Wstęp do rachunku prawdopodobieństwa
12. Łańcuchy Markowa. Macierz przejścia.

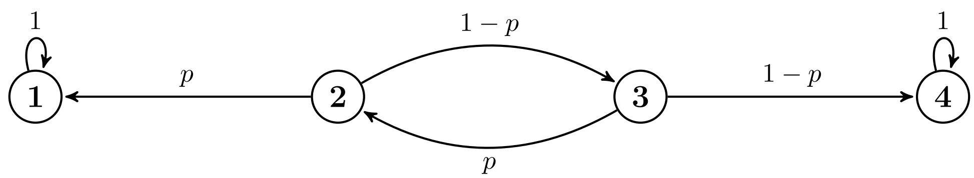
Zadanie 1. *(***Problem Ruiny Gracza***) Macierz przejścia łańcucha Markowa dana jest wzorem*

$$\Pi = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ p & 0 & 1-p & 0 \\ 0 & p & 0 & 1-p \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

dla pewnego $p \in (0,1)$.

(a) *Dla każdego $t \geqslant 2$ wylicz $p_{14}^{(t)}$ i znajdź $\lim_{t\to\infty} p_{14}^{(t)}$.*

Zaczniemy od narysowania grafu skierowanego, który pomoże nam dostrzec, jakie są zależności między stanami.



Patrząc na ten graf widzimy, że ze stanu 1 przechodzimy do stanu 1 z prawdopodobieństwem 1. Nie ma natomiast żadnej ścieżki pomiędzy stanem 1, a stanem 4. Zatem dla każdego $t \geqslant 2$ otrzymujemy:

$$p_{14}^{(t)} = 0,$$

oraz

$$\lim_{t\to\infty} p_{14}^{(t)} = 0.$$

(b) *Dla każdego $t \geqslant 2$ wylicz $p_{24}^{(t)}$ i znajdź $\lim_{t\to\infty} p_{24}^{(t)}$.*

Zauważmy najpierw, że z narysowanego grafu wynika, że jeżeli w którymkolwiek momencie znajdziemy się w stanie 1 lub 4, to już w tym stanie pozostaniemy. Zastanówmy się, jakie są szanse na to, że zaczynając w stanie 2 po t krokach będziemy w stanie 4:

- $p_{24}^{(1)} = 0$, bo nie ma bezpośredniego połączenia między stanami 2 i 4,
- $p_{24}^{(2)} = (1-p)^2$, bo musimy najpierw przejść ze stanu 2 do stanu 3, a potem ze stanu 3 do stanu 4,
- $p_{24}^{(3)} = (1-p)^2 \cdot 1 = (1-p)^2$, bo musimy najpierw przejść ze stanu 2 do stanu 3, potem ze stanu 3 do stanu 4 i w nim pozostać,
- $p_{24}^{(4)} = (1-p)^2 \cdot 1 + (1-p)\cdot p \cdot (1-p)\cdot(1-p) = (1-p)^2(1+p(1-p))$, bo możemy albo przejść od razu ze stanu 2 do stanu 4 przez stan 3, albo przejść z 2 do 3, wrócić do 2 i ponownie przejść do 3, a stąd do 4,
- $p_{24}^{(5)} = (1-p)^2(1+p(1-p))$, bo dalej mamy do wyboru tylko te opcje, które były wymienione w poprzednim podpunkcie,
- $p_{24}^{(6)} = (1-p)^2 + (1-p)\cdot p\cdot(1-p)^2 + ((1-p)\cdot p))^2\,(1-p)^2 = (1-p)^2\left(1 + p(1-p) + (p(1-p))^2\right)$, bo możemy od razu przejść do stanu numer 4 lub przejść do 3, wrócić do 2 i przejść do 4 lub dwa razy odwiedzić 3 wracając do 2 zanim przejdziemy do 4.

Kontynuując te rozważania zauważamy, że prawdopodobieństwo przejścia ze stanu numer 2 do stanu numer 4 w t krokach zależy tylko od tego, ile razy możemy wykonać „pętlę” $2-3-2$ zanim przejdziemy do stanu numer 4, w którym już pozostajemy. Zatem dla każdego $k \geqslant 1$ otrzymujemy:

$$p_{24}^{(2k)} = p_{24}^{(2k+1)} = (1-p)^2\left(1 + p(1-p) + \ldots + (p(1-p))^{k-1}\right) = (1-p)^2 \cdot \frac{1-(p(1-p))^k}{1-p(1-p)}.$$

Zatem:

$$\lim_{t\to\infty} p_{24}^{(t)} = \lim_{t\to\infty} (1-p)^2 \cdot \frac{1-(p(1-p))^{\lfloor t/2\rfloor}}{1-p(1-p)} = (1-p)^2 \cdot \frac{1}{1-p(1-p)} = \frac{(1-p)^2}{1-p(1-p)}.$$

Zadanie 2. *Macierz przejścia pewnego łańcucha Markowa dana jest wzorem:*

$$\Pi = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

(a) *Wiedząc, że* $\bar{\rho}^0 = \left(0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)$, *wyznacz* $\bar{\rho}^1$ *oraz* $\bar{\rho}^2$*.*

Przypomnijmy, że $\bar{\rho}^{t+1} = \bar{\rho}^t\Pi$. Zatem chcąc obliczyć $\bar{\rho}^1$ oraz $\bar{\rho}^2$ wystarczy wykonać mnożenia odpowiednich wektorów przez macierz przejścia Π:

$$\bar{\rho}^1 = \bar{\rho}^0\Pi = \left(0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right) \cdot \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 0\right),$$

$$\bar{\rho}^2 = \bar{\rho}^1\Pi = \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 0\right) \cdot \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \left(0, \frac{5}{12}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}\right).$$

(b) *Oblicz* $\Pi^{(2)} = \Pi^2$ *i na tej podstawie znajdź* $\bar{\rho}^2$ *nie obliczając* $\bar{\rho}^1$*.*

Skorzystamy teraz ze wzoru: $\bar{\rho}^{t+1} = \bar{\rho}^0\Pi^{(t+1)} = \bar{\rho}^0\Pi^{t+1}$. W tym celu obliczymy najpierw Π^2:

$$\Pi^2 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \end{bmatrix}.$$

Stąd otrzymujemy:

$$\bar{\rho}^2 = \bar{\rho}^0\Pi^2 = \left(0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right) \cdot \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \end{bmatrix} = \left(0, \frac{5}{12}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}\right).$$

Zadanie 3. *W pierwszym kapeluszu są 3 kule białe, a w drugim 3 kule czarne. W n–tym doświadczeniu losujemy po jednej kuli z obu kapeluszy i zamieniamy je miejscami. Niech X_n będzie liczbą białych kul w pierwszym kapeluszu po n doświadczeniach. Wyznacz macierz przejścia dla łańcucha Markowa $(X_n)_{n=0}^{\infty}$.*

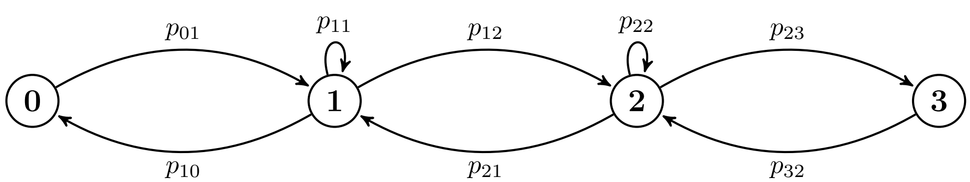
Zauważmy najpierw, że skoro łącznie mamy 3 białe kule, to zmienne losowe X_n mogą przyjmować tylko cztery wartości: $0, 1, 2$ i 3. Zatem zbiór stanów łańcucha liczy cztery elementy $S = \{0, 1, 2, 3\}$, a macierz przejścia ma wymiary 4×4. Bez straty ogólności przyjmiemy, że kolejne wiersze/kolumny tej macierzy indeksowane są po kolei stanami $0, 1, 2, 3$. Musimy teraz obliczyć, ile wynoszą prawdopodobieństwa przejść pomiędzy poszczególnymi stanami. W tym celu ustalimy najpierw, jak wygląda skład kapeluszy odpowiadający różnym stanom:

- stan 0: 0 białych kul w pierwszym kapeluszu (3 białe kule w drugim kapeluszu),
- stan 1: 1 biała i 2 czarne kule w pierwszym kapeluszu (1 czarna i 2 białe kule w drugim kapeluszu),
- stan 2: 2 białe i 1 czarna kula w pierwszym kapeluszu (2 czarne i 1 biała kula w drugim kapeluszu),
- stan 3: 3 białe kule w pierwszym kapeluszu (3 czarne kule w drugim kapeluszu).

Zauważmy, że w pojedyńczym losowaniu liczba białych kul w pierwszym kapeluszu może zmienić się o jeden – w sytuacji, gdy wylosujemy kule różnych kolorów, lub pozostać bez zmian – w sytuacji, gdy obie wylosowane kule mają ten sam kolor. Ponadto mamy tutaj pewnego rodzaju symetrię. Jeśli zamiast pytać o liczbę białych kul w pierwszym kapeluszu, zapytamy o liczbę białych kul w drugim kapeluszu, to widzimy, że otrzymujemy dokładnie ten sam eksperyment, z tym że w tej sytuacji stan 0 będzie odpowiadał stanowi 3, a stan 1 – stanowi 2. W związku z tym dla każdych $i, j \in \{0, 1, 2, 3\}$ mamy:

$$p_{ij} = p_{(3-i)(3-j)}.$$

Zilustrujemy teraz możliwe przejścia między stanami za pomocą grafu skierowanego.



Na powyższym grafie narysowano strzałki tylko między tymi stanami, dla których prawdopodobieństwo przejścia jest niezerowe. Zatem pozostaje nam do wyznaczenia prawdopodobieństwo przejścia w 8 przypadkach, które dzięki symetrii redukują się do 4 przypadków. Zacznijmy przykładowo od p_{01}. Jeśli jesteśmy w stanie 0 to oznacza, że w pierwszym kapeluszu mamy tylko czarne kule, a w drugim tylko białe. Zatem z prawdopodobieństwem 1 po jednym kroku wymienimy jedną kulę czarną na białą i przejdziemy do stanu 1. Z kolei żeby pozostać w stanie pierwszym musimy z obu kapeluszy wylosować kule tego samego koloru. Zatem:

$$p_{11} = \mathbb{P}\left(X_1 = 1 | X_0 = 1\right) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{9}.$$

W podobny sposób obliczamy pozostałe prawdopodobieństwa przejścia:

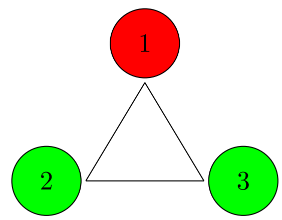
- $p_{01} = p_{32} = \mathbb{P}\left(X_1 = 1 | X_0 = 0\right) = 1$,
- $p_{10} = p_{23} = \mathbb{P}\left(X_1 = 0 | X_0 = 1\right) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$,
- $p_{12} = p_{21} = \mathbb{P}\left(X_1 = 2 | X_0 = 1\right) = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$,
- $p_{11} = p_{22} = \mathbb{P}\left(X_1 = 1 | X_0 = 1\right) = \frac{4}{9}$,

Otrzymaliśmy następującą macierz przejścia, gdzie wiersze i kolumny indeksowane są stanami, czyli kolejne wiersze od góry do dołu odpowiadają po kolei stanom $\{0, 1, 2, 3\}$:

$$\Pi = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{9} & \frac{4}{9} & \frac{4}{9} & 0 \\ 0 & \frac{4}{9} & \frac{4}{9} & \frac{1}{9} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Zadanie 4. *Na wierzchołkach trójkąta siedzą 3 robaczki. Robaczki co sekundę mogą przybierać kolor czerwony lub zielony. Polega to na tym, że jeśli robaczek widzi, że oba pozostałe robaczki mają ten sam kolor, to w następnej sekundzie przybierze ich kolor, jeżeli zaś ich kolory są różne, to w następnej sekundzie robaczek z prawdopodobieństwem 1/2 będzie zielony, a z prawdopodobieństwem 1/2 – czerwony. Na początku jeden robaczek jest czerwony, a dwa zielone. Zbuduj łańcuch Markowa odpowiadający temu procesowi i podaj jego macierz przejścia, przy założeniu, że:*

(a) *ważne jest dla nas dokładne rozłożenie kolorów robaczków na trójkącie, z uwzględnieniem numerów wierzchołków;*



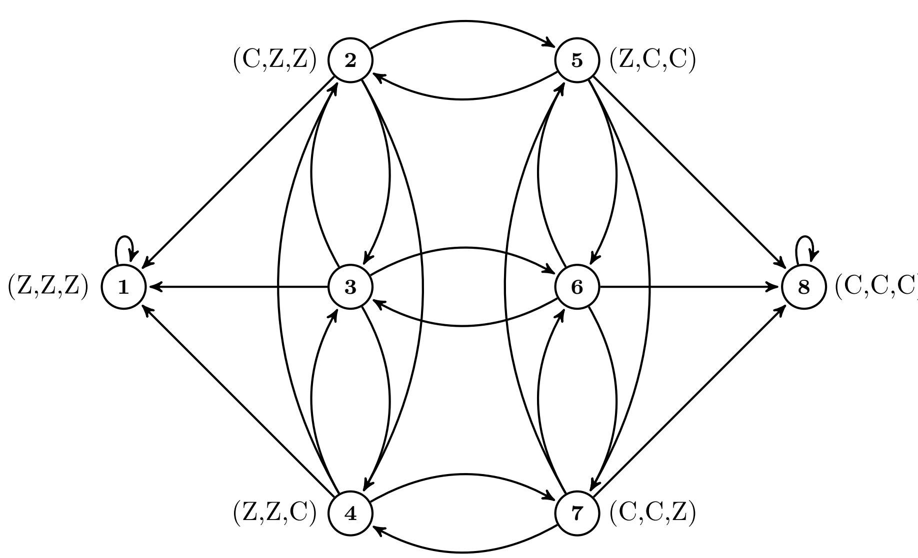
Powyższy rysunek pomocniczy pokazuje sytuację początkową, którą możemy zapisać w postaci wektora: (C, Z, Z) – każda z pozycji odpowiada ustalonemu wierzchołkowi trójkąta. Pozostałe możliwe stany (przy założeniu, że ważne jest dla nas dokładne rozłożenie robaczków na trójkącie) wyglądają następująco:

$$(Z, Z, Z), (Z, C, Z), (Z, Z, C), (Z, C, C), (C, Z, C), (C, C, Z), (C, C, C).$$

Zmienne losowe X_n tworzące łańcuch Markowa mają nas informować o możliwych konfiguracjach, więc możemy zdefiniować ich wartości w następujący sposób:

Konfiguracja	(Z, Z, Z)	(C, Z, Z)	(Z, C, Z)	(Z, Z, C)	(Z, C, C)	(C, Z, C)	(C, C, Z)	(C, C, C)
Stan	1	2	3	4	5	6	7	8

Narysujmy teraz pomocniczy graf skierowany, na którym zaznaczymy możliwe przejścia między stanami. Zwróćmy uwagę, że możemy od razu wykluczyć niektóre przejścia. Na przykład ze stanów (C, C, C) oraz (Z, Z, Z) nie da się nigdzie przejść, bo obie te sytuacje oznaczają, że wszystkie robaczki mają ten sam kolor, czyli nie będę już go zmieniać. Podobnie, jeśli dokładnie dwa z trzech robaczków w którymś momencie mają ten sam kolor, np. pierwszy i drugi robaczek mają kolor zielony, a trzeci ma kolor czerwony, to w kolejnej sekundzie trzeci z robaczków musi zmienić kolor na przeciwny, czyli robaczek numer trzy po sekundzie na pewno będzie miał kolor zielony.



Na rysunku zaznaczono tylko te przejścia, które mają niezerowe prawdopodobieństwo. Musimy teraz policzyć prawdopodobieństwa wyszczególnionych przejść pomiędzy stanami. Zauważmy, że w tym zadaniu po raz kolejny mamy do czynienia z symetrią, bo jeśli zamienimy miejscami C z Z, to dostaniemy dokładnie ten sam eksperyment.

Rozważymy kilka przypadków. Zauważyliśmy już, że zgodnie z treścią zadania, jeśli wszystkie robaczki mają ten sam kolor, to żaden z nich już nie będzie go zmieniał, zatem $p_{11} = p_{88} = 1$.

Zastanówmy się teraz jakie są szanse na to, że przejdziemy do jednego ze stanów jednokolorowych. Rozważmy przykładowo prawdopodobieństwo p_{21}. Oznacza to, że jesteśmy w takim stanie, jaki jest narysowany na pierwszym rysunku pomocniczym, a więc zgodnie z treścią zadania pierwszy robaczek na pewno zmienia kolor na zielony, a dwa pozostałe robaczki mają $\frac{1}{2}$ szans na pozostanie w tym samym kolorze. Zatem:

$$p_{21} = 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

W podobny sposób ustalamy, że $p_{31} = p_{41} = p_{58} = p_{68} = p_{78} = \frac{1}{4}$.

Teraz zajmiemy się przypadkami, gdy liczba robaczków w danym kolorze się nie zmienia. Obliczmy przykładowo p_{23}. Pierwszy robaczek na pewno zmienia kolor, drugi zmienia kolor z prawdopodobieństwem $\frac{1}{2}$, a trzeci nie zmienia koloru też z prawdopodobieństwem $\frac{1}{2}$, a więc

$$p_{23} = 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

Analogicznie: $p_{24} = p_{32} = p_{34} = p_{42} = p_{43} = p_{56} = p_{57} = p_{65} = p_{67} = p_{75} = p_{76} = \frac{1}{4}$.

Pozostają nam do rozpatrzenia przypadki, gdy zmienia się liczba robaczków w danym kolorze, ale nie przechodzimy do stanu jednokolorowego. Rozważmy przykładowo p_{25}. Pierwszy robaczek na pewno zmienia kolor, a pozostałe dwa zmieniają kolor z prawdopodobieństwem $\frac{1}{2}$, więc

$$p_{25} = 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

Podobnie: $p_{36} = p_{47} = p_{52} = p_{63} = p_{74} = \frac{1}{4}$.

Otrzymujemy zatem poniższą macierz przejścia:

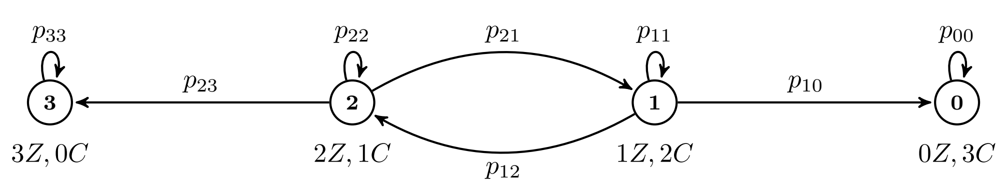
$$\Pi_a = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(b) *ważna jest dla nas jedynie liczba robaczków w każdym z kolorów;*

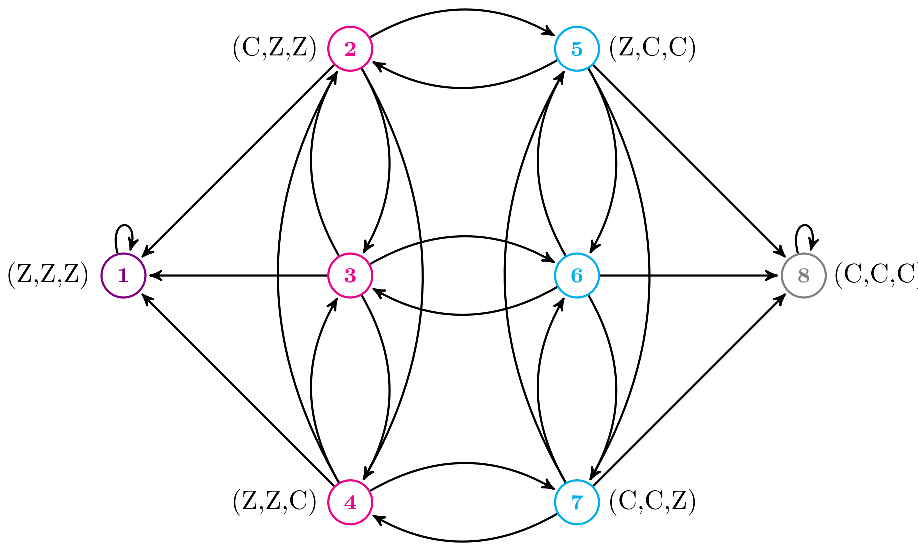
W tym przypadku mamy jedynie cztery możliwe stany: 3 zielone robaczki, 2 zielone i 1 czerwony robaczek, 1 zielony i 2 czerwone robaczki oraz 3 czerwone robaczki. Zatem zmienne losowe X_n możemy zdefiniować w następujący sposób:

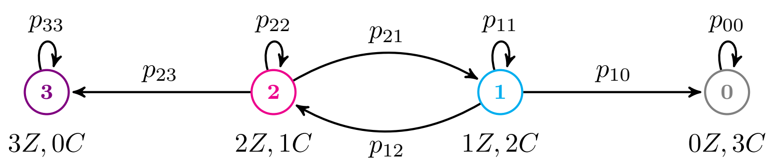
$$X_n = \begin{cases} 3, & \text{jeśli po n sekundach mamy 3 zielone i 0 czerwonych robaczków,} \\ 2, & \text{jeśli po n sekundach mamy 2 zielone i 1 czerwonego robaczka,} \\ 1, & \text{jeśli po n sekundach mamy 1 zielonego i 2 czerwone robaczki,} \\ 0, & \text{jeśli po n sekundach mamy 0 zielonych i 3 czerwone robaczki.} \end{cases}$$

Tym razem pomocniczy graf skierowany wygląda następująco:



Zauważmy, że możemy „skompresować” łańcuch z podpunktu (a) do łańcucha z podpunktu (b) poprzez identyfikację odpowiednich stanów.





To znaczy, identyfikujemy stany w następujący sposób (stany po lewej dotyczą łańcucha z podpunktu (a), a stany po prawej łańcucha z podpunktu (b)):

- $1 \Longrightarrow 3$
- $2, 3, 4 \Longrightarrow 2$
- $5, 6, 7 \Longrightarrow 1$
- $8 \Longrightarrow 0$

Oznaczając przez $\tilde{p}_{ij}$ prawdopodobieństwa przejść w (b) otrzymamy wówczas:

- $\tilde{p}_{33} = p_{11} = 1 = p_{88} = \tilde{p}_{00}$,
- $\tilde{p}_{23} = p_{21} = p_{31} = p_{41} = 1/4 = p_{58} = p_{68} = p_{78} = \tilde{p}_{10}$,
- $\tilde{p}_{22} = p_{23} + p_{24} = p_{32} + p_{34} = p_{42} + p_{43} = 1/4 + 1/4 = 1/2 = p_{56} + p_{57} = p_{67} + p_{65} = p_{75} + p_{76} = \tilde{p}_{11}$,
- $\tilde{p}_{21} = p_{25} = p_{36} = p_{47} = 1/4 = p_{52} = p_{63} = p_{74} = \tilde{p}_{12}$.

Zatem ostatecznie macierz przejścia ma postać:

$$\Pi_b = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

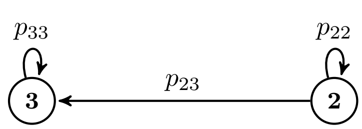
gdzie wiersze (od góry do dołu) indeksowane są przez stany numer 0, 1, 2 i 3.

c) *ważna jest dla nas jedynie maksymalna liczba robaczków w tym samym kolorze.*

Maksymalna liczba robaczków w tym samym kolorze to 2 lub 3. Mamy zatem tylko dwa stany, a zmienne losowe X_n możemy zdefiniować w następujący sposób:

$$X_n = \begin{cases} 3, & \text{jeśli po n sekundach mamy 3 robaczki w tym samym kolorze,} \\ 2, & \text{jeśli po n sekundach mamy 2 robaczki w jednym kolorze i jednego w drugim kolorze.} \end{cases}$$

Również w tym przypadku narysujemy graf skierowany.



Podobnie jak w poprzednich przypadkach możemy zauważyć, że ten łańcuch powstaje poprzez „skompresowanie" łańcucha z podpunktu (b). Tym razem stany 0 i 3 z (b) kompresują się do stanu 3 (wszystkie robaczki w tym samym kolorze), a stany 1 i 2 z (b) do stanu 2. Jeśli oznaczymy przez $\hat{p}_{ij}$ prawdopodobieństwa przejść w tym łańcuchu, to:

- $\hat{p}_{33} = \tilde{p}_{00} = \tilde{p}_{33} = 1$,
- $\hat{p}_{23} = \tilde{p}_{23} = \tilde{p}_{10} = 1/4$,
- $\hat{p}_{22} = 1 - \bar{p}_{23} = 1 - 1/4 = 3/4$.

Zatem ostatecznie macierz przejścia ma postać:

$$\Pi_c = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix},$$

gdzie wiersze (od góry do dołu) indeksowane są przez stan numer 3 i stan numer 2.

Znajdź rozkład stacjonarny dla przypadku (c) i zgadnij jakie są rozkłady stacjonarne w przypadkach (a) i (b). Czy we wszystkich tych przypadkach istnieje dokładnie jeden rozkład stacjonarny?

Przypomnijmy, że zgodnie z definicją rozkład stacjonarny $\bar{\pi} = (x, 1-x)$ to rozkład spełniający równanie $\bar{\pi}\Pi_c = \bar{\pi}$. Zauważmy, że

$$(x, 1-x) \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix} = \left(x + \frac{1}{4}(1-x), \frac{3}{4}(1-x) \right).$$

Otrzymujemy zatem następujący układ równań:

$$\begin{cases} x + \frac{1}{4}(1-x) = x, \\ \frac{3}{4}(1-x) = (1-x). \end{cases}$$

Jedynym rozwiązaniem tego układu jest $x = 1$, czyli jedyny rozkład stacjonarny tego łańcucha Markowa to

$$\bar{\pi} = (1, 0).$$

Nie powinno nas to dziwić, ponieważ powyższy rozkład przyjmuje wartość 1 w stanie numer 3 i 0 w przeciwnym przypadku, a stan numer 3 jest stanem pochłaniającym rozważanego łańcucha.

Musimy jeszcze zgadnąć, jak wyglądają rozkłady stacjonarne w podpunktach (a) i (b). Wiemy, że w obu podpunktach mamy po dwa stany pochłaniające (odpowiednio stany 1 i 8 w (a) oraz 0 i 3 w (b)). To oznacza, że w podpunkcie (a) rozkładami stacjonarnymi są rozkłady

$$(1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0) \quad \text{oraz} \quad (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1),$$

a także każda ich kombinacja wypukła, czyli wektor postaci

$$(p, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1-p),$$

dla dowolnego $p \in (0, 1)$.

Podobnie w podpunkcie (b) rozkładami stacjonarnymi są rozkłady równe 1 na stanach pochłaniających, czyli

$$(1, 0, 0, 0) \quad \text{oraz} \quad (0, 0, 0, 1),$$

a także każda ich kombinacja wypukła, czyli wektor postaci

$$\bar{\pi} = (p, 0, 0, 1-p),$$

gdzie $p \in (0, 1)$.

Zadanie 5. *Przypuśćmy, że w poprzednim zadaniu robaczki zachowują się inaczej, tzn. gdy robaczek widzi, że pozostałe robaczki są w tym samym kolorze, zmienia swój kolor na tenże z prawdopodobieństwem 2/3, a z prawdopodobieństwem 1/3 przyjmuje kolor odmienny. Znajdź trzy macierze przejścia odpowiadające punktom (a), (b) i (c), a w przypadku (c) oblicz rozkład stacjonarny.*

Zauważmy, że zbiór stanów w każdym przypadku się nie zmienił, ale prawdopodobieństwa przejść są inne. W szczególności okazuje się, że w każdym z trzech podpunktów możemy z niezerowym prawdopodobieństwem przejść z jednego stanu do dowolnego innego stanu w jednym kroku. W każdym podpunkcie rozważymy szczegółowo tylko kilka przypadków i podamy ostateczną postać macierzy przejścia.

Zacznijmy od podpunktu (a), czyli zakładamy, że ważne jest dla nas dokładne rozłożenie kolorów robaczków na trójkącie, z uwzględnieniem numerów wierzchołków. Policzmy najpierw prawdopodobieństwo, że pozostaniemy w stanie jednokolorowym. Mamy:

$$p_{11} = p_{88} = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{8}{27},$$

bo każdy robaczek widzi dwa robaczki w tym samym kolorze, a więc z prawdopodobieństwem $\frac{2}{3}$ nie zmieni swojego koloru.

Może się też jednak zdarzyć, że gdy zaczynamy od trzech robaczków zielonych, dwa z nich nie zmienią koloru (co dzieje się z prawdopodobieństwem $\frac{2}{3}$), a trzeci zmieni kolor z prawdopodobieństwem $\frac{1}{3}$. Zatem

$$p_{12} = p_{13} = p_{14} = p_{85} = p_{86} = p_{87} = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{27}.$$

Rozważmy jeszcze przypadek, gdy zaczynamy od stanu (C, Z, Z), a chcemy przejść do stanu (C, C, C). Wtedy pierwszy robaczek nie może zmienić koloru (co dzieje się z prawdopodobieństwem $\frac{1}{3}$), a dwa pozostałe robaczki zmieniają kolor (każdy z prawdopodobieństwem $\frac{1}{2}$). Zatem

$$p_{28} = p_{38} = p_{48} = p_{51} = p_{61} = p_{71} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{12}.$$

Podobnie obliczamy pozostałe prawdopodobieństwa przejścia, otrzymując ostatecznie następującą macierz przejścia:

$$\Pi_a = \begin{bmatrix} \frac{8}{27} & \frac{4}{27} & \frac{4}{27} & \frac{4}{27} & \frac{2}{27} & \frac{2}{27} & \frac{2}{27} & \frac{1}{27} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{12} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{12} & \frac{1}{6} & \frac{1}{12} & \frac{1}{6} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \frac{1}{6} & \frac{1}{12} \\ \frac{1}{12} & \frac{1}{6} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \frac{1}{6} & \frac{1}{12} & \frac{1}{6} & \frac{1}{12} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{12} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{27} & \frac{2}{27} & \frac{2}{27} & \frac{2}{27} & \frac{4}{27} & \frac{4}{27} & \frac{4}{27} & \frac{8}{27} \end{bmatrix}.$$

Przejdźmy teraz do podpunktu (b), czyli załóżmy, że ważna jest dla nas jedynie liczba robaczków w każdym z kolorów. Niestety nie możemy tutaj zastosować kompresji jaką zrobiliśmy w poprzednim zadaniu, ponieważ zmienia nam się łańcuch i tak na przykład z dodatnim prawdopodobieństwem możemy przejść ze stanu 2 do każdego ze stanów 5, 6, 7, ale wartości tych prawdopodobieństw są różne, zatem utożsamienie ze sobą 5, 6 i 7 nie miałoby sensu.

Policzmy zatem kilka prawdopodobieństw przejść. Zacznijmy od rozważenia przypadku, gdy zaczynamy od 3 zielonych robaczków, a kończymy na dwóch zielonych robaczkach i jednym czerwonym. Innymi słowy, dokładnie jeden robaczek zmienia kolor. Zatem

$$\tilde{p}_{32} = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot 3 = \frac{12}{27} = \frac{4}{9}.$$

Rozważmy następnie przypadek gdy zaczynamy od dwóch zielonych robaczków i jednego czerwonego, a kończymy na dwóch czerwonych robaczkach i jednym zielonym. Dzieje się tak w dwóch przypadkach: albo tylko jeden z dwóch zielonych robaczków zmienia kolor, a czerwony pozostaje bez zmian, albo wszystkie robaczki zmieniają kolor. Zatem

$$\tilde{p}_{21} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}.$$

Podobnie obliczamy pozostałe prawdopodobieństwa przejścia, zauważając, że dzięki symetrii mamy

$$\tilde{p}_{ij} = \tilde{p}_{(3-i)(3-j)}.$$

Ostatecznie otrzymujemy następującą macierz przejścia:

$$\Pi_b = \begin{bmatrix} \frac{8}{27} & \frac{12}{27} & \frac{6}{27} & \frac{1}{27} \\ \frac{1}{6} & \frac{5}{12} & \frac{4}{12} & \frac{1}{12} \\ \frac{1}{12} & \frac{4}{12} & \frac{5}{12} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{27} & \frac{6}{27} & \frac{12}{27} & \frac{8}{27} \end{bmatrix}$$

Pozostaje nam do rozpatrzenia przypadek (c). Załóżmy najpierw, że zaczynamy od stanu 3 i chcemy w nim pozostać. Dzieje się tak w dwóch przypadkach: gdy wszystkie robaczki nie zmieniają koloru lub gdy wszystkie robaczki zmieniają kolor. Zatem

$$\hat{p}_{33} = \left(\frac{2}{3}\right)^3 + \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{9}{27} = \frac{1}{3}.$$

Ponadto, $\hat{p}_{32} = 1 - \hat{p}_{33} = \frac{2}{3}$.

Wyznaczymy teraz prawdopodobieństwo przejścia ze stanu 2 do stanu 3. Żeby tak się stało, albo dwa jednokolorowe robaczki muszą zmienić kolor, a trzeci nie, albo dwa jednokolorowe robaczki nie zmieniają koloru, a trzeci robaczek go zmienia. Zatem

$$\hat{p}_{23} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}.$$

Ponadto, $\hat{p}_{22} = 1 - \hat{p}_{23} = \frac{3}{4}$. Ostatecznie macierz przejścia wygląda w następujący sposób:

$$\Pi_c = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}.$$

Pozostaje do wyznaczenia rozkład stacjonarny $\bar{\pi} = (x, 1-x)$ dla łańcucha zadanego macierzą Π_c. W tym celu zauważmy najpierw, że

$$(x, 1-x) \cdot \Pi_c = \left(\frac{1}{3}x + \frac{1}{4}(1-x), \frac{2}{3}x + \frac{3}{4}(1-x)\right).$$

Otrzymujemy następujący układ równań:

$$\begin{cases} \frac{1}{3}x + \frac{1}{4}(1-x) = x \\ \frac{2}{3}x + \frac{3}{4}(1-x) = 1-x, \end{cases}$$

którego rozwiązaniem jest $x = \frac{3}{11}$. Zatem jedynym rozkładem stacjonarny w tym przypadku jest wektor $(\frac{3}{11}, \frac{8}{11})$.