Logika i teoria mnogości

Ćwiczenia 10

Prawa algebry zbiorów

Definicja. Dla dowolnych zbiorów A, B określamy ich sumę $A \cup B$, iloczyn $A \cap B$ i różnicę $A \backslash B$ w następujący sposób:
$A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}$,
$A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}$,
$A \backslash B = \{x : x \in A \wedge x \notin B\}$.
Czytamy $A \cup B$: A plus B, $A \cap B$: A razy B, $A \backslash B$: A minus B.
Iloczyn $A \cap B$ nazywamy też przekrojem (czeością wspólną) zbiorów A i B.
(D$\cup$) $x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \vee x \in B$
(D$\cap$) $x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B$
(D$\backslash$) $x \in A \backslash B \Leftrightarrow x \in A \wedge x \notin B$

Wyprowadzanie praw za pomocą (EXT)

Wyprowadzamy prawo $L = P$, wykazując równoważność:

$$x \in L \Leftrightarrow x \in P$$

Zadanie 1. Za pomocą (Ext), wyprowadzić następujace prawa algebry zbiorów.
(a) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
(b) $(A \backslash B) \backslash C = A \backslash (B \cup C)$
(c) $A \backslash (B \backslash C) = (A \backslash B) \cup (A \cap C)$

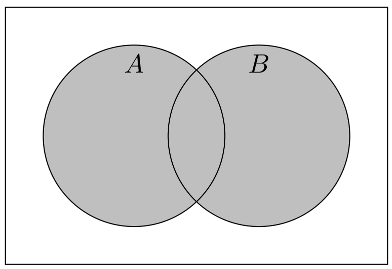
Rozwiązania
(a)
Wykazujemy: $x \in A \cap (B \cup C) \Leftrightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
$x \in A \cap (B \cup C) \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B \cup C) \Leftrightarrow$
$x \in A \wedge (x \in B \vee x \in C) \Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B) \vee (x \in A \wedge x \in C) \Leftrightarrow$
$x \in A \cap B \vee x \in A \cap C \Leftrightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

(b)
$x \in (A \backslash B) \backslash C \Leftrightarrow x \in A \backslash B \wedge \neg(x \in C) \Leftrightarrow$
$x \in A \wedge \neg(x \in B) \wedge \neg(x \in C) \Leftrightarrow x \in A \wedge \neg(x \in B \vee x \in C) \Leftrightarrow$
$x \in A \wedge \neg(x \in B \cup C) \Leftrightarrow x \in A \backslash (B \cup C)$

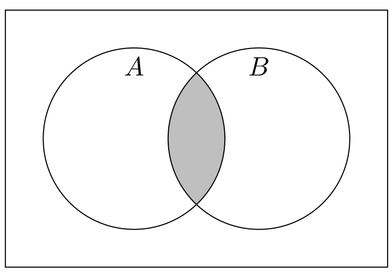
(c)
$x \in A\backslash(B\backslash C) \Leftrightarrow x \in A \wedge \neg(x \in B\backslash C) \Leftrightarrow$
$x \in A \wedge \neg(x \in B \wedge \neg(x \in C)) \Leftrightarrow x \in A \wedge (\neg(x \in B) \vee x \in C) \Leftrightarrow$
$(x \in A \wedge \neg(x \in B)) \vee (x \in A \wedge x \in C) \Leftrightarrow x \in A\backslash B \vee x \in A \cap C \Leftrightarrow$
$x \in (A\backslash B) \cup (A \cap C)$

Diagramy Venna

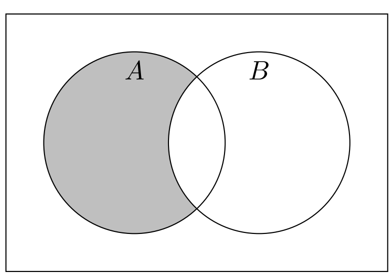
Diagramy Venna obrazują działania na zbiorach i równościowe prawa algebry zbiorów.



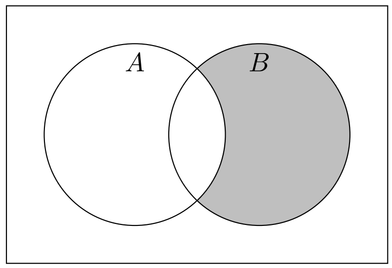
$A \cup B$



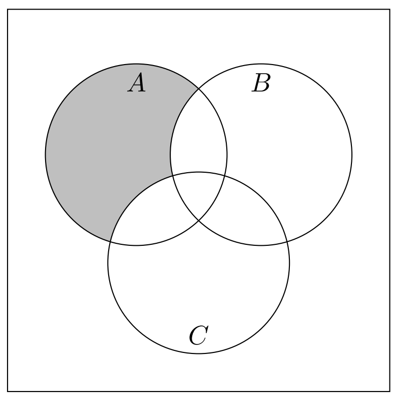
$A \cap B$



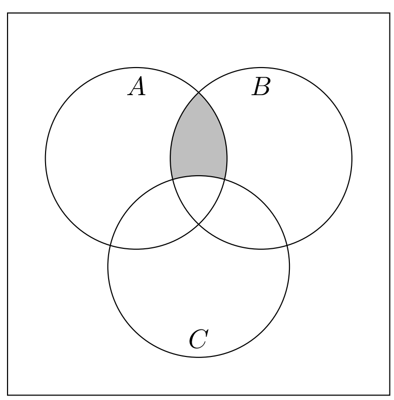
$A \setminus B$



$B \setminus A$



$A \setminus (B \cup C)$



$(A \cap B) \setminus C$

Dla zbioru $A \subset U$ (uniwersum) określamy zbiór:
$A' = U \setminus A = \{x \in U : x \notin A\}$
zwany *dopełnieniem* zbioru A (do uniwersum U).

Zadanie 2. Narysować diagramy Venna obrazujące następujące prawa:
(a) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
(b) $A \backslash (B \cup C) = (A \backslash B) \cap (A \backslash C)$
(c) $(A \backslash B) \cup (B \backslash A) = (A \cup B) \backslash (A \cap B)$

Zadanie 3. Wyprowadzić (za pomocą Ext) prawa z Zadania 2.

Zadanie 4. Narysować diagramy Venna dla praw z Zadania 1.