Analiza matematyczna dla informatyków.

Mieczysław Cichoń, ver. 2.2/2021

Mieczysław Cichoń - WMI UAM

Funkcje.

Fakt, że badanie funkcji jest niezbędne informatykom nie podlega chyba (??) dyskusji.

Proste **zastosowania**:

- twierdzenie o złożeniu funkcji obliczalnych (teoria obliczalności),
- funkcje tworzące i ich własności przy badaniach rekurencji,
- interpolacja trygonometryczna (funkcje okresowe),
- problemy złożoności obliczeniowej (np. funkcje logarytmiczne i wielomianowe),
- w metodach numerycznych własność Darboux przy badaniu istnienia rozwiązań równań nieliniowych (powiemy przy okazji metody bisekcji),
- grafika komputerowa, wizualizacja, analiza obrazów (funkcje trygonometryczne, pochodne) itd.

Jedną z klas funkcji są **ciągi** - czyli funkcje określone na zbiorze $\mathbb{N}$. Do funkcji, ich klas i własności wrócimy...

Strony do lektury na wykłady 2, 3, 4...

Motywacje. Ciągi liczbowe: granice właściwe i niewłaściwe. Zbieżność i bezwzględna zbieżność. Ciągi monotoniczne. Podciągi, punkty skupienia i tw. Bolzano-Weierstrassa. Warunek Cauchy'ego i zupełność. Pozostałe informacje o zbieżności ciągów. Liczba e. Ciągi zadane rekurencyjnie w informatyce.

Czytamy najpierw:

[K] : motywacje - strony 17-22

i dalej

[K] : strony 135-149

[W] : strony 17-25
(lub alternatywnie: z tego wykładu strony 24-35).

Aby policzyć granicę ciągu $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ w programie Mathematica należy użyć instrukcji

```
Limit[a[n], n -> Infinity, Assumptions -> Element[n, Integers]]
```

Na przykład pisząc

```
Limit[Sqrt[(1 + n)/(1 + 3 n)], n -> Infinity, Assumptions -> Element[n, Integers]]
```

otrzymujemy $\frac{1}{\sqrt{3}}$. Często ten sam wynik otrzymamy używając krótszej instrukcji

```
Limit[a[n], n -> Infinity]
```

która służy do liczenia granicy funkcji. Granica funkcji jest szerszym pojęciem, ale w przypadku argumentu zmierzającego do nieskończoności często daje ten sam wynik. Jednak nie jest to dokładnie to samo, bo na przykład w przypadku ciągu

$$\lim_{n\to\infty} \cos 2\pi n = 1,$$

gdyż jest to ciąg stale równy jeden, ale granica funkcji

$$\lim_{x\to\infty} \cos 2\pi x$$

nie istnieje. Mathematica dla instrukcji

```
Limit[Cos[2 Pi n], n -> Infinity, Assumptions -> Element[n, Integers]]
```

zwraca liczbę 1, natomiast instrukcja

```
Limit[Cos[2 Pi n], n -> Infinity]
```

zwraca

```
Interval[{-1, 1}]
```

co oznacza, że granica nie istnieje, a zbiór punktów granicznych, czyli granic wszystkich możliwych podciągów, to przedział $[-1, 1]$. Pojęciem zbioru punktów granicznych zajmiemy się w rozdziale 10.

Objaśnienia do slajdu - na wykładzie...

Strony do lektury na wykłady 2,3,4... - cd.

wreszcie uważnie:

[W] : strony 26-27

oraz

[W] : strony 27-31

Uwagi.

Do powtórzenia na ćwiczeniach: funkcje i ich własności, elementy logiki - dowody nie wprost.

Na kolejnych slajdach - pewne (niepełne streszczenie: nie zastąpi podanych materiałów!!

Niech X będzie dowolnym zbiorem oraz niech $\mathbb{N}$ będzie zbiorem liczb naturalnych. Będziemy rozważali odwzorowania określone wzorem

$$\mathbb{N} \ni n \longrightarrow a_n \in X \ ,$$

które nazywamy **ciągami**. Liczbę n nazywamy wskaźnikiem lub indeksem, natomiast element a_n zbioru X nazywamy wyrazem ogólnym ciągu. Ciągi będziemy oznaczali symbolem $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ lub $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ lub krótko (a_n).

Na wykładzie omówimy **dlaczego** ciągi są niezbędne w informatyce, ale też **dlaczego** to informatyk musi się o nich czegoś nauczyć - gdyż komputer operuje na zbiorach skończonych...

W informatyce...

To absolutnie podstawowe pojęcie, służy **m.in.** - o czym wiemy - do przybliżania wartości rzeczywistych (patrz [K] strony 17-22).

Na każdym kolejnym wykładzie problemy bądą (na ogół) formułowane za pomocą ciągów.

Uwaga: często będą to definicje rekurencyjne...

Informatyk musi jednak tak planować wykorzystanie algorytmów bazujących na ciągach, aby - mimo ograniczeń arytmetyki komputerowej - uzyskać poprawne wyniki... Szczegóły - wkrótce. Ale to oznacza, że musi też (czasami) umieć obliczyć wynik analitycznie...

Liczba π.

1.2.5 Liczba π

Wśród ważnych problemów rozważanych już w starożytności było wyznaczanie obwodu i pola koła o zadanym promieniu. Kluczowy w tych obliczeniach jest obwód koła o średnicy jeden, zwyczajowo oznaczany grecką literą π. Koło o innej średnicy ma proporcjonalnie większy bądź mniejszy obwód, w szególności koło o promieniu r, a więc średnicy $2r$ ma obwód $2\pi r$.

Liczba π, podobnie jak $\sqrt{2}$, jest liczbą niewymierną, ale o tym starożytni nie wiedzieli. Udowodniono to dopiero w XVIII w. Co więcej, w wieku XIX udowodniono, że π jest liczbą transcendentną, to znaczy, że nie jest pierwiastkiem żadnego wielomianu o współczynnikach wymiernych. Oznacza to w szczególności, że nawet jeśli zbiór ułamków rozszerzymy o wszystkie możliwe pierwiastki, to nadal nie wystarczy on do mierzenia wszelkich długości.

W starożytności przyjmowano różne liczby pomiędzy 3 i 3.16 jako przybliżenie liczby π bez przywiązywania szczególnej wagi do popełnianego błędu. Dopiero grecki matematyk Archimedes (rys. 1.6) zaproponował algorytmiczną metodę wyznaczania π, która przez ponad 1000 lat dostarczała coraz lepszych przybliżeń. Jest to metoda geometryczna, oparta o wpisywanie w okrąg i opisywanie na okręgu wielokątów (rys.1.7). Posługując się 96-kątem Archimedes oszacował, że $223/71 < \pi < 22/7$ ($3.1408 < \pi < 3.1429$), co daje dobre przybliżenie π do dwóch miejsc po przecinku. Co ciekawe, w 1596 roku, ciągle w oparciu o metodę metodę Archimedesa, holenderski matematyk Ludolph van Ceulen policzył π z dokładnością do 35 cyfr.

Oznaczmy przez a_n bok 2^n-kąta foremnego wpisanego w okrąg o średnicy jeden. W oparciu o twierdzenie Pitagorasa można pokazać, że

$$a_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}, \qquad a_{n+1} = \frac{1}{2}\sqrt{2 - \sqrt{4 - 4a_n^2}}. \tag{1.2}$$

Zatem obwód tego 2^n-kąta wynosi $A_n := 2^n a_n$.

Można się spodziewać, że ciąg A_n powinien zmierzać do liczby π, bo tyle wynosi obwód koła o średnicy jeden. W rozdziale 8.8.1 przyjrzymy się bliżej zachowaniu ciągu (1.2).

Zwracam uwagę na rekurencję!

Ciąg (a_n) nazywamy **ograniczonym**, gdy

$$\underset{M>0}{\exists} \quad \underset{n\in\mathbb{N}}{\forall} \; | \, a_n \, | \leq M \; .$$

W przypadku gdy $\exists_{M_1} \;\; \forall_{n\in\mathbb{N}} \;\; a_n \leq M_1$ ciąg (a_n) nazywamy ograniczonym z góry, natomiast w przypadku gdy $\exists_{M_2} \;\; \forall_{n\in\mathbb{N}}$ $M_2 \leq a_n$ ciąg (a_n) nazywamy ograniczonym z dołu. Ciąg (a_n) nazywamy **monotonicznym** jeżeli spełnia jeden z następujących warunków:

$$\underset{n\in\mathbb{N}}{\forall} \quad a_n < a_{n+1} \; , \qquad \text{jest to ciąg rosnący} \; ,$$

$$\underset{n\in\mathbb{N}}{\forall} \quad a_n > a_{n+1} \; , \qquad \text{jest to ciąg malejący} \; ,$$

$$\underset{n\in\mathbb{N}}{\forall} \quad a_n \leq a_{n+1} \; , \qquad \text{jest to ciąg niemalejący} \; ,$$

$$\underset{n\in\mathbb{N}}{\forall} \quad a_n \geq a_{n+1} \; , \qquad \text{jest to ciąg nierosnący} \; .$$

O ciągach spełniających warunki (a) lub (b) mówimy, że są ściśle monotoniczne. Warto zauważyć, że zakresy pojęć ciągów monotonicznych oraz ograniczonych przecinają się, tzn. istnieją ciągi które są ograniczone, ciągi które są monotoniczne oraz takie ciągi, które są równocześnie ograniczone i monotoniczne.

Ciągi zbieżne.

Mówimy, że ciąg (a_n) ma granicę równą g, albo że dąży do granicy g, jeżeli w każdym otoczeniu liczby g leżą prawie wszystkie wyrazy ciągu. Będziemy to zapisywali jednym z dwóch możliwych sposobów, pisząc

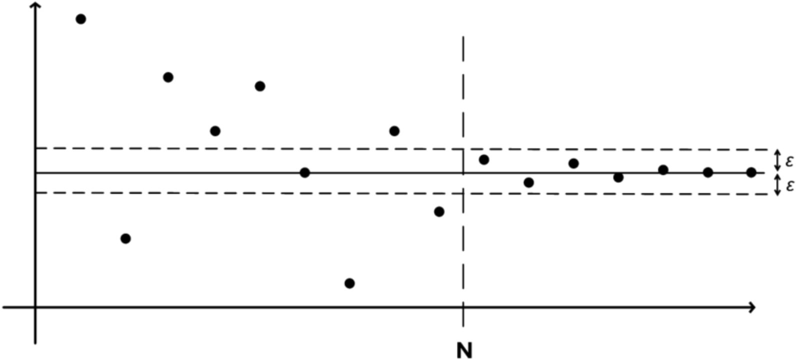
$$\lim_{n\to\infty} a_n = g \qquad \text{lub} \qquad a_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} g \ .$$

Przypomnijmy, że otoczenie liczby g to przedział otwarty o długości 2ε i środku w punkcie g, tzn. $(g-\varepsilon, g+\varepsilon)$. To, że prawie wszystkie wyrazy ciągu spełniają pewien warunek oznacza, że tylko skończona ilość wyrazów ciągu nie spełnia tego warunku.

Podaną powyżej definicję granicy ciągu (a_n) można wypowiedzieć w postaci równoważnej

$$\underset{\varepsilon>0}{\forall} \ \underset{N=N(\varepsilon)}{\exists} \ \underset{n>N}{\forall} \ | \, a_n - g \, | < \varepsilon \ .$$

Ilustracja graficzna granicy ciągu.



Uwaga: proszę porównać z "granicą pozorną", z którą możemy mieć do czynienia podczas obliczeń komputerowych strony139-141

A co jeśli nie mamy potencjalnej granicy?

Twierdzenie 2.37 (warunek Cauchy'ego). *Ciąg* $(a_n) \subset \mathbb{R}$ *jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy spełnia następujący warunek Cauchy'ego:*

(C) Dla każdej liczby $\varepsilon > 0$ *istnieje* $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ *takie, że dla wszystkich* $m, k > n_\varepsilon$ *zachodzi nierówność* $|a_m - a_k| < \varepsilon$.

Dowód. *Część I.* ($\Rightarrow$) Niech $\varepsilon > 0$. Jeśli $g = \lim_{n\to\infty} a_n$, to istnieje $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ takie, że $|a_n - g| < \varepsilon/2$ dla wszystkich $n > n_\varepsilon$. Weźmy teraz dwie liczby $m, k > n_\varepsilon$. Wówczas

$$|a_m - a_k| = \big|(a_m - g) + (g - a_k)\big| \le |a_m - g| + |a_k - g| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\,.$$

Zatem ciąg (a_n) spełnia warunek (C) – właśnie pokazaliśmy, jak dobrać n_ε do liczby $\varepsilon > 0$.

Część II. ($\Leftarrow$) Łatwo sprawdzić, że każdy ciąg spełniający (C) jest ograniczony: stosujemy warunek Cauchy'ego dla $\varepsilon = 1$ i widzimy, że dostatecznie duże wyrazy różnią się o mniej niż 1, a więc muszą zawierać się w pewnym przedziale, np. przedziale $(a_{n_1+1} - 1, a_{n_1+1} + 1)$; skończony zbiór wyrazów $a_1, \ldots, a_{n_1}$ też jest ograniczony.

Stosujemy zatem twierdzenie Bolzano–Weierstrassa i wybieramy z (a_n) podciąg $a_{n_k} \to g \in \mathbb{R}$ dla $k \to \infty$. Pokażemy, że g jest granicą *całego* ciągu (a_n). Niech $\varepsilon > 0$. Istnieje takie $l_1 \in \mathbb{N}$, że

$$|a_{n_k} - g| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{dla } n_k > l_1,$$

a ponadto istnieje takie $l_2 \in \mathbb{N}$,że $|a_m - a_k| < \varepsilon/2$ dla $m, k > l_2$. Niech $l_3 = \max(l_1, l_2)$. Ustalając *jakikolwiek* numer $n_k > l_3 \ge l_1$ i biorąc dowolne $m > l_3 \ge l_2$, możemy oszacować

$$|a_m - g| = |a_m - a_{n_k} + a_{n_k} - g| \le |a_m - a_{n_k}| + |a_{n_k} - g| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\,.$$

To kończy dowód twierdzenia. $\square$

Warunek stopu.

Dla informatyków bardzo ważne jest Stwierdzenie 2.38, które czytamy na stronie:

[W] : strona 32

i na kolejnym slajdzie...

Dlaczego jest istotne? Proszę zauważyć, że pozwala ono sprawdzić zbieżność ciągu (x_n) za pomocą badania różnic pomiędzy **kolejnymi** wyrazami! To jest warunek do funkcji "stopu" algorytmów rekurencyjnych!

Stwierdzenie 2.38 (kryterium spełniania warunku Cauchy'ego). *Załóżmy, że* $a_1, a_2, \ldots$ *są dodatnie, a ponadto istnieje taka stała* $C \in \mathbb{R}$, *że*

$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n \leq C \quad \textit{dla wszystkich } n \in \mathbb{N}.$$

Jeśli ciąg $(x_n) \subset \mathbb{R}$ *spełnia warunek*

$$|x_{n+1} - x_n| \leq a_n \qquad \textit{dla dostatecznie dużych } n \in \mathbb{N},$$

to (x_n) *spełnia warunek Cauchy'ego.*

Dowód. Ciąg $s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ jest rosnący (bo a_j są dodatnie) i ograniczony z góry przez C. Zatem (s_n) jest zbieżny i spełnia warunek Cauchy'ego.

Niech $m > k$ będą dostatecznie duże. Piszemy, korzystając z nierówności trójkąta, założeń i monotoniczności ciągu s_n,

$$\begin{aligned} |x_m - x_k| &\leq |x_m - x_{m-1}| + |x_{m-1} - x_{m-2}| + \cdots + |x_{k+1} - x_k| \\ &\leq a_{m-1} + a_{m-2} + \cdots + a_k \\ &= s_{m-1} - s_{k-1} = |s_{m-1} - s_{k-1}| \, . \end{aligned}$$

Niech $\varepsilon > 0$. Dla wszystkich dostatecznie dużych m, k mamy $|x_m - x_k| \leq |s_{m-1} - s_{k-1}| < \varepsilon$, gdyż (s_n) spełnia warunek Cauchy'ego. Zatem (x_n) też spełnia warunek Cauchy'ego. □

Jak widać - nie wystarczy badać (np. w pętli "while ... do...") różnicy pomiędzy kolejno obliczonymi wyrazami ciągu!

Granice a komputer...

Pomimo, że ciągi i ich granice to znakomite narzędzie podczas obliczeń za pomocą komputera, to jednak **nie można** symulować ich zbieżności w programach za pomocą obliczeń pierwszych N (choćby nawet 10^{100}) wyrazów - to nic nie daje.

Proszę przeczytać: [K] strony 139-141 (granice pozorne).

Granica pozorna I.

8.8.2 Granice pozorne

W poprzednim podrozdziale zaobserwowaliśmy, że wyciąganie wniosków na temat granicy ciągu z samego numerycznego eksperymentu może być niebezpieczne. Okazuje się, że ciąg może robić wrażenie zbieżnego, a mimo wszystko zbieżnym nie być. Rozważmy ciąg dany wzorem rekurencyjnym

$$x_0 = 136.462554878752 \tag{8.11}$$
$$x_1 = 5.39650717129623 \tag{8.12}$$
$$x_n = 0.3x_0 + 1 - 1.4x_1^2 \tag{8.13}$$

Program w języku Mathematica wyznaczający wyrazy tego ciągu przedstawiony jest na listingu 8.6. Wersja w C++ jest na listingu 8.7.

Przejrzenie pierwszych 15-tu wyrazów tego ciągu może robić wrażenie, że ciąg ten jest zbieżny do granicy wynoszącej około 0.63135. Przejrzenie 50-ciu wyrazów zaciera to pierwsze wrażenie. Jednakże, po doświadczeniach z ciagiem przybliżającym π możemy być skłonni podejrzewać, że przyczyną niestabilnego zachowania dalszych wyrazów tego ciągu znów jest skończona arytmetyka komputera. Okazuje się jednak, że obserwowana numerycznie zbieżność tego ciągu jest pozorna. Wykres pierwszych 100 wyrazów tego ciągu przedstawiono na rys. 8.8. Przykłady tego typu zaobserwowane zostały przez matematyków po raz pierwszy dopiero w XX wieku. Rozważany przez nas przykład wywodzi się z tzw. odwzorowania Hénona.

Uwaga: na powyższym listingu powinno być:

$$x_n = 0,3 \cdot x_{n-2} + 1 - 1,4 \cdot x_{n-1}^2$$

dla $n \geq 2$.

Granica pozorna II.

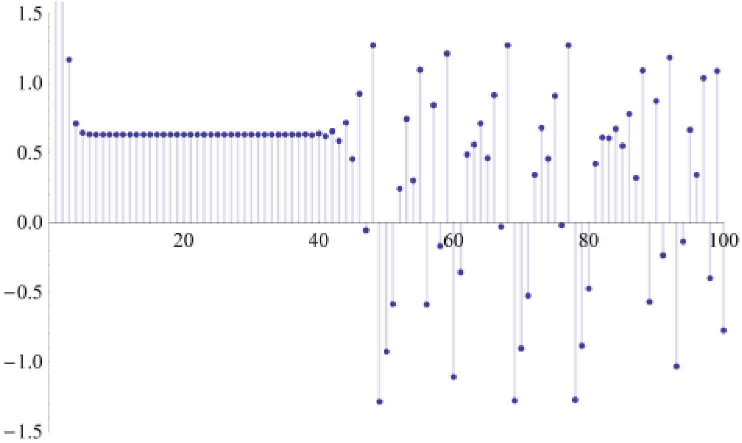
```
/**************************** Henon.cpp ************************/
/* Przykład z zadanym rekurencyjnie ciągiem, pozornie zbieżnym. */
/***************************************************************/
#include <iostream>
#include <iomanip>
using namespace std;

int main(){
  cout << setprecision(15);
  /* Dla większej czytelności wyników narzucamy stałopozycyjny,
     wyrównywany w prawo zapis liczb */
  cout << fixed << right;

  /* Pomocnicze parametry a i b */
  double a=1.4,b=0.3;
  /* Dwa początkowe wyrazy ciągu */
  double x0=136.462554878752;
  double x1=5.39650717129623;
  /* Ilość wyrazów ciągu do policzenia */
  int nmax=15;
  /* Inna forma pętli. Instrukcje w bloku {...} wykonujemy dla wartości n
     od jeden do nmax zwiększając n za każdym razem o jeden */
  for(int n=1;n<=nmax;n=n+1){
    /* Kolejny wyraz ciągu wyliczamy w oparciu o dwa poprzednie  */
    double x2=b*x0+1-a*x1*x1;
    /* Wyprowadzamy wyniki na standardowe wyjście. setw(p) ustala ilość pól
       dla wyprowadzanej kolejnej zmiennej. Pozwala to na lepsze
       formatowanie wypisywanych danych */
    cout << "x[" << setw(2) << n << "]= ";
    cout << setw(20) << x0 << endl;
    /* Nowe wartości dwóch porzednich wyrazów ciągu */
    x0=x1;
    x1=x2;
  }
}
```

Listing 8.7: Przykład ciągu pozornie zbieżnego w C++.

Granica pozorna III.



Ilustracja granicy ciągu.

Prezentacja CDF: granica ciągu...

albo

wybrany skrypt ilustracyjny granic ciągów w "Mathematica" - potrzebny darmowy *CDF Player* lub *Mathematica*

Podstawowe własności ciągów zbieżnych.

Ciąg posiadający granicę nazywamy **zbieżnym** do tej granicy, ciąg który nie posiada granicy nazywamy **rozbieżnym**.

Twierdzenie. *Ciąg (a_n) ma granicę g wtedy i tylko wtedy, gdy ciąg $(a_n - g)$ ma granicę równą zeru.*

Twierdzenie. *Granica ciągu określona jest w sposób jednoznaczny.*

Twierdzenie. *Ciąg zbieżny jest ograniczony.*

Kilka przykładów granic ciągów w skrypcie CDF.

Uwaga: proszę przeczytać uwagi o warunku Cauchy'ego ([W] str 31 - patrz niżej), a zwłaszcza uwagi na dole strony! One odnoszą się idealnie do obliczeń komputerowych (komputer "nie wie" co ma być granicą ciągu, ale może sprawdzić jego zbieżność - można to jednak usprawnić...).

Warunek Cauchy'ego odgrywa ważną rolę z kilku powodów. Po pierwsze, pozwala stwierdzić zbieżność ciągu bez wskazywania konkretnej granicy, a także pozwala stwierdzić, że jakiś ciąg jest rozbieżny. Proszę zauważyć, że wcześniej, sprawdzając rozbieżność ciągu $a_n = (-1)^n$, sprawdziliśmy tak naprawdę, że warunek Cauchy'ego nie zachodzi dla $\varepsilon = 1$. Po drugie, można posłużyć się warunkiem Cauchy'ego, żeby *skonstruować* liczby rzeczywiste, mając do dyspozycji liczby wymierne; jest to konstrukcja na tyle ogólna, że używa się jej w wielu działach matematyki – do tej sprawy wrócimy jeszcze przy innej okazji.

Na ćwiczeniach.

Granice pewnych "klasycznych" ciągów będą obliczane na ćwiczeniach.

Po co? po pierwsze, aby można korzystać od razu ze znajomości tych granic do wyznaczania innych (później np. własności arytmetyczne granic czy twierdzenie o 3 ciągach). Obliczanie wszystkich granic z definicji to zdecydowanie zły pomysł, a i wykorzystanie komputera jest łatwiejsze w oparciu o własności ciągów zbieżnych, niż o definicję...

patrz: [K] str. 145 czy [W] str. 18-19

Te granice powinniśmy znać...

8.9.1 Granice kilku ważnych ciągów

Twierdzenie 8.9.1

$$p \in \mathbb{R}^+ \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{p} = 1 \tag{8.14}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1 \tag{8.15}$$

$$\alpha \in \mathbb{Q}, a > 1 \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \frac{n^\alpha}{a^n} = 0 \tag{8.16}$$

$$p \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} p^n = \begin{cases} 1 & p = 1 \\ 0 & p \in (-1,1) \\ \textit{nie istn. w } \mathbb{R} & p \leqslant -1 \textit{ lub } p > 1. \end{cases} \tag{8.17}$$

Podciągi.

Niech (a_n) będzie dowolnym ciągiem oraz niech $n_1, n_2, n_3, \ldots$ będzie pewnym ciągiem rosnącym liczb naturalnych.

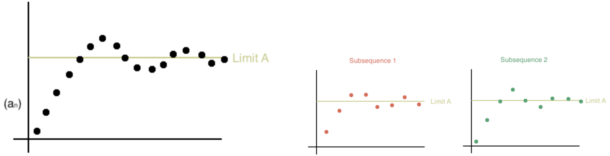
Wówczas ciąg (a_{n_k}), tzn. ciąg o wyrazach

$$a_{n_1}, a_{n_2}, \ldots, a_{n_k}, \ldots$$

nazywamy podciągiem lub ciągiem częściowym ciągu (a_n).

Twierdzenie. *Każdy podciąg ciągu zbieżnego jest zbieżny do tej samej granicy.*

To istotne - jeżeli wiemy, że ciąg jest zbieżny, to możemy (na komputerze) zbadać jego podciągi...



Własności arytmetyczne granic.

Twierdzenie. *Jeżeli g_1 oraz g_2 są odpowiednio granicami ciągów (a_n) i (b_n) oraz jeśli $*$ oznacza jedno z działań algebraicznych (tzn. $+, -, \cdot$), to istnieje granica ciągu $(a_n * b_n)$ i prawdziwy jest wzór*

$$\lim_{n\to\infty}(a_n * b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n * \lim_{n\to\infty} b_n \ .$$

Twierdzenie. *Jeżeli* $\lim_{n\to\infty} a_n = g$, *to* $\lim_{n\to\infty}(\lambda a_n) = \lambda g$, *gdzie λ oznacza dowolną liczbę rzeczywistą.*

Twierdzenie. *Jeżeli $b_n \neq 0$ dla $n \in \mathbb{N}$ oraz* $\lim_{n\to\infty} b_n = g \neq 0$, *to* $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{g}$.

Skrypt CDF ilustracyjny granica sumy ciągów.

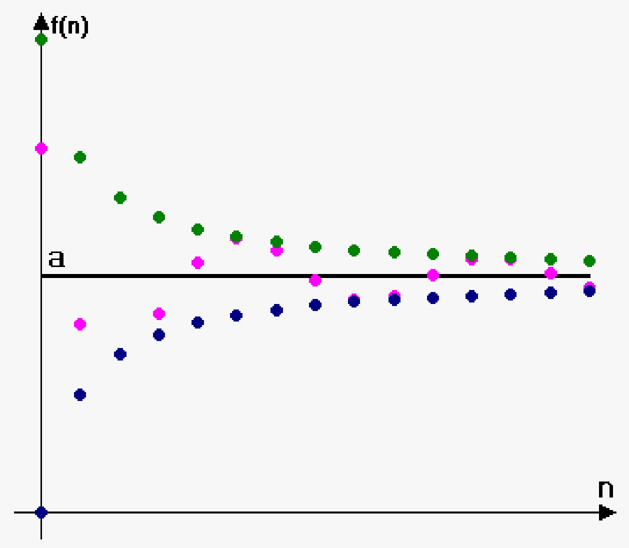
Twierdzenie o 3 ciągach.

Twierdzenie. *Jeżeli ciągi* (b_n) *oraz* (c_n) *są zbieżne do tej samej granicy* g *i jeśli* (a_n) *jest ciągiem , którego prawie wszystkie wyrazy spełniają nierówność podwójną*

$$b_n \leq a_n \leq c_n \ ,$$

to także ciąg (a_n) *jest zbieżny, a jego granica jest równa* g.

Ilustracja graficzna twierdzenia o 3 ciągach.



Przykład 2.15. Niech $x \in (0,1)$. Obliczymy granicę ciągu $c_n = \sqrt[n]{x}$. Załóżmy najpierw, że $x \geq 1$. Wtedy dla wszystkich $n > n_1 = [x] + 1 > x$ zachodzą nierówności

$$1 \leq c_n = \sqrt[n]{x} < \sqrt[n]{n}\,.$$

Wiemy już jednak, że $b_n = \sqrt[n]{n} \to 1$ dla $n \to \infty$, a ciąg stały $a_n \equiv 1$ też ma granicę 1. Zatem, z twierdzenia o trzech ciągach wynika, że

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x} = 1\,. \tag{2.8}$$

Jeśli $x \in (0,1)$, to $\sqrt[n]{x} = 1/\sqrt[n]{y}$ dla $y = 1/x > 1$, a więc wzór (2.8) także zachodzi. $\square$

Przykład 2.17. Wykażemy, że

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{3^n + 4^n} = 4. \tag{2.9}$$

Wskażemy w tym celu odpowiednie oszacowania $\sqrt[n]{3^n + 4^n}$ z góry i z dołu. Ponieważ $0 < 3^n < 4^n$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$, więc

$$4 = \sqrt[n]{4^n} < \sqrt[n]{3^n + 4^n} < \sqrt[n]{2 \cdot 4^n} = 4\sqrt[n]{2}\,.$$

Jednak $4\sqrt[n]{2} \to 1$, gdy $n \to \infty$; to wynika z udowodnionego wcześniej wzoru (2.8). Oszacowaliśmy więc $\sqrt[n]{3^n + 4^n}$ z góry i z dołu przez wyrazy ciągów zbieżnych do liczby 4; można zastosować twierdzenie o trzech ciągach i stwierdzić, że wzór (2.9) rzeczywiście zachodzi. □

W istocie, prawdziwy jest wzór nieco ogólniejszy od (2.9).

Przykład 2.18. Jeśli k jest liczbą naturalną i $0 \le x_1 \le x_2 \le \ldots \le x_k$, to

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_1^n + x_2^n + \cdots + x_k^n} = x_k\,. \tag{2.10}$$

Istotnie, możemy wypisać oczywiste nierówności

$$x_k = \sqrt[n]{x_k^n} \le \sqrt[n]{x_1^n + x_2^n + \cdots + x_k^n} \le \sqrt[n]{k \cdot x_k^n} = x_k\sqrt[n]{k}\,.$$

Wiemy już jednak, że $\sqrt[n]{k} \to 1$, zatem, podobnie jak w poprzednim przykładzie, wzór (2.10) wynika z twierdzenia o trzech ciągach. □

Twierdzenie - na ćwiczenia.

(reguła Stolza) *Jeżeli ciąg* (b_n) *jest rosnący i nieograniczony z góry dla prawie wszystkich wskaźników* n*, a ciąg* (c_n) *gdzie* $c_n = \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n}$ *jest zbieżny, to ciąg* $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ *jest także zbieżny i zachodzi wzór*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} \ ,$$

(ciąg (a_n) *jest zupełnie dowolny).*

Twierdzenie o średnich - na ćwiczenia.

Twierdzenie. *Jeżeli ciąg* (a_n) *jest zbieżny, to zbieżny jest ciąg średnich arytmetycznych* $\left(\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}\right)$*, a ponadto gdy wyrazy ciągu* (a_n) *są dodatnie to zbieżne są ciągi* $(\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n})$, $(\sqrt[n]{a_n})$, $\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)$ *oraz zachodzą wzory*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n} \ ,$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \ .$$

Pojęcie granicy niewłaściwej lub nieskończonej ciągu stanowi rozszerzenie pojęcia granicy ciągu zbieżnego. Będziemy wśród ciągów rozbieżnych wyróżniali ciągi rozbieżne do ∞ oraz ciągi rozbieżne do $-\infty$, a symbole ∞ oraz $-\infty$ nazywamy **granicami niewłaściwymi.** Ciągi mogą też nie mieć żadnej z tych własności!

Ciąg (a_n) nazywamy ciągiem rozbieżnym do ∞, co zapisujemy $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ lub $a_n \underset{n\to\infty}{\to} \infty$, gdy każdy przedział postaci (r, ∞) zawiera prawie wszystkie wyrazy ciągu. Możemy to zapisać

$$\underset{r\in\mathbb{R}}{\forall} \quad \underset{N}{\exists} \quad \underset{n>N}{\forall} \quad r < a_n \ .$$

Ciąg (a_n) nazywamy ciągiem rozbieżnym do $-\infty$, co zapisujemy $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$ lub $a_n \underset{n\to\infty}{\to} -\infty$, gdy każdy przedział postaci $(-\infty, s)$ zawiera prawie wszystkie wyrazy ciągu. Możemy to zapisać

$$\underset{s\in\mathbb{R}}{\forall} \quad \underset{N}{\exists} \quad \underset{n>N}{\forall} \quad a_n < s \ .$$

(1) *Każdy podciąg ciągu rozbieżnego do* ∞ *(lub do* $-\infty$*) jest także rozbieżny do* ∞ *(lub do* $-\infty$*).*

(2) *Niech dany będzie ciąg* (a_n) *taki, że* $a_n > 0$ *dla każdego wskaźnika* n*. Mamy wówczas* $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ *wtedy i tylko wtedy, gdy* $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = 0$*.*

(3) *Niech dany będzie ciąg* (a_n) *taki, że* $a_n < 0$ *dla każdego wskaźnika* n*. Mamy wówczas* $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$ *wtedy i tylko wtedy, gdy* $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = 0$*.*

(4) *Załóżmy, że dany jest ciąg* (a_n) *taki, że wszystkie jego wyrazy są różne od zera. Mamy warunek* $\lim_{n\to\infty} | a_n |= \infty$ *wtedy i tylko wtedy, gdy* $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = 0$*.*

(5) *Jeżeli prawie wszystkie wyrazy ciągów* (a_n) *oraz* (b_n) *spełniają nierówności* $a_n \leq b_n$*, to jeśli* $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$*, to wówczas* $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$*, jeśli* $\lim_{n\to\infty} b_n = -\infty$*, to wówczas* $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

(6) *Jeżeli ciąg* (a_n) *jest ograniczony oraz ciąg* (b_n) *ma własność* $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$ *lub* $\lim_{n\to\infty} b_n = -\infty$, *to* $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$.

(7) *Jeżeli* $\lim_{n\to\infty} a_n = \pm\infty$ *oraz* $\lim_{n\to\infty} b_n = \pm\infty$, *to* $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \pm\infty$ *i ponadto* $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \infty$.

(8) *Jeżeli* $\lim_{n\to\infty} a_n = g$ *oraz* $\lim_{n\to\infty} b_n = \pm\infty$, *to* $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \pm\infty$.

(9) *Jeżeli* $\lim_{n\to\infty} a_n = g > 0$ *oraz* $\lim_{n\to\infty} b_n = \pm\infty$, *to* $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \pm\infty$. Jeśli przyjmiemy umowę, że dla zbioru A nieograniczonego z góry, piszemy $\sup A = \infty$, a dla zbioru A nieograniczonego z dołu, piszemy $\inf A = -\infty$, to dla granic niewłaściwych możemy sformułować twierdzenie.

(10) *Ciąg monotoniczny* (a_n) *ma zawsze granicę, przy czym dla ciągu niemalejącego zachodzi* $\lim_{n\to\infty} a_n = \sup_n a_n$, *dla ciągu nierosnącego zachodzi* $\lim_{n\to\infty} a_n = \inf_n a_n$.

Punkty skupienia ciągu.

Punktem skupienia ciągu (a_n) nazywamy taką liczbę σ, że w dowolnym jej otoczeniu znajduje się nieskończenie wiele wyrazów ciągu. Możemy to zapisać następująco

$$\underset{\varepsilon>0}{\forall} \quad \underset{N}{\forall} \quad \underset{n>N}{\exists} \quad | \, a_n - \sigma \, | < \varepsilon \ .$$

Jest oczywiste, że jeżeli ciąg posiada tylko jeden punkt skupienia, to jest to ciąg zbieżny.

Największy z punktów skupienia ciągu (a_n) nazywamy granicą górną ciągu lub mówimy, że jest to limes superior ciągu i zapisujemy to

$$\limsup_{n\to\infty} a_n \qquad \text{lub} \qquad \overline{\lim_{n\to\infty}} \, a_n \ .$$

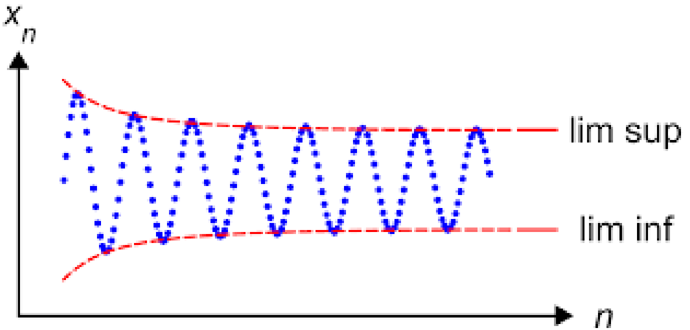
Najmniejszy z punktów skupienia ciągu (a_n) nazywamy granicą dolną ciągu lub mówimy, że jest to limes inferior ciągu i zapisujemy to

$$\liminf_{n\to\infty} a_n \qquad \text{lub} \qquad \underline{\lim}_{n\to\infty} \, a_n \ .$$

Te pojęcia są zwłaszcza przydatne, gdy ciąg nie jest zbieżny, Dla ciągu zbieżnego $(a_n))$ mamy

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \liminf_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_n.$$

W innym przypadku sytuację tłumaczy poniższy rysunek:



Twierdzenie. *Jeżeli σ jest punktem skupienia ciągu (a_n), to istnieje podciąg (a_{k_n}) ciągu (a_n) taki, że σ jest granicą tego podciągu.*

Twierdzenie. *Jeżeli pewien podciąg (a_{k_n}) danego ciągu (a_n) ma granicę równą σ, to liczba σ jest punktem skupienia ciągu (a_n).*

Jednym z bardzo ważnych i mających różne zastosowania twierdzeń analizy matematycznej jest następujące twierdzenie.

Twierdzenie. (Bolzano-Weierstrassa). *Każdy ciąg liczbowy ograniczony posiada przynajmniej jeden punkt skupienia.*

Ciągi monotoniczne i ograniczone.

Twierdzenie. *Ciąg monotoniczny i ograniczony jest zbieżny.*

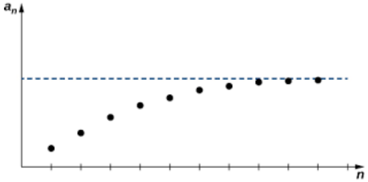
(a) Jeżeli ciąg (a_n) jest niemalejący i ograniczony z góry to jest zbieżny i wówczas

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sup_n a_n \ .$$

(b) Jeżeli ciąg (a_n) jest nierosnący i ograniczony z dołu to jest zbieżny i wówczas

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \inf_n a_n \ .$$

Te twierdzenie umożliwia (wraz z późniejszym tw. Bolzano-Weiertrassa) operowanie przez komputer na ciągach zamiast na dowolnych zbiorach...



Twierdzenie 8.9.2 *Ciąg $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ jest rosnący i ograniczony, a więc ma skończoną granicę.*

Dowód: Pokażemy najpierw, że ciąg ten jest rosnący. Podstawiając w nierówności Bernoullego (tw. 8.3.3) $-\frac{1}{n^2}$ za x i przekształcając uzyskaną nierówność otrzymujemy dla $n > 1$

$$\begin{aligned}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n &\geqslant 1-\frac{1}{n}\\ \left(1-\frac{1}{n}\right)^n\left(1+\frac{1}{n}\right)^n &\geqslant 1-\frac{1}{n}.\end{aligned}$$

Z kolei dzieląc obustronnie przez $1-\frac{1}{n}$, mnożąc przez $\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1}$ i przekształcając dostajemy

$$\begin{aligned}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n-1}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n &\geqslant 1\\ \left(1+\frac{1}{n}\right)^n &\geqslant \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1}\\ \left(1+\frac{1}{n}\right)^n &\geqslant \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}\end{aligned}$$

do dowodzi, że rozważany ciąg jest rosnący.

Aby pokazać, że jest on ograniczony, najpierw zauważmy, że podstawiając 1 za b oraz $\frac{1}{2}$ za a we wzorze (7.6) otrzymujemy

$$1-\frac{1}{2^n}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2^{n-1}}+\frac{1}{2^{n-2}}+\cdots+1\right). \tag{8.18}$$

Zatem podstawiając we wzorze (7.7) 1 za a oraz $\frac{1}{n}$ za b, przekształcając i na koniec wykorzystując (8.18) otrzymujemy

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n &= 1+\binom{n}{1}\frac{1}{n}+\binom{n}{2}\frac{1}{n^2}+\binom{n}{3}\frac{1}{n^3}+\cdots+\binom{n}{n}\frac{1}{n^n}\\ &= 1+\frac{n}{1}\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\frac{1}{n^2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\frac{1}{n^3}+\cdots+\frac{n(n-1)\cdots 1}{1\cdot 2\cdots n}\frac{1}{n^n}\\ &= 1+1+\frac{1(1-\frac{1}{n})}{1\cdot 2}+\frac{1(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})}{1\cdot 2\cdot 3}+\cdots+\frac{1(1-\frac{1}{n})\cdots(1-\frac{n-1}{n})}{1\cdot 2\cdots n}\\ &< 1+1+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{1\cdot 2\cdots n}\\ &< 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}\\ &= 1+2\left(1-\frac{1}{2^n}\right)<1+2=3.\end{aligned}$$

Zatem na mocy twierdzenia 8.8.7 ciąg $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ jest zbieżny. □

Choć Bernoulli pierwszy zauważył, że ciąg o wyrazach $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ jest zbieżny, jego granicę nazywamy liczbą Eulera i oznaczamy literą e, bo to Leonard Euler (rys. 8.9), inny szwajcarski matematyk, pokazał jak ważna jest ona w matematyce. On pierwszy oznaczał ją literą e i tak pozostało do dziś.

Liczba e w przybliżeniu wynosi

$$e = 2.718281828459045235336\ldots$$

Liczba e nazywana jest także liczbą Nepera i definiowana jest jako granica ciągu nieskończonego $\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)$. Mamy więc

$$e = \lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n \ .$$

Istnienie tej granicy wynika właśnie z faktu, że ten ciąg **JEST** monotoniczny i ograniczony (proszę sprawdzić na poprzednim slajdzie)!!

Informacje: np. [K] strony 146-150.

Skrypt ilustracyjny liczby e w "Mathematica" - potrzebny darmowy *CDF Player* lub *Mathematica*. Docenimy go w pełni dopiero po wprowadzeniu szeregów...

Można wykazać, że

(a) jeżeli $a_n \underset{n\to\infty}{\to} \infty$, to $\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n} \underset{n\to\infty}{\to} e$,

(b) jeżeli $b_n \underset{n\to\infty}{\to} -\infty$, to $\left(1+\frac{1}{b_n}\right)^{b_n} \underset{n\to\infty}{\to} e$,

(c) jeżeli $| c_n | \underset{n\to\infty}{\to} \infty$, to $\left(1+\frac{1}{c_n}\right)^{c_n} \underset{n\to\infty}{\to} e$.

I jeszcze taki skrypt z kilkoma ciągami o granicy e.

Liczbę e przyjmuje się jako podstawę tzw. logarytmów naturalnych oznaczanych symbolem ln. Korzystając z definicji logarytmów możemy podać wzory na zamianę znanych ze szkoły średniej logarytmów dziesiętnych $\log_{10} b = \lg b$ z logarytmami naturalnymi $\log_e b = \ln b$. Mamy następujące wzory:

$$\lg b = \frac{\ln b}{\ln 10}\ , \qquad \ln b = \frac{\lg b}{\lg e}\ .$$

```
/********************* CompoundInterest.cpp ******************/
/* Obliczanie przybliżeń liczby e według idei procentu       */
/* składanego (ang. compound interest)                       */
/*************************************************************/
#include <iostream>
#include <cmath>
#include <iomanip>
using namespace std;

int main(){

  cout << fixed << right;
  cout << setprecision(15);

  // Policzymy 1000 wyrazów ciągu
  int nmax=1000;
  for(int n=1;n<=nmax;n=n+1){
    // Czynnik, który trzeba przemnożyć n razy przez siebie
    // Piszemy 1.0/n, a nie 1/n, bo w arytmetyce
    // całkowitoliczbowej 1/n daje zero.
    double x=1+1.0/n;
    // W C++ brak wbudowanego potęgowania,
    // więc liczymy potęgę przy pomocy pętli
    double prod=1;
    for(int i=1;i<=n;i=i+1) prod=prod*x;
    cout << "   s[" << setw(3) << n << "] =" << setw(18) << prod;
    cout << endl;
  }
}
```

Listing 8.9: Eksperyment numeryczny z procentem składanym w C++

Rekurencja.

Klasyczną metodą definiowania ciągów jest rekurencja (zwłaszcza w informatyce!). Definiujemy kolejne wyrazy w oparciu o znajomość poprzednich...

To - niestety - prowadzi do poważnego problemu: jak zbadać zbieżność ciągu zadanego rekurencyjnie?

I tu jest widoczna przydatność naszych twierdzeń. **Podstawowe narzędzie to właśnie twierdzenie o ciągach monotonicznych i ograniczonych.**

Wniosek 2.23. *Załóżmy, że ciąg $(a_n) \subset \mathbb{R}$ jest nierosnący i ograniczony z dołu. Wówczas ciąg (a_n) jest zbieżny. Jego granicą jest liczba*

$$M = \inf\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

Przykład 2.24. Niech $a_1 = \sqrt{6}$ i $a_{n+1} = \sqrt{6 + a_n}$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$, tzn.

$$a_2 = \sqrt{6+\sqrt{6}}, \quad a_3 = \sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6}}}, \quad a_4 = \sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6}}}}, \quad \ldots$$

Sprawdzimy, że ciąg a_n jest rosnący i ograniczony. Niech $x > 0$. Zauważmy, że dla takich x nierówność $\sqrt{x+6} > x$ jest równoważna innej, $x^2 - x - 6 < 0$. Ponieważ $x^2 - x - 6 = (x+2)(x-3)$, więc ostatecznie

$$x > 0 \text{ i } \sqrt{x+6} > x \quad \Leftrightarrow \quad x \in (0,3). \tag{2.11}$$

Zauważmy też, że

$$x \in (0,3) \quad \Rightarrow \quad 0 < x + 6 < 9 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{x+6} \in (0,3). \tag{2.12}$$

Wyrazy ciągu a_n są oczywiście dodatnie. Ponieważ $a_1 = \sqrt{6} \in (2,3)$, więc z implikacji (2.12) wynika, na mocy zasady indukcji matematycznej, że $a_n \in (0,3)$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$; ciąg (a_n) jest więc ograniczony. Ponadto,

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n + 6} \overset{(2.11)}{>} a_n, \qquad \text{bowiem wiemy już, że } a_n \in (0,3).$$

Zatem ciąg a_n jest rosnący. Z Twierdzenia 2.22 wynika, że istnieje granica tego ciągu.

Nietrudno tę granicę znaleźć: ponieważ

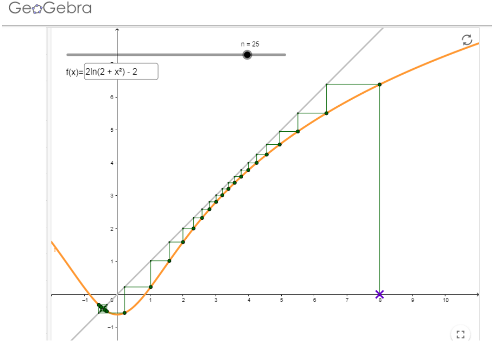
$$a_{n+1}^2 = 6 + a_n,$$

więc z Twierdzenia 2.10 wynika, że $a = \lim a_n$ spełnia równość $a^2 = 6 + a$, a przy tym $a \geq 0$, gdyż $a_n > 0$ dla wszystkich n. Przeto $a = 3$. $\square$

Uwaga. Ostatni fragmemt rozumowania wolno przeprowadzić dopiero wtedy, gdy wiadomo już, że liczba $a = \lim a_n$ *istnieje*. Wcześniej można stąd jedynie wywnioskować, że *jeśli $a = \lim a_n$ istnieje i $a \geq 0$, to wtedy $a = 3$.*

W tym - i kolejnych - zajęciach warto korzystać z możliwości programu "Geogebra". Ogólnie: warto go sobie zainstalować (legalny)... I kto potrafi - pisać własne skrypty...

Na początek ładna ilustracja powstawania ciągów rekurencyjnych.



Funkcje tworzące.

Podstawową metodą do badań wzorów rekurencyjnych są funkcje tworzące, czyli zadane szeregami potęgowymi w oparciu o współczynniki danego ciągu: (a_n)

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n.$$

Należałoby o tym *trochę* dokładniej, bo ta metoda ma wiele innych zastosowań... Ale - o tym jak już formalnie wprowadzimy **szeregi**!

Istotny jest tu fakt, że traktujemy je jako **szeregi formalne**, czyli nie interesuje nas na ogół aspekt dziedziny ich zbieżności! Niestety - ta metoda wykracza poza podstawowy wykład z analizy (a szkoda...). A tu dla zainteresowanych: wprowadzenie do równań rekurencyjnych w terminologii ciągów geometrycznych (a nie funkcji tworzących) jak kto woli... - autor: prof. J. Matkowski.

Materiały poszerzające.

I jeszcze rekomendowane materiały prof. Jaworskiego (skrypt również współautorstwa prof. Palki i prof. Szymańskiego). Warto skorzystać...

No i materiały dla informatyków o rekurencji: prof. Strzeleckiego - strony 300-308.

Niech $a_0 = 1,\ b_0 = x > 0$. Definiujemy

$$a_{n+1} = \frac{2a_n \cdot b_n}{a_n + b_n},$$

$$b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}.$$

Kluczowe jest znalezienie podstawy (matematycznej) **dlaczego** te wzory mogą posłużyć do oszacowania pierwiastka z liczby x (czyli: matematyka). Tu wystarczy twierdzenie o nierówności pomiędzy średnimi...

Sprawdzić, że $\sqrt{x} = \sup_{n\in\mathbb{N}} \{a_n\} = \inf_{n\in\mathbb{N}} \{b_n\}$. Obliczyć granice.

Zadanie.

Określmy ciąg wzorem rekurencyjnym:

$$a_1 = 1\ ,\ \ a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}.$$

Ciąg ten jest ograniczony z góry przez 2 (co można łatwo wykazać metodą indukcji zupełnej) oraz rosnący, gdyż

$$a_{n+1} - a_n = \sqrt{2 + a_n} - a_n = \frac{(\sqrt{2 + a_n} - a_n)(\sqrt{2 + a_n} + a_n)}{\sqrt{2 + a_n} + a_n} =$$

$$= \frac{2 + a_n - a_n^2}{\sqrt{2 + a_n} + a_n} = \frac{-(a_n + 1)(a_n - 2)}{\sqrt{2 + a_n} + a_n} \geq 0$$

(wykorzystaliśmy tu fakt, że $1 \leq a_n \leq 2$). Jako ciąg monotoniczny i ograniczony jest więc zbieżny. Jego granicę oznaczmy przez a.

Oczywiście (a właściwie dlaczego??) ciąg (a_{n+1}) jest również zbieżny do a, stąd:

$$a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$$

$$a = \sqrt{2 + a} \ .$$

Mamy więc kolejno: $a = \sqrt{2+a}$, $a^2 = 2 + a$, $a^2 - a - 2 = 0$, czyli $a_1 = 2$ oraz $a_2 = -1$, który odpada, gdyż $a_n \geq 0$. Ostatnie równanie ma dwa pierwiastki. Ostatecznie $\lim_{n\to\infty} a_n = 2$.

Podkreślmy tu jeszcze konieczność wykazania **istnienia** granicy ciągu, **zanim** zaczynamy ją obliczać! Czyli: najpierw coś dla człowieka, poźniej ewentualnie dla komputera...

A może rekurencja? [N. Wirth]

Obliczanie $\frac{1}{x}$ dla rzeczywistych liczb x (poprzez mnożenie i dodawanie).

Dane: $a_0 = 1$, $c_0 = 1 - x$ $(x \neq 0)$. Definiujemy:

$$a_n = a_{n-1} \cdot (1 + c_{n-1}) \qquad c_n = c_{n-1} \cdot c_{n-1}$$

Wtedy (dlaczego?)

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{x}$$

Ale **najpierw (!!)** wypadałoby sprawdzić, że te **ciągi** są **zbieżne** (tw.: Ciąg monotoniczny i ograniczony **jest** zbieżny.) !!

Dokładnie ta sama idea służy do obliczeń sum szeregów
(a więc i **wartości funkcji** np. $\sin x$, czy e^x) - o tym później.
I ponownie: najpierw zapewnić zbieżność szeregu, potem liczyć.
Problem dodatkowy: oszacowanie błędu !!?? [N.Wirth str. 52-53]

Należy zachować ostrożność we wnioskach symulacji na komputerze.

Prezentacja: ciąg rekurencyjny w prezentacji CDF - wymaga *CDF Player*.

Dane są ciągi:

$$a_{n+1} = (a_n)^2 \text{ o ile } (a_n)^2 < 2 \text{ oraz } a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n^2 \text{ o ile } (a_n)^2 \geq 2,$$

$$b_{n+1} = \frac{b_n}{2},$$

$$s_{n+1} = s_n \text{ o ile } (a_n)^2 < 2 \text{ oraz } s_{n+1} = s_n + b_{n+1} \text{ o ile } (a_n)^2 \geq 2.$$

Pytania: czy istnieje i jaka jest granica ciągu (s_n)?

Kiedy istnieje (dla jakich wartości początkowych: rozpocznij od $a_0 = x > 0$, $b_0 = 1$ i $s_0 = 0$)?

Jak zakończyć obliczenia (warunek stopu)?

Problem stopu.

Proszę być świadomym **ograniczeń obliczeń komputerowych**:

"Diagonal arguments are used to prove many fundamental results about the limitations of computation, such as the undecidability of the Halting Problem for programs and the inherent, unavoidable inefficiency (exponential time or worse) of procedures for other computational problems. So computer scientists do need to study diagonal arguments in order to understand the logical limits of computation. Ad a well-educated computer scientist will be comfortable dealing with countable sets, finite as well as infinite."

(Mathematics for Computer Science, Eric Lehman, F Thomson Leighton, Albert R Meyer)

Do tematu teorii obliczalności i złożoności algorytmów wrócimy - przy granicach funkcji. Na razie proszę pamiętać o moich uwagach przy obliczaniu granic ciągów!

Theorem 3.1 Suppose that $t_1(n)$ and $t_2(n)$ are time constructible, $s_1(n)$ and $s_2(n)$ are space constructible, $t_2(n) \geq t_1(n) \geq n$, and $s_2(n) \geq s_1(n) \geq n$.

i. If

$$\lim_{n\to\infty} \frac{t_1(n)\log(t_1(n))}{t_2(n)} = 0,$$

then $\mathbf{TIME}(t_1(n)) \subsetneq \mathbf{TIME}(t_2(n))$. (Hartmanis and Stearns 1965)

ii. If

$$\lim_{n\to\infty} \frac{t_1(n+1)}{t_2(n)} = 0,$$

then $\mathbf{NTIME}(t_1(n)) \subsetneq \mathbf{NTIME}(t_2(n))$. (Cook 1972)

iii. If

$$\lim_{n\to\infty} \frac{s_1(n)}{s_2(n)} = 0,$$

then $\mathbf{SPACE}(s_1(n)) \subsetneq \mathbf{SPACE}(s_2(n))$. (Stearns, Hartmanis, and Lewis 1965)

These results may all be demonstrated by modifications of the diagonal argument by which Turing (1937) originally demonstrated the undecidability of the classical Halting Problem.[13] Nonetheless,

Linki: Podstawy złożoności obliczeniowej oraz Stanford University

Rekurencja - c.d.

Zadania do przemyślenia (etapy rozumowania, różnice pomiędzy przykładami) - może na egzamin?

$$a_0 = \sqrt{3}\ ,\ \ a_{n+1} = \sqrt{3 + a_n}.$$

$$b_0 = \sqrt{3}\ ,\ \ b_{n+1} = (3 + b_n)^2,$$

$$f_0 = 1\ ,\ \ f_1 = 1\ ,\ \ f_{n+2} = f_{n+1} + f_n.$$

(liczby Fibonacci'ego)

$$y_0 = c = const.\ ,\ \ y_{n+1} = \frac{1}{n+1} - 5 \cdot y_n$$

(ostatnia relacja to obliczanie rekurencyjne pewnych całek, tylko y_0 należy obliczyć wstępnie - por. metody numeryczne).

Ciągi a funkcja pierwiastek $\sqrt{x}$.

Jak już wiemy, pierwiastki z liczb całkowitych są albo całkowite, albo **niewymierne**. Wynika stąd konieczność ich **przybliżonego** obliczania na komputerze. To ważny, ale i ciekawy problem.

Metoda Newtona-Raphsona (bazująca na geometrii - pierwiastek jako pole kwadratu o boku x, rozpoczynamy od prostokąta i zmniejszamy różnicę pomiędzy długościami boków korzystając ze średniej arytmetycznej) $a > 0$ (*czasami nazywana metodą babilońską*):

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)\ ,\ x_1 = \frac{a}{2}.$$

Sprawdzić, że ten ciąg jest zbieżny do $\sqrt{a}$. Pytanie (takie jak na egzamin - jakie twierdzenie jest konieczne, aby sprawdzić zbieżność tego ciągu?

Różne algorytmy.

A jak programy obliczają wartości funkcji $\sqrt{x}$?

Czy jest "najlepszy algorytm"? Dla zainteresowanych **przegląd** algorytmów dla funkcji $f(x) = \sqrt{x}$ można znaleźć tu: kilkanaście algorytmów (w tym kody algorytmów)! Np.

- metoda Herona $x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - N}{2x_n} = \frac{x_n + N/x_n}{2}$,
- metoda Halleya (-Householdera) $x_{n+1} = x_n - \frac{\left(2x_n^3 - 2ax_n\right)}{3x_n^2 + a}$,
- za pomocą pewnego szeregu Taylora (o czym później):
$$\sqrt{x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{a^{\frac{1}{2}-n}(x-a)^n}{\Gamma\left(\frac{3}{2}-n\right)n!},$$
- ....

I **konieczne** pytanie: dlaczego jest ich tak dużo? A w algorytmach grafiki 3D isotne są też obliczania odwrotności pierwiastka The Legendary Fast Inverse Square Root (dla potrzeb ... gry Quake III)!

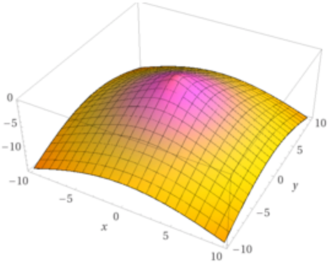
“Ciągi skończone”.

Zwracam uwagę, że ciąg to funkcja określona na **wszystkich** liczbach naturalnych - stąd problemy z obliczaniem granic, czy ogólnie zbieżnością badaną za pomocą komputera. Jednak niekiedy (już w szkole średniej) bada się tzw. ciągi skończone, czyli funkcje określone na skończonym podzbiorze liczb naturalnych. Proszę nie mylić tych pojęć!

W informatyce niekiedy nazywać je będą łańcuchami (gdy wartościami są znaki), a znajdą zastosowania np. w analizie tekstów (operacje na łańcuchach), sieciach neuronowych (ciągi uczące), czy kryptografii (choć tam też korzysta się ze “zwykłego pojęcia ciągu - np. generatory ciągu liczb pseudo-losowych) - ale tym pojęciem zajmą się Państwo oddzielnie na **matematyce dyskretnej**...

Ciągi w wielu wymiarach.

To co omawiamy to tylko podstawy wspomagające zrozumienie idei, które stoją za większością zastosowań w informatyce. i nie będzie wystraczające w zastosowaniach! Będą niezbędne **np.** ciągi elementów na płaszczyźnie $\mathbb{R}^2$ lub ogólniej w $\mathbb{R}^n$ (np. nauczanie maszynowe, sieci neuronowe), np. ciągi punktów z takich powierzchni:



Co wtedy?

Ciągiem punktów na płaszczyźnie nazywamy przyporządkowanie każdej liczbie naturalnej punktu płaszczyzny $\mathbb{R}^2$ (czyli to funkcja $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^2$). Wartość tego przyporządkowania dla liczby naturalnej n nazywamy n-tym wyrazem ciągu i oznaczamy $P_n = (x_n, y_n)$.

Ciąg taki oznaczamy (P_n) lub $((x_n, y_n))$. Ciąg $(P_n) = ((x_n, y_n))$ jest zbieżny do punktu $P_0 = (x_0, y_0)$, co zapisujemy $\lim\limits_{n\to\infty} P_n = P_0$ lub $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n, y_n) = (x_0, y_0)$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0, \ \text{ oraz } \ \lim_{n\to\infty} y_n = y_0.$$

Dla większej liczby zmiennych - analogicznie...

Ale to oznacza, że **wszystkie** defincje, twierdzenia i własności podawane tutaj będą też przydatne w sytuacji wielowymiarowej! **I** tak warto się ich nauczyć...

Tak naprawdę zajdzie też potrzeba badania ciągów w tzw. przestrzeniach metrycznych - ale o tym (niestety) tylko dla zainteresowanych...

Tajne/poufne.

Przykładowe zagadnienia na egzamin - po tym wykładzie...

- Czy eksperyment numeryczny (obliczanie na komputerze) może pozwolić sprawdzić zbieżność zadanego ciągu? A oszacować jego granicę? Jeśli tak - to kiedy? Jeśli nie - to dlaczego (wskazówka: źbieżność pozorna")?
- Wykonując obliczenia (np. arkusz kalkulacyjny) wartości ciągu $a_n = \log_{10} n$ obliczamy różnicę Δ pomiędzy obliczonym a_n i uprzednio obliczonym a_{n-1}: $\Delta = a_n - a_{n-1}$ ("stop" dla pętli *while... do... - to tzw. kryterium przyrostowe stopu w metodach numerycznych*). Dla $n = 10^{13}$ mamy $\Delta = 0,0000000000000042632564145606$, ale dla $n = 10^{14}$ uzyskamy $\Delta = 0$. Czy oznacza to, że obliczona wartość $a_{10^{14}}$ jest przybliżoną wartością granicy tego ciągu? **Odpowiedź uzasadnij.**
- Liczby wymierne w zapisie binarnym mogą mieć rozwinięcia okresowe (np. $a = 0,1$). Ich reprezentacja *double* lub *float* w arytmetyce komputerowej może więc być obarczona błędem i warto unikać obliczeń za pomocą takich liczb. Zbiór liczb wymiernych jest gęsty w zbiorze liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$: a czy zbiór liczb wymiernych o skończonym rozwinięciu binarnym $\mathcal{B}$ również jest gęsty w $\mathbb{R}$? Rozważ **ciągi** liczb z $\mathcal{B}$ i ich granice (punkty skupienia zbioru $\mathcal{B}$).
- W arkuszu kalkulacyjnym wprowadzając do kolumny A kolejne liczby naturalne, a do B formułę =JEŻELI((SIN(A1))$>$ 0,99;"TAK";ŃIE") znajdujemy rosnący ciąg liczb naturalnych (n_k) dla których $\sin n_k$ różni się od 1 o mniej niż $1/100$ (można oczywiście uwzględnić mniejsze różnice). Liczby te są dowolnie duże (np. 31562 czy 3254654). Jakie pojęcie matematyczne ma zilustrować ten eksperyment? Czy oznacza to, że $\lim_{k\to\infty} \sin k = 1$? Dlaczego?