Ćwiczenia 13. Rozwiązania

Definicje indukcyjne dodawania i mnożenia liczb naturalnych
Dla wszystkich $m, n \in \mathbb{N}$:
$m + 0 = m$
$m + S(n) = S(m + n)$
$m \cdot 0 = 0$
$m \cdot S(n) = m \cdot n + m$ (przyjmujemy wyższy priorytet $\cdot$ wobec $+$)
ZADANIE DOMOWE 1. Udowodnij prawa arytmetyki.
(a) $\forall_{n\in\mathbb{N}}(n \cdot 1 = n)$ (bez indukcji)
(b) $\forall_{m,n\in\mathbb{N}}(m \cdot n = n \cdot m)$. Najpierw udowodnij dwa lematy.
(L3) $\forall_{n\in\mathbb{N}}(0 \cdot n = 0)$
(L4) $\forall_{m,n\in\mathbb{N}}(S(m) \cdot n = m \cdot n + n)$
(c) $\forall_{k,m,n\in\mathbb{N}}[(k \cdot m) \cdot n = k \cdot (m \cdot n)]$ (łączność mnożenia)

Rozwiązania

(a) $n \cdot 1 = n \cdot S(0) = n \cdot 0 + n = 0 + n = n$
Wykorzystaliśmy udowodnione prawo dla dodawania: $0 + n = n$.

(b) (L3)
$n = 0$. $0 \cdot 0 = 0$ na mocy pierwszego równania definicji mnożenia.
ZI: $0 \cdot n = 0$
TI: $0 \cdot S(n) = 0$
$0 \cdot S(n) = 0 \cdot n + 0 \stackrel{ZI}{=} 0 + 0 = 0$

(L4) Wykazujemy $\forall_{n\in\mathbb{N}}(S(m) \cdot n = m \cdot n + n)$
$n = 0$. $S(m) \cdot 0 = 0 = 0 + 0 = m \cdot 0 + 0$
ZI: $S(m) \cdot n = m \cdot n + n$
TI: $S(m) \cdot S(n) = m \cdot S(n) + S(n)$
$S(m) \cdot S(n) = S(m) \cdot n + S(m) = S(S(m) \cdot n + m) \stackrel{ZI}{=} S(m \cdot n + n + m) =$
$= S(m \cdot n + m + n) = S(m \cdot S(n) + n) = m \cdot S(n) + S(n)$
Wykorzystaliśmy udowodnione prawa łączności i przemienności dodawania.

Wykazujemy: $\forall_{n\in\mathbb{N}}(m \cdot n = n \cdot m)$.
$n = 0$. $m \cdot 0 = 0 \stackrel{L3}{=} 0 \cdot m$.
ZI: $m \cdot n = n \cdot m$
TI: $m \cdot S(n) = S(n) \cdot m$
$m \cdot S(n) = m \cdot n + m \stackrel{ZI}{=} n \cdot m + m \stackrel{L4}{=} S(n) \cdot m$

(c) Wykazujemy: $\forall_{n\in\mathbb{N}}((k \cdot m) \cdot n = k \cdot (m \cdot n))$.
$n = 0$. $(k \cdot m) \cdot 0 = 0 = k \cdot 0 = k \cdot (m \cdot 0)$
ZI: $(k \cdot m) \cdot n = k \cdot (m \cdot n)$
TI: $(k \cdot m) \cdot S(n) = k \cdot (m \cdot S(n))$
$(k \cdot m) \cdot S(n) = (k \cdot m) \cdot n + k \cdot m \stackrel{ZI}{=} k \cdot (m \cdot n) + k \cdot m =$
$= k \cdot (m \cdot n + m) = k \cdot (m \cdot S(n))$

Wykorzystaliśmy udowodnione prawo rozdzielności mnożenia względem dodawania.

Działania ilorazowe na zbiorze $\mathbb{Z}/R_n$ określiliśmy tak (tu $R = R_n$):
$[x]_R +_R [y]_R = [x + y]_R$
$[x]_R \cdot_R [y]_R = [x \cdot y]_R$
dla $x, y \in \mathbb{Z}$.

Zadanie domowe 2. Wykaż, że działanie $\cdot_R$ jest przemienne, łączne i rozdzielne względem $+_R$. **Uwaga.** Wiemy, że te własności mają odpowiednie działania na $\mathbb{Z}$.

Rozwiązania
Przemienność
$[x]_R \cdot_R [y]_R = [x \cdot y]_R = [y \cdot x]_R = [y]_R \cdot_R [x]_R$
Łączność
$([x]_R \cdot_R [y]_R) \cdot_R [z]_R = [x \cdot y]_R \cdot_R [z]_R = [(x \cdot y) \cdot z]_R =$
$= [x \cdot (y \cdot z)]_R = [x]_R \cdot_R [y \cdot z]_R = [x]_R \cdot_R ([x]_R \cdot_R [z]_R)$
Rozdzielność
$[x]_R \cdot_R ([y]_R +_R [z]_R) = [x]_R \cdot_R [y + z]_R = [x \cdot (y + z)]_R =$
$= [x \cdot y + x \cdot z]_R = [x \cdot y]_R +_R [x \cdot z]_R = [x]_R \cdot_R [y]_R +_R [x]_R \cdot_R [z]_R$

Zadanie domowe 3. (a) Narysuj diagram Hassego dla zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ z relacją podzielności ograniczoną do tego zbioru. Wyznacz element najmniejszy i elementy maksymalne.

(b) Na tym diagramie zaznacz podzbiór $X = \{2, 3, 6, 8, 9\}$, np. otaczając każdy element kółkiem. Wyznacz:

(1) elementy minimalne i elementy maksymalne w X,

(2) wszystkie ograniczenia dolne i ograniczenia górme zbioru X (jeżeli istnieją),

(3) kres dolny i kres górny zbioru X (jeżeli istnieją).

Zadanie domowe 4. Narysuj diagram Hassego dla $(\mathcal{P}(\{a, b, c\}), \subset)$. Niech X będzie rodziną wszystkich niepustych podzbiorów zbioru $\{a, b, c\}$. Oczywiście $X \subset \mathcal{P}(\{a, b, c\})$. Wyznacz elementy (1), (2), (3) jak w (b) powyżej.

Rozwiązania
Proszę przeczytać rozwiązania wykonane przez studentkę (obrazek).
Uzupełniam rozwiązanie zadania domowego 4(b).
Elementy minimalne w X: zbiory $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$
Elementy maksymalne w X: tylko $\{a, b, c\}$ (jest elementem największym w X)
Ograniczenia dolne zbioru X: tylko $\emptyset$ (jest kresem dolnym zbioru X)
Ograniczenia górne zbioru X: tylko $\{a, b, c\}$ (jest kresem górnym zbioru X)