

# Logika i teoria mnogości

## Ćwiczenia 4

### System sekwentowy dowodzenia praw KRZ

*Sekwent*: skończona lista formuł  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ , interpretowana jako alternatywa  $\varphi_1 \vee \dots \vee \varphi_n$ .

*Aksjomaty*: wszystkie sekwenty zawierające parę sprzecznych formuł  $\varphi, \neg\varphi$  (na dowolnych miejscach).

Reguły dowodzenia:

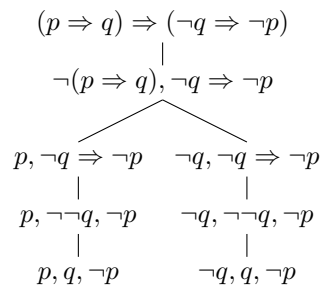
$$\begin{array}{l} (R\neg\neg) \frac{X, \varphi, Y}{X, \neg\neg\varphi, Y} \\ (R\wedge) \frac{X, \varphi, Y; \quad X, \psi, Y}{X, \varphi \wedge \psi, Y} \quad (R\neg\wedge) \frac{X, \neg\varphi, \neg\psi, Y}{X, \neg(\varphi \wedge \psi), Y} \\ (R\vee) \frac{X, \varphi, \psi, Y}{X, \varphi \vee \psi, Y} \quad (R\neg\vee) \frac{X, \neg\varphi, Y; \quad X, \neg\psi, Y}{X, \neg(\varphi \vee \psi), Y} \\ (R\Rightarrow) \frac{X, \neg\varphi, \psi, Y}{X, \varphi \Rightarrow \psi, Y} \quad (R\neg\Rightarrow) \frac{X, \varphi, Y; \quad X, \neg\psi, Y}{X, \neg(\varphi \Rightarrow \psi), Y} \\ (R\Leftrightarrow) \frac{X, \neg\varphi, \psi, Y; \quad X, \varphi, \neg\psi, Y}{X, \varphi \Leftrightarrow \psi, Y} \quad (R\neg\Leftrightarrow) \frac{X, \varphi, \psi, Y; \quad X, \neg\varphi, \neg\psi, Y}{X, \neg(\varphi \Leftrightarrow \psi), Y} \end{array}$$

W tych regułach litery  $X, Y$  oznaczają dowolne konteksty, czyli skończone listy formuł (mogą być puste).

W przypadku reguły z jedną przesłanką wniosek jest logicznie równoważny tej przesłance; w przypadku reguły z dwiema przesłankami wniosek jest logicznie równoważny koniunkcji przesłanek (listy interpretujemy jako alternatywy).

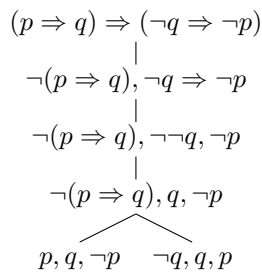
Formuła w korzeniu drzewa jest logicznie równoważna koniunkcji wszystkich alternatyw elementarnych na liściach drzewa. Zatem system sekwentów może służyć do sprowadzania formuł do KPN.

### Przykład

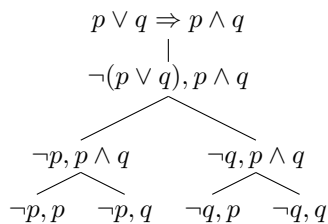


Drzewo dowodu formuły  $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$   
 KPN:  $(p \vee q \vee \neg p) \wedge (\neg q \vee q \vee \neg p)$

Porównaj:



### Przykład

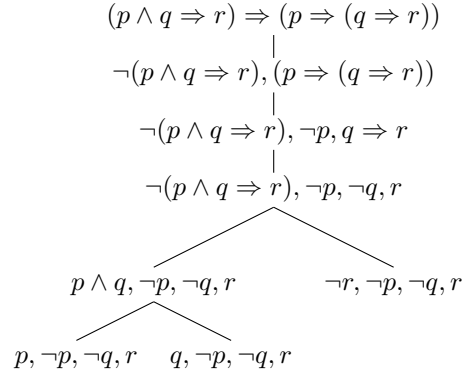


Poszukiwanie dowodu formuły  $p \vee q \Rightarrow p \wedge q$  zakończyło się porażką, ponieważ dwa sekwenty elementarne na liściach drzewa nie są aksjomatami.

KPN:  $(\neg p \vee p) \wedge (\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p) \wedge (\neg q \vee q)$

**Przykład.** Korzystając z metody drzew sekwentów sprawdzić, czy formuła  $(p \wedge q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow (q \Rightarrow r))$  jest tautologią KRZ.

Drzewo sekwentów:



KPN:  $(p \vee \neg p \vee \neg q \vee r) \wedge (q \vee \neg p \vee \neg q \vee r) \wedge (\neg r \vee \neg p \vee \neg q \vee r)$

Odpowiedź: Formuła jest tautologią.

**Zadanie 1.** Korzystając z metody drzew sekwentów sprawdzić, czy poniższe formuły są tautologiami KRZ:

1.  $\neg(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow p \wedge \neg q$
2.  $(p \Rightarrow q) \Rightarrow ((q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r))$
3.  $(p \Rightarrow q) \wedge p \Rightarrow q$
4.  $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg p \Rightarrow \neg q)$
5.  $(p \Rightarrow (q \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \wedge q \Rightarrow r)$
6.  $(p \Rightarrow q \wedge r) \Rightarrow (p \vee q \Rightarrow \neg r)$