DMAD - podstawowe zasady przeliczania

Jak przygotować się do rozwiązywania zadań?

Przeczytaj rozdziały 2.1 i 2.2 z podręcznika/wykładu.

Co powinnaś/powinieneś wiedzieć:

Kiedy i jak należy stosować **prawo dodawania** i **prawo mnożenia**?
Kiedy funkcja $f : A \to B$ jest bijekcją?
O czym mówi **zasada bijekcji**?

A Zadania na ćwiczenia

Zadanie A.1. Niech $k \geqslant n \geqslant 1$. Wskazać bijekcję między A i B, B i C oraz A i C:

A – zbiór całkowitoliczbowych rozwiązań równania $x_1 + \ldots + x_n = k$ takich, że $x_i \geqslant 1$ dla każdego $1 \leqslant i \leqslant n$;
B – zbiór ciągów binarnych złożonych z $n-1$ jedynek i $k-n$ zer;
C – zbiór ciągów binarnych złożonych z $n-1$ zer i $k-n$ jedynek.

Zadanie A.2. Ile jest ciągów cyfr długości 3, które

a) zaczynają się od cyfry nieparzystej?
b) nie zawierają żadnej cyfry trzy razy?
c) zawierają dokładnie dwie cyfry 4?
d) zawierają co najmniej jedną cyfrę 4?

Zadanie A.3. Na ile sposobów fotograf może umieścić w rzędzie na zdjęciu 6 osób z grupy 10 uczestników wesela, wśród których jest pan i panna młoda, jeśli

a) panna młoda ma być na zdjęciu?
b) oboje nowożeńcy mają być na zdjęciu?
c) dokładnie jeden z nowożeńców ma być na zdjęciu?
d) co najmniej jeden z nowożeńców ma być na zdjęciu?

Zadanie A.4. Na ile sposobów możemy umieścić 4 osoby spośród 10 na 4 krzesłach ustawionych wokół okrągłego stołu, gdy zakładamy, że dwa rozmieszczenia są identyczne, gdy każdy ma tych samych sąsiadów po lewej i po prawej stronie?

Zadanie A.5. Na ile sposobów możemy wybrać 3 różne elementy ze zbioru $\{1, 2, 3, \ldots, 10\}$, jeśli

a) kolejność wyboru elementów jest istotna?
b) kolejność wyboru elementów nie jest istotna?

B Zadania na ćwiczenia - jeśli czas pozwoli

Zadanie B.1. Wskazać bijekcję między A i B:

A – zbiór (nieuporządkowanych) podziałów zbioru $\{1, \ldots, n\}$ na dwa niepuste rozłączne podzbiory;
B – zbiór ciągów binarnych długości $n-1$ zawierających co najmniej jedną jedynkę.

Zadanie B.2. Rysio zapomniał jednej z trzech liczb z zakresu $\{1, 2, \ldots, 40\}$ w kodzie otwierającym jego kłódkę do szafki w szatni. Pamięta tylko 17 i 24, ale nie pamięta w jakiej kolejności te liczby występują w kodzie. Ile co najwyżej prób musi wykonać Rysio, aby otworzyć szafkę?

Zadanie B.3. Oblicz prawdopodobieństwo, że losowo wybrany dzielnik liczby 10^{99} (wliczając 1) jest wielokrotnością liczby 10^{88}.

Zadanie B.4. Wyznacz liczbę uporządkowanych par liczb naturalnych (a, b), których najmniejszą wspólną wielokrotnością jest liczba $2^3 5^7 11^{13}$.

Zadanie B.5. Znajdź bijekcję pomiędzy zbiorami A i B

A – zbiór słów (niekoniecznie mających sens), które można utworzyć korzystając z wszystkich liter: abbcccddddeeeee;
B – zbiór podziałów zbioru $\{1, 2, 3, 4, \ldots, 15\}$ na rozłączne podzbiory o mocach: 1,2,3,4 i 5.

Zadanie B.6. Pokaż bijekcję między następującymi obiektami:

A - rodzina koszyków piknikowych zawierających k kanapek, które można skompletować z n ($n \leqslant k$) różnych kanapek z wędliną i $2k$ identycznych kanapek wegetariańskich;
B - rodzina wszystkich podzbiorów zbioru $\{1, \ldots, n\}$.

C Zadania do samodzielnej pracy w domu

Zadanie C.1. Ile ciągów binarnych długości 7 zaczyna się dwoma 1 lub trzema 0?

Zadanie C.2. Test wyboru zawiera 10 pytań. Każde z pytań ma 4 możliwe odpowiedzi (tylko jedna jest poprawna). Na ile sposobów student może odpowiedzieć na pytania, jeśli:

a) odpowie na każde pytanie?

b) niektóre pytania może zostawić bez odpowiedzi?

Zadanie C.3. Sześć różnych linii lotniczych oferuje loty między Nowym Jorkiem a Denver i siedem linii lata między Denver a San Francisco. W dodatku 3 linie lotnicze latają bezpośrednio między Nowym Jorkiem a San Francisco. Ile jest różnych możliwych wyborów konfiguracji linii lotniczych, jeśli chcemy polecieć z Nowego Jorku do San Francisco i z powrotem? Jak zmieni się odpowiedź, jeśli w drodze powrotnej chcemy skorzystać z innych połączeń niż poprzednio?

Zadanie C.4. Każdy użytkownik komputera ma hasło składające się z 6 do 8 znaków, które są cyfrą lub wielką literą alfabetu łacińskiego (26 liter). Każde hasło zawiera co najmniej jedną cyfrę. Ile jest możliwych haseł?

Zadanie C.5. Tablica rejestracyjna zawiera 3 duże litery (z alfabetu 26-literowego), po których następują 3 cyfry. Ile różnych tablic można stworzyć, jeśli cyfra 0 i litera O nie mogą być użyte jednocześnie?

Zadanie C.6. Załóżmy, że hało komputerowe ma co najmniej 8 i co najwyżej 12 znaków. Każdy ze znaków jest cyfrą lub wielką literą alfabetu łacińskiego (26 liter), lub małą literą alfabetu łacińskiego, lub jednym z sześciu znaków specjalnych: $*, >, <, !, +, =$.

a) Ile jest możliwych haseł?

b) Ile z haseł zawiera co najmniej jeden znak specjalny?

c) Ile z tych haseł kończy się dwoma znakami specjalnymi lub cyfrą?

Zadanie C.7. Znajdź bijekcję pomiędzy zbiorami A i B

a) A - zbiór rozmieszczeń n rozróżnialnych kul w k ponumerowanych szufladkach;
B - zbiór ciągów długości n o elementach ze zbioru $\{1, 2, \ldots, k\}$.

b) A - zbiór rozmieszczeń n rozróżnialnych kul w k $(n \leqslant k)$ ponumerowanych szufladkach, w ten sposób, że każda szufladka zawiera co najwyżej jedną kulę;
B - zbiór ciągów długości n o elementach ze zbioru $\{1, 2, \ldots, k\}$ $(n \leqslant k)$, w których elementy nie mogą się powtarzać.

c) A -zbiór rozmieszczeń n identycznych kul w k $(n \leqslant k)$ ponumerowanych szufladkach, w ten sposób, że każda szufladka zawiera co najwyżej jedną kulę;
B - rodzina wszystkich n–elementowych podzbiorów zbioru $\{1, 2, \ldots, k\}$.

d) A - zbiór n–elementowych ciągów binarnych zawierających dokładnie k jedynek $(k \leqslant n)$;
B - rodzina wszystkich k–elementowych podzbiorów zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$ $(k \leqslant n)$.

e) A - zbiór wszystkich rozwiązań równania

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_{2k} = 0, \quad x_i \in \{-1, 1\};$$

B - zbiór wszystkich najkrótszych ścieżek pomiędzy przeciwległymi narożnikami kraty o bokach długości k.

f) A - zbiór wszystkich rozwiązań równania

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_{2k} = 4, \quad x_i \in \{-1, 1\} \quad k \geqslant 2;$$

B - rodzina wszystkich $k + 2$–elementowych podzbiorów zbioru $\{1, 2, \ldots, 2k\}$, $k \geqslant 2$.

g) A - zbiór wszystkich całkowitoliczbowych rozwiązań równania

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_k = n, \quad x_i \geqslant 2;$$

B - zbiór wszystkich całkowitoliczbowych rozwiązań równania

$$y_1 + y_2 + \ldots + y_k = n - k, \quad y_i \geqslant 1.$$

h) A - zbiór wszystkich całkowitoliczbowych rozwiązań równania

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_k = n, \quad x_i \geqslant 1;$$

B - zbiór wszystkich $n + k - 1$–elementowych ciągów binarnych zawierających n zer i $k - 1$ jedynek zaczynających się i kończących zerem, takich, że żadne dwie jedynki nie stoją obok siebie.

i) A - zbiór wszystkich całkowitoliczbowych rozwiązań równania

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_k = n, \quad x_i \geqslant 1;$$

B - rodzina wszystkich $k - 1$–elementowych podzbiorów zbioru $\{1, 2, \ldots, n - 1\}$.

j) A - zbiór wszystkich słów 6-literowych, które mogą być utworzone z liter słowa TAMTAM;
B - rodzina wszystkich uporządkowanych podziałów zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ na dwuelementowe podzbiory.

Zadanie C.8. Zadania 2.1 - 2.20 z podręcznika.

Odpowiedzi do niektórych zadań

C.1 48

C.2 a) $4^{10} = 1048576$ b)$5^{10} = 9765625$

C.3 2025, a jeśli inne połączenie powrotne: 1518.

C.4 $36^6 + 36^7 + 36^8 - 26^6 - 26^7 - 26^8$

C.5 17047279

C.6 a)$68^8 * (1 + 68 + 68^2 + 68^3 + 68^4)$
b)$68^8 * (1 + 68 + 68^2 + 68^3 + 68^4) - 62^8 * (1 + 62 + 62^2 + 62^3 + 62^4)$
c)$(68^6 * 36 + 68^7 * 10) * (1 + 68 + 68^2 + 68^3 + 68^4)$

2.2. 40320.

2.3. $\frac{n(n-3)}{2}$.

2.4. $n(n-1)$.

2.5. a) 14 b)100 c) 72.

2.6. Jeśli $n < k$, odp: 0. Jeśli $n \geqslant k$, odp: $n - k + 1$.

2.7. 20 (uwaga: owoce jednego rodzaju są nierozróżnialne).

2.8. Bartosz ma szanse $\frac{625}{1296}$. Anna: $\frac{671}{1296}$. Większe szanse ma Anna.

2.9. $n(n-1)\ldots(n-k+1)$.

2.10. a)900 b) $9 * 10^k$ c) $9 * 10^{k-1}$.

2.11. $m^{\frac{n}{2}}$, n - parzyste, $m^{\frac{n+1}{2}}$, n - nieparzyste

2.12. a) 3000, b) 10317 dla $d = 0$, 12504 dla $d \neq 0$, c) 19683 dla $d = 0$, 17496 dla $d \neq 0$

2.13. 29889.

2.14. 89994.

2.15. 28.

2.16. 8999956.

2.17. 612.

2.18. 130.

2.19. $\frac{9}{8}(9^n - 1)$.

2.20. 53.