

Logika i teoria mnogości

Kolokwium zaliczeniowe 2

Zadanie 1. (6p.) Dane są zbiory $X = \{2, 3, 4, 5\}$ i $Y = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ i relacje $R \subset X \times Y, S \subset Y \times X$ zdefiniowane następująco
 $R = \{ \langle x, y \rangle \in X \times Y : x|y \}, S = \{ \langle x, y \rangle \in Y \times X : x|y \}.$
Wyznaczyć relacje $R \circ S, S \circ R, R \cap S, S \setminus R.$

Zadanie 2. (10p.) Za pomocą (Ext) stosując prawa logiki i definicje działań na zbiorach wykazać:

$$\left(\bigcup_{i \in I} A_i \setminus \bigcup_{i \in I} B_i \right)' = \left(\bigcap_{i \in I} A_i' \right) \cup \left(\bigcup_{i \in I} B_i \right)$$

Równoważności ponumerować i poniżej zapisać wykorzystane w kolejnych krokach prawa lub definicje.

Zadanie 3. (7p.) Sprawdzić, czy relacja $R = \{ \langle x, y \rangle \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : xy > 0 \}$ jest
a) zwrotna, b) przeciwzwrotna, c) symetryczna, d) przeciwsymetryczna,
e) antysymetryczna, f) przechodnia, g) słabo spójna. Odpowiedzi uzasadnić.

Zadanie 4. (6p.) Za pomocą (Ext) stosując prawa logiki i definicje działań na zbiorach wykazać:

$$(A \cap B) \setminus (A \setminus C) = (A \cap B) \cap C$$

Równoważności ponumerować i poniżej zapisać wykorzystane w kolejnych krokach prawa lub definicje.

Zadanie 5. (5p.) Sporządzić diagram Hassego zbioru
 $X = \{ \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{b, d\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}, \{a, b, c, d\} \}$
częściowo uporządkowanego przez relację inkluzji. Wskazać elementy: największy, najmniejszy, maksymalny, minimalny w X .

Zadanie 6. (10p.) W zbiorze X dana jest relacja R . Zbadać, czy ta relacja jest relacją równoważności. Odpowiedzi uzasadnić. Jeśli dana relacja jest relacją równoważności, to wyznaczyć klasy abstrakcji tej relacji.

- a) X - zbiór mieszkańców Polski, $R = \{ \langle x, y \rangle : x \text{ jest przodkiem } y \},$
- b) X - zbiór punktów na płaszczyźnie,
 $R = \{ \langle x, y \rangle : \text{odległość punktu } x \text{ od początku układu współrzędnych}$
 $\text{jest równa odległości punktu } y \text{ od początku układu} \}.$

Zadanie 7. (6p.) Dana jest funkcja: $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2}, & \text{gdy } x \neq 0 \\ -4, & \text{gdy } x = 0 \end{cases}$

Wyznaczyć obrazy zbiorów: $A = \langle 0, 10 \rangle$ i $B = (-\infty, 1)$ oraz przeciwobrazy zbiorów: $C = \{0, 1, 2\}$ i $D = (-1, 1).$

Pod każdym rozwiązaniem należy się podpisać i zdjęcie/scan pracy (pionowo!) przekazać przez Zadania (MS Teams)