Logika i teoria mnogości

Ćwiczenia 15

Relacje porządkujące

Definicja. Relację $R \subset A^2$ nazywamy relacją porządkującą na zbiorze A, jeżeli jest zwrotna (na A), antysymetryczna i przechodnia. Wtedy parę (A, R) nazywamy *zbiorem uporządkowanym*.

Definicja. Relację $R \subset A^2$ nazywamy relacją liniowo porządkującą na zbiorze A, jeżeli jest porządkująca i spójna (na A). Wtedy parę (A, R) nazywamy *zbiorem liniowo uporządkowanym*.

Przykłady

1. Relacja I_A jest relacja porządkującą. Jest to najmniejsza (w sensie za wierania) relacja porządkująca na zbiorze A, tzn. relacja I_A jest zawarta w każdej relacji porządkującej na A.
2. Relacja inkluzji na $\mathcal{P}(A)$, tj, $\{< X, Y >\in \mathcal{P}(A)^2 : X \subset Y\}$, jest relacją porządkującą.
3. Relacja podzielności na zbiorze $\mathbb{N}$ określona wzorem:

   $m|n \Leftrightarrow \exists_{k\in\mathbb{N}}(k \cdot m = n)$ dla $m, n \in \mathbb{N}$

   jest relacją porządkującą.
4. Relacja $\leq$ na zbiorze $\mathbb{N}$ jest relacją liniowo porządkującą. Podobnie $\leq$ na $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$.

Definicja. Niech (A, R) będzie zbiorem uporządkowanym. Zbiór $X \subset A$ nazywamy *łańcuchem* w (A, R), jeżeli $(X, R \cap X^2)$ jest zbiorem liniowo uporządkowanym.

Zauważmy, że zbiór $X \subset A$ jest łańcuchem w (A, R) wtedy i tylko wtedy, gdy $\forall_{x,y\in X}(xRy \vee yRx)$.

Przykłady

1. Rozważmy zbiór $\mathcal{P}(\{a, b\})$ uporządkowany przez ograniczenie inkluzji do tego zbioru. Ta relacja nie jest liniowym porządkiem, ponieważ
   ani $\{a\} \subset \{b\}$, ani $\{b\} \subset \{a\}$ nie zachodzi. Zbiory:

   $\{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}\}$ i $\{\emptyset, \{b\}, \{a, b\}\}$

   są łańcuchami w $\mathcal{P}(\{a, b\})$.

2. Rozważmy zbiór $\{1, 2, 3, 4\}$ z relacją podzielności ograniczoną do tego zbioru. Zbiory $\{1, 2, 4\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}$ są łańcuchami.

Diagramy Hassego skończonych zbiorów uporządkowanych

Niech $\leq$ będzie porządkiem na A. Ostry porządek $<$ wyznaczony przez $\leq$ określamy tak:

$$x < y \Leftrightarrow x \leq y \wedge x \neq y$$

Niech $(A, \leq)$ będzie zbiorem uporządkowanym. Element $y \in A$ nazywamy następnikiem elementu $x \in A$, jeżeli $x < y$, lecz nie istnieje $z \in A$ takie, że $x < z$ i $z < y$.

W diagramie Hassego przedstawiamy elementy zbioru jako wierzchołki i prowadzimy krawędzie od każdego wierzchołka do wszystkich następników tego wierzchołka, umieszczonych wyżej.

Mamy: $x \leq y$ wtedy i tylko wtedy, gdy w diagramie istnieje droga, idąca w górę, od x do y (dowolnej długości $n \geq 0$).

Droga jest to trasa, która nie przechodzi dwukrotnie przez żaden wierzchołek. Długość drogi: liczba krawędzi, przez które przechodzi ta droga.

Zadanie 1. Przedstawić diagram Hassego dla zbioru $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$:

1. z relacją podzielności ograniczoną do tego zbioru (jest to relacja częściowo porządkująca),

2. z naturalnym porządkiem $\leq$ ograniczonym do tego zbioru (jest to relacja liniowo porządkująca).

Zadanie 2. Przedstawić diagram Hassego:

1. dla relacji $\leq_P$ na $\mathbb{N}^2$ ograniczonej do $\{0, 1\}^2$

2. dla relacji $\leq_P$ na $\mathbb{N}^2$ ograniczonej do $\{0, 1, 2\}^2$

$$< x_1, y_1 > \leq_P < x_2, y_2 > \Leftrightarrow x_1 \leq x_2 \wedge y_1 \leq y_2$$

Definicja Niech $(A, \leq)$ będzie zbiorem uporządkowanym. Niech $X \subset A$. Element $a \in A$ nazywamy:

- *elementem najmniejszym w zbiorze* X, jeżeli $a \in X$ i $\forall_{x \in X}(a \leq x)$,
- *elementem największym w zbiorze* X, jeżeli $a \in X$ i $\forall_{x \in X}(x \leq a)$,
- *elementem minimalnym w zbiorze* X, jeżeli $a \in X$ i $\neg\exists_{x \in X}(x < a)$,
- *elementem maksymalnym w zbiorze* X, jeżeli $a \in X$ i $\neg\exists_{x \in X}(a < x)$,
- *ograniczeniem dolnym zbioru* X, jeżeli $\forall_{x \in X}(a \leq x)$,
- *ograniczeniem górnym zbioru* X, jeżeli $\forall_{x \in X}(x \leq a)$,

- *kresem dolnym zbioru* X, jeżeli a jest największym ograniczeniem dolnym zbioru X,
- *kresem górnym zbioru* X, jeżeli a jest najmniejszym ograniczeniem górnym zbioru X.

Zadanie 3. Niech X będzie zbiorem wszystkich podzbiorów zbioru liczb rzeczywistych i niech będzie dana relacja $R = \{< A, B >: A \subseteq B\}$. Uzasadnić, że relacja R jest relacją częściowego porządku w zbiorze X. Wyznaczyć elementy: minimalny, maksymalny, największy, najmniejszy.

Zadanie 4. Narysować diagram Hassego dla $(\mathcal{P}(\{a, b, c\}), \subset)$. Niech X będzie rodziną wszystkich niepustych podzbiorów zbioru $\{a, b, c\}$. Oczywiście $X \subset \mathcal{P}(\{a, b, c\})$. Wyznaczyć elementy: minimalny, maksymalny, największy, najmniejszy.

Zadanie 5. Dany jest zbiór X i relacja podzielności w tym zbiorze. Narysować diagram Hassego tej relacji i wyznaczyć elementy: minimalny, maksymalny, największy, najmniejszy.

a) $X = \{3, 5, 6, 10, 12\}$

b) $X = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 9\}$

c) $X = \{2, 3, 5, 6\}$

d) $X = \{2, 3, 4, 9, 36\}$