p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \Rightarrow q$	$p \Leftrightarrow q$
1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	0	1	1	0
0	0	0	0	1	1

$$(\varphi \Leftrightarrow \psi) \Leftrightarrow (\varphi \Rightarrow \psi) \wedge (\psi \Rightarrow \varphi)$$

$$(\varphi \Rightarrow \psi) \Leftrightarrow \neg\varphi \vee \psi$$

$$\neg(\varphi \wedge \psi) \Leftrightarrow (\neg\varphi \vee \neg\psi)$$

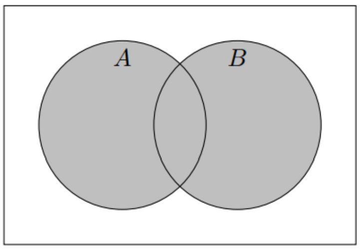
$$\neg(\varphi \vee \psi) \Leftrightarrow (\neg\varphi \wedge \neg\psi)$$

$$\varphi \wedge (\psi \vee \chi) \Leftrightarrow (\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \chi) \qquad \varphi \vee (\psi \wedge \chi) \Leftrightarrow (\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \chi)$$

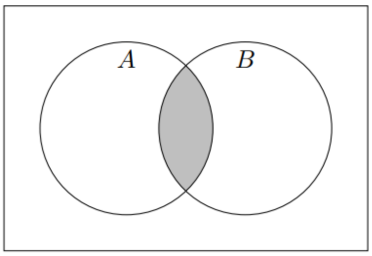
$$(\psi \vee \chi) \wedge \varphi \Leftrightarrow (\psi \wedge \varphi) \vee (\chi \wedge \varphi) \qquad (\psi \wedge \chi) \vee \varphi \Leftrightarrow (\psi \vee \varphi) \wedge (\chi \vee \varphi)$$

- dla 0: $x \wedge 0 = 0, x \vee 0 = x, x \wedge \neg x = 0$
- dla 1: $x \vee 1 = 1, x \wedge 1 = x, x \vee \neg x = 1$
- prawa pochłaniania: $x \wedge x = x, x \vee x = x$
- prawa przemienności: $x \wedge y = y \wedge x, x \vee y = y \vee x$
- prawa łączności: $(x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z)$
  $(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z)$
- prawa rozdzielności: $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$
  $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$
- prawo podwójnej negacji: $\neg\neg x = x$
- prawa De Morgana: $\neg(x \wedge y) = \neg x \vee \neg y, \neg(x \vee y) = \neg x \wedge \neg y$
- prawo transpozycji: $x \Rightarrow y = \neg y \Rightarrow \neg x$

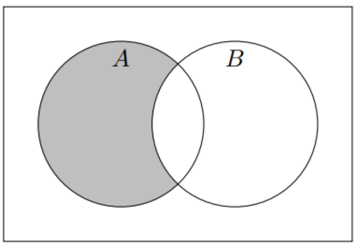
Definicja. Dla dowolnych zbiorów A, B określamy ich sumę $A \cup B$, iloczyn $A \cap B$ i różnicę $A \backslash B$ w następujący sposób:
$A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}$,
$A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}$,
$A \backslash B = \{x : x \in A \wedge x \notin B\}$.
Czytamy $A \cup B$: A plus B, $A \cap B$: A razy B, $A \backslash B$: A minus B.
Iloczyn $A \cap B$ nazywamy też przekrojem (cześcią wspólną) zbiorów A i B.
(D$\cup$) $x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \vee x \in B$
(D$\cap$) $x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B$
(D$\backslash$) $x \in A \backslash B \Leftrightarrow x \in A \wedge x \notin B$



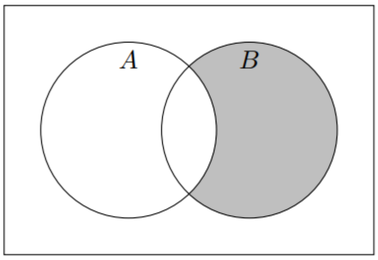
$A \cup B$



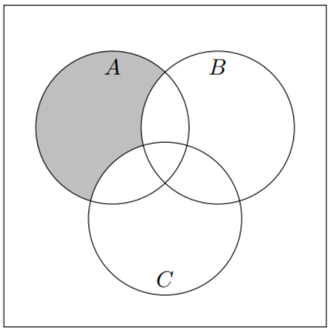
$A \cap B$



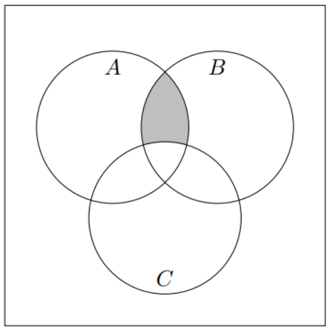
$A \setminus B$



$B \setminus A$



$A \setminus (B \cup C)$



$(A \cap B) \setminus C$

Dla zbioru $A \subset U$ (uniwersum) określamy zbiór:
$A' = U \setminus A = \{x \in U : x \notin A\}$
zwany *dopełnieniem* zbioru A (do uniwersum U).

Różnica symetryczna zbiorów A i B:
$A \div B = \{x : (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \notin A \wedge x \in B)\}$
$x \in A \div B \Leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \notin A \wedge x \in B)$

Indeksowana rodzina zbiorów: $\{A_i\}_{i \in I}$. Poszczególne zbiory tej rodziny są oznaczone indeksami.

I to ustalony zbiór indeksów.

Inne oznaczenie: $\{A_i : i \in I\}$

Określamy działania sumy i iloczynu indeksowanej rodziny zbiorów $\{A_i\}_{i \in I}$

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{x : \exists_{i \in I}(x \in A_i)\}$$

$$\bigcap_{i \in I} A_i = \{x : \forall_{i \in I}(x \in A_i)\}$$

Uwaga. Dla $I = \emptyset$, $\forall_{i \in I}(x \in A_i)$ jest prawdą dla dowolnego obiektu x, więc $\bigcap_{i \in \emptyset} A_i$ nie istnieje (jako zbiór). Zatem powyższą definicję iloczynu przyjmujemy tylko dla $I \neq \emptyset$. Dla sumy to ograniczenie nie jest potrzebne. Mamy $\bigcup_{i \in \emptyset} A_i = \emptyset$.

Uwaga. Gdy wszystkie zbiory A_i są podzbiorami ustalonego uniwersum U, często przyjmuje się inną definicję iloczynu:

$$\bigcap_{i \in I} A_i = \{x \in U : \forall_{i \in I}(x \in A_i)\}$$

Zgodnie z tą defincją $\bigcap_{i \in \emptyset} A_i = U$, czyli iloczyn pustej rodziny zbiorów jest określony. Dalej przyjmujemy poprzednią definicję (bez U).

Słownie: Suma rodziny $\{A_i\}_{i \in I}$ jest zbioren tych wszystkich elementów, które należą do przynajmniej jednego zbioru A_i.

Iloczyn rodziny $\{A_i\}_{i \in I}$ jest zbioren tych wszystkich elementów, które należą do każdego zbioru A_i.

Mamy:

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \bigcup \{A_i\}_{i \in I}, \qquad \bigcup_{i \in \{1,2\}} A_i = A_1 \cup A_2$$

$$\bigcap_{i \in I} A_i = \bigcap \{A_i\}_{i \in I}, \qquad \bigcap_{i \in \{1,2\}} A_i = A_1 \cap A_2$$

Prawa dla działań nieskończonych

Bezpośrednio z definicji działań nieskończonych wynikają równoważności:

$$x \in \bigcup_{i \in I} A_i \Leftrightarrow \exists_{i \in I}(x \in A_i)$$

$$x \in \bigcap_{i \in I} A_i \Leftrightarrow \forall_{i \in I}(x \in A_i)$$

Te równoważności stosujemy przy wyprowadzaniu praw dla działań nieskończonych za pomocą (Ext).

Iloczyn kartezjański

$$A \times B = \{\langle x, y \rangle : x \in A \wedge y \in B\}$$

$(D\times)$ $\langle x, y \rangle \in A \times B \Leftrightarrow x \in A \wedge y \in B$

Relacja odwrotna i złożenie relacji

$R^{-1} = \{\langle x, y \rangle : \langle y, x \rangle \in R\}$ (relacja odwrotna do R)
$S \circ R = \{\langle x, y \rangle : \exists_z(\langle x, z \rangle \in R \wedge \langle z, y \rangle \in S)\}$ (złożenie relacji R i S)

Relację $R \subset A^2$ nazywamy

- *zwrotną na zbiorze* A, jeżeli $\forall_{x \in A}(\langle x, x \rangle \in R)$
- *przeciwzwrotną na zbiorze* A, jeżeli $\forall_{x \in A}(\langle x, x \rangle \notin R)$
- *symetryczną*, jeżeli $\forall_{x,y}(\langle x, y \rangle \in R \Rightarrow \langle y, x \rangle \in R)$
- *przeciwsymetryczną*, jeżeli $\forall_{x,y}(\langle x, y \rangle \in R \Rightarrow \langle y, x \rangle \notin R)$
- *antysymetryczną*, jeżeli $\forall_{x,y}(\langle x, y \rangle \in R \wedge \langle y, x \rangle \in R \Rightarrow x = y)$
- *przechodnią*, jeżeli $\forall_{x,y,z}(\langle x, y \rangle \in R \wedge \langle y, z \rangle \in R \Rightarrow \langle x, y \rangle \in R)$
- *spójną na zbiorze* A, jeżeli $\forall_{x,y,\in A}(\langle x, y \rangle \in R \vee \langle y, x \rangle \in R)$
- *słabospójną na zbiorze* A, jeżeli $\forall_{x,y,\in A}(\langle x, y \rangle \in R \vee x = y \vee \langle y, x \rangle \in R)$

Dla relacji binarnych często piszemy xRx zamiast: $\langle x, y \rangle \in R$.

Relacje równoważności

Definicja. Relację $R \subset A^2$ nazywamy *relacją równoważności* na zbiorze A, jeżeli relacja R jest zwrotna (na zbiorze A), symetryczna i przechodnia.
zwrotna na $A : \forall_{x \in A}(xRx)$
symetryczna: $\forall_{x,y}(xRy \Rightarrow yRx)$
przechodnia: $\forall_{x,y,z}(xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz)$

Definicja. Niech R będzie relacją równoważności na zbiorze A.
Dla elementu $x \in A$ określamy zbiór:
$[x]_R = \{y : xRy\}$ (równoważnie: $[x]_R = \{y \in A : xRy\}$
Zbiór $[x]_R$ nazywamy *klasą abstrakcji relacji równoważności* R wyznaczoną przez element x, zwany *reprezentantem* tej klasy.

Niech $R = I_A$. Dla $x \in A$ $\quad [x]_R = \{x\}$.

Niech $R \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ będzie określona następująco: $xRy \Leftrightarrow |x| = |y|$ dla $x, y \in \mathbb{R}$.
Wtedy $[0]_R = \{0\}$ oraz dla $x \neq 0$ $\quad [x]_R = \{x, -x\}$.

Niech R będzie relacją równoważności na zbiorze wszystkich ludzi określoną tak: xRy wtw, gdy x i y są tej samej płci.
Wtedy dla dowolnej kobiety x, $[x]_R$ jest zbiorem wszystkich kobiet, a dla dowolnego mężczyzny x, $[x]_R$ jest zbiorem wszystkich mężczyzn.

Definicja. *Funkcją* nazywamy relację binarną R, spełniającą warunek prawostronnej jednoznaczności:
$\forall_{x,y,z}(< x, y >\in R \quad \wedge < x, z >\in R \Rightarrow y = z)$.
Zgodnie z tym warunkiem, dla każdego obiektu x istnieje najwyżej jeden obiekt y taki, że $< x, y >\in R$.

Definicja. Niech f będzie funkcją. Dla $x \in D(f)$ jedyny element y taki, że $< x, y >\in f$ nazywamy *wartością funkcji* f dla argumentu x i oznaczamy $f(x)$.
$(Df(x))\forall_{x \in D(f)}\forall_y(f(x) = y \Leftrightarrow < x, y >\in f)$
Zbiór $D(f)$ jest *dziedziną funkcji* f.
Mamy: $D^*(f) = \{f(x) : x \in D(f)\}$. Zbiór $D^*(f)$, czyli *przeciwdziedzinę funkcji* f, nazywamy też zbiorem wartości funkcji f.

Definicja. Niech f będzie funkcją. Mówimy, że funkcja f *odwzorowuje zbiór* X *w zbiór* Y , jeżeli $D(f) = X$ i $D^*(f) \subset Y$. Piszemy $f : X \mapsto Y$.

Definicja. Niech f będzie funkcją. Mówimy, że funkcja f *odwzorowuje zbiór* X *na zbiór* Y , jeżeli $D(f) = X$ i $D^*(f) = Y$. Piszemy $f : X \overset{na}{\mapsto} Y$.

Definicja. Funkcję f nazywamy *różnowartościową* (albo: wzajemnie jednoznaczną, jedno-jednoznaczną), jeżeli spełnia warunek:
$\forall x_1, x_2 \in D(f)(f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2)$.
Równoważnie: $\forall_{x_1,x_2 \in D(f)}(x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2))$.
Piszemy $f : X \overset{1-1}{\mapsto} Y$, jeżeli funkcja $f : X \mapsto Y$ jest różnowartościowa.

Definicja. *Odwzorowaniem* nazywamy trójkę $< f, X, Y >$ taką, że f jest funkcją, X, Y są zbiorami i $f : X \mapsto Y$.

Definicja. Odwzorowanie $f : X \mapsto Y$ nazywamy:
iniekcją, jeżeli $f : X \overset{1-1}{\mapsto} Y$,
suriekcją, jeżeli $f : X \overset{na}{\mapsto} Y$,
bijekcją, jeżeli jest iniekcją i suriekcją.

Definicja. Niech $f : X \mapsto Y$. Dla dowolnego $A \subset X$ określamy zbiór:
$f[A] = \{f(x) : x \in A\} = \{y : \exists_x(x \in A \wedge y = f(x))\}$,
zwany *obrazem zbioru* A *danym przez funkcję* f.
Dla dowolnego $B \subset Y$ określamy zbiór:
$f^{-1}[B] = \{x \in X : f(x) \in B\}$,
zwany *przeciwobrazem zbioru* B *danym przez funkcję* f.

Definicja. Relację $R \subset A^2$ nazywamy relacją porządkującą na zbiorze A, jeżeli jest zwrotna (na A), antysymetryczna i przechodnia. Wtedy parę (A, R) nazywamy *zbiorem uporządkowanym*.

Definicja. Relację $R \subset A^2$ nazywamy relacją liniowo porządkującą na zbiorze A, jeżeli jest porządkująca i spójna (na A). Wtedy parę (A, R) nazywamy *zbiorem liniowo uporządkowanym*.

Definicja. Niech (A, R) będzie zbiorem uporządkowanym. Zbiór $X \subset A$ nazywamy *łańcuchem* w (A, R), jeżeli $(X, R \cap X^2)$ jest zbiorem liniowo uporządkowanym.
Zauważmy, że zbiór $X \subset A$ jest łańcuchem w (A, R) wtedy i tylko wtedy, gdy $\forall_{x,y \in X}(xRy \vee yRx)$.

Relacja I_A jest relacja porządkującą. Jest to najmniejsza (w sensie za wierania) relacja porządkująca na zbiorze A, tzn. relacja I_A jest zawarta w każdej relacji porządkującej na A.

Relacja inkluzji na $\mathcal{P}(A)$, tj, $\{< X, Y >\in \mathcal{P}(A)^2 : X \subset Y\}$, jest relacją porządkującą.

Relacja podzielności na zbiorze $\mathbb{N}$ określona wzorem:
$m|n \Leftrightarrow \exists_{k \in \mathbb{N}}(k \cdot m = n)$ dla $m, n \in \mathbb{N}$
jest relacją porządkującą.

Relacja $\leq$ na zbiorze $\mathbb{N}$ jest relacją liniowo porządkującą. Podobnie $\leq$ na $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$.

Rozważmy zbiór $\mathcal{P}(\{a, b\})$ uporządkowany przez ograniczenie inkluzji do tego zbioru. Ta relacja nie jest liniowym porządkiem, ponieważ
ani $\{a\} \subset \{b\}$, ani $\{b\} \subset \{a\}$ nie zachodzi. Zbiory:
$\{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}\}$ i $\{\emptyset, \{b\}, \{a, b\}\}$
są łańcuchami w $\mathcal{P}(\{a, b\})$.

Rozważmy zbiór $\{1, 2, 3, 4\}$ z relacją podzielności ograniczoną do tego zbioru. Zbiory $\{1, 2, 4\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}$ są łańcuchami.

Diagramy Hassego skończonych zbiorów uporządkowanych

Niech $\leq$ będzie porządkiem na A. Ostry porządek $<$ wyznaczony przez $\leq$ określamy tak:

$$x < y \Leftrightarrow x \leq y \wedge x \neq y$$

Niech $(A, \leq)$ będzie zbiorem uporządkowanym. Element $y \in A$ nazywamy następnikiem elementu $x \in A$, jeżeli $x < y$, lecz nie istnieje $z \in A$ takie, że $x < z$ i $z < y$.

W diagramie Hassego przedstawiamy elementy zbioru jako wierzchołki i prowadzimy krawędzie od każdego wierzchołka do wszystkich następników tego wierzchołka, umieszczonych wyżej.

Mamy: $x \leq y$ wtedy i tylko wtedy, gdy w diagramie istnieje droga, idąca w górę, od x do y (dowolnej długości $n \geq 0$).

Droga jest to trasa, która nie przechodzi dwukrotnie przez żaden wierzchołek. Długość drogi: liczba krawędzi, przez które przechodzi ta droga.

Definicja Niech $(A, \leq)$ będzie zbiorem uporządkowanym. Niech $X \subset A$. ment $a \in A$ nazywamy:

- *elementem najmniejszym w zbiorze* X, jeżeli $a \in X$ i $\forall_{x \in X}(a \leq x)$,
- *elementem największym w zbiorze* X, jeżeli $a \in X$ i $\forall_{x \in X}(x \leq a)$,
- *elementem minimalnym w zbiorze* X, jeżeli $a \in X$ i $\neg\exists_{x \in X}(x < a)$,
- *elementem maksymalnym w zbiorze* X, jeżeli $a \in X$ i $\neg\exists_{x \in X}(a < x)$,
- *ograniczeniem dolnym zbioru* X, jeżeli $\forall_{x \in X}(a \leq x)$,
- *ograniczeniem górnym zbioru* X, jeżeli $\forall_{x \in X}(x \leq a)$,
- *kresem dolnym zbioru* X, jeżeli a jest największym ograniczeniem dolnym zbioru X,
- *kresem górnym zbioru* X, jeżeli a jest najmniejszym ograniczeniem górnym zbioru X.