Analiza matematyczna dla informatyków.

Mieczysław Cichoń, ver. 2.1/2021

Mieczysław Cichoń - WMI UAM

Strony do lektury na wykłady 5, 6...

Szeregi liczbowe. Suma szeregu. Zbieżność i bezwzględna zbieżność szeregu. Zastosowania w informatyce. Własności szeregów zbieżnych. Działania na szegach zbieżnych.Kryteria zbieżności. Podstawy teorii szeregów geometrycznych i potęgowych. Obliczanie sum szeregów na komputerze. Szeregi potęgowe.

Czytamy najpierw:

[K] : motywacje - strony 21-24

i dalej

[K] : strony 189-194

[W] : strony 42-50 oraz 54-55, 57-61
(lub alternatywnie: z tego wykładu strony 38-48).
Można też: te kilka stron...

Szeregi - motywacje...

Czy należy rozważać jakieś formy "zliczania" nieskończonej ilości liczb? **Tak!** Inaczej nie moglibyśmy unikać wielu paradoksów, ale czy to oznacza "sumowanie" nieskończone? **Nie!**

Gdyby miało to być dodawanie, to miałoby jego własności, czyli musielibyśmy się zgodzić na taki paradoks:

$$0 = 0$$

$$0 = 0 + 0 + 0 + \ldots$$

$$0 = (1-1) + (1-1) + (1-1) + \ldots$$

$0 = 1-1+1-1+1-1\ldots$ przecież *dodawanie* jest łączne, więc możemy??

$0 = 1-(1-1)-(1-1)-\ldots$ przecież *dodawanie* jest łączne, j.w. możemy??

$0 = 1-0-0-0-\ldots$ na to chyba jest powszechna zgoda, obliczamy

$0 = 1$ z tym chyba się nie zgadzamy? $\Rightarrow$ wszystkie liczby są równe...

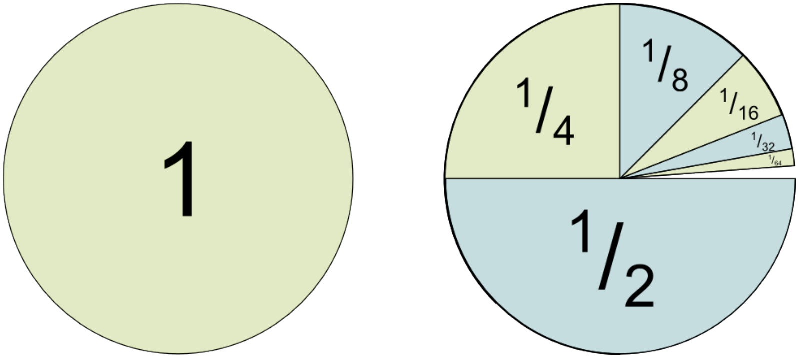
Uwagi.

Takie działanie nieskończone **nie może więc być sumą!** (niech się nikt nie waży tak pisać, bo dostanie: w swoim rozumieniu "5", a ja wpiszę "2" - w końcu przy takim podejściu to byłyby takie same oceny :-))

Jak się wkrótce okaże - w informatyce to m.in. znakomite narzędzie pozwalające operować na przybliżeniach liczb rzeczywistych, bez tego pojęcia nie byłoby sensownych obliczeń na komputerze.

ALE: jak już wiemy komputer nie może operować na zbiorach mieskończonych, czyli to informatyk musi pogodzić przydatność operownia szeregami z możliwościami komputera. Czyli musimy się sami tego nauczyć i poznać własności tego pojęcia...

A jednak coś musimy liczyć...

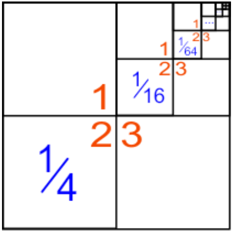


Czy "dodane" ułamki po prawej stronie nie powinny dać wyniku po lewej?

Szeregi liczbowe...

... stanowią uogólnienie sum skończonych (ale nie są wynikiem dodawania!). Niech dany będzie ciąg liczb rzeczywistych $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ oraz niech $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ będzie ciągiem (sum częściowych danego ciągu), którego wyrazy określone są następująco

$$
\begin{aligned}
&s_1 = a_1\\
&s_2 = a_1 + a_2\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\\
&s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}
$$



Szeregi liczbowe.

Jedna z możliwych definicji szeregu liczbowego mówi, że jest to para $((a_n), (s_n))$. Oznaczamy go

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots \equiv \sum_{n=1}^{\infty} a_n \ .$$

Bardziej interesować nas będzie to co nazwiemy **sumą szeregu.** Widzimy więc, że jeśli obliczamy sumę szeregu to w rzeczywistości danemu ciągowi (a_n) przyporządkowujemy liczbę rzeczywistą $s = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$, a więc szereg to funkcjonał, który oznaczamy

$$\sum_{n=1}^{\infty} : \ (a_n) \longrightarrow s = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \ .$$

Mówimy, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, jest **zbieżny** do skończonej liczby s, lub, że ma sumę równą s, co zapisujemy $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$, jeżeli ciąg sum częściowych (s_n) jest zbieżny do granicy s, przy $n \to \infty$. Jeżeli ciąg sum częściowych (s_n) nie jest zbieżny, to szereg nazywamy rozbieżnym.

Warunek konieczny zbieżności szeregu.

Twierdzenie. *Szereg* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *może być zbieżny tylko wtedy, gdy ciąg jego wyrazów* (a_n) *dąży do zera, przy* $n \to \infty$*, tj. gdy*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \ .$$

Zauważmy, że warunek podany w powyższym twierdzeniu jest **warunkiem koniecznym** zbieżności szeregu. Aby się przekonać, że nie jest to warunek dostateczny wystarczy rozważyć szereg harmoniczny $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

Wyraz ogólny szeregu harmonicznego spełnia warunek podany w powyższym twierdzeniu, jednak - jak pokażemy później - szereg ten nie jest zbieżny.

Uwaga: symulacje komputerowe wcale nam nie pomogą. Skrypt ilustracyjny szeregu harmonicznego w "Mathematica" - potrzebny darmowy *CDF Player* lub *Mathematica*.

W informatyce...

Tego jeszcze nie wprowadziliśmy, ale warto już teraz pamiętać, że to szeregi będą podstawą do obliczeń zarówno wartości funkcji w punktach, jak i wartości przybliżonych liczb rzeczywistych - por. przybliżanie π w tekście [K]... Tak będzie najwygodniej reprezentować liczby niewymierne - zamiast kumulować błąd można wielkość przybliżać raz - na końcu, a wcześniej operować wzorem na wyraz ogólny szeregu a_n.

I tu uwaga: nadal nie ma "najlepszego" wzoru na obliczanie komputerowe liczby poprzez szereg. To się nadal rozwija i tworzy się nowe algorytmy.

For estimating π

$$\frac{1}{\pi} = \frac{2\sqrt{2}}{9801} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(4k)!(1103+26390k)}{(k!)^4 396^{4k}}$$

Jedna liczba - wiele możliwych algorytmów...

Dla liczby π (jak każdej innej) mamy oczywiście wiele możliwości obliczeniowych m.in. za pomocą szeregów. Oto klasyczne:

4. INFINITE SERIES

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \dots$$ LEIBNIZ-MADHAVA

$$\frac{\pi^2}{6} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots$$ EULER

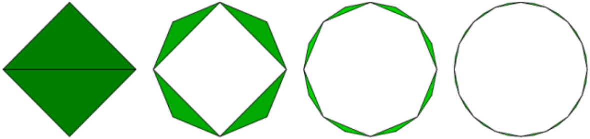
$$\frac{1}{\pi} = 12 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (6k)! (545140134k + 13591409)}{(3k)!(k!)^3 640320^{3k+3/2}}$$ CHUDNOVSKY ALGORITHM (WORLD RECORD)

(w jakim sensie algorytm Chudnovskiego to "rekord świata: największy przyrost dokładnie obliczonych miejsc po przecinku w jednym kroku). Przykłady dla liczby π - por. materiał [K].

1.3.2 Liczba π poprzez szereg.

Powróćmy do obliczania liczby π. Widzieliśmy, że metoda oparta o przybliżanie obwodu koła daje niezbyt zadowalający wynik. Często jednak, jeśli jeden algorytm zastąpimy innym, to możemy uzyskać lepsze wyniki przy zastosowaniu tej samej arytmetyki komputerowej. Wiemy, że liczba π jest nie tylko obwodem koła o średnicy jeden, ale również polem koła o promieniu jeden.

Zastępując pole tego koła polami wpisanych w nie 2^n-kątów foremnych również otrzymamy ciąg przybliżeń liczby π. Oznaczmy przez P_n pole 2^n-kąta foremnego wpisanego w koło. Dla $n = 1$ rozważamy $2-kt$ jako zdegenerowaną, pozbawioną pola figurę redukującą się do średnicy koła, zatem $P_1 = 0$.



Rysunek 1.8: Kolejne dodatki do pola koła.

Zauważmy, że 2^{n+1}-kąt powstaje z 2^n-kąta poprzez dorysowanie figury złożonej z 2^n trójkątów równoramiennych wpisanych w koło o podstawach leżących na bokach 2^n-kąta (patrz rys. 1.8). Niech A_n oznacza pole tej figury. Zatem Zatem

$$P_{n+1} = P_n + A_n,$$

czyli A_{n+1} jest poprawką, która dodana do pola 2^n-kąta daje pole 2^{n+1}-kąta. Stąd

$$P_n = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + \ldots + A_{n-1},$$

a pole koła P_K otrzymamy sumując wszystkie poprawki:

$$P_K = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + \ldots .$$

Wartości A_i można wyliczyć. Aby wykorzystać wzory z podrozdziału 1.2.5, zamiast koła o promieniu jeden rozważymy ponownie koło o średnicy jeden, a więc o promieniu $1/2$. Zatem ze wzoru (1.3) jego pole to $\frac{\pi}{4}$. Zatem jako przybliżenie π interesuje nas ciąg $s_n := 4P_n$. Niech T_n oznacza pole trójkąta równoramiennego o podstawie równej bokowi 2^n-kąta, a ramionach równych bokowi 2^{n+1}-kąta. Mamy

$$A_n = 2^n T_n$$

Można policzyć, że $T_n = \frac{a_n(1-\sqrt{1-a_n^2})}{4}$, gdzie a_n, jak poprzednio, oznacza bok 2^n-kąta foremnego wpisanego w koło o średnicy jeden. Zatem

$$P_{n+1} = P_n + 2^n \frac{a_n(1-\sqrt{1-a_n^2})}{4}$$

oraz

$$s_{n+1} = s_n + 2^n a_n(1-\sqrt{1-a_n^2}). \tag{1.4}$$

Liczba π.

W rozdziale 1.3.2 zaprezentowaliśmy metodę przybliżania liczby π poprzez pola wielokątów wpisanych w koło i zauważyliśmy, że stosowny ciąg (1.4) jest szeregiem. Przyjrzyjmy się teraz zachowaniu tego szeregu od strony numerycznej Program wyznaczający wyrazy ciągu (1.4) w Mathematica jest przedstawiony na listingu 12.1, a w języku C++ na listingu 12.2

Uruchamiając program łatwo sprawdzić, że metoda oparta o pola przy zastosowaniu tego samego typu **double** daje znacznie dokładniejsze wyniki niż metoda poprzednia, bo już 26-ta suma częsciowa daje wartość

$$s_{26} = 3.141592653589793,$$

która jest poprawnym przybliżeniem liczby π do ostatniej cyfry włącznie.

W informatyce I.

Szeregi zastępują ciągi w wielu algorytmach. **Dlaczego?**
Po prostu - to często "lepsze" algorytmy (czyli szybciej zbieżne).

Prosty przykład: liczba e. Jeżeli obliczamy ją z definicji jako granice ciągu $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, to kolejne wyrazy są jej przybliżeniami.
Ale do obliczenia kolejnego wyrazu nie korzystamy z poprzedniego ("tracimy obliczenia"), a co gorsza wyniki są woln..zne.

Jeśli skorzystamy z szeregu $e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$, to chcąc zwiększyć precyzję wystarczy operacja $S_n + \frac{1}{(n+1)!}$. Co więcej

$$e - S_n \leq \frac{1}{n \cdot n!},$$

a więc algorytm jest szybko zbieżny.

Pamiętajmy, że każda liczba rzeczywista, to właściwie suma szeregu jej rozwinięć dziesiętnych (lub o innej podstawie) rzeczywistych - dla pewnych specjalnie istotnych liczb (np. π) podaje się oczywiście lepsze sposoby reprezentacji. Cały czas pracujemy z szeregami!

Zadanie: poszukać samodzielnie materiałów na ten temat...

Szeregi bardzo dobrze nadają się do przybliżania wartości: każde kolejne przybliżenie powstaje przez dodanie nowo obliczonego wyrazu do poprzedniego przybliżenia!

Zadanie.

Informatycy napotykają raczej *odwrotne zagadnienie*: mamy dany algorytm obliczający daną wartość. **Czy i dlaczego jest poprawny? Czy można go usprawnić?**
Poniżej procedura - ćwiczenie do tych pytań:

```
def approximate_pi():
    EPSILON = 1.0e-7
    term = 1
    n = 0
    sum_pi = 0
    while abs(term) > EPSILON:
        term = 4 * (((-1) ** (n)) / (2 * n + 1))
        sum_pi += term
        n += 1
    print(float(round(sum_pi,10)))
```

lub lepiej:

```
def approximate_pi():
    EPSILON = 1.0e-7
    n = 0
    sum_pi = 0
    sign = 1
    while True:
        term = 1 / (2 * n + 1)
        if term < EPSILON:
            break
        sum_pi += sign * term
        n += 1
        sign = -sign
    return float(round(4 * sum_pi, 10))

print(approximate_pi())
```

Szeregi w informatyce cd.

Pamiętajmy, że na pewno liczb niewymiernych nie da się reprezentować dokładnie na komputerze. Jedną z metod (całkiem niezłą) ich przybliżania będą szeregi. *Można skorzystać z gotowych bibliotek* (i co najmniej poznać ich algorytmy obliczeniowe) albo można tworzyć i badać własne algorytmy...

Czyli trzeba znać np. własności szeregów, aby wyeliminować ograniczenia arytmetyki komputerowej i uniknąć błędów...

Skrypt ilustracyjny obliczania sum szeregów w "Mathematica" - potrzebny darmowy *CDF Player* lub *Mathematica*

Zauważmy, że jeśli dany jest ciąg (s_n), to jest on ciągiem sum częściowych szeregu postaci

$$s_1 + (s_2 - s_1) + (s_3 - s_2) + \ldots = s_1 + \sum_{n=1}^{\infty} (s_{n+1} - s_n) \ .$$

Twierdzenie. *Szeregi* **zbieżne** *mają własność łączności dodawania wyrazów sąsiednich, tzn. jeżeli w szeregu zbieżnym* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$ *połączymy wyrazy sąsiednie w grupy, np.*

$$(a_1 + \ldots + a_{n_1}) + (a_{n_1+1} + \ldots + a_{n_2}) + (a_{n_2+1} + \ldots + a_{n_3}) + \ldots$$

gdzie $1 \leq n_1 < n_2 < \ldots$ *, to otrzymany szereg jest zbieżny do tej samej sumy* s.

Te twierdzenie ułatwi obliczenia przybliżeń sum szeregów - **o ile tylko będziemy wiedzieli, że są zbieżne!**

Wyrażenia w nawiasach można obliczać w podprocedurach...

Jeśli nie możemy sobie pozwolić na kumulowanie błędów na komputerze, musimy skorzystać ze specjalizowanych programów matematycznych np. *Mathematica* czy *Maple*. Tam są uwzględnione wszelkie reguły, o których mówimy (i dużo więcej!)... Np.

12.4.4 Szeregi w programie Mathematica

Program Mathematica dość dobrze radzi sobie z liczeniem sum szeregów, a w przypadku braku zbieżności sygnalizuje ten fakt. Do policzenia sumy szeregu $\sum_{i=p}^{\infty} a_n$ używamy instrukcji

```
Sum[a[n],{n,p,Infinity}]
```

Na przykład

```
Sum[1/n!, {n, 2, Infinity}]
```

zwraca $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} = -2 + e$. Oznacza to, że Mathematica, w miarę swoich umiejętności, stara się zwrócić wynik dokładny, używając symbolicznych oznaczeń na stałe matematyczne.

Dopiero w końcowym oszacowaniu musimy obliczyć *e*...

Własności szeregów zbieżnych.

Twierdzenie. *Załóżmy, że dane są dwa szeregi zbieżne* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = b$ *oraz że* λ *jest dowolną liczbą.*

Wówczas szeregi $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$, $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - b_n)$ *oraz* $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda a_n$ *są zbieżne i zachodzą wzory*

(a) $\quad \sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) = a + b \quad ,$

(b) $\quad \sum_{n=1}^{\infty}(a_n - b_n) = a - b \quad ,$

(c) $\quad \sum_{n=1}^{\infty} \lambda a_n = \lambda a \quad .$

Takie działania - TYLKO na szeregach, o których **wiemy**, że są zbieżne.

Szeregi bezwzględnie i warunkowo zbieżne.

Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nazywamy bezwzględnie zbieżnym, jeżeli szereg $\sum_{n\to\infty} | a_n |$ jest zbieżny.

Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nazywamy warunkowo zbieżnym jeżeli jest on zbieżny, ale nie jest bezwzględnie zbieżny.

Uwaga: warunkowa zbieżność szeregu może prowadzić do problemów w obliczeniach na komputerze. Dlaczego? Na kolejnym slajdzie...

Twierdzenia mówiące o bezwzględnej i warunkowej zbieżności szeregów liczbowych.

Twierdzenie. *Każdy szereg bezwzględnie zbieżny jest zbieżny.*

Twierdzenie. *Szereg bezwględnie zbieżny pozostaje zbieżny i nie zmienia swojej sumy po dowolnej zmianie porządku wyrazów.*

Twierdzenie. (twierdzenie Riemanna) *W szeregu warunkowo zbieżnym można tak zmienić porządek wyrazów, aby nowy szereg był zbieżny do dowolnie obranej liczby, lub tak aby nowy szereg był rozbieżny .*

Przykładem szeregu warunkowo zbieżnego jest szereg anharmoniczny

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}.$$

Kluczowy problem w obliczeniach na komputerze: bez wiedzy o bezwzględnej zbieżności szeregu nie wolno zmieniać kolejności sumowania wyrazów - por. tw. Riemanna)

Działania na szeregach zbieżnych.

Trzy podstawowe własności już znamy: suma, różnica i iloczyn przez stałą szeregów zbieżnych są zbieżne (por. slajd (20)).

Pytanie: **czy i jak** można mnożyć szeregi (czyli również liczby reprezentowane nimi na komputerze)?

Mnożenie szeregów jest uogólnieniem mnożenia sum skończonych. Załóżmy, że dane są dwa szeregi zbieżne $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a$ oraz $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = b$. Dla utworzenia iloczynu szeregów $(\sum_{n=1}^{\infty} a_n) \cdot (\sum_{n=1}^{\infty} b_n)$ należy dodać wszystkie możliwe składniki postaci $a_i b_j$. W tym celu tworzymy tablicę

$$\begin{array}{llll}
a_1 b_1 & a_1 b_2 & a_1 b_3 \ldots \\
a_2 b_1 & a_2 b_2 & a_2 b_3 \ldots \\
a_3 b_1 & a_3 b_2 & a_3 b_3 \ldots \\
\multicolumn{4}{c}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}
\end{array}$$

oraz ustalamy sposób dodawania wyrazów występujących w tej tablicy.

Iloczyn Cauchy'ego szeregów.

Oznaczmy

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n\right) .$$

(a) Jeżeli wyrazy c_n zdefiniujemy wzorem

$$c_n = \sum a_i b_j \ ,$$

gdzie $n = i \cdot j$, a więc iloczyn wskaźników jest stały, to otrzymujemy sposób mnożenia metodą Dirichleta.

(b) Gdy $c_n = a_n b_1 + a_{n-1} b_2 + \ldots + a_1 b_{n-2} + a_0 b_{n-1}$, a więc dodajemy wyrazy leżące na bocznych przekątnych powyższej tablicy, to otrzymujemy sposób mnożenia metodą Cauchy'ego.

(c) Jeżeli wyrazy szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ zdefiniujemy wzorem

$$c_n = a_n b_1 + a_n b_2 + \ldots + a_n b_{n-1} + a_n b_n + a_{n-1} b_n + \ldots + a_2 b_n + a_1 b_n$$

to otrzymujemy sposób mnożenia szeregów według kwadratów (sumujemy te wyrazy powyższej tablicy, które leżą na dolnym i prawym boku odpowiedniego kwadratu tablicy).

Twierdzenie. (twierdzenie Cauchy'ego). *Jeżeli szeregi* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *oraz* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *są bezwzględnie zbieżne, to ich iloczyn* $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ *jest bezwzględnie zbieżny i zachodzi wzór*

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = a \cdot b \ ,$$

przy czym sposób sumowania jest dowolny.

Twierdzenie. (twierdzenie Mertensa[1]). *Jeżeli szeregi* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *oraz* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *są zbieżne oraz przynajmniej jeden z nich jest bezwzględnie zbieżny, to ich iloczyn* $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ *otrzymany metodą mnożenia Cauchy'ego jest zbieżny i zachodzi wzór* $\sum_{n=1}^{\infty} c_n = a \cdot b$.

[1] F. Mertens: profesor Uniwersytetu Jagiellońskiego, w okresie 1865-1884

Na ogół obliczanie sumy szeregu może być skomplikowane. Na razie poznaliśmy, w zasadzie, jeden przypadek, gdy potrafimy ją obliczyć: szeregi geometryczne: **jeżeli** $|q| < 1$, **to**

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}.$$

Nieco później poznamy kilka innych metod (na razie to niemożliwe...), ale zauważmy, że **gdybyśmy** wiedzieli, że szeregi są zbieżne, to można skorzystać z w własności szeregów zbieżnych i najpierw spawdzać zbieżność kolejnych, a w efekcie co najmniej **obliczać przybliżone sumy szeregów** - co może być wystarczające (dla sum częściowych S_n szeregów **zbieżnych (!)** mamy: $\lim_{n\to\infty} S_n = S$, a więc S_n "przybliża" wartość S).

Oznacza to, że głównym celem dla nas jest

sprawdzanie CZY szereg jest zbieżny.

Takie twierdzenia, które orzekają zbieżność szeregu (lub: nie) w zależności od pewnych własności ciągów (a_n) nazywamy kryteriami zbieżności.

Na ćwiczeniach warto stosować - ciekawe kryterium o zagęszczaniu...

Stwierdzenie 4.18 (kryterium zagęszczeniowe). *Jeśli (a_n) jest malejącym ciągiem liczb dodatnich, to szeregi*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \textit{oraz} \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n\,, \quad \textit{gdzie} \quad b_n = 2^n a_{2^n}\,,$$

są albo jednocześnie zbieżne, albo jednocześnie rozbieżne.

Szeregi o wyrazach nieujemnych.

Rozważmy teraz szeregi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach dodatnich $a_n > 0$ lub nieujemnych $a_n \geq 0$ dla $n \in \mathbb{N}$.

Jest oczywiste, że przy takim założeniu o wyrazach szeregu ciąg sum częściowych (s_n) jest albo rosnący albo niemalejący.

Wynika stąd więc, że szeregi o wyrazach nieujemnych są albo zbieżne, co możemy zapisać $\sum_{n=1}^{\infty} a_k < \infty$, albo są rozbieżne do $+\infty$.

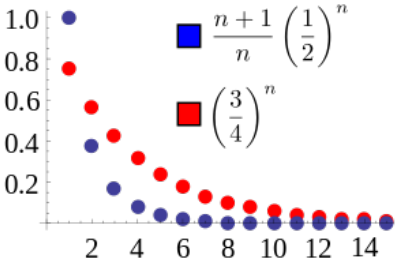
Podamy kilka twierdzeń, które pozwalają rozstrzygnąć ten problem.

Kryterium porównawcze.

Jeżeli wyrazy szeregów $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ oraz $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ dla prawie wszystkich n spełniają nierówności

$$0 \leq a_n \leq b_n \ ,$$

to gdy szereg $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ (nazywany majorantą) jest zbieżny, wówczas szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest także zbieżny, natomiast gdy szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (nazywany minorantą) jest rozbieżny to rozbieżny jest również szereg $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.



Stwierdzenie 4.12 (kryterium porównawcze, wersja I). *Załóżmy, że $a_n, b_n > 0$ i istnieją takie liczby $c > 0$ i $n_0 \in \mathbb{N}$, że $a_n \leq c \cdot b_n$ dla wszystkich $n \geq n_0$. Wtedy*

(a) *Ze zbieżności szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ wynika zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$;*

(b) *Z rozbieżności szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ wynika rozbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.*

Przykład 4.15. Jeśli $q \in (0,1)$, to szereg o wyrazach $a_n = nq^n$ jest zbieżny. Istotnie, weźmy dowolne $s \in (q,1)$. Ponieważ $(n+1)/n \to 1$, więc dla wszystkich dostatecznie dużych n jest

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+1}{n} q < s = \frac{b_{n+1}}{b_n}, \qquad \text{gdzie } b_n = s^n.$$

Ponieważ dla każdego $s \in (0,1)$ szereg geometryczny $\sum s^n$ jest zbieżny, więc szereg $\sum nq^n$ jest zbieżny. To wynika z punktu (a) ostatniego kryterium. □

Przykład 4.16. Postępując praktycznie tak samo, jak w poprzednim przykładzie, można stwierdzić, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} n^k q^n$, gdzie k jest ustaloną liczbą naturalną i $q \in (0,1)$, jest zbieżny. □

Kryterium ilorazowe (d'Alemberta).

Kryterium ilorazowe, (d'Alemberta). Niech dany będzie szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, gdzie $a_n > 0$ dla $n = 1, 2, \ldots$ oraz niech

$$g = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \, .$$

Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, gdy $g < 1$; jest rozbieżny, gdy $g > 1$, (przypadek gdy $g = 1$ wymaga **osobnego zbadania**).

Dla szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \equiv \sum_{n=1}^{\infty} A_n$ spełniony jest warunek $\lim_{n\to\infty} \dfrac{A_{n+1}}{A_n} = \lim_{n\to\infty} \dfrac{n}{n+1} = 1$, a jak wiemy szereg ten jest rozbieżny.

Dla szeregu $\zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \equiv \sum_{n=1}^{\infty} B_n$ mamy warunek $\lim_{n\to\infty} \dfrac{B_{n+1}}{B_n} = \lim_{n\to\infty} \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^2 = 1$, a szereg $\zeta(2)$ jest jednak zbieżny.

Kryterium pierwiastkowe (Cauchy'ego).

Załóżmy, że dany jest szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ taki, że $a_n \geq 0$ i niech

$$q = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$$

lub

$$q = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \; .$$

Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, gdy $q < 1$, jest rozbieżny gdy $q > 1$, (w przypadku gdy $q = 1$ kryterium Cauchy'ego nie daje rozstrzygnięcia).

Kryterium Raabe'go.

Jest ono mocniejsze od kryterium Cauchy'ego, a więc także mocniejsze od kryterium d'Alemberta (ale za to jego warunek jest nieco bardziej skomplikowany do obliczenia...).

Kryterium Raabe'go. Niech dany będzie szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, którego wyrazy są dodatnie i niech spełniony będzie następujący warunek

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = \gamma\ .$$

Jeżeli $\gamma > 1$, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, jeżeli $\gamma < 1$, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny, natomiast w przypadku gdy $\gamma = 1$ kryterium nie daje rozstrzygnięcia.

Szeregi naprzemienne.

To postać szeregu, która jest często spotykana, a co więcej ma bardzo proste kryterium zbieżności.

Szeregiem naprzemiennym lub przemiennym nazywamy szereg postaci $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$, gdzie $a_n \geq 0$ dla każdej liczby naturalnej n. Widzimy więc, że szereg naprzemienny to szereg postaci

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots + (-1)^{n+1}a_n + \ldots$$

Kryterium Leibniza. Jeżeli (a_n) jest ciągiem malejącym zbieżnym do zera, to szereg naprzemienny

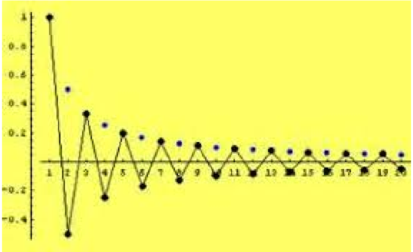
$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$$

jest zbieżny. Co więcej można oszacować błąd przybliżenia jego sumy S przez sumy częściowe S_n:

$$|S - S_N| \leq |a_{N+1}|.$$

Szeregi naprzemienne II.

Ostatni fragment tezy kryterium Leibnitz'a jest kluczowy w zastosowaniu szeregów naprzemiennych w informatyce - i tłumaczy występowanie algorytmów, w których kolejne "poprawki" obliczeń są brane kolejno "z nadmiarem" i z"z niedomiarem". Zawsze znamy precyzję oszacowania...



Wyrazy (a_n) naprzemiennie zmieniają znak...

A może wystarczy komputer?

Niektórym może się wydawać, że zamiast używać matematyki - kryterów zbieżności, to wystarczy symulacja komputerowa. *Pomarzyć można!*

Przy w miarę prostych szeregach to może być poprawna sugestia (ale i tak kryterium rozstrzyga, a nie sugeruje). Ale bywa gorzej.

Na początek szereg harmoniczny $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. Liczymy sumy częściowe (tu przyda się komputer) i małe zaskoczenie: suma 100 wyrazów $S_{100} \approx 5,6$ - dość daleko od hipotezy rozbieżności. No to milion: $S_{1000000} \approx 14,8$. nadal "niezbyt duża" liczba. No to kiedy będzie więcej niż 100? Ktoś chce zrobić symulację? Nie radzę! Potrzeba około 10^{43} wyrazów! A i tak "jak daleko stąd do nieskończoności"! Nie radzę wnioskować o zbieżności szeregu na podstawie symulacji komputerowych...

A może wystarczy komputer - cd I.

No to może komputer pozwoli sprawdzić **łatwo** rozbieżność?

Niestety - proszę zapoznać się z przykładami 4.24 i 4.25 w materiale [W] strony 49-51. Mogłoby się wydawać, że szereg Kempnera jest "zbliżony" do harmonicznego, ale jest zbieżny!

Przykład 4.25 (szereg Kempnera). Niech $\mathcal{A}$ będzie zbiorem tych liczb naturalnych, w których zapisie dziesiętnym w ogóle nie występuje cyfra 9. Wtedy szereg

$$\sum_{n \in \mathcal{A}} \frac{1}{n}$$

jest *zbieżny*, a jego suma S nie przekracza liczby 80. Aby się o tym przekonać, oznaczmy

Porównać też: [K] strony 189-193.

A może wystarczy komputer - cd II.

A może szereg harmoniczny to jakiś wyjątek? Niestety - może być nawet znacznie gorzej... Jeden przykład:

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \ln n \ln(\ln n)}.$$

Proszę sprówać policzyć sumy częściowe, ale nie ustawiać zbyt wysoko swoich wymagań na sumę! Nawet $S_N \approx 10$ to trudne ($N \approx 10^{0,7 \cdot 10^{90}}$) i nie ma szans na domowym komputerze...

To pozwala mi przypomnieć problem "stopu" algorytmu rekurencyjnego, gdyby ktoś badał przyrost dwóch kolejnych obliczeń, to bardzo szybko wyjdzie mu "zero maszynowe" i ... błędny wniosek...

Zostańmy przy matematyce... Patrz też [W] strona 49 (przykłady 4.21 i 4.22).

Zadania.

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, (szereg harmoniczny).

R o z w i ą z a n i e. Gdyby szereg harmoniczny był zbieżny to wówczas $\lim_{n\to\infty} s_{2n} = \lim_{n\to\infty} s_n$. Jeśli obliczymy różnicę $s_{2n} - s_n$ to otrzymujemy

$$s_{2n} - s_n = (1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2n}) - (1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}) =$$
$$= \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2n} \geq n\frac{1}{2n} = \frac{1}{2} \ .$$

Otrzymaliśmy sprzeczność, gdyż z jednej strony mamy nierówność

$$s_{2n} - s_n \geq \frac{1}{2} \qquad \text{dla} \quad n \in \mathbb{N} \ ,$$

a z drugiej strony wiemy, że

$$\lim_{n\to\infty} (s_{2n} - s_n) = 0 \ .$$

Wykazaliśmy więc, że szereg harmoniczny jest rozbieżny.

(2) $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$, $q \neq 1$, (szereg geometryczny).

R o z w i ą z a n i e. Przez indukcję obliczamy n-tą sumę częściową szeregu geometrycznego

$$s_n = 1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1} = \frac{1-q^n}{1-q} \ .$$

Wiemy, że ciąg (q^n) jest zbieżny do zera gdy $\mid q \mid < 1$, natomiast jest rozbieżny dla $\mid q \mid > 1$. Wynika więc, że $\lim_{n\to\infty} s_n = \dfrac{1}{1-q}$.

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q} \ , \qquad \text{dla} \quad \mid q \mid < 1 \ .$$

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{n+1}$.

R o z w i ą z a n i e. Wyraz ogólny szeregu ma własność

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1 \ ,$$

a więc nie jest spełniony warunek konieczny zbieżności szeregu, czyli szereg $\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{4}{5} + \ldots$ jest rozbieżny.

(4) Podamy drugi przykład, w którym potrafimy **obliczyć** sumę szeregu...

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}.$$

R o z w i ą z a n i e. Ponieważ prawdziwy jest wzór

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1},$$

więc n-tą sumę częściową możemy zapisać w postaci

$$s_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) +$$

$$+ \ldots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1.$$

Ostatecznie otrzymaliśmy wzór $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$.

Zadanie (5).

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$$

R o z w i ą z a n i e. Pokażemy, że ciąg sum częściowych (s_n) posiada dwa punkty skupienia, a więc nie jest zbieżny, co oznacza, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$ jest rozbieżny.

Obliczmy $$s_{2n} = (-1+1) + \ldots + (-1+1) = 0 \quad ,$$

$$s_{2n+1} = (-1+1) + \ldots + (-1+1) - 1 = -1 \quad \text{, a więc}$$

$\lim_{n\to\infty} s_{2n} = 0$ oraz $\lim_{n\to\infty} s_n = -1$.

Szereg jest rozbieżny.

Zadanie (6).

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{n^n}$$

R o z w i ą z a n i e. Dany szereg jest rozbieżny, ponieważ po zastosowaniu kryterium ilorazowego stwierdzamy, że

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{3^n n!} = 3 \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{3}{e} > 1\ .$$

Szereg jest rozbieżny.

Zadanie (7).

$$\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n \ln n}$$

R o z w i ą z a n i e. Dla zbadania zbieżności tego szeregu naprzemiennego zastosujemy kryterium Leibniza. W tym celu wystarczy obliczyć granicę

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n \ln n} = 0$$

oraz napisać nierówność prawdziwą dla $n = 2, 3, \ldots$

$$\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)} < \frac{1}{n \ln n} \; .$$

Ciąg (a_n) jest malejący do zera, a więc szereg jest zbieżny na mocy kryterium Leibnitz'a.

Szereg anharmoniczny.

Zadanie (8).

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$$

R o z w i ą z a n i e. Ponieważ ciąg $\left(\frac{1}{n}\right)$ jest malejący i dąży do zera przy $n \to \infty$, więc na podstawie kryterium Leibniza stwierdzamy, że szereg anharmoniczny jest zbieżny.

Można wykazać (nieco później zrobimy to... - obliczymy jego sumę!!), że:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n} = \ln 2 \ .$$

Zadanie (9).

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$$

R o z w i ą z a n i e. Wyraz ogólny szeregu możemy przedstawić w następującej postaci przy pomocy ułamków prostych

$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2k} - \frac{1}{k+1} + \frac{1}{2(k+2)} ,$$

cd. - kolejny slajd...

a więc n-ta suma częściowa przyjmuje postać

$$s_n = \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4} + \frac{1}{3\cdot 4\cdot 5} + \ldots$$
$$\ldots + \frac{1}{(n-2)(n-1)n} + \frac{1}{(n-1)n(n+1)} + \frac{1}{n(n+1)(n+2)} =$$
$$= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2\cdot 3}\right) + \left(\frac{1}{2\cdot 2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2\cdot 4}\right) +$$
$$+ \left(\frac{1}{2\cdot 3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2\cdot 5}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{2(n-2)} - \frac{1}{n-1} + \frac{1}{2n}\right) +$$
$$+ \left(\frac{1}{2(n-1)} - \frac{1}{n} + \frac{1}{2(n+1)}\right) + \left(\frac{1}{2n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2(n+2)}\right) =$$
$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{4(n+2)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{4}\,.$$

Pokazaliśmy więc, że $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \dfrac{1}{4}$.

Zadanie (10). $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$.

R o z w i ą z a n i e. Dany szereg jest zbieżny, ponieważ po zastosowaniu kryterium ilorazowego stwierdzamy, że

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{2^n n!} = 2 \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{2}{e} < 1 \ .$$

Szeregi potęgowe.

Szereg postaci

$$a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\ldots+a_n(x-x_0)^n+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n,$$

gdzie $a_0, a_1, \ldots$ są dowolnymi liczbami, nazywamy szeregiem potęgowym. Dla $x = x_0$ szereg ten jest zawsze zbieżny i ma sumę a_0; dla $x \neq 0$ szereg może być zbieżny, ale nie musi.
O pewnym zastosowaniu takich szeregów już mówiliśmy - funkcje tworzące!

Twierdzenie. (o zbieżności szeregu potęgowego). *Jeżeli szereg*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$$

jest zbieżny w punkcie $\tilde{x} \neq x_0$, to jest bezwzględnie zbieżny wewnątrz przedziału $(x_0-\varrho, x_0+\varrho)$, gdzie $\varrho = |x_0-\tilde{x}|$ i jednostajnie zbieżny w każdym przedziale $[-\Theta(x_0-\varrho), \Theta(x_0+\varrho)]$, gdzie $0 < \Theta < 1$.

Promieniem zbieżności szeregu potęgowego $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ nazywamy kres górny r zbioru tych $| x - x_0 |$, dla których szereg $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ jest zbieżny.

Gdy zbiór ten jest nieograniczony, umawiamy się przyjąć $r = \infty$. Przedział $(x_0 - r, x_0 + r)$ (koło $| x - x_0 | < r$) nazywamy *przedziałem zbieżności (kołem zbieżności)* szeregu potęgowego o promieniu zbieżności r.

Twierdzenie Cauchy'ego - Hadamarda podaje wzór na promień zbieżności.

Twierdzenie. *Niech $\lambda = \overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{| a_n |}$. Wtedy promieniem zbieżności szeregu potęgowego $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ jest $r = \frac{1}{\lambda}$, przy czym gdy $\lambda = 0$ przyjmujemy $r = \infty$, a gdy $\lambda = \infty$, przyjmujemy $r = 0$.*

Te ostatnie zastosowanie ma swoją podstawę w obserwacji, że *znane nam* **funkcje** (elementarne) mają swoje reprezentacje w postaci szeregów potęgowych i **wygodnie jest zastępować je szeregami** (co pozwala oszacować z dowolną dokładnością ich wartości!!).

Można m.in. wykazać, że:

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Tak przy okazji - mamy nareszcie formalne definicje tych funkcji!
W szkole ich nie było...

Liczba e w obliczeniach komputerowych.

Te wzory pokazują jak efektywnie przybliżać wartości tych (i innych) funkcji na komputerze - np. dla liczby e to

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!},$$

$$e \approx \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!}.$$

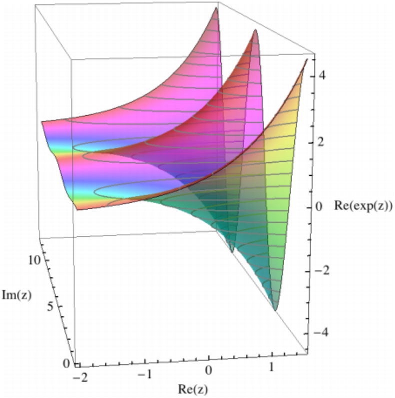
To oczywiście lepsza metoda niż z definicji tej liczby - aby zwiększyć dokładność obliczeń wystarczy zastosować ujęcie rekurencyjne (z definicji - musielibyśmy liczyć całkowicie od nowa).

Ćwiczenie: Obliczyć przybliżenia e z definicji i powyższego wzoru dla $N = 100$. A teraz dla $N = 101$... Czy możemy skorzystać z poprzedniego wyniku? W którym przypadku?

A wszystko dzięki mnożeniu szeregów...

Uwagi.

W wielu zastosowaniach informatycznych potrzebne bądą funkcje zespolone (lub: funkcje wielu zmiennych). To ponownie wykracza poza zaplanowany zakres tego wykładu (niestety...), ale mała uwaga nie zaszkodzi...



Portret exp, **I.** Wykres funkcji $f(x,y) = \mathrm{Re}(\exp(x+iy))$ nad prostokątem $-2 \le x \le 1.5$, $0 \le y \le 12.56$; innymi słowy, wysokość punktu powierzchni nad dolnym dnem pudełka jest równa $\mathrm{Re}(\exp(x+iy))$. Szare linie to poziomice (jak na mapie: wysokość na poziomicy ma jedną, ustaloną wartość. Kolory powierzchni zależą liniowo od części urojonej liczby $\exp(x+iy)$. Przednia krawędź powierzchni odpowiada wartości $y = \mathrm{Im}\, z = 0$: widzimy wykres exp na $\mathbb{R}$.

Wyrażenie postaci $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ nazywamy *szeregiem trygonometrycznym*. Sumy częściowe tego szergu

$$s_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

to *wielomiany trygonometryczne*.

Twierdzenie. (o współczynnikach jednostajnie zbieżnego szeregu trygonometrycznego). *Jeżeli szereg trygonometryczny* $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ *jest zbieżny jednostajnie do funkcji* $f(x)$ *dla* $x \in < -\pi, \pi >$ *to*

$$a_0 = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx,$$

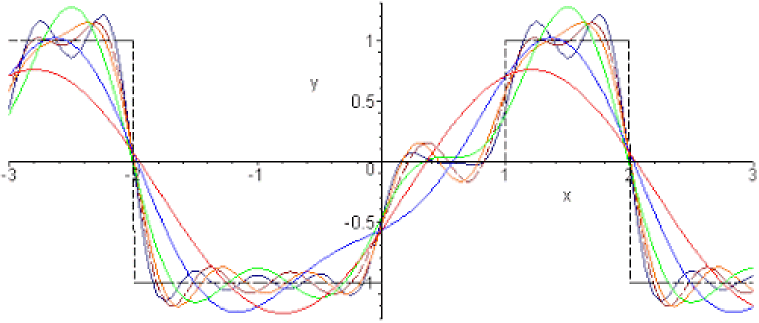
$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nxdx,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nxdx,$$

dla $n = 1, 2, \ldots$.

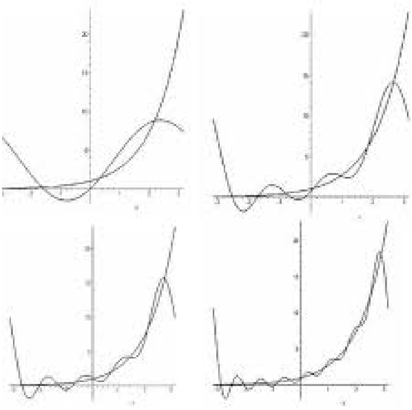
Powyższe wzory współczynników a_0, a_n, b_n nazywamy *wzorami Eulera - Fouriera*, a współczynniki a_0, a_n, b_n *współczynnikami Fouriera* funkcji f. Szereg $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ nazywamy jej **szeregiem Fouriera**.

Funkcja schodkowa a szereg Fouriera.



Kolejne sumy częściowe - oznaczone różnymi kolorami.
Tu funkcja $f(x)$ jest schodkowa.

Funkcja wykładnicza e^x a szereg Fouriera.



Tu funkcja $f(x) = e^x$ jest zdefiniowana na $< -3, 3 >$ (i dalej przedłużona poprzez okresowość).

Tajne/poufne.

Przykładowe zagadnienia na egzamin - po tym wykładzie...

- Dokonujemy przybliżonych obliczeń liczby rzeczywistej e na komputerze za pomocą różnych metod:
  [a] wzoru bezpośredniego $a_n = (1 + \frac{1}{n})^n$,
  [b] sumy $S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ (wzoru rekurencyjnego: $S_n = S_{n-1} + \frac{1}{n!}$).
  Dla $n = 9$ wyniki wynoszą odpowiednio: 2,5811747917132 dla [a] oraz 2,71828180114638 dla [b]. Czy można - **bez wykonywania obliczeń** - wskazać ile cyfr po przecinku jest dokładnie obliczone i w którym przypadku? Odpowiedź uzasadnij. Wnioski?
- Dla danego szeregu $((a_n),(S_n))$,, gdzie $a_n > 0$ wiemy, że:
  [a] $a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - a_6 + \ldots = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + (a_5 - a_6) + \ldots$,
  [b] $a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - a_6 + \ldots \neq (a_1 + a_3 + a_5 + \ldots) - (a_2 + a_4 + a_6 + \ldots)$,
  [c] $a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - a_6 + \ldots = (a_1 + a_3 - a_2) - (a_4 + a_6 - a_5) + \ldots$.
  Co można powiedzieć o zbieżności szeregu (zbieżny?, bezwzględnie zbieżny?, warunkowo zbieżny?, nic nie wiemy?): w każdym przypadku osobno. Odpowiedź uzasadnij.

- Oznaczmy przez a_n bok 2^n-kąta foremnego wpisanego w okrąg o średnicy jeden. Z twierdzenia Pitagorasa można obliczyć, że $a_2 = \sqrt{2}/2$ oraz $a_{n+1} = \frac{1}{2}\sqrt{2 - \sqrt{4 - a_n^2}}$. Zatem obwód tego 2^n-kąta wynosi $A_n = 2^n a_n$. Z punktu widzenia obliczeń na liczbach rzeczywistych mamy oczywiście: $\lim_{n\to\infty} A_n = \pi$. Dlaczego eksperyment numeryczny (obliczanie kolejnych liczb A_n) **nie daje** tego wyniku? Co jest tego przyczyną? Zaproponuj inny algorytm wyznaczania wartości liczby π.
- Podaj kryterium d'Alemberta zbieżności szeregu i przykład szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ dla którego kryterium te nie rozstrzyga o jego zbieżności.
- Szereg naprzemienny $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ jest zbieżny (do $\ln 2$). **Jak uzasadnić dlaczego?** Obliczając sumę pierwszych 99 wyrazów otrzymamy wynik przybliżony. Jaki jest błąd tego przybliżenia (twierdzenie!)?