

DMAD - podgrafy, izomorfizm, ciągi stopni

Jak przygotować się do rozwiązywania zadań?

Przeczytać rozdziały 7.3 – 7.7 (definicje) z materiałów.

Przed zajęciami powinnam/powinienem wiedzieć co to jest:

izomorfizm grafów (grafy izomorficzne), automorfizm grafu

podgraf grafu G , $H \subseteq G$,

$G[V_1]$ – podgraf indukowany na wierzchołkach z $V_1 \subset V$

$G[E_1]$ – podgraf indukowany na krawędziach z $E_1 \subset E$

$G \setminus V_1$ ($V_1 \subset V$)

$G \setminus E_1$ ($E_1 \subset E$)

podgraf rozpięty

ciąg stopni grafu

ciąg graficzny

graf dwudzielny, graf dwudzielny pełny $K_{n,m}$,

graf regularny (k -regularny)

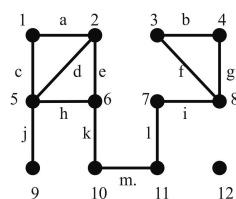
cykl na n wierzchołkach C_n ,

ścieżka na n wierzchołkach P_n ,

n -kostka Q_n ,

A Zadania na ćwiczenia

Zadanie A.1.



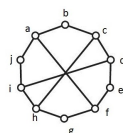
Dla grafu G na rysunku oznaczmy

$$\hat{V} = \{1, 2, 5, 6, 7\} \quad \text{ i } \quad \hat{E} = \{b, f, g, i\}.$$

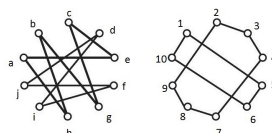
Narysuj następujące grafy: $G[\hat{V}]$, $G[V \setminus \hat{V}]$, $G - \hat{V}$, $G[\hat{E}]$, $G[E \setminus \hat{E}]$, $G - \hat{E}$.

Zadanie A.2. Dla każdej z podanych par grafów rozstrzygnij, czy grafy są izomorficzne.

a)



b)



Zadanie A.3. (Przykład 7.5. z materiałów) Narysuj wszystkie nieizomorficzne grafy proste o 5 wierzchołkach i 5 krawędziach.

Zadanie A.4. Dla poniższych grafów odpowiedz na pytania:

- ile mają krawędzi/wierzchołków?
- czy są grafami regularnymi?
- czy są grafami dwudzielnymi?
- ile krawędzi mają ich dopełnienia?

a) $K_{3,4}$ b) $K_{n,m}$ (Przykład 7.6 z materiałów) c) Q_4 d) Q_n (Przykłady 7.7. i 7.8. z materiałów)

Zadanie A.5. Czy podany ciąg jest graficzny? Jeśli tak, to narysuj wszystkie nieizomorficzne grafy o podanym ciągu stopni. Jeśli nie – uzasadnij dlaczego tak sądzisz.

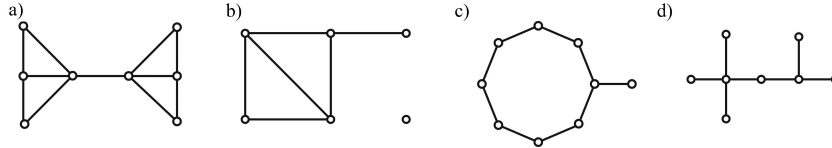
a) (2,2,2,1,1) b) (3,3,3,3,3) c) (6,1,1,1,1)

B Zadania na ćwiczenia - jeśli czas pozwoli

Zadanie B.1.

- Ile jest **oznaczonych** grafów prostych o 5 wierzchołkach i 5 krawędziach?
- Dla każdego narysowanego w **Zadaniu A.3** grafu określ ile ma on izomorficznych oznaczonych kopii o danym zbiorze wierzchołków $\{a, b, c, d, e\}$. Sprawdź, czy po zsumowaniu po wszystkich nieizomorficznych grafach otrzymasz wynik z (a).

Zadanie B.2. Ile jest grafów oznaczonych o zbiorze wierzchołków $\{1, 2, \dots, n\}$ (n oznacza liczbę wierzchołków rozpatrywanego grafu) izomorficznych z podanym poniżej grafem (tzn. na ile sposobów możemy ponumerować wierzchołki tego grafu tak, aby za każdym razem uzyskać inny graf)? Odpowiedź uzasadnij.



Zadanie B.3. (Przykład 7.10 z materiałów) Niech $d = (d_1, d_2, \dots, d_n)$ będzie nierosnącym ciągiem nieujemnych liczb całkowitych, a $d' = (d_2 - 1, d_3 - 1, \dots, d_{d_1+1} - 1, d_{d_1+2}, \dots, d_n)$.

- Pokaż, że jeśli d' jest graficzny to d jest graficzny.
- Prawdą jest też stwierdzenie: Jeśli d jest graficzny to d' jest graficzny. Dlaczego dowód tej implikacji jest trudniejszy?
- Na podstawie a) i b) napisz algorytm rostrzygający, czy ciąg d jest graficzny. Opisz słownie jak wyglądałby algorytm konstruujący graf prosty z ciągiem stopni d .

Zadanie B.4. Rozstrzygnij, czy podany ciąg jest graficzny. Jeśli tak, to korzystając z algorytmu z poprzedniego zadania narysuj graf o tym ciągu stopni. Jeśli nie, to uzasadnij, dlaczego tak sądzisz.

- $(5, 5, 4, 4, 3, 3, 3, 2, 1)$
- $(6, 6, 6, 5, 5, 4, 4, 3, 3, 1)$
- $(5, 5, 5, 5, 2, 2, 1, 1)$

Zadanie B.5. Grafy G i H mają ten sam ciąg stopni:

- $(4, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 1, 1)$;
- $(8, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$.

Czy G i H muszą być izomorficzne?

C Zadania do samodzielnej pracy w domu

Zadanie C.1. Graf G ma macierz incydencji:

	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8	e_9
v_1	1	0	0	1	0	0	0	0	0
v_2	1	1	0	0	0	0	0	0	0
v_3	0	1	1	0	0	0	0	0	0
v_4	0	0	1	1	1	0	0	0	0
v_5	0	0	0	0	1	1	0	0	1
v_6	0	0	0	0	0	1	1	0	0
v_7	0	0	0	0	0	0	1	1	0
v_8	0	0	0	0	0	0	0	1	1

Oznaczmy

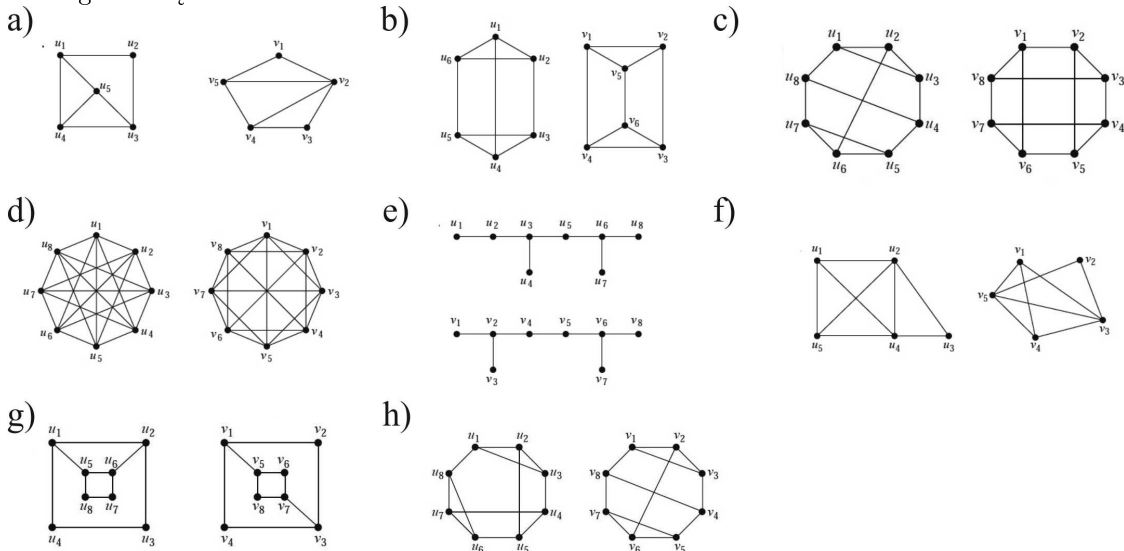
$$\hat{V} = \{v_4, v_6, v_7, v_8\} \quad \text{ i } \quad \hat{E} = \{e_6, e_7, e_8, e_9\}$$

Narysuj następujące grafy:

$$G, G[\hat{V}], G[V \setminus \hat{V}], G - \hat{V}, G[\hat{E}], G[E \setminus \hat{E}], G - \hat{E}.$$

Zadanie C.2. Narysuj wszystkie nieizomorficzne grafy proste na 5 wierzchołkach, które nie zawierają cykli.

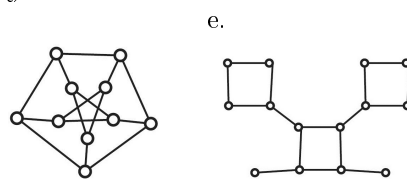
Zadanie C.3. Dla każdej pary grafów określ, czy są izomorficzne. Jeśli tak, to wskaż izomorfizm. Jeśli nie, to uzasadnij, dlaczego tak sądzisz.



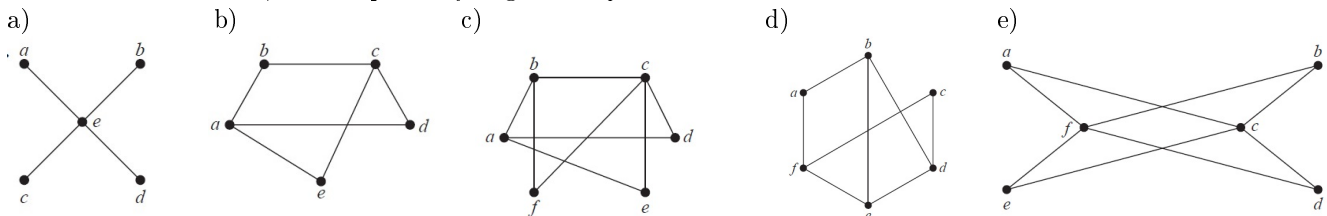
Zadanie C.4. Dla poniższych grafów odpowiedz na pytania:

- ile mają krawędzi/wierzchołków?
- jaki mają ciąg stopni?
- ile krawędzi mają ich dopełnienia?
- jak może wyglądać ich macierz przyległości?
- czy są regularne (jeśli nie zawsze, to dla jakich l , n i m są)?
- czy są dwudzielne (jeśli nie zawsze, to dla jakich l , n i m są)?

a. C_n b. P_n c. $K_{l,n,m}$ (graf pełny trójdzielny) d.



Zadanie C.5. Określ, które z poniższych grafów są dwudzielne?



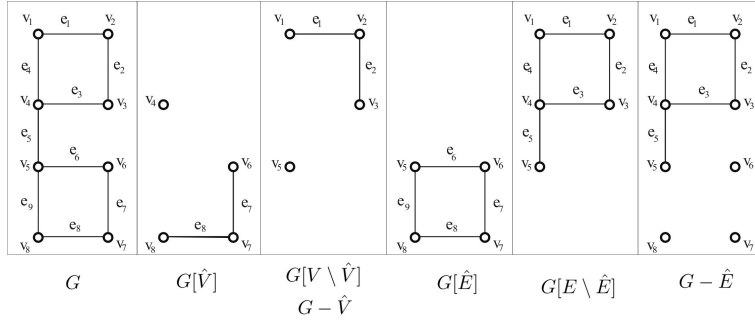
Które z nich mają cykle nieparzyste? Dlaczego?

Zadanie C.6. Rozstrzygnij, czy podany ciąg jest graficzny. Jeśli tak, to korzystając z algorytmu z Przykładu 7.10 z materiałów narysuj graf o tym ciągu stopni. Jeśli nie, to uzasadnij, dlaczego tak sądzisz.

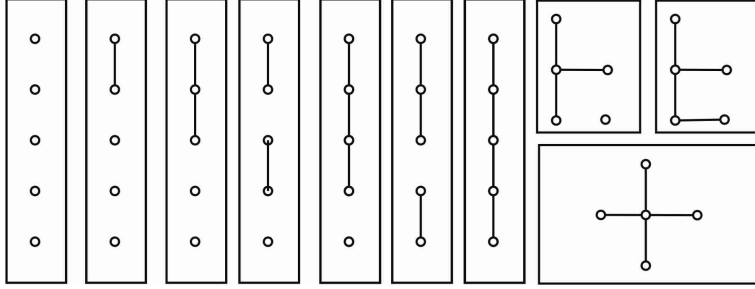
- a) (5,5,4,4,3,3,3,1);
- b) (6,6,6,5,5,4,4,3,2,1);
- c) (6,6,6,6,6,2,2,1,1);
- d) (7,7,5,5,5,5,2,2,2);
- e) (3,3,3,3,3,3,3,3);
- f) (8,8,7,7,7,7,1,1,1,1);

Odpowiedzi do niektórych zadań

C1.



C2.



- C3.** a) nie, sprawdź cykle C_5
 b) tak, $f(u_1) = v_5$, $f(u_4) = v_6$, $f(u_2) = v_2$, $f(u_3) = v_3$, $f(u_5) = v_4$, $f(u_6) = v_1$
 c) nie, sprawdź cykle C_3
 d) nie, rozważ sąsiedztwo dowolnego wierzchołka
 e) nie, wierzchołki stopnia 3 w różnej odległości
 f) tak, $f(u_3) = v_2$, $f(u_2) = v_5$, $f(u_4) = v_3$, $f(u_1) = v_1$, $f(u_5) = v_4$
 g) nie, porównaj cykle C_4 lub C_6
 h) nie, graf po lewej zawiera cykl C_6 bez przekątnej

- C4.** a) $|E| = n$, $|V| = n$, ciąg stopni: $2, 2, \dots, 2$, $|E^c| = \binom{n}{2} - n$, graf regularny, dwudzielny tylko dla n parzystych
 b) $|E| = n - 1$, $|V| = n$, ciąg stopni: $1, 1, 2, 2, \dots, 2$, $|E^c| = \binom{n}{2} - n + 1$, graf nie jest regularny, dwudzielny dla każdego n
 c) $|E| = ln + lm + nm$, $|V| = l + n + m$, ciąg stopni: l wierzchołków stopnia $n + m$, n wierzchołków stopnia $l + m$, m wierzchołków stopnia $l + n$, $|E^c| = \binom{l+n+m}{2} - lnm$, graf regularny wtedy i tylko wtedy, gdy $l = n = m$, nie jest dwudzielny
 d) $|E| = 15$, $|V| = 10$, ciąg stopni: $3, 3, \dots, 3$, $|E^c| = 30$, graf regularny, nie jest dwudzielny
 e) $|E| = 16$, $|V| = 14$, ciąg stopni: $1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 3, 3$, $|E^c| = 75$, graf nie jest regularny, jest dwudzielny

a)
$$\begin{bmatrix} 0 & & & & & & & & & \\ 1 & 0 & & & & & & & & \\ 0 & 1 & 0 & & & & & & & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & & & & & & \\ \vdots & \vdots & & & \ddots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 & \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 & \end{bmatrix}$$

b)
$$\begin{bmatrix} 0 & & & & & & & & & \\ 1 & 0 & & & & & & & & \\ 0 & 1 & 0 & & & & & & & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & & & & & & \\ \vdots & \vdots & & & \ddots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 & \end{bmatrix}$$

c)
$$\begin{bmatrix} \mathbf{0}_{l \times l} & \mathbf{1}_{l \times n} & \mathbf{1}_{l \times m} \\ \mathbf{1}_{n \times l} & \mathbf{0}_{n \times n} & \mathbf{1}_{n \times m} \\ \mathbf{1}_{m \times l} & \mathbf{1}_{m \times n} & \mathbf{0}_{m \times m} \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{l}
\text{d)} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
\text{e)} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}
\end{array}$$

C5. Grafy dwudzielne to: a), b), e).

c) zawiera cykl bcf , d) zawiera cykl bde

C6. a), e), f) nie są graficzne, sprawdź liczbę wierzchołków nieparzystego stopnia

c) nie jest graficzny, sprawdź algorytm

b) i d) są graficzne