Wstęp do rachunku prawdopodobieństwa
9. Zmienne losowe ciągłe wielowymiarowe.

Zadanie 1. *Dystrybuanta zmiennej losowej (X, Y) wyraża się wzorem*

$$F_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} (1 - \exp(-x))(1 - \exp(-2y)) & \text{dla } x \geqslant 0, y \geqslant 0, \\ 0 & \text{w pozostałych przypadkach.} \end{cases}$$

(a) *Znajdź gęstość $f_{X,Y}$.*

Szukaną funkcję wyznaczymy różniczkując dystrybuantę $F_{X,Y}(x, y)$ najpierw po zmiennej x, a potem po zmiennej y, czyli:

$$f_{X,Y}(s, t) = \frac{\partial^2 F_{X,Y}(x, y)}{\partial x \partial y}\Big|_{x=s,y=t}.$$

Przypomnijmy, że dla funkcji wykładniczej $\exp(x) = e^x$ mamy:

$$\frac{\partial \exp(x)}{\partial x} = \exp(x) \quad \text{oraz} \quad \frac{\partial \exp(cx)}{\partial x} = c \exp(cx).$$

A zatem

$$\frac{\partial^2 (1 - \exp(-x))(1 - \exp(-2y))}{\partial x \partial y}\Big|_{x=s,y=t} = \frac{\partial \exp(-s)(1 - \exp(-2y))}{\partial y}\Big|_{y=t} = 2\exp(-s - 2t).$$

Tak więc gęstość wektora losowego (X, Y) dana jest wzorem:

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} 2\exp(-x - 2y) & \text{dla } x \geqslant 0, y \geqslant 0, \\ 0 & \text{w pozostałych przypadkach.} \end{cases}$$

(b) *Znajdź dystrybuanty F_X, F_Y i gęstości f_X, f_Y.*

Wiemy, że

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, t)\, dt,$$

oraz

$$F_X(x) = \lim_{y \to \infty} F_{X,Y}(x, y).$$

Ponieważ dla $x \geqslant 0$ mamy:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, t)\, dt = \int_0^{\infty} 2\exp(-x - 2t)\, dt = 2\exp(-x) \int_0^{\infty} \exp(-2t)\, dt = 2\exp(-x) \left[\frac{-\exp(-2t)}{2}\right]_0^{\infty} = 2\exp(-x) \cdot \frac{1}{2} = \exp(-x),$$

a dla $x < 0$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, t)\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} 0\, dt = 0,$$

gęstość zmiennej losowej X wyraża się wzorem:

$$f_X(x) = \begin{cases} \exp(-x) & \text{dla } x \geqslant 0, \\ 0 & \text{dla } x < 0. \end{cases}$$

Z kolei dla wyznaczenia dystrybuanty liczymy, w przypadku $x \geqslant 0$, granicę:

$$\lim_{y \to \infty} F_{X,Y}(x, y) = \lim_{y \to \infty} (1 - \exp(-x))(1 - \exp(-2y)) = 1 - \exp(-x)$$

oraz, dla $x < 0$, granicę:

$$\lim_{y \to \infty} F_{X,Y}(x, y) = \lim_{y \to \infty} 0 = 0.$$

Zatem dystrybuanta zmiennej losowej X dana jest wzorem:

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - \exp(-x) & \text{dla } x \geqslant 0, \\ 0 & \text{dla } x < 0. \end{cases}$$

Analogicznie liczymy gęstość i dystrybuantę zmiennej losowej Y:

$$f_Y(y) = \begin{cases} 2\exp(-2y) & \text{dla } y \geqslant 0, \\ 0 & \text{dla } y < 0. \end{cases}$$

oraz

$$F_Y(y) = \begin{cases} 1 - \exp(-2y) & \text{dla } y \geqslant 0, \\ 0 & \text{dla } y < 0. \end{cases}$$

(c) *Czy zmienne losowe X i Y są niezależne?*

Tak, ponieważ $f_{X,Y}(x, y) = f_X(x)f_Y(y)$. Rzeczywiście, dla $x < 0$ lub $y < 0$ obie strony równania się zerują, natomiast dla $x \geqslant 0$ i $y \geqslant 0$ mamy:

$$f_{X,Y}(x, y) = 2\exp(-x - 2y) = \exp(-x) \cdot 2\exp(-2y) = f_X(x)f_Y(y).$$

(d) *Korzystając z dystrybuanty $F_{X,Y}$ znajdź $\mathbb{P}(-1 \leqslant X \leqslant 4, 2 \leqslant Y < 3)$.*

Ponieważ (X, Y) jest zmienną losową ciągłą, mamy:

$$\mathbb{P}(-1 \leqslant X \leqslant 4, 2 \leqslant Y < 3) = \mathbb{P}(-1 < X \leqslant 4, 2 < Y \leqslant 3).$$

Bezpośrednio ze wzoru obliczamy:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(-1 \leqslant X \leqslant 4, 2 \leqslant Y < 3) &= F_{X,Y}(4, 3) - F_{X,Y}(4, 2) - F_{X,Y}(-1, 3) + F_{X,Y}(-1, 2) \\ &= (1 - \exp(-4))(1 - \exp(-6)) - (1 - \exp(-4))(1 - \exp(-4)) - 0 + 0 \\ &= (1 - \exp(-4))(1 - \exp(-6) - (1 - \exp(-4))) \\ &= (1 - \exp(-4))(\exp(-4) - \exp(-6)). \end{aligned}$$

Zadanie 2. *Gęstość zmiennej losowej (X, Y) wyraża się wzorem*

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} cy & \textit{dla } (x,y) \textit{ należących do prostokąta o wierzchołkach } (0,0),(4,0),(4,1),(0,1), \\ 0 & \textit{w pozostałych przypadkach.} \end{cases}$$

(a) *Znajdź stałą c.*

Ponieważ gęstość $f_{X,Y}$ musi spełniać warunek

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)dydx = 1,$$

wystarczy policzyć całkę:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dy\,dx = \int_0^4\int_0^1 cy\,dy\,dx = \int_0^4 \left[\frac{cy^2}{2}\right]_0^1 dx = \int_0^4 \frac{c}{2}\,dx = \left[\frac{cx}{2}\right]_0^4 = 2c.$$

Tak więc $c = \frac{1}{2}$.

(b) *Wylicz gęstość f_X, dystrybuantę F_X oraz wartość oczekiwaną $\mathbb{E}X$.*

Do wyznaczenia gęstości f_X posłużymy się znów wzorem:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,t)\,dt\,.$$

Ponieważ dla $x \in [0,4]$ mamy:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,t)\,dt = \int_0^1 \frac{t}{2}\,dt = \left[\frac{t^2}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{4},$$

a dla $x \notin [0,4]$ mamy $f_{X,Y}(x,y) = 0$, gęstość zmiennej losowej X wyraża się wzorem:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} & \text{dla } x \in [0,4], \\ 0 & \text{w pozostałych przypadkach.} \end{cases}$$

Możemy teraz wyznaczyć dystrybuantę zmiennej losowej X korzystając ze wzoru:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt.$$

W przypadku gdy $x < 0$ powyższa całka jest oczywiście równa 0 (bo gęstość jest równa 0 w tym przedziale). Dla $x \in [0,4]$ mamy:

$$\int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt = \int_0^x \frac{1}{4}dt = \left[\frac{t}{4}\right]_0^x = \frac{x}{4}.$$

W szczególności $F_X(4) = 1$ i nie musimy już rozważać przedziału $x > 4$. A zatem dystrybuanta zmiennej losowej X dana jest wzorem:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{gdy } x < 0 \\ \frac{x}{4} & \text{dla } x \in [0,4] \\ 1 & \text{gdy } x > 1. \end{cases}$$

Pozostaje wyznaczyć wartość oczekiwaną zmiennej losowej X:

$$\mathbb{E}X = \int_{-\infty}^{\infty} t f_X(t)dt = \int_0^4 \frac{t}{4}dt = \left[\frac{t^2}{8}\right]_0^4 = 2.$$

(c) *Czy zmienne losowe X i Y są niezależne?*

Aby sprawdzić niezależność wyznaczymy na początek gęstość zmiennej losowej Y. Dla $y \in [0,1]$ mamy:

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(s,y)\,ds = \int_0^4 \frac{y}{2}\,ds = \left[\frac{sy}{2}\right]_0^4 = 2y,$$

a dla $y \notin [0,1]$ mamy oczywiście $f_Y(y) = 0$, bo dla takich y gęstość rozkładu łącznego $f_{X,Y}(x,y)$ się zeruje. Zatem otrzymujemy:

$$f_Y(y) = \begin{cases} 2y & \text{dla } y \in [0,1], \\ 0 & \text{w pozostałych przypadkach.} \end{cases}$$

Teraz możemy łatwo pokazać, że zmienne losowe X i Y są niezależne. Rzeczywiście, w przypadku gdy $x \in [0,4]$ i $y \in [0,1]$ mamy:

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{y}{2} = \frac{1}{4} \cdot 2y = f_X(x) \cdot f_Y(y).$$

Natomiast w pozostałych przypadkach mamy:

$$f_{X,Y}(x,y) = 0 = f_X(x) \cdot f_Y(y).$$

(d) *Korzystając z dystrybuanty F_X znajdź $\mathbb{P}\,(1/2 \leqslant X \leqslant 3/2)$.*

Ponieważ dystrybuanta zmiennej losowej X jest ciągła, mamy:

$$\mathbb{P}\,(1/2 \leqslant X \leqslant 3/2) = F_X(3/2) - \lim_{t \to 1/2^-} F_X(t) = F_X(3/2) - F_X(1/2) = \frac{3}{8} - \frac{1}{8} = \frac{1}{4}.$$

(e) *Oblicz $\mathbb{P}\,(1/2 \leqslant X \leqslant 3/2)$ korzystając z gęstości f_X.*

$$\mathbb{P}\,(1/2 \leqslant X \leqslant 3/2) = \int_{1/2}^{3/2} f_X(t)\,dt = \int_{1/2}^{3/2} \frac{1}{4}\,dt = \left[\frac{t}{4}\right]_{1/2}^{3/2} = \frac{1}{4}$$

(f) *Oblicz $\mathbb{E}XY$.*

Przypomnijmy, że

$$\mathbb{E}g(X,Y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(s,t) f_{X,Y}(s,t)\,dt\,ds.$$

Zatem

$$\mathbb{E}XY = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} st\, f_{X,,Y}(s,t)\,dt\,ds = \int_0^4\int_0^1 \frac{st^2}{2}\,dt\,ds = \int_0^4 \left[\frac{st^3}{6}\right]_0^1 ds = \int_0^1 \frac{s}{6}\,ds = \left[\frac{s^2}{12}\right]_0^1 = \frac{1}{12}.$$

Zadanie 3. *Wybieramy losowo punkt (x,y) z kwadratu $[0,1]\times[0,1]$. Niech X i Y będą odpowiednio zmiennymi losowymi oznaczającymi współrzędne tego punktu, a $Z = X+Y$. Znajdź dystrybuantę i gęstość zmiennej losowej dwuwymiarowej (X,Y). Znajdź rozkłady zmiennych losowych X, Y i Z, następnie oblicz ich wartości oczekiwane. Czy zmienne losowe X i Y są niezależne?*

Rozkład wektora losowego (X,Y) jest rozkładem jednostajnym na kwadracie o polu 1, czyli jego gęstość wynosi:

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x\in[0,1], y\in[0,1], \\ 0 & \text{w pozostałych przypadkach.} \end{cases}$$

Jak to pokazaliśmy na wykładzie, rozkłady brzegowe zmiennych losowych X i Y są też rozkładami jednostajnymi, tyle że na odcinku $[0,1]$. A zatem gęstości zmiennych losowych X i Y dane są wzorami:

$$f_X(x) = \begin{cases} 1 & x\in[0,1], \\ 0 & x\notin[0,1], \end{cases} \qquad f_Y(y) = \begin{cases} 1 & y\in[0,1], \\ 0 & y\notin[0,1], \end{cases}$$

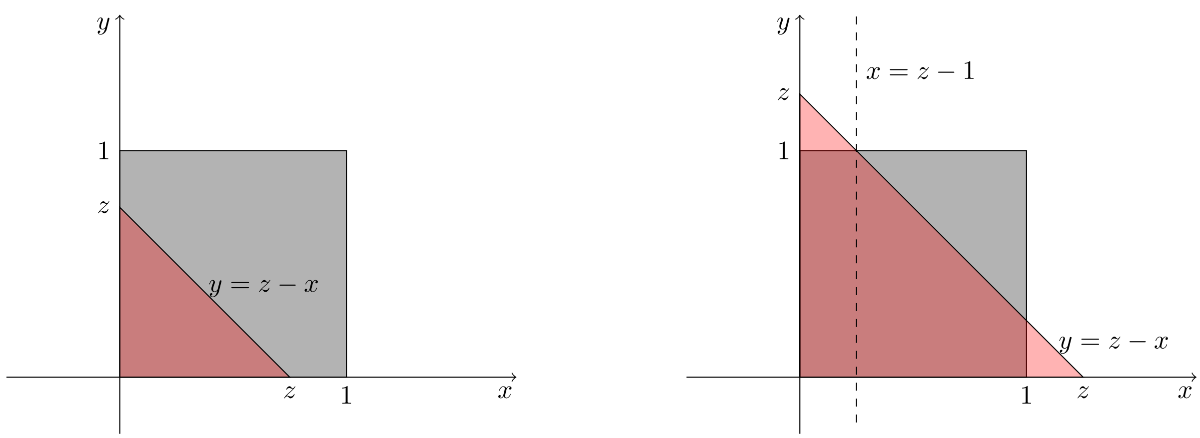
a ich wartości oczekiwane równe są $\mathbb{E}X = \mathbb{E}Y = 1/2$. Ponadto widzimy, że zmienne losowe X i Y są niezależne, bo dla dowolnego punktu $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ zachodzi:

$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)f_Y(y).$$

Spróbujmy wyznaczyć teraz dystrybuantę F_Z zmiennej losowej Z. Skoro $Z = X+Y$, zmienna losowa Z z niezerowym prawdopodobieństwem przyjmuje tylko wartości z przedziału $[0,2]$. Dla $z<0$ oczywiście $F_Z(z) = \mathbb{P}(Z\leqslant z) = 0$. Niech $z\in[0,2]$. Mamy wówczas:

$$F_Z(z) = \mathbb{P}(Z\leqslant z) = \mathbb{P}(X+Y\leqslant z) = \int\int_{\{x+y\leqslant z\}} f_{X,Y}(s,t)\,ds\,dt.$$

Aby obliczyć powyższą całkę rozpatrzymy dwa przypadki: $0\leqslant z\leqslant 1$ i $1<z\leqslant 2$.



Interesować nas będzie obszar, który jest częścią wspólną kwadratu $[0,1]\times[0,1]$, gdzie gęstość rozkładu łącznego się nie zeruje, oraz obszar wyznaczony przez warunek $x+y\leqslant z$ (na rysunku jest to część wspólna obu zacieniowanych obszarów).

Przypadek 1: $0\leqslant z\leqslant 1$

$$\int\int_{\{y\leqslant z-x\}} f_{X,Y}(x,y)\,dy\,dx = \int_0^z\int_0^{z-x} 1\,dy\,dx = \int_0^z [y]_0^{z-x}\,dx = \int_0^z (z-x)\,dx = \left[zx - \frac{x^2}{2}\right]_0^z = z^2 - \frac{z^2}{2} = \frac{z^2}{2}$$

Przypadek 2: $1<z\leqslant 2$

$$\begin{aligned}\int\int_{\{y\leqslant z-x\}} f_{X,Y}(x,y)\,dy\,dx &= \int_0^{z-1}\int_0^1 f_{X,Y}(x,y)\,dy\,dx + \int_{z-1}^1\int_0^{z-x} f_{X,Y}(x,y)\,dy\,dx \\ &= \int_0^{z-1}\int_0^1 1\,dy\,dx + \int_{z-1}^1\int_0^{z-x} 1\,dy\,dx = \int_0^{z-1} 1\,dx + \int_{z-1}^1 (z-x)\,dx \\ &= z-1+\left[zx-\frac{x^2}{2}\right]_{z-1}^1 = z-1+z-\frac{1}{2}-z(z-1)+\frac{(z-1)^2}{2} = \\ &= (z-1)(1-z)+z-\frac{1}{2}+\frac{z^2}{2}-z+\frac{1}{2} = \frac{z^2}{2}-(z-1)^2\end{aligned}$$

Podsumowując, dystrybuanta zmiennej losowej Z przedstawia się wzorem:

$$F_Z(z) = \begin{cases} 0 & \text{dla } z < 0, \\ \frac{z^2}{2} & \text{dla } 0 \leqslant z \leqslant 1, \\ \frac{z^2}{2} - (z-1)^2 & \text{dla } 1 < z \leqslant 2, \\ 1 & \text{dla } z > 2, \end{cases}$$

a jej gęstość to:

$$f_Z(z) = \begin{cases} z & \text{dla } 0 \leqslant z \leqslant 1, \\ 2 - z & \text{dla } 1 < z \leqslant 2, \\ 0 & \text{w pozostałych przypadkach.} \end{cases}$$

Wartość oczekiwana zmiennej losowej Z wynosi:

$$\mathbb{E}Z = \int_0^1 z \cdot z \, dz + \int_1^2 z(2-z) \, dz = \left[\frac{z^3}{3}\right]_0^1 + \left[z^2 - \frac{z^3}{3}\right]_1^2 = \frac{1}{3} + 4 - \frac{8}{3} - 1 + \frac{1}{3} = 1,$$

co nie powinno nas dziwić, bo $\mathbb{E}Z = \mathbb{E}(X+Y) = \mathbb{E}X + \mathbb{E}Y = 1/2 + 1/2 = 1$.