Logika i teoria mnogości

Ćwiczenia 14

Funkcje

Definicja. *Funkcją* nazywamy relację binarną R, spełniającą warunek prawostronnej jednoznaczności:

$\forall_{x,y,z}(< x, y > \in R \quad \wedge < x, z > \in R \Rightarrow y = z)$.

Zgodnie z tym warunkiem, dla każdego obiektu x istnieje najwyżej jeden obiekt y taki, że $< x, y > \in R$.

Definicja. Niech f będzie funkcją. Dla $x \in D(f)$ jedyny element y taki, że $< x, y > \in f$ nazywamy *wartością funkcji* f dla argumentu x i oznaczamy $f(x)$.

$(Df(x))\forall_{x \in D(f)}\forall_y(f(x) = y \Leftrightarrow < x, y > \in f)$

Zbiór $D(f)$ jest *dziedziną funkcji* f.

Mamy: $D^*(f) = \{f(x) : x \in D(f)\}$. Zbiór $D^*(f)$, czyli *przeciwdziedzinę funkcji* f, nazywamy też zbiorem wartości funkcji f.

Definicja. Niech f będzie funkcją. Mówimy, że funkcja f *odwzorowuje zbiór* X *w zbiór* Y , jeżeli $D(f) = X$ i $D^*(f) \subset Y$. Piszemy $f : X \mapsto Y$.

Definicja. Niech f będzie funkcją. Mówimy, że funkcja f *odwzorowuje zbiór* X *na zbiór* Y , jeżeli $D(f) = X$ i $D^*(f) = Y$. Piszemy $f : X \overset{na}{\mapsto} Y$.

Definicja. Funkcję f nazywamy *różnowartościową* (albo: wzajemnie jednoznaczną, jedno-jednoznaczną), jeżeli spełnia warunek:

$\forall x_1, x_2 \in D(f)(f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2)$.

Równoważnie: $\forall_{x_1,x_2 \in D(f)}(x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2))$.

Piszemy $f : X \overset{1-1}{\mapsto} Y$, jeżeli funkcja $f : X \mapsto Y$ jest różnowartościowa.

Definicja. *Odwzorowaniem* nazywamy trójkę $< f, X, Y >$ taką, że f jest funkcją, X, Y są zbiorami i $f : X \mapsto Y$.

Definicja. Odwzorowanie $f : X \mapsto Y$ nazywamy:
iniekcją, jeżeli $f : X \overset{1-1}{\mapsto} Y$,
suriekcją, jeżeli $f : X \overset{na}{\mapsto} Y$,
bijekcją, jeżeli jest iniekcją i suriekcją.

Zadanie 1. Czy następujące relacje są funkcjami? Odpowiedź uzasadnić.

a) $R = \{< 0,0 >, < 1,0 >, < 1,1 >\}$

b) $R = \{< 0,0 >, < 1,0 >, < 2,1 >\}$

c) $R = \{< x,y > \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x + y = 0\}$

d) $R = \{< x,y > \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x \cdot y = 0\}$

e) $R = \{< x,y > \in X \times Y : y \text{ jest rokiem urodzenia osoby } x\}, Y = \mathbb{N}, X$-zbiór wszystkich ludzi.

f) $R = \{< x,y > \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : x|y\}$

Definicja. Niech $f : X \mapsto Y$. Dla dowolnego $A \subset X$ określamy zbiór:
$f[A] = \{f(x) : x \in A\} = \{y : \exists_x (x \in A \wedge y = f(x))\}$,
zwany *obrazem zbioru A danym przez funkcję f*.
Dla dowolnego $B \subset Y$ określamy zbiór:
$f^{-1}[B] = \{x \in X : f(x) \in B\}$,
zwany *przeciwobrazem zbioru B danym przez funkcję f*.

Zadanie 2. Dana jest funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ i zbiór $A \subset \mathbb{R}$. Wyznaczyć obraz zbioru A w przekształceniu f.

a) $f(x) = 5x - 3, \qquad A = \{2,3,4\}$

b) $f(x) = 2x + 1 \qquad A = (-2,1)$

c) $f(x) = |x| \qquad A = < -3,0)$

d) $f(x) = \begin{cases} x - 2 \text{ dla } x < 1 \\ x + 4 \text{ dla } x \geq 1 \end{cases} \qquad A = < 0,5 >$

Zadanie 3. Dana jest funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ i zbiór $B \subset \mathbb{R}$. Wyznaczyć przeciwobraz zbioru B w przekształceniu f.

a) $f(x) = 2x - 1 \qquad B = \{1,3,5\}$

b) $f(x) = 2 - 3x \qquad B = < 5, \infty)$

c) $f(x) = 5 \qquad B = < 4,7)$

d) $f(x) = 5 \qquad B = < 1,5)$

e) $f(x) = \begin{cases} x - 2 \text{ dla } x < 1 \\ x + 4 \text{ dla } x \geq 1 \end{cases} \qquad B = < 0,6 >$

Zadanie 4. Wyprowadzić prawa dla obrazów i przeciwobrazów funkcji. Zakładamy, że $f : X \mapsto Y$.

a) $f[A_1 \cup A_2] = f[A_1] \cup f[A_2]$ dla $A_1, A_2 \subset X$

b) $f[\bigcup_{i \in I} A_i] = \bigcup_{i \in I} f[A_i]$ dla $A_i \subset X$ przy $i \in I$

c) $f^{-1}[B_1 \cap B_2] = f^{-1}[B_1] \cap f^{-1}[B_2]$, jeżeli $B_1, B_2 \subset Y$

d) $f^{-1}[B_1 \cup B_2] = f^{-1}[B_1] \cup f^{-1}[B_2]$, jeżeli $B_1, B_2 \subset Y$

e) $f^{-1}[\bigcap_{i \in I} B_i] = \bigcap_{i \in I} f^{-1}[B_i]$ przy $B_i \subset Y$ przy $i \in I, I \neq \emptyset$