# Logika i teoria mnogości

## Ćwiczenia 7

### Kwantyfikatory w matematyce

Omówimy przykłady stosowania kwantyfikatorów w matematyce. Rozważmy język arytmetyki. Podstawowe pojęcia to predykat $=$ (równość), działania $+$ (dodawanie) i $\cdot$ (mnożenie) oraz nazwy liczb $0, 1, 2$ itd. Zakresem zmiennych $x, y, z$ (także z indeksami) jest zbiór liczb naturalnych, czyli nieujemnych liczb całkowitych.

Możemy definiować inne predykaty.

Predykat $\neq$ (różność). Definicja: $x \neq y \Leftrightarrow \neg(x = y)$.

Każdą definicję tego rodzaju traktujemy jako formułę ogólnie prawdziwą, czyli prawdziwą dla wszystkich wartości zmiennych wolnych. Zatem możemy dodać ogólną kwantyfikację całej równoważności: $\forall_x \forall_y (x \neq y \Leftrightarrow \neg(x = y))$. Często takie dwie kolejne kwantyfikacje zapisujemy $\forall_{x,y}$ i podobnie dla $\exists$.

Predykat $\leq$ (niewiększość). Definicja: $x \leq y \Leftrightarrow \exists_z (x + z = y)$.

Ponieważ ta formuła jest ogólnie prawdziwa, wiec ogólnie prawdziwe są też dowolne formuły, powstające przez podstawienie za $x, y$ termów tego języka (na mocy reguły podstawiania, podanej na wykładzie).

Przykłady:
$0 \leq 1 \Leftrightarrow \exists_z (0 + z = 1)$; podstawiono $x/0, y/1$.
$y \leq x \Leftrightarrow \exists_z (y + z = x)$; podstawiono $x/y, y/x$.
$x \leq x + y \Leftrightarrow \exists_z (x + z = x + y)$; podstawiono $y/x + y$.

Chcemy otrzymać równoważność, definiującą $z \leq y$. Nie można po prostu podstawić $x/z$ w naszej definicji, bo nastąpi kolizja zmiennych przy podstawianiu: zmienna $x$ jest wolna po prawej stronie, a gdy zamienimy ją na $z$, stanie się związana. Na mocy praw zamiany zmiennych związanych, prawa strona definicji jest logicznie równoważna $\exists_{z'} (x + z' = y)$. Wobec tego, nasza definicja jest logicznie równoważna formule $x \leq y \Leftrightarrow \exists_{z'} (x + z' = y)$. W tej formule możemy podstawić $x/z$, otrzymując $z \leq y \Leftrightarrow \exists_{z'} (z + z' = y)$.

Ten przykład ilustruje ogólną zasadę. Gdy mamy podstawić za zmienną w formule term, który spowoduje kolizję zmiennych, należy najpierw dokonać zamiany zmiennych związanych w tej formule, żeby nie było kolizji zmiennych (nie zmieniamy termu).

Predykat $<$ (mniejszość).
Definicja: $x < y \Leftrightarrow x \leq y \wedge x \neq y$.
Wykorzystaliśmy zdefiniowany predykat $\neq$.

Predykat $>$ (większość).
Definicja: $x > y \Leftrightarrow y < x$.

Predykat $|$ (podzielność). $x|y$ czytamy: $x$ jest dzielnikiem $y$ lub: $x$ dzieli $y$.
Definicja: $x|y \Leftrightarrow \exists_z(x \cdot z = y)$. Zauważ, że zgodnie z tą definicją $0|0$ jest prawdą, ale $0|k$ jest fałszem dla $k \neq 0$.

Predykat $Pr$. Znaczenie $Pr(x) : x$ jest liczbą pierwszą.
Definicja: $Pr(x) \Leftrightarrow \; x > 1 \wedge \forall_y(y|x \Rightarrow y = 1 \vee y = x)$.

Predykat $Pa$. Znaczenie $Pa(x) : x$ jest liczbą parzystą.
Definicja: $Pa(x) \Leftrightarrow \exists_y(x = y + y)$.

**Zadanie** Napisać definicje następujących predykatów (stosując predykaty, działania i stałe dla liczb, podane powyżej).

1. $K(x) : x$ jest kwadratem pewnej liczby.
2. $S(x) : x$ jest sumą kwadratów dwóch liczb.
3. $WP(x, y)$: liczby $x$ i $y$ są względnie pierwsze (tzn. obie są większe od 0 i jedynym ich wspólnym dzielnikiem jest 1).
4. $MIN(x, y, z) : x = min(y, z)$. Tu nie wolno zastosować symbolu $min$, który nie został przez nas zdefiniowany, lecz napisać równoważną definicję, stosujacą zdefiniowane predykaty. Wskazówka: nie potrzeba kwantyfikatorów.
5. $MAX(x, y, z) : x = max(y, z)$.
6. $NWD(x, y, z) : x$ jest największym wspólnym dzielnikiem $y$ i $z$.