DMAD - układanie rekurencji

Jak przygotować się do rozwiązywania zadań?

Przeczytaj przykłady 4.1, 4.2, 4.6, 4.8, 4.9, 4.11 i 4.12 z podręcznika/wykładu.

A Zadania na ćwiczenia

Zadanie A.1. Osobniki pewnego gatunku bakterii rozmnażają się co godzinę przez podział komórkowy (tzn. bakteria dzieli się na dwie). Wylicz ile wynosi a_n – liczba bakterii w populacji zaczętej 5 nowymi bakteriami po n godzinach (w środowisku bez zagrożeń dla życia tej bakterii).

Zadanie A.2. Znajdź zależność rekurencyjną na a_n – liczbę n–elementowych ciągów binarnych bez dwóch kolejnych zer.

Zadanie A.3. Znajdź zależność rekurencyjną na a_n – liczbę nieuporządkowanych podziałów zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$ na 2 niepuste podzbiory. Spróbuj, korzystając z rekurencji, wyznaczyć a_n.

Zadanie A.4. Bankomat ma w zasobach tylko banknoty o wartości 20 i 50 PLN. Znajdź zależność rekurencyjną na liczbę sposobów na które może bankomat nam wydać $10 \cdot n$ złotych ($n \geqslant 4$). Zakładamy, że kolejność wydawania banknotów jest istotna i może być dowolna.

Zadanie A.5. Pojawił się nowy portal społecznościowy FACEMAD. Każdy nowy użytkownik tego portalu zachowuje się identycznie. Najpierw spędza 2 dni na zapoznaniu się z portalem. W momencie upływu drugiego dnia zachęca (skutecznie) jedną nową osobę do korzystania z portalu. Po tym jest już tak zainteresowany, że w momencie upływu każdego kolejnego dnia znajduje (skutecznie) dwóch nowych użytkowników. Na początku funkcjonowania portalu jest jeden nowy użytkownik portalu. Znajdź zależność rekurencyjną na a_n – liczbę użytkowników po n dniach funkcjonowania FACEMADu.

B Zadania na ćwiczenia - jeśli czas pozwoli

Zadanie B.1. System komputerowy uznaje ciąg cyfr za słowo kodu, jeśli zawiera ono parzystą liczbę zer (np. 1230407869 jest słowem kodu a 120987045608 nie jest). Znajdź zależność rekurencyjną na a_n – liczbę n–elementowych słów kodu.

Zadanie B.2. Znajdź zależność rekurencyjną na liczbę sposobów wypełnienia planszy o wymiarach

a) $2 \times n$
b) $3 \times 2n$

nierozróżnialnymi kostkami domina o wymiarach 1×2.

Zadanie B.3. Znajdź zależność rekurencyjną na a_n – liczbę n–elementowych ciągów ternarnych z

a) parzystą liczbą zer;
b) parzystą liczbą zer i parzystą liczbą jedynek.

Zadanie B.4. Jest $2^{n-1} - 1$ nieuporządkowanych podziałów zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$ na dwa niepuste podzbiory. Znajdź rekurencję na a_n – liczbę nieuporządkowanych podziałów zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$ na trzy niepuste podzbiory.

C Zadania do samodzielnej pracy w domu

Zadanie C.1. Znajdź zależność rekurencyjną na a_n – liczbę podzbiorów zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$ (wliczając zbiór pusty), które nie zawierają dwóch kolejnych liczb.

Zadanie C.2. Wiadomo, że co roku pewien pracownik otrzymuje podwyżkę pensji, która wynosi 20% kwoty pensji wypłacanej przez ostatni rok pomniejszone o 11% kwoty pensji wypłacanej rok wcześniej. Na początku pracownik zarabia 1 tysiąc złotych. Wyznacz wzór rekurencyjny na a_n – wysokość pensji po n latach.

Zadanie C.3. Franek pożyczył od chłopaków z miasta 1 mln złotych na 50% rocznie (odsetki są naliczane na koniec każdego roku). Na koniec każdego roku spłaca 0,2 mln. złotych. Ile będzie wynosił jego dług po n latach?

Zadanie C.4. Na ile sposobów można wciągnąć na n–metrowy maszt ($n \geqslant 1$) flagi, jeśli mamy do dyspozycji nieograniczoną liczbę

a) nierozróżnialnych flag w kolorze czerwonym o szerokości 2 metry, nierozróżnialnych flag w kolorze zielonym o szerokości 1 metra i nierozróżnialnych flag w kolorze niebieskim o szerokości 1 metra;
b) flag w kolorze białym i czarnym o szerokości 1 metra (flagi w tym samym kolorze są nierozróżnialne), ale żadne dwie białe flagi nie mogą ze sobą sąsiadować na maszcie.

Proszę podać rozwiązanie w postaci rekurencyjnej i nie rozwiązywać rekurencji. UWAGA: Ważna jest dla nas kolejność flag na maszcie i ich szerokość, np. w (a) dla $n = 4$ przykładowo można powiesić najpierw jedną czerwoną flagę a po niej dwie zielone i zapełnimy cały maszt.

Zadanie C.5. Niech a_n będzie liczbą podzbiorów zbioru $[n]$ bez par typu $k, k+2$. Znajdź zależność rekurencyjną na a_n.

Zadanie C.6. W populacji królików każda nowo narodzona para królików po miesiącu rodzi 2 nowe pary królików. Po drugim miesiącu życia nie rodzi nic. Natomiast po trzecim i każdym kolejnym miesiącu rodzi jedną parę. W chwili zero są trzy nowo narodzone pary królików. Podaj rekurencję na a_n – liczbę par królików po n miesiącach. Zakładamy, że króliki nie umierają.

Zadanie C.7. Znajdź zależność rekurencyjną na a_n–liczbę sposobów wypełnienia planszy o wymiarach $2 \times n$ nierozróżnialnymi klockami o wymiarach: 1×2 i 2×2.

Zadanie C.8. (*) W kwalifikacjach do konkursu skoków narciarskich bierze udział n zawodników, którzy po kolei oddają skoki. Aktualnie prowadzącym nazwiemy skoczka, który już oddał skok i uzyskał najlepszy wynik spośród wszystkich, którzy skakali do danego momentu. Niech $G(n, k)$ ($n \geqslant 1, 0 \leqslant k \leqslant n$) oznacza liczbę wszystkich możliwych ostatecznych wyników kwalifikacji (czyli uszeregowań wszystkich skoczków po wszystkich skokach), w których startowało n zawodników i w których dokładnie k skoczków było w pewnym momencie aktualnie prowadzącymi (Uwaga! Zakładamy, że w kwalifikacjach nie było remisów, czyli każdy skoczek uzyskał inny wynik). Znajdź zależność rekurencyjną na $G(n, k)$ i wyznacz odpowiednie warunki początkowe $G(1, 1)$ i $G(n, 0)$ dla $n \geqslant 1$.

Odpowiedzi do niektórych zadań

C.1 $\begin{cases} a_1 = 2; \\ a_2 = 3; \\ a_n = a_{n-1} + a_{n-2},\ n \geqslant 3. \end{cases}$

C.2 $\begin{cases} a_0 = 1; \\ a_1 = 1,2; \\ a_n = 1,2 \cdot a_{n-1} - 0,11 \cdot a_{n-2},\ n \geqslant 2. \end{cases}$

C.3 $\begin{cases} a_0 = 1; \\ a_n = 1,5 \cdot a_{n-1} - 0,2,\ n \geqslant 1; \end{cases}$ $\quad a_n = 0,6 \cdot (1,5)^n + 0,4.$

C.4 a) $\begin{cases} a_1 = 2; \\ a_2 = 5; \\ a_n = 2 \cdot a_{n-1} + a_{n-2},\ n \geqslant 3. \end{cases}$ b) $\begin{cases} a_1 = 2; \\ a_2 = 3; \\ a_n = a_{n-1} + a_{n-2},\ n \geqslant 3. \end{cases}$

C.5 $\begin{cases} a_1 = 2; \\ a_2 = 4; \\ a_3 = 6; \\ a_4 = 9; \\ a_n = a_{n-1} + a_{n-3} + a_{n-4},\ n \geqslant 5. \end{cases}$

C.6 $\begin{cases} a_0 = 3; \\ a_1 = 9; \\ a_2 = 21; \\ a_n = 3 \cdot a_{n-1} - 2 \cdot a_{n-2} + a_{n-3},\ n \geqslant 3. \end{cases}$

C.7 $\begin{cases} a_1 = 1; \\ a_2 = 3; \\ a_n = a_{n-1} + 2 \cdot a_{n-2},\ n \geqslant 3. \end{cases}$