Matematyka dyskretna
5. Zasada włączeń i wyłączeń

19.11.2020

Wejdź na stronę
`https://adamski.students.wmi.amu.edu.pl/zasadawlaczeniwylaczen.html`
i rozwiąż znajdujące się tam zadanie (zalecana przeglądarka to Google Chrome).

Twierdzenie (Zasada włączeń i wyłączeń)

Niech A_1, A_2, A_3 będą dowolnymi zbiorami skończonymi. Wówczas

$$|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|$$

oraz

$$\begin{aligned} |A_1 \cup A_2 \cup A_3| = {} & |A_1| + |A_2| + |A_3| \\ & - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_2 \cap A_3| \\ & + |A_1 \cap A_2 \cap A_3|. \end{aligned}$$

Zadanie

Ile jest ciągów binarnych długości 8, które zaczynają się jedynką lub kończą dwoma zerami.

Zadanie

Ile jest ciągów binarnych długości 8, które zaczynają się jedynką lub kończą dwoma zerami.

A – zbiór ciągów długości 8 zaczynających się jedynką

Zadanie

Ile jest ciągów binarnych długości 8, które zaczynają się jedynką lub kończą dwoma zerami.

A – zbiór ciągów długości 8 zaczynających się jedynką
B – zbiór ciągów długości 8 kończących się dwoma zerami

Zadanie

Ile jest ciągów binarnych długości 8, które zaczynają się jedynką lub kończą dwoma zerami.

A – zbiór ciągów długości 8 zaczynających się jedynką
B – zbiór ciągów długości 8 kończących się dwoma zerami

Chcemy wyznaczyć

Zadanie

Ile jest ciągów binarnych długości 8, które zaczynają się jedynką lub kończą dwoma zerami.

A – zbiór ciągów długości 8 zaczynających się jedynką
B – zbiór ciągów długości 8 kończących się dwoma zerami

Chcemy wyznaczyć $|A \cup B|$.

A – zbiór ciągów długości 8 zaczynających się jedynką
B – zbiór ciągów długości 8 kończących się dwoma zerami

1. Ile jest ciągów, które zaczynają się jedynką?

2. Ile jest ciągów, które kończą się dwoma zerami?

3. Ile jest ciągów, które zaczynają się jedynką i kończą się dwoma zerami?

A – zbiór ciągów długości 8 zaczynających się jedynką
B – zbiór ciągów długości 8 kończących się dwoma zerami

1. Ile jest ciągów, które zaczynają się jedynką?

$$|A| = 2^{8-1} = 2^7$$

2. Ile jest ciągów, które kończą się dwoma zerami?

3. Ile jest ciągów, które zaczynają się jedynką i kończą się dwoma zerami?

A – zbiór ciągów długości 8 zaczynających się jedynką
B – zbiór ciągów długości 8 kończących się dwoma zerami

1. Ile jest ciągów, które zaczynają się jedynką?

$$|A| = 2^{8-1} = 2^7$$

2. Ile jest ciągów, które kończą się dwoma zerami?

$$|B| = 2^{8-2} = 2^6$$

3. Ile jest ciągów, które zaczynają się jedynką i kończą się dwoma zerami?

A – zbiór ciągów długości 8 zaczynających się jedynką
B – zbiór ciągów długości 8 kończących się dwoma zerami

1. Ile jest ciągów, które zaczynają się jedynką?

$$|A| = 2^{8-1} = 2^7$$

2. Ile jest ciągów, które kończą się dwoma zerami?

$$|B| = 2^{8-2} = 2^6$$

3. Ile jest ciągów, które zaczynają się jedynką i kończą się dwoma zerami?

$$|A \cap B| = 2^{8-2-1} = 2^5$$

A – zbiór ciągów długości 8 zaczynających się jedynką
B – zbiór ciągów długości 8 kończących się dwoma zerami

1. Ile jest ciągów, które zaczynają się jedynką?
$$|A| = 2^{8-1} = 2^7$$
2. Ile jest ciągów, które kończą się dwoma zerami?
$$|B| = 2^{8-2} = 2^6$$
3. Ile jest ciągów, które zaczynają się jedynką i kończą się dwoma zerami?
$$|A \cap B| = 2^{8-2-1} = 2^5$$

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

A – zbiór ciągów długości 8 zaczynających się jedynką
B – zbiór ciągów długości 8 kończących się dwoma zerami

1. Ile jest ciągów, które zaczynają się jedynką?
$$|A| = 2^{8-1} = 2^7$$
2. Ile jest ciągów, które kończą się dwoma zerami?
$$|B| = 2^{8-2} = 2^6$$
3. Ile jest ciągów, które zaczynają się jedynką i kończą się dwoma zerami?
$$|A \cap B| = 2^{8-2-1} = 2^5$$

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 2^7 + 2^6 - 2^5 = 2^5 \cdot (4 + 2 - 1) = 160$$

Zadanie

Ile jest dodatnich liczb całkowitych równych co najwyżej 1000 niepodzielnych ani przez 8, ani przez 6, ani przez 15?

Ile jest liczb podzielnych przez n w przedziale $[1, m]$?

Ile jest liczb podzielnych przez n w przedziale $[1, m]$?

Jest ich $\lfloor \frac{m}{n} \rfloor$, czyli część całkowita z $\frac{m}{n}$.

Ile jest liczb podzielnych przez n w przedziale $[1, m]$?

Jest ich $\lfloor \frac{m}{n} \rfloor$, czyli część całkowita z $\frac{m}{n}$.

Liczba jest podzielna przez każdą z liczb $a_1, a_2, ...a_n$ wtedy i tylko wtedy, gdy jest podzielna przez

Ile jest liczb podzielnych przez n w przedziale $[1, m]$?

Jest ich $\lfloor \frac{m}{n} \rfloor$, czyli część całkowita z $\frac{m}{n}$.

Liczba jest podzielna przez każdą z liczb $a_1, a_2, ...a_n$ wtedy i tylko wtedy, gdy jest podzielna przez $NWW(a_1, a_2, ..., a_n)$.

Ile jest liczb podzielnych przez n w przedziale $[1, m]$?

Jest ich $\lfloor \frac{m}{n} \rfloor$, czyli część całkowita z $\frac{m}{n}$.

Liczba jest podzielna przez każdą z liczb $a_1, a_2, ...a_n$ wtedy i tylko wtedy, gdy jest podzielna przez $NWW(a_1, a_2, ..., a_n)$.

Jak obliczyć najmniejszą wspólną wielokrotność?

Ile jest liczb podzielnych przez n w przedziale $[1, m]$?

Jest ich $\lfloor \frac{m}{n} \rfloor$, czyli część całkowita z $\frac{m}{n}$.

Liczba jest podzielna przez każdą z liczb $a_1, a_2, ...a_n$ wtedy i tylko wtedy, gdy jest podzielna przez $NWW(a_1, a_2, ..., a_n)$.

Jak obliczyć najmniejszą wspólną wielokrotność?

1. Rozkładamy każdą z liczb a_i na czynniki pierwsze.

Ile jest liczb podzielnych przez n w przedziale $[1, m]$?

Jest ich $\lfloor \frac{m}{n} \rfloor$, czyli część całkowita z $\frac{m}{n}$.

Liczba jest podzielna przez każdą z liczb $a_1, a_2, ...a_n$ wtedy i tylko wtedy, gdy jest podzielna przez $NWW(a_1, a_2, ..., a_n)$.

Jak obliczyć najmniejszą wspólną wielokrotność?

1. Rozkładamy każdą z liczb a_i na czynniki pierwsze.
2. Dla każdej liczby pierwszej p występującej w rozkładzie którejś z liczb a_i szukamy maksymalnego k t.że p^k występuje w rozkładzie którejś z liczb a_i.

Ile jest liczb podzielnych przez n w przedziale $[1, m]$?

Jest ich $\lfloor \frac{m}{n} \rfloor$, czyli część całkowita z $\frac{m}{n}$.

Liczba jest podzielna przez każdą z liczb $a_1, a_2, ...a_n$ wtedy i tylko wtedy, gdy jest podzielna przez $NWW(a_1, a_2, ..., a_n)$.

Jak obliczyć najmniejszą wspólną wielokrotność?

1. Rozkładamy każdą z liczb a_i na czynniki pierwsze.
2. Dla każdej liczby pierwszej p występującej w rozkładzie którejś z liczb a_i szukamy maksymalnego k t.że p^k występuje w rozkładzie którejś z liczb a_i.
3. Mnożymy przez siebie te największe grupy czynników, czyli $p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot \ldots \cdot p_t^{k_t}$.

Przykład:
Policzmy $NWW(6, 8, 15)$.

Przykład:
Policzmy $NWW(6, 8, 15)$. Rozkładamy poszczególne liczby na czynniki pierwsze:

Przykład:
Policzmy $NWW(6, 8, 15)$. Rozkładamy poszczególne liczby na czynniki pierwsze:

$$6 = 2 \cdot 3 = 2^1 \cdot 3^1,$$

Przykład:
Policzmy $NWW(6, 8, 15)$. Rozkładamy poszczególne liczby na czynniki pierwsze:

$$6 = 2 \cdot 3 = 2^1 \cdot 3^1,$$

$$8 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3,$$

Przykład:
Policzmy $NWW(6, 8, 15)$. Rozkładamy poszczególne liczby na czynniki pierwsze:

$$6 = 2 \cdot 3 = 2^1 \cdot 3^1,$$

$$8 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3,$$

$$15 = 3 \cdot 5 = 3^1 \cdot 5^1.$$

Przykład:
Policzmy $NWW(6, 8, 15)$. Rozkładamy poszczególne liczby na czynniki pierwsze:

$$6 = 2 \cdot 3 = 2^1 \cdot 3^1,$$

$$8 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3,$$

$$15 = 3 \cdot 5 = 3^1 \cdot 5^1.$$

	2	3	5
6	1	**1**	0
8	**3**	0	0
15	0	**1**	**1**

Przykład:
Policzmy $NWW(6, 8, 15)$. Rozkładamy poszczególne liczby na czynniki pierwsze:

$$6 = 2 \cdot 3 = 2^1 \cdot 3^1,$$

$$8 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3,$$

$$15 = 3 \cdot 5 = 3^1 \cdot 5^1.$$

	2	3	5
6	1	**1**	0
8	**3**	0	0
15	0	**1**	**1**

Z każdej kolumny wybieramy maksimum:

Przykład:

Policzmy $NWW(6, 8, 15)$. Rozkładamy poszczególne liczby na czynniki pierwsze:

$$6 = 2 \cdot 3 = 2^1 \cdot 3^1,$$

$$8 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3,$$

$$15 = 3 \cdot 5 = 3^1 \cdot 5^1.$$

	2	3	5
6	1	**1**	0
8	**3**	0	0
15	0	**1**	**1**

Z każdej kolumny wybieramy maksimum:

$$NWW(6, 8, 15) = 2^3 \cdot 3^1 \cdot 5^1 = 120.$$

Obliczamy pozostałe *NWW*:

Obliczamy pozostałe NWW:

$$NWW(6,8) =$$

Obliczamy pozostałe NWW:

$$NWW(6,8) = 24$$

Obliczamy pozostałe NWW:

$$NWW(6,8) = 24$$

$$NWW(6,15) =$$

Obliczamy pozostałe NWW:

$$NWW(6,8) = 24$$

$$NWW(6,15) = 30$$

Obliczamy pozostałe NWW:

$$NWW(6, 8) = 24$$

$$NWW(6, 15) = 30$$

$$NWW(8, 15) =$$

Obliczamy pozostałe NWW:

$$NWW(6,8) = 24$$

$$NWW(6,15) = 30$$

$$NWW(8,15) = 120$$

Zamiast zliczać liczby niepodzielne przez k, łatwiej jest zliczać te, które są podzielne przez k.

Zamiast zliczać liczby niepodzielne przez k, łatwiej jest zliczać te, które są podzielne przez k.

A – zbiór liczb podzielnych przez 6 w przedziale $[1, 1000]$

Zamiast zliczać liczby niepodzielne przez k, łatwiej jest zliczać te, które są podzielne przez k.

A – zbiór liczb podzielnych przez 6 w przedziale $[1, 1000]$
B – zbiór liczb podzielnych przez 8 w przedziale $[1, 1000]$

Zamiast zliczać liczby niepodzielne przez k, łatwiej jest zliczać te, które są podzielne przez k.

A – zbiór liczb podzielnych przez 6 w przedziale $[1, 1000]$
B – zbiór liczb podzielnych przez 8 w przedziale $[1, 1000]$
C – zbiór liczb podzielnych przez 15 w przedziale $[1, 1000]$

Zamiast zliczać liczby niepodzielne przez k, łatwiej jest zliczać te, które są podzielne przez k.

A – zbiór liczb podzielnych przez 6 w przedziale $[1, 1000]$
B – zbiór liczb podzielnych przez 8 w przedziale $[1, 1000]$
C – zbiór liczb podzielnych przez 15 w przedziale $[1, 1000]$

Wówczas szukamy

Zamiast zliczać liczby niepodzielne przez k, łatwiej jest zliczać te, które są podzielne przez k.

A – zbiór liczb podzielnych przez 6 w przedziale $[1, 1000]$
B – zbiór liczb podzielnych przez 8 w przedziale $[1, 1000]$
C – zbiór liczb podzielnych przez 15 w przedziale $[1, 1000]$

Wówczas szukamy $|A' \cap B' \cap C'|$.

Zamiast zliczać liczby niepodzielne przez k, łatwiej jest zliczać te, które są podzielne przez k.

A – zbiór liczb podzielnych przez 6 w przedziale $[1, 1000]$
B – zbiór liczb podzielnych przez 8 w przedziale $[1, 1000]$
C – zbiór liczb podzielnych przez 15 w przedziale $[1, 1000]$

Wówczas szukamy $|A' \cap B' \cap C'|$.

Korzystając z **prawa De Morgana** otrzymujemy:

Zamiast zliczać liczby niepodzielne przez k, łatwiej jest zliczać te, które są podzielne przez k.

A – zbiór liczb podzielnych przez 6 w przedziale $[1, 1000]$
B – zbiór liczb podzielnych przez 8 w przedziale $[1, 1000]$
C – zbiór liczb podzielnych przez 15 w przedziale $[1, 1000]$

Wówczas szukamy $|A' \cap B' \cap C'|$.

Korzystając z **prawa De Morgana** otrzymujemy:

$$A' \cap B' \cap C' = (A \cup B \cup C)'$$

Zamiast zliczać liczby niepodzielne przez k, łatwiej jest zliczać te, które są podzielne przez k.

A – zbiór liczb podzielnych przez 6 w przedziale $[1, 1000]$
B – zbiór liczb podzielnych przez 8 w przedziale $[1, 1000]$
C – zbiór liczb podzielnych przez 15 w przedziale $[1, 1000]$

Wówczas szukamy $|A' \cap B' \cap C'|$.

Korzystając z **prawa De Morgana** otrzymujemy:

$$A' \cap B' \cap C' = (A \cup B \cup C)'$$

Zatem policzymy $|A \cup B \cup C|$.

Obliczamy wartości potrzebne do zasady włączeń i wyłączeń:

Obliczamy wartości potrzebne do zasady włączeń i wyłączeń:

$$|A| = \lfloor 1000/6 \rfloor = 166$$

Obliczamy wartości potrzebne do zasady włączeń i wyłączeń:

$$|A| = \lfloor 1000/6 \rfloor = 166$$

$$|B| = \lfloor 1000/8 \rfloor = 125$$

Obliczamy wartości potrzebne do zasady włączeń i wyłączeń:

$$|A| = \lfloor 1000/6 \rfloor = 166$$

$$|B| = \lfloor 1000/8 \rfloor = 125$$

$$|C| = \lfloor 1000/15 \rfloor = 66$$

Obliczamy wartości potrzebne do zasady włączeń i wyłączeń:

$$|A| = \lfloor 1000/6 \rfloor = 166$$

$$|B| = \lfloor 1000/8 \rfloor = 125$$

$$|C| = \lfloor 1000/15 \rfloor = 66$$

$$|A \cap B| = \lfloor 1000/NWW(6,8) \rfloor = \lfloor 1000/24 \rfloor = 41$$

Obliczamy wartości potrzebne do zasady włączeń i wyłączeń:

$$|A| = \lfloor 1000/6 \rfloor = 166$$

$$|B| = \lfloor 1000/8 \rfloor = 125$$

$$|C| = \lfloor 1000/15 \rfloor = 66$$

$$|A \cap B| = \lfloor 1000/NWW(6,8) \rfloor = \lfloor 1000/24 \rfloor = 41$$

$$|A \cap C| = \lfloor 1000/NWW(6,15) \rfloor = \lfloor 1000/30 \rfloor = 33$$

Obliczamy wartości potrzebne do zasady włączeń i wyłączeń:

$$|A| = \lfloor 1000/6 \rfloor = 166$$

$$|B| = \lfloor 1000/8 \rfloor = 125$$

$$|C| = \lfloor 1000/15 \rfloor = 66$$

$$|A \cap B| = \lfloor 1000/NWW(6,8) \rfloor = \lfloor 1000/24 \rfloor = 41$$

$$|A \cap C| = \lfloor 1000/NWW(6,15) \rfloor = \lfloor 1000/30 \rfloor = 33$$

$$|B \cap C| = \lfloor 1000/NWW(8,15) \rfloor = \lfloor 1000/120 \rfloor = 8$$

Obliczamy wartości potrzebne do zasady włączeń i wyłączeń:

$$|A| = \lfloor 1000/6 \rfloor = 166$$
$$|B| = \lfloor 1000/8 \rfloor = 125$$
$$|C| = \lfloor 1000/15 \rfloor = 66$$
$$|A \cap B| = \lfloor 1000/NWW(6,8) \rfloor = \lfloor 1000/24 \rfloor = 41$$
$$|A \cap C| = \lfloor 1000/NWW(6,15) \rfloor = \lfloor 1000/30 \rfloor = 33$$
$$|B \cap C| = \lfloor 1000/NWW(8,15) \rfloor = \lfloor 1000/120 \rfloor = 8$$
$$|A \cap B \cap C| = \lfloor 1000/NWW(6,8,15) \rfloor = \lfloor 1000/120 \rfloor = 8$$

$A \cup B \cup C$ – zbiór liczb podzielnych przez 6, 8 **lub** 15 w przedziale $[1, 1000]$

$A \cup B \cup C$ – zbiór liczb podzielnych przez 6, 8 **lub** 15 w przedziale $[1, 1000]$

Na mocy **zasady włączeń i wyłączeń**:

$A \cup B \cup C$ – zbiór liczb podzielnych przez 6, 8 **lub** 15 w przedziale $[1, 1000]$

Na mocy **zasady włączeń i wyłączeń**:

$$|A \cup B \cup C| =$$

$A \cup B \cup C$ – zbiór liczb podzielnych przez 6, 8 **lub** 15 w przedziale $[1, 1000]$

Na mocy **zasady włączeń i wyłączeń**:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C| =$$

$A \cup B \cup C$ – zbiór liczb podzielnych przez 6, 8 **lub** 15 w przedziale $[1, 1000]$

Na mocy **zasady włączeń i wyłączeń**:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C| =$$

$$= 166 + 125 + 66 - 41 - 33 - 8 + 8 = 283$$

$A \cup B \cup C$ – zbiór liczb podzielnych przez 6, 8 **lub** 15 w przedziale $[1, 1000]$

Na mocy **zasady włączeń i wyłączeń**:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C| =$$

$$= 166 + 125 + 66 - 41 - 33 - 8 + 8 = 283$$

Ile jest liczb niepodzielnych przez 6, 8 **ani** 15 w przedziale $[1, 1000]$?

$A \cup B \cup C$ – zbiór liczb podzielnych przez 6, 8 **lub** 15 w przedziale $[1, 1000]$

Na mocy **zasady włączeń i wyłączeń**:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C| =$$

$$= 166 + 125 + 66 - 41 - 33 - 8 + 8 = 283$$

Ile jest liczb niepodzielnych przez 6, 8 **ani** 15 w przedziale $[1, 1000]$?

$$|A' \cap B' \cap C'| =$$

$A \cup B \cup C$ – zbiór liczb podzielnych przez 6, 8 **lub** 15 w przedziale $[1, 1000]$

Na mocy **zasady włączeń i wyłączeń**:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C| =$$

$$= 166 + 125 + 66 - 41 - 33 - 8 + 8 = 283$$

Ile jest liczb niepodzielnych przez 6, 8 **ani** 15 w przedziale $[1, 1000]$?

$$|A' \cap B' \cap C'| = |(A \cup B \cup C)'| =$$

$A \cup B \cup C$ – zbiór liczb podzielnych przez 6, 8 **lub** 15 w przedziale $[1, 1000]$

Na mocy **zasady włączeń i wyłączeń**:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C| =$$

$$= 166 + 125 + 66 - 41 - 33 - 8 + 8 = 283$$

Ile jest liczb niepodzielnych przez 6, 8 **ani** 15 w przedziale $[1, 1000]$?

$$|A' \cap B' \cap C'| = |(A \cup B \cup C)'| = 1000 - |A \cup B \cup C|$$

$A \cup B \cup C$ – zbiór liczb podzielnych przez 6, 8 **lub** 15 w przedziale $[1, 1000]$

Na mocy **zasady włączeń i wyłączeń**:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C| =$$

$$= 166 + 125 + 66 - 41 - 33 - 8 + 8 = 283$$

Ile jest liczb niepodzielnych przez 6, 8 **ani** 15 w przedziale $[1, 1000]$?

$$|A' \cap B' \cap C'| = |(A \cup B \cup C)'| = 1000 - |A \cup B \cup C| = 717$$

Zadanie

15 osób wsiada do pustego pociągu składającego się z 4 wagonów. Na ile sposobów mogą oni wybrać wagony tak, aby żaden z wagonów nie pozostał pusty (kolejność wsiadania nie ma znaczenia)?

Pytanie 1: Na ile sposobów 15 osób może wejść do pociągu z 4 wagonami, jeśli wagony mogą pozostać puste?

Pytanie 1: Na ile sposobów 15 osób może wejść do pociągu z 4 wagonami, jeśli wagony mogą pozostać puste?

Każda z osób wybiera jeden z 4 wagonów. Jest to wariacja z powtórzeniami, a więc mamy 4^{15} możliwości.

Pytanie 1: Na ile sposobów 15 osób może wejść do pociągu z 4 wagonami, jeśli wagony mogą pozostać puste?

Każda z osób wybiera jeden z 4 wagonów. Jest to wariacja z powtórzeniami, a więc mamy 4^{15} możliwości.

Pytanie 2: Jak zagwarantować, że wagony nie będą puste?

Pytanie 1: Na ile sposobów 15 osób może wejść do pociągu z 4 wagonami, jeśli wagony mogą pozostać puste?

Każda z osób wybiera jeden z 4 wagonów. Jest to wariacja z powtórzeniami, a więc mamy 4^{15} możliwości.

Pytanie 2: Jak zagwarantować, że wagony nie będą puste?

Zdefiniujmy poniższe zbiory dla $k \in \{1, 2, 3, 4\}$:

Pytanie 1: Na ile sposobów 15 osób może wejść do pociągu z 4 wagonami, jeśli wagony mogą pozostać puste?

Każda z osób wybiera jeden z 4 wagonów. Jest to wariacja z powtórzeniami, a więc mamy 4^{15} możliwości.

Pytanie 2: Jak zagwarantować, że wagony nie będą puste?

Zdefiniujmy poniższe zbiory dla $k \in \{1, 2, 3, 4\}$:

A_k – zbiór sposobów wejścia 15 osób do pociągu z 4 wagonami w którym k-ty wagon pozostaje pusty

Pytanie 1: Na ile sposobów 15 osób może wejść do pociągu z 4 wagonami, jeśli wagony mogą pozostać puste?

Każda z osób wybiera jeden z 4 wagonów. Jest to wariacja z powtórzeniami, a więc mamy 4^{15} możliwości.

Pytanie 2: Jak zagwarantować, że wagony nie będą puste?

Zdefiniujmy poniższe zbiory dla $k \in \{1, 2, 3, 4\}$:

A_k – zbiór sposobów wejścia 15 osób do pociągu z 4 wagonami w którym k-ty wagon pozostaje pusty

Pytanie 3: Co chcemy wyznaczyć?

Pytanie 1: Na ile sposobów 15 osób może wejść do pociągu z 4 wagonami, jeśli wagony mogą pozostać puste?

Każda z osób wybiera jeden z 4 wagonów. Jest to wariacja z powtórzeniami, a więc mamy 4^{15} możliwości.

Pytanie 2: Jak zagwarantować, że wagony nie będą puste?

Zdefiniujmy poniższe zbiory dla $k \in \{1, 2, 3, 4\}$:

A_k – zbiór sposobów wejścia 15 osób do pociągu z 4 wagonami w którym k-ty wagon pozostaje pusty

Pytanie 3: Co chcemy wyznaczyć?

$$A'_1 \cap A'_2 \cap A'_3 \cap A'_4$$

Pytanie 1: Na ile sposobów 15 osób może wejść do pociągu z 4 wagonami, jeśli wagony mogą pozostać puste?

Każda z osób wybiera jeden z 4 wagonów. Jest to wariacja z powtórzeniami, a więc mamy 4^{15} możliwości.

Pytanie 2: Jak zagwarantować, że wagony nie będą puste?

Zdefiniujmy poniższe zbiory dla $k \in \{1, 2, 3, 4\}$:

A_k – zbiór sposobów wejścia 15 osób do pociągu z 4 wagonami w którym k-ty wagon pozostaje pusty

Pytanie 3: Co chcemy wyznaczyć?

$$A_1' \cap A_2' \cap A_3' \cap A_4' = (A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4)'$$

$$|A_k| =$$

$$|A_k| = 3^{15}$$

$$|A_k| = 3^{15}$$

$$|A_k \cap A_l| =$$

$$|A_k| = 3^{15}$$

$$|A_k \cap A_l| = 2^{15} \quad \text{dla } k \neq l$$

$$|A_k| = 3^{15}$$
$$|A_k \cap A_l| = 2^{15} \ \ \text{dla } k \neq l$$

$$|A_k \cap A_l \cap A_m| =$$

$$|A_k| = 3^{15}$$

$$|A_k \cap A_l| = 2^{15} \ \ \text{dla } k \neq l$$

$$|A_k \cap A_l \cap A_m| = 1^{15} \ \ \text{dla parami różnych } k, l, m$$

$$|A_k| = 3^{15}$$

$$|A_k \cap A_l| = 2^{15} \text{ dla } k \neq l$$

$$|A_k \cap A_l \cap A_m| = 1^{15} \text{ dla parami różnych } k, l, m$$

$$|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4| =$$

$$|A_k| = 3^{15}$$

$$|A_k \cap A_l| = 2^{15} \text{ dla } k \neq l$$

$$|A_k \cap A_l \cap A_m| = 1^{15} \text{ dla parami różnych } k, l, m$$

$$|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4| = 0^{15}$$

$$|A_k| = 3^{15}$$

$$|A_k \cap A_l| = 2^{15} \ \text{ dla } k \neq l$$

$$|A_k \cap A_l \cap A_m| = 1^{15} \ \text{ dla parami różnych } k, l, m$$

$$|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4| = 0^{15}$$

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4| =$$

$$|A_k| = 3^{15}$$

$$|A_k \cap A_l| = 2^{15} \text{ dla } k \neq l$$

$$|A_k \cap A_l \cap A_m| = 1^{15} \text{ dla parami różnych } k, l, m$$

$$|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4| = 0^{15}$$

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4| = \left(\sum_{1 \leqslant k \leqslant 4} |A_k| \right)$$

$$|A_k| = 3^{15}$$

$$|A_k \cap A_l| = 2^{15} \ \text{ dla } k \neq l$$

$$|A_k \cap A_l \cap A_m| = 1^{15} \ \text{ dla parami różnych } k, l, m$$

$$|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4| = 0^{15}$$

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4| = \left(\sum_{1 \leqslant k \leqslant 4} |A_k| \right) - \left(\sum_{1 \leqslant k < l \leqslant 4} |A_k \cap A_l| \right) +$$

$$|A_k| = 3^{15}$$

$$|A_k \cap A_l| = 2^{15} \ \text{ dla } k \neq l$$

$$|A_k \cap A_l \cap A_m| = 1^{15} \ \text{ dla parami różnych } k, l, m$$

$$|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4| = 0^{15}$$

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4| = \left(\sum_{1 \leqslant k \leqslant 4} |A_k|\right) - \left(\sum_{1 \leqslant k < l \leqslant 4} |A_k \cap A_l|\right) +$$

$$+ \left(\sum_{1 \leqslant k < l < m \leqslant 4} |A_k \cap A_l \cap A_m|\right)$$

$$|A_k| = 3^{15}$$

$$|A_k \cap A_l| = 2^{15} \text{ dla } k \neq l$$

$$|A_k \cap A_l \cap A_m| = 1^{15} \text{ dla parami różnych } k, l, m$$

$$|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4| = 0^{15}$$

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4| = \left(\sum_{1 \leqslant k \leqslant 4} |A_k| \right) - \left(\sum_{1 \leqslant k < l \leqslant 4} |A_k \cap A_l| \right) +$$

$$+ \left(\sum_{1 \leqslant k < l < m \leqslant 4} |A_k \cap A_l \cap A_m| \right) - (|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4|) =$$

$$|A_k| = 3^{15}$$
$$|A_k \cap A_l| = 2^{15} \text{ dla } k \neq l$$

$$|A_k \cap A_l \cap A_m| = 1^{15} \text{ dla parami różnych } k, l, m$$
$$|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4| = 0^{15}$$

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4| = \left(\sum_{1 \leqslant k \leqslant 4} |A_k|\right) - \left(\sum_{1 \leqslant k < l \leqslant 4} |A_k \cap A_l|\right) +$$
$$+ \left(\sum_{1 \leqslant k < l < m \leqslant 4} |A_k \cap A_l \cap A_m|\right) - (|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4|) =$$
$$= \left(\sum_{1 \leqslant k \leqslant 4} 3^{15}\right) - \left(\sum_{1 \leqslant k < l \leqslant 4} 2^{15}\right) + \left(\sum_{1 \leqslant k < l < m \leqslant 4} 1^{15}\right) - \left(0^{15}\right) =$$

$$\left(\sum_{1\leqslant k\leqslant 4} 3^{15}\right) - \left(\sum_{1\leqslant k<l\leqslant 4} 2^{15}\right) + \left(\sum_{1\leqslant k<l<m\leqslant 4} 1^{15}\right) - \left(0^{15}\right) =$$

$$\left(\sum_{1\leqslant k\leqslant 4} 3^{15}\right) - \left(\sum_{1\leqslant k<l\leqslant 4} 2^{15}\right) + \left(\sum_{1\leqslant k<l<m\leqslant 4} 1^{15}\right) - \left(0^{15}\right) =$$

$$= \binom{4}{1} 3^{15}$$

$$\left(\sum_{1\leqslant k\leqslant 4} 3^{15}\right) - \left(\sum_{1\leqslant k<l\leqslant 4} 2^{15}\right) + \left(\sum_{1\leqslant k<l<m\leqslant 4} 1^{15}\right) - \left(0^{15}\right) =$$

$$= \binom{4}{1}3^{15} - \binom{4}{2}2^{15}$$

$$\left(\sum_{1\leqslant k\leqslant 4} 3^{15}\right) - \left(\sum_{1\leqslant k<l\leqslant 4} 2^{15}\right) + \left(\sum_{1\leqslant k<l<m\leqslant 4} 1^{15}\right) - \left(0^{15}\right) =$$

$$= \binom{4}{1}3^{15} - \binom{4}{2}2^{15} + \binom{4}{3}1^{15}$$

$$\left(\sum_{1\leqslant k\leqslant 4} 3^{15}\right) - \left(\sum_{1\leqslant k<l\leqslant 4} 2^{15}\right) + \left(\sum_{1\leqslant k<l<m\leqslant 4} 1^{15}\right) - \left(0^{15}\right) =$$

$$= \binom{4}{1}3^{15} - \binom{4}{2}2^{15} + \binom{4}{3}1^{15} = 4\cdot 3^{15} - 6\cdot 2^{15} + 4$$

$$\left(\sum_{1\leqslant k\leqslant 4} 3^{15}\right) - \left(\sum_{1\leqslant k<l\leqslant 4} 2^{15}\right) + \left(\sum_{1\leqslant k<l<m\leqslant 4} 1^{15}\right) - \left(0^{15}\right) =$$

$$= \binom{4}{1}3^{15} - \binom{4}{2}2^{15} + \binom{4}{3}1^{15} = 4\cdot 3^{15} - 6\cdot 2^{15} + 4$$

X – liczba wszystkich możliwości wejścia do pociągu,

$$\left(\sum_{1\leqslant k\leqslant 4} 3^{15}\right) - \left(\sum_{1\leqslant k<l\leqslant 4} 2^{15}\right) + \left(\sum_{1\leqslant k<l<m\leqslant 4} 1^{15}\right) - \left(0^{15}\right) =$$

$$= \binom{4}{1}3^{15} - \binom{4}{2}2^{15} + \binom{4}{3}1^{15} = 4\cdot 3^{15} - 6\cdot 2^{15} + 4$$

X – liczba wszystkich możliwości wejścia do pociągu, $|X| = 4^{15}$

$$\left(\sum_{1\leqslant k\leqslant 4} 3^{15}\right) - \left(\sum_{1\leqslant k<l\leqslant 4} 2^{15}\right) + \left(\sum_{1\leqslant k<l<m\leqslant 4} 1^{15}\right) - \left(0^{15}\right) =$$

$$= \binom{4}{1}3^{15} - \binom{4}{2}2^{15} + \binom{4}{3}1^{15} = 4\cdot 3^{15} - 6\cdot 2^{15} + 4$$

X – liczba wszystkich możliwości wejścia do pociągu, $|X| = 4^{15}$

$$|A_1' \cap A_2' \cap A_3' \cap A_4'| = |(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4)'| =$$

$$\left(\sum_{1\leqslant k\leqslant 4} 3^{15}\right) - \left(\sum_{1\leqslant k<l\leqslant 4} 2^{15}\right) + \left(\sum_{1\leqslant k<l<m\leqslant 4} 1^{15}\right) - \left(0^{15}\right) =$$

$$= \binom{4}{1}3^{15} - \binom{4}{2}2^{15} + \binom{4}{3}1^{15} = 4\cdot 3^{15} - 6\cdot 2^{15} + 4$$

X – liczba wszystkich możliwości wejścia do pociągu, $|X| = 4^{15}$

$$|A_1' \cap A_2' \cap A_3' \cap A_4'| = |(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4)'| =$$

$$= |X| - |A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4|$$

$$\left(\sum_{1\leqslant k\leqslant 4} 3^{15}\right) - \left(\sum_{1\leqslant k<l\leqslant 4} 2^{15}\right) + \left(\sum_{1\leqslant k<l<m\leqslant 4} 1^{15}\right) - \left(0^{15}\right) =$$

$$= \binom{4}{1}3^{15} - \binom{4}{2}2^{15} + \binom{4}{3}1^{15} = 4\cdot 3^{15} - 6\cdot 2^{15} + 4$$

X – liczba wszystkich możliwości wejścia do pociągu, $|X| = 4^{15}$

$$|A_1' \cap A_2' \cap A_3' \cap A_4'| = |(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4)'| =$$

$$= |X| - |A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4| = 4^{15} - 4\cdot 3^{15} + 6\cdot 2^{15} - 4$$

Zadanie

Na ile sposobów można włożyć 30 kul do 20 rozróżnialnych urn tak, aby w każdej urnie była co najmniej jedna kula, jeśli

a) *kule są nierozróżnialne?*

b) *kule są rozróżnialne?*

UWAGA: porównaj zadanie z zadaniem A.3. z zestawu o schematach wyboru

Zadanie

Na ile sposobów można włożyć 30 kul do 20 rozróżnialnych urn tak, aby w każdej urnie była co najmniej jedna kula, jeśli

a) *kule są nierozróżnialne?*

Zadanie

Na ile sposobów można włożyć 30 kul do 20 rozróżnialnych urn tak, aby w każdej urnie była co najmniej jedna kula, jeśli

a) *kule są nierozróżnialne?*

Musimy najpierw włożyć po jednej kuli do każdej z urn.

Zadanie

Na ile sposobów można włożyć 30 kul do 20 rozróżnialnych urn tak, aby w każdej urnie była co najmniej jedna kula, jeśli

a) *kule są nierozróżnialne?*

Musimy najpierw włożyć po jednej kuli do każdej z urn. Kule są nierozróżnialne, więc jest tylko 1 sposób, aby to zrobić.

Zadanie

Na ile sposobów można włożyć 30 kul do 20 rozróżnialnych urn tak, aby w każdej urnie była co najmniej jedna kula, jeśli

a) *kule są nierozróżnialne?*

Musimy najpierw włożyć po jednej kuli do każdej z urn. Kule są nierozróżnialne, więc jest tylko 1 sposób, aby to zrobić. Następnie ze zbioru 20 urn wybieramy multizbiór 10 urn, do których włożymy pozostałe kule.

Zadanie

Na ile sposobów można włożyć 30 kul do 20 rozróżnialnych urn tak, aby w każdej urnie była co najmniej jedna kula, jeśli

a) *kule są nierozróżnialne?*

Musimy najpierw włożyć po jednej kuli do każdej z urn. Kule są nierozróżnialne, więc jest tylko 1 sposób, aby to zrobić. Następnie ze zbioru 20 urn wybieramy multizbiór 10 urn, do których włożymy pozostałe kule. Są to zatem kombinacje z powtórzeniami, odpowiedź to

Zadanie

Na ile sposobów można włożyć 30 kul do 20 rozróżnialnych urn tak, aby w każdej urnie była co najmniej jedna kula, jeśli

a) *kule są nierozróżnialne?*

Musimy najpierw włożyć po jednej kuli do każdej z urn. Kule są nierozróżnialne, więc jest tylko 1 sposób, aby to zrobić. Następnie ze zbioru 20 urn wybieramy multizbiór 10 urn, do których włożymy pozostałe kule. Są to zatem kombinacje z powtórzeniami, odpowiedź to

$$\binom{10+20-1}{10}.$$

Zadanie

Na ile sposobów można włożyć 30 kul do 20 rozróżnialnych urn tak, aby w każdej urnie była co najmniej jedna kula, jeśli

b) *kule są rozróżnialne?*

Zadanie

Na ile sposobów można włożyć 30 kul do 20 rozróżnialnych urn tak, aby w każdej urnie była co najmniej jedna kula, jeśli

b) *kule są rozróżnialne?*

Wskazówka: Podpunkt b) jest analogiczny do zadania A.3, jedynie liczby są większe.

Zadanie

Na ile sposobów można włożyć 30 kul do 20 rozróżnialnych urn tak, aby w każdej urnie była co najmniej jedna kula, jeśli

b) *kule są rozróżnialne?*

Wskazówka: Podpunkt b) jest analogiczny do zadania A.3, jedynie liczby są większe.

wagony – urny
osoby – kule

Twierdzenie (Zasada włączeń i wyłączeń (przypadek ogólny))

Niech $A_1, A_2, \ldots, A_n$ będą dowolnymi zbiorami skończonymi. Wtedy

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| = \left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} S_k^{(n)},$$

gdzie $S_k^{(n)} = \sum_{J \subseteq [n], |J|=k} \left|\bigcap_{j \in J} A_j\right|$, *dla każdego* $k = 1, 2, \ldots, n$.

Twierdzenie (Zasada włączeń i wyłączeń (wersja symetryczna))

Niech $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *będą skończonymi zbiorami, dla których*

$$|A_1| = |A_2| = \ldots = |A_n|,$$

$$|A_1 \cap A_2| = |A_1 \cap A_3| = \ldots = |A_{n-1} \cap A_n|,$$

$$\vdots$$

Wtedy

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| = \left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \binom{n}{k} |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_k|.$$

A_i –

A_i – zbiór rozłożeń 30 rozróżnialnych kul w 20 rozróżnialnych urnach, w którym i-ta urna jest pusta

A_i – zbiór rozłożeń 30 rozróżnialnych kul w 20 rozróżnialnych urnach, w którym i-ta urna jest pusta

Chcemy wyznaczyć:

A_i – zbiór rozłożeń 30 rozróżnialnych kul w 20 rozróżnialnych urnach, w którym i-ta urna jest pusta

Chcemy wyznaczyć: $|A'_1 \cap A'_2 \cap \ldots \cap A'_{20}|$

A_i – zbiór rozłożeń 30 rozróżnialnych kul w 20 rozróżnialnych urnach, w którym i-ta urna jest pusta

Chcemy wyznaczyć: $|A_1' \cap A_2' \cap \ldots \cap A_{20}'| = |(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_{20})'|$

A_i – zbiór rozłożeń 30 rozróżnialnych kul w 20 rozróżnialnych urnach, w którym i-ta urna jest pusta

Chcemy wyznaczyć: $|A_1' \cap A_2' \cap \ldots \cap A_{20}'| = |(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_{20})'|$

$$|A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap ... \cap A_{i_k}| =$$

A_i – zbiór rozłożeń 30 rozróżnialnych kul w 20 rozróżnialnych urnach, w którym i-ta urna jest pusta

Chcemy wyznaczyć: $|A'_1 \cap A'_2 \cap \ldots \cap A'_{20}| = |(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_{20})'|$

$$|A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap ... \cap A_{i_k}| = (20 - k)^{30}$$

A_i – zbiór rozłożeń 30 rozróżnialnych kul w 20 rozróżnialnych urnach, w którym i-ta urna jest pusta

Chcemy wyznaczyć: $|A_1' \cap A_2' \cap \ldots \cap A_{20}'| = |(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_{20})'|$

$$|A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap ... \cap A_{i_k}| = (20 - k)^{30}$$

$$|A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_{20}| =$$

A_i – zbiór rozłożeń 30 rozróżnialnych kul w 20 rozróżnialnych urnach, w którym i-ta urna jest pusta

Chcemy wyznaczyć: $|A_1' \cap A_2' \cap \ldots \cap A_{20}'| = |(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_{20})'|$

$$|A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap ... \cap A_{i_k}| = (20-k)^{30}$$

$$|A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_{20}| = \sum_{k=1}^{20} (-1)^{k-1} \binom{20}{k} |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_k|$$
$$=$$

A_i – zbiór rozłożeń 30 rozróżnialnych kul w 20 rozróżnialnych urnach, w którym i-ta urna jest pusta

Chcemy wyznaczyć: $|A_1' \cap A_2' \cap \ldots \cap A_{20}'| = |(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_{20})'|$

$$|A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap ... \cap A_{i_k}| = (20-k)^{30}$$

$$\begin{aligned} |A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_{20}| &= \sum_{k=1}^{20} (-1)^{k-1} \binom{20}{k} |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_k| \\ &= \sum_{k=1}^{20} (-1)^{k-1} \binom{20}{k} (20-k)^{30} \end{aligned}$$

X – liczba wszystkich sposobów, $|X| =$

X – liczba wszystkich sposobów, $|X| = 20^{30}$

X – liczba wszystkich sposobów, $|X| = 20^{30}$

$$|A'_1 \cap A'_2 \cap \ldots \cap A'_{20}| = |(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_{20})'|$$
$$=$$

X – liczba wszystkich sposobów, $|X| = 20^{30}$

$$\begin{aligned}|A'_1 \cap A'_2 \cap \ldots \cap A'_{20}| &= |(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_{20})'| \\ &= |X| - |A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_{20}| \\ &= \end{aligned}$$

X – liczba wszystkich sposobów, $|X| = 20^{30}$

$$
\begin{aligned}
|A_1' \cap A_2' \cap \ldots \cap A_{20}'| &= |(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_{20})'| \\
&= |X| - |A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_{20}| \\
&= 20^{30} - \sum_{k=1}^{20} (-1)^{k-1} \binom{20}{k} (20-k)^{30} \\
&=
\end{aligned}
$$

X – liczba wszystkich sposobów, $|X| = 20^{30}$

$$\begin{aligned}
|A_1' \cap A_2' \cap \ldots \cap A_{20}'| &= |(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_{20})'| \\
&= |X| - |A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_{20}| \\
&= 20^{30} - \sum_{k=1}^{20} (-1)^{k-1} \binom{20}{k} (20-k)^{30} \\
&= \sum_{k=0}^{20} (-1)^{k} \binom{20}{k} (20-k)^{30}
\end{aligned}$$

Zadanie

Na ile sposobów można ustawić $2n$ *małżonków z* n, $n \geqslant 2$, *par małżeńskich w rzędzie tak, aby*

a) *istniała para małżeńska, która stoi obok siebie?*

b) *żadna z pań nie stała obok swojego męża?*

A_i –

A_i – zbiór ustawień, w którym i-ta para stoi obok siebie.

A_i – zbiór ustawień, w którym i-ta para stoi obok siebie.

Zbiór ustawień, w którym **istnieje para małżeńska, która stoi obok siebie** to:

A_i – zbiór ustawień, w którym i-ta para stoi obok siebie.

Zbiór ustawień, w którym **istnieje para małżeńska, która stoi obok siebie** to:

$$A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$$

A_i – zbiór ustawień, w którym i-ta para stoi obok siebie.

Zbiór ustawień, w którym **istnieje para małżeńska, która stoi obok siebie** to:

$$A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$$

$$|A_i| =$$

A_i – zbiór ustawień, w którym i-ta para stoi obok siebie.

Zbiór ustawień, w którym **istnieje para małżeńska, która stoi obok siebie** to:

$$A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$$

$$|A_i| = (2n-1)! \cdot 2$$

A_i – zbiór ustawień, w którym i-ta para stoi obok siebie.

Zbiór ustawień, w którym **istnieje para małżeńska, która stoi obok siebie** to:

$$A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$$

$$|A_i| = (2n-1)! \cdot 2$$

$$|A_i \cap A_j| =$$

A_i – zbiór ustawień, w którym i-ta para stoi obok siebie.

Zbiór ustawień, w którym **istnieje para małżeńska, która stoi obok siebie** to:

$$A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$$

$$|A_i| = (2n-1)! \cdot 2$$

$$|A_i \cap A_j| = (2n-2)! \cdot 2 \cdot 2, \; i \neq j$$

A_i – zbiór ustawień, w którym i-ta para stoi obok siebie.

Zbiór ustawień, w którym **istnieje para małżeńska, która stoi obok siebie** to:

$$A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$$

$$|A_i| = (2n-1)! \cdot 2$$

$$|A_i \cap A_j| = (2n-2)! \cdot 2 \cdot 2, \ i \neq j$$

$$\vdots$$

A_i – zbiór ustawień, w którym i-ta para stoi obok siebie.

Zbiór ustawień, w którym **istnieje para małżeńska, która stoi obok siebie** to:

$$A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$$

$$|A_i| = (2n-1)! \cdot 2$$

$$|A_i \cap A_j| = (2n-2)! \cdot 2 \cdot 2, \; i \neq j$$

$$\vdots$$

$$|A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}| =$$

A_i – zbiór ustawień, w którym i-ta para stoi obok siebie.

Zbiór ustawień, w którym **istnieje para małżeńska, która stoi obok siebie** to:

$$A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$$

$$|A_i| = (2n-1)! \cdot 2$$

$$|A_i \cap A_j| = (2n-2)! \cdot 2 \cdot 2, \; i \neq j$$

$$\vdots$$

$$|A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}| = (2n-k)! \cdot 2^k$$

A_i – zbiór ustawień, w którym i-ta para stoi obok siebie.

Zbiór ustawień, w którym **istnieje para małżeńska, która stoi obok siebie** to:

$$A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$$

$$|A_i| = (2n-1)! \cdot 2$$

$$|A_i \cap A_j| = (2n-2)! \cdot 2 \cdot 2, \;\; i \neq j$$

$$\vdots$$

$$|A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}| = (2n-k)! \cdot 2^k$$

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| =$$

A_i – zbiór ustawień, w którym i-ta para stoi obok siebie.

Zbiór ustawień, w którym **istnieje para małżeńska, która stoi obok siebie** to:

$$A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$$

$$|A_i| = (2n-1)! \cdot 2$$

$$|A_i \cap A_j| = (2n-2)! \cdot 2 \cdot 2, \;\; i \neq j$$

$$\vdots$$

$$|A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}| = (2n-k)! \cdot 2^k$$

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \binom{n}{k} (2n-k)! \cdot 2^k$$

A_i – zbiór ustawień, w którym i-ta para stoi obok siebie

X – zbiór wszystkich ustawień, $|X| =$

A_i – zbiór ustawień, w którym i-ta para stoi obok siebie

X – zbiór wszystkich ustawień, $|X| = (2n)!$

A_i – zbiór ustawień, w którym i-ta para stoi obok siebie

X – zbiór wszystkich ustawień, $|X| = (2n)!$

Zbiór ustawień, w którym **żadna z pań nie stoi obok swojego męża** to:

A_i – zbiór ustawień, w którym i-ta para stoi obok siebie

X – zbiór wszystkich ustawień, $|X| = (2n)!$

Zbiór ustawień, w którym **żadna z pań nie stoi obok swojego męża** to:

$$(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n)'$$

A_i – zbiór ustawień, w którym i-ta para stoi obok siebie

X – zbiór wszystkich ustawień, $|X| = (2n)!$

Zbiór ustawień, w którym **żadna z pań nie stoi obok swojego męża** to:

$$(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n)'$$

$$|(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n)'| =$$

A_i – zbiór ustawień, w którym i-ta para stoi obok siebie

X – zbiór wszystkich ustawień, $|X| = (2n)!$

Zbiór ustawień, w którym **żadna z pań nie stoi obok swojego męża** to:

$$(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n)'$$

$$|(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n)'| = |X| - |A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n|$$

A_i – zbiór ustawień, w którym i-ta para stoi obok siebie

X – zbiór wszystkich ustawień, $|X| = (2n)!$

Zbiór ustawień, w którym **żadna z pań nie stoi obok swojego męża** to:

$$(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n)'$$

$$\begin{aligned} |(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n)'| &= |X| - |A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| \\ &= (2n)! - \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \binom{n}{k} (2n-k)! \cdot 2^k \end{aligned}$$

A_i – zbiór ustawień, w którym i-ta para stoi obok siebie

X – zbiór wszystkich ustawień, $|X| = (2n)!$

Zbiór ustawień, w którym **żadna z pań nie stoi obok swojego męża** to:

$$(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n)'$$

$$\begin{aligned} |(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n)'| &= |X| - |A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| \\ &= (2n)! - \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \binom{n}{k} (2n-k)! \cdot 2^k \\ &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k} \binom{n}{k} (2n-k)! \cdot 2^k \end{aligned}$$