Wstęp do rachunku prawdopodobieństwa
1. Klasyczna definicja prawdopodobieństwa

Zadanie 1. *Rzucamy dwiema symetrycznymi monetami. Interesuje nas wyłącznie liczba orłów, zatem przyjmujemy* $\Omega = \{0,1,2\}$*. Czy przyjęcie* $\mathbb{P}(\{k\}) = \frac{1}{3}$*,* $k = 0,1,2$*, daje model dobrze opisujący doświadczenie? (Jeśli tak, uzasadnij, jeśli nie, zaproponuj inną przestrzeń.)*

Zastanówmy się, jak wyglądają wszystkie możliwe wyniki tego doświadczenia. Rzucamy dwiema monetami i zakładamy, że są one rozróżnialne, a więc możliwe wyniki to:

$$(O,O),\ (O,R),\ (R,O),\ (R,R),$$

gdzie pierwsza współrzędna oznacza wynik rzutu na pierwszej monecie, a druga wynik rzutu na drugiej monecie. Zakładając, że wszystkie te wyniki są równoprawdopodobne, każdy z nich otrzymujemy z prawdopodobieństwem $\frac{1}{4}$. Oznacza to przykładowo, że szanse otrzymania 0 orłów są równe $\frac{1}{4} < \frac{1}{3}$, a więc opisany w zadaniu model nie opisuje dobrze tego doświadczenia.

Jeśli chcemy zdefiniować przestrzeń probabilistyczną dobrze opisującą to doświadczenie, to możemy przyjąć, że przestrzeń zdarzeń elementarnych to $\Omega = \{(O,O),(O,R),(R,O),(R,R)\}$ i stosujemy prawdopodobieństwo klasyczne, a więc dla każdego zdarzenia $A \subseteq \Omega$

$$\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{4}.$$

Zadanie 2. *Tworzymy losowo słowo o długości 7 (niekoniecznie mające sens) z liter: a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n (łącznie mamy 14 liter). Z jakim prawdopodobieństwem litery w słowie nie bedą się powtarzać?*

Zaczniemy od ustalenia jak wygląda przestrzeń zdarzeń elementarnych Ω. Możemy zdefiniować tę przestrzeń na kilka równoważnych sposobów, np.:

- Ω – słowa długości siedem składające się z liter a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n;
- Ω – ciągi długości siedem o elementach ze zbioru $\{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n\}$, w których elementy mogą się powtarzać;
- $\Omega = \{aaaaaaa, aaaaaab, \ldots, nnnnnnm, nnnnnnn\}$.

Niezależnie od tego, który sposób opisu wybierzemy powinniśmy zauważyć, że mamy tu do czynienia z wariacjami z powtórzeniami, a więc

$$|\Omega| = 14^7.$$

Interesuje nas zdarzenie, że litery w losowym słowie nie będą się powtarzać. Oznaczmy to zdarzenie przez A. W zależności od tego, jak zdefiniowaliśmy przestrzeń Ω możemy na różne sposoby opisać bardziej szczegółowo to zdarzenie:

- A – słowa długości siedem składające się z liter a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n, w których litery nie mogą się powtarzać;
- A – ciągi długości siedem o elementach ze zbioru $\{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n\}$, w których elementy nie mogą się powtarzać;
- $A = \{abcdefg, abcdefh, \ldots, hijklmn\}$.

Widzimy, że tutaj dostajemy wariacje bez powtórzeń, a więc

$$|A| = (14)_7 = 14 \cdot 13 \cdot \ldots \cdot 8.$$

Ponieważ wszystkie zdarzenia elementarne są równoprawdopodobne mamy do czynienia z modelem klasycznym, więc ostatecznie dostajemy

$$\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{(14)_7}{14^7}.$$

Zadanie 3. *Jakie jest prawdopodobieństwo, że w dobrze potasowanej talii (52 karty) wszystkie 4 asy sąsiadują ze sobą (tzn. nie są rozdzielone innymi kartami)?*

W tym przypadku zdarzeniami elementarnymi są możliwe potasowania talii kart, czyli permutacje tej talii. Zatem

$$|\Omega| = 52!$$

Niech A będzie zdarzeniem, że wszystkie cztery asy sąsiadują ze sobą. W jaki sposób możemy policzyć liczbę takich ustawień kart?

- Najpierw ustawiamy w ciąg wszystkie karty, które nie są asami. Możemy to zrobić na 48! sposobów.
- Następnie decydujemy, gdzie wstawimy asy. Ogólnie mamy 49 miejsc (jedno na początku ciągu i po jednym po każdej kolejnej karcie), z których musimy wybrać jedno, bo asy mają być koło siebie. Zatem w tym przypadku mamy 49 możliwości.
- Na koniec wybieramy, w jakiej kolejności będą ustawione asy. Mamy 4! możliwości.

(Inny sposób to ustawić asy w ciąg na 4! sposobów i "skleić" w jedną kartę, w konsekwencji czego otrzymamy 49 kart, które tasujemy na 49! sposobów.)

Korzystając z uogólnionego prawa mnożenia, stwierdzamy, że

$$|A| = 48! \cdot 49 \cdot 4! = 49! \cdot 4!.$$

Zatem

$$\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{49! \cdot 4!}{52!} = \frac{4!}{(52)_3}.$$

Zadanie 4. *Jaka jest szansa, że przy n–krotnym ($n \geqslant 3$) rzucie standardową kostką do gry*

(a) *wypadną dokładnie trzy szóstki?*

Zdarzeniami elementarnymi są wyniki n rzutów kostką. Kolejność rzutów ma znaczenie i wyniki mogą się powtarzać, więc mamy do czynienia z wariacjami z powtórzeniami. Zatem

$$|\Omega| = 6^n.$$

Niech A oznacza zdarzenie, że wypadną dokładnie 3 szóstki. W jaki sposób możemy obliczyć liczbę takich serii rzutów?

- Wybieramy trzy rzuty, w których wypadną szóstki. Możemy to zrobić na $\binom{n}{3}$ sposobów.
- Wybieramy co wypadnie w każdym z pozostałych $n-3$ rzutów. W każdym z nich może wypaść od jednego do pięciu oczek, więc łącznie mamy 5^{n-3} możliwości.

Korzystając z uogólnionego prawa mnożenia stwierdzamy, że

$$|A| = \binom{n}{3} 5^{n-3}.$$

Zatem

$$\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\binom{n}{3} 5^{n-3}}{6^n}.$$

(b) *wypadną co najwyżej dwie szóstki?*

Oznaczmy przez B zdarzenie, że wypadną co najwyżej dwie szóstki. To zdarzenie najlepiej jest rozbić na trzy przypadki:

- Nie wypadnie żadna szóstka. Wtedy w każdym rzucie może wypaść od jednego do pięciu oczek, więc łącznie mamy 5^n możliwości.
- Wypadnie dokładnie jedna szóstka. Wtedy najpierw możemy wybrać rzut, w którym wypadnie szóstka na n sposobów, a potem wybrać, co wypadnie w pozostałych rzutach na 5^{n-1} sposobów. Razem daje to $n \cdot 5^{n-1}$ możliwości.
- Wypadną dokładnie dwie szóstki. Podobnie jak wyżej możemy pokazać, że jest $\binom{n}{2} \cdot 5^{n-2}$ takich możliwych serii n rzutów.

Korzystając z prawa dodawania stwierdzamy, że

$$|B| = 5^n + n \cdot 5^{n-1} + \binom{n}{2} \cdot 5^{n-2}.$$

Zatem

$$\mathbb{P}(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{5^n + n \cdot 5^{n-1} + \binom{n}{2} \cdot 5^{n-2}}{6^n}.$$

(c) *wypadną przynajmniej trzy szóstki?*

Oznaczmy przez C zdarzenie, że wypadną przynajmniej trzy szóstki. Zauważmy, że zdarzeniem przeciwnym do zdarzenia C jest zdarzenie B. Zatem

$$\mathbb{P}(C) = 1 - \mathbb{P}(C') = 1 - \mathbb{P}(B) = 1 - \frac{5^n + n \cdot 5^{n-1} + \binom{n}{2} \cdot 5^{n-2}}{6^n}.$$

Zadanie 5. *Jakie jest prawdopodobieństwo, że zapisując losowo każdego z s ($s \geqslant 2$) studentów do jednej z k grup ćwiczeniowych $G_1, \ldots, G_k$ ($k \geqslant 2$), sprawimy, że*

(a) *żadna z dwóch pierwszych grup nie będzie pusta?*

Zdarzeniami elementarnymi są tutaj możliwe konfiguracje zapisów studentów do grup. Dla każdego z s studentów kolejno wybieramy jedną z k grup ćwiczeniowych. Grupy mogą się powtarzać, więc mamy do czynienia z wariacjami z powtórzeniami. Zatem

$$|\Omega| = k^s.$$

Oznaczmy przez A zdarzenie, że żadna z dwóch pierwszych grup nie będzie pusta. W tym przypadku łatwiej jest nam policzyć liczbę możliwych konfiguracji, w których pewne grupy są puste, więc skorzystamy ze zdarzenia przeciwnego. Zauważmy, że A' to zdarzenie, że przynajmniej jedna z dwóch pierwszych grup jest pusta. Ponadto, $A' = A_1 \cup A_2$, gdzie A_1 odpowiednio (A_2) to zdarzenie oznaczające, że pierwsza (odpowiednio druga) grupa jest pusta. Jeśli pewna grupa ma być pusta, to każdy student może być zapisany do jednej z $k-1$ pozostałych grup, więc

$$|A_1| = |A_2| = (k-1)^s.$$

Zatem $\mathbb{P}(A_1) = \mathbb{P}(A_2) = \frac{(k-1)^s}{k^s}$. Zdarzenia A_1 i A_2 nie są rozłączne, więc musimy jeszcze wyznaczyć prawdopodobieństwo zdarzenia $A_1 \cap A_2$, czyli tego, że obie pierwsze grupy są puste. Wtedy każdy student może być zapisany do jednej z $k-2$ grup, więc

$$|A_1 \cap A_2| = (k-2)^s.$$

Zatem $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) = \frac{(k-2)^s}{k^s}$. Ostatecznie, korzystając ze wzorów na prawdopodobieństwo zdarzenia przeciwnego i prawdopodobieństwo sumy zdarzeń dostajemy:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A) &= 1 - \mathbb{P}(A') = 1 - \mathbb{P}(A_1 \cup A_2) = 1 - (\mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) - \mathbb{P}(A_1 \cap A_2)) \\
&= 1 - \left(\frac{(k-1)^s}{k^s} + \frac{(k-1)^s}{k^s} - \frac{(k-2)^s}{k^s} \right) = \frac{k^s - 2(k-1)^s + (k-2)^s}{k^s}.
\end{aligned}$$

(b) *pierwsza lub ostatnia grupa będzie pusta?*

Niech B oznacza zdarzenie, że pierwsza lub ostatnia grupa jest pusta. Zauważmy, że istotne w tym przypadku jest to, że mamy dwie grupy, z których przynajmniej jedna jest pusta, więc liczba takich konfiguracji zapisów jest taka sama, jak w przypadku zdarzenia A'. Zatem

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A') = \frac{2(k-1)^s - (k-2)^s}{k^s}.$$

Zadanie 6. *Rozdano 52 karty czterem graczom, po 13 kart każdemu. Jaka jest szansa, że każdy ma asa?*

W tym przypadku ważne jest, aby dobrze zdefiniować, co rozumiemy przez rozdanie. Mamy dwie naturalne możliwości.

1. Rozdanie to uporządkowany podział talii kart na cztery podzbiory po 13 kart. Wtedy

$$|\Omega| = \binom{52}{13}\binom{39}{13}\binom{26}{13}\binom{13}{13} = \frac{52!}{(13!)^4}.$$

   Niech A oznacza zdarzenie, że każdy gracz ma asa. Jak obliczyć ile mamy takich rozdań?

   - Wybieramy, jakiego asa dostanie każdy z graczy. Asy nie mogą się powtarzać, więc mamy 4! możliwości.
   - Wybieramy, jakie karty poza tym dostanie każdy z graczy, czyli dokonujemy podziału pozostałych 48 kart na cztery uporządkowane podzbiory po 12 kart. Możemy to zrobić na $\binom{48}{12}\binom{36}{12}\binom{24}{12}\binom{12}{12}$ sposobów.

   Ostatecznie, korzystając z uogólnionego prawa mnożenia stwierdzamy, że

$$|A| = 4! \cdot \binom{48}{12}\binom{36}{12}\binom{24}{12}\binom{12}{12}.$$

   Zatem

$$\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{4! \cdot \binom{48}{12}\binom{36}{12}\binom{24}{12}\binom{12}{12}}{\binom{52}{13}\binom{39}{13}\binom{26}{13}\binom{13}{13}}.$$

2. Rozdanie to permutacja talii kart (innymi słowy zakładamy, że kolejność kart, jakie dostaje każdy z graczy ma znaczenie). Wtedy zdarzenia elementarne to ciągi długości 52. Możemy przyjąć, że wyrazy ciągu o numerach $1, 5, 9, \ldots, 49$ to karty, jakie dostaje kolejno pierwszy gracz, wyrazy ciągu o numerach $2, 6, 10, \ldots, 50$ to karty, jakie dostaje kolejno drugi gracz, itd. Wtedy

$$|\Omega| = 52!.$$

   Oznaczmy przez B zdarzenie, że każdy gracz ma asa. Jak obliczyć ile mamy takich rozdań?

   - Wybieramy, jakiego asa dostanie każdy z graczy. Asy nie mogą się powtarzać, więc mamy 4! możliwości.
   - Wybieramy, jako którą kartę każdy z graczy dostanie asa. Dla każdego gracza mamy 13 możliwości, więc łącznie mamy 13^4 możliwości.
   - Wybieramy, jak możemy rozdać pozostałe karty. Pozostało nam do uzupełnienia 48 miejsc w ciągu kart, a więc mamy 48! możliwości.

   Korzystając z uogólnionego prawa mnożenia stwierdzamy, że

$$|B| = 4! \cdot 13^4 \cdot 48!.$$

   Zatem

$$\mathbb{P}(B) = \frac{4! \cdot 13^4 \cdot 48!}{52!}.$$

Na koniec zauważmy, że

$$\frac{4! \cdot \binom{48}{12}\binom{36}{12}\binom{24}{12}\binom{12}{12}}{\binom{52}{13}\binom{39}{13}\binom{26}{13}\binom{13}{13}} = \frac{4! \frac{48!}{(12!)^4}}{\frac{52!}{(13!)^4}} = \frac{4! \cdot 48!}{52!} \cdot \left(\frac{13!}{12!}\right)^4 = \frac{4! \cdot 48! \cdot 13^4}{52!}.$$

Zatem niezależnie od tego, który z tych modeli wybierzemy prawdopodobieństwo interesującego nas zdarzenia jest takie samo.

Zadanie 7. *Z tradycyjnej talii 24 kart wybieramy pięć. Oblicz prawdopodobieństwo otrzymania następujących układów: jedna para (i nic więcej), dwie pary (i nic więcej).*

Przypomnijmy najpierw, jak wyglądają interesujące nas układy.

- Jedna para (i nic więcej): dostaliśmy dokładnie dwie karty o tej samej wartości i trzy inne karty, każdą o innej wartości.
- Dwie pary (i nic więcej): dostaliśmy dwie pary kart o tej samej wartości (przy czym te wartości są różne w obu parach) i piątą kartę o wartości innej niż te w parach.

Podobnie jak w poprzednim zadaniu musimy zadecydować, czy kolejność wyboru kart ma znaczenia. Rozważymy oba modele.

1. Załóżmy, że kolejność kart nie ma znaczenia, więc zdarzeniami elementarnymi są 5-elementowe podzbiory zbioru 24 kart. Wtedy
$$|\Omega| = \binom{24}{5}.$$
Oznaczmy przez A_i zdarzenie, że otrzymaliśmy dokładnie i par i nic więcej ($i \in \{1, 2\}$). Zacznijmy od obliczenia mocy zbioru A_1:
   - Ustalamy jaką wartość mają karty w otrzymanej parze. Możemy to zrobić na 6 sposobów.
   - Wybieramy jakie kolory mają karty w parze. Mamy $\binom{4}{2}$ możliwości.
   - Ustalamy jakie wartości mają pozostałe trzy karty. Każda z nich ma mieć inną wartość i nie możemy użyć wartości kart z pary, więc mamy łącznie $\binom{5}{3}$ możliwości.
   - Dla każdej wybranej wartości ustalamy kolor karty o tej wartości. Możemy to zrobić na 4^3 sposobów.

   Ostatecznie:
$$|A_1| = 6 \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{5}{3} \cdot 4^3, \text{ więc } \mathbb{P}(A_1) = \frac{6 \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{5}{3} \cdot 4^3}{\binom{24}{5}}.$$
Teraz zajmiemy się układem 2 pary i nic więcej.
   - Ustalamy jaką wartość mają karty w otrzymanych parach. Możemy to zrobić na $\binom{6}{2}$ sposobów.
   - Wybieramy jakie kolory mają karty w obu parach. Mamy $\binom{4}{2}^2$ możliwości.
   - Ustalamy jaką wartość ma ostatnia karta. Musi to być inna wartość niż te występujące w parach, więc mamy 4 możliwości.
   - Ustalamy kolor wybranej karty. Mamy 4 możliwości.

   Ostatecznie:
$$|A_2| = \binom{6}{2} \cdot \binom{4}{2}^2 \cdot 4 \cdot 4, \text{ więc } \mathbb{P}(A_2) = \frac{\binom{6}{2} \cdot \binom{4}{2}^2 \cdot 4 \cdot 4}{\binom{24}{5}}.$$
2. Załóżmy, że kolejność wyboru kart ma znaczenie, więc zdarzeniami elementarnymi są ciągi kart długości 5 bez powtórzeń. Wtedy
$$|\Omega| = (24)_5.$$
Oznaczmy przez B_i zdarzenie, że otrzymaliśmy dokładnie i par i nic więcej ($i \in \{1, 2\}$). Zauważmy, że gdy tworzymy układy z dokładnie jedną/dwiema parami możemy skorzystać z dokładnie tych samych procedur, co w pierwszym modelu i na koniec ustalić porządek, w jakim dostawaliśmy pięć kart. Zatem $|B_i| = |A_i| \cdot 5!$ oraz
$$\mathbb{P}(B_1) = \frac{6 \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{5}{3} \cdot 4^3 \cdot 5!}{(24)_5}, \quad \mathbb{P}(B_2) = \frac{\binom{6}{2} \cdot \binom{4}{2}^2 \cdot 16 \cdot 5!}{(24)_5}.$$