

Zadanie 1. (Nierówność Boole’a) Pokaż, że dla dowolnego ciągu zdarzeń A_1, A_2, \dots , mamy

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i).$$

Zauważmy najpierw, że nierówność, którą chcemy udowodnić jest bardzo podobne do aksjomatu (A3):

$$\text{Dla ciągu parami rozłącznych zdarzeń } A_1, A_2, \dots, \text{ zachodzi } \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i).$$

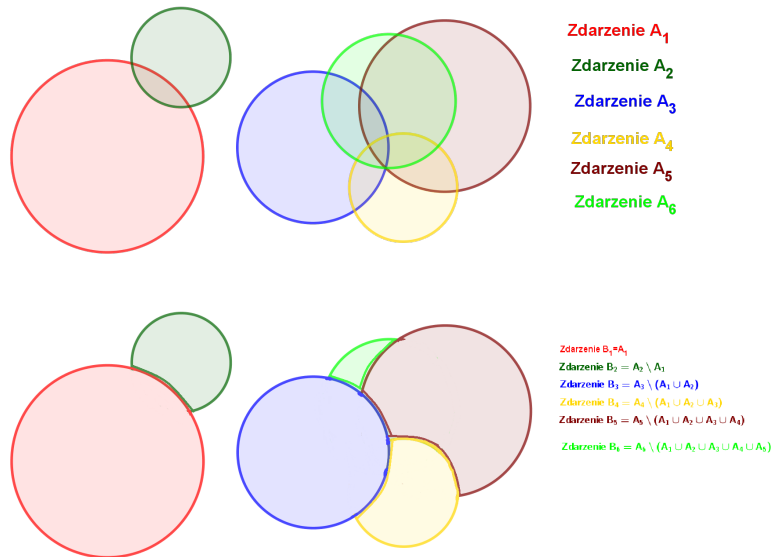
Różnica polega na tym, że brakuje nam założenia o rozłączności zdarzeń A_1, A_2, \dots , w związku z czym mamy też słabszą tezę (nierówność zamiast równości). Spróbujemy tak przerobić ciąg A_1, A_2, \dots , aby otrzymać ciąg zdarzeń parami rozłącznych, ale nie zmieniając sumy wszystkich zbiorów. W tym celu definiujemy zbiory

$$B_1 = A_1$$

oraz

$$B_i = A_i \setminus (A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_{i-1})$$

dla $i = 2, 3, \dots$ (patrz ilustracja poniżej).



Jakie własności ma ciąg zdarzeń B_1, B_2, \dots ?

- Są to zdarzenia **parami rozłączne**.

Dlaczego? Niech $1 \leq i < j$. Jeżeli $x \in B_i$, to $x \in A_i$. Ale wtedy $x \notin B_j$ (bo ze zbiorów B_j wyrzucamy z definicji wszystkie elementy zbiorów A_i o $i < j$). Zatem $B_i \cap B_j = \emptyset$.

-

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$$

Dlaczego? Pokażmy najpierw, że $\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$. Niech $x \in \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$. Wtedy z definicji sumy zbiorów $x \in B_i$ dla pewnego i . Ale zbiór B_i zawiera tylko elementy ze zbioru A_i , więc $x \in A_i$. Zatem $x \in \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$. Otrzymujemy zatem, że $\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$.

Pokażmy teraz, że $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$. Niech $x \in \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$. Wtedy z definicji sumy zbiorów $x \in A_i$ dla pewnego i . Nie oznacza to automatycznie, że $x \in B_i$, bo x może też należeć do któregoś ze zbiorów A_1, A_2, \dots, A_{i-1} . Dlatego ze wszystkich zbiorów z ciągu A_1, A_2, \dots, A_i wybieramy ten o najmniejszym indeksie, powiedzmy A_j , który zawiera element x . Wtedy możemy już powiedzieć, że $x \in B_j$. Zatem $x \in \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$. Otrzymujemy zatem, że $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$.

Uwaga! Mam nadzieję, że podobne przekształcenia pojawiły się na przedmiocie Logika i teoria mnogości, a przy najmniej, że jest to intuicyjnie jasne (patrzając na rysunek i definicję zbiorów B_i), że te sumy zbiorów faktycznie

są takie same (bo do ciągu zbiorów B_i bierzemy wszystkie elementy ze zbiorów A_i , dbając tylko o to, aby żaden z nich się nie powtarzał w różnych zbiorach.)

- Dla każdego $i = 1, 2, \dots$ zachodzi

$$\mathbb{P}(B_i) \leq \mathbb{P}(A_i).$$

Wynika to z własności (W5), bo dla każdego $i = 1, 2, \dots$ mamy $B_i \subseteq A_i$.

Możemy teraz przystąpić do oszacowania prawdopodobieństwa sumy $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$:

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(B_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i)$$

(wykorzystujemy tu udowodnione wyżej własności ciągu zdarzeń B_1, B_2, \dots oraz aksjomat (A3)).

Zadanie 2. Pokaż, że dla ciągu zdarzeń A_1, A_2, \dots , gdzie dla każdego $i = 1, 2, \dots$, mamy $\mathbb{P}(A'_i) \leq 3^{-i}$, zachodzi

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right) \geq 1/2.$$

Chcemy oszacować $\mathbb{P}(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i)$, a jedyne informacje, jakie mamy do dyspozycji to oszacowania prawdopodobieństw zdarzeń przeciwnych do A_i . To sugeruje nam, że powinniśmy w naszym oszacowaniu wykorzystać zdarzenie przeciwne:

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right) = 1 - \mathbb{P}\left(\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right)'\right).$$

Jak możemy inaczej zapisać zdarzenie $(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i)'$? Skorzystamy z **prawa De Morgana**:

$$\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right)' = \bigcup_{i=1}^{\infty} A'_i.$$

Korzystając z **nierówności Boole'a** (poprzednie zadanie) i oszacowań wartości $\mathbb{P}(A'_i)$, otrzymujemy:

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A'_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A'_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} 3^{-i} = \frac{1}{3} \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{2}$$

(wartość sumy szeregu obliczamy korzystając ze wzoru na sumę szeregu geometrycznego). Zatem:

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right) = 1 - \mathbb{P}\left(\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right)'\right) \geq 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Czy jeśli dla każdego $i = 1, 2, \dots$, mamy $\mathbb{P}(A'_i) = 3^{-i}$, to wtedy

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right) = 1/2?$$

Nie. Dlaczego? W tej sytuacji możemy zastosować następujące oszacowania:

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A'_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A'_i) = \sum_{i=1}^{\infty} 3^{-i} = \frac{1}{2}.$$

Może się jednak zdarzyć, że $\mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^{\infty} A'_i) < \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A'_i)$. W jakiej sytuacji? Gdy zbiory A'_1, A'_2, \dots nie są parami rozłączne.

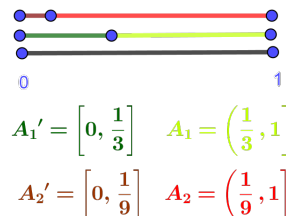
Przykład: Rozważmy przestrzeń $\Omega = [0, 1]$ z prawdopodobieństwem geometrycznym. Zdefiniujmy zdarzenia $A_i = (3^{-i}, 1]$ dla $i = 1, 2, \dots$. Wtedy dla $i = 1, 2, \dots$ mamy $A'_i = [0, 3^{-i}]$ oraz

$$\mathbb{P}(A'_i) = \frac{\lambda(A'_i)}{\lambda(\Omega)} = \frac{3^{-i}}{1} = 3^{-i}.$$

Ale $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 = (\frac{1}{3}, 1]$, więc

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \frac{\lambda((\frac{1}{3}, 1])}{\lambda([0, 1])} = \frac{2}{3} > \frac{1}{2}.$$

Ilustracja:



Zadanie 3. O zdarzeniach A i B wiadomo, że $\mathbb{P}(A) = 3/4$ i $\mathbb{P}(B) = 1/3$. Uzasadnij, że $1/12 \leq \mathbb{P}(A \cap B) \leq 1/3$ i podaj przykłady świadczące o tym, że te oszacowania są optymalne.

• **Oszacowanie górne:**

Zauważmy, że oszacowanie górne, które chcemy uzyskać jest równe prawdopodobieństwu zdarzenia B . To nie jest przypadek. Mamy bowiem własność (W5):

$$\text{Jeśli } A \subset B, \text{ to } \mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B).$$

Zauważmy, że $A \cap B \subseteq B$, więc $\mathbb{P}(A \cap B) \leq \mathbb{P}(B) = 1/3$. Pokażemy teraz, że to oszacowanie jest optymalne, tzn. znajdziemy przykład takich zdarzeń, dla których $\mathbb{P}(A) = 3/4$, $\mathbb{P}(B) = 1/3$, a $\mathbb{P}(A \cap B) = 1/3$. Innymi słowy, szukamy zdarzeń, dla których $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B)$. Możemy to osiągnąć, jeśli $B \subseteq A$.

Przykład:

$\Omega = \{1, 2, \dots, 12\}$ (losujemy jedną liczbę z dwunastu, każda opcja jest równoprawdopodobna)

$A = \{1, 2, \dots, 9\}$, $\mathbb{P}(A) = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$

$B = \{1, 2, 3, 4\}$, $\mathbb{P}(B) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$

$A \cap B = \{1, 2, 3, 4\}$, $\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{1}{3}$

• **Oszacowanie dolne:**

Przy tym oszacowaniu skorzystamy z własności (W7):

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B),$$

którą możemy też zapisać w następującej postaci:

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cup B).$$

Zauważmy, że na podstawie aksjomatu (A1) $\mathbb{P}(A \cup B) \leq 1$. Zatem:

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cup B) \geq \frac{3}{4} + \frac{1}{3} - 1 = \frac{1}{12}.$$

Pokażemy teraz, że to oszacowanie jest optymalne, tzn. znajdziemy przykład takich zdarzeń, dla których $\mathbb{P}(A) = 3/4$, $\mathbb{P}(B) = 1/3$, a $\mathbb{P}(A \cap B) = 1/12$. Innymi słowy, szukamy zdarzeń, dla których $\mathbb{P}(A \cup B) = 1 = \mathbb{P}(\Omega)$. Możemy to osiągnąć, jeśli zdarzenia A i B dają w sumie całą przestrzeń zdarzeń elementarnych Ω .

Przykład:

$\Omega = \{1, 2, \dots, 12\}$ (losujemy jedną liczbę z dwunastu, każda opcja jest równoprawdopodobna)

$A = \{1, 2, \dots, 9\}$, $\mathbb{P}(A) = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$

$B = \{9, 10, 11, 12\}$, $\mathbb{P}(B) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$

$A \cap B = \{9\}$, $\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{1}{12}$

Zadanie 4. Rzucamy symetryczną monetą do momentu kiedy wyrzucimy orła po raz pierwszy. Niech E oznacza zdarzenie, że wykonamy parzystą liczbę rzutów, a $A_{\geq k}$ zdarzenie, że wykonamy co najmniej k rzutów.

(a) Wypisz elementy przestrzeni zdarzeń elementarnych Ω . Czy jest to przestrzeń skończona?

Zdarzenia elementarne: $\omega_1 = O, \omega_2 = RO, \omega_3 = RRO, \omega_4 = RRRO, \dots$ (Legenda: R – reszka, O – orzeł)

Ogólniej elementami przestrzeni Ω są wszystkie ciągi skończone, w których początkowe elementy to same reszki, a ostatni element to orzeł. Takich ciągów jest nieskończenie wiele, więc przestrzeń Ω nie jest przestrzenią skończoną.

(b) Znajdź $\mathbb{P}(E)$, $\mathbb{P}(E|A_{\geq 3})$ i $\mathbb{P}(E|A_{\geq 4})$.

Na początek zauważmy, że w przestrzeni probabilistycznej opisującej nasz eksperyment poszczególne zdarzenia elementarne przyjmują prawdopodobieństwa:

$$\mathbb{P}(\omega_1) = \frac{1}{2}, \quad \mathbb{P}(\omega_2) = \left(\frac{1}{2}\right)^2, \quad \mathbb{P}(\omega_3) = \left(\frac{1}{2}\right)^3, \dots$$

i ogólnie:

$$\mathbb{P}(\omega_k) = \left(\frac{1}{2}\right)^k.$$

Następnie zauważmy, że

$$E = \{\omega_2, \omega_4, \omega_6, \dots\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \{\omega_{2k}\}$$

(bo zdarzenie E oznacza, że wykonamy dokładnie 2 rzuty albo dokładnie 4 rzuty albo dokładnie 6 rzutów itd.),

$$A_{\geq 3} = \{\omega_3, \omega_4, \omega_5, \dots\} = \bigcup_{k=3}^{\infty} \{\omega_k\}$$

oraz

$$A_{\geq 4} = \{\omega_4, \omega_5, \omega_6, \dots\} = \bigcup_{k=4}^{\infty} \{\omega_k\}.$$

Zatem:

$$\mathbb{P}(E) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} \{\omega_{2k}\}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(\omega_{2k}) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{2k} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^k = \frac{1}{4} \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{3}.$$

Skorzystaliśmy tu z aksjomatu (A3) (dotyczącego prawdopodobieństwa sumy parami rozłącznych zdarzeń) oraz ze wzoru na **sumę szeregu geometrycznego**. Zgodnie z definicją prawdopodobieństwa warunkowego mamy:

$$\mathbb{P}(E|A_{\geq 3}) = \frac{\mathbb{P}(E \cap A_{\geq 3})}{\mathbb{P}(A_{\geq 3})} \quad \text{oraz} \quad \mathbb{P}(E|A_{\geq 4}) = \frac{\mathbb{P}(E \cap A_{\geq 4})}{\mathbb{P}(A_{\geq 4})}.$$

Zacznijmy od policzenia prawdopodobieństwa zdarzeń $A_{\geq 3}$ oraz $A_{\geq 4}$. Mamy:

$$\mathbb{P}(A_{\geq 3}) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=3}^{\infty} \{\omega_k\}\right) = \sum_{k=3}^{\infty} \mathbb{P}(\omega_k) = \sum_{k=3}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{8} \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{4}$$

oraz

$$\mathbb{P}(A_{\geq 4}) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=4}^{\infty} \{\omega_k\}\right) = \sum_{k=4}^{\infty} \mathbb{P}(\omega_k) = \sum_{k=4}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{16} \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{8}.$$

Alternatywnie, powyższe prawdopodobieństwa można policzyć korzystając ze zdarzeń przeciwnych:

$$\mathbb{P}(A_{\geq 3}) = 1 - \mathbb{P}(A'_{\geq 3}) = 1 - \mathbb{P}(\omega_1) - \mathbb{P}(\omega_2) = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

(w przypadku zdarzenia $A_{\geq 4}$ postępujemy analogicznie). Rozpiszmy teraz przekroje za pomocą zdarzeń elementarnych:

$$E \cap A_{\geq 3} = E \cap A_{\geq 4} = \{\omega_4, \omega_6, \omega_8, \dots\} = \bigcup_{k=2}^{\infty} \{\omega_{2k}\}.$$

Zatem

$$\mathbb{P}(E \cap A_{\geq 3}) = \mathbb{P}(E \cap A_{\geq 4}) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=2}^{\infty} \{\omega_{2k}\}\right) = \sum_{k=2}^{\infty} \mathbb{P}(\omega_{2k}) = \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{2k} = \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^k = \frac{1}{16} \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{12}.$$

Ostatecznie otrzymujemy:

$$\mathbb{P}(E|A_{\geq 3}) = \frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{4}} = \frac{1}{3} \quad \text{oraz} \quad \mathbb{P}(E|A_{\geq 4}) = \frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{8}} = \frac{2}{3}.$$

(c) Czy zdarzenia E i $A_{\geq 4}$ są niezależne?

$$\mathbb{P}(E \cap A_{\geq 4}) = \frac{1}{12} \neq \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{8} = \mathbb{P}(E) \cdot \mathbb{P}(A_{\geq 4})$$

Zatem te zdarzenia nie są niezależne. Alternatywnie, można zauważyć, że $\mathbb{P}(E|A_{\geq 4}) \neq \mathbb{P}(E)$, więc zdarzenia E i $A_{\geq 4}$ nie są niezależne.

(d) Czy zdarzenia E i $A_{\geq 3}$ są niezależne?

$$\mathbb{P}(E \cap A_{\geq 3}) = \frac{1}{12} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = \mathbb{P}(E) \cdot \mathbb{P}(A_{\geq 3})$$

Zatem te zdarzenia są niezależne.

Zadanie 5. Rzucamy cztery razy kostką. Niech A będzie zdarzeniem, że dokładnie dwa razy otrzymaliśmy wynik parzysty, a B zdarzeniem, że dokładnie raz wyrzuciliśmy szóstkę. Oblicz $\mathbb{P}(A|B)$ i $\mathbb{P}(B|A)$. Czy zdarzenia A i B są niezależne?

Chcemy obliczyć $\mathbb{P}(A|B)$ oraz $\mathbb{P}(B|A)$. Zgodnie z wzorami na prawdopodobieństwo warunkowe mamy:

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} \quad \text{oraz} \quad \mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)}.$$

Zauważmy najpierw, że gdy liczymy prawdopodobieństwa występujące z prawej strony tych wzorów możemy przyjąć, że przestrzeń zdarzeń elementarnych Ω to zbiór możliwych wyników czterech rzutów kostką, $|\Omega| = 6^4$ i skorzystać z modelu klasycznego. Wtedy:

- $|A| = \binom{4}{2} \cdot 3^2 \cdot 3^2$ (gdzie kolejne elementy wzoru odpowiadają za wybór miejsc na liczby parzyste, wybór liczb parzystych i wybór liczb nieparzystych), więc

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\binom{4}{2} \cdot 3^2 \cdot 3^2}{6^4} = \frac{3}{8},$$

- $|B| = \binom{4}{1} \cdot 5^3$ (gdzie kolejne elementy wzoru odpowiadają za wybór miejsca na szóstkę, wybór pozostałych liczb), więc

$$\mathbb{P}(B) = \frac{\binom{4}{1} \cdot 5^3}{6^4} = \frac{5^3}{4 \cdot 3^4},$$

- $|A \cap B| = \binom{4}{1} \cdot \binom{3}{1} \cdot 2 \cdot 3^2$ (gdzie kolejne elementy wzoru odpowiadają za wybór miejsca na szóstkę, wybór miejsca na drugą liczbę parzystą, wybór drugiej liczby parzystej, wybór liczb nieparzystych), więc

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{\binom{4}{1} \cdot \binom{3}{1} \cdot 2 \cdot 3^2}{6^4} = \frac{1}{6}.$$

Po wstawieniu powyższych wartości do wzorów na prawdopodobieństwo warunkowe i wykonaniu odpowiednich przekształceń otrzymujemy:

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{2 \cdot 3^3}{5^3} \quad \text{oraz} \quad \mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{4}{9}.$$

Zauważmy, że możemy teraz z łatwością pokazać, że zdarzenia A i B nie są niezależne, korzystając albo z definicji, albo z faktu, że $\mathbb{P}(A|B) \neq \mathbb{P}(A)$.

Pokażemy teraz alternatywne rozwiązanie tego zadania. Zauważmy, że prawdopodobieństwo zdarzenia A i zdarzenia B mogliśmy obliczyć inaczej, korzystając ze **schematu Bernoulliego**.

- W przypadku zdarzenia A mamy do czynienia z czterokrotnym ($n = 4$) powtórzeniem eksperymentu losowego (rzutu kostką), w którym sukcesem jest wyrzucenie parzystej liczby oczek, a porażką wyrzucenie nieparzystej liczby oczek. Interesuje nas sytuacja, w której otrzymamy dokładnie 2 sukcesy. Zatem możemy skorzystać ze wzoru na prawdopodobieństwo otrzymania dokładnie dwóch sukcesów w schemacie Bernoulliego z parametrami $n = 4$ i $p = \frac{1}{2}$.

$$\mathbb{P}(A) = \tau_2 = \binom{4}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{4-2} = \binom{4}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{3}{8}.$$

- W przypadku zdarzenia B mamy do czynienia z czterokrotnym ($n = 4$) powtórzeniem eksperymentu losowego (rzutu kostką), w którym sukcesem jest wyrzucenie szóstki, a porażką wyrzucenie czegokolwiek innego. Interesuje nas sytuacja, w której otrzymamy dokładnie 1 sukces. Zatem możemy skorzystać ze wzoru na prawdopodobieństwo otrzymania dokładnie jednego sukcesu w schemacie Bernoulliego z parametrami $n = 4$ i $p = \frac{1}{6}$.

$$\mathbb{P}(B) = \tau_1 = \binom{4}{1} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^1 \cdot \left(1 - \frac{1}{6}\right)^{4-1} = \binom{4}{1} \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{5^3}{4 \cdot 3^4}.$$

Umiejętność dostrzegania, że w danym zadaniu możemy skorzystać z gotowych wzorów (występujących w schemacie Bernoulliego, czy tak jak w poprzednim zadaniu w rozkładzie geometrycznym) może w istotny sposób ułatwić rozwiązanie zadania. Dlatego przy rozwiązywaniu zadań domowych proszę zwrócić uwagę, w których z nich pojawiają się te wzory. Jednocześnie to zadanie miało zwrócić uwagę na fakt, że te wzory nie biorą się znikąd i przynajmniej gdy dotyczą one doświadczeń powiązanych z modelem klasycznym powinniśmy być w stanie wyprowadzić je samodzielnie.

Zadanie 6. W urnie są 3 czerwone, 2 niebieskie i 1 zielona kula. Wybieramy z niej losowe dwie kule, wrzucamy z powrotem do urny i powtarzamy proces od nowa.

- (a) Znajdź prawdopodobieństwo warunkowe, że w pierwszej rundzie wyciągniemy kule o różnych kolorach pod warunkiem, że nie wyciągnęliśmy kuli zielonej.

Niech A_1 oznacza zdarzenie, że w pierwszej rundzie wyciągniemy kule o różnych kolorach, a A_2 zdarzenie, że w pierwszej rundzie nie wyciągnęliśmy kuli zielonej. Interesuje nas

$$\mathbb{P}(A_1|A_2) = \frac{\mathbb{P}(A_1 \cap A_2)}{\mathbb{P}(A_2)},$$

czyli musimy obliczyć $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2)$ i $\mathbb{P}(A_2)$. Ponieważ w tym przypadku interesuje nas tylko to, co dzieje się w pierwszej rundzie możemy przyjąć, że przestrzeń zdarzeń elementarnych Ω składa się z możliwych do wylosowania w pierwszej rundzie dwuelementowych podzbiorów kul i możemy zastosować model klasyczny. Wtedy

$$|\Omega| = \binom{6}{2} = 15, \quad |A_2| = \binom{5}{2} = \binom{6}{2} - \binom{5}{1}\binom{1}{1}$$

(ze wszystkich kul niezielonych wybieramy dwie albo od wszystkich możliwości odejmujemy te, które zawierają kulę zieloną) i

$$|A_1 \cap A_2| = \binom{3}{1}\binom{2}{1}$$

(wybieramy dwie różnokolorowe, niezielone kule, czyli jedną czerwoną i jedną niebieską). Zatem

$$\mathbb{P}(A_2) = \frac{10}{15}, \quad \mathbb{P}(A_1 \cap A_2) = \frac{6}{15}, \quad \mathbb{P}(A_1|A_2) = \frac{6}{10}.$$

Uwaga! W tym zadaniu można również przyjąć, że kolejność losowanych kul ma znaczenie, ale wówczas należy cały czas trzymać się tego założenia.

- (b) Znajdź prawdopodobieństwo, że w pierwszych n rundach dokładnie k razy wyciągniemy kule o różnych kolorach.

W tym przypadku powtarzamy ustaloną liczbę razy (n) eksperyment losowy (losowanie dwóch z sześciu kul), w którym możemy otrzymać sukces (czyli wyciągnięcie kul w różnych kolorach) lub porażkę. Oznacza to, że mamy do czynienia ze **schematem Bernoulliego** z parametrami n oraz

$$p = \frac{\binom{3}{1}\binom{2}{1} + \binom{3}{1}\binom{1}{1} + \binom{2}{1}\binom{1}{1}}{\binom{6}{2}} = \frac{11}{15}$$

(w celu policzenia tego prawdopodobieństwa rozbijamy sukces na trzy rozłączne przypadki: wyciągniemy kulę czerwoną i niebieską albo czerwoną i zieloną, albo niebieską i zieloną). Niech B oznacza zdarzenie, że dokładnie k razy wyciągniemy kule w różnych kolorach. Wtedy:

$$\mathbb{P}(B) = \tau_k = \binom{n}{k} \left(\frac{11}{15}\right)^k \left(1 - \frac{11}{15}\right)^{n-k} = \binom{n}{k} \left(\frac{11}{15}\right)^k \left(\frac{4}{15}\right)^{n-k}.$$

Uwaga! To zadanie można też rozwiązać korzystając wprost z modelu klasycznego. Wtedy jednak przy definiowaniu przestrzeni Ω należy skorzystać z definicji przestrzeni produktowej, czyli Ω będzie się składała z ciągów n -elementowych, których elementami będą dwuelementowe podzbiory zbioru sześciu kul.

- (c) Znajdź prawdopodobieństwo, że pierwszy raz wyciągniemy kule o różnych kolorach w n -tej rundzie.

W tym przypadku powtarzamy eksperyment losowy (losowanie dwóch z sześciu kul), w którym możemy otrzymać sukces (czyli wyciągnięcie kul w różnych kolorach) lub porażkę, do pierwszego sukcesu. Oznacza to, że mamy do czynienia z **rozkładem geometrycznym** z parametrem

$$p = \frac{\binom{3}{1}\binom{2}{1} + \binom{3}{1}\binom{1}{1} + \binom{2}{1}\binom{1}{1}}{\binom{6}{2}} = \frac{11}{15}.$$

Niech C oznacza zdarzenie, że pierwszy raz wyciągniemy kule w różnych kolorach za n -tym razem. Wtedy:

$$\mathbb{P}(C) = \sigma_n = \left(\frac{11}{15}\right)^{n-1} \left(1 - \frac{11}{15}\right) = \left(\frac{11}{15}\right)^{n-1} \left(\frac{4}{15}\right).$$

- (d) *Kontynuujemy proces, dopóki nie wyciągniemy kul o różnych kolorach w dwóch niekoniecznie po sobie następujących rundach. Znajdź prawdopodobieństwo, że proces będzie trwał n rund.*

W tym przypadku powtarzamy eksperyment losowy (losowanie dwóch z sześciu kul), w którym możemy otrzymać sukces (czyli wyciągnięcie kul w różnych kolorach) lub porażkę, do drugiego sukcesu. Niech D oznacza zdarzenie, że drugi raz wyciągniemy kule w różnych kolorach za n -tym razem. Wtedy:

$$\mathbb{P}(D) = \binom{n-1}{1} \left(\frac{11}{15}\right)^2 \left(1 - \frac{11}{15}\right)^{n-2} = (n-1) \left(\frac{11}{15}\right)^2 \left(\frac{4}{15}\right)^{n-2}.$$

Skąd się wziął ten wzór? Musimy zastanowić się, w których losowaniach będą kule w różnych kolorach: na pewno musi tak się stać w n -tym losowaniu (bo po drugim sukcesie przerywamy proces) i w jednym z pierwszych $n-1$ losowań. Zatem mamy $\binom{n-1}{1} = n-1$ możliwości wyboru tych losowań. Jeśli ustalimy numery losowań, w których będziemy mieli kule w różnych kolorach, to szanse na to, że właśnie w tych dwóch losowaniach będziemy mieli kule różnokolorowe, a w pozostałych przypadkach nie, możemy obliczyć korzystając ze wzoru, który pojawia się w definicji prawdopodobieństwa w przestrzeniach produktowych, czyli mnożąc dwukrotnie prawdopodobieństwo sukcesu i $n-2$ razy prawdopodobieństwo porażki.

- (e) *Kontynuujemy proces, dopóki nie wyciągniemy kul o różnych kolorach w dwóch kolejnych rundach. Znajdź prawdopodobieństwo, że proces będzie trwał n rund.*

Nazwijmy sukcesem wyciągnięcie w danej rundzie kul różnokolorowych, a porażką wyciągnięcie kul w tym samym kolorze. Niech E oznacza zdarzenie, że opisany proces będzie trwał n rund. Co to oznacza? W rundach numer $n-1$ i n był sukces, w rundzie numer $n-2$ była porażka, a w rundach o numerach od 1 do $n-3$ mogły być zarówno porażki, jak i sukcesy, ale nigdy dwa sukcesy pod rząd.

Niech E_k oznacza zdarzenie, że proces trwał n rund, a w rundach o numerach od 1 do $n-3$ było dokładnie k sukcesów. Wtedy

$$E = \bigcup_{k=0}^{\lceil \frac{n-3}{2} \rceil} E_k$$

(ograniczenie górne w tej sumie bierze się z faktu, że dowolne dwa sukcesy muszą być rozdzielone co najmniej jedną porażką). Zdarzenia $E_1, E_2, \dots, E_{\lceil \frac{n-3}{2} \rceil}$ są parami rozłączne, więc:

$$\mathbb{P}(E) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{\lceil \frac{n-3}{2} \rceil} E_k\right) = \sum_{k=0}^{\lceil \frac{n-3}{2} \rceil} \mathbb{P}(E_k) = \sum_{k=0}^{\lceil \frac{n-3}{2} \rceil} \binom{n-3-k+1}{k} \left(\frac{11}{15}\right)^k \left(\frac{4}{15}\right)^{n-3-k} \frac{4}{15} \left(\frac{11}{15}\right)^2$$

(gdzie kolejne elementy wzoru na $\mathbb{P}(E_k)$ odpowiadają za wybór miejsca na sukcesy w rundach o numerach od 1 do $n-3$, szanse na k sukcesów w rundach początkowych (o wybranych numerach), szanse na $n-3-k$ porażek w pozostałych początkowych rundach, szanse na porażkę w rundzie numer $n-2$, szanse na dwa sukcesy w rundach numer $n-1$ i n).