Logika i teoria mnogości

Ćwiczenia 5

Funkcje logiczne

Definicja. Niech $n \geq 1$. Funkcję n-argumentową, której argumenty i wartości są wartościami logicznymi $0, 1$, nazywamy n-argumentową *funkcją boolowską*.

Inne nazwy: funkcja logiczna, funkcja przełączająca.
Niech x, y, z reprezentują wartości logiczne.

Funkcje jednoargumentowe ($n = 1$)

x	f_0^1	f_1^1	f_2^1	f_3^1
1	0	0	1	1
0	0	1	0	1

$f_0^1(x) = 0$ funkcja zero
$f_1^1(x) = \neg x$ funkcja negacji
$f_2^1(x) = x$ funkcja identycznościowa
$f_3^1(x) = 1$ funkcja jeden

$f_0^1(1) = 0, f_0^1(0) = 0$ kod: 00
$f_1^1(1) = 0, f_1^1(0) = 1$ kod: 01
$f_2^1(1) = 1, f_2^1(0) = 0$ kod: 10
$f_3^1(1) = 1, f_3^1(0) = 1$ kod: 11

Fakt. Liczba wszystkich n-argumentowych funkcji boolowskich wynosi 2^{2^n}.

Zatem, są 4 funkcje boolowskie 1-argumentowe, jest 16 funkcji boolowskich 2-argumentowych i 256 3-argumentowych.

Funkcje dwuargumentowe ($n = 2$)

x	y	f_0^2	f_1^2	f_2^2	f_3^2	f_4^2	f_5^2	f_6^2	f_7^2	f_8^2	f_9^2	f_{10}^2	f_{11}^2	f_{12}^2	f_{13}^2	f_{14}^2	f_{15}^2
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
0	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Zauważmy, że kody funkcji logicznych są binarnymi rozwinięciami numeru funkcji.

$f_8^2(x,y) = x \wedge y$ funkcja koniunkcji
$f_9^2(x,y) = x \Leftrightarrow y$ funkcja równoważności
$f_{11}^2(x,y) = x \Rightarrow y$ funkcja implikacji
$f_{14}^2(x,y) = x \vee y$ funkcja alternatywy

Zadanie 1. Znaleźć numery funkcji

1. $x \Leftrightarrow \neg y$
2. $x \downarrow y$
3. $x \uparrow y$

Funkcja 2-argumentowa (strzałka Sheferra lub funkcja NAND): $x \uparrow y = \neg(x \wedge y)$ odpowiada spójnikowi "co najwyżej jedno z dwojga".

Funkcja 2-argumentowa (binegacja lub funkcja NOR): $x \downarrow y = \neg(x \vee y)$ odpowiada spójnikowi "ani ... ani ..."

x	y	$x \uparrow y$	$x \downarrow y$
1	1	0	0
1	0	1	0
0	1	1	0
0	0	1	1

Przykład. Wyznaczyć tablicę funkcji f_{200}^3.
Rozwiązanie:
$200 = (11001000)_2$ Kod 11001000 wpisujemy do tablicy wartościowań:

x	y	z	$f_{200}^3(x,y,z)$
1	1	1	1
1	1	0	1
1	0	1	0
1	0	0	0
0	1	1	1
0	1	0	0
0	0	1	0
0	0	0	0

Zadanie 2. Wyznaczyć tablice funkcji: a) $f_{25}^3(x,y,z)$, b) $f_{33}^3(x,y,z)$, c) $f_{105}^3(x,y,z)$, d) $f_{199}^3(x,y,z)$.

Wskazówka. $25 = (11001)_2$. Kod 11001 uzupełniamy zerami do 8 znaków (na początku (!)) otrzymując: 00011001 i ten kod wpisujemy do tablicy.

Zadanie 3. Znaleźć numer funkcji logicznej 3-argumentowej o kodzie a) 11001, b) 100001, c) 11001101.

Fakt. Każdą funkcję boolowską można przedstawić jako wyrażenie w KPN i jako wyrażenie w APN.

Przykład
$f_0^2(x,y) = x \wedge \neg x = (\neg x \vee \neg y) \wedge (\neg x \vee y) \wedge (x \vee \neg y) \wedge (x \vee y)$
$f_1^2(x,y) = \neg x \wedge \neg y = (\neg x \vee \neg y) \wedge (\neg x \vee y) \wedge (x \vee \neg y)$
$f_2^2(x,y) = \neg x \wedge y = (\neg x \vee \neg y) \wedge (\neg x \vee y) \wedge (x \vee y)$
$f_3^2(x,y) = (\neg x \wedge y) \vee (\neg x \wedge \neg y) = (\neg x \vee \neg y) \wedge (\neg x \vee y)$

Dla funkcji logicznych zachodzą pewne prawa, zwane prawami algebry logiki:

- dla 0: $x \wedge 0 = 0, x \vee 0 = x, x \wedge \neg x = 0$
- dla 1: $x \vee 1 = 1, x \wedge 1 = x, x \vee \neg x = 1$
- prawa pochłaniania: $x \wedge x = x, x \vee x = x$
- prawa przemienności: $x \wedge y = y \wedge x, x \vee y = y \vee x$
- prawa łączności: $(x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z)$
  $(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z)$
- prawa rozdzielności: $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$
  $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$
- prawo podwójnej negacji: $\neg\neg x = x$
- prawa De Morgana: $\neg(x \wedge y) = \neg x \vee \neg y, \neg(x \vee y) = \neg x \wedge \neg y$
- prawo transpozycji: $x \Rightarrow y = \neg y \Rightarrow \neg x$

Wyrażenie w APN dla $f_3^2(x,y)$ można uprościć, stosując prawa algebry logiki:

$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z), x \vee \neg x = 1, x \wedge 1 = x$

$f_3^2(x,y) = \neg x \wedge (y \vee \neg y) = \neg x \wedge 1 = \neg x$

Zadanie 4. Stosując prawa algebry logiki uprościć następujące funkcje logiczne:

1. $f(x,y,z) = (x \wedge y \wedge z) \vee (x \wedge y \wedge \neg z) \vee (\neg x \wedge y \wedge z) \vee (\neg x \wedge y \wedge \neg z)$
2. $f(x,y,z) = (x \wedge \neg y \wedge \neg z) \vee (\neg x \wedge \neg y \wedge z) \vee (x \wedge \neg y \wedge z) \vee (\neg x \wedge \neg y \wedge \neg z)$

Definicja. Zbiór funkcji boolowskich F nazywamy *zupełnym*, jeżeli każda funkcja boolowska jest przedstawialna przez funkcje ze zbioru F.

Przykład. Zbiór $\{\neg, \wedge, \vee\}$ jest zbiorem zupełnym, gdyż $\Rightarrow$ oraz $\Leftrightarrow$ można przedstawić za pomocą $\neg, \wedge$ oraz $\vee$.

$x \Rightarrow y = \neg x \vee y$

$x \Leftrightarrow y = (x \Rightarrow y) \wedge (y \Rightarrow x) = (\neg x \vee y) \wedge (\neg y \vee x)$

Również:

$x \Leftrightarrow y = (x \wedge y) \vee (\neg x \vee \neg y)$

Zadanie 5. Wykazać, że następujące zbiory są zupełne:

1. $\{\neg, \wedge\}$
2. $\{\neg, \vee\}$
3. $\{\neg, \Rightarrow\}$
4. $\{\uparrow\}$
5. $\{\downarrow\}$