Logika i teoria mnogości

- $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$
- $(p \Rightarrow q) \wedge \neg q \Rightarrow \neg p$
- $\neg(p \wedge (q \Rightarrow r)) \Rightarrow (\neg r \Rightarrow p \vee q)$
- $p \wedge (q \vee r) \Rightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
- $(p \wedge (q \Rightarrow r)) \vee (p \vee q \Rightarrow p \vee r)$
- $(p \Rightarrow q) \wedge (r \Rightarrow q) \Rightarrow (p \vee q \Rightarrow r)$
- $(p \Rightarrow (q \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \wedge q \Rightarrow r)$
- $(p \Rightarrow (q \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \vee q \Rightarrow r)$
- $p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$
- $p \wedge q \Leftrightarrow q \vee p$
- $(p \wedge q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow (q \Rightarrow r))$
- $(p \wedge q \Rightarrow r) \Leftrightarrow (p \Rightarrow (q \Rightarrow r))$
- $\neg(p \vee q \vee r) \Rightarrow \neg p \wedge \neg q \wedge \neg r$
- $\neg(p \vee (q \wedge r)) \Rightarrow (\neg p \wedge \neg q) \vee \neg r$

1. Sprawdzić, czy powyższe formuły a) są tautologiami (metodą nie wprost, metodą przekształcania do postaci normalnej, metodą drzew sekwentów), b) są niespełnialne.
2. Metodą przekształceń równoważnościowych znaleźć KPN i APN powyższych formuł.
3. Metodą tablicy znaleźć formuły w APN i KPN logicznie równoważne powyższym formułom.
4. Znaleźć minimalną APN funkcji logicznych $f_i(x, y, z)(i = 2, .., 255)$
   a) wykorzystując tablice Karnaugha, b) metodą przekształceń (prawa algebry logiki).
5. Zapisać formuły w beznawiasowej notacji Łukasiewicza.
6. Zapisać w notacji infiksowej: $NCNpKNqr, CCpAqrCKNpqr$
7. Dana jest funkcja logiczna:
   $f(x, y, z) = (x \wedge y \wedge z) \vee (x \wedge y \wedge \neg z) \vee (x \wedge \neg y \wedge z) \vee (x \wedge \neg y \wedge \neg z)$. Znaleźć minimalną APN tej funkcji. Podać numer tej funkcji boolowskiej.

8. Sprawdzić, czy poniższe wnioskowania są dedukcyjne:

   - Jeżeli pada śnieg, to lepimy bałwana. Jeżeli lepimy bałwana, to z szafy znika kapelusz. Zatem, jeżeli pada śnieg, to z szafy znika kapelusz.
   - Jeżeli pada śnieg, to lepimy bałwana. Jeżeli lepimy bałwana, to z szafy znika kapelusz, a z kuchni marchewka. Zatem, jeżeli pada śnieg, to z szafy znika kapelusz lub z kuchni marchewka.
   - Jeżeli pada śnieg, to lepimy bałwana. Jeżeli lepimy bałwana, to z szafy znika kapelusz. Jeżeli lepimy bałwana, to z kuchni znika marchewka. Zatem, jeżeli pada śnieg, to z szafy znika kapelusz i z kuchni znika marchewka.
   - Jeżeli czworokąt jest kwadratem, to ten czworokąt jest rombem. Jeżeli czworokąt jest rombem, to ten czworokąt jest równoległobokiem. Zatem, jeżeli czworokąt nie jest kwadratem, to jest nie jest równoległobokiem.

9. Zapisać schematy poniższych zdań (opisać predykaty):

   Każdy człowiek zna jakiś język obcy.

   Jakiś student zna język obcy, którego nie znają inni studenci.

   Każdy student, który zdał wszystkie egzaminy, otrzymuje stypendium.

   Jan otrzymuje stypendium.

   Nieprawda, że wszyscy studenci, którzy zaliczyli wszystkie ćwiczenia zdali wszystkie egzaminy.

   Jakiś student studiuje matematykę, a jakiś informatykę.

   Jakiś człowiek zwiedził wszystkie kontynenty i przepłynął wszystkie oceany.

   Jakiś uczeń przeczytał pewną książkę, której nie przeczytali wszyscy inni uczniowie.

   Pewien matematyk udowodnił twierdzenie, którego inni matematycy nie udowodnili.

10. Wykazać, że podane zbiory są układami zupełnymi spójników logicznych: $\{\uparrow\}, \{\downarrow\}, \{\neg, \Rightarrow\}, \{\neg, \vee\}, \{\neg, \wedge\}$

11. Sprowadzić do PPN następujące formuły:

   - $\forall_x (P(x) \Rightarrow Q(x)) \Rightarrow (\forall_x P(x) \Rightarrow \forall_x Q(x))$
   - $\forall_x P(x) \Leftrightarrow \exists_x P(x)$
   - $(\forall_x P(x) \Rightarrow \exists_x Q(x)) \Rightarrow \neg \exists_x R(x)$
   - $\forall_x P(x) \wedge \exists_x Q(x) \Rightarrow \neg \exists_x R(x) \vee \neg \forall_x S(x)$
   - $\neg \forall_x P(x) \Rightarrow \exists_x \neg P(x)$
   - $\neg \forall_x P(x) \Leftrightarrow \exists_x \neg P(x)$