Logika i teoria mnogości

Ćwiczenia 13

Relacje równoważności

Definicja. Relację $R \subset A^2$ nazywamy *relacją równoważności* na zbiorze A, jeżeli relacja R jest zwrotna (na zbiorze A), symetryczna i przechodnia.
zwrotna na $A: \forall_{x \in A}(xRx)$
symetryczna: $\forall_{x,y}(xRy \Rightarrow yRx)$
przechodnia: $\forall_{x,y,z}(xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz)$

Definicja. Niech R będzie relacją równoważności na zbiorze A.
Dla elementu $x \in A$ określamy zbiór:
$[x]_R = \{y : xRy\}$ (równoważnie: $[x]_R = \{y \in A : xRy\}$
Zbiór $[x]_R$ nazywamy *klasą abstrakcji relacji równoważności* R wyznaczoną przez element x, zwany *reprezentantem* tej klasy.

Przykłady.

(1) Niech $R = I_A$. Dla $x \in A \qquad [x]_R = \{x\}$.

(2) Niech $R \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ będzie określona następująco: $xRy \Leftrightarrow |x| = |y|$ dla $x, y \in \mathbb{R}$.
Wtedy $[0]_R = \{0\}$ oraz dla $x \neq 0 \qquad [x]_R = \{x, -x\}$.

(3) Niech R będzie relacją równoważności na zbiorze wszystkich ludzi określoną tak: xRy wtw, gdy x i y są tej samej płci.
Wtedy dla dowolnej kobiety x, $[x]_R$ jest zbiorem wszystkich kobiet, a dla dowolnego mężczyzny x, $[x]_R$ jest zbiorem wszystkich mężczyzn.

Zadanie 1. Dany jest zbiór $X = \{a, b, c, d\}$ i relacja $R \subset X \times X$. Sprawdzić, czy jest to relacja równoważności, a jeśli tak, to wyznaczyć klasy abstrakcji tej relacji.

(a) $R = \{\langle a, a\rangle, \langle b, b\rangle, \langle c, c\rangle, \langle d, d\rangle, \langle a, b\rangle, \langle b, a\rangle\}$

(b) $R = \{\langle a, a\rangle, \langle b, b\rangle, \langle c, c\rangle, \langle d, d\rangle, \langle a, c\rangle, \langle a, d\rangle, \langle c, a\rangle, \langle c, d\rangle, \langle d, a\rangle, \langle d, c\rangle\}$

(c) $R = \{\langle a, a\rangle, \langle b, b\rangle, \langle c, c\rangle, \langle d, d\rangle, \langle a, b\rangle, \langle b, a\rangle, \langle c, d\rangle, \langle d, c\rangle\}$

Zadanie 2. Zbadać, czy podane relacje są relacjami równoważności:

(a) relacja podzielności na zbiorze liczb naturalnych bez zera,

(b) relacja na zbiorze liczb naturalnych większych od 1 określona następująco:

$$mRn \Leftrightarrow nwd(m,n) > 1$$

Zadanie 3. Wyznaczyć relacje równoważności:

(a) na zbiorze 2-elementowym,

(b) na zbiorze 3-elementowym,

(c) na zbiorze 4-elementowym.