Algebra liniowa i geometria

– INFORMATYKA –

Większość zadań w niniejszym skrypcie pochodzi z materiałów przygotowanych przez dra K. Górnisiewicza.

Teorię oraz część zadań opracowano na podstawie następujących książek:

- G. Banaszak, W. Gajda, *Elementy algebry liniowej cz. I*, Wydawnictwo Naukowo-Techniczne, Warszawa 2002.
- G. Banaszak, W. Gajda, *Elementy algebry liniowej cz. II*, Wydawnictwo Naukowo-Techniczne, Warszawa 2002.

Spis treści

1 Ciało liczb zespolonych $\mathbb{C}$

1.1 Wprowadzenie teoretyczne

Liczbą zespoloną nazywamy parę uporządkowaną liczb rzeczywistych

$$z = (a, b)\,.$$

Często taką parę zapisujemy w **postaci kanonicznej**:

$$z = a + bi,$$

gdzie $i^2 = -1$.

- a nazywamy **częścią rzeczywistą** liczby zespolonej z, oznaczamy $\operatorname{Re} z$,
- b nazywamy **częścią urojoną** liczby zespolonej z, oznaczamy $\operatorname{Im} z$.

Liczbą przeciwną do liczby z jest liczba

$$-z = -a - bi,$$

natomiast **sprzężeniem** liczby z jest liczba

$$\bar{z} = a - bi.$$

Moduł liczby zespolonej:

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Dwie liczby zespolone są równe, gdy ich części rzeczywiste są sobie równe oraz ich części urojone są sobie równe.

1.1.1 Działania na liczbach zespolonych

Niech $z = a + bi, z' = c + di$ będą liczbami zespolonymi.

- Dodawanie, odejmowanie:

$$z \pm z' = (a + bi) \pm (c + di) = (a \pm c) + (b \pm d)\, i.$$

- Mnożenie:

$$z \cdot z' = (a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)\, i.$$

- Dzielenie:

$$\frac{z}{z'} = \frac{a + bi}{c + di} = \frac{a + bi}{c + di} \cdot \frac{c - di}{c - di} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2} i = \frac{ac + bd}{|z'|^2} + \frac{bc - ad}{|z'|^2} i$$

1.1.2 Postać trygonometryczna liczby zespolonej

Liczbę zespoloną:

$$z = a + bi$$

możemy przedstawić w **postaci trygonometrycznej**:

$$z = |z|\, (\cos\phi + i \sin\phi)\,,$$

gdzie ϕ nazywamy **argumentem** liczby z, oznaczamy $\arg z$.

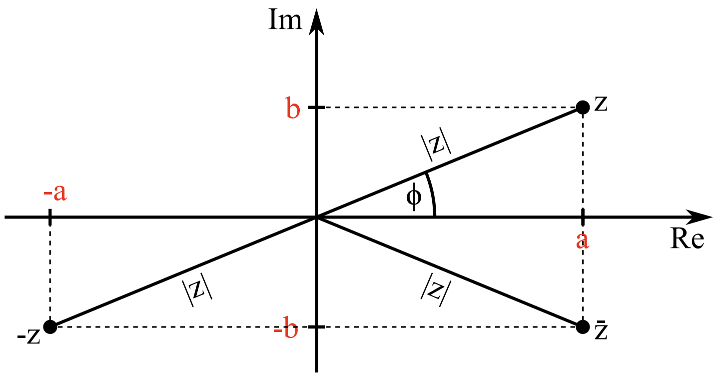
Zauważmy, że:

$$\cos\phi = \frac{a}{|z|},$$

$$\sin\phi = \frac{b}{|z|}.$$

Zauważmy również, że taka postać daje nam zapis jednoznaczny z dokładnością do 2π. Żeby uzyskać jednoznaczność zapisu, wprowadzimy pojęcie **argumentu głównego** liczby zespolonej z. Argument główny oznaczać będziemy $\operatorname{Arg} z$, $\operatorname{Arg} z \in [0, 2\pi)$.

$$\arg z = \operatorname{Arg} z + 2k\pi, \text{ dla } k \in \mathbb{Z}.$$



Rysunek 1. Interpretacja geometryczna

Własności 1.1. *Niech z, z_1, z_2 będą liczbami zespolonymi:*

1. $\operatorname{Re}(z_1 \pm z_2) = \operatorname{Re} z_1 \pm \operatorname{Re} z_2$,

2. $\operatorname{Im}(z_1 \pm z_2) = \operatorname{Im} z_1 \pm \operatorname{Im} z_2$,

3. $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$,

4. $|\frac{z_1}{z_2}| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$,

5. $z \cdot \bar{z} = |z|^2$

6. $\overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2$,

7. $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$,

8. $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$,

9. $z \in \mathbb{R} \iff \bar{z} = z$,

10. $\arg(z_1 \cdot z_2) = \arg z_1 + \arg z_2$,

11. $\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg z_1 - \arg z_2$.

Postać trygonometryczna ułatwia nam mnożenie i dzielenie liczb zespolonych:

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1||z_2| \left(\cos(\phi_1 + \phi_2) + i \sin(\phi_1 + \phi_2)\right), \tag{1.1}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} \left(\cos(\phi_1 - \phi_2) + i \sin(\phi_1 - \phi_2)\right), \text{ dla } z_2 \neq 0. \tag{1.2}$$

Twierdzenie 1.1 (wzór Moivre'a)**.** *Niech $z = |z|(\cos\phi + i \sin\phi)$. Wówczas dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$, mamy:*

$$z^n = |z|^n (\cos n\phi + i \sin n\phi)$$

Twierdzenie 1.2. *Niech $z = |z|(\cos\phi + i \sin\phi)$. Wówczas dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$, istnieje dokładnie n różnych pierwiastków stopnia n z liczby zespolonej z, tzn. rozwiązań równania $\omega^n = z$, które dane są wzorami:*

$$\omega_k = \sqrt[n]{|z|} \left(\cos\frac{\phi + 2k\pi}{n} + i \sin\frac{\phi + 2k\pi}{n}\right), \text{ gdzie } k = 0, 1, \ldots n-1.$$

1.2 Zadania

Zadanie 1.1. Znaleźć część rzeczywistą i urojoną oraz obliczyć moduł i sprzężenie liczb zespolonych:

a. $(5-3i)(1+i)$

b. $(2-4i)(2-i)$

c. $\frac{1-i}{1+i}$

d. $\frac{3i+4}{i}$

e. $\frac{(\sqrt{3}-i)(-1+i\sqrt{3})}{(1+i)^2}$

f. $\frac{(1+i)^2+i}{(1-i)^2-i}$

g. $(2+i)^3$

h. $\sqrt{i}$

i. $\sqrt{8-6i}$

Zadanie 1.2. Zaznaczyć na płaszczyźnie zbiory punktów, które spełniają poniższe warunki:

a. $A = \{z \in \mathbb{C}: \ |z| = 1\}$

b. $B = \{z \in \mathbb{C}: \ 1 < |z| \leq 5\}$

c. $C = \{z \in \mathbb{C}: \ |z-3+2i| = 2\}$

d. $D = \left\{z \in \mathbb{C}: \ |\frac{z-3}{z-1}| = 1\right\}$

e. $E = \left\{z \in \mathbb{C}: \ |\frac{4i-3}{3i-z}| > 5\right\}$

f. $F = \left\{z \in \mathbb{C}: \ \operatorname{Arg} z = \frac{\pi}{4}, \ \operatorname{Im} z < 3\right\}$

g. $G = \{z \in \mathbb{C}: \ z\bar{z} \leq 9, \ \operatorname{Re} z > 2\}$

Zadanie 1.3. Przedstawić w postaci trygonometrycznej:

a. 1

b. i

c. -1

d. $-i$

e. $\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$

f. $\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$

g. $-1 + i\sqrt{3}$

h. $-1-i$

i. $\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$

Zadanie 1.4. Wyznaczyć moduł i argument liczby zespolonej:

$$z = \frac{1-i}{1+i}$$

oraz obliczyć:

$$z^{23}.$$

Zadanie 1.5. Obliczyć:

a. $\left(-1+i\sqrt{3}\right)^{2014} : (1-i)^{4024}$

b. $\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{50} \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right)^{136}$

c. $(2-2i)^{1320}$

Zadanie 1.6. Obliczyć wszystkie pierwiastki zespolone stopnia 4 i 6 z 1.

Zadanie 1.7. Rozwiąż niżej podane równania w ciele liczb zespolonych:

a. $\frac{\operatorname{Re} z}{2+3i} + \frac{\operatorname{Im} z}{3-2i} = 1$

b. $z^2 + z + 1 = 0$

c. $3z + (1-i)\,\bar{z} = 2+3i$

d. $\frac{\operatorname{Re} z + iz}{(i-2)\operatorname{Im} z + 2} = i$

e. $z^3 - 3iz^2 + 4z = 0$

f. $z^4 - 1 = 0$

g. $z^2 + 5\bar{z} = 0$

*** Zadanie 1.8.** Wyprowadzić wzory:

a. $\sin(2\alpha)$ — wskazówka: wzór Moivre'a

b. $\cos(2\alpha)$ — wskazówka: wzór Moivre'a

c. $\sin(\alpha+\beta)$

d. $\cos(\alpha+\beta)$

2 Podstawowe struktury algebraiczne

2.1 Wprowadzenie teoretyczne

Definicja 2.1. **Działaniem wewnętrznym** (w skrócie będziemy mówić **działaniem**) w zbiorze X nazywać będziemy każdą funkcję $X \times X \to X$.

Definicja 2.2. Niech F i A będą niepustymi zbiorami. Dowolne odwzorowanie $\circ: \ F \times A \to A$ nazywamy **działaniem zewnętrznym** w zbiorze A ze zbiorem operatorów F.

Definicja 2.3. **Grupą** nazywamy zbiór G z działaniem $\cdot: \ G \times G \to G$, dla którego spełnione są następujące warunki:

G1. Dla dowolnych $a, b, c \in G: \ (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$. (**łączność**)

G2. Istnieje element $e \in G$ (nazywany **elementem neutralnym** grupy) taki, że:

$$\text{dla każdego } a \in G: \ e \cdot a = a \cdot e = a.$$

G3. Dla każdego $a \in G$ istnieje element $b \in G$ (nazywany **elementem odwrotnym** do a) taki, że:

$$a \cdot b = b \cdot a = e.$$

Definicja 2.4. **Grupą przemienną** (lub **abelową**) nazywamy zbiór G z działaniem $\cdot: \ G \times G \to G$, spełniającym warunki ***G**1.—**G**3.* z powyższej definicji oraz warunek:

G4. dla dowolnych $a, b \in G: \ a \cdot b = b \cdot a$.

Fakt 2.1. *Niech G będzie grupą.*

1. *Element neutralny grupy G jest tylko jeden.*

2. *Dla każdego elementu $a \in G$ element odwrotny b do elementu a jest jednoznacznie określony, oznaczamy go symbolem a^{-1}.*

3. *Dla każdego $a \in G$ mamy:*

$$\left(a^{-1}\right)^{-1} = a.$$

4. *Dla dowolnych $a, b \in G$ zachodzi równość:*

$$(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}.$$

Często dla uproszczenia zapisu element neutralny dla mnożenia $(\cdot)$ będziemy oznaczać poprzez 1, natomiast dla dodawania $(+)$ poprzez 0.

Definicja 2.5. **Pierścieniem** nazywamy zbiór R z dwoma działaniami: z dodawaniem $+: \ R \times R \to R$ i z mnożeniem $\cdot: \ R \times R \to R$, dla których są spełnione następujące warunki:

P1. $(R, +)$ jest grupą abelową.

P2. Dla dowolnych $a, b, c \in R: \ (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ (łączność mnożenia).

P3. Dla dowolnych $a, b, c \in R:$

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$
$$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$$

(rozdzielność mnożenia względem dodawania).

Jeśli ponadto $R \neq \{0\}$ oraz istnieje element neutralny mnożenia $e \in R$ taki, że:

$$\text{dla każdego } a \in R: \ a \cdot e = e \cdot a = a,$$

to mówimy, że R jest **pierścieniem z jedynką**.
Jeśli mnożenie w pierścieniu R jest przemienne, tzn.:

$$\text{dla każdego } a, b \in R: \ a \cdot b = b \cdot a,$$

to mówimy, że R jest **pierścieniem przemiennym**.

Definicja 2.6. **Ciałem** nazywamy niepusty zbiór K (posiadający co najmniej dwa elementy) wraz z działaniami $+: \ K \times K \to K$ oraz $\cdot: \ K \times K \to K$ takimi, że:

C1. $(K, +, \cdot)$ jest pierścieniem przemiennym z jedynką.

C2. Zbiór $K^{\times} = K \setminus \{0\}$ z mnożeniem jest grupą.

Definicja 2.7. Niech $(A, +_A)$ oraz $(B, +_B)$ będą grupami. Mówimy, że odwzorowanie $f: \ A \to B$ jest homomorfizmem grup, gdy dla każdego $a, b \in A$:

$$f(a +_A b) = f(a) +_B f(b).$$

Niech teraz $(A, +_A, \cdot_A)$ oraz $(B, +_B, \cdot_B)$ będą pierścieniami. Mówimy, że odwzorowanie $f: \ A \to B$ jest homomorfizmem pierścieni, gdy dla każdego $a, b \in A$:

$$f(a +_A b) = f(a) +_B f(b)$$
$$f(a \cdot_A b) = f(a) \cdot_B f(b)$$

Warto zauważyć, że w przypadku, gdy:

1. $(A, +_A)$ oraz $(B, +_B)$ są grupami i $f: \ A \to B$ jest homomorfizmem grup, to:

$$f(0_A) = 0_B.$$

2. $(A, +_A, \cdot_A)$ oraz $(B, +_B, \cdot_B)$ są dowolnymi pierścieniami i $f: \ A \to B$ jest homomorfizmem pierścieni, to:

$$f(0_A) = 0_B.$$

3. $(A, +_A, \cdot_A)$ oraz $(B, +_B, \cdot_B)$ są dowolnymi pierścieniami z jedynką i $f: \ A \to B$ jest homomorfizmem tych pierścieni, to:

$$f(0_A) = 0_B,$$
$$f(1_A) = 1_B$$

Jądrem homomorfizmu $f: \ A \to B$, jest zbiór:

$$\operatorname{Ker} f = \{a \in A: \ f(a) = 0_B\}.$$

Obrazem homomorfizmu $f: \ A \to B$ jest zbiór:

$$\operatorname{Im} f = \{b \in B, \ \exists a \in A: \ f(a) = b\}.$$

2.2 Zadania

Zadanie 2.9. Ile różnych działań można określić na zbiorze:

a. 2-elementowym?

b. 3-elementowym?

c. n–elementowym?

Zadanie 2.10. Czy:

a. dodawanie liczb,

b. mnożenie liczb

jest działaniem wewnętrznym w zbiorze $\{0, 1, 2\}$, $\{-1, 0, 1\}$?

Zadanie 2.11. W którym zbiorze: $\mathbb{N}$, $\{-1, 0, 1\}$, $\{0, 1\}$, $\{0\}$ wzór:

a. $a \star b = a^2 + b^2$

b. $a \star b = a - b$

określa działanie (wewnętrzne)?

Zadanie 2.12. Określ czy zbiór $(A, \star)$ jest grupą, grupą abelową:

a. $a \star b = a^2 + b - 1$, $a, b \in A$, gdzie $A = \mathbb{Z}$.

b. $a \star b = \frac{a+b}{2}$, $a, b \in A$, gdzie $A = \mathbb{Q}$.

c. $a \star b = a + b + ab$, $a, b \in A$, gdzie $A = (-1, \infty)$.

d. $a \star b = a + b + ab$, $a, b \in A$, gdzie $A = [-1, \infty)$.

e. $a \star b = a + b - 5$, $a, b \in A$, gdzie $A = \mathbb{Z}$.

f. $a \star b = 5^{\log_5 a + \log_5 b}$, $a, b \in A$, gdzie $A = \mathbb{R}^+$.

g. $a \star b = 3^{\log_3 a \log_3 b}$, $a, b \in A$, gdzie $A = \mathbb{R}^+$.

h. $(a_1, a_2) \star (b_1, b_2) = (a_1 b_1, a_1 b_2 + a_2 b_1)$,
$(a_1, a_2), (b_1, b_2) \in A$, gdzie $A = (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}$.

Zadanie 2.13. Które z następujących zbiorów są ciałami ze zwykłymi działaniami dodawania i mnożenia liczb: $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\{-1, 0, 1\}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $[0, \infty)$?

Zadanie 2.14. Stwórz tabelkę działania w $\mathbb{Z}_n$ dla działań $\cdot_n$, $+_n$ dla $n = 2, 3, 4, 5$. Określ jakie to struktury algebraiczne.

Zadanie 2.15. Wykonaj następujące działania:

a. $-\frac{1}{4} + 2$ w ciele $\mathbb{Z}_5$,

b. $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5}$ w ciele $\mathbb{Z}_7$,

c. $-2 \cdot (1 + \frac{2}{3}) + \frac{3}{2}$ w ciele $\mathbb{Z}_5$,

d. $-\frac{1}{2} + 1$ w ciele $\mathbb{Z}_3$,

e. $2 \cdot \left(5^{-1} - 2 \cdot 4\right)$ w pierśc. $\mathbb{Z}_6$,

f. $\frac{1}{6} - 3 \cdot \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\right)$ w ciele $\mathbb{Z}_{11}$.

3 Podstawowe struktury algebraiczne cz. 2. Grupy permutacji

3.1 Wprowadzenie teoretyczne

Definicja 3.1.

1. Niech $f: X \to Y$

(a) Mówimy, że f jest **suriekcją** (odwzorowaniem **na** zbiór Y), gdy dla każdego $y \in Y$, istnieje $x \in X$ taki, że:
$$y = f(x).$$

(b) Mówimy, że f jest **iniekcją** (odwzorowaniem **różnowartościowym**), gdy dla dowolnych $x_1, x_2 \in X$ zachodzi następująca implikacja:
$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$
lub równoważna implikacja:
$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2.$$

(c) Mówimy, że f jest **bijekcją**, gdy jest zarówno iniekcją jak i suriekcją.

2. Niech:
$$f : X \to Y$$
$$g : Y \to Z.$$

Złożeniem funkcji f **i** g nazywamy funkcję $h := g \circ f : X \to Z$ określoną następująco:
$$\text{dla każdego } x \in X : \; h(x) := (g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

Czyli mamy następującą sytuację:
$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g\circ f"'] & Y \arrow[r, "g"] & Z \end{tikzcd}$$

Zauważmy, że w ogólnym przypadku składanie funkcji nie jest przemienne. Niech np. $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$ dane wzorami:
$$f(x) = 2x$$
$$g(x) = x^2.$$

Wówczas dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$ mamy:
$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f\left(x^2\right) = 2x^2$$
$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(2x) = 4x^2$$

Definicja 3.2. Niepusty podzbiór H grupy $(G, \star)$ nazywamy **podgrupą** grupy G, gdy $(H, \star)$ jest grupą.

Twierdzenie 3.1. *Niech X będzie dowolnym zbiorem, a $Bij(X)$ niech będzie zbiorem wszystkich bijekcji zbioru X (tzn. $Bij(X) = \{f : X \to X;\ f \text{ jest bijekcją}\}$).*
Zbiór $Bij(X)$ wraz ze składaniem funkcji $\circ$ tworzy grupę.

Nas interesować będą zbiory, które mają skończoną liczbę elementów.

Definicja 3.3. Niech X będzie dowolnym zbiorem n-elementowym. Grupę bijekcji takiego zbioru oznaczamy S_n i nazywamy **grupą permutacji** zbioru n-elementowego. Elementy grupy S_n nazywamy **permutacjami**.

Zauważmy, że dowolny zbiór n–elementowy możemy utożsamić ze zbiorem $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$, niech więc $X = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$. Wówczas dowolną permutację $\sigma \in S_n$ możemy zapisać:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \ldots & \sigma(n) \end{pmatrix}.$$

Elementem neutralnym grupy S_n jest permutacja identycznościowa:

$$\mathrm{Id} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n \\ 1 & 2 & 3 & \ldots & n \end{pmatrix}.$$

Elementem odwrotnym do σ jest:

$$\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \ldots & \sigma(n) \\ 1 & 2 & 3 & \ldots & n \end{pmatrix}.$$

Definicja 3.4. Permutację $\sigma \in S_n$ nazywamy **cyklem** długości k, gdy istnieje k–elementowy podzbiór $\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ zbioru X taki, że:

$$\sigma(a_1) = a_2,\ \sigma(a_2) = a_3,\ \ldots,\ \sigma(a_{k-1}) = a_k,\ \sigma(a_k) = a_1$$

oraz $\sigma(a) = a$ dla $a \notin \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$.
Przyjmujemy, że permutacja identycznościowa jest cyklem długości jeden.

Zauważmy, że każdy cykl długości k można zapisać na k sposobów.

Definicja 3.5. Dwa cykle $(a_1, a_2, \ldots, a_j), (b_1, b_2, \ldots, b_k)$ nazywamy **cyklami rozłącznymi**, gdy zbiory $\{a_1, a_2, \ldots, a_j\}, \{b_1, b_2, \ldots, b_k\}$ są rozłączne.

Twierdzenie 3.2. *Każdą permutację można przedstawić w postaci iloczynu parami rozłącznych cykli. Przedstawienie to jest jednoznaczne z dokładnością do kolejności cykli.*

Definicja 3.6. Cykl długości 2 nazywamy **transpozycją**.

Twierdzenie 3.3. *Każdą permutację można rozłożyć na iloczyn transpozycji. To przedstawienie nie jest jednoznaczne. Jednak, gdy dana permutacja jest jednocześnie iloczynem p i r transpozycji, to liczby p i r są tej samej parzystości (tzn. obie są parzyste lub obie są nieparzyste). W rozkładzie permutacji identycznościowej na transpozycje występuje zawsze parzysta ich ilość.*

Poniższa równość określa sposób rozkładu cyklu długości k na iloczyn transpozycji:

$$(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{k-1}, a_k) = (a_1, a_k)(a_1, a_{k-1}) \ldots (a_1, a_3)(a_1, a_2).$$

Definicja 3.7. Znakiem permutacji σ nazywamy liczbę $\operatorname{sgn} \sigma = (-1)^r$, gdzie r jest liczbą czynników w rozkładzie permutacji σ na iloczyn transpozycji.

- Jeśli $\operatorname{sgn} \sigma = 1$, to permutację σ nazywamy **parzystą**.
- Jeśli $\operatorname{sgn} \sigma = -1$, to permutację σ nazywamy **nieparzystą**.

Definicja 3.8. Niech dana będzie permutacja:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & s & \ldots & t & \ldots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \ldots & \sigma(s) & \ldots & \sigma(t) & \ldots & \sigma(n) \end{pmatrix}.$$

Mówimy, że liczby s, t tworzą inwersję, gdy:

$$s < t \text{ oraz } \sigma(s) > \sigma(t).$$

Np.

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & 4 & 2 & 3 & 7 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

- Liczba 6 tworzy 5 inwersji.
- Liczba 4 tworzy 3 inwersji.
- Liczba 2 tworzy 1 inwersji.
- Liczba 3 tworzy 1 inwersji.
- Liczba 7 tworzy 2 inwersji.
- Liczba 5 tworzy 1 inwersji.
- Liczba 1 tworzy 0 inwersji.

Liczba wszystkich inwersji w permutacji σ wynosi $5 + 3 + 1 + 1 + 2 + 1 + 0 = 13$.

Istnieje równoważna definicja „parzystości" permutacji:

Definicja 3.9 (równoważna definicji 3.7)**.**
Permutację $\sigma \in S_n$ nazywamy parzystą, gdy dla $n > 1$ liczba inwersji w σ jest parzysta lub $\sigma \in S_1$.
Permutację $\sigma \in S_n, n > 1$ nazywamy nieparzystą, gdy liczba inwersji w σ jest nieparzysta.

3.2 Zadania

Zadanie 3.16. Wskaż wszystkie podgrupy grup: $(\mathbb{Z}_6, +_6), (\mathbb{Z}_8, +_8)$.

Zadanie 3.17. Niech $D = \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ i niech dla $i = 1, 2, \ldots, 6$ funkcje $f_i : D \to D$ będą określone wzorami:

$$\begin{array}{lll} f_1(x) = x, & f_2(x) = \frac{1}{1-x}, & f_3(x) = \frac{x-1}{x} \\ f_4(x) = \frac{1}{x}, & f_5(x) = 1 - x, & f_6(x) = \frac{x}{x-1}. \end{array}$$

Sprawdź, czy składanie funkcji $\circ$ jest działaniem w $G = \{f_1, f_2, \ldots, f_6\}$ (zbudować tabelkę). Czy para $(G, \circ)$ jest grupą?

Zadanie 3.18. Zbuduj tabelkę działania w S_3.

Zadanie 3.19. Niech $\sigma = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 5 & 4 & 3 \end{smallmatrix}\right), \tau = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 5 & 2 & 3 \end{smallmatrix}\right)$. Oblicz:

$$\sigma\tau, \tau\sigma, \sigma^{-1}\tau\sigma, \tau^{-1}\sigma.$$

Zadanie 3.20. Zapisz poniższe permutacje w postaci dwuwierszowej:

a. $\sigma = (1, 2, 4, 6)$, $\sigma \in S_7$,

b. $\tau = (3, 5, 4)$, $\tau \in S_5$.

Zadanie 3.21. Rozwiąż równania:

a. $(1, 2)x = (1, 3)(2, 4)$ w grupie S_4,

b. $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 2 & 4 & 1 \end{smallmatrix}\right) x \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 4 & 5 & 3 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 4 & 3 & 2 \end{smallmatrix}\right)$ w grupie S_5,

c. $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{smallmatrix}\right) x \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{smallmatrix}\right)^{-1} = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{smallmatrix}\right)$ w grupie S_3,

d. $x \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 5 & 1 & 4 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 4 & 5 \end{smallmatrix}\right)$ w grupie S_5.

Zadanie 3.22. Daną permutację $\sigma \in S_{10}$ przedstaw w postaci iloczynu transpozycji. Określ znak i parzystość permutacji σ.

a. $\sigma = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 6 & 7 & 2 & 8 & 1 & 3 & 9 & 10 & 4 & 5 \end{smallmatrix}\right)$

b. $\sigma = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 3 & 2 & 6 & 8 & 10 & 1 & 4 & 5 & 7 & 9 \end{smallmatrix}\right)$

c. $\sigma = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 10 & 1 & 3 & 5 & 4 & 8 & 9 & 7 & 6 & 2 \end{smallmatrix}\right)$

d. $\sigma = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 1 & 3 & 4 & 2 & 5 & 10 & 6 & 9 & 7 & 8 \end{smallmatrix}\right)$

4 Pierścień wielomianów, algorytm Euklidesa, największy wspólny dzielnik

4.1 Wprowadzenie teoretyczne

Anna Iwaszkiewicz-Rudoszańska, „Wstęp do algebry i teorii liczb”, Wyd. Naukowe UAM:

1. Pierścień wielomianów, str. 125-132

2. Pierścień liczb całkowitych (Podzielność w $\mathbb{Z}$, NWD, NWW, algorytm Euklidesa), str. 52-63

4.2 Zadania

Zadanie 4.23. Oblicz $f+g, f\cdot g$:

a. $f = 5X^2 - (2+i)\,X + i$, $g = iX + 13 - i$ w pierścieniu $\mathbb{C}[X]$,

b. $f = 3X^2 + X + 4$, $g = 2X^2 + 3X + 3$ w pierścieniu $\mathbb{Z}_5[X]$,

c. $f = 2X^4 + 3$, $g = -\left(2X^4 + 1\right)$ w pierścieniu $\mathbb{Z}[X]$.

Zadanie 4.24. Wykonaj następujące dzielenia z resztą:

a. $X^4 - 9X^3 + 23X^2 - 16X + 13$ przez $X - 5$ w $\mathbb{Z}[X]$

b. $2X^4 + X^3 + X^2 + 3X + 3$ przez $3X^2 + X + 4$ w $\mathbb{Z}_5[X]$

c. $X^5 + 4X^4 + 3X^2 + 2$ przez $2X^3 + X + 4$ w $\mathbb{Z}_5[X]$

d. $2X^5 + 8X^4 + 7X^3 + 3X + 5$ przez $3X^3 + 7X^2 + 5X + 1$ w $\mathbb{Z}_{11}[X]$

Zadanie 4.25. Stosując metodę Hornera wykonaj następujące dzielenia z resztą:

a. $X^5 + 2X^4 + 5X^3 + 13$ przez $X + 1$ w $\mathbb{Z}[X]$

b. $3X^5 + 7X^4 - 5X^3 - 14X^2 - 12X - 4$ przez $X + 2$ w $\mathbb{Z}[X]$

c. $X^4 + 5X^3 + 2X^2 + 4X + 3$ przez $X + 2$ w $\mathbb{Z}_7[X]$

d. $X^4 + 3X + 2$ przez $X + 4$ w $\mathbb{Z}_5[X]$

Zadanie 4.26. Przy pomocy algorytmu Euklidesa wyznacz: $(14, 35)$, $(180, 252)$, $(345, 6642)$, $(1001, 765)$, $(148, 684)$, $(819, 702, 689)$, $(3059, 2737, 943)$.

Zadanie 4.27. Wyznacz element odwrotny do liczby

a. 35 w $\mathbb{Z}_{37}$ **b.** 125 w $\mathbb{Z}_{257}$ **c.** 637 w $\mathbb{Z}_{1734}$ **d.** 1633 w $\mathbb{Z}_{1734}$

Zadanie 4.28. Przy pomocy algorytmu Euklidesa wyznacz $NWD(f, g)$, gdzie

a. $f, g \in \mathbb{Z}_2[X]$, $f(X) = X^4 + X^3 + X^2 + 1$, $g(X) = X^5 + X^2 + 1$

b. $f, g \in \mathbb{Z}_3[X]$, $f(X) = X^5 + 2X^3 + X + 1$, $g(X) = X^4 + X^2 + 2$

c. $f, g \in \mathbb{Z}_5[X]$, $f(X) = X^4 + 4X^3 + X^2 + 3$, $g(X) = X^3 + 4X + 3$

d. $f, g \in \mathbb{Z}_7[X]$, $f(X) = X^4 + 5X^3 + 2X + 6$, $g(X) = X^3 + 4X^2 + 4X + 5$

e. $f, g \in \mathbb{Z}_7[X]$, $f(X) = X^3 + X^2 + 6X + 4$, $g(X) = X^4 + 6X^3 + 2X^2 + 2$

f. $f, g \in \mathbb{Q}[X]$, $f(X) = X^3 - X^2 - 4X + 4$, $g(X) = X^2 - X - 6$

5 Rachunek macierzowy, metoda eliminacji Gaussa-Jordana

5.1 Wprowadzenie teoretyczne

Definicja 5.1. Mówimy, że macierz A jest w **postaci zredukowanej**, gdy spełnione są następujące warunki:

1. Począwszy od pewnego wiersza wszystkie następne wiersze macierzy składają się z samych zer. Powyżej tego wiersza nie ma wierszy złożonych z samych zer.

2. W każdym niezerowym wierszu pierwszy od lewej niezerowy wyraz jest równy 1. Ten niezerowy wyraz będziemy nazywać **jedynką wiodącą wiersza**.

3. Jeśli dwa sąsiednie wiersze nie są złożone z samych zer, to wiodąca jedynka wyższego wiersza znajduje się na lewo od wiodącej jedynki niższego wiersza.

4. Jeśli ponadto, każda kolumna zawierająca wiodącą jedynkę ma pozostałe wyrazy równe 0, to mówimy, że macierz A jest w **postaci całkowicie zredukowanej**.

Definicja 5.2. Następujące operacje wykonywane na wierszach macierzy, nazywać będziemy operacjami elementarnymi:

OE1. Zamiana miejscami dwóch wierszy.

OE2. Pomnożenie wiersza przez niezerowy element ciała K.

OE3. Dodanie do danego wiersza wielokrotności innego wiersza.

Definicja 5.3. Rzędem macierzy A nazywamy liczbę wiodących jedynek w dowolnej postaci zredukowanej macierzy A.

Twierdzenie 5.1 (Kroneckera-Capellego)**.** *Niech $[A|b]$ będzie macierzą rozszerzoną danego układu równań liniowych. Wówczas ten układ ma rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy:*

$$\operatorname{rz}[A|b] = \operatorname{rz} A.$$

Ponadto, jeśli układ równań liniowych o n niewiadomych ma rozwiązanie, to jego rozwiązanie zależy od

$$s = n - \operatorname{rz} A$$

parametrów.

Twierdzenie 5.2. *Jeśli $A \in M_{n,n}(K)$, to następujące warunki są równoważne:*

1. *A jest macierzą odwracalną,*

2. *postać całkowicie zredukowana macierzy A jest macierzą identycznościową I_n,*

3. $\operatorname{rz} A = n$,

4. $\det A \neq 0$,

5. *dla każdego $b \in K^n$ układ równań liniowych $AX = b$ ma dokładnie jedno rozwiązanie,*

6. *jednorodny układ równań liniowych $AX = \theta_n$ ma tylko jedno rozwiązanie: $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$.*

5.2 Zadania

Zadanie 5.29. Niech:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -2 & 0 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

Oblicz:

$$A + 3I,\ 3A,\ D + D,\ \left(B + D^T\right)^T,\ D + B^T,$$

$$AA^T,\ \left(AA^T\right)^T,\ A^T A,\ C^T C,\ CC^T,\ BDD^T,\ CC^T A,\ \alpha B,\ ADBE,\ C^T AE$$

Zadanie 5.30. Wyznacz macierz hermitowsko-sprzężoną A^* do macierzy A:

a. $A = \begin{bmatrix} 0 & 2+3i & i \\ -2+3i & 0 & 1 \\ i & -1 & 0 \end{bmatrix}$

b. $A = \begin{bmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{bmatrix}$

Macierz, z którego podpunktu jest macierzą hermitowską, a z którego jest macierzą antyhermitowską.

Zadanie 5.31. Zinterpretuj operacje na wektorach płaszczyzny ($\mathbb{R}^2$) (translacja o wektor $T = \left[\begin{smallmatrix} T_x \\ T_y \end{smallmatrix}\right]$, skalowanie, obrót względem środka układu współrzędnych) jako operacje na odpowiednich macierzach.

Zadanie 5.32. Znajdź postacie zredukowane i rzędy następujących macierzy:

a. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -2 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & -3 & 2 & 0 \end{bmatrix}$,

b. $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1{,}5 & 3 & 4{,}5 \\ 0 & 0 & 4 & 5 \\ 5 & 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}$,

c. $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$,

d. $D = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 4 & 8 & 3 & -2 & 5 \\ 7 & 1 & 4 & 7 & 5 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 20 \end{bmatrix}$.

Zadanie 5.33. Znajdź postacie całkowicie zredukowane i rzędy następujących macierzy:

a. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$,

b. $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 & -1 & 0 & 4 \\ 2 & 4 & -2 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

Zadanie 5.34. W zależności od parametru $m \in \mathbb{R}$ oblicz rząd poniższych macierzy:

a. $A = \begin{bmatrix} 3m+7 & m+2 \\ 6m-5 & 2m-2 \end{bmatrix}$

b. $B = \begin{bmatrix} 1 & 2m+5 & m^2+m \\ 2 & 5m+10 & 3m^2+3m \\ 3 & 6m+15 & 4m^2+2m \end{bmatrix}$

c. $C = \begin{bmatrix} 2m^2+9m-5 & m^2+6m+5 \\ 2m^2+8m-10 & m^2+5m \end{bmatrix}$

d. $D = \begin{bmatrix} m+1 & m & m & m \\ m & m+1 & m & m \\ m^2 & m & m^2 & m \\ 5m & m & 5m & m \end{bmatrix}$

Zadanie 5.35. Wyznacz macierze odwrotne do podanych macierzy:

a. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$,

b. $B = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$,

c. $C = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$,

d. $D = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -10 & 0 \\ 0 & 0 & -1897 \end{bmatrix}$.

Zadanie 5.36. W zależności od parametru m przeanalizuj liczbę rozwiązań układu równań:

$$\begin{cases} -x_1 - 2x_2 - x_3 &= 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 &= 2 \\ x_1 + mx_2 - mx_3 &= 1 \end{cases}$$

Zadanie 5.37. *(przykład 1.6, str 53, BG tom 1)* Rozwiąż układ równań w ciele liczb rzeczywistych oraz w $\mathbb{Z}_5$.

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 &= 18 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 &= 24 \\ 2x_1 + 7x_2 + 12x_3 &= 40 \end{cases}$$

Zadanie 5.38. Rozwiąż (metodą Gaussa) następujące układy równań w ciele liczb rzeczywistych:

a. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 &= 2 \\ 2x_1 + 7x_2 + 9x_3 &= -1 \\ 3x_1 + 8x_2 + 7x_3 &= -7 \end{cases}$

b. $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + 2x_3 &= 1 \\ 5x_1 + 9x_2 + 7x_3 &= 3 \\ x_1 - 8x_2 + 7x_3 &= 1 \end{cases}$

c. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 &= 4 \\ 3x_1 + 5x_2 - 2x_3 &= 9 \\ 4x_1 + 5x_2 - x_3 &= 7 \end{cases}$

d. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 + 4x_4 &= 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 &= 1 \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 + 8x_4 &= 4 \\ 7x_1 + 3x_3 + 5x_4 &= 0 \end{cases}$

e. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 2 \\ x_1 + 4x_2 + 3x_3 &= 6 \\ 3x_1 + 4x_2 + 4x_3 &= 8 \\ 5x_1 - 6x_2 - 3x_3 &= 8 \end{cases}$

f. $\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_4 + 3x_5 &= 5 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 + 5x_5 &= 2 \\ x_1 + 7x_2 + 5x_3 - 2x_4 - 3x_5 &= 14 \end{cases}$

Zadanie 5.39. Rozwiąż układ równań:

a. $\begin{cases} x + 11y + z &= 5 \\ 2x + 2y &= 6 \\ 5x + 10y + 4z &= 1 \end{cases}$ w ciele $\mathbb{Z}_{13}$,

b. $\begin{cases} x + 2y + 3z &= 1 \\ 2x + y + z &= 0 \\ 4x + 3y + z &= 3 \end{cases}$ w ciele $\mathbb{Z}_5$,

c. $\begin{cases} x + 2y + 3z &= 4 \\ 3x + 4y + z &= 4 \\ 2x + 3y + 2z &= 1 \end{cases}$ w ciele $\mathbb{Z}_5$,

d. $\begin{cases} x + y + z &= 0 \\ x + 4y + 2z &= 3 \\ 3x + y + 4z &= 3 \end{cases}$ w ciele $\mathbb{Z}_5$,

e. $\begin{cases} 2x + y + 4z &= 4 \\ 3x + y + z &= 0 \\ 2x + 3y + 3z &= 0 \end{cases}$ w ciele $\mathbb{Z}_5$,

f. $\begin{cases} x + 3y + 5z &= 6 \\ 4x + 6y + 3z &= 1 \\ 6x + 5y + 4z &= 5 \end{cases}$ w ciele $\mathbb{Z}_7$.

Zadanie 5.40. Znajdź wielomian $f \in \mathbb{R}[X]$ stopnia co najwyżej drugiego spełniający warunki:

a. $f(1) = 5,\ f(2) = 10,\ f(3) = 17$,

b. $f(-1) = 15,\ f(3) = 3,\ f(4) = 5$.

Zadanie 5.41. Znajdź wielomian $f \in \mathbb{R}[X]$ stopnia co najwyżej trzeciego spełniający warunki:

a. $f(1) = 7,\ f(2) = 1,\ f(3) = 1,\ f(4) = 13$,

b. $f(-1) = 11,\ f(1) = 1,\ f(3) = 15,\ f(5) = 53$.

Zadanie 5.42. Znajdź macierze odwrotne (o ile istnieją) dla poniższych macierzy:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -2 & -5 & -7 \\ -1 & -2 & -4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -3 & -4 & -2 & -2 \\ 1 & -3 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & -1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & -4 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

Zadanie 5.43. Rozwiąż układ równań liniowych $AX = b$, znajdując macierz odwrotną do macierzy współczynników, gdzie:

a. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$,

b. $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 6 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

6 Wyznacznik macierzy — opracowanie dra Piotra Rzonsowskiego

6.1 Teoria

Definicja 6.1. Wyznacznik macierzy kwadratowej zdefiniujemy za pomocą indukcji matematycznej.

1. Jeżeli $A = [a] \in M_{1,1}(K)$, to $\det A = a$.

2. Załóżmy, że został zdefiniowany wyznacznik macierzy kwadratowej o $n-1$ wierszach. Niech $A \in M_{n,n}(K)$ oraz niech $M_{i,j} \in M_{n-1,n-1}(K)$ będzie macierzą, którą otrzymujemy po wykreśleniu z A i-tego wiersza i j-tej kolumny. Ponadto niech
$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \det M_{ij}.$$
Element A_{ij} ciała K nazywamy **dopełnieniem algebraicznym** elementu a_{ij} macierzy A. Przy tych oznaczeniach wyznacznik macierzy A definiujemy za pomocą wyrażenia
$$\det A = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n}$$

Twierdzenie 6.1 (Laplace'a)**.** *Jeżeli $A \in M_{n,n}(K)$, to zachodzą następujące wzory:*

1. $\det A = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}$ *dla każdego* $1 \le i \le n$*,*

2. $\det A = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj}$ *dla każdego* $1 \le j \le n$*.*

Definicja 6.2. Niech $A \in M_{n,n}(K)$ będzie macierzą o współrzędnych $a_{ij} \in K$. Wówczas mówimy, że A jest macierzą:

1. **dolną trójkątną/dolnotrójkątną**, gdy ma zera nad przekątną, czyli $a_{ij} = 0$ dla $i < j$,

2. **górną trójkątną/górnotrójkątną**, gdy ma zera pod przekątną, czyli $a_{ij} = 0$ dla $i > j$,

3. **przekątniową(diagonalną)**, jeżeli $a_{ij} = 0$ dla $i \neq j$.

Własności 6.1 (Wyznacznika)**.** *Niech*
$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \in M_{n,n}(K).$$

1. *Jeżeli macierz A ma wiersz lub kolumnę złożoną z samych zer, to* $\det A = 0$.

2. *Dla każdego $c \in K$ i dla każdego $1 \le j \le n$ mamy*
$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & ca_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & ca_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & ca_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = c \det A$$
Taka sama własność zachodzi przy mnożeniu dowolnego wiersza macierzy przez skalar.

3. *Jeżeli macierze B , $C \in M_{n,n}(K)$ różnią się od macierzy A tylko j-tą kolumną i mają postać*
$$B = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & b_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & b_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & b_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$
$$C = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} + b_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j} + b_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} + b_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$
to $\det C = \det A + \det B$*. Taka sama własność zachodzi dla wierszy macierzy.*

4. *Jeżeli macierz A ma dwie identyczne kolumny (odpowiednio wiersze), to* $\det A = 0$.

5. *Zamiana miejscami dwóch kolumn (wierszy) macierzy powoduje, że znak wyznacznika zmienia się na przeciwny.*

6. *Jeżeli jedna kolumna (wiersz) macierzy A jest wielokrotnością innej kolumny (odpowiednio - wiersza), to* $\det A = 0$.

7. *Jeżeli do jednej kolumny (wiersza) macierzy A dodamy wielokrotność innej kolumny (odpowiednio wiersza), to wyznacznik macierzy nie ulegnie zmianie.*

8. *Jeżeli $A, B \in M_{n,n}(K)$ to zachodzą następujące równości:*

$$\det(AB) = \det A \sum_{\sigma\in S_n} (\operatorname{sgn}\sigma) b_{\sigma(1)1} b_{\sigma(2)2} \cdots b_{\sigma(n)n}$$

$$\det B = \sum_{\sigma\in S_n} (\operatorname{sgn}\sigma) b_{\sigma(1)1} b_{\sigma(2)2} \cdots b_{\sigma(n)n}$$

gdzie S_n jest grupą permutacji zbioru n-elementowego, a $\operatorname{sgn}\sigma$ *jest znakiem permutacji $\sigma \in S_n$.*

Twierdzenie 6.2 (Cauchy'ego)**.** *Jeżeli $A, B \in M_{n,n}(K)$, to*

$$\det(AB) = \det A \det B.$$

Definicja 6.3. Dla macierzy kwadratowej $A \in M_{n,n}(K)$ definiujemy jej **macierz dołączoną**

$$A^D = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

tzn A^D jest macierzą kwadratową, która na przecięciu i-tego wiersza i j-tej kolumny ma dopełnienie algebraiczne A_{ji}.

Twierdzenie 6.3. *Jeżeli $A \in Gl_n(K)$, to zachodzi następujący wzór:*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^D$$

Mamy następujący układ równań:

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array} \tag{6.1}$$

Twierdzenie 6.4. *Jeżeli* $\det A \neq 0$*, to układ równań* (6.1) *ma dokładnie jedno rozwiązanie, które jest dane za pomocą wzorów*

$$x_i = \frac{\det A_{x_i}}{\det A},$$

dla $1 \leq i \leq n$, gdzie A_{x_i} otrzymuje się przez zastąpienie i-tej kolumny macierzy A kolumną wyrazów wolnych układu (6.1)*.*

6.2 Zadania

Zadanie 6.44. Obliczyć następujące wyznaczniki:

a. $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$, **b.** $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 5 & 1 & 0 \end{vmatrix}$, **c.** $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$.

Zadanie 6.45. Wykazać, że wyznacznik macierzy dolnotrójkątnej/górnotrójkątnj jest równy iloczynowi elementów na przekątnej.

*** Zadanie 6.46.** Wykaż, że jeśli liczba zer w macierzy stopnia n jest większa od $n^2 - n$, to jej wyznacznik równy jest 0.

Zadanie 6.47. Wyprowadzić wzór na wyznaczniki macierzy $1 \times 1, 2 \times 2, 3 \times 3$ z własności 8 wyznacznika.

Zadanie 6.48. Podać przykład macierzy $A, B \in M_2(\mathbb{R})$ takich, że $A \neq 0$, $B \neq 0$ i $AB = 0$.

Zadanie 6.49. Niech $c \in \mathbb{R}$, $A \in M_n(\mathbb{R})$ i $\det A = a$. Oblicz $\det cA$.

Zadanie 6.50. Niech $a, b, c, d, t \in \mathbb{R}$. Stosując twierdzenie Cauchy'ego do macierzy

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ -bt & a \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} c & d \\ -dt & c \end{bmatrix}$$

udowodnić tożsamość

$$(a^2 + b^2 t)(c^2 + d^2 t) = (ac - bdt)^2 + (ad + bc)^2 t.$$

Zadanie 6.51. Za pomocą wzorów Cramera rozwiąż następujący układ równań nad ciałem $\mathbb{R}$:

a. $\begin{cases} 4x_1 - 7x_2 &= 3 \\ 5x_1 - 6x_2 &= 4 \end{cases}$

b. $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 &= -1 \\ 3x_1 - 4x_2 + 5x_3 &= -5 \\ 4x_1 - 5x_2 + 9x_3 &= -8 \end{cases}$

c. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 4x_3 &= 1 \\ 2x_1 + 4x_2 + 7x_3 &= 2 \\ 4x_1 + 9x_2 + 11x_3 &= 5 \end{cases}$

7 Wyznacznik macierzy - kontynuacja

7.1 Zadania

Zadanie 7.52. Oblicz wyznaczniki:

a. $\begin{vmatrix} 1 & 9 & 100 & 29 & 23 \\ 0 & -5 & 2 & 24 & 67 \\ 0 & 0 & 2 & 345 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 22 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

b. $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 & 4 \\ 5 & 1 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & 4 & 3 \end{vmatrix}$

c. $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ 4 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \end{vmatrix}$

d. $\begin{vmatrix} 4 & 3453 & 345 \\ 7 & 6786 & 678 \\ 1 & 9129 & 912 \end{vmatrix}$

e. $\begin{vmatrix} 9 & 4 & 3 \\ 8 & 4 & 3 \\ 7 & 3 & 2 \end{vmatrix}$

f. $\begin{vmatrix} 8 & 4 & 3 \\ 7 & 3 & 2 \\ 9 & 4 & 3 \end{vmatrix}$

g. $\begin{vmatrix} 8 & 3 & 4 \\ 7 & 2 & 3 \\ 9 & 3 & 4 \end{vmatrix}$

h. $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 7 & 4 & 7 & 2 \\ 3 & 8 & 5 & 6 & 1 \\ 4 & 5 & 3 & 5 & 2 \\ 5 & 9 & 7 & 9 & 4 \end{vmatrix}$

Zadanie 7.53. Oblicz macierze odwrotne do następujących macierzy (jeśli istnieją):

a. $A = \begin{bmatrix} 7 & 9 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$

b. $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -4 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \end{bmatrix}$

c. $C = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \\ -4 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

d. $D = \begin{bmatrix} -3 & -2 & -2 \\ 5 & 5 & 4 \\ 3 & 4 & 3 \end{bmatrix}$

e. $E = \begin{bmatrix} \cos\alpha & 0 & \sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{bmatrix}$

Zadanie 7.54. Rozwiąż równania:

a. $\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$

b. $\begin{bmatrix} -3 & 8 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$

c. $\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

8 Przestrzeń liniowa, liniowa kombinacja wektorów, baza przestrzeni liniowej (opracowano na podstawie BG „Elementy algebry liniowej t. I”)

8.1 Wprowadzenie teoretyczne

Definicja 8.1. Zbiór V z wyróżnionym elementem $\theta = \theta_V \in V$ oraz z dwoma działaniami:

$$+ : V \times V \to V \text{ — dodawania elementów } V,$$
$$\bullet : K \times V \to V \text{ — mnożenia elementów } V \text{ przez elementy } K,$$

nazywamy **przestrzenią liniową nad ciałem** K (lub **przestrzenią wektorową nad ciałem** K), jeśli spełnione są następujące warunki:

1. $(V, +, \theta)$ jest grupą abelową z elementem neutralnym θ,

2. $\alpha \bullet (v + w) = \alpha \bullet v + \alpha \bullet w,\ (\alpha + \beta) \bullet v = \alpha \bullet v + \beta \bullet v,$

3. $\alpha \bullet (\beta \bullet v) = (\alpha\beta) \bullet v,$

4. $1 \bullet v = v.$

Równości z dodpunktów **2**. – **4**. zachodzą dla wszystkich $v, w \in V$ oraz $\alpha, \beta \in K$. Elementy przestrzeni liniowej nazywamy **wektorami**. Elementy ciała K nazywamy **skalarami**.

Definicja 8.2.

1. **Układem wektorów** przestrzeni liniowej V o wskaźnikach ze zbioru T nazywamy każdą funkcję $v : T \to V$. Wartość funkcji v na elemencie $t \in T$ oznaczamy v_t. Układ wektorów będziemy zapisywać w postaci $(v_t)_{t \in T}$.

2. Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem K. Niech będzie dany układ wektorów $S = (v_1, v_2, \ldots, v_m)$ z V oraz układ skalarów $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m)$ z K. Wektor:

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_m v_m = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i v_i$$

nazywamy **kombinacją liniową wektorów układu** S. Skalary α_i nazywamy **współczynnikami** tej kombinacji.

Liniową kombinację wektorów można zdefiniować dla dowolnego układu wektorów $S = (v_t)_{t \in T}$, gdzie T jest pewnym niekoniecznie skończonym zbiorem wskaźników. Należy jednak pamiętać, że po to, aby wyrażenie:

$$\sum_{t \in T} \alpha_t v_t$$

miało sens, trzeba założyć, że $\alpha_t = 0$ dla prawie wszystkich $t \in T$.

3. Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem K. Niech $S = (v_t)_{t \in T}$ będzie pewnym układem wektorów z V. Weźmy układ skalarów $(\alpha_t)_{t \in T} \in \prod_{t \in T} K$, taki że $\alpha_t = 0$ dla prawie wszystkich $t \in T$. Wektor:

$$v = \sum_{t \in T} \alpha_t v_t$$

nazywamy **kombinacją liniową wektorów układu** S. Skalary α_t nazywamy **współczynnikami** tej kombinacji.

4. Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem K. Mówimy, że wektory układu $S = (v_1, v_2, \ldots, v_m)$ z V **rozpinają przestrzeń** V, jeśli każdy wektor $v \in V$ jest kombinacją liniową wektorów v_i, dla $i = 1, 2, \ldots, m$. Oznacza to, że każdy wektor $v \in V$ można zapisać w postaci:

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_m v_m$$

dla pewnych skalarów $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m \in K$.

5. Niech będzie dany układ wektorów $(v_1, v_2, \ldots, v_m)$ z przestrzeni V. Wtedy zbiór wszystkich kombinacji liniowych:

$$L(v_1, v_2, \ldots, v_m) = \{\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_m v_m : \ \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m \in K\}$$

wektorów $v_1, v_2, \ldots, v_m$ nazywa się **powłoką liniową układu wektorów** $(v_1, v_2, \ldots, v_m)$.

6. Niech $v_1, v_2, \ldots, v_m \in V$ będą wektorami przestrzeni liniowej V nad ciałem K. Mówimy, że te wektory są **liniowo niezależne**, gdy z równości:

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_m v_m = \theta_V$$

wynika, że wszystkie współczynniki są równe zero:

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_m = 0.$$

Mówimy, że wektory $v_1, v_2, \ldots, v_m \in V$ są **liniowo zależne**, gdy nie są liniowo niezależne.

Twierdzenie 8.1. *Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem K. Niech $S = (v_1, v_2, \ldots, v_m)$ będzie pewnym układem wektorów z V. Niech będzie dany układ wektorów $S_0 = (v_{i_1}, v_{i_2}, \ldots, v_{i_k})$, gdzie v_{i_j} dla $1 \leq j \leq k$ są pewnymi wektorami układu S oraz liczby $i_1, i_2, \ldots, i_k$ są parami różne. Wówczas:*

1. *Jeśli wektory z S są liniowo zależne, to jeden z nich jest kombinacją liniową pozostałych.*

2. *Jeśli θ_V jest jednym z wektorów układu S, to układ S jest liniowo zależny.*

3. *Jeśli wektory układu S są liniowo niezależne, to wektory układu S_0 są liniowo niezależne.*

4. *Jeśli wektory układu S_0 są liniowo zależne, to wektory układu S są liniowo zależne.*

Twierdzenie 8.2. *Jeśli $v_1, v_2, \ldots, v_n \in K^m$ oraz $n > m$, to wektory $v_1, v_2, \ldots, v_n$ są liniowo zależne.*

Wniosek 8.2.1.

1. *Każdy skończony układ liniowo niezależnych wektorów w K^n składa się co najwyżej z n wektorów.*

2. *Kolumny macierzy $A \in \mathrm{M}_{m,n}(K)$ są wektorami liniowo zależnymi w K^m wtedy i tylko wtedy, gdy równanie macierzowe:*

$$AX = \theta_m$$

ma niezerowe rozwiązanie ze względu na X.

Twierdzenie 8.3. *Niech $v_1, v_2, \ldots, v_n \in K^n$ będą pewnymi wektorami. Niech:*

$$A = \left[v_1 \;\middle|\; v_2 \;\middle|\; \ldots \;\middle|\; v_n\right] \in \mathrm{M}_n(K)$$

będzie macierzą, której kolumnami są wektory $v_1, v_2, \ldots, v_n$. Wtedy następujące warunki są równoważne:

1. *Wektory $v_1, v_2, \ldots, v_n$ są liniowo niezależne.*

2. *Układ równań liniowych $AX = \theta_n$ ma tylko jedno rozwiązanie w K^n.*

3. $\det A \neq 0$.

Twierdzenie 8.4. *Niech $S = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ będzie układem liniowo niezależnym w przestrzeni K^n. Wtedy każdy wektor w K^n jest kombinacją liniową wektorów z układu S, tzn. S rozpina przestrzeń K^n.*

Definicja 8.3. Niech funkcje $f_i(x)$, $i = 1, 2, \dots, n$ mają pochodne do rzędu $n-1$ włącznie na przedziale (a, b). Wyznacznik postaci:

$$W(x) = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \dots & f_n(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & \dots & f_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(x) & f_2^{(n-1)}(x) & \dots & f_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

nazywamy **wyznacznikiem Wrońskiego** lub **wrońskianem** dla funkcji $f_1, f_2, \dots, f_n$ w punkcie $x \in (a, b)$.

Twierdzenie 8.5. *Jeśli funkcje $f_1, f_2, \dots, f_n$ są liniowo zależne na przedziale (a, b), to ich wrońskian jest tożsamościowo równy zeru.*

Wniosek 8.5.1. *Jeśli dla pewnego $x_0 \in (a, b)$, $W(x_0) \neq 0$, to funkcje $f_1, f_2, \dots, f_n$ są liniowo niezależne.*

Definicja 8.4. Układ wektorów $S = (v_t)_{t\in T}$ przestrzeni V nazywamy **bazą przestrzeni** V, jeśli są spełnione następujące warunki:

1. Układ S jest liniowo niezależny.
2. Układ S rozpina przestrzeń V, tzn. $V = L(S)$.

W szczególności, jeśli skończony układ wektorów $S = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ jest bazą przestrzeni V, to mówimy, że V ma **bazę skończoną**.

Definicja 8.5. Niech dane będą dwa układy wektorów $S_1 = (v_t)_{t\in T_1}$ oraz $S_2 = (w_t)_{t\in T_2}$ przestrzeni V. Mówimy, że **układ** S_1 **zawiera układ** S_2, gdy $T_2 \subset T_1$ oraz $w_t = v_t$ dla każdego $t \in T_2$. Zawieranie układów zapisujemy $S_2 \subset S_1$.

Twierdzenie 8.6. *Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem K i niech $S = (v_t)_{t\in T}$ będzie danym układem wektorów w V. Wtedy następujące warunki są równoważne:*

1. *Układ S jest bazą przestrzeni V.*
2. *Każdy wektor $v \in V$ da się jednoznacznie zapisać w postaci kombinacji liniowej wektorów:*

   $$v = \sum_{t\in T} \alpha_t v_t,$$

   gdzie $v_t \in S$ i α_t są prawie wszystkie równe zero.
3. *S jest maksymalnym układem liniowo niezależnym w V ze względu na relację zawierania układów.*
4. *S jest minimalnym układem ze względu na relację zawierania układów, które rozpinają przestrzeń V.*

Definicja 8.6. Niech $S = (v_t)_{t\in T}$ będzie bazą przestrzeni liniowej V oraz niech $v \in V$.

1. Układ skalarów $(\alpha_t)_{t\in T}$ taki, że $\alpha_t = 0$ dla prawie wszystkich $t \in T$ oraz taki, że:

   $$v = \sum_{t\in T} \alpha_t v_t,$$

   nazywamy **współrzędnymi wektora** v **względem bazy** S i oznaczamy symbolem $\langle v\rangle_S$.
2. W szczególności, jeśli V ma bazę skończoną $S = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ oraz:

   $$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n,$$

   to współrzędne wektora $v \in V$ względem bazy S zapisujemy jako wektor z K^n w następujący sposób:

   $$\langle v\rangle_S = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}.$$

Twierdzenie 8.7. *Niech $S = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ oraz $S_2 = (w_t)_{t\in T}$ będą bazami przestrzeni liniowej V. Wówczas baza S_2 też jest skończona i składa się z n wektorów.*

Definicja 8.7. Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem K.

1. Jeśli V ma skończoną bazę S, to mówimy, że V jest **przestrzenią skończenie wymiarową**.
2. Liczbę elementów bazy S przestrzeni skończenie wymiarowej V nazywamy **wymiarem przestrzeni** V i oznaczamy symbolem $\dim_K V$.
3. Jeśli przestrzeń V nie ma skończonej bazy, to mówimy, że jest **nieskończenie wymiarowa**.

Wniosek 8.7.1. *Niech $\dim_K V = n$.*

1. *Jeśli $S = (v_1, v_2, \ldots, v_m)$ jest liniowo niezależnym układem wektorów w V, to $m \leq n$.*
2. *Jeśli $S = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ jest liniowo niezależnym układem wektorów w V, to S jest bazą przestrzeni V.*

Inne metody badania rzędu macierzy

Twierdzenie 8.8. *Niech $A \in \mathrm{M}_{n,m}(K)$. Zachodzą następujące równości:*

$$\operatorname{rz} A = \operatorname{rz}(AA^T) = \operatorname{rz}(A^T A).$$

Definicja 8.8. Minorem macierzy A nazywamy wyznacznik każdej macierzy kwadratowej, utworzonej z macierzy A w wyniku skreślenia odpowiedniej liczby kolumn i odpowiedniej liczby wierszy. Stopień tego wyznacznika nazywamy **stopniem minora**.

Uwaga 1. Macierz $A \in \mathrm{M}_{m,n}(K)$ posiada minory k-tego stopnia dla każdego $1 \leq k \leq \min(n, m)$.

Twierdzenie 8.9. *Rząd macierzy A jest równy r wtedy i tylko wtedy, gdy:*

1. *istnieje niezerowy minor stopnia r macierzy A.*
2. *każdy minor macierzy A stopnia wyższego niż r (o ile taki istnieje) jest równy zeru.*

Uwaga 2. Dla dowolnej macierzy $A \in \mathrm{M}_{m,n}(K)$ prawdziwa jest nierówność:

$$0 \leq \operatorname{rz} A \leq \min(n, m).$$

Różne/wybrane metody badania liniowej zależności układu wektorów w przestrzeni liniowej K^n nad ciałem K

Niech $S = (v_1, v_2, \ldots, v_m)$ będzie układem wektorów w przestrzeni K^n, i niech

$$v_i = \begin{bmatrix} v_{i1} \\ v_{i2} \\ \vdots \\ v_{in} \end{bmatrix} \text{ dla każdego } i \in \{1, 2, \ldots, m\}.$$

1. Jeśli $m > n$, to wektory $v_1, v_2, \ldots, v_m$ są liniowo zależne.
2. Niech $m \leq n$. Rząd macierzy $A \in \mathrm{M}_{n,m}(K)$ ($A \in \mathrm{M}_{m,n}(K)$), której kolumnami (wierszami) są wektory $v_1, v_2, \ldots, v_m$ jest równy m wtedy i tylko wtedy, gdy wektory te są liniowo niezależne.
3. Niech $m < n$, $A = \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} & \ldots & v_{1n} \\ v_{21} & v_{22} & \ldots & v_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{m1} & v_{m2} & \ldots & v_{mn} \end{bmatrix}$. Czyli A jest macierzą, której wierszami są wektory $v_1, v_2, \ldots, v_m$.
   $\det(AA^T) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy wektory $v_1, v_2, \ldots, v_m$ są liniowo zależne.

8.2 Zadania

Zadanie 8.55. Sprawdzić, czy dany zbiór jest przestrzenią liniową:

a. zbiór $\mathbb{R}^n$ z dodawaniem i mnożeniem przez skalar po współrzędnych

b. zbiór rozwiązań jednorodnego układu równań liniowych

c. zbiór macierzy $M_{mn}(\mathbb{R})$ z dodawaniem i mnożeniem przez skalar

d. zbiór macierzy kwadratowych $M_n(\mathbb{R})$ z mnożeniem i mnożeniem przez skalar

e. zbiór wielomianów stopnia co najwyżej n o współczynnikach rzeczywistych (ozn. $\mathbb{R}_n[X]$) z dodawaniem i mnożeniem przez skalar.

Zadanie 8.56. Sprawdzić, czy w przestrzeni $V = K^4$ nad ciałem K, prawdziwa jest przynależność :

a. $K = \mathbb{R}$, $(4,6,4,5) \in L\{(1,4,6,5),(5,6,2,4)\}$;

b. $K = \mathbb{R}$, $(3,1,5,0) \in L\{(1,4,8,7),(1,5,-5,4),(1,6,0,7)\}$;

c. $K = \mathbb{Z}_7$, $(1,6,5,4) \in L\{(2,5,3,1)\}$;

d. $K = \mathbb{Z}_7$, $(4,5,3,6) \in L\{(1,3,4,6),(1,5,1,5),(1,4,3,1)\}$;

Zadanie 8.57. Sprawdzić, czy dane wektory przestrzeni V są liniowo zależne:

a. $V = \mathbb{R}^3$ nad ciałem $\mathbb{R}$, wektory: $(3,-1,2),(-9,3,-6)$;

b. $V = \mathbb{R}^3$ nad ciałem $\mathbb{R}$, wektory: $(4,4,1),(1,4,4)$;

c. $V = \mathbb{R}^3$ nad ciałem $\mathbb{R}$, wektory: $(1,0,-4),(5,1,1),(1,1,0),(1,0,8)$;

d. $V = \mathbb{Z}_5^3$ nad ciałem $\mathbb{Z}_5$, wektory: $(1,1,0),(4,3,1),(1,4,2)$;

e. $V = C_{\mathbb{R}}$ nad ciałem $\mathbb{R}$, wektory: $1, \sin x, \cos x$;

f. $V = C_{\mathbb{R}}$ nad ciałem $\mathbb{R}$, wektory: $1, 2^x, 3^x, 6^x$;

g. $V = C_{(0,\infty)}$ nad ciałem $\mathbb{R}$, wektory: $\log x, \log 2x, \log 3x$;

Zadanie 8.58. Sprawdź, czy wektory $\{(1,0,-1),(1,1,3),(4,1,1)\}$ tworzą bazę przestrzeni $\mathbb{R}^3$.

Zadanie 8.59. Wyznacz jedną z baz przestrzeni W nad ciałem $\mathbb{R}$, gdzie:

a. $W = \big\{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 :\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_4 = 0, \quad 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0\big\}$

b. $W = \big\{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 :\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 0,\ x_1 + 4x_2 + 3x_3 + x_4 = 0,\ 4x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 0\big\}$

c. $W = \big\{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 :\ x_1 + 3x_2 + 9x_3 - 6x_4 = 0,\ x_1 + 7x_2 + x_3 - 2x_4 = 0\ 2x_1 + x_2 + 7x_3 - 5x_4 = 0\big\}$

Zadanie 8.60. Zbadaj dla jakich $x \in \mathbb{R}$ trójka wektorów tworzy bazę $\mathbb{R}^3$

a. $(x,4,1),(x,1,-2),(5,x,2)$

b. $(1,3,4),(2,1,5),(1,8,x)$

c. $(3,1,4),(2,2,5),(5,4x,7x)$

9 Macierz przejścia z bazy do bazy, macierz przekształcenia liniowego, wartości własne, wektory własne, diagonalizacja macierzy

9.1 Wprowadzenie teoretyczne

W poniższym opracowaniu:

K oznaczać będzie dowolne ciało,

V/K oznaczać będzie przestrzeń liniową V nad ciałem K.

9.1.1 Macierz przejścia z bazy do bazy

Definicja 9.1. Niech V/K będzie przestrzenią n-wymiarową (tzn. każda baza tej przestrzeni składa się z n wektorów), niech B_1, B_2 będą dwoma bazami tej przestrzeni.

$$B_1 = (v_1, \dots, v_n)$$
$$B_2 = (w_1, \dots, w_n).$$

Zapisujemy wektory bazy B_1 za pomocą wektorów bazy B_2, jako kombinacje liniowe:

$$\begin{aligned} v_1 &= a_{11}w_1 + a_{21}w_2 + \ldots + a_{n1}w_n \\ v_2 &= a_{12}w_1 + a_{22}w_2 + \ldots + a_{n2}w_n \\ &\vdots \\ v_n &= a_{1n}w_1 + a_{2n}w_2 + \ldots + a_{nn}w_n \end{aligned}$$

i zapisujemy współrzędne wektora v_i w bazie B_2, w i-tej kolumnie macierzy A dla $i = \{1, 2, \dots, n\}$:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Powyższa macierz nazywa się **macierzą przejścia z bazy B_1 do B_2**.

Fakt 9.1.

1. *Jeśli A jest macierzą przejścia z bazy B_1 do bazy B_2, to macierz A^{-1} jest macierzą przejścia z bazy B_2 do B_1.*

2. *Jeśli A jest macierzą przejścia z bazy B_1 do bazy B_2, B jest macierzą przejścia z bazy B_2 do B_3, to BA jest macierzą przejścia z bazy B_1 do B_3.*
   Ilustracja:

$$\begin{tikzcd} B_1 \arrow[r, "A"] \arrow[rr, bend right, "B\cdot A"'] & B_2 \arrow[r, "B"] & B_3 \end{tikzcd}$$

Uwaga 3. Niech V/K będzie dowolną przestrzenią liniową skończenie wymiarową oraz B', B'' będą dwoma bazami tej przestrzeni. Niech $v \in V$ będzie dowolnym wektorem. Niech ponadto M będzie macierzą przejścia z bazy B' do B''. Współrzędne wektora v względem bazy B' i współrzędne względem bazy B'' spełniają równanie:

$$\langle v \rangle_{B''} = M \langle v \rangle_{B'} \tag{9.1}$$

9.1.2 Macierz przekształcenia liniowego

Definicja 9.2. Niech V, W będą przestrzeniami liniowymi nad ciałem K. Mówimy, że funkcja $T:\ V \to W$ jest **przekształceniem liniowym**, gdy spełnia następujące warunki:

1. $T(v_1 + v_2) = T(v_1) + T(v_2)$ dla każdego $v_1, v_2 \in V$,

2. $T(\alpha v) = \alpha T(v)$ dla każdego skalara $\alpha \in K$ i każdego wektora $v \in V$.

Jeśli $V = W$, to przekształcenie liniowe T nazywamy **operatorem liniowym przestrzeni** V lub **endomorfizmem liniowym przestrzeni** V.

Definicja 9.3. Niech będą dane przestrzenie liniowe V i W nad ciałem K, których wymiarami są odpowiednio n i m. Niech $T:\ V \to W$ będzie przekształceniem liniowym. W przestrzeni V wybieramy bazę:

$$B_V = (v_1, v_2, \ldots, v_n),$$

a w przestrzeni W ustalamy bazę:

$$B_W = (w_1, w_2, \ldots, w_m).$$

Obrazy wektorów bazy B_V przy przekształceniu T zapisujemy w postaci kombinacji liniowych wektorów bazy B_W ze współczynnikami $a_{ij} \in K$:

$$\begin{array}{rcl} T(v_1) & = & a_{11}w_1 + a_{21}w_2 + \ldots + a_{m1}w_m \\ T(v_2) & = & a_{12}w_1 + a_{22}w_2 + \ldots + a_{m2}w_m \\ \ldots & & \\ T(v_n) & = & a_{1n}w_1 + a_{2n}w_2 + \ldots + a_{mn}w_m \end{array}. \tag{9.2}$$

Macierz $A_T \in \mathrm{M}_{m,n}(K)$:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

której kolumnami są współrzędne wektorów $T(v_i)$ w bazie B_W, uzyskane z równań (9.2), nazywa się **macierzą przekształcenia** T **w bazach** B_V **i** B_W.

Uwaga 4. Jeśli A_T jest macierzą przekształcenia liniowego $T:\ V \to W$ w bazach B_V, B_W oraz A_S jest macierzą przekształcenia liniowego $S:\ W \to Z$ w bazach B_W, B_Z, to:

$$A_{S \circ T} = A_S \cdot A_T$$

jest macierzą przekształcenia liniowego $S \circ T$ w bazach B_V, B_W.
Ilustracja:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "T"] \arrow[rr, bend right, "S\circ T"'] & W \arrow[r, "S"] & Z \end{tikzcd}$$

Twierdzenie 9.1. *Niech $T:\ V \to W$ będzie przekształceniem liniowym. Niech $B_V = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$, $B_W = (w_1, w_2, \ldots, w_m)$ będą bazami przestrzeni V i W odpowiednio. Niech A_T będzie macierzą przekształcenia T w bazach B_V, B_W. Niech $v \in V$ będzie dowolnym wektorem. Wówczas zachodzi następujący wzór na współrzędne wektora $T(v)$ w bazie B_W:*

$$\langle T(v)\rangle_{B_W} = A_T \cdot \langle v\rangle_{B_V}. \tag{9.3}$$

Twierdzenie 9.2. *Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem K. Niech $S = (v_1, v_2, v \ldots, v_n)$ i $S' = (w_1, w_2, \ldots, w_n)$ będą bazami przestrzeni V. Wtedy macierz przejścia A od bazy S do bazy S' jest równa macierzy przekształcenia identycznościowego $\mathrm{Id}_V:\ V \to V$ w bazach S i S'.*

9.1.3 Wektory własne, wartości własne i przestrzenie własne

Definicja 9.4. Niech $A \in \mathrm{M}_{n,n}(K)$.

1. Niezerowy wektor $v \in K^n$ nazywamy **wektorem własnym macierzy** A, gdy istnieje taki skalar $\lambda \in K$, że:
$$Av = \lambda v.$$
Skalar λ nazywamy **wartością własną macierzy** A **odpowiadającą wektorowi** v.

2. Macierz $A - tI_n$ o współczynnikach w pierścieniu wielomianów $K[t]$ nazywamy **macierzą charakterystyczną macierzy** A.

3. Równanie $\det(A - tI_n) = 0$ nazywamy **równaniem charakterystycznym macierzy** A.

4. Wielomian $f_A(t) = \det(tI_n - A) = (-1)^n \det(A - tI_n) \in K[t]$ nazywamy **wielomianem charakterystycznym macierzy** A.

5. Załóżmy, że wielomian charakterystyczny $f_A(t)$ ma k-krotny pierwiastek w ciele K, tzn.:
$$f_A(t) = (t - \lambda)^k g(t),$$
gdzie $g(t) \in K[t]$ oraz $g(\lambda) \neq 0$. Wtedy liczbę k nazywamy **krotnością algebraiczną** wartości własnej λ.

Definicja 9.5. Niech $T : V \to V$ będzie przekształceniem liniowym określonym na skończenie wymiarowej przestrzeni liniowej nad ciałem K.

1. Niezerowy wektor $v \in V$ nazywamy **wektorem własnym przekształcenia** T, jeśli istnieje skalar $\lambda \in K$ taki, że:
$$T(v) = \lambda v.$$
Skalar taki nazywamy **wartością własną przekształcenia** T, która odpowiada wektorowi v.

2. Niech $\lambda \in K$ będzie wartością własną przekształcenia liniowego T.
   - **a.** Zbiór $V_\lambda = \{v \in V : T(v) = \lambda v\}$ nazywamy **przestrzenią własną przekształcenia** T odpowiadającą wartości własnej λ.
   - **b.** Liczbę $\dim_K V_\lambda$ nazywamy **krotnością geometryczną** wartości własnej λ przekształcenia T.

Definicja 9.6. **Śladem macierzy** $A = [a_{ij}] \in \mathrm{M}_n(K)$ nazywamy skalar:
$$\operatorname{tr} A = a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn} \in K.$$

Fakt 9.2. *Niech $A \in \mathrm{M}_n(K)$ oraz $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ będą wartościami własnymi macierzy A. Wówczas zachodzą następujące równości:*
$$\operatorname{tr} A = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \qquad \textit{oraz} \qquad \det A = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i.$$

9.1.4 Diagonalizacja macierzy

Definicja 9.7. Niech dana będzie macierz $A \in \mathrm{M}_n(K)$. Mówimy, że A **da się sprowadzić do postaci diagonalnej**, gdy istnieje $B \in \mathrm{GL}_n(K)$ taka, że:
$$B^{-1}AB \text{ jest macierzą diagonalną.}$$

Twierdzenie 9.3. *Niech $A \in \mathrm{M}_n(K)$ będzie macierzą, która ma n różnych wartości własnych $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in K$. Załóżmy, że dane są wektory własne $v_1, v_2, \ldots, v_n \in K^n$ macierzy A takie, że $Av_i = \lambda_i v_i$ dla $1 \leq i \leq n$.*

1. *Wówczas układ $S = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ stanowi bazę przestrzeni K^n.*

2. *Niech* $B = \left[v_1 \mid v_2 \mid \ldots \mid v_n\right] \in \mathrm{M}_n(K)$ *oznacza macierz utworzoną ze współrzędnych wektorów własnych* v_i *(współrzędne wektora* v_i *wpisujemy do* i*-tej kolumny macierzy* B*). Wtedy:*

$$B^{-1}AB = diag(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n).$$

W szczególności macierz A *da się sprowadzić do postaci diagonalnej.*

9.2 Zadania

Zadanie 9.61. Niech

$$B_1 = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$$

$$B_0 = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$$

będą danymi bazami przestrzeni $\mathbb{R}^3$. Wyznaczyć macierz przejścia z bazy B_1 do B_0.

Zadanie 9.62. Niech

$$B_1 = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$$

$$B_2 = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$$

będą danymi bazami przestrzeni $\mathbb{R}^3$. Wyznaczyć macierz przejścia z bazy B_1 do B_2.

Zadanie 9.63. Wyznacz współrzędne wektora:

a. $v = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$

b. $v = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

w bazie B_2 z Zadania 9.62..

Zadanie 9.64. Niech $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ będą przekształceniami liniowymi danymi wzorami:

$$\varphi\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 4x_1 + 3x_2 + x_3 \\ 5x_1 + 4x_2 + 2x_3 \end{bmatrix}, \qquad \psi\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 3x_1 - x_2 \\ 5x_1 - 3x_2 \\ 7x_1 - 5x_2 \end{bmatrix}.$$

Wyznaczyć macierz przekształcenia liniowego φ, ψ, $\varphi \circ \psi$, $\psi \circ \varphi$.

Zadanie 9.65. Przekształcenie liniowe $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ określone jest przez macierz A_φ w bazach standardowych $B_0^2 = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$, $B_0^3 = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$. Znaleźć wzór:

$$\varphi\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \right), \text{ jeśli } A_\varphi = \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 3 & 6 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}.$$

Zadanie 9.66. Przekształcenie liniowe $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ określone jest przez macierz A_φ w bazach

$$B_1 = \left(\begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 11 \\ 2 \end{bmatrix} \right), \qquad B_2 = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} \right).$$

Znaleźć wzór:

$$\varphi\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \right), \text{ jeśli } A_\varphi = \begin{bmatrix} -7 & -8 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}.$$

Zadanie 9.67. Niech $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ będzie przekształceniem liniowym danym wzorem:

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} x_1 - x_2 + x_3 \\ x_1 + x_2 - x_3 \\ -x_1 + x_2 + x_3 \end{bmatrix}.$$

Wyznaczyć macierz przekształcenia T w bazach $B_1 = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$, $B_2 = \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \right)$.

Zadanie 9.68. Niech $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ będzie przekształceniem liniowym (endomorfizmem). Wyznaczyć wartości własne przekształcenia T oraz przestrzenie własne, gdzie:

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} x_1 + 4x_2 \\ x_1 + x_2 \end{bmatrix}.$$

Zadanie 9.69. Niech $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ będzie przekształceniem liniowym (endomorfizmem). Wyznaczyć wartości własne, wektory własne i przestrzenie własne przekształcenia T, gdzie:

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 2x_1 - x_2 - x_3 \\ x_2 + x_3 \\ 5x_3 \end{bmatrix}.$$

Zadanie 9.70. Obliczyć wartości własne, wektory własne, krotność algebraiczną i geometryczną dla każdej wartości własnej macierzy:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Zadanie 9.71. Niech $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.

a. Niech $n = 5$. Niech $2+i$, 1, 3 będą wartościami własnymi macierzy A oraz $\operatorname{tr} A = 7$. Wyznaczyć pozostałe wartości własne macierzy A.

b. Niech $n = 6$. Niech i, $4 - 2i$, 2 będą wartościami własnymi macierzy A oraz $\det A = 20$. Wyznaczyć pozostałe wartości własne macierzy A.

c. Niech $n = 8$. Niech $3 - 5i$, -8, $-5 + 8i$, 3, 3 będą wartościami własnymi macierzy A oraz $\operatorname{tr} A = -6$. Czy macierz A jest macierzą odwracalną?

Zadanie 9.72. Sprowadzić macierz A do postaci diagonalnej, gdzie:

a. A jest macierzą z zadania 9.68..

b. A jest macierzą z zadania 9.69..

Zadanie 9.73. Obliczyć A^n dla macierzy z zadania 9.72., dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$.