kolejnych nierówności. Zatem zbiór punktów spełniających wszystkie trzy nierówności możemy przedstawić w następujący sposób:



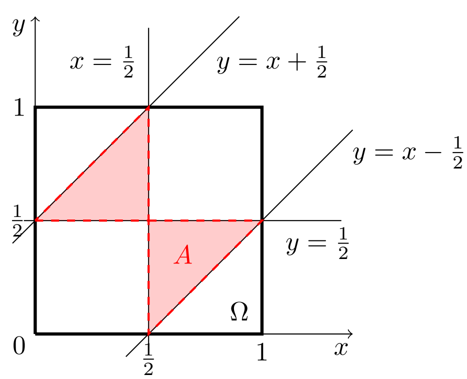
Musimy jeszcze rozważyć drugi przypadek, czyli te wyniki doświadczenia losowego, w których $x > y$. Wtedy rysunek pomocniczy wygląda w następujący sposób:



Okazuje się, że ten przypadek jest symetryczny w stosunku do poprzedniego przypadku – wystarczy zamienić miejscami x i y. Zatem nietrudno zauważyć, że w tym przypadku zbiór punktów, które dzielą przedział $[0, 1]$ na trzy odcinki, z których da się zbudować trójkąt, można graficznie przedstawić w następujący sposób:



Na koniec musimy zsumować oba przypadki. Zatem ostatecznie zbiór A wygląda w następujący sposób:



Pozostaje nam obliczyć $\mathbb{P}(A)$, co wymaga obliczenia pól odpowiednich figur:

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\lambda(A)}{\lambda(\Omega)} = \frac{2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{4}.$$

Zadanie 4. *W sesji student zdaje dwa egzaminy, z analizy i algebry. Szansa, że student zda egzamin z analizy wynosi 0,8, że zda algebrę 0,7. Przyjmując mało realistyczne założenie, że zdarzenia te są od siebie niezależne, znajdź prawdopodobieństwo, że student:*

(a) *zda analizę, a obleje algebrę?*
(b) *zda oba egzaminy?*
(c) *zda tylko jeden egzamin?*
(d) *nie zda żadnego egzaminu?*

Oznaczmy przez A zdarzenie, że student zda egzamin z analizy, a przez B zdarzenie, że student zda algebrę. Z treści zadania wynika, że

$$\mathbb{P}(A) = 0,8, \quad \mathbb{P}(B) = 0,7\,.$$

Ponadto, korzystając z własności prawdopodobieństwa możemy łatwo obliczyć szanse na to, że student obleje odpowiednie egzaminy:

$$\mathbb{P}(A') = 1 - \mathbb{P}(A) = 0,2,$$
$$\mathbb{P}(B') = 1 - \mathbb{P}(B) = 0,3.$$

Warto też przypomnieć, że z niezależności zdarzeń A i B wynika niezależność par zdarzeń: A i B', A' i B oraz A' i B'. Zatem jeśli zdołamy zapisać interesujące nas zdarzenia w postaci części wspólnej wymienionych wcześniej par zdarzeń, to w prosty sposób będziemy mogli obliczyć ich prawdopodobieństwo. Zastanówmy się więc, jak możemy zapisać zdarzenia wymienione w zadaniu:

(a) student zda analizę, a obleje algebrę: $A \setminus B = A \cap B'$,
(b) zda oba egzaminy: $A \cap B$,
(c) zda tylko jeden egzamin: $(A \cap B') \cup (A' \cap B)$,
(d) nie zda żadnego egzaminu: $A' \cap B'$.

Zatem korzystając z niezależności zdarzeń otrzymujemy następujące prawdopodobieństwa:

(a) $\mathbb{P}(A \cap B') = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B') = 0,8 \cdot 0,3 = 0,24$
(b) $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B) = 0,8 \cdot 0,7 = 0,56$
(c) W tym przypadku należy jeszcze zauważyć, że zdarzenia $A \cap B'$ (czyli to, że student zda analizę, ale obleje algebrę) oraz $A' \cap B$ (czyli to, że student zda algebrę, ale obleje analizę) to zdarzenia rozłączne, a więc prawdopodobieństwo sumy tych zdarzeń to po prostu suma ich prawdopodobieństw:
$$\mathbb{P}((A \cap B') \cup (A' \cap B)) = \mathbb{P}(A \cap B') + \mathbb{P}(A' \cap B) = 0,24 + \mathbb{P}(A') \cdot \mathbb{P}(B) = 0,24 + 0,2 \cdot 0,7 = 0,38$$
(d) $\mathbb{P}(A' \cap B') = \mathbb{P}(A') \cdot \mathbb{P}(B') = (1 - \mathbb{P}(A)) \cdot (1 - \mathbb{P}(B)) = 0,2 \cdot 0,3 = 0,06$

Zadanie 5. *Wybieramy losowo liczbę ze zbioru* $\{1, \ldots, 1800\}$. *Niech* A_k *będzie zdarzeniem, że dzieli się ona przez* k.

(a) *Czy zdarzenia* A_5 *i* A_6 *są niezależne?*

(b) *Czy zdarzenia* A_6 *i* A_9 *są niezależne?*

W tym zadaniu możemy przyjąć, że stosujemy model klasyczny, a przestrzeń zdarzeń elementarnych to $\Omega = \{1, \ldots, 1800\}$. Zastanówmy się najpierw, z jakich zdarzeń elementarnych składają się interesujące nas zdarzenia:

$$A_5 = \{5, 10, 15, 20, \ldots, 1800\},$$
$$A_6 = \{6, 12, 18, 24, \ldots, 1800\},$$
$$A_9 = \{9, 18, 24, 36, \ldots, 1800\}.$$

Patrząc na powyższe wzory łatwo zauważyć, że moc zbioru A_i $(i \geqslant 1)$ – liczb naturalnych ze zbioru $\{1, \ldots, 1800\}$ podzielnych przez i wyraża się wzorem:

$$|A_i| = \lfloor 1800/i \rfloor,$$

a zatem

$$P(A_i) = \frac{\lfloor 1800/i}{1800} \rfloor.$$

Ponadto,

$$A_5 \cap A_6 = \{30, 60, 90, 120, \ldots, 1800\} = A_{30},$$
$$A_6 \cap A_9 = \{18, 36, 54, 72, \ldots, 1800\} = A_{18}.$$

Możemy stwierdzić, że zbiór liczb podzielnych jednocześnie przez i oraz j możemy inaczej opisać jako zbiór liczb podzielnych przez najmniejszą wspólną wielokrotność tych liczb:

$$A_i \cap A_j = A_{\mathrm{NWW}(i,j)}.$$

Biorąc pod uwagę powyższe wzory, możemy teraz wyznaczyć prawdopodobieństwo interesujących nas zdarzeń:

$$\mathbb{P}(A_5) = \frac{\frac{1800}{5}}{1800} = \frac{1}{5},$$
$$\mathbb{P}(A_6) = \frac{\frac{1800}{6}}{1800} = \frac{1}{6},$$
$$\mathbb{P}(A_9) = \frac{\frac{1800}{9}}{1800} = \frac{1}{9},$$
$$\mathbb{P}(A_5 \cap A_6) = \mathbb{P}(A_{30}) = \frac{\frac{1800}{30}}{1800} = \frac{1}{30},$$
$$\mathbb{P}(A_6 \cap A_9) = \mathbb{P}(A_{18}) = \frac{\frac{1800}{18}}{1800} = \frac{1}{18}.$$

Możemy teraz sprawdzić niezależność odpowiednich par zdarzeń:

$$\mathbb{P}(A_5) \cdot \mathbb{P}(A_6) = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{30} = \mathbb{P}(A_5 \cap A_6),$$
$$\mathbb{P}(A_6) \cdot \mathbb{P}(A_9) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{9} = \frac{1}{54} \neq \frac{1}{18} = \mathbb{P}(A_6 \cap A_9)$$

Zatem zdarzenia A_5 i A_6 są niezależne, a zdarzenia A_6 i A_9 nie są niezależne.