Logika i teoria mnogości

Ćwiczenia 3

Literał jest to zmienna zdaniowa lub jej negacja.

Przykład. $p, q, r, \neg p, \neg q, \neg r$

Koniunkcja elementarna jest to koniunkcja skończenie wielu literałów.

Przykład. $p \wedge q \wedge \neg q, \quad \neg p \wedge r, \quad p$

Alternatywa elementarna jest to alternatywa skończenie wielu literałów.

Przykład. $p \vee \neg q \vee q, \quad p \vee \neg r, \quad q$

Formuła w alternatywnej postaci normalnej (APN) jest to alternatywa skończenie wielu koniunkcji elementarnych.

Przykład. $(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q) \vee (\neg q \wedge p), \quad (r \wedge \neg q) \vee (p \wedge \neg r \wedge q)$

Formuła w koniunkcyjnej postaci normalnej (KPN) jest to koniunkcja skończenie wielu alternatyw elementarnych.

$(p \vee q) \wedge (\neg p \vee q \vee \neg r), \quad (p \vee q \vee r) \wedge (p \vee \neg p \vee q) \wedge (q \vee \neg p)$

Przykład wyznaczania formuły w APN i formuły w KPN, logicznie równoważnych danej formule, metoda tablicy. Formuła: $p \wedge q \Leftrightarrow p \wedge r$. Rysujemy tablicę formuły, poszerzoną o dwie kolumny: APN i KPN.

p	q	r	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \wedge q \Leftrightarrow p \wedge r$	APN	KPN
1	1	1	1	1	1	$p \wedge q \wedge r$	
1	1	0	1	0	0		$\neg p \vee \neg q \vee r$
1	0	1	0	1	0		$\neg p \vee q \vee \neg r$
1	0	0	0	0	1	$p \wedge \neg q \wedge \neg r$	
0	1	1	0	0	1	$\neg p \wedge q \wedge r$	
0	1	0	0	0	1	$\neg p \wedge q \wedge \neg r$	
0	0	1	0	0	1	$\neg p \wedge \neg q \wedge r$	
0	0	0	0	0	1	$\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r$	

W kolumnie APN zapisujemy koniunkcje elementarne odpowiadajace wartościowaniom, dla których cała formuła przyjmuje wartość 1. Dana koniunkcja elementarna jest prawdziwa tylko dla odpowiadajacego jej wartościowania. Poszukiwana formuła w APN jest alternatywą otrzymanych koniunkcji elementarnych. W kolumnie KPN zapisujemy alternatywy elementarne odpowiadające wartościowaniom, dla których cała formuła przyjmuje wartość 0. Dana alternatywa elementarna jest fałszywa tylko dla odpowiadajacego jej wartościowania. Poszukiwana formuła w KPN jest koniunkcją otrzymanych alternatyw elementarnych.

APN: $(p \wedge q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee \neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r)$

KPN: $(\neg p \vee \neg q \vee r) \wedge (\neg p \vee q \vee \neg r)$

Zadanie 1. Wyznaczyć metodą tablicy formuły w APN i KPN, logicznie równoważne następujacym formułom:

(a) $p \vee r \Leftrightarrow q \vee r$

(b) $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (q \Rightarrow r)$

(c) $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (q \Rightarrow p)$

Sprowadzanie formuł do KPN i APN metodą przekształceń równoważnościowych

Metoda ta polega na kolejnym zastępowaniu podformuł przez ich równoważniki. Można wyróżnić trzy etapy procedury. Zawsze zastępujemy lewą stronę równoważności prawą stroną.

Etap I. Eliminujemy $\Leftrightarrow$ i $\Rightarrow$ stosując prawa:

$$(\varphi \Leftrightarrow \psi) \Leftrightarrow (\varphi \Rightarrow \psi) \wedge (\psi \Rightarrow \varphi)$$

$$(\varphi \Rightarrow \psi) \Leftrightarrow \neg\varphi \vee \psi$$

Etap II. Sprowadzamy formułę do negacyjnej postaci normalnej (NPN), tj. formuły zawierajacej tylko $\wedge, \vee, \neg$, przy czym $\neg$ występuje tylko w literałach, stosując prawa De Morgana:

$$\neg(\varphi \wedge \psi) \Leftrightarrow (\neg\varphi \vee \neg\psi)$$

$$\neg(\varphi \vee \psi) \Leftrightarrow (\neg\varphi \wedge \neg\psi)$$

Na etapach I i II stosujemy prawo podwójnej negacji $\neg\neg\varphi \Leftrightarrow \varphi$, gdy pojawia sie $\neg\neg\varphi$.

Etap III. Otrzymana formuła jest kombinacją literałów za pomocą $\wedge, \vee$. Sprowadzamy ją do KPN, stosując prawa rozdzielności alternatywy względem koniunkcji (stosujemy je w dwóch formach):

$$\varphi \vee (\psi \wedge \chi) \Leftrightarrow (\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \chi)$$

$$(\psi \wedge \chi) \vee \varphi \Leftrightarrow (\psi \vee \varphi) \wedge (\chi \vee \varphi)$$

Po kilkakrotnym zastosowaniu tych przekształceń, wszystkie koniunkcje wyprowadzimy "na zewnątrz".

Przy sprowadzaniu formuły do APN, stosujemy prawa rozdzielności koniunkcji względem alternatywy:

$$\varphi \wedge (\psi \vee \chi) \Leftrightarrow (\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \chi)$$

$$(\psi \vee \chi) \wedge \varphi \Leftrightarrow (\psi \wedge \varphi) \vee (\chi \wedge \varphi)$$

Przykład. Zastosujemy tę metodę do formuły z poprzedniego przykładu: $p \wedge q \Leftrightarrow p \wedge r$.

Zapisujemy kolejne równoważniki jeden po drugim.

Etap I.

$p \wedge q \Leftrightarrow p \wedge r$

$(p \wedge q \Rightarrow p \wedge r) \wedge (p \wedge r \Rightarrow p \wedge q)$

$[\neg(p \wedge q) \vee (p \wedge r)] \wedge [\neg(p \wedge r) \vee (p \wedge q)]$

Etap II.

$[\neg p \vee \neg q \vee (p \wedge r)] \wedge [\neg p \vee \neg r \vee (p \wedge q)]$ NPN

Opuszczono nawiasy wokół $\neg p \vee \neg q$, ponieważ jest argumentem alternatywy; podobnie dla $\neg p \vee \neg r$.

Etap III. Sprowadzajac do KPN, wystarczy zastosować prawa rozdzielności alternatywy względem koniunkcji w każdym nawiasie kwadratowym.

$(\neg p \vee \neg q \vee p) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg r \vee p) \wedge (\neg p \vee \neg r \vee q)$ KPN

Sprowadzając do APN, stosujemy do NPN prawa rozdzielności koniunkcji względem alternatywy. Ponieważ prawy argument zewnętrznej koniunkcji jest alternatywą trójczłonową, możemy od razu zastosować to prawo w wersji wieloczłonowej:

$$\varphi \wedge (\psi_1 \vee \psi_2 \ldots \psi_n) \Leftrightarrow (\varphi \wedge \psi_1) \vee (\varphi \wedge \psi_2 \vee \cdots \vee (\varphi \wedge \psi_n)$$

zamiast dochodzić do tego wyniku w kilku krokach.

$[[\neg p \vee \neg q \vee (p \wedge r)] \wedge \neg p] \vee [[\neg p \vee \neg q \vee (p \wedge r)] \wedge \neg r] \vee [[\neg p \vee \neg q \vee (p \wedge r)] \wedge p \wedge q]$

Następnie w każdym zewnętrznym nawiasie kwadratowym stosujemy analogiczne prawo (w drugiej formie).

$(\neg p \wedge \neg p) \vee (\neg q \wedge \neg p) \vee (p \wedge r \wedge \neg p) \vee (\neg p \wedge \neg r) \vee (\neg q \wedge \neg r) \vee (p \wedge r \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge p \wedge q) \vee (\neg q \wedge p \wedge q) \vee (p \wedge r \wedge p \wedge q)$ APN

Twierdzenie Formuła w KPN jest tautologią KRZ wtw, gdy w każdej składowej alternatywie elementarnej występuje para przeciwnych literałów.

Twierdzenie Formuła w APN jest niespełnialna wtw, gdy w każdej składowej koniunkcji elementarnej występuje para przeciwnych literałów.

W otrzymanej KPN druga alternatywa elementarna $\neg p \vee \neg q \vee r$ nie zawiera pary przeciwnych literałów (pierwsza zawiera $\neg p, p$), więc ta formuła nie jest tautologią. Zatem formuła poczatkowa $p \wedge q \Leftrightarrow p \wedge r$ nie jest tautologią, skoro jest logicznie równoważna tamtej. W otrzymanej APN pierwsza koniunkcja elementarna $\neg p \wedge \neg p$ nie zawiera pary przeciwnych literałów (taka para występuje w trzeciej koniunkcji i dalszych), więc ta formuła jest spełnialna. Oczywiście wiedzieliśmy to już wcześniej, skoro sporządziliśmy tablice tej formuły. Na podstawie tych twierdzeń można sprawdzać tautologiczność i spełnialność, jeżeli sprowadzimy formułę do KPN i APN bez pomocy tablicy.

Zadanie 2. Sprowadzić do KPN i sprawdzić, czy poniższe formuły są tautologiami KRZ:

1. $(p \Rightarrow q) \wedge p \Rightarrow q$
2. $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg p \Rightarrow \neg q)$
3. $(p \Rightarrow (q \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \wedge q \Rightarrow r)$
4. $(p \wedge q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow (q \Rightarrow r))$
5. $(p \Rightarrow q \wedge r) \Rightarrow (p \vee q \Rightarrow \neg r)$

Zadanie 3. Sprowadzić do APN i sprawdzić, czy poniższe formuły są niespełnialne:

1. $p \vee (p \wedge q) \Rightarrow p$
2. $\neg(p \wedge (q \vee r) \Rightarrow (p \wedge q) \vee r)$
3. $(p \wedge q) \Rightarrow (\neg p \vee \neg q)$
4. $\neg(p \Rightarrow q) \vee ((q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r))$
5. $\neg(p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \wedge \neg q)$

Wykonując przekształcenia, można eliminować powtórzenia, a więc pisać φ zamiast $\varphi \wedge \varphi$ oraz $\varphi \vee \varphi$. Np. $\neg p \wedge \neg p$ zastępujemy przez $\neg p$.

Metodę przekształceń równoważnosciowych można też wykorzystać do wyprowadzania tautologii, których głównym spójnikiem jest $\Leftrightarrow$. Przekształcamy lewą stronę równoważności w prawą stronę. W ten sposób można wyprowadzić mniej intuicyjne prawa dla implikacji w oparciu o bardziej intuicyjne i łatwiejsze do zapamiętania prawa dla koniunkcji, alternatywy i negacji, np. prawa idempotentności, łaczności, przemienności, rozdzielności i De Morgana. Rozważmy prawo eksportacji-importacji: $(p \wedge q \Rightarrow r) \Leftrightarrow [p \Rightarrow (q \Rightarrow r)]$. Następujące formuły są logicznie równoważne.

$p \wedge q \Rightarrow r$ (lewa strona)
$\neg(p \wedge q) \vee r$ (eliminujemy $\Rightarrow$)
$\neg p \vee \neg q \vee r$ (stosujemy prawo De Morgana)
$\neg p \vee (q \Rightarrow r)$ (wprowadzamy $\Rightarrow$)
$p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$ (wprowadzamy $\Rightarrow$)

Zadanie 4. Metodą przekształceń równoważnosciowych wyprowadzić następujace prawa.

1. $(p \Rightarrow q \wedge r) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r)$
2. $(p \vee q \Rightarrow r) \Leftrightarrow (p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)$
3. $(p \wedge q \Rightarrow r) \Leftrightarrow (p \Rightarrow r) \vee (q \Rightarrow r)$