Matematyka dyskretna
3. Podstawowe zasady przeliczania

05.11.2020

Zadanie

Niech $k \geqslant n \geqslant 1$. *Wskazać bijekcję między* A *i* B, B *i* C *oraz* A *i* C:

A – *zbiór całkowitoliczbowych rozwiązań równania* $x_1 + \ldots + x_n = k$ *takich, że* $x_i \geqslant 1$ *dla każdego* $1 \leqslant i \leqslant n$;

B – *zbiór ciągów binarnych złożonych z* $n-1$ *jedynek i* $k-n$ *zer;*

C – *zbiór ciągów binarnych złożonych z* $n-1$ *zer i* $k-n$ *jedynek.*

Przykład: $n = 3, k = 7$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 7,\ \ x_i \geqslant 1$$

Przykład: $n = 3, k = 7$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 7, \;\; x_i \geqslant 1$$

$$1 + 3 + 3 = 7$$

$$1\ 00\ 1\ 00$$

Przykład: $n = 3, k = 7$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 7,\ \ x_i \geqslant 1$$

$$1 + 3 + 3 = 7$$

1 00 1 00

$$3 + 2 + 2 = 7$$

00 1 0 1 0

Przykład: $n = 3, k = 7$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 7,\ \ x_i \geqslant 1 \quad \Rightarrow \quad y_1 + y_2 + y_3 = 7 - 3 = 4,\ \ y_i \geqslant 0$$

$$1 + 3 + 3 = 7$$

1 00 1 00

$$3 + 2 + 2 = 7$$

00 1 0 1 0

Przykład: $n = 3, k = 7$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 7,\ \ x_i \geqslant 1 \quad \Rightarrow \quad y_1 + y_2 + y_3 = 7 - 3 = 4,\ \ y_i \geqslant 0$$

$$1 + 3 + 3 = 7 \quad \Rightarrow \quad 0 + 2 + 2 = 4$$

1 00 1 00

$$3 + 2 + 2 = 7$$

00 1 0 1 0

Przykład: $n = 3, k = 7$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 7,\ x_i \geqslant 1 \quad \Rightarrow \quad y_1 + y_2 + y_3 = 7 - 3 = 4,\ y_i \geqslant 0$$

$$1 + 3 + 3 = 7 \quad \Rightarrow \quad 0 + 2 + 2 = 4$$

1 00 1 00

$$3 + 2 + 2 = 7 \quad \Rightarrow \quad 2 + 1 + 1 = 4$$

00 1 0 1 0

$$x_1 + \ldots + x_n = k, \quad x_i \geqslant 1$$

$$x_1 + \ldots + x_n = k, \quad x_i \geqslant 1$$

$$\Downarrow \quad y_i := x_i - 1$$

$$y_1 + \ldots + y_n = k - n, \quad y_i \geqslant 0$$

$$x_1 + \ldots + x_n = k, \quad x_i \geqslant 1$$

$$\Downarrow \quad y_i := x_i - 1$$

$$y_1 + \ldots + y_n = k - n, \quad y_i \geqslant 0$$

$$\Downarrow \quad + := 1,\ y_i := \underbrace{0 \ldots 0}_{y_i}$$

$$\underbrace{0 \ldots 0}_{y_1}\ 1\ \ldots\ 1\ \underbrace{0 \ldots 0}_{y_n}$$

$$x_1 + \ldots + x_n = k, \quad x_i \geqslant 1$$

$$\Downarrow \quad y_i := x_i - 1$$

$$y_1 + \ldots + y_n = k - n, \quad y_i \geqslant 0$$

$$\Downarrow \quad + := 1, \; y_i := \underbrace{0 \ldots 0}_{y_i}$$

$$\underbrace{0 \ldots 0}_{x_1 - 1} \; 1 \; \ldots \; 1 \; \underbrace{0 \ldots 0}_{x_n - 1}$$

$$x_1 + \ldots + x_n = k, \quad x_i \geqslant 1$$

$$\Downarrow$$

$$\underbrace{0 \ldots 0}_{x_1 - 1} \; 1 \; \ldots \; 1 \; \underbrace{0 \ldots 0}_{x_n - 1}$$

Bijekcja $f : A \rightarrow B$

Bijekcja $f : A \to B$

$\bar{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ – całkowitoliczbowe rozwiązanie równania $x_1 + \ldots + x_n = k, \;\; x_i \geqslant 1$

Bijekcja $f : A \to B$

$\bar{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ – całkowitoliczbowe rozwiązanie równania $x_1 + \ldots + x_n = k, \;\; x_i \geqslant 1$

$f(x)$ – ciąg binarny składający się z n podciągów zer długości $x_1 - 1, x_2 - 1, \ldots, x_n - 1$ oddzielonych od siebie jedynkami

Bijekcja $f : A \to B$

$\bar{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ – całkowitoliczbowe rozwiązanie równania
$x_1 + \ldots + x_n = k, \;\; x_i \geqslant 1$

$f(x)$ – ciąg binarny składający się z n podciągów zer długości
$x_1 - 1, x_2 - 1, \ldots, x_n - 1$ oddzielonych od siebie jedynkami

Bijekcja $g : B \to C$

Bijekcja $f : A \rightarrow B$

$\bar{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ – całkowitoliczbowe rozwiązanie równania
$x_1 + \ldots + x_n = k, \;\; x_i \geqslant 1$

$f(x)$ – ciąg binarny składający się z n podciągów zer długości
$x_1 - 1, x_2 - 1, \ldots, x_n - 1$ oddzielonych od siebie jedynkami

Bijekcja $g : B \rightarrow C$

z – ciąg binarny złożony z $n - 1$ jedynek i $k - n$ zer

Bijekcja $f : A \rightarrow B$

$\bar{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ – całkowitoliczbowe rozwiązanie równania
$x_1 + \ldots + x_n = k, \;\; x_i \geqslant 1$

$f(x)$ – ciąg binarny składający się z n podciągów zer długości
$x_1 - 1, x_2 - 1, \ldots, x_n - 1$ oddzielonych od siebie jedynkami

Bijekcja $g : B \rightarrow C$

z – ciąg binarny złożony z $n - 1$ jedynek i $k - n$ zer

$g(z)$ – ciąg binarny powstały z ciągu z poprzez zamianę zer i jedynek

Bijekcja $f : A \to B$

$\bar{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ – całkowitoliczbowe rozwiązanie równania $x_1 + \ldots + x_n = k, \;\; x_i \geqslant 1$

$f(x)$ – ciąg binarny składający się z n podciągów zer długości $x_1 - 1, x_2 - 1, \ldots, x_n - 1$ oddzielonych od siebie jedynkami

Bijekcja $g : B \to C$

z – ciąg binarny złożony z $n - 1$ jedynek i $k - n$ zer

$g(z)$ – ciąg binarny powstały z ciągu z poprzez zamianę zer i jedynek

Bijekcja $h : A \to C$

Bijekcja $f : A \to B$

$\bar{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ – całkowitoliczbowe rozwiązanie równania $x_1 + \ldots + x_n = k, \;\; x_i \geqslant 1$

$f(x)$ – ciąg binarny składający się z n podciągów zer długości $x_1 - 1, x_2 - 1, \ldots, x_n - 1$ oddzielonych od siebie jedynkami

Bijekcja $g : B \to C$

z – ciąg binarny złożony z $n - 1$ jedynek i $k - n$ zer

$g(z)$ – ciąg binarny powstały z ciągu z poprzez zamianę zer i jedynek

Bijekcja $h : A \to C$

złożenie $h = g \circ f$

Zadanie

Ile jest ciągów cyfr długości 3, które

a) *zaczynają się od cyfry nieparzystej?*

b) *nie zawierają żadnej cyfry trzy razy?*

c) *zawierają dokładnie dwie cyfry 4?*

d) *zawierają co najmniej jedną cyfrę 4?*

Ile jest ciągów cyfr długości 3, które

a) zaczynają się od cyfry nieparzystej?

Ile jest ciągów cyfr długości 3, które

a) zaczynają się od cyfry nieparzystej?

$$\underbrace{*}\ \underbrace{*}\ \underbrace{*}$$

Ile jest ciągów cyfr długości 3, które

a) zaczynają się od cyfry nieparzystej?

$$\underbrace{*}_{5}\ \underbrace{*}\ \underbrace{*}$$

Ile jest ciągów cyfr długości 3, które

a) zaczynają się od cyfry nieparzystej?

$$\underbrace{*}_{5}\ \underbrace{*}_{10}\ \underbrace{*}_{}$$

Ile jest ciągów cyfr długości 3, które

a) zaczynają się od cyfry nieparzystej?

$$\underbrace{*}_{5}\ \underbrace{*}_{10}\ \underbrace{*}_{10}$$

Ile jest ciągów cyfr długości 3, które

a) zaczynają się od cyfry nieparzystej?

$$\underbrace{*}_{5}\ \underbrace{*}_{10}\ \underbrace{*}_{10}$$

Prawo mnożenia:

Ile jest ciągów cyfr długości 3, które

a) zaczynają się od cyfry nieparzystej?

$$\underbrace{*}_{5}\ \underbrace{*}_{10}\ \underbrace{*}_{10}$$

Prawo mnożenia: $5 \cdot 10 \cdot 10 = 500$

Ile jest ciągów cyfr długości 3, które

b) nie zawierają żadnej cyfry trzy razy?

Ile jest ciągów cyfr długości 3, które

b) nie zawierają żadnej cyfry trzy razy?

$$\underbrace{*}\ \underbrace{*}\ \underbrace{*}$$

Ile jest ciągów cyfr długości 3, które

b) nie zawierają żadnej cyfry trzy razy?

$$\underbrace{*}_{10}\ \underbrace{*}\ \underbrace{*}$$

Ile jest ciągów cyfr długości 3, które

b) nie zawierają żadnej cyfry trzy razy?

$$\underbrace{*}_{10}\ \underbrace{*}_{10}\ \underbrace{*}_{}$$

Ile jest ciągów cyfr długości 3, które

b) nie zawierają żadnej cyfry trzy razy?

$$\underbrace{*}_{10}\ \underbrace{*}_{10}\ \underbrace{*}_{9?\ 8?}$$

Ile jest ciągów cyfr długości 3, które

b) nie zawierają żadnej cyfry trzy razy?

$$\underbrace{*}_{10}\ \underbrace{*}_{10}\ \underbrace{*}_{9?\ 8?}$$

Pytanie: A może łatwiej policzyć te ciągi, w których jakaś cyfra występuje trzy razy?

Ile jest ciągów cyfr długości 3, które

b) nie zawierają żadnej cyfry trzy razy?

$$\underbrace{*}_{10} \; \underbrace{*}_{10} \; \underbrace{*}_{9?\ 8?}$$

Pytanie: A może łatwiej policzyć te ciągi, w których jakaś cyfra występuje trzy razy?

$$\underbrace{10 \cdot 1 \cdot 1}_{\text{3 razy ta sama cyfra}}$$

Ile jest ciągów cyfr długości 3, które

b) nie zawierają żadnej cyfry trzy razy?

$$\underbrace{*}_{10}\ \underbrace{*}_{10}\ \underbrace{*}_{9?\ 8?}$$

Pytanie: A może łatwiej policzyć te ciągi, w których jakaś cyfra występuje trzy razy?

$$\underbrace{10 \cdot 10 \cdot 10}_{\text{wszystkie ciągi dł. trzy}} - \underbrace{10 \cdot 1 \cdot 1}_{\text{3 razy ta sama cyfra}}$$

Ile jest ciągów cyfr długości 3, które

b) nie zawierają żadnej cyfry trzy razy?

$$\underbrace{*}_{10}\ \underbrace{*}_{10}\ \underbrace{*}_{9?\ 8?}$$

Pytanie: A może łatwiej policzyć te ciągi, w których jakaś cyfra występuje trzy razy?

$$\underbrace{10 \cdot 10 \cdot 10}_{\text{wszystkie ciągi dł. trzy}} - \underbrace{10 \cdot 1 \cdot 1}_{\text{3 razy ta sama cyfra}} = \underbrace{990}_{\text{szukane ciągi}}$$

Ille jest ciągów cyfr długości 3, które

c) zawierają dokładnie dwie cyfry 4?

Ile jest ciągów cyfr długości 3, które

c) zawierają dokładnie dwie cyfry 4?

$$4\ 4 \underbrace{\ * \ }, \quad 4 \underbrace{\ * \ } 4, \quad \underbrace{\ * \ } 4\ 4$$

Ille jest ciągów cyfr długości 3, które

c) zawierają dokładnie dwie cyfry 4?

$$4\ 4\underbrace{\ *\ }_{9},\quad 4\underbrace{\ *\ }4,\quad \underbrace{\ *\ }4\ 4$$

Ile jest ciągów cyfr długości 3, które

c) zawierają dokładnie dwie cyfry 4?

$$4\,4\underbrace{\,*\,}_{9},\quad 4\underbrace{\,*\,}_{9}4,\quad \underbrace{\,*\,}\,4\,4$$

Ile jest ciągów cyfr długości 3, które

c) zawierają dokładnie dwie cyfry 4?

$$4\ 4\underbrace{\ *\ }_{9},\quad 4\underbrace{\ *\ }_{9}4,\quad \underbrace{\ *\ }_{9}4\ 4$$

Ile jest ciągów cyfr długości 3, które

c) zawierają dokładnie dwie cyfry 4?

$$4\ 4\underbrace{\ *\ }_{9},\quad 4\underbrace{\ *\ }_{9}4,\quad \underbrace{\ *\ }_{9}4\ 4$$

Prawo dodawania: (oddzielne przypadki)

Ile jest ciągów cyfr długości 3, które

c) zawierają dokładnie dwie cyfry 4?

$$4\ 4\underbrace{\ *\ }_{9},\quad 4\underbrace{\ *\ }_{9}4,\quad \underbrace{\ *\ }_{9}4\ 4$$

Prawo dodawania: (oddzielne przypadki)

$$9+9+9=27$$

Ile jest ciągów cyfr długości 3, które

d) zawierają co najmniej jedną cyfrę 4?

Ile jest ciągów cyfr długości 3, które

d) zawierają co najmniej jedną cyfrę 4?

$$4 \underbrace{\ast} \underbrace{\ast}, \quad \underbrace{\ast}\ 4 \underbrace{\ast}, \quad \underbrace{\ast} \underbrace{\ast}\ 4$$

Ile jest ciągów cyfr długości 3, które

d) zawierają co najmniej jedną cyfrę 4?

$$4\ \underbrace{*}_{10?\ 9?}\ \underbrace{*}\ ,\quad \underbrace{*}\ 4\ \underbrace{*}\ ,\quad \underbrace{*}\ \underbrace{*}\ 4$$

Ile jest ciągów cyfr długości 3, które

d) zawierają co najmniej jedną cyfrę 4?

$$4 \underbrace{*}_{10?\ 9?} \underbrace{*}, \quad \underbrace{*}\ 4 \underbrace{*}, \quad \underbrace{*} \underbrace{*}\ 4$$

A co z ciągiem 444?

Ile jest ciągów cyfr długości 3, które

d) zawierają co najmniej jedną cyfrę 4?

Łatwiej jest policzyć ciągi bez cyfry 4.

Ile jest ciągów cyfr długości 3, które

d) zawierają co najmniej jedną cyfrę 4?

Łatwiej jest policzyć ciągi bez cyfry 4.

$$\underbrace{}_{\text{ciągi bez cyfry 4}}$$

Ile jest ciągów cyfr długości 3, które

d) zawierają co najmniej jedną cyfrę 4?

Łatwiej jest policzyć ciągi bez cyfry 4.

$$\underbrace{9 \cdot 9 \cdot 9}_{\text{ciągi bez cyfry 4}}$$

Ile jest ciągów cyfr długości 3, które

d) zawierają co najmniej jedną cyfrę 4?

Łatwiej jest policzyć ciągi bez cyfry 4.

$$\underbrace{10 \cdot 10 \cdot 10}_{\text{wszystkie ciągi dł. trzy}} \quad - \quad \underbrace{9 \cdot 9 \cdot 9}_{\text{ciągi bez cyfry 4}}$$

Ile jest ciągów cyfr długości 3, które

d) zawierają co najmniej jedną cyfrę 4?

Łatwiej jest policzyć ciągi bez cyfry 4.

$$\underbrace{10 \cdot 10 \cdot 10}_{\text{wszystkie ciągi dł. trzy}} \quad - \quad \underbrace{9 \cdot 9 \cdot 9}_{\text{ciągi bez cyfry 4}} \quad = \quad \underbrace{271}_{\text{szukane ciągi}}$$

Zadanie

Na ile sposobów fotograf może umieścić w rzędzie na zdjęciu 6 osób z grupy 10 uczestników wesela, wśród których jest pan i panna młoda, jeśli

a) *panna młoda ma być na zdjęciu?*
b) *oboje nowożeńcy mają być na zdjęciu?*
c) *dokładnie jeden z nowożeńców ma być na zdjęciu?*
d) *co najmniej jeden z nowożeńców ma być na zdjęciu?*

Na ile sposobów fotograf może umieścić w rzędzie na zdjęciu 6 osób z grupy 10 uczestników wesela, wśród których jest pan i panna młoda, jeśli

a) panna młoda ma być na zdjęciu?

Na ile sposobów fotograf może umieścić w rzędzie na zdjęciu 6 osób z grupy 10 uczestników wesela, wśród których jest pan i panna młoda, jeśli

a) panna młoda ma być na zdjęciu?

$$\text{PM}\ \underbrace{\ *\ }\ \underbrace{\ *\ }\ \underbrace{\ *\ }\ \underbrace{\ *\ }\ \underbrace{\ *\ }$$

Na ile sposobów fotograf może umieścić w rzędzie na zdjęciu 6 osób z grupy 10 uczestników wesela, wśród których jest pan i panna młoda, jeśli

a) panna młoda ma być na zdjęciu?

$$\text{PM}\,\underbrace{\,*\,}_{9}\,\underbrace{\,*\,}\,\underbrace{\,*\,}\,\underbrace{\,*\,}\,\underbrace{\,*\,}$$

Na ile sposobów fotograf może umieścić w rzędzie na zdjęciu 6 osób z grupy 10 uczestników wesela, wśród których jest pan i panna młoda, jeśli

a) panna młoda ma być na zdjęciu?

$$\text{PM}\underbrace{*}_{9}\underbrace{*}_{8}\underbrace{*}\underbrace{*}\underbrace{*}$$

Na ile sposobów fotograf może umieścić w rzędzie na zdjęciu 6 osób z grupy 10 uczestników wesela, wśród których jest pan i panna młoda, jeśli

a) panna młoda ma być na zdjęciu?

$$\text{PM}\underbrace{*}_{9}\underbrace{*}_{8}\underbrace{*}_{7}\underbrace{*}\underbrace{*}$$

Na ile sposobów fotograf może umieścić w rzędzie na zdjęciu 6 osób z grupy 10 uczestników wesela, wśród których jest pan i panna młoda, jeśli

a) panna młoda ma być na zdjęciu?

$$\text{PM} \underbrace{*}_{9} \underbrace{*}_{8} \underbrace{*}_{7} \underbrace{*}_{6} \underbrace{*}$$

Na ile sposobów fotograf może umieścić w rzędzie na zdjęciu 6 osób z grupy 10 uczestników wesela, wśród których jest pan i panna młoda, jeśli

a) panna młoda ma być na zdjęciu?

$$\text{PM}\ \underbrace{*}_{9}\ \underbrace{*}_{8}\ \underbrace{*}_{7}\ \underbrace{*}_{6}\ \underbrace{*}_{5}$$

Na ile sposobów fotograf może umieścić w rzędzie na zdjęciu 6 osób z grupy 10 uczestników wesela, wśród których jest pan i panna młoda, jeśli

a) panna młoda ma być na zdjęciu?

$$\text{PM}\underbrace{*}_{9}\underbrace{*}_{8}\underbrace{*}_{7}\underbrace{*}_{6}\underbrace{*}_{5}$$

$$\text{PM}*****, *\text{PM}****, **\text{PM}***, ***\text{PM}**, ****\text{PM}*, *****\text{PM}$$

Na ile sposobów fotograf może umieścić w rzędzie na zdjęciu 6 osób z grupy 10 uczestników wesela, wśród których jest pan i panna młoda, jeśli

a) panna młoda ma być na zdjęciu?

$$\text{PM}\underbrace{*}_{9}\underbrace{*}_{8}\underbrace{*}_{7}\underbrace{*}_{6}\underbrace{*}_{5}$$

$\text{PM}*****, *\text{PM}****, **\text{PM}***, ***\text{PM}**, ****\text{PM}*, *****\text{PM}$

- Ustalamy pozycję panny młodej:

Na ile sposobów fotograf może umieścić w rzędzie na zdjęciu 6 osób z grupy 10 uczestników wesela, wśród których jest pan i panna młoda, jeśli

a) panna młoda ma być na zdjęciu?

$$\mathsf{PM}\underbrace{*}_{9}\underbrace{*}_{8}\underbrace{*}_{7}\underbrace{*}_{6}\underbrace{*}_{5}$$

$\mathsf{PM}*****, *\mathsf{PM}****, **\mathsf{PM}***, ***\mathsf{PM}**, ****\mathsf{PM}*, *****\mathsf{PM}$

- Ustalamy pozycję panny młodej: 6 sposobów

Na ile sposobów fotograf może umieścić w rzędzie na zdjęciu 6 osób z grupy 10 uczestników wesela, wśród których jest pan i panna młoda, jeśli

a) panna młoda ma być na zdjęciu?

$$\text{PM}\underbrace{*}_{9}\underbrace{*}_{8}\underbrace{*}_{7}\underbrace{*}_{6}\underbrace{*}_{5}$$

$$\text{PM}*****, *\text{PM}****, **\text{PM}***, ***\text{PM}**, ****\text{PM}*, *****\text{PM}$$

- Ustalamy pozycję panny młodej: 6 sposobów
- Ustawiamy pozostałe 5 osób:

Na ile sposobów fotograf może umieścić w rzędzie na zdjęciu 6 osób z grupy 10 uczestników wesela, wśród których jest pan i panna młoda, jeśli

a) panna młoda ma być na zdjęciu?

$$\text{PM}\underbrace{*}_{9}\underbrace{*}_{8}\underbrace{*}_{7}\underbrace{*}_{6}\underbrace{*}_{5}$$

$\text{PM}*****, *\text{PM}****, **\text{PM}***, ***\text{PM}**, ****\text{PM}*, *****\text{PM}$

- Ustalamy pozycję panny młodej: 6 sposobów
- Ustawiamy pozostałe 5 osób: $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = (9)_5$ sposobów

Na ile sposobów fotograf może umieścić w rzędzie na zdjęciu 6 osób z grupy 10 uczestników wesela, wśród których jest pan i panna młoda, jeśli

a) panna młoda ma być na zdjęciu?

$$PM \underbrace{*}_{9}\underbrace{*}_{8}\underbrace{*}_{7}\underbrace{*}_{6}\underbrace{*}_{5}$$

$$PM*****, *PM****, **PM***, ***PM**, ****PM*, *****PM$$

- Ustalamy pozycję panny młodej: 6 sposobów
- Ustawiamy pozostałe 5 osób: $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = (9)_5$ sposobów
- **Razem:** $6 \cdot (9)_5$ sposobów

Na ile sposobów fotograf może umieścić w rzędzie na zdjęciu 6 osób z grupy 10 uczestników wesela, wśród których jest pan i panna młoda, jeśli

b) oboje nowożeńcy mają być na zdjęciu?

Na ile sposobów fotograf może umieścić w rzędzie na zdjęciu 6 osób z grupy 10 uczestników wesela, wśród których jest pan i panna młoda, jeśli

b) oboje nowożeńcy mają być na zdjęciu?

- Ustalamy na jakich pozycjach stoją nowożeńcy:

Na ile sposobów fotograf może umieścić w rzędzie na zdjęciu 6 osób z grupy 10 uczestników wesela, wśród których jest pan i panna młoda, jeśli

b) oboje nowożeńcy mają być na zdjęciu?

- Ustalamy na jakich pozycjach stoją nowożeńcy: $\binom{6}{2}$ sposobów

Na ile sposobów fotograf może umieścić w rzędzie na zdjęciu 6 osób z grupy 10 uczestników wesela, wśród których jest pan i panna młoda, jeśli

b) oboje nowożeńcy mają być na zdjęciu?

- Ustalamy na jakich pozycjach stoją nowożeńcy: $\binom{6}{2}$ sposobów
- Ustalamy ich kolejność:

Na ile sposobów fotograf może umieścić w rzędzie na zdjęciu 6 osób z grupy 10 uczestników wesela, wśród których jest pan i panna młoda, jeśli

b) oboje nowożeńcy mają być na zdjęciu?

- Ustalamy na jakich pozycjach stoją nowożeńcy: $\binom{6}{2}$ sposobów
- Ustalamy ich kolejność: 2 sposoby

Na ile sposobów fotograf może umieścić w rzędzie na zdjęciu 6 osób z grupy 10 uczestników wesela, wśród których jest pan i panna młoda, jeśli

b) oboje nowożeńcy mają być na zdjęciu?

- Ustalamy na jakich pozycjach stoją nowożeńcy: $\binom{6}{2}$ sposobów
- Ustalamy ich kolejność: 2 sposoby
- Ustawiamy pozostałe 4 osoby:

Na ile sposobów fotograf może umieścić w rzędzie na zdjęciu 6 osób z grupy 10 uczestników wesela, wśród których jest pan i panna młoda, jeśli

b) oboje nowożeńcy mają być na zdjęciu?

- Ustalamy na jakich pozycjach stoją nowożeńcy: $\binom{6}{2}$ sposobów
- Ustalamy ich kolejność: 2 sposoby
- Ustawiamy pozostałe 4 osoby: $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = (8)_4$ sposobów

Na ile sposobów fotograf może umieścić w rzędzie na zdjęciu 6 osób z grupy 10 uczestników wesela, wśród których jest pan i panna młoda, jeśli

b) oboje nowożeńcy mają być na zdjęciu?

- Ustalamy na jakich pozycjach stoją nowożeńcy: $\binom{6}{2}$ sposobów
- Ustalamy ich kolejność: 2 sposoby
- Ustawiamy pozostałe 4 osoby: $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = (8)_4$ sposobów
- **Razem:** $\binom{6}{2} \cdot 2 \cdot (8)_4$ sposobów

Na ile sposobów fotograf może umieścić w rzędzie na zdjęciu 6 osób z grupy 10 uczestników wesela, wśród których jest pan i panna młoda, jeśli

c) dokładnie jeden z nowożeńców ma być na zdjęciu?

Na ile sposobów fotograf może umieścić w rzędzie na zdjęciu 6 osób z grupy 10 uczestników wesela, wśród których jest pan i panna młoda, jeśli

c) dokładnie jeden z nowożeńców ma być na zdjęciu?

- Ustalamy, który z nowożeńców będzie na zdjęciu:

Na ile sposobów fotograf może umieścić w rzędzie na zdjęciu 6 osób z grupy 10 uczestników wesela, wśród których jest pan i panna młoda, jeśli

c) dokładnie jeden z nowożeńców ma być na zdjęciu?

- Ustalamy, który z nowożeńców będzie na zdjęciu: 2 sposoby

Na ile sposobów fotograf może umieścić w rzędzie na zdjęciu 6 osób z grupy 10 uczestników wesela, wśród których jest pan i panna młoda, jeśli

c) dokładnie jeden z nowożeńców ma być na zdjęciu?

- Ustalamy, który z nowożeńców będzie na zdjęciu: 2 sposoby
- Wybieramy pozycję na której stoi:

Na ile sposobów fotograf może umieścić w rzędzie na zdjęciu 6 osób z grupy 10 uczestników wesela, wśród których jest pan i panna młoda, jeśli

c) dokładnie jeden z nowożeńców ma być na zdjęciu?

- Ustalamy, który z nowożeńców będzie na zdjęciu: 2 sposoby
- Wybieramy pozycję na której stoi: 6 sposobów

Na ile sposobów fotograf może umieścić w rzędzie na zdjęciu 6 osób z grupy 10 uczestników wesela, wśród których jest pan i panna młoda, jeśli

c) dokładnie jeden z nowożeńców ma być na zdjęciu?

- Ustalamy, który z nowożeńców będzie na zdjęciu: 2 sposoby
- Wybieramy pozycję na której stoi: 6 sposobów
- Ustawiamy pozostałe 5 osób:

Na ile sposobów fotograf może umieścić w rzędzie na zdjęciu 6 osób z grupy 10 uczestników wesela, wśród których jest pan i panna młoda, jeśli

c) dokładnie jeden z nowożeńców ma być na zdjęciu?

- Ustalamy, który z nowożeńców będzie na zdjęciu: 2 sposoby
- Wybieramy pozycję na której stoi: 6 sposobów
- Ustawiamy pozostałe 5 osób: $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = (8)_5$ sposobów

Na ile sposobów fotograf może umieścić w rzędzie na zdjęciu 6 osób z grupy 10 uczestników wesela, wśród których jest pan i panna młoda, jeśli

c) dokładnie jeden z nowożeńców ma być na zdjęciu?

- Ustalamy, który z nowożeńców będzie na zdjęciu: 2 sposoby
- Wybieramy pozycję na której stoi: 6 sposobów
- Ustawiamy pozostałe 5 osób: $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = (8)_5$ sposobów
- **Razem:** $2 \cdot 6 \cdot (8)_5$ sposobów

Na ile sposobów fotograf może umieścić w rzędzie na zdjęciu 6 osób z grupy 10 uczestników wesela, wśród których jest pan i panna młoda, jeśli

d) co najmniej jeden z nowożeńców ma być na zdjęciu?

Na ile sposobów fotograf może umieścić w rzędzie na zdjęciu 6 osób z grupy 10 uczestników wesela, wśród których jest pan i panna młoda, jeśli

d) co najmniej jeden z nowożeńców ma być na zdjęciu?

Od wszystkich sposobów odejmiemy te, gdzie na zdjęciu nie ma żadnego z nowożeńców.

Na ile sposobów fotograf może umieścić w rzędzie na zdjęciu 6 osób z grupy 10 uczestników wesela, wśród których jest pan i panna młoda, jeśli

d) co najmniej jeden z nowożeńców ma być na zdjęciu?

Od wszystkich sposobów odejmiemy te, gdzie na zdjęciu nie ma żadnego z nowożeńców.

- Liczba wszystkich sposobów:

Na ile sposobów fotograf może umieścić w rzędzie na zdjęciu 6 osób z grupy 10 uczestników wesela, wśród których jest pan i panna młoda, jeśli

d) co najmniej jeden z nowożeńców ma być na zdjęciu?

Od wszystkich sposobów odejmiemy te, gdzie na zdjęciu nie ma żadnego z nowożeńców.

- Liczba wszystkich sposobów: $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = (10)_6$

Na ile sposobów fotograf może umieścić w rzędzie na zdjęciu 6 osób z grupy 10 uczestników wesela, wśród których jest pan i panna młoda, jeśli

d) co najmniej jeden z nowożeńców ma być na zdjęciu?

Od wszystkich sposobów odejmiemy te, gdzie na zdjęciu nie ma żadnego z nowożeńców.

- Liczba wszystkich sposobów: $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = (10)_6$
- Liczba sposobów bez nowożeńców na zdjęciu:

Na ile sposobów fotograf może umieścić w rzędzie na zdjęciu 6 osób z grupy 10 uczestników wesela, wśród których jest pan i panna młoda, jeśli

d) co najmniej jeden z nowożeńców ma być na zdjęciu?

Od wszystkich sposobów odejmiemy te, gdzie na zdjęciu nie ma żadnego z nowożeńców.

- Liczba wszystkich sposobów: $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = (10)_6$
- Liczba sposobów bez nowożeńców na zdjęciu: $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = (8)_6$

Na ile sposobów fotograf może umieścić w rzędzie na zdjęciu 6 osób z grupy 10 uczestników wesela, wśród których jest pan i panna młoda, jeśli

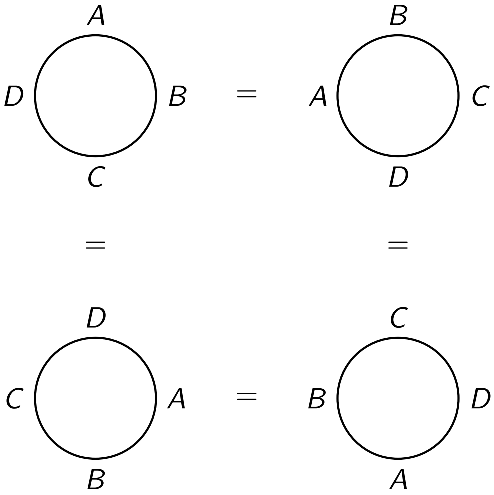
d) co najmniej jeden z nowożeńców ma być na zdjęciu?

Od wszystkich sposobów odejmiemy te, gdzie na zdjęciu nie ma żadnego z nowożeńców.

- Liczba wszystkich sposobów: $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = (10)_6$
- Liczba sposobów bez nowożeńców na zdjęciu: $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = (8)_6$
- **Wynik:** $(10)_6 - (8)_6$

Zadanie

Na ile sposobów możemy umieścić 4 osoby spośród 10 na 4 krzesłach ustawionych wokół okrągłego stołu, gdy zakładamy, że dwa rozmieszczenia są identyczne, gdy każdy ma tych samych sąsiadów po lewej i po prawej stronie?


A B
D B = A C
C D
= =
D C
C A = B D
B A

- Wybieramy 4 osoby, które usadzimy przy stole:

- Wybieramy 4 osoby, które usadzimy przy stole: $\binom{10}{4}$ sposobów

- Wybieramy 4 osoby, które usadzimy przy stole: $\binom{10}{4}$ sposobów
- Sadzamy je przy stole:

- Wybieramy 4 osoby, które usadzimy przy stole: $\binom{10}{4}$ sposobów
- Sadzamy je przy stole: $\frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{4} = 6$ sposobów

- Wybieramy 4 osoby, które usadzimy przy stole: $\binom{10}{4}$ sposobów
- Sadzamy je przy stole: $\frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{4} = 6$ sposobów
- **Razem:** $\binom{10}{4} \cdot 6$ sposobów

Zadanie

Na ile sposobów możemy wybrać 3 *różne elementy ze zbioru* $\{1, 2, 3, \dots, 10\}$, *jeśli*

a) *kolejność wyboru elementów jest istotna?*

b) *kolejność wyboru elementów nie jest istotna?*

Na ile sposobów możemy wybrać 3 różne elementy ze zbioru $\{1, 2, 3, \ldots, 10\}$, jeśli

a) kolejność wyboru elementów jest istotna?

Na ile sposobów możemy wybrać 3 różne elementy ze zbioru $\{1, 2, 3, \ldots, 10\}$, jeśli

a) kolejność wyboru elementów jest istotna?

Wybieramy **ciąg**:

Na ile sposobów możemy wybrać 3 różne elementy ze zbioru $\{1, 2, 3, \ldots, 10\}$, jeśli

a) kolejność wyboru elementów jest istotna?

Wybieramy **ciąg**:

$$\underbrace{\ *\ }\underbrace{\ *\ }\underbrace{\ *\ }$$

Na ile sposobów możemy wybrać 3 różne elementy ze zbioru $\{1, 2, 3, \ldots, 10\}$, jeśli

a) kolejność wyboru elementów jest istotna?

Wybieramy **ciąg**:

$$\underbrace{*}_{10}\underbrace{*}\underbrace{*}$$

Na ile sposobów możemy wybrać 3 różne elementy ze zbioru $\{1, 2, 3, \ldots, 10\}$, jeśli

a) kolejność wyboru elementów jest istotna?

Wybieramy **ciąg**:

$$\underbrace{*}_{10}\underbrace{*}_{9}\underbrace{*}_{}$$

Na ile sposobów możemy wybrać 3 różne elementy ze zbioru $\{1, 2, 3, \ldots, 10\}$, jeśli

a) kolejność wyboru elementów jest istotna?

Wybieramy **ciąg**:

$$\underbrace{*}_{10}\underbrace{*}_{9}\underbrace{*}_{8}$$

Na ile sposobów możemy wybrać 3 różne elementy ze zbioru $\{1, 2, 3, \ldots, 10\}$, jeśli

a) kolejność wyboru elementów jest istotna?

Wybieramy **ciąg**:

$$\underbrace{*}_{10}\underbrace{*}_{9}\underbrace{*}_{8}$$

$$10 \cdot 9 \cdot 8 = (10)_3$$

Na ile sposobów możemy wybrać 3 różne elementy ze zbioru $\{1, 2, 3, \ldots, 10\}$, jeśli

a) kolejność wyboru elementów jest istotna?

Wybieramy **ciąg**:

$$\underbrace{*}_{10}\underbrace{*}_{9}\underbrace{*}_{8}$$

$$10 \cdot 9 \cdot 8 = (10)_3$$

3-elementowe **wariacje bez powtórzeń** ze zbioru 10-elementowego

Na ile sposobów możemy wybrać 3 różne elementy ze zbioru $\{1, 2, 3, \ldots, 10\}$, jeśli

b) kolejność wyboru elementów nie jest istotna?

Na ile sposobów możemy wybrać 3 różne elementy ze zbioru $\{1, 2, 3, \ldots, 10\}$, jeśli

b) kolejność wyboru elementów nie jest istotna?

Wybieramy **podzbiór**:

Na ile sposobów możemy wybrać 3 różne elementy ze zbioru $\{1, 2, 3, \ldots, 10\}$, jeśli

b) kolejność wyboru elementów nie jest istotna?

Wybieramy **podzbiór**:

$$\{\underbrace{*}, \underbrace{*}, \underbrace{*}\}$$

Na ile sposobów możemy wybrać 3 różne elementy ze zbioru $\{1, 2, 3, \ldots, 10\}$, jeśli

b) kolejność wyboru elementów nie jest istotna?

Wybieramy **podzbiór**:

$$\{\underbrace{*}_{10}, \underbrace{*}, \underbrace{*}\}$$

Na ile sposobów możemy wybrać 3 różne elementy ze zbioru $\{1, 2, 3, \ldots, 10\}$, jeśli

b) kolejność wyboru elementów nie jest istotna?

Wybieramy **podzbiór**:

$$\{\underbrace{\;*\;}_{10}, \underbrace{\;*\;}_{9}, \underbrace{\;*\;}\}$$

Na ile sposobów możemy wybrać 3 różne elementy ze zbioru $\{1, 2, 3, \ldots, 10\}$, jeśli

b) kolejność wyboru elementów nie jest istotna?

Wybieramy **podzbiór**:

$$\{\underbrace{*}_{10}, \underbrace{*}_{9}, \underbrace{*}_{8}\}$$

Na ile sposobów możemy wybrać 3 różne elementy ze zbioru $\{1, 2, 3, \ldots, 10\}$, jeśli

b) kolejność wyboru elementów nie jest istotna?

Wybieramy **podzbiór**:

$$\{\underbrace{*}_{10}, \underbrace{*}_{9}, \underbrace{*}_{8}\}$$

$$\frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3!}$$

Na ile sposobów możemy wybrać 3 różne elementy ze zbioru $\{1, 2, 3, \ldots, 10\}$, jeśli

b) kolejność wyboru elementów nie jest istotna?

Wybieramy **podzbiór**:

$$\{\underbrace{*}_{10}, \underbrace{*}_{9}, \underbrace{*}_{8}\}$$

$$\frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3!} = \frac{10!}{3!7!}$$

Na ile sposobów możemy wybrać 3 różne elementy ze zbioru $\{1, 2, 3, \ldots, 10\}$, jeśli

b) kolejność wyboru elementów nie jest istotna?

Wybieramy **podzbiór**:

$$\{\underbrace{*}_{10}, \underbrace{*}_{9}, \underbrace{*}_{8}\}$$

$$\frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3!} = \frac{10!}{3!7!} = \binom{10}{3}$$

Na ile sposobów możemy wybrać 3 różne elementy ze zbioru $\{1, 2, 3, \dots, 10\}$, jeśli

b) kolejność wyboru elementów nie jest istotna?

Wybieramy **podzbiór**:

$$\{\underbrace{*}_{10}, \underbrace{*}_{9}, \underbrace{*}_{8}\}$$

$$\frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3!} = \frac{10!}{3!7!} = \binom{10}{3}$$

3-elementowe **kombinacje bez powtórzeń** ze zbioru 10-elementowego