Logika i teoria mnogości

Ćwiczenia 4

System sekwentowy dowodzenia praw KRZ

Sekwent: skończona lista formuł $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$, interpretowana jako alternatywa $\varphi_1 \vee \cdots \vee \varphi_n$.

Aksjomaty: wszystkie sekwenty zawierające parę sprzecznych formuł $\varphi, \neg\varphi$ (na dowolnych miejscach).

Reguły dowodzenia:

$$(R\neg\neg)\,\frac{X, \varphi, Y}{X, \neg\neg\varphi, Y}$$

$$(R\wedge)\,\frac{X, \varphi, Y; \quad X, \psi, Y}{X, \varphi \wedge \psi, Y} \qquad (R\neg\wedge)\,\frac{X, \neg\varphi, \neg\psi, Y}{X, \neg(\varphi \wedge \psi), Y}$$

$$(R\vee)\,\frac{X, \varphi, \psi, Y}{X, \varphi \vee \psi, Y} \qquad (R\neg\vee)\,\frac{X, \neg\varphi, Y; \quad X, \neg\psi, Y}{X, \neg(\varphi \vee \psi), Y}$$

$$(R \Rightarrow)\,\frac{X, \neg\varphi, \psi, Y}{X, \varphi \Rightarrow \psi, Y} \qquad (R\neg \Rightarrow)\,\frac{X, \varphi, Y; \quad X, \neg\psi, Y}{X, \neg(\varphi \Rightarrow \psi), Y}$$

$$(R \Leftrightarrow)\,\frac{X, \neg\varphi, \psi, Y; \quad X, \varphi, \neg\psi, Y}{X, \varphi \Leftrightarrow \psi, Y} \qquad (R\neg \Leftrightarrow)\,\frac{X, \varphi, \psi, Y; \quad X, \neg\varphi, \neg\psi, Y}{X, \neg(\varphi \Leftrightarrow \psi), Y}$$

W tych regułach litery X, Y oznaczają dowolne konteksty, czyli skończone listy formuł (mogą być puste).

W przypadku reguły z jedną przesłanką wniosek jest logicznie równoważny tej przesłance; w przypadku reguły z dwiema przesłankami wniosek jest logicznie równoważny koniunkcji przesłanek (listy interpretujemy jako alternatywy).

Formuła w korzeniu drzewa jest logicznie równoważna koniunkcji wszystkich alternatyw elementarnych na liściach drzewa. Zatem system sekwentów może służyć do sprowadzania formuł do KPN.

Przykład

$$\begin{array}{c}
(p \Rightarrow q) \Rightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p) \\
| \\
\neg(p \Rightarrow q), \neg q \Rightarrow \neg p \\
\diagup \qquad \diagdown \\
\begin{array}{cc}
p, \neg q \Rightarrow \neg p & \neg q, \neg q \Rightarrow \neg p \\
| & | \\
p, \neg\neg q, \neg p & \neg q, \neg\neg q, \neg p \\
| & | \\
p, q, \neg p & \neg q, q, \neg p
\end{array}
\end{array}$$

Drzewo dowodu formuły $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$
KPN: $(p \vee q \vee \neg p) \wedge (\neg q \vee q \vee \neg p)$

Porównaj:

$$\begin{array}{c}
(p \Rightarrow q) \Rightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p) \\
| \\
\neg(p \Rightarrow q), \neg q \Rightarrow \neg p \\
| \\
\neg(p \Rightarrow q), \neg\neg q, \neg p \\
| \\
\neg(p \Rightarrow q), q, \neg p \\
\diagup \qquad \diagdown \\
\begin{array}{cc}
p, q, \neg p & \neg q, q, p
\end{array}
\end{array}$$

Przykład

$$\begin{array}{c}
p \vee q \Rightarrow p \wedge q \\
| \\
\neg(p \vee q), p \wedge q \\
\diagup \qquad \diagdown \\
\begin{array}{cc}
\neg p, p \wedge q & \neg q, p \wedge q \\
\diagup \quad \diagdown & \diagup \quad \diagdown \\
\begin{array}{cc} \neg p, p & \neg p, q \end{array} & \begin{array}{cc} \neg q, p & \neg q, q \end{array}
\end{array}
\end{array}$$

Poszukiwanie dowodu formuły $p \vee q \Rightarrow p \wedge q$ zakończyło się porażką, ponieważ dwa sekwenty elementarne na liściach drzewa nie są aksjomatami.

KPN: $(\neg p \vee p) \wedge (\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p) \wedge (\neg q \vee q)$

Przykład. Korzystając z metody drzew sekwentów sprawdzić, czy formuła $(p \wedge q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow (q \Rightarrow r))$ jest tautologią KRZ.

Drzewo sekwentów:

$$(p \wedge q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow (q \Rightarrow r))$$

$$\neg(p \wedge q \Rightarrow r), (p \Rightarrow (q \Rightarrow r))$$

$$\neg(p \wedge q \Rightarrow r), \neg p, q \Rightarrow r$$

$$\neg(p \wedge q \Rightarrow r), \neg p, \neg q, r$$

$$p \wedge q, \neg p, \neg q, r \qquad\qquad \neg r, \neg p, \neg q, r$$

$$p, \neg p, \neg q, r \qquad q, \neg p, \neg q, r$$

KPN: $(p \vee \neg p \vee \neg q \vee r) \wedge (q \vee \neg p \vee \neg q \vee r) \wedge (\neg r \vee \neg p \vee \neg q \vee r)$
Odpowiedź: Formuła jest tautologią.

Zadanie 1. Korzystając z metody drzew sekwentów sprawdzić, czy poniższe formuły są tautologiami KRZ:

1. $\neg(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow p \wedge \neg q$
2. $(p \Rightarrow q) \Rightarrow ((q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r))$
3. $(p \Rightarrow q) \wedge p \Rightarrow q$
4. $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg p \Rightarrow \neg q)$
5. $(p \Rightarrow (q \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \wedge q \Rightarrow r)$
6. $(p \Rightarrow q \wedge r) \Rightarrow (p \vee q \Rightarrow \neg r)$