Logika i teoria mnogości

Ćwiczenia 2

Zadanie 1. Używając metody skróconej - nie wprost, sprawdzić, czy poniższe formuły są tautologiami rachunku zdań:

1. $(p \Rightarrow q) \wedge p \Rightarrow q$
2. $(\neg p \Rightarrow q) \Rightarrow (\neg q \Rightarrow p)$
3. $(p \Leftrightarrow q) \Rightarrow \neg p \wedge q$
4. $(p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow q \wedge r)$
5. $(p \vee q) \wedge (p \Rightarrow q) \Rightarrow (q \Rightarrow p)$
6. $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow \neg p \vee q$
7. $(p \wedge q \Rightarrow r) \Leftrightarrow (p \Rightarrow (q \Rightarrow r))$
8. $\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$
9. $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \vee r \Rightarrow q \wedge r)$
10. $(p \Rightarrow q) \Rightarrow ((r \Rightarrow s) \Rightarrow (p \wedge r \Rightarrow q \wedge s))$

Definicja
Schematem wnioskowania wyrażonym w języku rachunku zdań jest para uporządkowana (X, φ), gdzie X jest zbiorem formuł rachunku zdań, a φ jest formułą.

Schemat wnioskowania można zapisać następująco:

$$\frac{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n}{\varphi}$$

Formuły $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ nazywa się **schematami przesłanek**, a formułę φ **schematem wniosku**.

Definicja
Ze zdań o schematach $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ **wynika logicznie** zdanie o schemacie φ wtw, gdy formuła $\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \cdots \wedge \varphi_n \Rightarrow \varphi$ jest tautologią.

Wnioskowanie nazywamy **dedukcyjnym** (na gruncie KRZ), jeżeli wniosek wynika logicznie z przesłanek, tzn. schemat wniosku wynika logicznie (w KRZ) ze schematów przesłanek.

Lemat Jeśli schemat wnioskowania

$$\frac{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n}{\varphi}$$

jest niezawodny, a formuły $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ uzyskują wartość 1, to formuła φ też uzyskuje wartość 1.

Zadanie 2. Sprawdzić, czy poniższe wnioskowania są dedukcyjne:

1. Jeśli nie jesteś uparty, to niekiedy zmieniasz zdanie. Jeśli niekiedy zmieniasz zdanie, to czasem uznajesz twierdzenia fałszywe. Zatem, jeżeli nie jesteś uparty, to czasem uznajesz twierdzenia fałszywe.
2. Jeżeli Jan nie będzie grał systematycznie na loterii, to nie wygra. Jeżeli Jan będzie grał systematycznie na loterii, to musi znaleźć dodatkowe źródło dochodów. Jeżeli Jan nie wygra na loterii, to też musi znaleźć dodatkowe źródło dochodów. Zatem, Jan musi znaleźć dodatkowe źródło dochodów.
3. Jeżeli Jan nie będzie schlebiał Piotrowi, to straci posadę. Jeżeli Jan straci posadę, to popadnie w kłopoty finansowe. Jeżeli Jan będzie schlebiał Piotrowi, to straci dobrą opinię. Zatem, Jan popadnie w kłopoty finansowe lub straci dobrą opinię.
4. Jan uważa Piotra za autorytet. Jeśli Jan jest bardzo młody, to jeśli uważa Piotra za autorytet, to z góry podziela wszystkie poglądy Piotra. Jednakże Jan nie jest bardzo młody. Zatem, Jan nie podziela z góry wszystkich poglądów Piotra.
5. Jeśli nauka logiki przychodzi Janowi zbyt łatwo lub sprawia wiele trudności, to Jan uważa logikę za nieciekawą. Nauka logiki przychodzi Janowi zbyt łatwo. Zatem, Jan uważa logikę za nieciekawą.
6. Jeśli $m = 0$ i $n \neq 0$, to $m \cdot n = 0$. Jeśli $m \neq 0$ i $n = 0$, to $m \cdot n = 0$. Zatem, Jeśli $n \neq 0$ i $m \neq 0$, to $m \cdot n \neq 0$.