DMAD - tożsamości kombinatoryczne

Jak przygotować się do rozwiązywania zadań?

Przeczytaj rozdział 3.5 z podręcznika.

Szczypta teorii:

$\binom{a}{b}$

- Na tyle sposobów można wybrać b–elementowy podzbiór zbioru a–elementowego;
- Na tyle sposobów można wybrać b „miejsc” spośród a „miejsc” ustawionych w ciągu (i wpisać na te miejsca konkretną liczbę/znak albo wpisać na pozostałe $b - a$ miejsc konkretną liczbę/znak);
- Tyle jest ciągów binarnych z b „1” i $(a - b)$ „0”;
- Tyle jest rozwiązań w liczbach całkowitych równania

$$x_1 + \ldots + x_{a-b+1} = b, \quad x_i \geqslant 0;$$

- Tyle jest rozwiązań w liczbach całkowitych równania

$$x_1 + \ldots + x_{b+1} = a - b, \quad x_i \geqslant 0;$$

- Tyle jest najkrótszych dróg między przeciwległymi wierzchołkami kraty $b \times (a - b)$.

$(a)_b$

- Tyle jest ciągów długości b o różnych elementach ze zbioru a–elementowego;
- Na tyle sposobów można „wpisać” b **różnych** liczb (znaków) na b „miejsc” wybranych spośród a „miejsc” w ciągu;
- Na tyle sposobów można wybrać b elementów ze zbioru a–elementowego, a następnie ustawić je w ciągu (w kolejności).

a^b?

- Tyle jest ciągów długości b o elementach ze zbioru a–elementowego;
- Na tyle sposobów możemy wybrać **ze zwracaniem, kolejno** b razy jeden element ze zbioru a elementów;
- Dla $a = 2$, 2^b – liczba podzbiorów zbioru b–elementowego;
- Dla $a = 2$, 2^b – liczba ciągów binarnych długości b.

a?

- Na tyle sposobów można wybrać jeden (wyróżniony) element ze zbioru a–elementowego;
- Na tyle sposobów można wybrać 1–elementowy podzbiór zbioru a–elementowego;
- Na tyle sposobów można wybrać jedno „miejsce” spośród a „miejsc” ustawionych w ciągu (i wpisać na nie liczbę/znak lub wpisać na pozostałe miejsca konkretną liczbę/znak);
- Tyle jest ciągów binarnych z jedną „1” i $(a - 1)$ „0”.

Twierdzenia 3.2 i 3.3 (wzór Newtona i wzór wielomianowy)

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}, \qquad (a_1 + \ldots + a_r)^n = \sum_{\substack{t_1,\ldots,t_r \geqslant 0 \\ t_1+\ldots+t_r=n}} \binom{n}{t_1,\ldots,t_r} a_1^{t_1} \cdot \ldots \cdot a_r^{t_r}.$$

A Zadania na ćwiczenia

Udowodnij kombinatorycznie podaną tożsamość

Zadanie A.1.

$$n\binom{n-1}{k-1} = k\binom{n}{k}, \quad 1 \leqslant k \leqslant n.$$

Zadanie A.2.

$$\sum_{k=2}^{n} (k)_2 \binom{n}{k} = (n)_2 2^{n-2}, \quad n \geqslant 2.$$

Zadanie A.3.

$$\sum_{k=3}^{n} \binom{k-1}{2} = \binom{n}{3}, \quad n \geqslant 3.$$

Zadanie A.4. Rozpisz wyrażenie $(x + 2y + 3z)^4$ i podaj współczynnik przy x^2yz oraz x^3z.

B Zadania na ćwiczenia - jeśli czas pozwoli

Zadanie B.1. Udowodnij kombinatorycznie następującą tożsamość

$$\sum_{k=0}^{n} 2^k \binom{n}{k} = 3^n, \quad n \geqslant 0.$$

Zadanie B.2. Udowodnij kombinatorycznie następującą tożsamość

$$\sum_{k=m}^{n-1} \binom{k}{r-1} = \binom{n}{r} - \binom{m}{r}, \quad 0 \leqslant m < n, 1 \leqslant r \leqslant m.$$

Zadanie B.3. Udowodnij kombinatorycznie następującą tożsamość

$$\sum_{k=1}^{n} k(n+1-k) = \binom{n+2}{3}, \quad n \geqslant 1.$$

C Zadania do samodzielnej pracy w domu

Zadanie C.1. Spróbuj sama/sam rozwiązać a następnie przeczytaj uważnie rozwiązanie przykładu 3.26 z podręcznika.

Udowodnij kombinatorycznie podaną tożsamość (dotyczy zadań C.2–C.7)

Zadanie C.2.

$$\binom{2n}{2} = 2\binom{n}{2} + n^2, \quad n \geqslant 1.$$

Zadanie C.3.

$$\binom{2n}{3} = 2\left(n\binom{n}{2} + \binom{n}{3}\right), \quad n \geqslant 1.$$

Zadanie C.4.

$$\binom{m}{n}\binom{n}{k} = \binom{m}{m-k}\binom{m-k}{n-k}, \quad m \geqslant n \geqslant k \geqslant 0.$$

Zadanie C.5.

$$\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}, \quad n \geqslant 1.$$

Zadanie C.6.

$$\sum_{k=0}^{m} \binom{n+k}{k} = \binom{n+m+1}{m}, \quad n, m \geqslant 1.$$

Zadanie C.7.

$$\sum_{k=0}^{n} 3^{n-k}\binom{n}{k} = 4^n, \quad n \geqslant 0.$$

Zadanie C.8. Rozpisz wyrażenie

a) $(x+y)^6$;
b) $(x+y+2z)^2$;
c) $(x+3y)^3$.

Zadanie C.9. Podaj współczynnik przy

a) xzt^3;
b) y^3z^2;

w wyrażeniu $(x+y+2z+2t)^5$.

Zadanie C.10. Zadanie 3.34 z podręcznika.

Odpowiedzi do niektórych zadań

Wskazówki:

C.2 Rozważ na przykład zbiór $2n$ ponumerowanych kul, z których n jest białych a n czarnych.

C.3 Rozważ na przykład zbiór $2n$ ponumerowanych kul, z których n jest białych a n czarnych.

C.4 Rozważ na przykład ciągi ternarne o $m-n$ zerach, $n-k$ jedynkach i k dwójkach.

C.5 Przeanalizuj zadania A.1 i A.2.

C.6 Rozważ na przykład wybór m elementów z uporządkowanego zbioru $(n+m+1)$–elementowego, gdzie na początek ustalamy największy element, który **nie należy** do wybieranego podzbioru.

C.7 Rozważ na przykład ciągi długości n o elementach ze zbioru $\{0,1,2,3\}$. Ile mogą mieć one zer?

Odpowiedzi:

C.8
a) $x^6+6x^5y+15x^4y^2+20x^3y^3+15x^2y^4+6xy^5+y^6$;
b) $x^2+y^2+4z^2+2xy+4xz+4yz$;
c) $x^3+9x^2y+27xy^2+27y^3$.

C.9 a) 320 b) 40