Logika i teoria mnogości

Ćwiczenia 12

Relacje binarne

Iloczyn kartezjański

$$A \times B = \{\langle x, y\rangle : x \in A \wedge y \in B\}$$

$$(D\times)\ \langle x, y\rangle \in A \times B \Leftrightarrow x \in A \wedge y \in B$$

Zadanie 1. Za pomocą (Ext) wyprowadzić prawa iloczynu kartezjańskiego:
(a) $(A_1 \cup A_2) \times B = (A_1 \times B) \cup (A_2 \times B)$
(b) $(A_1 \backslash A_2) \times B = (A_1 \times B) \backslash (A_2 \times B)$
(c) $A \times (\bigcup_{i\in I} B_i) = \bigcup_{i\in I}(A \times B_i)$

Relacja odwrotna i złożenie relacji

$R^{-1} = \{\langle x, y\rangle : \langle y, x\rangle \in R\}$ (relacja odwrotna do R)
$S \circ R = \{\langle x, y\rangle : \exists_z(\langle x, z\rangle \in R \wedge \langle z, y\rangle \in S)\}$ (złożenie relacji R i S)

Zadanie 2. Wyznaczyć relacje: $R^{-1}, S^{-1}, S \circ R, R \circ S$ dla
$R = \{\langle 1, 2\rangle, \langle 1, 3\rangle, \langle 2, 1\rangle\}, S = \{\langle 2, 1\rangle, \langle 3, 2\rangle, \langle 3, 1\rangle\}$.

Zadanie 3. Niech R i S będą relacjami określonymi na zbiorze $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ następująco:

$$xRy \Leftrightarrow x|y$$

$$xSy \Leftrightarrow y = x^2$$

dla $x, y \in X$.
Wyznaczyć $R \cup S, R \cap S, R\backslash S, S\backslash R, R^{-1}, S^{-1}, R \circ S, S \circ R$.

Zadanie 4. Za pomocą (Ext) wyprowadzić prawa algebry relacji:
(a) $(S_1 \cup S_2) \circ R = (S_1 \circ R) \cup (S_2 \circ R)$
(b) $(R \cup S)^{-1} = R^{-1} \cup S^{-1}$
(c) $(T \circ S) \circ R = T \circ (S \circ R)$

Relację $R \subset A^2$ nazywamy

- *zwrotną na zbiorze* A, jeżeli $\forall_{x\in A}(\langle x,x\rangle \in R)$
- *przeciwzwrotną na zbiorze* A, jeżeli $\forall_{x\in A}(\langle x,x\rangle \notin R)$
- *symetryczną*, jeżeli $\forall_{x,y}(\langle x,y\rangle \in R \Rightarrow \langle y,x\rangle \in R)$
- *przeciwsymetryczną*, jeżeli $\forall_{x,y}(\langle x,y\rangle \in R \Rightarrow \langle y,x\rangle \notin R)$
- *antysymetryczną*, jeżeli $\forall_{x,y}(\langle x,y\rangle \in R \wedge \langle y,x\rangle \in R \Rightarrow x=y)$
- *przechodnią*, jeżeli $\forall_{x,y,z}(\langle x,y\rangle \in R \wedge \langle y,z\rangle \in R \Rightarrow \langle x,y\rangle \in R)$
- *spójną na zbiorze* A, jeżeli $\forall_{x,y,\in A}(\langle x,y\rangle \in R \vee \langle y,x\rangle \in R)$
- *słabospójną na zbiorze* A, jeżeli $\forall_{x,y,\in A}(\langle x,y\rangle \in R \vee x=y \vee \langle y,x\rangle \in R)$

Dla relacji binarnych często piszemy xRx zamiast: $\langle x,y\rangle \in R$.

Zadanie 4. Określić rodzaje podanych relacji:

(a) Relacja $\perp$ prostopadłości prostych w zbiorze P wszystkich prostych na płaszczyźnie.

(b) Relacja R określona na zbiorze wszystkich figur geometrycznych na płaszczyźnie następująco: $R = \{\langle x,y\rangle$: pole figury x jest równe polu figury $y\}$.

(c) $R = \{\langle x,y\rangle \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} : x \le |y|\}$.

(d) $R = \{\langle x,y\rangle \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} : |x| \le |y|\}$.