Analiza matematyczna dla informatyków.

Mieczysław Cichoń, ver. 2.1/2021

Mieczysław Cichoń - WMI UAM

Plan wykładów 7,8 ...

Granica i ciągłość funkcji jednej zmiennej rzeczywistej. Punkt skupienia zbioru.

Granica funkcji w punkcie. Ciągłość funkcji (np. spline) i ciągłość jednostajna funkcji. Własność Darboux. Twierdzenie Weierstrassa o kresach.

Ciąg dalszy informacji o funkcjach zadanych szeregiem potęgowym. Wybrane funkcje elementarne. Funkcje zadane szeregami potęgowymi w informatyce (np. błędu).

Wybrane szeregi potęgowe i ich obliczanie. Błąd obliczeniowy. (na ćwiczeniach: kilka granic funkcji i badanie ciągłości funkcji zadanych klamrowo, wykorzystanie własności Darboux do obliczania miejsc zerowych równań nieliniowych.

Strony do lektury na wykłady 7, 8...

Czytamy najpierw motywacje:

[K] : motywacje - strony 24-27

teraz wstępne materiały

[K] : strony 163-166, 168-171

ale tym razem głównym źródłem jest:

[W] : strony 77-96, pomocniczo 98-102
(lub alternatywnie: z tego wykładu strony 53-69).

Funkcje 1.

Fakt, że badanie funkcji jest **niezbędne informatykom** nie podlega chyba (czyżby?) dyskusji (a już funkcje logarytmiczna i wykładnicza przy szacowaniach błędów metod, to już absolutna podstawa). Ale twierdzenia o ich własnościach też będą przydatne?

Funkcja dla komputera, to w uproszczeniu (na razie) pewna reguła zgodnie z którą powinien obliczyć dla dowolnej wartości x z dziedziny jej wartość $f(x)$ - oczywiście najchętniej dokładnie. Ale to nie takie oczywiste... Skoro liczba x jest reprezentowana z pewną dokładnością, to to nie może być mowy o dokładnym wyniku $f(x)$! Przybliżanie wartości to konieczny element więszości obliczeń komputerowych. Poza tym dane x też mogą być obarczone dodatkową niepewnością np. pomiarową...

Funkcje 2.

Jeżeli liczba jest niewymierna, to ma nieskończone rozwinięcie (np. dziesiętne) i można tylko operować na przybliżeniach. Trzeba być świadomy błędu i kontrolować go. W miarę możliwości to programista ma go ograniczać. Wyobraźmy sobie, że mamy obliczyć $f(\sqrt{5})$ dla pewnej funkcji f, przesłać wynik, a odbiorca wykona dalsze obliczenie np. $g(f(\sqrt{5}))$. Po pierwsze $\sqrt{5}$ do obliczeń musi być przybliżone,czyli $f(\sqrt{5})$ też (zawsze?), teraz problem transmisji danych - to może zwiększyć błąd i znowu obliczenia przybliżone... Inny problem to m.in. czas obliczeń (niekiedy muszą być w czasie "rzeczywistym"). A może przekazać wartość $\sqrt{5}$ w dokładnej postaci i całość obliczeń wykonać po transmisji? Jak? Np. przekazać równanie $x^2 - 5 = 0$, ale to już inna historia. Jest niestety gorzej - nie wszystkie liczby rzeczywiste są pierwiastkami wielomianów o współczynnikach wymiernych (nie są *algebraiczne*) np. π. Czyli kontrola przybliżeń to wyzwanie dla informatyków.

Funkcje 3.

Proste **zastosowania**:

- twierdzenie o złożeniu funkcji obliczalnych (teoria obliczalności),
- funkcje tworzące i ich własności przy badaniach rekurencji,
- interpolacja trygonometryczna (funkcje okresowe),
- funkcje skrótów (haszujące),
- problemy złożoności obliczeniowej (np. funkcje logarytmiczne i wielomianowe),
- w metodach numerycznych własność Darboux przy badaniu istnienia rozwiązań równań nieliniowych (powiemy o tym przy okazji metody bisekcji),
- funkcje tworzące - dla “matematyki dyskretnej” zastosowanej w informatyce,
- grafika komuterowa, wizualizacja, analiza obrazów (a tam funkcje trygonometryczne, pochodne) itd.

Funkcje 4.

A jak programy obliczają wartości funkcji? Czy jest "najlepszy algorytm"? Dla zainteresowanych **przegląd** algorytmów dla funkcji $f(x) = \sqrt{x}$ można znaleźć tu:

https://www.codeproject.com/Articles/69941/Best-Square-Root-Method-Algorithm-Function-Precisi

Funkcje 5.

Z bardziej zaawansowanych zastosowań (bez metod numerycznych):

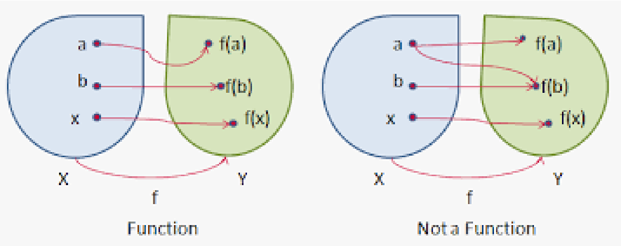
- Grafika komputerowa: interpolacja, transformaty (Fouriera w JPEG czy falkowa w formacie JPEG 2000) (i algebra liniowa),
- Optymalizacja: cały rachunek różniczkowy (i algebra liniowa),
- Robotyka (i inne modelowania fizyczne): analiza funkcji wielu zmiennych,
- Transmisja danych (np. oszczędne algorytmy przesyłu strumieniowego): rachunek różniczkowy stosowany do probabilistyki, (przesył danych - transformaty Fouriera itp.),
- Analiza algorytmów - o tym szerzej poniżej (np. asymptotyka)...
- Jako metoda komunikacji z użytkownikami oprogramowania!!
- Algorytmy kryptograficzne: istotna różnowartościowość funkcji, a także własności pewnych klasycznych funkcji (np. funkcja sinus w algorytmie MD5), ...

Odwzorowania

Niech X i Y oznaczają dowolne zbiory niepuste.

Odwzorowaniem określonym w zbiorze X o wartościach ze zbioru Y nazywamy przyporządkowanie (pewną metodą) każdemu elementowi $x \in X$ jakiegoś elementu $y \in Y$. Zapiszemy to $f : X \longrightarrow Y$, gdzie f jest symbolem tego odwzorowania.

Odwzorowanie dla którego każdemu $x \in X$ przyporządkowano dokładnie jeden $y \in Y$ nazywamy **funkcją**.



Podstawowe pojęcia.

O ile nie określono inaczej: będziemy domyślnie rozumieć, że dziedziną jest zbiór dla którego dany wzór ma sens (największy taki zbiór). Mówimy, że funkcja $f : X \longrightarrow Y$ odwzorowuje zbiór X **na** zbiór Y (f jest **surjekcją**), gdy dla każdego $y \in Y$ istnieje (co najmniej jeden) element $x \in X$ taki, że $y = f(x)$. Inaczej mówiąc $f(X) = Y$.

O ile $f(X) \subseteq Y$ (tj. $f(X) \subset Y$, ale istnieje $y \in Y \setminus f(X)$) to mówimy, że f odwzorowuje zbiór X w zbiór Y.

Przykładem funkcji f z $\mathbb{R}$ *na* $\mathbb{R}$ *jest* $f(x) = 4x + 2$, *a przykładem funkcji f z* $\mathbb{R}$ *w (nie jest to surjekcja)* $\mathbb{R}$ $f(x) = x^2 + 1$ *(wówczas zbiór wartości:* $f(X) =< 1, \infty)$*).*

Fakt, że f odwzorowuje zbiór X na zbiór Y oznaczać będziemy

$$f : X \xrightarrow{\text{na}} Y.$$

Różnowartościowość.

Będziemy mówili, że funkcja $f : X \longrightarrow Y$ jest **różnowartościowa** (inne nazwy: iniekcja, wzajemnie jednoznaczna, jedno-jednoznaczna, ,,jeden na jeden"), gdy zachodzi implikacja

$$(f(x) = f(y)) \Longrightarrow (x = y) \ , \quad \text{dla dowolnego} \quad x, y \in X \ .$$

Funkcją różnowartościową jest np. $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3x + 1$, *a nie jest nią np.* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$.

Fakt różnowartościowości funkcji f oznaczać będziemy

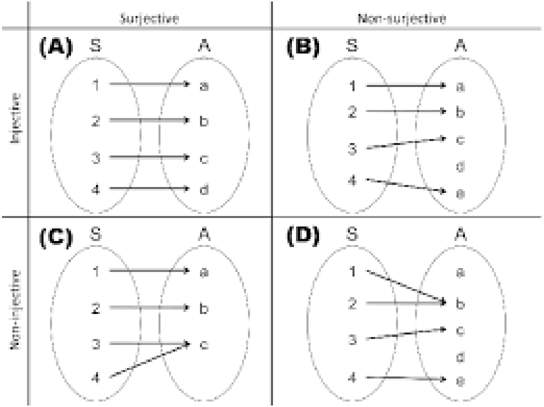
$$f : X \xrightarrow{1-1} Y.$$

Bijekcje i funkcje odwrotne.

Jeżeli funkcja $f\ :\ X \xrightarrow[\text{na}]{\text{1-1}} Y$ jest równocześnie różnowartościowa i odwzorowuje zbiór X **na** zbiór Y to nazywamy ją **bijekcją.**

W tym przypadku f określa również inną funkcję (to ważne twierdzenie i powinniśmy to wykazać !!) z Y na X nazywaną **funkcją odwrotną do** f (oznaczaną przez f^{-1}): $f^{-1}\ :\ Y \longrightarrow X$.

$$(f^{-1}(y) = x) \Longleftrightarrow (f(x) = y)\ .$$



(A) - funkcja 1-1 i "na"
(B) - funkcja 1-1, ale nie "na"
(C) - funkcja nie jest 1-1 i jest "na"
(D) - funkcja nie jest ani 1-1, ani "na"

Przykład.

Niech $f(x) = 2x + 6$, pokażemy, że jest bijekcją.

Niech $x_1 \neq x_2$, czyli $x_1 - x_2 \neq 0$ oraz

$$f(x_1) - f(x_2) = 2x_1 + 6 - (2x_2 + 6) = 2x_1 + 6 - 2x_2 - 6 =$$
$$= 2x_1 - 2x_2 = 2(x_1 - x_2) \neq 0 \quad \text{na mocy założenia.}$$

Funkcja f jest więc różnowartościowa.

Weźmy teraz dowolne $y \in \mathbb{R}$. Ponieważ szukamy $x \in \mathbb{R}$ takiego, że $y = f(x)$, to uzyskamy równanie $y = 2x + 6$ i dalej $y - 6 = 2x$, czyli ostatecznie $\frac{1}{2}y - 3 = x$. Istnieje więc $x \in \mathbb{R}$ takie, że $y = f(x)$, czyli f jest "na" $\mathbb{R}$.

Stąd $f^{-1}(y) = \frac{1}{2}y - 3$, i $f^{-1} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ jest bijekcją.

Ważną rolę odgrywają pewne klasy odwzorowań:

(a) Niech $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$. Takie funkcje, dla których dziedziną jest zbiór liczb naturalnych nazywamy ciągami (o ile wartości funkcji są w $\mathbb{R}$ to ciągami liczbowymi).

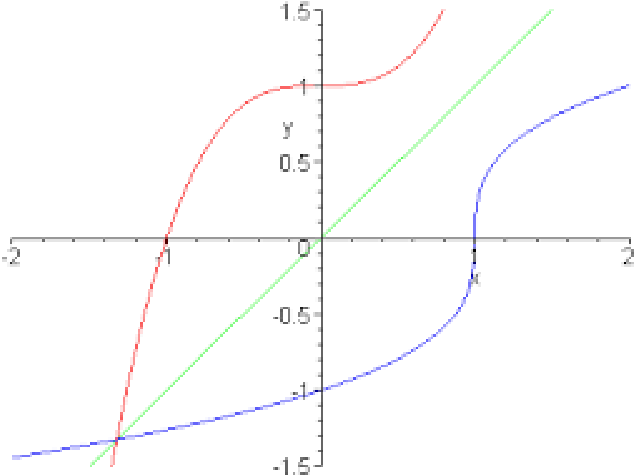
(b) Niech $X_1 = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$, $X_2 = \{1, 2, \ldots, m\}$.

Funkcje $f : X_1 \times X_2 \longrightarrow \mathbb{R}$ nazywać będziemy macierzami $n \times m$-elementowymi.

Więcej o tych klasach odwzorowań powiemy później.

Wykresy funkcji odwrotnych dla $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Jeżeli f^{-1} jest funkcją odwrotną dla $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, to jej **wykres jest symetryczny do wykresu funkcji f względem prostej $y = x$.**



Monotoniczność.

Definicja. Niech $f : A \longrightarrow \mathbb{R}, \quad A \subset \mathbb{R}, \quad A \neq \emptyset$.

Będziemy mówić, że funkcja f jest:

(a) rosnąca w A, gdy
$(x_1, x_2 \in A,\ x_1 < x_2) \implies f(x_1) < f(x_2)$,

(b) malejąca w A, gdy
$(x_1, x_2 \in A,\ x_1 < x_2) \implies f(x_1) > f(x_2)$,

(c) niemalejąca w A, gdy
$(x_1, x_2 \in A,\ x_1 < x_2) \implies f(x_1) \leq f(x_2)$,

(d) nierosnąca w A, gdy
$(x_1, x_2 \in A,\ x_1 < x_2) \implies f(x_1) \geq f(x_2)$.

W przypadku, gdy dla dowolnych $x_1, x_2 \in A,\ f(x_1) = f(x_2)$ funkcję nazywać będziemy stałą.

Monotoniczność cd.

Oczywiście funkcja może nie mieć żadnej z powyższych własności!

(np. $f(x) = \sin x$ dla $A = \mathbb{R}$), ale:

wszystkie funkcje posiadające jedną z powyższych własności nazywamy **monotonicznymi** (funkcje z (a) i (b) - ściśle monotonicznymi).

U w a g a : Zwracamy szczególną uwagę, że własność ta zależy od zbioru (dziedziny)! Umawiamy się, że mówiąc krótko „funkcja f jest monotoniczna" oznaczać to będzie, że jest monotoniczna w całej swojej dziedzinie.

Funkcje wypukłe.

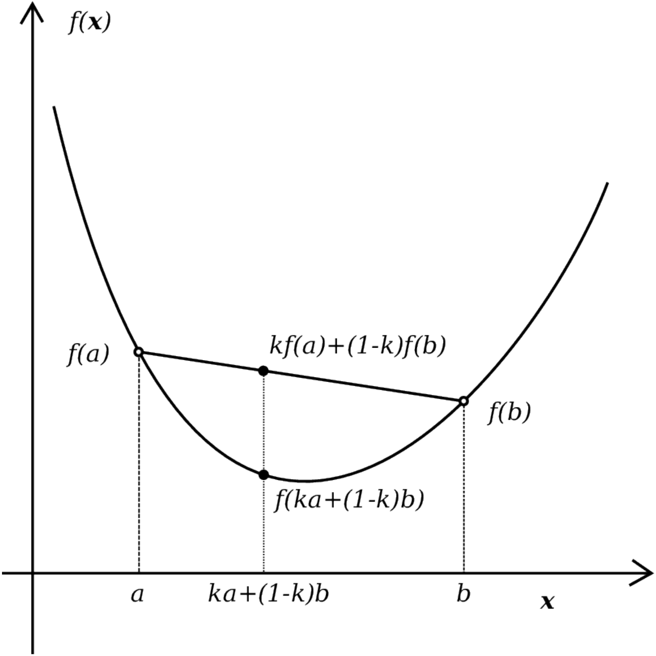
Definicja. Niech $A \subset \mathbb{R}$ będzie przedziałem. Funkcję $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ nazywamy **wypukłą** w A gdy dla dowolnych $a, b \in A$ oraz dowolnych $s, t \in \mathbb{R}$, $k \in < 0, 1 >$, zachodzi nierówność

$$f(k \cdot a + (1-k) \cdot b) \leq k \cdot f(a) + (1-k) \cdot f(b) \ .$$

W przypadku, gdy nierówność zachodzi w przeciwnym kierunku funkcję nazywamy **wklęsłą** w A.

Ponownie zwracamy uwagę, że ta własność także zależy od zbioru, a nierówność jest na ogół bardzo dobrym oszacowaniem dla wartości funkcji f często wykorzystywanym w różnych zastosowaniach.

Nieco później podamy inną metodę badania wypukłości funkcji f. Ilustracją graficzną tej cechy jest fakt, iż odcinek łączący dowolne dwa punkty wykresu $\{(x, y) \ : \ x \in A, \ y = f(x)\}$,,leży nad" wykresem funkcji (dokładnie to stwierdza nierówność z definicji!! - zrobić odpowiedni rysunek).


f(x)
f(a)
kf(a)+(1-k)f(b)
f(b)
f(ka+(1-k)b)
a
ka+(1-k)b
b
x

Przykładami funkcji wypukłych są np. $f(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$ czy $f(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$, natomiast funkcja $f(x) = \sin x$ jest wypukła w $A =< \pi, 2\pi >$, ale nie jest wypukła w swojej dziedzinie. Funkcje wklęsłe to np. $f(x) = -x^2$, $x \in \mathbb{R}$ czy $f(x) = \log x$, $x \in (0, \infty)$.

Przykład. Ponieważ $2 = \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 3$, a funkcja $f(x) = \sqrt{x}$, $x \in< 0, \infty)$ jest wklęsła (sprawdzić !), to m.in. (!) wstawiając $a = 1$ oraz $b = 3$ do definicji uzyskamy

$$\sqrt{2} \geq \frac{1}{2} \cdot \sqrt{1} + \frac{1}{2}\sqrt{3},$$

czyli $2\sqrt{2} - \sqrt{3} \geq 1$, a ta nierówność nie dla wszystkich jest oczywista...

Podobnie natychmiast mamy przydatne oszacowanie pierwiastka: $\sqrt{2} \leq \frac{3}{2}$ (tu: $\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 0$, gdyż $f(x) = 2^x$ - wypukła).

Funkcje elementarne.

A teraz podamy klasę funkcji zwanych elementarnymi. Jest to niestety umowne pojęcie i można spotkać w literaturze zestawy takich funkcji nieco różniące się od naszego, ale na szczęście raczej rzadko.

Do funkcji elementarnych zaliczamy funkcje:

- potęgowe,
- wykładnicze,
- trygonometryczne,
- **odwrotne do powyższych klas funkcji**: pierwiastkowe, logarytmiczne, cyklometryczne.

Inne klasy funkcji będą uzyskiwane wykonując działania na funcjach elementarnych, m.in.

- sumy i iloczyny: np. wielomianowe ($f(x) = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + \ldots + a_n \cdot x^n$) i hiperboliczne (!), oraz ich ilorazy (np. funkcje wymierne - ilorazy funkcji wielomianowych, a szczególny przypadek to funkcje homograficzne $f(x) = \frac{a_0 + a_1 x}{b_0 + b_1 x}$,
- złożenia funkcji elementarnych,
- tzw. "klamrowe" (np. wartość bezwzględna, funkcje schodkowe czy funkcja $sgn(x)$) - różne wzory w różnych częściach dziedziny.

Funkcja znaku ("signum"):

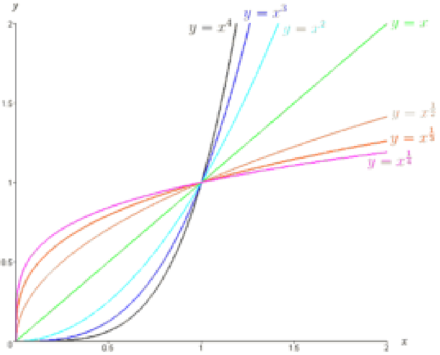
$$f(x) = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1 & x > 0 \ , \\ 0 & x = 0 \ , \\ -1 & x < 0 \ . \end{cases}$$

Wybrane funkcje.

Funkcja stała $f(x) = c =$ const oraz liniowa $f(x) = a \cdot x$ nie wymagają większych komentarzy (może uwaga: tzw. ,,funkcje liniowe" w szkole średniej $f(x) = a \cdot x + b$ posiadają nazwę od swojego wykresu - linii prostej, w rzeczywistości ta klasa funkcji nazywa się w matematyce funkcjami afinicznymi),

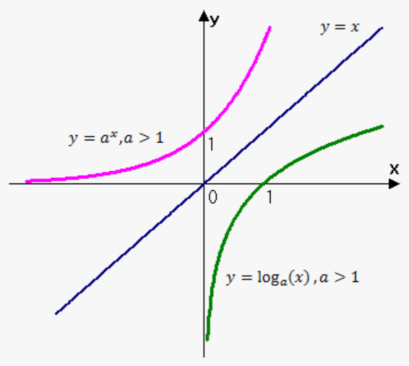
Jeżeli $\alpha \in \mathbb{Z}$ to funkcję $f(x) = x^\alpha$ nazywamy funkcją potęgową $X = \mathbb{R}$. Dla α nie będącego liczbą całkowitą dziedzina $X =< 0, \infty)$.

O ile $a > 0$ to funkcję $f : \mathbb{R} \longrightarrow (0, \infty)$ określoną wzorem $f(x) = a^x$ nazywamy funkcją wykładniczą. Własności takich funkcji (w zależności od a) pozostawiamy jako ćwiczenie.



Wybrane funkcje potęgowe - wykresy dla $x \geq 0$. Zwracam uwagę na symetrię wykresów względem prostej $y = x$ (czyli funkcje "pierwiastkowe").

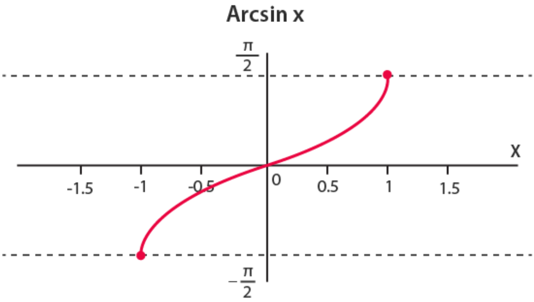
Teraz rozpatrzmy funkcję odwrotną do funkcji potęgowej (o ile $a \neq 1$) $f(x) = a^x$. Funkcja ta istnieje i jest nazywana funkcją logarytmiczną. *Szczególnie istotną funkcją jest jedna z funkcji wykładniczych:* $f(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$ *oraz funkcja do niej odwrotna* $f^{-1}(x) = \ln x$, $x \in (0, \infty)$.



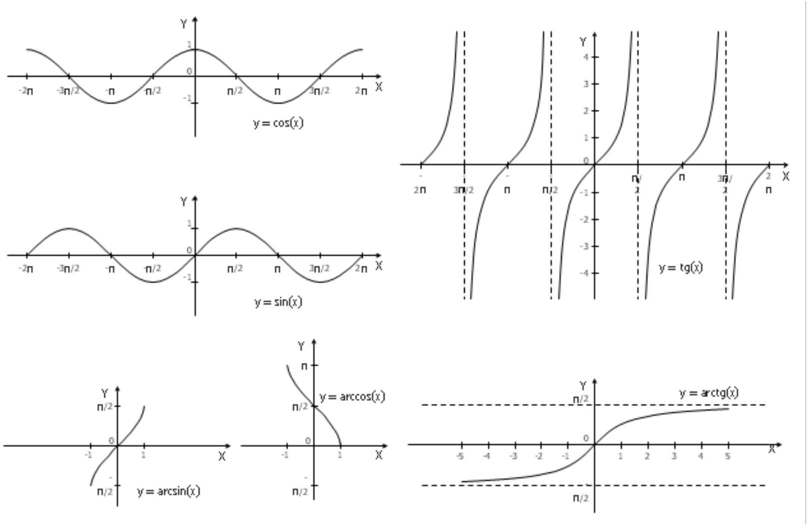
A funkcje logarytmiczne to w informatyce **absolutna podstawa**, por. materiał: takie ciekawostki dla początkujących - koniecznie przeczytać!

Znane z innych działów funkcje trygonometryczne $f(x) = \sin x$, $g(x) = \cos x$, $h(x) = \text{tg } x$, $k(x) = \text{ctg } x$ były już wspomniane przy własnościach funkcji. Proszę przypomnieć sobie JAK były definiowane w szkole średniej...

Funkcje odwrotne do nich, ich dziedziny i własności Czytelnik znajdzie częściowo w zadaniach na ćwiczeniach, a w celu poszerzenia wiadomości odsyłamy do literatury.



Funkcje trygonometryczne i odwrotne do nich...



Funkcje schodkowe i łamane.

Jeżeli $f \ : < a, b > \longrightarrow \mathbb{R}$, oraz $a \leq x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_n = t$ to funkcję f nazywamy schodkową, o ile jest stała w każdym z przedziałów (x_{i-1}, x_i), $\ (i = 1, 2, \ldots, n)$; a łamaną, gdy jest afiniczna na każdym z tych przedziałów.

Funkcje hiperboliczne.

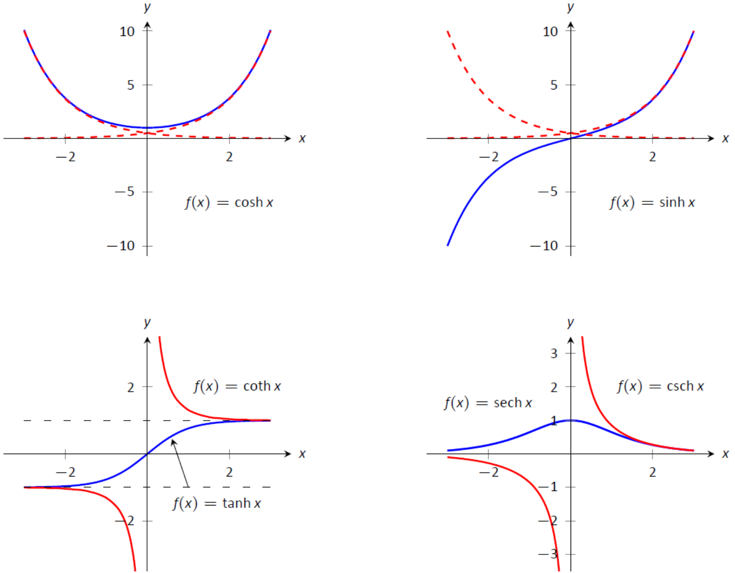
Inne przydatne w niektórych działach zastosowań funkcje **hiperboliczne:**

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}\ , \qquad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}\ ,$$

$$\operatorname{tgh}\ x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\ , \qquad \operatorname{ctgh}\ x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}\ .$$

Pod pewnymi względami (relacje pomiędzy nimi przypominają te znane z trygonometrii - stąd nazwy) rzeczywiście przypominają funkcje trygonometryczne, ale ich wykresy są zdecydowanie inne niż funkcji trygonometrycznych...

Wykresy funkcji hiperbolicznych.



Cele operowania funkcjami w informatyce.

(1) przybliżanie jednych funkcji innymi (aproksymacja),

(2) korzystanie z ich ciągłości i jednostajnej ciągłości (np. własność Darboux),

(3) znajdowanie punktów charakterystycznych (np. miejsc zerowych, wartości największych itp.),

(4) badanie własności (np. monotoniczność, wypukłość),

(5) korzystanie z granic funkcji do obliczeń granic ciągów,

(6) korzystanie z asymptot (np. symbole Landaua) i inne...

Punkty skupienia zbioru.

Definicja. Element $x_0 \in X$ nazywa się punktem skupienia zbioru $A \subset X$ jeżeli w każdej kuli otwartej $K(x_0, r)$ $(r > 0)$ istnieje co najmniej 1 element zbioru A różny od x_0:

$$\underset{r>0}{\forall} \quad \underset{x\in A,\ x\neq x_0}{\exists} \quad x \in (A \cap K(x_0, r))$$

Inaczej mówiąc - x_0 jest punktem skupienia zbioru A jeżeli istnieje ciąg $(x_n) \subset A$ taki, że $|x_n - x_0| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Oczywiście x_0 nie musi należeć do A. Np. $A = (0, 1)$. Wówczas każdy punkt $x \in A$ jest jego punktem skupienia, ale również 0 i 1 są jego punktami skupienia.

Granica funkcji w punkcie.

Niech $f : X \to \mathbb{R}$ i niech x_0 niech będzie punktem skupienia zbioru X.

Definicja. (def. Heinego).

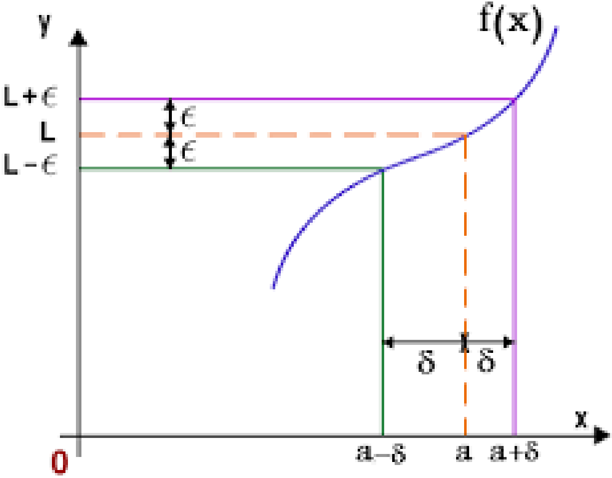
Mówimy, że element y_0 jest granicą funkcji f $x_0 \in X$, jeżeli dla dowolnego ciągu (x_n) elementów $x_n \in X$, $x_n \neq x_0$ oraz $|x_n - x_0| \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ odpowiedni ciąg $(f(x_n))$ jest zbieżny do y_0, czyli $|f(x_n) - y_0| \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Definicja. (def. Cauchy'ego).

Mówimy, że element y_0 jest granicą funkcji f w punkcie $x_0 \in X$, jeżeli dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje taka liczba $\delta > 0$, że dla wszystkich elementów $x \neq x_0 \in X$ takich, że $|x - x_0| < \delta$ zachodzi $|f(x) - y_0| < \varepsilon$

Wówczas piszemy $y_0 = \lim_{x\to x_0} f(x)$.

Granica funkcji w punkcie a.



Równoważność definicji granicy.

Czyli definicja Cauchy'ego ma postać:

$$\underset{\varepsilon>0}{\forall}\ \underset{\delta>0}{\exists}\ \underset{x\in X}{\forall}\ |x-x_0|<\delta \implies |f(x)-y_0|<\varepsilon.$$

W powyższych definicjach użyliśmy tej samej nazwy: ,,granica funkcji f" - usprawiedliwia to następujące:

Twierdzenie. *Definicje Heinego i Cauchy'ego granicy funkcji f w punkcie x_0 dla funkcji o wartościach rzeczywistych są równoważne tj. element y_0 jest granicą funkcji f w sensie definicji Heinego wtedy i tylko wtedy, gdy jest granicą funkcji f w sensie definicji Cauchy'ego.*

(C) = (H)

Definicje w przypadku funkcji $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$

(def. Heinego)

$$\underset{(x_n)}{\forall} \; x_n \neq x_0 (| x_n - x_0 | \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0) \implies (| f(x_n) - y_0 | \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0)$$

(def. Cauchy'ego)

$$\underset{\varepsilon>0}{\forall} \; \underset{\delta>0}{\exists} \; \underset{x\in\mathbb{R}}{\forall} \; | x - x_0 | < \delta \implies | f(x) - y_0 | < \varepsilon$$

Granice jednostronne.

Dla funkcji rzeczywistych $f : P \longrightarrow \mathbb{R}$, gdzie P jest przedziałem można pojęcie granicy nieco uogólnić.

Definicja. Niech x_0 będzie punktem skupienia przedziału P. Mówimy, że liczba $g \in \mathbb{R}$ jest granicą prawostronną funkcji f w punkcie x_0 jeżeli:

(a) (def. Heinego)

dla dowolnego ciągu (x_n), $x_n \in P$, $x_n > x_0$ $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x_0$ ciąg $(f(x_n))$ jest zbieżny do g

(b) (def. Cauchy'ego)

$$\underset{\varepsilon>0}{\forall} \ \underset{\delta>0}{\exists} \ \underset{x\in P}{\forall} \ 0 < x - x_0 < \delta \implies | f(x) - g | < \varepsilon$$

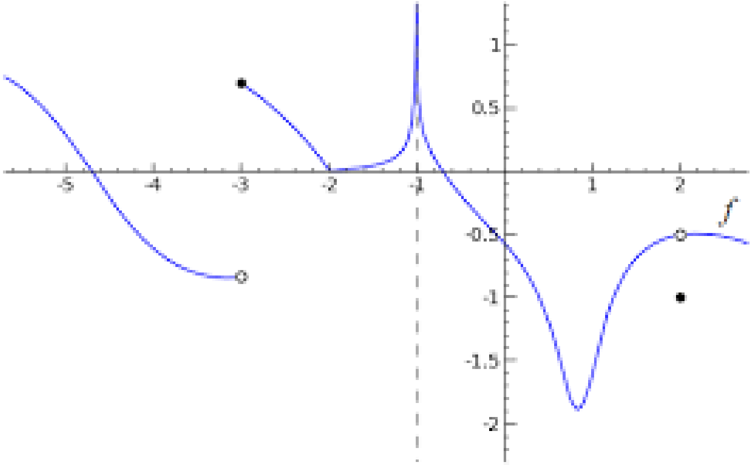
Ten fakt oznaczać będziemy: $g = \lim_{x\to x_0+} f(x)$

Analogicznie definiujemy granicę lewostronną h: w (a) bierzemy ciągi (x_n) takie, że $x_n < x_0$, a w (b) $x \in P$ spełniające warunek $0 < x_0 - x < \delta$.

Oznaczać ją będziemy $h = \lim_{x \to x_0 -} f(x)$ (lub $h = f(x_0 - 0) = f(x_0 -)$). Granice także nazywać będziemy łącznie **jednostronnymi.**

Twierdzenie. *Jeżeli* $\lim_{x \to x_0 +} f(x) = \lim_{x \to x_0 -} f(x)$, *to istnieje granica funkcji f w punkcie x_0 i równa jest wartości tych granic jednostronnych.*

W n i o s e k. Jeżeli $\lim_{x \to x_0 +} f(x) \neq \lim_{x \to x_0 -} f(x)$, to funkcja f nie posiada granicy w punkcie x_0.



Różne granice w $x = -3$, w $x = 2$ granice jednostronne równe (ale granica różna od wartości funkcji)...

Granice na komputerze...

Prezentacja: Skrypt ilustracyjny granic w "Mathematica" - potrzebny darmowy *CDF Player* lub *Mathematica*

Twierdzenie o 3 funkcjach.

Otrzymujemy ważne (analogiczne do granic ciągów):

Twierdzenie. (o trzech funkcjach). *Jeżeli funkcje f i g mają tę samą granicę k w punkcie x_0 oraz istnieje liczba $a > 0$ taka, że*

$$f(x) \leq h(x) \leq g(x)$$

dla $0 <| x - x_0 |< a$, to funkcja h ma granicę w punkcie x_0 i wynosi ona również k.

"Jeżeli obywatel h idzie pomiędzy dwoma policjantami f i g idącymi do komisariatu k, to też tam trafi..."

Działania na granicach.

A teraz kilka działań na granicach:

Twierdzenie. (granica sumy, iloczynu i różnicy). *Jeżeli funkcje f i g mają granice w punkcie x_0, to funkcje $f+g$, $f-g$ oraz $f \cdot g$ mają też granice w tym punkcie i odpowiednio:*

$$\lim_{x \to x_0} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \to x_0} f(x) + \lim_{x \to x_0} g(x)$$

$$\lim_{x \to x_0} (f(x) - g(x)) = \lim_{x \to x_0} f(x) - \lim_{x \to x_0} g(x)$$

$$\lim_{x \to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim_{x \to x_0} g(x)$$

W szczególności dla $f(x) = c = const.$

$$\lim_{x \to x_0} (c \cdot g(x)) = c \cdot \lim_{x \to x_0} g(x) \ .$$

Definicja. Funkcję f określoną w $(x_0 - a, x_0 + a)$, $a > 0$, nazywamy ciągłą w punkcie x_0, gdy istnieje granica funkcji f w tym punkcie i jest równa wartości funkcji $f(x_0)$:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)\ .$$

Twierdzenie. *Niech* $f\ :\ (x_0 - a, x_0 + a) \longrightarrow \mathbb{R}$. *Funkcja* f *jest ciągła w punkcie* x_0, *gdy zachodzi jeden z równoważnych warunków:*

$$\underset{\varepsilon>0}{\forall}\quad \underset{\delta>0}{\exists}\quad \underset{x\in(x_0-a,x_0+a)}{\forall}\qquad |\ x - x_0\ | < \delta \quad \Longrightarrow \quad |\ f(x) - f(x_0)\ | < \varepsilon\ ,$$

$$\underset{(x_n)}{\forall}\ (x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x_0) \quad \Longrightarrow \quad (f(x_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(x_0))\ .$$

Analogicznie, jak dla granic, definicje te nazywa się odpowiednio ciągłością funkcji f *w punkcie* x_0 *w sensie Cauchy'ego oraz w sensie Heinego.*

Przykłady.

$$(1) \qquad f(x) = 1 \ \text{ dla } \ x \neq 0 \ \text{ i } \ f(0) = 0.$$

Zauważmy, że $\lim_{x \to 0} f(x) = 1$ (sprawdzenie tego oczywistego faktu pozostawiamy Czytelnikowi). Niemniej

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = 1 \neq 0 = f(0).$$

Funkcja nie jest ciągła.

(2) Niech $g(x) = \sin \frac{1}{x}$ dla $x \neq 0$, $g(0) = a$. Jak wiemy, nie istnieje granica funkcji g w punkcie $x_0 = 0$. Co więcej dla jakiejkolwiek wartości a nie można uzyskać równości $\lim_{x \to 0} g(x) = a$, a tak można postąpić w przykładzie (1) kładąc wartość funkcji w punkcie 0 jako $f(0) = 1$.

(3) I jeszcze jeden przypadek $h(x) = \frac{1}{x^2}$ dla $x \neq 0$ oraz $h(0) = 0$. Tu $\lim_{x \to 0} h(x) = +\infty$, a więc $\lim_{x \to x_0} h(x) \neq h(0)$.

Rodzaje punktów nieciągłości.

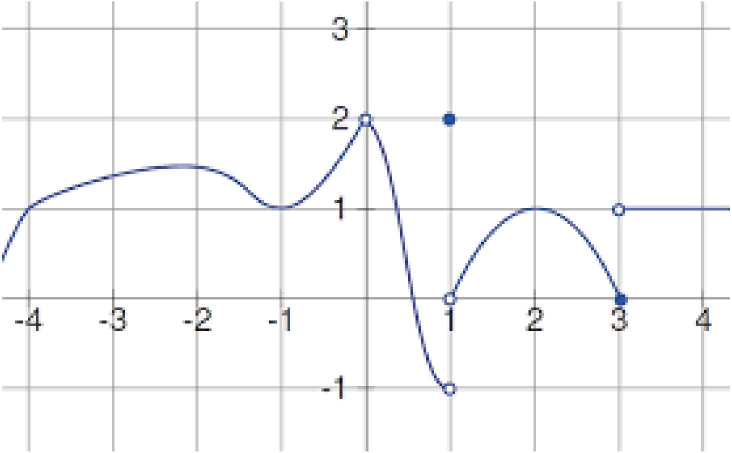
Punkty nieciągłości funkcji f w punkcie x_0 można podzielić na ważne przypadki:

Definicja. Niech $f : (x_0 - a, x_0 + a) \longrightarrow \mathbb{R}$ i niech f będzie nieciągła w punkcie x_0. Mówimy, że:

(1^0) funkcja f ma nieciągłość I rodzaju o ile istnieją granice jednostronne $\lim_{x\to x_0-} f(x)$ i $\lim_{x\to x_0+} f(x)$; jeżeli przy tym istnieje $lim_{x\to x_0} f(x)$ to nieciągłość nazywamy usuwalną, a jeżeli nie - nieusuwalną,

(2^0) funkcja f ma nieciągłość II rodzaju, o ile nie istnieje choć jedna z granic jednostronnych $\lim_{x\to x_0-} f(x)$, $\lim_{x\to x_0+} f(x)$.

Punkty nieciągłości.



Nieciągłości I rodzaju (nieusuwalne) w $x = 1$ i $x = 3$ (usuwalna w $x = 0$).

Funkcja z przykładu (1) ma więc nieciągłość I rodzaju usuwalną, a funkcja $f(x) = \operatorname{sgn} x$ nieciągłość I rodzaju nieusuwalną (tzw. skok). W pozostałych przykładach są nieciągłości II rodzaju.

Zadanie: zbadaj ciągłość i określ typ nieciągłości, o ile funkcje są w pewnych punktach nieciągłe:

(a) $f(x) = [\sin x]$,

(b) $f(x) = x^2 \cdot ([x])^2$,

(c) $f(x) = x^2 \cdot e^{\frac{1}{x}}$.

(uwaga: $[x] = Ent(x)$ to funkcja "entier", czyli część całkowita liczby x)

Badanie nieciągłości za pomocą komputera.

Badanie ciągłości (lub nie) jest akurat jedną z czynności, których komputer (programista) zbyt łatwo nie wykona.

Mamy sporo trudności do pokonania: skrypt ilustracyjny problemu ze sprawdzaniem nieciągłości nawet w "Mathematica" - potrzebny darmowy *CDF Player* lub *Mathematica*

Dla chętnych (trochę przed czasem - bo temat funkcji wielu zmiennych nie mieści się już w programie "Analizy 1"!!): skrypt ilustracyjny pokazujący problem z funkcjami wielu zmiennych - POLECAM!

Własności funkcji ciągłych I.

W związku z własnościami granic mamy oczywiście:

Twierdzenie. (o ciągłości ilorazu) *Jeżeli f i g są ciągłe w punkcie x_0, to funkcje $f+g$, $f-g$, $f \cdot g$ oraz $a \cdot f$ $(a \in \mathbb{R})$ są ciągłe w x_0, a jeżeli ponadto $g(x_0) \neq 0$ to także funkcja $\frac{f}{g}$ jest ciągła w x_0.*

Twierdzenie. (o ciągłości funkcji złożonej) *Niech funkcja g będzie ciągła w punkcie x_0 i niech funkcja f będzie ciągła w punkcie $y_0 = g(x_0)$. Wtedy funkcja złożona $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ jest ciągła w punkcie x_0.*

Twierdzenie. (o ciągłości funkcji odwrotnej) *Załóżmy, że funkcja $f : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ jest ściśle monotoniczna w tym przedziale i ciągła w każdym punkcie tego przedziału oraz niech $m = \inf_{x \in (a,b)} f(x) \leq M = \sup_{x \in (a,b)} f(x)$. Wtedy funkcja odwrotna $f^{-1} : (m,M) \longrightarrow \mathbb{R}$ jest ściśle monotoniczna w (m,M) i ciągła w każdym punkcie przedziału (m,M).*

Ciągłość jednostronna.

Definicja.

(1^0) Funkcję $f : < x_0, x_0 + a) \longrightarrow \mathbb{R}$ $(a > 0)$ nazywamy prawostronnie ciągłą w pukcie x_0, gdy istnieje $\lim_{x \to x_0+} f(x)$ oraz $\lim_{x \to x_0+} f(x) = f(x_0)$.

(2^0) Funkcję $f : (x_0 - a, x_0 > \longrightarrow \mathbb{R}$ $(a > 0)$ nazywamy lewostronnie ciągłą w punkcie x_0, gdy istnieje $\lim_{x \to x_0-} f(x)$ oraz $\lim_{x \to x_0-} f(x) = f(x_0)$.

Asymptoty.

Ważną konsekwencją zastosowania pojęcia granicy funkcji w badaniach jej przebiegu jest możliwość wykorzystania tzw. **asymptot funkcji.**

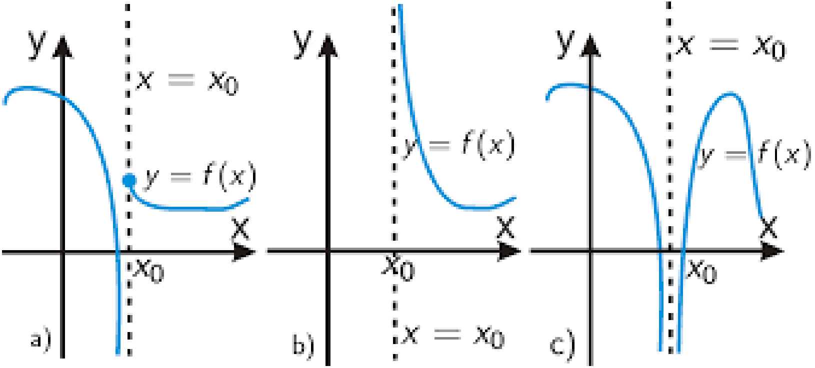
Definicja. Jeżeli funkcja f jest ciągła w przedziale $(x_0-\varepsilon, x_0)$ $[(x_0, x_0+\varepsilon)]$ dla pewnego $\varepsilon > 0$ oraz

$$\lim_{x\to x_0-} \mid f(x) \mid = +\infty$$

to mówimy, że prosta $x = x_0$ jest **prawostronną [lewostronną] asymptotą pionową funkcji** f.

Na ogół nie będziemy precyzować czy prosta $x = x_0$ jest prawo- czy lewostronną asymptotą pionową i jeśli zajdzie choć jeden z tych przypadków, to będziemy po prostu mówić o asymptocie pionowej funkcji f. Oczywiste jest, że funkcja f może mieć wiele asymptot pionowych np. $f(x) = \operatorname{tg} x$ ma nieskończenie wiele asymptot pionowych (obustronnych !).

Asymptoty pionowe.



a) - lewostronna, b) - prawostronna, c) - dwustronna

a) funkcja prawostronnie ciągła w x_0

Asymptoty ukośne.

Definicja. Jeżeli istnieje $M \subset \mathbb{R}$ taka, że f jest ciągła w przedziale $(M, +\infty)$ $[(-\infty, M)]$, oraz istnieje prosta $y = mx + n$ taka, że

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - (mx + n)] = 0 \ ,$$

$$\text{odpowiednio: } [\lim_{x \to -\infty} [f(x) - (mx + n)] = 0]$$

to tę prostą nazywamy **asymptotą ukośną funkcji** f przy $x \to +\infty$ [przy $x \to -\infty$]. W sytuacji, gdy $m = 0$ asymptotę nazywamy czasami poziomą. Jest widoczne, że funkcja może mieć co najwyżej 2 asymptoty ukośne.

Przykład asymptot.

Funkcja $f(x) = |x|$ ma 2 asymptoty ukośne

$$y = x \qquad \text{przy} \quad x \to +\infty \ ,$$

oraz

$$y = -x \qquad \text{przy} \quad x \to -\infty \ ,$$

gdyż

$$\lim_{x \to +\infty} (|x| - x) = \lim_{x \to +\infty} (x - x) = 0 \ ,$$

$$\lim_{x \to -\infty} (|x| - (-x)) = \lim_{x \to -\infty} ((-x) - (-x)) = 0 \ .$$

Wzory na asymptoty ukośne.

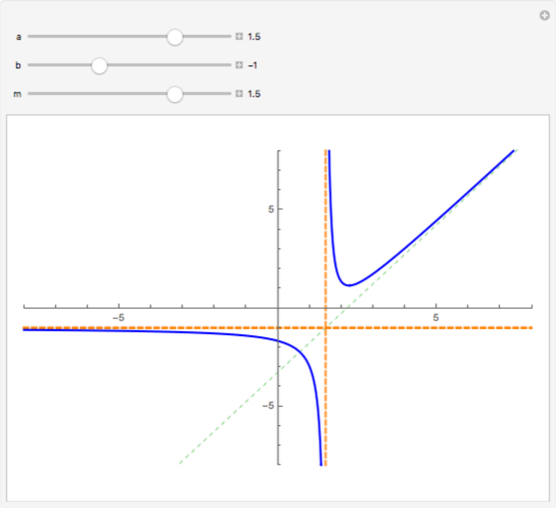
Pozostaje pytanie jak w ogólnym przypadku znaleźć te asymptoty?

Twierdzenie. *Warunkiem koniecznym i wystarczającym na to, aby funkcja $y = mx + n$ była asymptotą ukośną funkcji f dla $x \to +\infty$ $[x \to -\infty]$, jest aby:*

$$m = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} \qquad \textit{oraz} \qquad n = \lim_{x \to +\infty} (f(x) - mx) \ ,$$

$$\textit{odpowiednio:} \left[m = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} \qquad \textit{oraz} \qquad n = \lim_{x \to -\infty} (f(x) - mx) \right] \ .$$

Przykłady asymptot.



Asymptota (pozioma) w $-\infty$ oraz ukośna w $+\infty$.
Jedna asymptota pionowa.

Przykład.

$$f(x) = x + \frac{1}{x} \ , \qquad x \neq 0$$

Funkcja ta jest ciągła w każdym punkcie swojej dziedziny (sprawdzić !). Mamy więc:

$$\lim_{x \to 0-} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to 0+} f(x) = +\infty$$

Czyli prosta $x = 0$ jest (obustronną) asymptotą pionową. Rozpatrujmy prostą $y = mx + n$

$$m = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} (1 + \frac{1}{x^2}) = 1 \ ,$$

$$n = \lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{x} = 0 \ .$$

Stąd $y = x$ jest asymptotą ukośną funkcji f (jedyną).

Zadanie.

Wyznacz asymptoty funkcji:

(a) $f(x) = \dfrac{x^2 - 6x + 3}{x - 3}$,

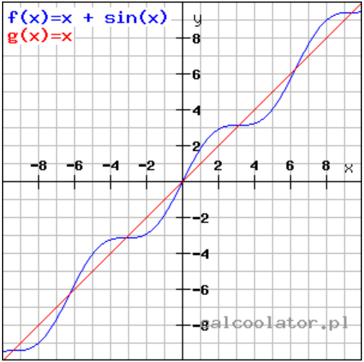
(b) $f(x) = x \cdot \text{arc ctg}\, x$,

(c) $f(x) = \ln(4 - x^2)$.

Prosimy zwrócić uwagę na istnienie OBU współczynników w definicji asympototy ukośnej !!!

Przykład. Dla funkcji $f(x) = x + \sin x$ mamy:
$m = \lim_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 1$

ALE
$n = \lim_{x\to\pm\infty}(f(x) - x) = \lim_{x\to\pm\infty} \sin x$ nie istnieje, a więc funkcja **nie ma** asymptot ukośnych ...



Własności funkcji ciągłych II.

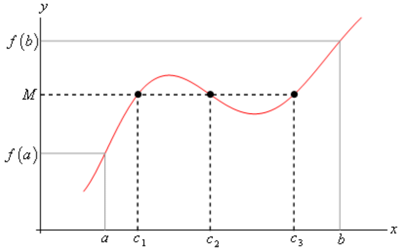
Mówimy, że funkcja f jest ciągła w zbiorze A, jeżeli jest ciągła w każdym punkcie x_0 tego zbioru. Jeżeli przy tym $A =< a, b >$, to w punkcie $x_0 = a$ rozważamy ciągłość prawostronną, a w punkcie $x_0 = b$ - ciągłość lewostronną.

Twierdzenie. *Funkcja ciągła w przedziale domkniętym jest w tym przedziale ograniczona.*

Twierdzenie. *Funkcja ciągła w przedziale domkniętym osiąga w nim swoje kresy.*

Własność Darboux.

Twierdzenie. (własność Darboux) *Jeżeli funkcja f jest określona i ciągła w przedziale $P = < a, b >$ oraz $x_1, x_2 \in P$, $x_1 < x_2$ będą takie, że $y_1 = f(x_1) \neq f(x_2) = y_2$, to funkcja f przyjmuje w przedziale $< x_1, x_2 >$ wszystkie wartości pośrednie między y_1 i y_2.*



https://www.geogebra.org/m/CXEN5xM3

Ciągłość jednostajna.

Zgodnie z definicją ciągłości funkcji f w punkcie x_0, wybór liczby δ może być zależny od ε i od x_0. Jeśli uda się dobrać δ niezależnie od wyboru punktu x_0, to takie funkcje (a nie są to wszystkie funkcje ciągłe) będą miały szczególne własności.

Definicja. Funkcję f określoną w niepustym zbiorze $A \subset \mathbb{R}$ nazywamy **jednostajnie ciągłą**, gdy dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $\delta > 0$ taka, że dla dowolnych $x, x_0 \in A$ spełniających warunek $| x - x_0 | < \delta$, zachodzi nierówność $| f(x) - f(x_0) | < \varepsilon$.

Zestawimy tu powtórnie obie definicje:

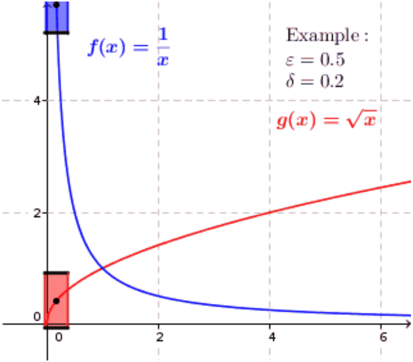
$$\underset{x_0}{\forall} \quad \underset{\varepsilon>0}{\forall} \quad \underset{\delta>0}{\exists} \quad \underset{x\in A}{\forall} \quad | x - x_0 | < \delta \implies | f(x) - f(x_0) | < \varepsilon \ ,$$

$$\underset{\varepsilon>0}{\forall} \quad \underset{\delta>0}{\exists} \quad \underset{x_0\in A}{\forall} \quad \underset{x\in A}{\forall} \quad | x - x_0 | < \delta \implies | f(x) - f(x_0) | < \varepsilon \ .$$

Przykładem funkcji ciągłej jednostajnie na $A = \mathbb{R}$ jest $f(x) = \sin x$, ale np. dla $A = (0, 1)$ funkcja $f(x) = \frac{1}{x}$ nie jest ciągła jednostajnie.

Ta własność jest silniejsza niż ciągłość, ale mamy twierdzenie:

Twierdzenie. *Funkcja ciągła w przedziale domkniętym jest w tym przedziale jednostajnie ciągła.*



W informatyce...

Własność jednostajnej ciągłości wydaje się trudna i zbędna w informatyce, Błąd! **Tylko** takie funkcje są przydatne w obliczeniach! Zauważmy, że obliczając $f(x_0)$ (por. *Funkcje 2.*) wyznaczamy x_0 z pewną dokładnością, powiedzmy δ. Zgodnie z definicją ciągłości wartość $f(x_0)$ wyznaczymy z pewnym błędem ε. Oczekujemy, że w **innych** punktach x błąd **powinien być taki sam**. Ale to - to właśnie jednostajna ciągłość funkcji!!
Błąd oszacowania wartości $f(x)$ jest zależny od błędu oszacowania x, ale jest jednakowy dla wszystkich wartości $x \in A$ tylko dla funkcji jednostajnie ciągłej na A.

Stąd będziemy zwracali uwagą na warunki wystarczające ciągłości jednostajnej. Jeden już był, a drugi pojawi się po wprowadzeniu pochodnych (może już teraz: ograniczona pochodna na A, albo warunek Lipschitz'a). To często "ukryte" założenie algorytmów obliczania wartości funkcji...

Korzystając zaś z definicji Heinego i znanych już twierdzeń dla ciągów liczbowych można (oprócz powyższego) udowodnić kolejne twierdzenia.

Twierdzenie. *Jeżeli* $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$ *i funkcja* g *jest ograniczona w pewnym zbiorze* $(x_0 - a, x_0) \cup (x_0, x_0 + a)$ *(dla pewnego* $a > 0$*) to* $\lim_{x\to x_0} f(x) \cdot g(x) = 0$*.*

Twierdzenie. (o granicy ilorazu). *Jeżeli funkcje* f *i* g *mają granice w punkcie* x_0 *i* $\lim_{x\to x_0} g(x) \neq 0$*, to funkcja* $\frac{f}{g}$ *ma też granicę w punkcie* x_0 *oraz*

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to x_0} f(x)}{\lim_{x\to x_0} g(x)} \ .$$

Bisekcja.

A tu już coś korzystającego z własności funkcji - na początek **ciągłość.**

To prosta (czyżby?) metoda znajdowania przybliżonego rozwiązania równania.

Weźmy równanie (dla ułatwienia jest to wielomian o współczynnikach całkowitych):

$$W(x) = x^5 - 8x^4 + x + 11.$$

Na początek jest łatwo: wiemy (dzięki matematyce!), że mamy od 1 do 5 rozwiązań rzeczywistych (można wykonać wykres, o ile potrafimy...).

Obliczamy kilka wartości w różnych punktach (zastanowić się jak je wybierać). Np. $W(-2) = -151 < 0$, $W(0) = 11 > 0$, $W(2) = -83 < 0$, $W(10) = ... > 0$. Zlokalizowaliśmy co najmniej 3 rozwiązania (a ile ich jest?).

Bisekcja - c.d.

Teraz stosujemy znany algorytm bisekcji, **ALE ...**

1. Ile jest rozwiązań?
2. Czy na pewno w przedziałach $[-2, 0]$, $[0, 2]$ i $[2, 10]$ mamy rozwiązanie i jest ono **jedyne**?
3. Czy (i jak?) można oszacować błąd przybliżenia?
4. O ile przyjmiemy zakładaną dokładność przez ε, to co się stanie z algorytmem, gdy $|x_1 - x_2| < \varepsilon$ (x_1, x_2 - rozwiązania)?

Dobre? No to

$$\sin \frac{2\pi}{x} = 0 \qquad x \in \left[\frac{1}{10000000}, 1\right]$$

i powodzenia... Problemem jest też powolna zbieżność metody...

Pomoże matematyka (i analiza matematyczna)...

Bisekcja - problemy.

Aby stosować ten algorytm musimy kontrolować własności funkcji f w równaniu $f(x) = 0$ w $< a, b >$. Zakładamy $f(a) \cdot f(b) < 0$. (jak zawsze - istnienie i jedyność)

(1) musi **istnieć** rozwiązanie w tym przedziale (dzięki ciągłości możemy mieć własność Darboux, a to jest warunkiem wystarczającym),

(2) aby wyznaczyć rozwiązanie musimy wyizolować **jedyne** rozwiązanie w pewnym podprzedziale (tu mogą pomóc inne własności jak moduł ciągłości, albo - o czym później - własności pochodnej...),

(3) metoda nie gwarantuje znalezienia wszystkich rozwiązań.

... ale nawet wtedy algorytm nie musi być skuteczny (uwaga na przybliżenia...). Proponuję przeczytać: [K] str. 24-25 i może **sprawdzić** tamte informacje?

Błędy...

Proces aproksymacji to ważny punkt analizy matematycznej. Obliczanie przez komputer wyrażenia z zadaną dokładnością nie jest banalne gdy obliczamy wartości rzeczywiste x. Przecież już w punkcie wyjścia mamy wartość przybliżoną (np. przekątna kwadratu o boku 1 ...). Przykłady ograniczania błędów (f - "trudna", g - "łatwa" obliczeniowo):

$$f(x) = x \cdot \sin x \text{ oraz } g(x) = x^2$$

mają "bliskie" wartości dla x w otoczeniu zera

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{x} \text{ oraz } g(x) = x$$

mają "bliskie" wartości dla "dostatecznie" dużych x.

A jak rola analizy matematycznej? Koniec z cudzysłowami, skorzystamy z **granic i asymptot** (symbole o "małe" i O "duże").

Definicja. Niech funkcja f będzie określona dla takich x, że $0 <| x - x_0 |< a$ przy pewnym $a > 0$. Mówimy, że funkcja f ma w punkcie x_0 **granicę niewłaściwą** $+\infty$, gdy dla dowolnej liczby $M > 0$ istnieje taka $\delta > 0$, że jeśli $0 <| x - x_0 |< \delta$, to $f(x) > M$.

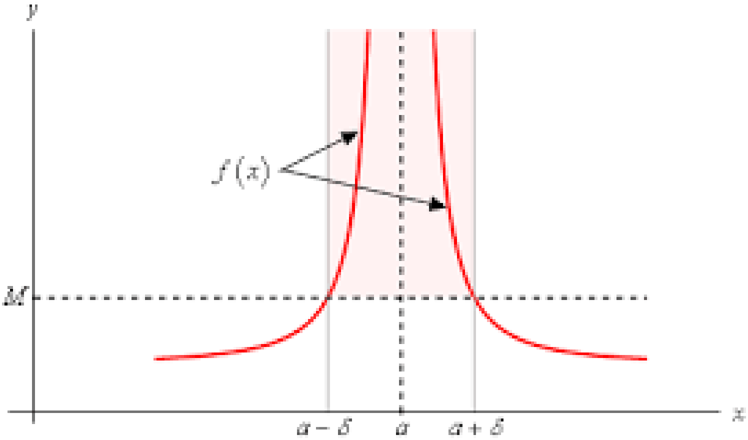
Fakt ten zapisujemy $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$.

$$\underset{M>0}{\forall} \quad \underset{\delta>0}{\exists} \quad 0 <| x - x_0 |< \delta \quad \Longrightarrow \quad f(x) > M \ .$$

Analogicznie: funkcja f ma w punkcie x_0 **granicę niewłaściwą** $-\infty$, gdy

$$\underset{M>0}{\forall} \quad \underset{\delta>0}{\exists} \quad 0 <| x - x_0 |< \delta \quad \Longrightarrow \quad f(x) < -M$$

Granica niewłaściwa.



Granice w nieskończoności.

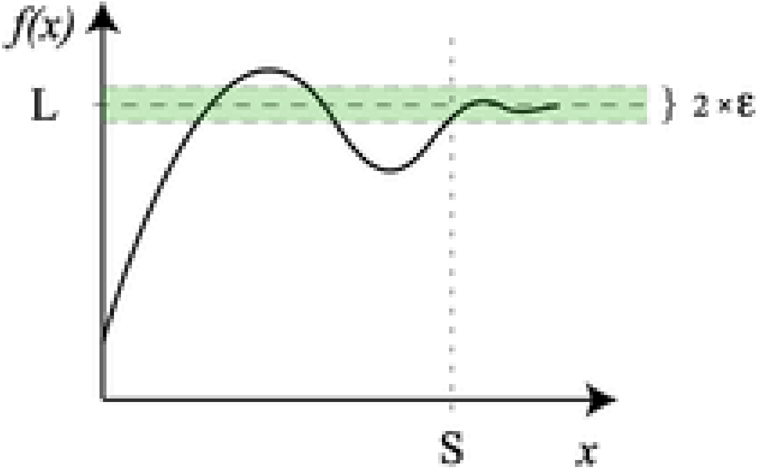
Definicja. Niech funkcja f będzie przy pewnym $a > 0$ określona w przedziale $< a, \infty)$. Liczbę $g \in \mathbb{R}$ nazywamy **granicą funkcji** f **przy** x **dążącym do** $+\infty$ (co zapiszemy $g = \lim_{x\to+\infty} f(x)$ lub $f(x) \longrightarrow g$ dla $x \to +\infty$) gdy dla dowolnej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje taka liczba $A > 0$, że jeśli $x > A$, to $| f(x) - g |< \varepsilon$

$$\underset{\varepsilon>0}{\forall} \quad \underset{A>a}{\exists} \quad \underset{x\in<a,\infty)}{\forall} \quad x > A \quad \Longrightarrow \quad | f(x) - g |< \varepsilon \ .$$

Analogicznie dla funkcji f określonej w $(-\infty, a >$ liczbę g nazwiemy **granicą funkcji** f **przy** x **dążącym do** $-\infty$ ($g = \lim_{x\to-\infty} f(x)$ lub $f(x) \to g$ przy $x \to -\infty$), gdy

$$\underset{\varepsilon>0}{\forall} \quad \underset{A>0}{\exists} \quad \underset{x\in(-\infty,a>}{\forall} \quad x < -A \quad \Longrightarrow \quad | f(x) - g |< \varepsilon \ .$$

Granica w nieskończoności.



Funkcje asymptotycznie niewiększe.

Prawie przy każdej okazji przedstawiania algorytmu podany będzie np. rząd jego złożoności obliczeniowej: "O" duże = symbol Landau'a, np. sortowanie o złożoności $O(n \log n)$, co posłuży do oceny i porównywania algorytmów. Alternatywą są nierówności pomiędzy ciągami dowodzone poprzez indukcję matematyczną...

Funkcja asymptotycznie niewiększa od funkcji $g(n)$ to taka funkcja $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, dla której istnieją $c > 0$ i $n_0 \in \mathbb{N}$, że $|f(n)| \leq c \cdot |g(n)|$ dla (prawie) wszystkich $n \geq n_0$.

Podstawowym zastosowaniem notacji asymptotycznej **w informatyce** jest szacowanie długości działania programów, w szczególności procedur rekurencyjnych, których złożoność łatwo opisać równaniem rekurencyjnym.

Patrz też notacje: "duże Theta" $\Theta(n)$ i "duże Omega $\Omega(n)$" (ich warunki wystarczające w języku granic ciągów)...

Czasowa złożoność obliczeniowa.

Oznacza to, że $|f(n)| \leq c \cdot |g(n)|$ zachodzi dla (prawie wszystkich) liczb naturalnych n, czyli po prostu (warunek wystarczający)

$$\lim_{n \to \infty} \frac{f(n)}{g(n)} < \infty$$

lub nawet niekiedy warunek stosowany ogólniej:

$$\limsup_{n \to \infty} \frac{f(n)}{g(n)} < \infty.$$

Zbiór funkcji asymptotycznie nie większych niż $g(n)$ oznaczamy przez $O(g(n))$. Przykładowe zastosowanie w informatyce: **twierdzenie o rekursji uniwersalnej** (szacowanie długości działania programu wraz ze wzrostem ilości danych - oczywiście asymptotyczne oszacowanie).

http://th-www.if.uj.edu.pl/∼erichter/dydaktyka/Dydaktyka2013/TPI-2013/TPI-wyklad-3-2013-newTempl.pdf

Funkcje asymptotycznie podobne (równe).

Jeżeli $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 1 < \infty$, to funkcje są asymptotycznie równe (czyli $f(n) \sim g(n)$). Studenci matematyki uczą się np. wzoru Stirliga

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

(o liczbie e powiemy oczywiście na wykładzie...), a w informatyce (kryptografia) np. przybliżenie na ilość liczb pierwszych nie większych niż n

$$\pi(n) \sim \frac{n}{ln\ n}.$$

Możliwe zastosowanie wzoru Stirlinga dla **informatyków**: np. oszacowanie liczby cyfr rozwinięcia dziesiętnego liczby 999!.

Funkcje asymptotycznie mniejsze.

Kolejny szczególnie ciekawy przypadek:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0,$$

czyli symbol "o" małe..., czyli istnieje n_0, takie, że dla dowolnego $c > 0$ nierówność $|f(n)| < c \cdot |g(n)|$ zachodzi dla wszystkich liczb naturalnych $n \geq n_0$.

W **informatyce** - np. przydatne w badaniach złożoności obliczeniowej, jak w twierdzeniach o hierarchii czasowej i pamięciowej czy w szacowaniu reszty we wzorze Taylora = błędu lub w badaniach złożoności czasowej algorytmów (np. istotny wynik: dla każdego k mamy $\log_2 n = o(n^k)$ - algorytm przeszukiwania połówkowego), patrz też - później - tw. Stolza i reguła de l'Hôspitala....

Poza tym dzięki twierdzeniu: jeżeli $f(n) = o(g(n))$, to $f(n) = O(g(n))$, pojęcie będzie przydatne bezpośrednio.

Symbole Landaua.

Zależności algebraiczne O, o, Ω, ω, Θ.

zapis .... warunek wystarczający

$$f(x) \in O(g(x)) \ : \ \lim_{x\to\infty} \left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| < \infty$$

$$f(x) \in o(g(x)) \ : \ \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

$$f(x) \in \Omega(g(x)) \ : \ \lim_{x\to\infty} \left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| > 0$$

$$f(x) \in \omega(g(x)) \ : \ \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$$

$$f(x) \in \Theta(g(x)) \ : \ 0 < \lim_{x\to\infty} \left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| < \infty$$

$f(x) \in O(1)$ – funkcja $f(x)$ jest ograniczona,

$f(x) \in O(\log n)$ – funkcja $f(x)$ jest ograniczona przez funkcję logarytmiczną,

$f(x) \in O(n)$ – funkcja $f(x)$ jest ograniczona przez funkcję liniową,

$f(x) \in O(n \log n)$ - w informatyce, funkcja $f(x)$ jest ograniczona przez funkcję quasi-liniową,

$f(x) \in O(n!)$ – funkcja $f(x)$ jest ograniczona przez silnię.

Zastosowanie: badanie złożoności obliczeniowej algorytmów. Najczęstszym zastosowaniem asymptotycznego tempa wzrostu jest szacowanie złożoności problemów obliczeniowych, w szczególności algorytmów. Oszacowanie rzędów złożoności obliczeniowej funkcji pozwala na porównywanie ilości zasobów (np. czasu, pamięci), jakich wymagają do rozwiązania problemu opisanego określoną ilością danych wejściowych. W dużym uproszczeniu: im niższy rząd złożoności obliczeniowej algorytmu, tym będzie on wydajniejszy przy coraz większym rozmiarze problemu (np. ilości danych).

Tajne/poufne.

- Własność Darboux: rozpatrz 2 przypadki (funkcje ciągłe i pochodne funkcji). Uzasadnij konieczność jej wykoerzystania w metodzie bisekcji. Podaj inny przykład, gdy w algorytmie numerycznym korzystamy z tej własności.
- W oszacowaniach złożoności algorytmów występuje symbol Landaua "o małe" (funkcje asymptotycznie mniejsze): $f(n) = o(g(n))$. W praktyce oczywiście funkcje $f(n)$ i $g(n)$ są rozbieżne do niekończoności , więc korzystnie jest rozszerzyć funkcje f i g jako zdefiniowane na $\mathbb{R}$ i wykorzystać regułę de l'Hôspitala. **Podaj ją i sprawdź, że** dla dowolnego $\alpha > 0$ $f(n) = \log_2(n) = o(n^\alpha)$.
- Wiemy, że funkcja $f(x)$ jest rzędu $o(x^2)$ przy $x \to 0$. Wybierz, które z funkcji podanych poniżej spełniają taki warunek - **wykonaj obliczenia**:

  [a] $f_1(x) = x^3$,
  [b] $f_2(x) = 274x^2$,
  [c] $f_3(x) = 2x^{\frac{3}{2}}$,
  [d] $f_4(x) = (\sin x)^2$.

- Obliczając za pomocą komputera wartość pewnej funkcji $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ w punkcie $x_0 \in [a, b]$ popełnimy na ogół błąd polegający na konieczności wykonania obliczeń przez komputer na liczbach rzeczywistych.
  Oznaczmy przez $\varepsilon > 0$ akceptowalną dokładność obliczeń wartości funkcji f, a przez $\delta > 0$ możliwą dokładność wyznaczania wartości liczby rzeczywistej x_0. Jaka własność funkcji f pozwala, przy ustalonym $\varepsilon > 0$ na uzyskanie **wspólnej dla wszystkich punktów** x_0 wielkości $\delta > 0$?
  Jaka klasa funkcji ciągłych f to zapewnia i podaj 2 przypadki (twierdzenia), pozwalające zbadać zachodzenie tej własności.
- Oblicz, czy $2^{n+1} = O(2^n)$? A czy $2^{2n} = O(2^n)$? (wsk. : symbole Landaua "O duże")