Teoria grafów

ćwiczenia 1:

$G(V, E, \psi)$ - graf , $G(V, E)$ - graf prosty

$V = V(G)$ - zbiór wierzchołków

$E = E(G)$ - zbiór krawędzi

$\psi_G$ - funkcja ~~incy~~ incydencji

stopień wierzchołka $d_G(v)$

maksymalny / minimalny stopień wierzchołka $\Delta(G) / \delta(G)$

graf pusty i graf pełny (graf pełny $K_n$ na $n$ wierzchołkach)

dopełnienie $G^c$ grafu prostego

macierz przyległości ($a_{ij} = 1$ gdy $v_i$ i $v_j$ przyległe)

macierz incydencji ($m_{ij} = 1$, gdy $v_i$ i $e_j$ incydentne i $e_j$ nie jest pętlą)

<u>Twierdzenie</u>: Dla dowolnego grafu $G = (V, E)$ suma stopni jego wierzchołków równa jest podwojonej liczbie krawędzi, to jest

$$\sum_{v \in V} d_G(v) = 2|E|$$

A.1. a) $|V| = 6$ , $|E| = 6$

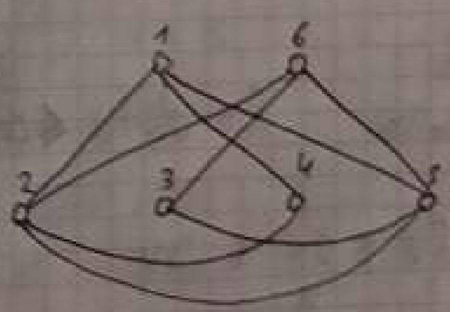
b) $\psi(a) = v_2 v_3$  $\psi(b) = v_3 v_4$  $\psi(c) = v_4 v_5$  $\psi(d) = v_1 v_3$  $\psi(e) = v_4 v_6$

$\psi(f) = v_1 v_6$

c) $d_G(v) = \cancel{2, 3}\ 1, 2, 3$

d) $\Delta(G) = 3$ , $\delta(G) = 1$

e)




f) macierz przyległości

$$A(G) = \begin{array}{c|cccccc|} & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 \\ v_1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ v_2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ v_3 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ v_4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ v_5 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ v_6 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

a)

$$M(G) = \begin{array}{c|cccccc|} & a & b & c & d & e & f \\ v_1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ v_2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ v_3 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ v_4 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ v_5 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ v_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

macierz incydencji

A 2

$$A(G) = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{array} \begin{array}{c} v_1 \; v_2 \; v_3 \; v_4 \; v_5 \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

~~$\psi(a) = v_2 v_4$~~ $\psi(a) = v_1 v_3$

~~$\psi(b) = v_4 v_5$~~ $\psi(b) = v_1 v_4$

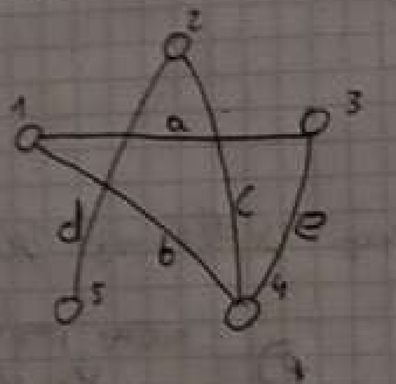
~~$\psi(c) = v_1 v_4$~~ $\psi(c) = v_2 v_4$

~~$\psi(d) =$~~

$\psi(d) = v_2 v_5$ $\psi(e) = v_4 v_3$

$d_G(v) = 1, 2, 3$

$|V| = 5$ $|E| = 5$




A 3 Uzasadnij, że $\delta \le 2\varepsilon/\nu \le \Delta$, gdzie $\nu$ jest liczbą wierzchołków a $\varepsilon$ liczbą krawędzi

$\delta$ - minimalny stopień wierzchołka

$\Delta$ - maksymalny stopień wierzchołka

$$\delta \le d_G(v) \le \Delta$$

$$\boxed{\frac{\delta v}{2} \le \varepsilon \le \frac{\Delta v}{2}}$$

$$\delta v \le 2\varepsilon \le \Delta v$$

$$\sum_{w \in V} \delta \le \sum_{w \in V} d_G(w) \le \sum_{w \in V} \Delta$$

co zostało uzasadnione $\quad \delta v \le 2\varepsilon \le \Delta v$

Zadanie 4.4 Uzasadnij, że w każdym grafie liczba wierzchołków stopnia nieparzystego jest parzysta.

Każda krawędź incydentna jest do dwóch wierzchołków, zliczając krawędzie incydentne do kolejnych wierzchołków a następnie sumując te wartości, każda krawędź uv zostanie zliczona dwa razy, raz przy rozpatrywaniu wierzchołka v, a drugi raz przy u.

Jeśli G miałby nieparzyście wiele wierzchołków o nieparzystym stopniu to suma $\sum_{v\in V} d_G(v)$ byłaby nieparzysta, wbrew temu, że jest liczbą parzystą $2|E|$, $V_p$ - parzyste $V_N$ - nieparzyste

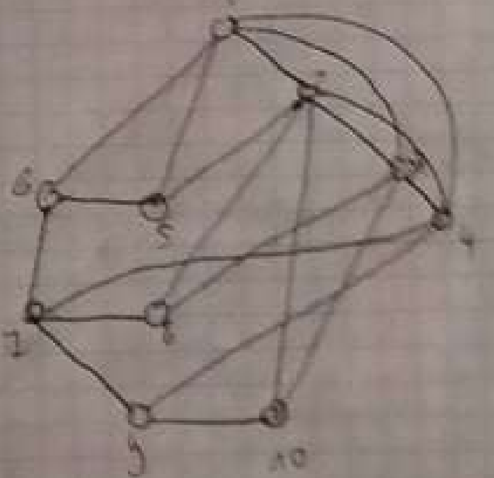
więc z założenia $\sum_{v\in V} d_G(v) = 2|E| = \sum_{v\in V_p} d_G(v) + \sum_{v\in V_N} d_G(v)$

parzysta - parzysta

4.5 W grafie G o 19 krawędziach są tylko wierzchołki stopnia 3 i 5. Są cztery wierzchołki stopnia 5. Ile jest wszystkich wierzchołków.

$E=19$

$\sum_{v\in V} d_G(v) = 38 = 2|E|$




$38 = 4\cdot 5 + 3x$

$18 = 3\cdot x$

$x = 6$

$6+4=10$

Wierzchołków jest 10

Pamiętaj, że krawędzi incydentnych [illegible] = [illegible]

A. 6

a) Każdą krawędź utożsamiamy z dwoma wierzchołkami. Zatem [illegible] krawędzi jest nie większa niż liczba par ze zbioru wierzchołków

b) $\binom{\binom{V}{2}}{\varepsilon}$

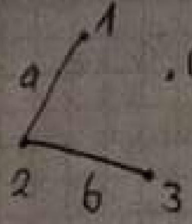
c) Dla $v=1$: $2^{\binom{1}{2}}$

Dla 2: $2^{\binom{2}{2}}=1$

Dla 3: $2^{\binom{3}{2}}=$

$2^{\binom{V}{2}}$ - odp.

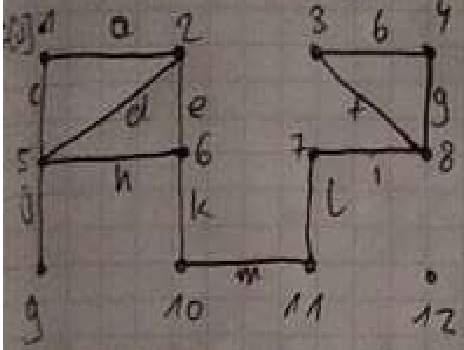
Ćwiczenia 8 (podgrafy, izomorfizm, ciągi stopni)



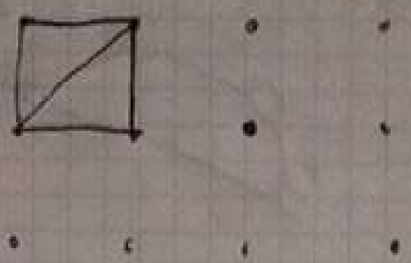
$G[\{1,2\}]$

## Zadanie A.1

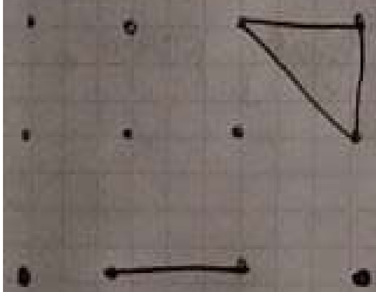
$\hat{V} = \{1,2,5,6,7\}$ ; $\hat{E} = \{b,f,g,i\}$



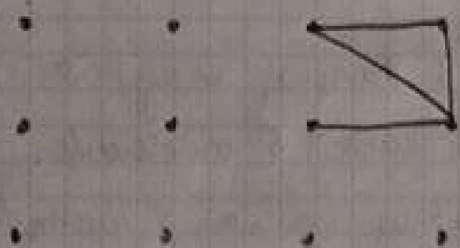
$G[\hat{V}]$



$G[V \setminus \hat{V}] = G - \hat{V}$

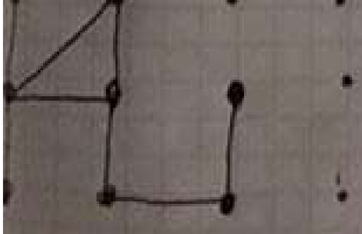


$G[\hat{E}]$



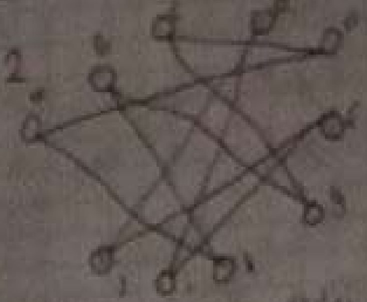
$G[E \setminus \hat{E}]$ ~~= G − Ê~~

(8 wierzchołków)



$G - \hat{E}$ (to samo co w $G[E \setminus \hat{E}]$ tylko na 12 wierzchołków)

Zad. 2

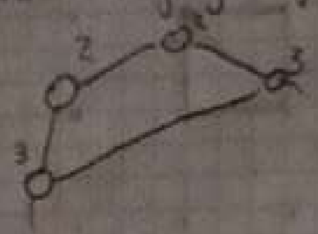
b) 

~~Są~~ Są to grafy izomorficzne (da się zapisać drugi graf w postaci pierwszego)

oba grafy są sumą cykli $C_6$ i $C_4$, więc są izomorficzne.

a) Wydaje mi się, że ~~są~~ nie są to grafy izomorficzne

fragment drugiego grafu




W pierwszym grafie istnieje krawędź łącząca wierzchołki o stopniu 2, a w drugim nie zatem grafy nie są izomorficzne

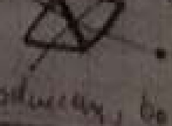
Zadanie 3 Narysuj wszystkie nieizomorficzne grafy proste o 5 wierzchołkach i 5 krawędziach.

1) Najdłuższy cykl ma 5 krawędzi.

2) Najdłuższy cykl ma 4 krawędzie

3) Najdłuższy cykl ma 3 krawędzie.

Jeśli istnieją dwa cykle długości 3 to mają jedną wspólną krawędź.

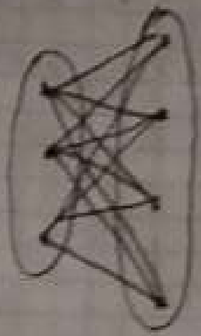


odrzucam, bo już było

tkich grafów nieizomorficznych jest 6.

adanie 4

) $K_{3,4}$:



Krawędzie: 12

Wierzchołki: 7

Graf regularny: NIE

Graf dwudzielny: TAK

Krawędzie dopełnienia: $9 = \binom{7}{2} - 12$

) $K_{m,n}$: Krawędzie: $m \cdot k$

Wierzchołki: $m+n$

Graf regularny: Jeżeli $m=n$ to tak, w przeciwnym przypadku nie

Graf dwudzielny: TAK

Krawędzie dopełnienia: $\binom{m+n}{2} - m k$

$Q_4$ Wierzchołki: 16

Krawędzie: 32

Graf regularny: TAK

Graf dwudzielny: ~~NIE~~ TAK

Krawędzie dopełnienia: $\binom{16}{2} - 32$

d) $Q_n$ Wierzchołki: $2^n$

Krawędzie: $2^n \cdot \frac{n}{2}$

Graf regularny: TAK

Graf dwudzielny: ~~NIE~~ TAK*

Krawędzie dopełnienia: $\binom{2^n}{2} - 2^n \cdot \frac{n}{2}$

* Kluczem dwudzielności są zbiory z parzystą oraz nieparzystą sumą współrzędnych.

Zadanie 5 Czy podany ciąg jest graficzny?

a) $(2,2,2,1,1)$ - TAK

lub

b) $(3,3,3,3,3)$ - NIE, bo $\frac{15}{2} = 7{,}5$, a według wzoru

$\sum_{v \in V} dg(V) = 2 \cdot |E|$, więc jest to nieprawda

Taki graf nie istnieje.

c) $(6,1,1,1,1)$ - NIE

jeden z wierzchołków ma więcej niż $(n-1)$ maksymalny stopień możliwy dla wierzchołka tego grafu ćwiczenia 11 (rekurencja)

zad. 1

$a_n = 2a_{n-1}$

$a_0 = 5$

$a_n = 2a_{n-1} = 2(2a_{n-2}) = 2^n \cdot a_0 = 5 \cdot 2^n$

zad. 2

$j_n$ - liczba ciągów kończących się na 1

$z_n$ - -||- 0

_ _ _ _ _ _ _ 1 0

_ _ _ _ _ 0 1

_ _ _ _ 1 1

$z_n = j_{n-1}$

$$\begin{cases} j_n = z_{n-1} + j_{n-1} = a_{n-1} \\ z_n = j_{n-1} = a_{n-2} \\ a_n = j_n + z_n = a_{n-1} + a_{n-2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} j_n = z_{n-1} + j_{n-1} \\ z_n = j_{n-1} \\ a_n = j_n + z_n \end{cases}$$

$a_{10} = j_{10} + z_{10}$

$a_9 = j_9 + z_9$

$a_{n-1} = j_{n-1} + z_{n-1} = j_n$

$j_{n-1} = a_{n-2}$

$z_n = a_{n-2}$

$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$

$a_1 = 2$

$a_2 = 3$

zad. 3

$a_2 = 1$

$a_3 = 3$

$a_1 = 0$

$\{1,2\},\{3\}$

$\{1,3\},\{2\}$

$\{2,3\},\{1\}$

$\{1\},\{2\}$

$\{1,2,4,8,11\},\{3,5,\ldots,10\}$

$\{1,3,5\},\{2,4,\ldots,11\}$

$a_n = 2a_{n-1} + 1$

$\emptyset = \{1\}$ $a_n = 2^{n-1} - 1$

$n=4$

$\{1, 2, 3, 3, 4, 4\}$ $a_1 = 0$

$c = 1$

$a_n = b_n + c$

$b_n + c = 2(b_{n-1} + c) - 1$

$b_n - 1 = 2(b_{n-1} - 1) + 1$

$b_n = 2b_{n-1} = 2^{n-1} \cdot b_1 = 2^{n-1}$

$a_n = 2^{n-1} - 1$

zad. 4

$- - - - - - - - \underline{20}$ $a_{n-2}$ $- - - - - - - - - - - - 50$ $a_{n-5}$

Budomat ma nam wydać $10 \cdot n$ złotych $(n \geq 4)$

Tyonia $10n$

$a_n = a_{n-2} + a_{n-5}$ głębokość 5

$a_1 = 0$

$a_2 = 1$

$a_3 = 0$

$a_4 = 1$ (2 jeżeli banknoty są rozróżnialne)

$a_5 = 1$

Zad 5 (użytkownicy) | (nowi użytkownicy)

$a_0 = 1$ (pierwszy dzień) | $1 = b_0$

$a_1 = 1$ | $0 = b_1$

$a_2 = 2$ | $1 = b_2$

$a_3 = 4$ | $2 = b_3$

$a_4 = 7$ | $3 = b_4$

$a_5 = 13$ | $6 = b_5$

$a_n$ - liczba użytkowników po $n$ dniach

(podstawiamy)

$b_n = a_n - a_{n-1}$

$b_n = b_{n-2} + 2b_{n-3} + 2b_{n-4} + \dots + 2b_1$

$a_n - a_{n-1} = a_{n-2} - \cancel{a_{n-3}} + \cancel{2a_{n-3}} - \cancel{2a_{n-4}} + \cancel{2a_{n-4}} - \cancel{2a_{n-5}} + \dots + \cancel{2a_1} - \cancel{2a_0} + \cancel{2a_0}$

$a_n - a_{n-1} = a_{n-2} - a_{n-3}$

$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3}$

$n-5$