Logika i teoria mnogości

Ćwiczenia 8

Prawa dla kwantyfikatorów

Negacyjna postać normalna

Najpierw, stosując prawa rachunku zdań i prawa De Morgana dla kwantyfikatorów, będziemy sprowadzać formuły do negacyjnej postaci normalnej (NPN), czyli postaci, w której występuję tylko $\neg, \wedge, \vee, \forall, \exists$, przy czym negacja występuje tylko przy formułach atomowych.

Etap 1. Eliminacja $\Leftrightarrow$ i $\Rightarrow$ jak w rachunku zdań.

Etap 2. Wprowadzanie negacji "do środka" przy pomocy praw De Morgana w rachunku zdań i dla kwantyfikatorów:

$$\neg\forall_x \varphi(x) \Leftrightarrow \exists_x \neg\varphi(x)$$

$$\neg\exists_x \varphi(x) \Leftrightarrow \forall_x \neg\varphi(x)$$

Zadanie 1. Sprowadzić następujace formuły domknięte do NPN.

(a) $\neg\forall_x(P(x) \Rightarrow Q(x))$,

(b) $\neg\forall_x(\exists_y P(x,y) \Rightarrow \exists_y Q(x,y))$,

(c) $\neg\forall_x\forall_y(P(x,y) \Rightarrow Q(x,y))$.

Rozwiazania
(a)
$\neg\forall_x(P(x) \Rightarrow Q(x))$
$\neg\forall_x(\neg P(x) \vee Q(x))$
$\exists_x\neg(\neg P(x) \vee Q(x))$
$\exists_x(P(x) \wedge \neg Q(x))$

Uwaga: Zdania są logicznie równoważne, jeżeli ich schematy są logicznie równoważne. Zatem zdanie 'Nieprawda, że każdy student jest sportowcem' (schemat: pierwsza formuła) jest logicznie równoważne zdaniu 'Pewien student nie jest sportowcem' (schemat: ostatnia formuła). Zakres zmiennych: zbiór ludzi.

(b)
$\neg\forall_x(\exists_y P(x,y) \Rightarrow \exists_y Q(x,y))$
$\neg\forall_x(\neg\exists_y P(x,y) \vee \exists_y Q(x,y))$
$\exists_x\neg(\neg\exists_y P(x,y) \vee \exists_y Q(x,y))$

$\exists_x(\exists_y P(x,y) \wedge \neg\exists_y Q(x,y))$
$\exists_x(\exists_y P(x,y) \wedge \forall_y \neg Q(x,y))$

Na przykład, zdanie 'Nieprawda, że każda liczba naturalna, będąca sześcianem pewnej liczby naturalnej, jest kwadratem pewnej liczby naturalnej' jest logicznie równoważne zdaniu 'Istnieje liczba naturalna, która jest sześcianem pewnej liczby naturalnej, lecz nie jest kwadratem żadnej liczby naturalnej'. Tu $P(x,y)$ znaczy: $x = y^3$, $Q(x,y)$ znaczy $x = y^2$. Zakres zmiennych: zbiór liczb naturalnych.

(c)
$\neg\forall_x\forall_y(P(x,y) \Rightarrow Q(x,y))$
$\neg\forall_x\forall_y(\neg P(x,y) \vee Q(x,y))$
$\exists_x\neg\forall_y(\neg P(x,y) \vee Q(x,y))$
$\exists_x\exists_y\neg(\neg P(x,y) \vee Q(x,y))$
$\exists_x\exists_y(P(x,y) \wedge \neg Q(x,y))$

Na przykład, zdanie 'Nieprawda, że wszyscy studenci, którzy się znają, lubią się' jest logicznie równoważne zdaniu 'Niektórzy studenci, którzy się znają, nie lubią się'. Uwaga: W przykładach z wcześniejszych ćwiczeń traktowaliśmy 'niektórzy studenci' jako jeden ograniczony kwantyfikator istnienia, ale tu trzeba wprowadzić dwie zmienne, ponieważ 'zna' i 'lubi' są stosunkami dwuargumentowymi. Zakres zmiennych: zbiór studentów.

Preneksowa postać normalna

Można zrobić więcej: sprowadzić formułę do preneksowej postaci normalnej (PPN), czyli postaci, w której wszystkie kwantyfikatory stanowią prefiks kwantyfikatorowy, działający na formułę bez kwantyfikatorów w NPN:

$$K1_{x_1} \ldots Kn_{x_n}\varphi$$

gdzie $Ki \in \{\forall, \exists\}$ jest bez kwantyfikatorów (formuła otwarta) w NPN.

Etap 1. Sprowadzamy formułę do NPN jak wyżej.

Etap 2. Wyprowadzamy wszystkie kwantyfikatory na zewnątrz, stosujac prawa rozdzielności kwantyfikatorów:

$$\forall_x\varphi(x) \wedge \forall_x\psi(x) \Leftrightarrow \forall_x(\varphi(x) \wedge \psi(x))$$
$$\exists_x\varphi(x) \vee \exists_x\psi(x) \Leftrightarrow \exists_x(\varphi(x) \vee \psi(x))$$

i prawa wyłączania kwantyfikatorów przed nawias:

$$\forall_x\varphi(x) \wedge \psi \Leftrightarrow \forall_x(\varphi(x) \wedge \psi)$$
$$\forall_x\varphi(x) \vee \psi \Leftrightarrow \forall_x(\varphi(x) \vee \psi)$$
$$\exists_x\varphi(x) \wedge \psi \Leftrightarrow \exists_x(\varphi(x) \wedge \psi)$$
$$\exists_x\varphi(x) \vee \psi \Leftrightarrow \exists_x(\varphi(x) \vee \psi)$$

gdzie ψ jest formułą, w której x nie jest wolne. Ponieważ $\wedge$ i $\vee$ są przemienne, mamy też przestawione wersje tych praw, w których ψ jest lewym argumentem.

Gdy pojawi się formuła $\forall_x\varphi(x)\wedge\psi(x)$ i x jest wolne w $\psi(x)$, musimy najpierw zmienić zmienną związaną x w $\forall_x\varphi(x)$ na inną zmienną, która nie jest wolna w $\psi(x)$, podobnie dla $\vee$ oraz kombinacji $\exists$ z $\wedge, \vee$. Stosujemy prawa zamiany zmiennych związanych.

$$\forall_x\varphi(x) \Leftrightarrow \forall_y\varphi(y)$$

$$\exists_x\varphi(x) \Leftrightarrow \exists_y\varphi(y)$$

Tu są warunki ograniczające (patrz wykład, rozdział 8), ale w praktyce wybiera się nową zmienną, która nie wystepuje w rozważanej formule.

Przykład. NPN uzyskane w zadaniu 1 (a) i (c) już są w PPN. Sprowadzimy do PPN NPN z zadania 1(b).

$\exists_x(\exists_y P(x,y) \wedge \forall_y\neg Q(x,y))$

$\exists_x\exists_y(P(x,y) \wedge \forall_y\neg Q(x,y))$

Nie można "przeciagnąć" $\forall_y$ przez $P(x,y)$, bo y jest wolne w $P(x,y)$.

Zmieniamy zmienną y w $\forall_y\neg Q(x,y)$ na z.

$\exists_x\exists_y(P(x,y) \wedge \forall_z\neg Q(x,z))$

Teraz już można wyciagnąć $\forall_z$ przed nawias.

$\exists_x\exists_y\forall_z(P(x,y) \wedge \neg Q(x,z))$

Zadanie 2. Sprowadzić do PPN następujące formuły.

(a) $\exists_x P(x) \vee \exists_x Q(x)$.

Podamy rozwiązanie (nie przepisujemy formuły). Wystarczy zastosować raz prawo rozdzielności $\exists$ względem $\vee$.

$\exists_x(P(x) \vee Q(x))$.

Prawa rozdzielności można zastąpić prawami wyłączania kwantyfikatorów przed nawias, ale dostajemy dłuższe formuły.

$\exists_x P(x) \vee \exists_y Q(y)$

$\exists_x\exists_y(P(x) \vee Q(y))$

Uwaga: $\exists_y\exists_x(P(x) \vee Q(y))$ też jest dobrze. Gdy kwantyfikatory występują niezależnie, można je wyciągać w dowolnej kolejności. Gdy jednak mamy $\forall_x\exists_y$ nie można wyciagnąć $\exists_y$ przed $\forall_x$.

(b) $\forall_x P(x) \vee \forall_x Q(x)$.

Rozwiązanie: Nie można zastosować prawa rozdzielności.

$\forall_x P(x) \vee \forall_y Q(y)$

$\forall_x\forall_y(P(x) \vee Q(y))$ Ta formuła jest logicznie równoważna pierwszej, czyli $\Leftrightarrow$ jest prawem logiki.

(c) $\forall_x(P(x) \Rightarrow Q(x)) \Rightarrow (\forall_x P(x) \Rightarrow \forall_x Q(x))$.

Rozwiazanie: Sprowadzamy do NPN.

$\neg\forall_x(P(x) \Rightarrow Q(x)) \vee (\forall_x P(x) \Rightarrow \forall_x Q(x))$

$\neg\forall_x(\neg P(x) \vee Q(x)) \vee \neg\forall_x P(x) \vee \forall_x Q(x)$

$\exists_x(P(x) \wedge \neg Q(x)) \vee \exists_x\neg P(x) \vee \forall_x Q(x)$ NPN

$\exists_x((P(x) \wedge \neg Q(x)) \vee \neg P(x)) \vee \forall_x Q(x)$

$\exists_x((P(x) \wedge \neg Q(x)) \vee \neg P(x)) \vee \forall_y Q(y)$ Zamieniliśmy x na y w $\forall_x Q(x)$.

$\exists_x \forall_y ((P(x) \wedge \neg Q(x)) \vee \neg P(x) \vee Q(y))$ PPN
Dobrze jest też $\forall_y \exists_x$ (ale mniej naturalne).

Inne przekształcenia równoważnościowe

Podobnie jak w rachunku zdań możemy wyprowadzać prawa równoważnościowe metodą przekształceń równoważnościowych. Najpierw zajmiemy się prawami wyłączania kwantyfikatorów przed nawias dla implikacji. Opieramy się na analogicznych prawach dla koniunkcji i alternatywy, stosowanych już przy sprowadzaniu do PPN.

Zadanie 3. Metodą przekształceń równoważnościowych wyprowadzić następujące prawa logiki (zakładamy, że x nie jest wolne w ψ).
(a) $(\forall_x \varphi(x) \Rightarrow \psi) \Leftrightarrow \exists_x (\varphi(x) \Rightarrow \psi)$
(b) $(\psi \Rightarrow \forall_x \varphi(x)) \Leftrightarrow \forall_x (\psi \Rightarrow \varphi(x))$

Rozwiązania:
(a)
$\forall_x \varphi(x) \Rightarrow \psi$ lewa strona równoważności
$\neg \forall_x \varphi(x) \vee \psi$ Eliminujemy $\Rightarrow$.
$\exists_x \neg \varphi(x) \vee \psi$ Stosujemy prawo De Morgana.
$\exists_x (\neg \varphi(x) \vee \psi)$ Stosujemy prawo wyłączania $\exists$ przed nawias dla $\vee$.
$\exists_x (\varphi(x) \Rightarrow \psi)$ Wprowadzamy $\Rightarrow$.

(b)
$\psi \Rightarrow \forall_x \varphi(x)$
$\neg \psi \vee \forall_x \varphi(x)$
$\forall_x (\neg \psi \vee \varphi(x))$ Stosujemy prawo wyłączania $\forall$ przed nawias dla $\vee$ (przestawione).
$\forall_x (\psi \Rightarrow \varphi(x))$

Podobnie możemy wyprowadzać prawa dla kwantyfikatorów ograniczonych, opierając się na analogicznych prawach dla kwantyfikatorów $\forall_x, \exists_x$.

Zadanie 4. Tą samą metodą wyprowadzić następujące prawa dla kwantyfikatorów ograniczonych.
(a) $\neg \forall_{\varphi(x)} \psi(x) \Leftrightarrow \exists_{\varphi(x)} \neg \psi(x)$
(b) $\forall_{\varphi(x)} (\psi(x) \wedge \chi(x)) \Leftrightarrow \forall_{\varphi(x)} \psi(x) \wedge \forall_{\varphi(x)} \chi(x)$