Wstęp do rachunku prawdopodobieństwa
Rozgrzewka przed drugą częścią egzaminu

Zadanie 1. O zmiennych losowych X i Y wiemy, że są niezależne i mają ten sam rozkład dany dystrybuantą

$$F(s) = \begin{cases} 0 & \text{dla } s \leqslant 2, \\ \frac{1}{4}(s-2)^2 & \text{dla } 2 < s \leqslant 4, \\ 1 & \text{dla } s > 4. \end{cases}$$

(a) Wyznacz $\mathbb{E}XY$.
(b) Wyznacz $\mathbb{P}(X > 3)$.
(c) Wyznacz $\mathbb{P}(X > 3, Y < 3)$.

Zadanie 2. Gęstość wektora losowego (X, Y) dana jest wzorem:

$$f(x,y) = \begin{cases} 3(x^2y + xy^2) & \text{dla } x, y \in [0,1], \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

(a) Oblicz $\mathbb{E}(X^3)$.
(b) Oblicz $\mathbb{P}(-\frac{1}{2} \leqslant X \leqslant \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \leqslant Y \leqslant \frac{3}{2})$.

Zadanie 3. Roztargniona Ola zapomniała 4-cyfrowy kod do kłódki zamykającej jej szafkę w szatni. Chcąc być sprytną, postanowiła napisać program, który pomoże jej odgadnąć kod. Niestety jedyny pomysł na algorytm, który przyszedł jej do głowy, polegał na zastosowaniu generatora liczb losowych, który z równym prawdopodobieństwem losuje jedną z liczb całkowitych z przedziału $[0, 9999]$, i testuje, czy jest to szukany kod. Zakładamy, że przerywamy sprawdzanie w momencie odnalezienia właściwego kodu. Oceń, na ile algorytm zastosowany przez Olę przyspieszy poszukiwania. W tym celu policz wartość oczekiwaną liczby sprawdzanych losowych kodów oraz ich wariancję.

Zadanie 4. Dzienna liczba pasażerów pociągu do Kołobrzegu jest zmienną losową o wartości oczekiwanej 150 i wariancji 50. Oszacuj prawdopodobieństwo, że:

(a) w poniedziałek liczba pasażerów pociągu do Kołobrzegu będzie większa niż 200, używając nierówności Markowa i Czebyszewa;
(b) we wtorek liczba pasażerów pociągu do Kołobrzegu będzie miejsza niż 175, używając nierówności Markowa;
(c) w ciągu całego tygodnia (od poniedziałku do niedzieli) łączna liczba pasażerów pociągu do Kołobrzegu będzie większa od 1000 i mniejsza od 1100, używając nierówności Czebyszewa.

Uwaga! Zakładamy, że każdego dnia odjeżdża jeden pociąg do Kołobrzegu, a liczby pasażerów każdego dnia są niezależne.

Zadanie 5. Używając CTG, oszacuj, ile co najmniej razy musimy rzucić symetryczną, czworościenną kostką do gry, aby z prawdopodobieństwem co najmniej 0,95 średnia liczba wyrzuconych w tych rzutach oczek należała do przedziału $(2\frac{2}{5}, 2\frac{3}{5})$.

Zadanie 6. Rozważmy łańcuch Markowa $(X_i)_{i=0}^{\infty}$ dany poniższą macierzą przejścia:

$$\Pi = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{3}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}.$$

(a) Wyznacz rozkład po trzech krokach, jeśli $\bar{\rho}^0 = (0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2})$ jest rozkładem początkowym tego łańcucha.
(b) Sprawdź, czy $(X_i)_{i=0}^{\infty}$ jest łańcuchem nieprzywiedlnym.
(c) Sprawdź, czy $(X_i)_{i=0}^{\infty}$ jest łańcuchem okresowym.
(d) Ustal, czy $(X_i)_{i=0}^{\infty}$ jest łańcuchem ergodycznym.
(e) Znajdź wszystkie rozkłady stacjonarne dla tego łańcucha.