Liczba nieizomorficznych grafów na v wierzchołkach i e krawędziach jest równa liczbie grafów na

v wierzchołkach i (v po 2)-e krawędziach.

Izomorfizm grafów – graf G jest izomorficzny z grafem H, jeśli istnieje bijekcja ("przeetykietowanie") wierzchołków grafu H wierzchołkom grafu G, takie że jeśli jakieś dwa wierzchołki są połączone krawędzią w jednym z grafów, to odpowiadające im wierzchołki w drugim grafie również łączy krawędź[1].

Liczba chromatyczna - minimalna liczba kolorów

potrzebna do pomalowania wszystkich wierzchołków w taki sposób, aby żadne dwa sąsiednie wierzchołki nie miały tego samego koloru.

Indeks chromatyczny - minimalna liczba kolorów

potrzebna do pomalowania wszystkich krawędzi w taki sposób, aby żadne dwa sąsiednie krawędzie nie miały tego samego koloru.

χ - liczba chromatyczna

χ' - indeks chromatyczny

Δ - maksymalny stopień

δ - minimalny stopień

$\chi'(G) \geq \Delta(G)$

dla grafów planarnych $\chi(G) <= 4$

dla drzew o co najmniej dwóch wierzchołkach $\chi(G) = 2$

Sposób na sprawdzenie czy graf jest graficzny

8 7 5 4 4 4 3 1 1 1 1 1 1

- 6 4 3 3 3 2 0 0 1 1 1 1

6 4 3 3 3 2 1 1 1 1

- 3 2 2 2 1 0 1 1 1

...

6 6 5 4 4 2 1

- 5 4 3 3 1 0

5 4 3 3 1

Nie możemy kontynuować, więc ciąg (6 6 5 4 4 2 1) nie jest graficzny.

Jeśli G jest lasem, to

$v(G)=e(G)+\omega(G)$

Jeśli G jest drzewem, to

$v(G)=e(G)+1$

Jeśli G jest spójny, to

$v(G)\leq e(G)+1$

Zależność między stopniem wierzchołków a liczbą krawędzi

2e(G)=2*stopien wierzcholkow

Graf jest planarny - można go narysować na płaszczyźnie w taki sposób aby krawędzie się nie przecinały.

Ścianą grafu planarnego nazywamy obszar oddzielony krawędziami

f - liczba ścian

W grafie planarnym

$v+f=e+\omega+1$

W spójnym grafie planarnym (wzór Eulera)

$v+f=e+2$

Jeśli w grafie nie ma cyklu krótszego niż c i graf ma co najmniej c/2 krawędzi, to

$2e\geq cf$

Jeśli graf jest prosty, to nie ma cykli krótszych niż 3, czyli

$2e\geq 3f$

Twierdzenie Kuratowskiego

Skończony graf jest planarny (spłaszczalny), jeśli nie zawiera podgrafu, który jest grafem rozszerzonym grafu K_5 (graf pełny o pięciu wierzchołkach) lub K_3_3 (graf pełny dwudzielny o sześciu wierzchołkach, z których trzy są połączone z każdym z pozostałych trzech)[2].

K_{n,m} - graf pełny dwudzielny

K_n - graf pełny

(spójność) Jeśli graf ma n wierzchołków oraz

$deg(u)+deg(v) \geq n-1$,

to u,v należą do jednej składowej spójności.

Dowód: między u i v jest krawędź lub mają co najmniej jednego wspólnego sąsiada.

Czy graf o danym ciągu stopni jest spójny (musi być spójny)?

a) (6,4,4,4,4,2,2,2)

b) (4,4,4,4,4,2,2,2)

a)

n=8

$6+2=8 \geq 8-1$

$6+4=10 \geq 8-1$

Wierzchołek o stopniu 6 jest w jednej składowej spójności z wierzchołkami o stopniu 2 i o stopniu 4. Zatem graf jest spójny.

b) $4+2<8-1$

$4+4 \geq 8-1$, więc wszystkie wierzchołki stopnia 4 są w jednej składowej spójności

K_5 + K_3 nie jest spójny

Fakt: każde drzewo jest planarne. Ponadto jeśli graf jest spójny oraz $e-v \leq 2$, to graf jest planarny.

Dowód. W grafie K_3,3 jest 9 krawędzi i 6 wierzchołków, w grafie K_5 jest 10 krawędzi i 5 wierzchołków. Podział krawędzi dodaje tyle samo wierzchołków co krawędzi. Jeśli dodamy do grafu k wierzchołków, to aby zachować spójność, trzeba dodać co najmniej k krawędzi.

Graf regularny stopnia n to graf, w którym wszystkie wierzchołki są stopnia n czyli z każdego wierzchołka grafu regularnego wychodzi n krawędzi. Graf regularny stopnia n określa się dla wygody mianem grafu n -regularnego. Szczególnym przypadkiem grafów regularnych są grafy kubiczne (grafy 3-regularne)[1].

Euler

Cykl eulera – cykl w grafie, który przechodzi przez wszystkie krawędzie dokładnie raz

Warunkiem koniecznym i wystarczającym na to by spójny graf nieskierowany był eulerowski jest parzystość stopni wszystkich wierzchołków

Sciezka eulera (graf poleulerowski) – sciezka w grafie, którą przechodzi przez wszystkie krawędzie dokładnie raz

Aby spójny graf nieskierowany był półeulerowski może posiadać maksymalnie 2 wierzchołki nieparzystego stopnia.

Hamilton

Cykl Hamiltona – cykl w grafie, w którym każdy wierzchołek jest odwiedzany dokładnie raz(oprócz pierwszego)

Sciezka Hamiltona – sciezka w grafie, w którym każdy wierzchołek jest odwiedzany dokładnie raz

Dopełnienie grafu

Jeżeli graf jest zbudowany na n wierzchołkach i posiada k liczbę krawędzi to liczba krawędzi w dopełnieniu grafu jest równa (n po 2) - k