

Analiza matematyczna dla informatyków.

Mieczysław Cichoń, ver. 2.1/2021

Mieczysław Cichoń - WMI UAM

Plan wykładu.

- ▶ Program wykładu.
- ▶ Motywacje, czyli po co matematyka (analiza matematyczna) informatykom: kilka uwag o motywacji.
- ▶ Literatura.
- ▶ Ponieważ poza notatkami z wykładu potrzebujemy dostępne dla wszystkich **ujednolicone** źródła, to decydujemy się na dwa podstawowe plus każdorazowo (w miarę potrzeby) materiały dodatkowe. Są to:
 - [K] M. Mrozek, "Analiza matematyczna I. Notatki do wykładu matematyki komputerowej", UJ, Kraków, 2013. **UJ Kraków**
 - [W] P. Strzelecki, "Analiza matematyczna I", UW, Warszawa, 2012. **UW Warszawa**

Szkice wykładów.

- ▶ Każdy wykład rozpoczynamy od podania stron stanowiących jego podstawę - najlepiej byłoby przeczytać podane fragmenty **przed** danym wykładem, aby lepiej śledzić moje komentarze do materiału...
- ▶ W czasie wskazanym będę odpowiadał np. na czacie MS Teams na pytania dotyczące wykładów (najlepiej: bieżących!).

Literatura.

- ▶ M.Mrozek, "Analiza matematyczna I. Notatki do wykładu matematyki komputerowej", UJ, Kraków, 2013.
- ▶ P.Strzelecki, "Analiza matematyczna I", UW, Warszawa, 2012.
- ▶ M. Moszyński, "Analiza matematyczna dla informatyków", UW, Warszawa, 2010.
- ▶ M.Oberguggenberger, A.Ostermann, "Analysis for Computer Scientists", Springer, London, 2011.
- ▶ A. Sołtysiak, "Analiza matematyczna", UAM, 2009.
- ▶ A. Ralston, "Wstęp do analizy numerycznej", PWN, Warszawa, 1983.
- ▶ D.B. Small, J.M. Hosnack, "Ćwiczenia z analizy matematycznej z zastosowaniem systemów obliczeń symbolicznych", WNT, Warszawa, 1995.
- ▶ wykłady prof. P. Domańskiego (†) do wykładu DANI1
- ▶ motywacje własne – opublikowane na stronie
- ▶ opracowania własne (MC) – publikowane na stronie WWW na bieżąco według realizacji materiału

Wykład 1.

(3h) Cele nauczania analizy dla informatyków.

Szkic teorii aksjomatycznej liczb rzeczywistych, w tym kresy, zapis dziesiętny liczb rzeczywistych. Liczby wymierne. Potęga o wykładniku rzeczywistym. Istnienie pierwiastka.

Uwagi o arytmetyce komputerowej.

Czy to na pewno wykład
konieczny dla informatyków?

"Wybrałem studia z informatyki, czyli po co mi matematyka i analiza matematyczna?!"

Przemyślenie (DLA) studentów ...

Studiujecie informatykę tylko dla "papierka", ale wiecie już najlepiej co będziecie robić i "wiecie", że matematyka nie będzie Wam potrzebna. Serio?? Będziecie pracowali ze 40 lat - a teraz pomyślcie jak wyglądała informatyka 40 lat temu i co robią ówczesnie kształtenci informatycy! Kto się nie dostosował - ten nie pracuje! Taki kierunek Państwo wybrali... Aby zrozumieć co i dlaczego zmienia się w informatyce oraz mieć zdolność dostosowania - trzeba **zrozumieć matematyczne podstawy informatyki...**

No dobrze, **nie jest** argumentem, że program studiów układają (również) informatycy, a więc wiedzą co robią... (choć to prawda). Czy poniższe uwagi są dla wszystkich "*informatyków*"? Tak, chyba, że ktoś ma specyficznie wąską wizję pracy (obsługa jednego programu np. bazy danych czy sieci komputerowej), ale nawet wtedy wypadałoby *rozumieć* co się robi - zwłaszcza gdy coś **nie działa...**

- ▶ Taki program studiów informatyki to nie jest to nasz wymysł. Ciekawe programy matematyki (i analizy matematycznej) mają uczelnie z Cambridge czy Princeton. I mówimy tu tylko o wstępnych informacjach ("Mathematics for Computer Science"), bo dalszy program (i ich, i nasz...) zawiera kolejne przedmioty poszerzające wiedzę matematyczną (to będzie pokazane na wykładzie). Nie wspomnę o uczelniach, które tego nie uczą bo... to zbyt łatwe i studenci taki "wstęp" sami sobie opracują, a omawia się zaawansowane działy matematyki (np. Politechnika w Zurychu i teoria falek). **Jako ćwiczenie - proszę poszukać na wspomnianych uczelniach programów, o których napisałem...**
- ▶ Polecam też książkę z której sam korzystam:
M. Oberguggenberger, A. Ostermann, *Analysis for Computer Scientists: Foundations, Methods, and Algorithms*, Springer Science and Business Media, 2011. (biblioteka elektroniczna)
- ▶ To mało konkretne, a kto miałby to czytać? :-) Dla matematyków - zbyt nieścisłe podane, dla informatyków - niezauważalne (oczywiście?).

- ▶ Ale jak mam podać (proste) przykłady, skoro Czytelnik dopiero studiuje informatykę? Wybiorę więc system komentarzy (informatycy - praktycy zgodzą się lub nie - zależy co robią...). Zacznę od liczb: w szkole średniej były działania na liczbach naturalnych, całkowitych czy wymiernych. A liczby rzeczywiste były ... mało objaśniane. Nie bez powodu. Na wykładzie podamy sobie aksjomatykę liczb rzeczywistych (z konsekwencjami) - czyli to, czego nie było w szkole średniej (za trudne?).
- ▶ Niestety - dla komputera to JEST za trudne! Tak naprawdę obliczenia są prowadzone na zbiorze liczb całkowitych (i to nie wszystkich :-)). Arytmetykę komputerową omówi kto inny, ale wypadałoby "pomóc" komputerowi (znając liczby rzeczywiste - ograniczać błędy, przyspieszać obliczenia itp., np. kolejność wykonywania operacji).
- ▶ Ależ nie potrzebujemy liczb rzeczywistych (no, skoro komputer ich nie "zna", to nie potrzeba). To po co funkcje, ich własności itp.?

Przykład - pytanie.

$$x^2 - 2px + q = 0 \quad (1)$$

W szkole stosowaliśmy algorytm zakładający obliczanie pierwiastków wzorami (proszę mnie sprawdzić...)

$$x_1 = p + \sqrt{p \cdot p - q} \quad (2a)$$

$$x_2 = p - \sqrt{p \cdot p - q} \quad (2b)$$

Poprawny algorytm? Wróćmy do tematu jeszcze na tym wykładzie. Źródło problemu? Też wyjaśnimy - ale tu będzie potrzebna matematyka...

- ▶ Patrzmy: biorąc ciągi rzeczywiste dodatnie a_n i b_n (np. iteracje pewnych obliczanych wielkości) mamy wybrać "lepszy" z nich i oczekujemy $a_n = O(b_n)$ (pojęcie powszechnie w ocenach algorytmów). Jak to **najłatwiej** sprawdzić? Obliczyć pewne granice górne (a cóż to jest?)... Nie jest łatwiej? To np. (w uproszczeniu - przepraszam matematyków) skorzystać z funkcji f i g takich, że $f(n) = a_n$ i $g(n) = b_n$ oraz (o ile można) z reguły de l'Hôpitala (por. wykład z analizy...).
- ▶ Odnośnie granic ciągów: zastosowania w informatyce są oczywiste (?), definicję podamy na wykładzie, a ja proponuję wymyśleć algorytm obliczeniowy (zadaną dokładnością ε). Pytanie: jak zakończyć obliczenia? Oby nie poprzez badanie różnicy pomiędzy dwoma kolejnymi krokami (tj. $|a_{k+1} - a_k| < \varepsilon$)! Proszę spróbować dla $a_n = \log n$, $\varepsilon = 2^{-10}$ i odpowiednio dużych k ...

- ▶ Wróćmy na chwilę do ogółu: ścisłość rozumowania (dowody) - przecież sprawdzenie poprawności każdego **algorytmu** to **dowód**, czyli należy poznać zarówno metody dowodowe (np. indukcja), jak i weryfikację założeń. Typowy (niestety) błąd w opracowaniach "dla informatyków" to brak weryfikacji, czy badany obiekt **istnieje i jest jednoznacznie** określony. A to z kolei wymaga często kolejnej wiedzy matematycznej.
- ▶ Prosty przykład: wiele osób utożsamia algorytm ze wzorem! A gdzie założenia gwarantujące poprawność? Gdy szukamy rozwiązań równania nieliniowego $f(x) = 0$, $x \in [a, b]$, to wzór na iteracje jest prosty: wybieramy punkty "początkowe" iteracji x_0 i x_1 (no dobrze, tu też jest reguła jak to zrobić np. "falsi") i kładziemy $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_i-1)(x_i-1-x_i-2)}{f(x_i-1)-f(x_i-2)}$. I już?

Działa?

No - nie zawsze (przykłady na wykładzie lub ćwiczeniach). A założenia **gwarantujące** zbieżność metody? Funkcja musi mieć pochodne rzędu I i II ciągłe (czyli $f \in C^{(2)}(a, b)$) i mające stały znak w (a, b) , no i ma mieć *jedno* rozwiązanie w tym przedziale. Ale... to jednak pojęcia z analizy matematycznej... (a inne algorytmy korzystają z teorii interpolacji).

- ▶ Inna sprawa: czy wiesz skąd wynikają zmiany formatu zapisu plików (przynajmniej większość :-))? Przykład dla grafiki. Jeśli "nie potrzeba" matematyki, funkcji i analizy matematycznej, to pozostaniemy przy grafice bitmapowej: punkt po punkcie podajmy jego atrybuty (np. położenie, składowe barwy czy jasności). Ale jeśli to dla kogoś niewygodne, to pozostaje grafika rastrowa (lub nawet wektorowa choćby PDF, CDR czy SVG) np. JPEG. I nie wchodząc w szczegóły: potrzebna jest (dyskretna) transformata Fouriera. A jej wprowadzenie "matematyczne" to ciągi i szeregi funkcyjne, szeregi Fouriera i ciągła transformata Fouriera... Za skomplikowane? To dlaczego **i jak** powstał kolejny format JPEG 2000 (podpowiem: dyskretna transformata falkowa, bardzo "porządną" matematyką!)?
- ▶ Jeśli chcemy coś jeszcze usprawnić, to najpierw wypada zrozumieć jak działa aktualne rozwiązanie, wdrożyć nowe **matematyczne** idee i sprawdzić (pod kątem zastosowań w informatyce(!)). Może warto rozważyć naukę matematyki?

- ▶ Klasyczną procedurą w informatyce jest stosowanie ciągów zdefiniowanych rekurencyjnie. Co prawda, to będzie omawiane poza podstawową analizą matematyczną (Analiza I), ale bez jej podstaw nie da się tego nauczyć. Do konstrukcji funkcji tworzących (podstawowa metoda dla rekurencji) potrzeba będzie zrozumienie m.in. pojęć: funkcja i jej własności, szereg potęgowy i jego promień zbieżności (do tego sporo kombinatoryki i algebry). W uzupełnieniu: skoro komputer prowadzi obliczenia na liczbach całkowitych, to proszę przemyśleć jak korzystamy przy jego pomocy z funkcji (np. w arkuszu kalkulacyjnym)? Jak obliczać wartości takich funkcji jak $f(x) = \sin x$, bo przecież od czasu do czasu z tego korzystamy, nieprawdaż?

- ▶ Jeśli gdzieś napotkacie hasło "ten wielomian (lub inna funkcja) przybliża daną...", to podstawowe pytanie brzmi: co to znaczy "przybliża"? Musimy sprecyzować co jest "odległość pomiędzy funkcjami" (metryka), no i podać jak to można obliczyć (oszacować) oraz dlaczego jest więcej niż jedna taka metoda ("np. "zbieżność średniokwadratowa").
- ▶ Metody numeryczne, to z punktu widzenia informatyki "matematyka stosowana" czy "metody matematyczne informatyki". Wszystkie metody całkowania numerycznego czy numerycznego rozwiązywania równań różniczkowych bazują na definicjach czy własnościach opartych na analizie matematycznej. Podobnie interpolacja czy aproksymacja numeryczna. Nie będę wchodził w szczegóły - pozostawię to na osobny przedmiot "Metody numeryczne" (proszę zabrać na niego notatki z analizy!).

- ▶ Kolejny przykład: często słyszycie "błąd metody numerycznej", "ta metoda jest lepsza (dokładniejsza), (szybciej zbieżna)". Co się za tym kryje? Ogólnie: bardzo często będzie potrzebne rozwinięcie funkcji zgodnie ze wzorem Taylora (analiza!) i oszacowanie reszty (niekiedy w postaci całkowej...). Choć (niestety) studenci kojarzą takie zagadnienie jako "był taki wzór...".
- ▶ Coś spoza wykładu z "Analizy I" (ale na jej podbudowie): analiza harmoniczna, szeregi i transformaty Fouriera itp. mają szerokie zastosowania w informatyce (np. algorytm Cooleya i Tuckeya FFT z zastosowaniami czy algorytm uczenia Kushilevitza i Mansoura - ponownie o szczegółach proszę pytać na właściwych przedmiotach informatycznych). Nie mówiąc już o teorii sygnałów... Por. też Daniel Stefanković, *Fourier transforms in computer science*, University of Chicago, Department of Computer Science, TR-2002-03.

- ▶ Wielu z Państwa napotka przedmioty z uczenia/nauczania maszynowego. Podstawą tamtych metod jest znajdowanie warości ekstremalnych funkcji opisujących wagę w systemie. A czynnikiem oceny "optymalności" jest np. funkcja błędu. Czysta "analiza matematyczna stosowana" ;-) (plus algorytmy jak to zrealizować na komputerze). Nawet wybór algorytmu z gotowej biblioteki (co nie zawsze ma sens) wymaga zrozumienia podstaw działania wielu algorytmów bazujących na metodach analizy matematycznej (i algebry liniowej).
- ▶ Inna dziedzina: rozpoznawanie obrazów i grafika komputerowa. Tam będzie ważny splot (oczywiście: w wersji dyskretnej), a przydatne też inne operacje na zbiorach czy metryki.
- ▶ itd.

Do obejrzenia...

Proponuję obejrzeć ten filmik (i kolejne z tego cyklu):

“Do czego ta matma?” (np. [wprowadzenie w temat](#))

Strony do lektury na wykład 1...

Czytamy najpierw:

[K] : strony 13-16 (do tego źródła będę kierował po motywacje lub zastosowania informatyczne : nieformalne intuicje informatyczne w tym skrypcie są w kolorze brązowym, aspekty obliczeniowe analizy matematycznej, ilustrowane programami komputerowymi w języku C++ oraz instrukcjami programu Mathematica złożone są czcionką w kolorze niebieskim)
i dalej

[K] : strony 119-129

[W] : strony 1-16

(lub alternatywnie: z innego wykładu strony 11-22.

Zwracamy uwagę na: istnienie pierwiastków, sprawdzenia jakie aksjomaty nie są spełnione w arytmetyce komputerowej, zasada Archimedesa i jej konsekwencje (np. funkcja entier), gęstość zbioru liczb wymiernych w \mathbb{R} i jej konsekwencje, kresy zbiorów.

[K] - kolory...

1.2.2 Ciągi przybliżeń

W praktyce wygodnie ograniczyć się do mianowników postaci $m = 10^n$. Niestety ręczne poszukiwanie stosownego licznika jest bardzo żmudne, a dla dużych n praktycznie niewykonalne. Potrzebujemy algorytmu, który dla zadanego mianownika 10^n pozwoli nam wyznaczyć stosowny licznik i_n , oraz komputera, który sprawnie wykona obliczenia w tym algorytmie. Latwo zauważyc, że

$$i_n = \max \{ i \mid i * i < 2 * 100^n \}.$$

Sugeruje to algorytm, który przy zadanym n sprawdza nierówność $i * i < 2 * 100^n$ dla kolejnych liczb naturalnych i i zwraca i_n jako ostatnie i , dla którego nierówność ta zachodzi. Wtedy $x_n := \frac{i_n}{10^n}$ jest przybliżeniem $\sqrt{2}$, które, jak łatwo sprawdzić, spełnia

$$|x_n - \sqrt{2}| \leq \frac{1}{10^n}.$$

Kolejne liczby x_n tworzą tzw. ciąg liczbowy, w tym przypadku tzw. ciąg przybliżeń. Ciąg przybliżeń, to ciąg skonstruowany w celu przybliżania pewnej liczby niewymierną liczbami wymiernymi. Ciągi przybliżeń to nie jedynie ciągi rozważane w matematyce, choć ich rola praktyczna jest bardzo istotna. Badanie ciągów to jeden z głównych obiektów zainteresowań analizy matematycznej.

Wprowadźmy w programie Mathematica rozdzielony średnikami ciąg instrukcji

```
n = 3; i = 1; While[i^2 < 2*100^n, i = i + 1]; {(i-1)/10^n, i/10^n}
```

Pojawiają się tu zmienne i oraz n . Instrukcja While to instrukcja pętli. Jak długo spełniony jest warunek $i^2 < 2 * 100^n$ wykonywana jest instrukcja $i = i + 1$. Ponieważ przed wykonaniem instrukcji While ustawiliśmy zmienną n na 3, a i na 1, pętla wykonujemy dla kolejnych wartości $i = 1, 2, \dots$ aż znajdzie nierówność $i^2 \geq 2000000$. Mathematica wyprowadza jako wynik ostatnie obliczone wyrażenie, którym jest para ułamków $\{(i-1)/10^n, i/10^n\}$. W rozważanym przypadku otrzymamy

$$\left\{ \frac{707}{500}, \frac{283}{200} \right\}.$$

jako oszacowanie od dołu i od góry $\sqrt{2}$ z dokładnością do $\frac{1}{1000}$.

Podstawiając w powyższym listingu za n kolejne liczby naturalne i i wykonując obliczenia otrzymamy przybliżenia $\sqrt{2}$ od dołu i od góry o coraz lepszej

8.5 Twierdzenie o istnieniu pierwiastka.

Naszym celem w tym rozdziale jest udowodnienie, że w zbiorze liczb rzeczywistych dodatnich pierwiastki istnieją. W szczególności ostatecznie zamknemy sprawę sensowności $\sqrt{2}$. Nim jednak twierdzenie to udowodnimy potrzebujemy dwa pomocnicze twierdzenia: własność Archimedesa oraz gęstość \mathbb{Q} w \mathbb{R} .

8.5.1 Własność Archimedesa

Twierdzenie 8.5.1 Ciało liczb rzeczywistych ma własność Archimedesa, tzn.

$$\forall a, b \in \mathbb{R}^+ \exists n \in \mathbb{N} \quad na > b.$$

Dowód: (*) Dowód poprowadzimy nie wprost. Założymy zatem, że istnieją liczby rzeczywiste dodatnie a, b takie, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi $na \leq b$. Oznacza to, że b jest majorantą zbioru

$$A := \{x \in \mathbb{R} \mid \exists n \in \mathbb{N} \ x = na\}.$$

Niech $c := \sup A$ będzie jego kresem górnym. Ponieważ $c - a < c$, więc $c - a$ nie jest majorantą zbioru A . Zatem znajdziemy $n_0 \in \mathbb{N}$ takie, że $n_0 a > c - a$. Ale wtedy $(n_0 + 1)a > c$, a w konsekwencji c nie jest majorantą A , a tym bardziej kresem górnym zbioru A . Otrzymana sprzeczność dowodzi twierdzenia. \square

Wniosek 8.5.2 Ciało liczb wymiernych ma wartość Archimedesa.

Dowód: ćwiczenie.

8.5.2 Gęstość zbioru w zbiorze

Definicja 8.5.3 Niech X będzie przestrzenią liniowo uporządkowaną, a A niech będzie podzbiorem X . Mówimy, że A jest *gęsty* w X jeżeli

$$\forall x, y \in X \quad x < y \Rightarrow \exists z \in A \ x < z < y.$$

Gdy $A = X$, mówimy, że A jest *gęsty w sobie*.

Twierdzenie 8.5.4 Zbiór liczb wymiernych jest gęsty w zbiorze liczb rzeczywistych.

8.5.3 Pierwiastki

Teraz możemy już udowodnić twierdzenie o istnieniu n -tego pierwiastka

Twierdzenie 8.5.5 (*o istnieniu n -tego pierwiastka*)

$$\forall n \in \mathbb{N}_1 \forall x \in \mathbb{R}^* \exists! y \in \mathbb{R}^* : y^n = x$$

Dowód: (*) Pokażemy najpierw, że pierwiastek istnieje co najwyżej jeden. Dla dowodu nie wprost, przyjmijmy, że istnieją $y_1, y_2 \in \mathbb{R}^*$ takie, że $y_1 \neq y_2$ oraz $y_1^n = y_2^n$. Dla ustalenia uwagi możemy przyjąć, że $y_1 < y_2$ (dowód gdy $y_1 > y_2$ jest analogiczny). Na mocy twierdzenia 8.3.2 mamy $y_1^n < y_2^n$ co przeczy $y_1^n = y_2^n$ i dowodzi jednoznaczności.

Dla dowodu istnienia zauważmy najpierw, że $0^n = 0$, zatem teza jest oczywista gdy $x = 0$. Możemy więc założyć, że $x > 0$. Rozważmy zbiór

$$E := \{ u \in \mathbb{R}^* \mid u^n < x \}.$$

Oczekujemy, że kres górnego tego zbioru jest poszukiwanym pierwiastkiem. Musimy jednak najpierw pokazać, że E jest zbiorem niepustym i ograniczonym od góry.

Pokażemy, że $E \neq \emptyset$. Niech $t := \frac{x}{x+1}$. Mamy $0 < t < 1$ oraz $t < x$. Mnożąc nierówności $0 < t < 1$ obustronnie przez $t > 0$ dostajemy z własności ciała uporządkowanego dostajemy $0 < t^2 < t$. Ale $t < 1$, zatem $0 < t^2 < 1$. Rozumując indukcyjnie stwierdzamy, że również $0 < t^{n-1} < 1$. Mnożąc tę nierówność obustronnie przez $t >$ dostajemy $t^n < t$. Zatem $t^n < x$ co oznacza, że $t \in E$. Tak więc $E \neq \emptyset$. Pokażemy z kolei, że $1+x$ jest majorantą zbioru E . Gdyby tak nie było, znaleźćlibyśmy $s \in E$, takie, że $s > 1+x$. Wtedy $s^n > s > x$. Zatem $s \notin E$. Otrzymana sprzeczność pokazuje, że $1+x$ rzeczywiście jest majorantą zbioru E , zatem E jest ograniczony od góry. Zatem ma kres górnego.

Polóżmy $y := \sup E$. Pokażemy, że rzeczywiście $y^n = x$. Dla dowodu nie wprost założymy, że $y^n \neq x$. Mamy do rozważenia dwa przypadki: $y^n < x$ lub $y^n > x$. Rozważmy najpierw przypadek $y^n < x$.

Liczymy teraz, że da się skonstruować $y_1 > y$ takie, że $y_1^n < y$, co przeczyłoby $y = \sup E$. Naturalne jest poszukiwać y_1 w postaci $y_1 = y + h$. Pytanie jak dobrać h ? Mamy mieć $(y + h)^n < x$ co jest równoważne

$$(y + h)^n - y^n < x - y^n. \tag{8.10}$$

Wiemy ze wzoru (7.6), że

$$(y + h)^n - y^n = h \left((y + h)^{n-1} + (y + h)^{n-2}y + \dots + y^{n-1} \right) < hn(y + h)^n.$$

Zatem, dla $h < 1$ mamy

$$(y + h)^n - y^n < hn(y + 1)^n.$$

Stąd, by zagwarantować (8.10), wystarczy zapewnić, że

$$hn(y+1)^n < x - y^n,$$

a w tym celu wystarczy wziąć $h < \frac{x-y^n}{n(y+1)^n}$. Jesteśmy teraz gotowi, by ze zrozumieniem wrócić do formalnego dowodu.

Dobierzmy $h \in \mathbb{Q}$ takie, że

$$0 < h < \min\left\{1, \frac{x-y^n}{n(y+1)^n}\right\}.$$

Istnienie takiego h zapewnia nam gęstość \mathbb{Q} w \mathbb{R} (twierdzenie 8.5.4). Łatwo sprawdzamy, że wtedy

$$(y+h)^n - y^n < hn(y+1)^n < x - y^n.$$

Zatem $(y+h) < x$, czyli $y+h \in E$. Ale $y+h > y = \sup E$, skąd $y+h \notin E$. Otrzymana sprzeczność wyklucza nierówność $y^n < x$.

Pozostaje pokazać, że nierówność $y^n > x$ też prowadzi do sprzeczności. *Tym razem liczymy, że uda się skonstruować $y_2 < y$, również będące majorantą zbioru E , co doprowadzi do sprzeczności z faktem, że y jako kres górnego jest najmniejszą majorantą. Poszukujemy y_2 w postaci $y - k$. Chcemy mieć $(y - k)^n > x$ co jest równoważne postulatowi*

$$y^n - (y-k)^n < y^n - x$$

Rozpisując podobnie jak poprzednio mamy

$$y^n - (y-k)^n = k \left(y^{n-1} + y^{n-2}(y-k) + \cdots + (y-k)^{n-1} \right) < kny^{n-1}.$$

Podpowiadając jak dobrąć k :

Dobierzmy $k \in \mathbb{Q}$ takie, że

$$0 < k < \frac{y^n - x}{ny^{n-1}}.$$

Łatwo sprawdzamy, że przy tak dobranym k mamy $(y-k)^n > x$. Twierdzimy, że $y-k$ jest majorantą zbioru E . Gdyby tak nie było, znaleźlibyśmy $v \in E$ takie, że $v > y-k$. Ale wtedy $v^n > (v-k)^n > x$, co przeczy $v \in E$. Zatem $y-k$ rzeczywiście jest majorantą zbioru E . Ale $y-k < y$, skąd y nie jest najmniejszą majorantą E zatem $y \neq \sup E$. Otrzymana sprzeczność dowodzi, że $y^n = x$. \square

Niejemną liczbę, której n -ta potęga jest równa liczbie $x \geq 0$ nazywamy n -tym pierwiastkiem z x i oznaczamy $\sqrt[n]{x}$.

Funkcja “entier”.

Jedną z podstawowych konsekwencji aksjomatyki liczb rzeczywistych jest istnienie funkcji “entier”. Jest ona używana (i użyteczna) w arytmetyce komputerowej (i to mimo braku liczb rzeczywistych w takich obliczeniach).

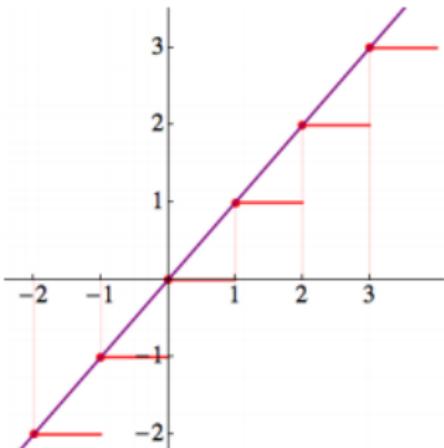
Definicja 1.15 (Entier, czyli część całkowita liczby rzeczywistej). Dla każdej liczby $x \in \mathbb{R}$ określamy

$$[x] = \sup\{k \in \mathbb{Z} : k \leq x\}. \quad (1.4)$$

Zatem, na przykład, $[7] = 7 = -[-7]$, $[\frac{1}{3}] = 0$, $[\sqrt{2}] = 1$, ale $[-\sqrt{2}] = -2$, gdyż największą liczbą całkowitą nie przekraczającą $-1,4142\dots = -\sqrt{2}$ jest właśnie -2 .

Stwierdzenie 1.16. *Dla każdego $x \in \mathbb{R}$ liczba $[x]$ jest całkowita i spełnia nierówności*

$$[x] \leq x < [x] + 1. \quad (1.5)$$



Oto niedługi dowód, dla zainteresowanych formalizacją. To, że $[x] \in \mathbb{Z}$, wynika z definicji części całkowitej i własności zbioru \mathbb{Z} , wyrażonej w Twierdzeniu 1.14: zbiór

$$K = \{k \in \mathbb{Z} : k \leq x\}$$

jest ograniczony z góry przez x , a liczba $[x]$ jest największym elementem K . Mamy $[x] \leq x$ wprost z definicji supremum. Gdyby $[x] + 1 \leq x$, to byłoby

$$\sup K = [x] < [x] + 1 \in K,$$

a to jest sprzeczność z definicją supremum. \square

Funkcja entier i funkcja $f(x) = x$. Lewy koniec każdego z poziomych odcinków wykresu $[x]$ należy do tego wykresu, a prawy – nie.

Wiemy już zatem (z grubsza), co to są liczby rzeczywiste, naturalne, całkowite i wymierne. Wiemy też, że istnieją liczby niewymierne; jedną z nich jest $\sqrt{2}$. Sformułujmy jeszcze jedną ważną własność,

która ma zarówno zbiór \mathbb{Q} liczb wymiernych, jak i zbiór $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ liczb niewymiernych.

Definicja 1.17. Zbiór $A \subset \mathbb{R}$ nazywa się gęsty, jeśli dla wszystkich $x, y \in \mathbb{R}, x < y$, istnieje element $a \in A$ taki, że $x < a < y$.

Twierdzenie 1.18. Zarówno zbiór \mathbb{Q} liczb wymiernych, jak i zbiór $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ liczb niewymiernych, są gęste w \mathbb{R} .

Uwagi.

Do powtórzenia na ćwiczeniach: liczby naturalne, indukcja matematyczna (np. strony 100-102).

Uwaga: w materiałach jest istotne twierdzenie o istnieniu pierwiastka z liczby naturalnej wraz z dowodem, że jest to albo liczba naturalna (kiedy?), albo **niewymierna**. Ponadto dowód na niewymierność pierwiastków jest **w tym materiale**.

Ale: skoro niewymierna to (jak się okaże) nie ma dokładnej reprezentacji komputerowej - czyli warto *pomyśleć* jak ją najlepiej obliczyć...

Liczby naturalne i całkowite.

Zbiór liczb naturalnych \mathbb{N} definiowany był przez matematyka włoskiego G. Peano około 1891 r., a definicja podana przez niego ma postać aksjomatyczną. W zbiorze \mathbb{N} można wykonywać **działania dodawania oraz mnożenia**.

Najmniejszym zbiorem zawierającym zbiór liczb naturalnych w którym można wykonywać **działanie odejmowania** (oprócz powyższych dwóch działań) jest zbiór liczb całkowitych, który piszemy $\{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ lub jak zwykle oznaczamy symbolem \mathbb{Z} . Jest oczywiste, że zbiór \mathbb{Z} jest sumą mnogościową zbioru liczb naturalnych, zbioru liczb całkowitych ujemnych oraz zbioru jednoelementowego, którym jest liczba 0.

Liczby wymierne.

W wyniku praktycznej działalności człowieka związanej z mierzeniem różnorodnych wielkości ukształtowało się pojęcie liczby wymiernej. Zbiór liczb wymiernych oznaczamy zwykle symbolem \mathbb{Q} . Zbiór \mathbb{Q} został zdefiniowany na przełomie XIX i XX w. Definicja zbudowana na pojęciu liczby całkowitej podana została przez niemieckiego matematyka i fizyka H.G. Grassmana, natomiast definicja oparta na pojęciu liczby rzeczywistej podana została przez niemieckiego matematyka D. Hilberta.

W zbiorze \mathbb{Q} można wykonywać **działania dodawania, odejmowania, mnożenia i dzielenia z wyjątkiem dzielenia przez 0**, a ponadto zbiór \mathbb{Q} jest gęsty, tzn. nie ma w nim liczb sąsiednich. Liczby wymierne możemy interpretować jako punkty na osi liczbowej. Jeżeli przyjmiemy, że odcinek e jest jednostką na osi liczbowej, to działanie $\frac{r}{s}$ przekształca odcinek e w odcinek $\frac{r}{s}e$, a punkt który jest prawym końcem tego odcinka uważamy za wynik działania $\frac{r}{s}$.

A teraz liczby, które są
“zbyt skomplikowane”
dla komputera...

Czyli: musi je poznać informatyk!

Liczby rzeczywiste - aksjomaty.

Liczby, których nie można przedstawić wzorem $\frac{l}{m}$, gdzie $l, m \in \mathbb{Z}$ oraz $m \neq 0$ nazywamy liczbami niewymiernymi.
Przykładami liczb niewymiernych są np. liczby π , $\sqrt{2}$, $\sqrt{18}$ i inne.
To jednak tylko przykłady!

W cytowanej literaturze można znaleźć różne definicje zbioru liczb rzeczywistych. W **ujęciu aksjomatycznym** pojęcie zbioru \mathbb{R} oraz arytmetyki liczb rzeczywistych stanowi **sześć pojęć pierwotnych** ($\mathbb{R}, 0, 1, +, \cdot, <$), gdzie \mathbb{R} jest pewnym zbiorem, 0 i 1 są elementami \mathbb{R} natomiast $+$ i \cdot oznaczają działania dwuargumentowe określone w \mathbb{R} oraz $<$ oznacza relację dwuargumentową określoną w \mathbb{R} . Do tego aksjomaty określają własności tych obiektów.

Do zapoznania się z aksjomatami polecam: [tu - strony 6-11, \[W\]](#), strony 2-6 lub [\[K\] strony 119-120](#)

I Aksjomaty dodawania

Określone jest działanie $+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dodawania:

- (1) $x + y = y + x$ — przemienność dodawania
- (2) $(x + y) + z = x + (y + z)$ — łączność dodawania
- (3) $\exists 0 \in \mathbb{R} \forall x \in \mathbb{R} : x + 0 = x$ — istnienie elementu neutralnego dodawania, istnienie zera
- (4) $\forall x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R} : x + y = 0$ — istnienie elementu przeciwnego

II Aksjomaty mnożenia

Określone jest działanie $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mnożenia:

- (5) $x \cdot y = y \cdot x$ — przemienność mnożenia
- (6) $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$ — łączność mnożenia
- (7) $\exists 1 \neq 0 \in \mathbb{R} \forall x \in \mathbb{R} : x \cdot 1 = x$ — istnienie elementu neutralnego mnożenia, istnienie jedynki
- (8) $\forall x \neq 0 \in \mathbb{R} \exists y : x \cdot y = 1$ — istnienie elementu odwrotnego
- (9) $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$ — rozdzielność mnożenia względem dodawania

III Aksjomaty porządku

Określona jest relacja \leq ($\subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$) porządku:

- (10) $x \leq x$ — zwrotność
- (11) jeśli $x \leq y$ i $y \leq x$, to $x = y$ — słaba antysymetria
- (12) jeśli $x \leq y$ i $y \leq z$, to $x \leq z$ — przechodniość
- (13) $x \leq y$ lub $y \leq x$ — spójność
- (14) jeśli $x \leq y$, to $x + z \leq y + z$
- (15) jeśli $0 \leq x$ i $0 \leq y$, to $0 \leq x \cdot y$

IV Aksjomat kresu górnego

- (16) Każdy niepusty ograniczony z góry podzbiór w \mathbb{R} ma kres górnny.

Uwaga: skoro ludziom trudno przyswoić aksjomaty liczb rzeczywistych i operować nimi, to jak ma to zrobić komputer?
Niestety: nie może!

Kluczowe informacje: strony 119-129 !!

To informatyk musi przewidzieć skutki braku liczb rzeczywistych w **arytmetyce komputerowej!**

Zarówno liczby, jak i funkcje wydają się być nam dobrze znane, ALE... nie komputerom.

Ograniczenie zakresu arytmetyki komputerowej.

8.2 Liczby reprezentowalne

W pamięci komputera możemy reprezentować jedynie pewien skończony podzbiór zbioru liczb. Używane są różne podzbiory. W przypadku liczb, na których operuje procesor są to pewne podzbiory zbioru liczb całkowitych oraz pewne podzbiory zbioru liczb wymiernych, najczęściej liczby całkowite typu **int** oraz wymierne typu **double**.

Do reprezentacji liczb typu **int** używa się zazwyczaj 32 cyfr dwójkowych, czyli inaczej bitów (rys.8.1). Sama liczba zapisana jest przy pomocy 31 bitów, a 32-gi bit używany jest do zapisania znaku. Pozwala to na zapisywanie liczb całkowitych z zakresu -2^{31} do $+2^{31}$.



Rysunek 8.1: 32-bitowe słowo (4 bajty) używane do reprezentacji liczb typu **int**.



Rysunek 8.2: 64-bitowe słowo (8 bajtów) używane do reprezentacji liczb typu **double**.

Liczby typu **double** przechowywane są zazwyczaj na 64 bitach, z czego jeden bit reprezentuje znak s , 11 bitów cechy N , a pozostałe 52 mantysę m będącą ulamkiem o mianowniku 2^{52} z przedziału $[1, 2)$ (rys.8.2). Umożliwia to zapisywanie liczb w postaci

$$x = sm2^N,$$

a także, przy pomocy specjalnego kodu, liczby zero. Wykorzystanie cechy i mantysy pozwala na przybliżanie liczb o bardzo dużym zakresie, od bardzo małych, rzędu 10^{-323} , do bardzo dużych, rzędu 10^{308} , przy zachowaniu w miarę stałej dokładności, wynoszącej około 15 cyfr znaczących.

Liczby rzeczywiste.

Komputer może posługiwać się typem *real*, ale nie są to jednak liczby rzeczywiste, a jest on

skończonym zbiorem reprezentantów przedziałów. Patrz:
[paragraf 8.2, strony 120-130.](#)

Całą pracę musi wykonać *programista*...

Obliczenia numeryczne = obliczenia (przybliżone) na danych typu *real* .

A już np. liczba rzeczywista $e \in \mathbb{R}$ będzie bezpośrednio potrzebna (np. przy zagadnieniach wizualizacji) - wprowadzimy ją na wykładzie.

Uwaga: w związku z tym nie można oczekiwać, że aksjomaty liczb rzeczywistych (a więc i nasze oczekiwania wobec własności np. działań) będą spełnione w arytmetyce komputerowej!

Arytmetyka komputerowa.

Każdą liczbę x , $x \neq 0$ można reprezentować jednoznacznie w postaci wykładniczej $x = s \cdot m \cdot 2^c$, gdzie $s \in \{-1, 1\}$ jest znakiem liczby, $m \in [\frac{1}{2}, 1)$ nazywamy **mantysą**, a $c \in \mathbb{Z}$ nazywamy **cechą**. W komputerze m i c są reprezentowane za pomocą skończonej ilości bitów.

W związku ze skończonym zakresem wartości przyjmowanych przez cechę $c_{\min} \leq c \leq c_{\max}$ w reprezentacji zmiennoprzecinkowej można reprezentować tylko liczby ze **skończonego zakresu** $\frac{1}{2}2^{c_{\min}} \leq |x| < 2^{c_{\max}}$ oraz 0. W związku ze skończoną ilością t bitów mantisy reprezentacja zmiennoprzecinkowa może różnić się od wartości ścisłej: $\tilde{x}_t = rd(x) = x(1 + \epsilon)$, gdzie $|\epsilon| \leq 2^{-t}$.

Polecam zapoznać się z [tym materiałem!](#) Ponieważ jednak nie do końca wierzę w wykonanie polecenia, to napiszę inaczej: **będę uważał ten materiał za obowiązkowy...**

Zero. Przybliżenia.

Pewnie większość czytelników napotkała w "C++" funkcję `epsilon()` lub `FLT_EPSILON`, `DBL_EPSILON`, `LDBL_EPSILON` (dla typów zmiennoprzecinkowych). Ta pierwsza wg dokumentacji to "najmniejsza liczba większa niż 1 reprezentowalna w podwójnej precyzyji". Czyli przy 64-bit IEEE podwójnej precyzyji, mamy 52-bitową mantysę i 11-bitową cechę:

A więc:

Czyli

$$\epsilon_{\text{epsilon}}() = (1 + 2^{-52}) - 1 = 2^{-52}.$$

O arytmetyce komputerowej - cd.

Może po przeczytaniu poprzednich uwag będą osoby, które stwierdzą, że wykonywały obliczenia np. na większych liczbach. Tak - mówimy tu o programach korzystających z **reprezentowania liczb na poziomie procesora** (słowa maszynowe).

Jeśli musimy wykonywać dokładniejsze obliczenia, to należy skorzystać z programu, który **pomija te ograniczenie** (lub napisać własny...), np pakiety matematyczne czy programy obliczeniowe. Wtedy operacje na liczbach ograniczonych wielkością pamięci - ale oczywiście to wymaga więcej operacji i/lub dłuższych czasów obliczeń (*np. szachy i "Deep Blue"*). To i tak ma pewne ograniczenia, nasze zasady **pozostają w mocy**, tylko zakres liczbowy czy precyzja ulega zmianie... Oczywiście, czym innym jest **przechowywanie liczb** - można np. obliczać kolejne miejsca po przecinku (np. π) i zapisywać, ale operowanie na takich liczbach to inny problem.

Dla zainteresowanych...

Tutaj (dla zainteresowanych, bo to nie ten przedmiot) więcej informacji: dlaczego zapisać liczby zmiennopozycyjnie i jak: [analiza błędów w metodach numerycznych](#).

Nas interesuje jak kontrolować obliczenia w arytmetyce komputera (czego nie potrafi - które aksjomaty nie są spełnione) i dlaczego to programista odpowiada za obliczenia.

A tutaj ciekawe materiały [o reprezentacji liczb i zestaw ćwiczeń](#). Polecam!

Część tego wykładu zajmować nam będą metody **JAK** skutecznie reprezentować liczby niewymierne na komputerze - na razie wiemy **DLACZEGO** to konieczne... Te *algorytmy* znajdą swoje podstawy w matematyce (analizie matematycznej).

Unikamy problemów... liczby rzeczywiste

Na początek banalne zagadnienie:

$$\underbrace{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \dots \cdot \frac{1}{3}}_{n - \text{krotnie}} \cdot \underbrace{3 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 3}_{n - \text{krotnie}} = ??$$

No to proszę zrobić **symulację** np. w arkuszu kalkulacyjnym dla "dużych" n ...

Czyli: nie ma "jednego" zera, a działania nie są przemienne...

Przykład - arkusz kalkulacyjny.

C	D	E	F	G	H	I
0,3333333		645	5,5362E+307		0	
0,3333333	5,4189E-308	644	1,8454E+307		1	

Liczymy $1/3$ do potęgi 645 i (niżej) do 644 i odpowiednio z 3 do tych potęg, oraz ich iloczyny - ale jak różne wyniki (0 oraz 1)!

Problemy z zerem...

Drugie pytanie: stosujemy wzory na pierwiastki trójmianu czy wzory Viète'a ?? Sprawdzić na

$$w(x) = x^2 - k \cdot x + 1$$

dla odpowiednio (do stosowanej arytmetyki zmiennopozycyjnej)
dużych k ...

Uwaga: Warto rozważyć wzory Viète'a gdy wzory na pierwiastki mogą prowadzić do problemów z obliczaniem pierwiastka (o pierwiastkach - nieco później).

Obliczanie zer równania kwadratowego

$$x^2 - 2px + q = 0 \quad (3)$$

W szkole stosowaliśmy algorytm zakładający obliczanie pierwiastków wzorami

$$x_1 = p + \sqrt{p \cdot p - q} \quad (4a)$$

$$x_2 = p - \sqrt{p \cdot p - q} \quad (4b)$$

Poprawny algorytm wygląda jednak następująco: obliczamy ten pierwiastek, który jest bardziej "odległy od zera np. dla którego mamy we wzorze dodawanie (dla $p > 0$ ryzyko $p - \sqrt{p \cdot p - q}$ "bliskie zeru"), a drugi obliczamy na podstawie wzoru Viète'a $x_1 \cdot x_2 = q$

Kontrprzykład - arkusz...

$x^2 - 2px + q = 0$					
p	150000	300000	x1	sprawdzamy: wzory Viete'a	
q	0,000001	0	x2	<u>$x_1 \cdot x_2 = q ??$</u>	NIE
				$x_1 + x_2 = 2p ??$	TAK dlaczego?

A więc obliczenia np. w arkuszu kalkulacyjnym mogą prowadzić do błędnych wyników - uwaga na "zero maszynowe"!

if $p \geq 0$ then

$$\begin{aligned}x_1 &= p + \sqrt{p \cdot p - q} \\x_2 &= q/x_1\end{aligned}\tag{5}$$

if $p < 0$ then

$$\begin{aligned}x_2 &= p - \sqrt{p \cdot p - q} \\x_1 &= q/x_2\end{aligned}\tag{6}$$

Kiedy algorytm *naiwny* jest niepoprawny? Może on generować znaczny błąd w chwili gdy np. $p \cdot p \gg q$, czyli wtedy $p - \sqrt{p^2 - q} \approx p - \sqrt{p^2} = 0$ (oczywiście: maszynowe zero).

Zadanie samodzielne: Zaimplementować oba te algorytmy. Poszukać takich wartości p i q , dla których algorytmy dają różne wyniki. Który algorytm jest dokładniejszy?

Dla mniej pracowitych: przeanalizować algorytmy ze stron [K] strony 136-137 i zapoznać się z wnioskami ze strony 138.
Przy okazji badań ciągów wyjaśnimy problem...

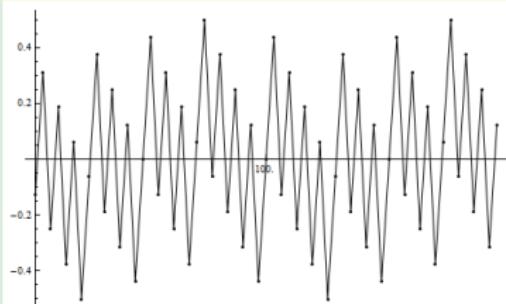
Mathematica.

Ilustracja arytmetyki komputerowej w (dobrym) programie matematycznym "Mathematica". Ma trochę więcej możliwości niż "zwykłe programy" ... Prezentacja: *Skrypt ilustracyjny - potrzebny darmowy CDF Player lub Mathematica*.

```
SetArithmetic[4, 10];
```

- Teraz przebadamy arytmetykę na tej konkretnej maszynie. Poniższy wykres przedstawia wartość względną błędu obliczenia wartości funkcji $f(x) = x^2$ w małym sąsiedztwie argumentu $x = 100$. Widać, że wartość błędu zmienia się nieregularnie. Jednostki na osi pionowej to 10^{-4} (tj. odległość dwóch sąsiednich liczb maszynowych w otoczeniu wartości).

```
MicroscopicErrorPlot[x^2, {x, 100}]
```



- Poniższy wykres pokazuje z kolei wygląd funkcji w arytmetyce komputerowej, ukazując "schodkową" naturę tych funkcji. Liczbę x podnosimy do potęgi a/b i pokazujemy wykres w okolicy liczby $x=c$.

Istnienie pierwiastka z liczby nieujemnej.

To już było na slajdach jako wprowadzenie, ale teraz **czytamy [K] strony 128-129**. Koniecznie trzeba zwrócić uwagę na dwa elementy tezy: "pierwiastek **istnieje**" i "jest **co najwyżej jeden**" (jednoznaczność). To dwa stałe i konieczne elementy w każdym użyciu obiektu **w informatyce!** Symbol $\exists!$ czytamy właśnie "istnieje dokładnie jeden".

Istotne: czytamy "brązowe" komentarze... Patrz też [W] str. 11-13.

I dalej ważny fakt: twierdzenie 1.19 [W] (str. 15 - por. kolejne slajdy) rozstrzyga, że pierwiastki z liczb naturalnych są albo naturalne, albo niewymierne! Ten ostatni przypadek jest problemem w obliczeniach na komputerze - **muszą być obliczane w sposób przybliżony**.

Twierdzenie 1.19. Jeśli $n, k \in \mathbb{N}$ i $k \geq 2$, to $x = n^{1/k}$ jest albo liczbą naturalną, albo liczbą niewymierną.

Dowód. Aby lepiej zilustrować najważniejszy pomysł dowodu, rozpatrzymy najpierw przypadek $k = 2$.

Przypuśćmy, że $0 < x = \sqrt{n} \notin \mathbb{N}$, ale jednak $x \in \mathbb{Q}$. Wtedy zbiór

$$A = \{m \in \mathbb{N} : mx \in \mathbb{N}\}$$

jest niepusty; to wynika wprost z definicji zbioru liczb wymiernych \mathbb{Q} . Niech m_0 będzie najmniejszym elementem A ; wtedy oczywiście $m_0x = l \in \mathbb{N}$.

Poóżmy $m_1 = m_0(x - [x])$. Z nierówności $0 < x - [x] < 1$ (pamiętajmy: x nie jest liczbą całkowitą) wynika, że $0 < m_1 < m_0$. Ponadto,

$$m_1 = m_0x - m_0[x] = l - m_0[x] \in \mathbb{Z},$$

a więc m_1 jest liczbą naturalną, bo $m_1 > 0$. Wreszcie, mamy

$$0 < m_1x = m_0x^2 - m_0x[x] = m_0n - l[x] \in \mathbb{Z},$$

a więc liczba m_1x też jest naturalna. To oznacza, że $m_1 \in A$ i $m_1 < m_0$, a przy tym m_0 jest najmniejszym elementem w zbiorze A . Otrzymaliśmy sprzeczność, która oznacza, że $x = \sqrt{n}$ nie może być liczbą wymierną. To kończy dowód twierdzenia w przypadku $k = 2$.

Pokażemy teraz, jak rozważyć przypadek ogólny. Założymy, że $x = n^{1/k} \notin \mathbb{N}$. Przypuśćmy, że $x \in \mathbb{Q}$; pokażemy, że to założenie prowadzi do sprzeczności. Niech

$$B = \{s \in \mathbb{N} : x^s \in \mathbb{N}\}.$$

Zbiór $B \subset \mathbb{N}$ jest niepusty ($k \in B$, bowiem $x^k = n$), więc zawiera element najmniejszy s_0 ; przy tym $s_0 > 1$, gdyż $1 \notin B$. Oznaczmy

$$x^{s_0} = n_0. \tag{1.6}$$

Rozważmy zbiór

$$A = \{m \in \mathbb{N} : \text{wszystkie liczby } mx, mx^2, \dots, mx^{s_0-1} \text{ są naturalne}\}.$$

Jest to zbiór niepusty, gdyż x, x^2, \dots, x^{s_0-1} są liczbami wymiernymi. Niech m_0 będzie najmniejszym elementem zbioru A . Dla wygody oznaczmy

$$m_0x = l_1 \in \mathbb{N}, \quad m_0x^2 = l_2 \in \mathbb{N}, \quad \dots, \quad m_0x^{s_0-1} = l_{s_0-1} \in \mathbb{N}.$$

Ponieważ s_0 to najmniejszy element zbioru B , więc

$$0 < \varepsilon := x^{s_0-1} - [x^{s_0-1}] < 1$$

(liczba x^{s_0-1} nie jest naturalna, gdyż wtedy $s_0 - 1$ należałoby do B). Polóżmy $m_1 = \varepsilon m_0$. Wtedy $0 < m_1 < m_0$. Ponadto,

$$0 < m_1 = m_0\varepsilon = m_0x^{s_0-1} - m_0[x^{s_0-1}] = l_{s_0-1} - m_0[x^{s_0-1}] \in \mathbb{Z},$$

więc m_1 jest liczbą naturalną. Wreszcie, nietrudno sprawdzić, że

$$m_1x \in \mathbb{N}, \quad m_1x^2 \in \mathbb{N}, \quad \dots, \quad m_1x^{s_0-1} \in \mathbb{N}.$$

Istotnie, niech j będzie dowolną z liczb $1, 2, \dots, s_0 - 1$. Wtedy

$$\begin{aligned} m_1x^j &= m_0\varepsilon x^j &= m_0x^{j-1}x^{s_0} - m_0x^j[x^{s_0-1}] \\ &\stackrel{(1.6)}{=} m_0x^{j-1}n_0 - l_j[x^{s_0-1}] \\ &= \begin{cases} m_0n_0 - l_1[x^{s_0-1}] & \text{gdy } j = 1, \\ l_{j-1}n_0 - l_j[x^{s_0-1}] & \text{gdy } j > 1, \end{cases} \end{aligned}$$

a więc m_1x^j jest liczbą całkowitą. Do tego oczywiście $m_1x^j > 0$, więc m_1x^j jest liczbą naturalną. Zatem, z definicji zbioru A i dowolności j , liczba $m_1 \in A$.

Otrzymaliśmy więc

$$m_0 = \inf A > m_1 \in A.$$

Jest to sprzeczność, która kończy dowód. \square

Funkcja pierwiastek \sqrt{x} .

Z podanych materiałów wynika, w szczególności, **istnienie pierwiastka** z każdej liczby rzeczywistej nieujemnej. **Jak go jednak obliczyć na komputerze?**

Metoda Newtona-Raphsona (bazująca na geometrii - pierwiastek jako pole kwadratu o boku x , rozpoczynamy od prostokąta i zmniejszamy różnicę pomiędzy długościami boków korzystając ze średniej arytmetycznej) $a > 0$:

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{a}{x_n} \right), \quad x_1 = \frac{a}{2}.$$

Sprawdzić, że ten ciąg jest zbieżny do \sqrt{a} - lub znaleźć kres dolny zbioru takich liczb...

Jak widać: osiąganie kresu zbioru i tak najprościej wykonać na komputerze za pomocą **ciągów** i dlatego sporo informacji o nich podamy na kolejnym wykładzie!

Systemy pozycyjne.

Wszyscy wiedzą, że komputer nie korzysta z zapisów liczb w systemie dziesiętnym.

Prezentacja: [konwersja w programie “Mathematica”](#).

Prezentacja nie rozstrzyga wszystkiego. To pytanie: w zapisie dziesiętnym liczby wymierne mają rozwinięcia skończone lub nieskończone okresowe. A jak jest w zapisie dwójkowym takich liczb? Np. $(\frac{1}{3})_2$?

(wskazówka do poszukiwań: “ błędы reprezentacji”)

Tutaj: [pewna wskazówka \(ale nie dowód\)… w formacie CDF...](#)

Kresy - definicje.

Por. [strona 106](#). Niech $A \subseteq \mathbb{R}$ będzie niepusty.

Ograniczeniem górnym zbioru A nazywamy liczbę $s \in \mathbb{R}$ spełniającą: $s \geq a$ dla wszystkich elementów $a \in A$.

Analogicznie ograniczeniem dolnym zbioru nazywamy liczbę niewiększą od wszystkich liczb tego zbioru.

Kresem górnym zbioru A nazywamy najmniejsze z górnych ograniczeń tego zbioru, tj. liczbę $s \in \mathbb{R}$ spełniającą:

- (1) s jest ograniczeniem górnym zbioru A ;
- (2) jeśli $s' \in \mathbb{R}$ jest ograniczeniem górnym zbioru A , to $s \leq s'$.

Analogicznie **kresem dolnym** zbioru nazywamy największe ograniczenie dolne tego zbioru.

Kres górny zbioru A oznaczamy $\sup(A)$, kres dolny $\inf(A)$.

Kresy.

Aksjomat kresu dolnego: każdy niepusty i ograniczony z dołu podzbiór zbioru liczb rzeczywistych ma kres dolny.

Kresy zbiorów: np. obliczanie \sqrt{x} (bazujące na nierówności pomiędzy średnimi): niech $a_0 = 1$, $b_0 = x > 0$. Definiujemy

$$a_{n+1} = \frac{2a_n \cdot b_n}{a_n + b_n},$$

$$b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}.$$

Sprawdzić, że $\sqrt{x} = \sup_{n \in \mathbb{N}} \{a_n\} = \inf_{n \in \mathbb{N}} \{b_n\}$.

Literatura dodatkowa.

Podoba mi się też skrypt prof. Paluszyńskiego (UWr) **te części materiału, które są zgodne z naszym programem** można poczytać (raczej na ćwiczenia).

Przykładowe zagadnienia na egzamin - po tym wykładzie...

- ▶ Zasada Archimedesa (aksjomat \mathbb{R}) i jej znaczenie dla arytmetyki komputerowej (najlepiej 3 podane na wykładzie zastosowania, uzasadnić: **np.** gęstość \mathbb{Q} w \mathbb{R} ; $1/n < \varepsilon$; czy funkcja “entier”).
- ▶ Liczby wymierne w zapisie binarnym mogą mieć rozwinięcia okresowe (np. $a = 0,1$). Ich reprezentacja *double* lub *float* w arytmetyce komputerowej może więc być obarczona błędem i warto unikać obliczeń za pomocą takich liczb. Zbiór liczb wymiernych jest gęsty w zbiorze liczb rzeczywistych \mathbb{R} : a czy zbiór liczb wymiernych o skończonym rozwinięciu binarnym \mathcal{B} również jest gęsty w \mathbb{R} ? Rozważ **ciągi** liczb z \mathcal{B} i ich granice (punkty skupienia zbioru \mathcal{B}).
- ▶ Podaj przykłady aksjomatów liczb rzeczywistych, które nie są spełnione w arytmetyce komputerowej (różnej precyzji).
- ▶ Problem istnienia pierwiastka z liczby nieujemnej (twierdzenie). Kiedy \sqrt{x} może być liczbą wymierną?

Analiza matematyczna dla informatyków.

Mieczysław Cichoń, ver. 2.2/2021

Mieczysław Cichoń - WMI UAM

Funkcje.

Fakt, że badanie funkcji jest niezbędne informatykom nie podlega chyba (??) dyskusji.

Proste **zastosowania**:

- ▶ twierdzenie o złożeniu funkcji obliczalnych (teoria obliczalności),
- ▶ funkcje tworzące i ich własności przy badaniach rekurencji,
- ▶ interpolacja trygonometryczna (funkcje okresowe),
- ▶ problemy złożoności obliczeniowej (np. funkcje logarytmiczne i wielomianowe),
- ▶ w metodach numerycznych własność Darboux przy badaniu istnienia rozwiązań równań nieliniowych (powiemy przy okazji metody bisekcji),
- ▶ grafika komputerowa, wizualizacja, analiza obrazów (funkcje trygonometryczne, pochodne) itd.

Jedną z klas funkcji są **ciągi** - czyli funkcje określone na zbiorze \mathbb{N} . Do funkcji, ich klas i własności wróćmy...

Strony do lektury na wykłady 2, 3, 4...

Motywacje. Ciągi liczbowe: granice właściwe i niewłaściwe.

Zbieżność i bezwzględna zbieżność. Ciągi monotoniczne. Podciągi, punkty skupienia i tw. Bolzano-Weierstrassa. Warunek Cauchy'ego i zupełność. Pozostałe informacje o zbieżności ciągów. Liczba e. Ciągi zadane rekurencyjnie w informatyce.

Czytamy najpierw:

[K] : motywacje - strony 17-22

i dalej

[K] : strony 135-149

[W] : strony 17-25

(lub alternatywnie: z tego wykładu strony 24-35).

Aby policzyć granicę ciągu $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ w programie Mathematica należy użyć instrukcji

```
Limit[a[n], n -> Infinity, Assumptions -> Element[n, Integers]]
```

Na przykład pisząc

```
Limit[Sqrt[(1 + n)/(1 + 3 n)], n -> Infinity, Assumptions -> Element[n, Integers]]
```

otrzymujemy $\frac{1}{\sqrt{3}}$. Często ten sam wynik otrzymamy używając krótszej instrukcji

```
Limit[a[n], n -> Infinity]
```

która służy do liczenia granicy funkcji. Granica funkcji jest szerszym pojęciem, ale w przypadku argumentu zmierzającego do nieskończoności często daje ten sam wynik. Jednak nie jest to dokładnie to samo, bo na przykład w przypadku ciągu

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \cos 2\pi n = 1,$$

gdyż jest to ciąg stale równy jeden, ale granica funkcji

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \cos 2\pi x$$

nie istnieje. Mathematica dla instrukcji

```
Limit[Cos[2 Pi n], n -> Infinity, Assumptions -> Element[n, Integers]]
```

zwraca liczbę 1, natomiast instrukcja

```
Limit[Cos[2 Pi n], n -> Infinity]
```

zwraca

```
Interval[{-1, 1}]
```

co oznacza, że granica nie istnieje, a zbiór punktów granicznych, czyli granic wszystkich możliwych podciągów, to przedział $[-1, 1]$. Pojęciem zbioru punktów granicznych zajmiemy się w rozdziale 10.

Objaśnienia do slajdu - na wykładzie...

Strony do lektury na wykłady 2,3,4... - cd.

wreszcie uważnie:

[W] : strony 26-27

oraz

[W] : strony 27-31

Uwagi.

Do powtórzenia na ćwiczeniach: funkcje i ich własności,
elementy logiki - dowody nie wprost.

Na kolejnych slajdach - pewne (niepełne streszczenie: nie
zastąpi podanych materiałów!!

Ciągi.

Niech X będzie dowolnym zbiorem oraz niech \mathbb{N} będzie zbiorem liczb naturalnych. Będziemy rozważali odwzorowania określone wzorem

$$\mathbb{N} \ni n \longrightarrow a_n \in X ,$$

które nazywamy **ciągami**. Liczbę n nazywamy wskaźnikiem lub indeksem, natomiast element a_n zbioru X nazywamy wyrazem ogólnym ciągu. Ciągi będziemy oznaczali symbolem $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ lub $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ lub krótko (a_n) .

Na wykładzie omówimy **dłaczego** ciągi są niezbędne w informatyce, ale też **dłaczego** to informatyk musi się o nich czegoś nauczyć - gdyż komputer operuje na zbiorach skończonych...

W informatyce...

To absolutnie podstawowe pojęcie, służy **m.in.** - o czym wiemy - do przybliżania wartości rzeczywistych (**patrz [K] strony 17-22**).

Na każdym kolejnym wykładzie problemy będą (na ogół) formułowane za pomocą ciągów.

Uwaga: często będą to definicje rekurencyjne...

Informatyk musi jednak tak planować wykorzystanie algorytmów bazujących na ciągach, aby - mimo ograniczeń arytmetyki komputerowej - uzyskać poprawne wyniki... Szczegóły - wkrótce. Ale to oznacza, że musi też (czasami) umieć obliczyć wynik analitycznie...

Liczba π .

1.2.5 Liczba π

Wśród ważnych problemów rozważanych już w starożytności było wyznaczanie obwodu i pola koła o zadanym promieniu. Kluczowy w tych obliczeniach jest obwód koła o średnicy jeden, zwyczajowo oznaczany grecką literą π . Koło o innej średnicy ma proporcjonalnie większy bądź mniejszy obwód, w szczególności koło o promieniu r , a więc średnicy $2r$ ma obwód $2\pi r$.

Liczba π , podobnie jak $\sqrt{2}$, jest liczbą niewymierną, ale o tym starożytni nie wiedzieli. Udowodniono to dopiero w XVIII w. Co więcej, w wieku XIX udowodniono, że π jest liczbą transcendentną, to znaczy, że nie jest pierwiastkiem żadnego wielomianu o współczynnikach wymiernych. Oznacza to w szczególności, że nawet jeśli zbiór ulamek rozszerzymy o wszystkie możliwe pierwiastki, to nadal nie wystarczy on do mierzenia wszelkich długości.

W starożytności przyjmowano różne liczby pomiędzy 3 i 3.16 jako przybliżenie liczby π bez przywiązywania szczególnej wagi do popełnianego błędu. Dopiero grecki matematyk Archimedes (rys. 1.6) zaproponował algorytmiczną metodę wyznaczania π , która przez ponad 1000 lat dostarczała coraz lepszych przybliżeń. Jest to metoda geometryczna, oparta o wpisywanie w okrąg i opisywanie na okręgu wielokątów (rys. 1.7). Posługując się 96-kątem Archimedes oszacował, że $223/71 < \pi < 22/7$ ($3.1408 < \pi < 3.1429$), co daje dobre przybliżenie π do dwóch miejsc po przecinku. Co ciekawe, w 1596 roku, ciągle w oparciu o metodę Archimedesa, holenderski matematyk Ludolph van Ceulen policzył π z dokładnością do 35 cyfr.

Oznaczmy przez a_n bok 2^n -kąta foremnego wpisanego w okrąg o średnicy jeden. W oparciu o twierdzenie Pitagorasa można pokazać, że

$$a_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad a_{n+1} = \frac{1}{2} \sqrt{2 - \sqrt{4 - 4a_n^2}}. \quad (1.2)$$

Zatem obwód tego 2^n -kąta wynosi $A_n := 2^n a_n$.

Można się spodziewać, że ciąg A_n powinien zmierać do liczby π , bo tyle wynosi obwód koła o średnicy jeden. W rozdziale 8.8.1 przyjrzymy się bliżej zachowaniu ciągu (1.2).

Zwracam uwagę na rekurencję!

Ciąg (a_n) nazywamy **ograniczonym**, gdy

$$\exists_{M>0} \quad \forall_{n \in \mathbb{N}} \quad |a_n| \leq M .$$

W przypadku gdy $\exists_{M_1} \quad \forall_{n \in \mathbb{N}} \quad a_n \leq M_1$ ciąg (a_n) nazywamy ograniczonym z góry, natomiast w przypadku gdy $\exists_{M_2} \quad \forall_{n \in \mathbb{N}} \quad M_2 \leq a_n$ ciąg (a_n) nazywamy ograniczonym z dołu. Ciąg (a_n) nazywamy **monotonicznym** jeżeli spełnia jeden z następujących warunków:

$\forall_{n \in \mathbb{N}} \quad a_n < a_{n+1} ,$ jest to ciąg rosnący ,

$\forall_{n \in \mathbb{N}} \quad a_n > a_{n+1} ,$ jest to ciąg malejący ,

$\forall_{n \in \mathbb{N}} \quad a_n \leq a_{n+1} ,$ jest to ciąg niemalejący ,

$\forall_{n \in \mathbb{N}} \quad a_n \geq a_{n+1} ,$ jest to ciąg nierosnący .

O ciągach spełniających warunki (a) lub (b) mówimy, że są ścisłe monotoniczne. Warto zauważyć, że zakresy pojęć ciągów monotonicznych oraz ograniczonych przecinają się, tzn. istnieją ciągi które są ograniczone, ciągi które są monotoniczne oraz takie ciągi, które są równocześnie ograniczone i monotoniczne.

Ciągi zbieżne.

Mówimy, że ciąg (a_n) ma granicę równą g , albo że dąży do granicy g , jeżeli w każdym otoczeniu liczby g leżą prawie wszystkie wyrazy ciągu. Będziemy to zapisywali jednym z dwóch możliwych sposobów, pisząc

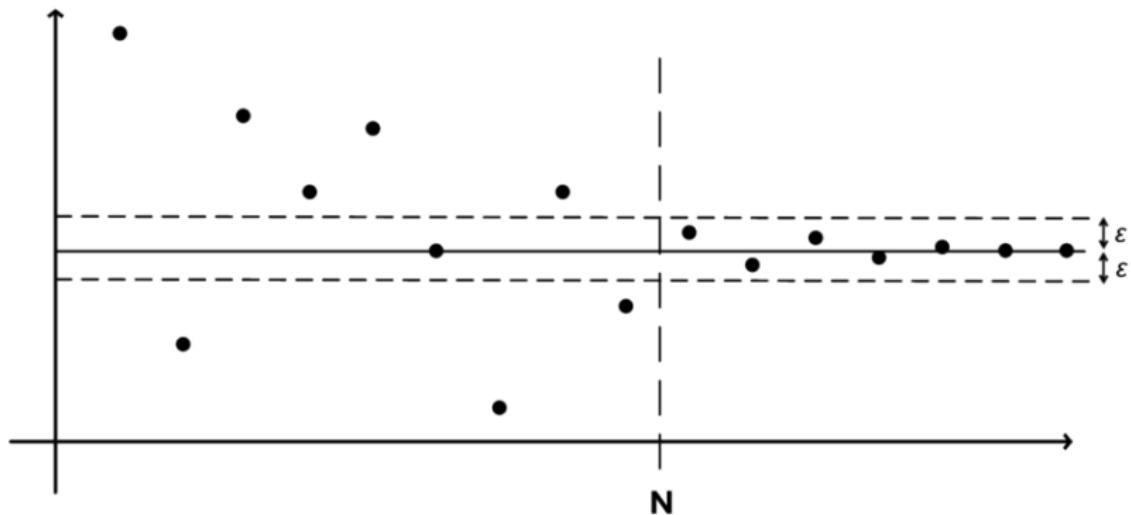
$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = g \quad \text{lub} \quad a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} g .$$

Przypomnijmy, że otoczenie liczby g to przedział otwarty o długości 2ε i środka w punkcie g , tzn. $(g - \varepsilon, g + \varepsilon)$. To, że prawie wszystkie wyrazy ciągu spełniają pewien warunek oznacza, że tylko skończona ilość wyrazów ciągu nie spełnia tego warunku.

Podaną powyżej definicję granicy ciągu (a_n) można wypowiedzieć w postaci równoważnej

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N = N(\varepsilon) \quad \forall n > N \quad |a_n - g| < \varepsilon .$$

Ilustracja graficzna granicy ciągu.



Uwaga: proszę porównać z "granicą pozorną", z którą możemy mieć do czynienia podczas obliczeń komputerowych strony 139-141

A co jeśli nie mamy potencjalnej granicy?

Twierdzenie 2.37 (warunek Cauchy'ego). Ciąg $(a_n) \subset \mathbb{R}$ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy spełnia następujący warunek Cauchy'ego:

(C) Dla każdej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ takie, że dla wszystkich $m, k > n_\varepsilon$ zachodzi nierówność $|a_m - a_k| < \varepsilon$.

Dowód. Część I. (\Rightarrow) Niech $g = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$, to istnieje $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ takie, że $|a_n - g| < \varepsilon/2$ dla wszystkich $n > n_\varepsilon$. Weźmy teraz dwie liczby $m, k > n_\varepsilon$. Wówczas

$$|a_m - a_k| = |(a_m - g) + (g - a_k)| \leq |a_m - g| + |a_k - g| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Zatem ciąg (a_n) spełnia warunek (C) – właśnie pokazaliśmy, jak dobrać n_ε do liczby $\varepsilon > 0$.

Część II. (\Leftarrow) Łatwo sprawdzić, że każdy ciąg spełniający (C) jest ograniczony: stosujemy warunek Cauchy'ego dla $\varepsilon = 1$ i widzimy, że dostatecznie duże wyrazy różnią się o mniej niż 1, a więc muszą zawierać się w pewnym przedziale, np. przedziale $(a_{n_1+1} - 1, a_{n_1+1} + 1)$; skończony zbiór wyrazów a_1, \dots, a_{n_1} też jest ograniczony.

Stosujemy zatem twierdzenie Bolzano–Weierstrassa i wybieramy z (a_n) podciąg $a_{n_k} \rightarrow g \in \mathbb{R}$ dla $k \rightarrow \infty$. Pokażemy, że g jest granicą całego ciągu (a_n) . Niech $\varepsilon > 0$. Istnieje takie $l_1 \in \mathbb{N}$, że

$$|a_{n_k} - g| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{dla } n_k > l_1,$$

a ponadto istnieje takie $l_2 \in \mathbb{N}$, że $|a_m - a_k| < \varepsilon/2$ dla $m, k > l_2$. Niech $l_3 = \max(l_1, l_2)$. Ustalając jakikolwiek numer $n_k > l_3 \geq l_1$ i biorąc dowolne $m > l_3 \geq l_2$, możemy oszacować

$$|a_m - g| = |a_m - a_{n_k} + a_{n_k} - g| \leq |a_m - a_{n_k}| + |a_{n_k} - g| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

To kończy dowód twierdzenia. \square

Warunek stopu.

Dla informatyków bardzo ważne jest Stwierdzenie 2.38, które czytamy na stronie:

[W] : [strona 32](#)

i na kolejnym slajdzie...

Dlaczego jest istotne? Proszę zauważyc, że pozwala ono sprawdzić zbieżność ciągu (x_n) za pomocą badania różnic pomiędzy **kolejnymi** wyrazami! To jest warunek do funkcji "stopu" algorytmów rekurencyjnych!

Stwierdzenie 2.38 (kryterium spełniania warunku Cauchy'ego). *Załóżmy, że a_1, a_2, \dots są dodatnie, a ponadto istnieje taka stała $C \in \mathbb{R}$, że*

$$s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n \leq C \quad \text{dla wszystkich } n \in \mathbb{N}.$$

Jeśli ciąg $(x_n) \subset \mathbb{R}$ spełnia warunek

$$|x_{n+1} - x_n| \leq a_n \quad \text{dla dostatecznie dużych } n \in \mathbb{N},$$

to (x_n) spełnia warunek Cauchy'ego.

Dowód. Ciąg $s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ jest rosnący (bo a_j są dodatnie) i ograniczony z góry przez C . Zatem (s_n) jest zbieżny i spełnia warunek Cauchy'ego.

Niech $m > k$ będą dostatecznie duże. Piszemy, korzystając z nierówności trójkąta, założeń i monotoniczności ciągu s_n ,

$$\begin{aligned} |x_m - x_k| &\leq |x_m - x_{m-1}| + |x_{m-1} - x_{m-2}| + \dots + |x_{k+1} - x_k| \\ &\leq a_{m-1} + a_{m-2} + \dots + a_k \\ &= s_{m-1} - s_{k-1} = |s_{m-1} - s_{k-1}|. \end{aligned}$$

Niech $\varepsilon > 0$. Dla wszystkich dostatecznie dużych m, k mamy $|x_m - x_k| \leq |s_{m-1} - s_{k-1}| < \varepsilon$, gdyż (s_n) spełnia warunek Cauchy'ego. Zatem (x_n) też spełnia warunek Cauchy'ego. \square

Jak widać - nie wystarczy badać (np. w pętli "while ... do...") różnicy pomiędzy kolejno obliczonymi wyrazami ciągu!

Granice a komputer...

Pomimo, że ciągi i ich granice to znakomite narzędzie podczas obliczeń za pomocą komputera, to jednak **nie można** symulować ich zbieżności w programach za pomocą obliczeń pierwszych N (choćby nawet 10^{100}) wyrazów - to nic nie daje.

Proszę przeczytać: [K] strony 139-141 (granice pozorne).

Granica pozorna I.

8.8.2 Granice pozorne

W poprzednim podrozdziale zaobserwowaliśmy, że wyciąganie wniosków na temat granicy ciągu z samego numerycznego eksperymentu może być niebezpieczne. Okazuje się, że ciąg może robić wrażenie zbieżnego, a mimo wszystko zbieżnym nie być. Rozważmy ciąg dany wzorem rekurencyjnym

$$x_0 = 136.462554878752 \quad (8.11)$$

$$x_1 = 5.39650717129623 \quad (8.12)$$

$$x_n = 0.3x_0 + 1 - 1.4x_1^2 \quad (8.13)$$

Program w języku Mathematica wyznaczający wyrazy tego ciągu przedstawiony jest na listingu 8.6. Wersja w C++ jest na listingu 8.7.

Przejrzenie pierwszych 15-tu wyrazów tego ciągu może robić wrażenie, że ciąg ten jest zbieżny do granicy wynoszącej około 0.63135. Przejrzenie 50-ciu wyrazów zaciera to pierwsze wrażenie. Jednakże, po doświadczeniach z ciągiem przybliżającym π możemy być skłonni podejrzewać, że przyczyną niestabilnego zachowania dalszych wyrazów tego ciągu znów jest skończona arytmetyka komputera. Okazuje się jednak, że obserwowana numerycznie zbieżność tego ciągu jest pozorna. Wykres pierwszych 100 wyrazów tego ciągu przedstawiono na rys. 8.8. Przykłady tego typu zaobserwowane zostały przez matematyków po raz pierwszy dopiero w XX wieku. Rozważany przez nas przykład wywodzi się z tzw. odwzorowania Hénona.

Uwaga: na powyższym listingu powinno być:

$$x_n = 0,3 \cdot x_{n-2} + 1 - 1,4 \cdot x_{n-1}^2$$

dla $n \geq 2$.

Granica pozorna II.

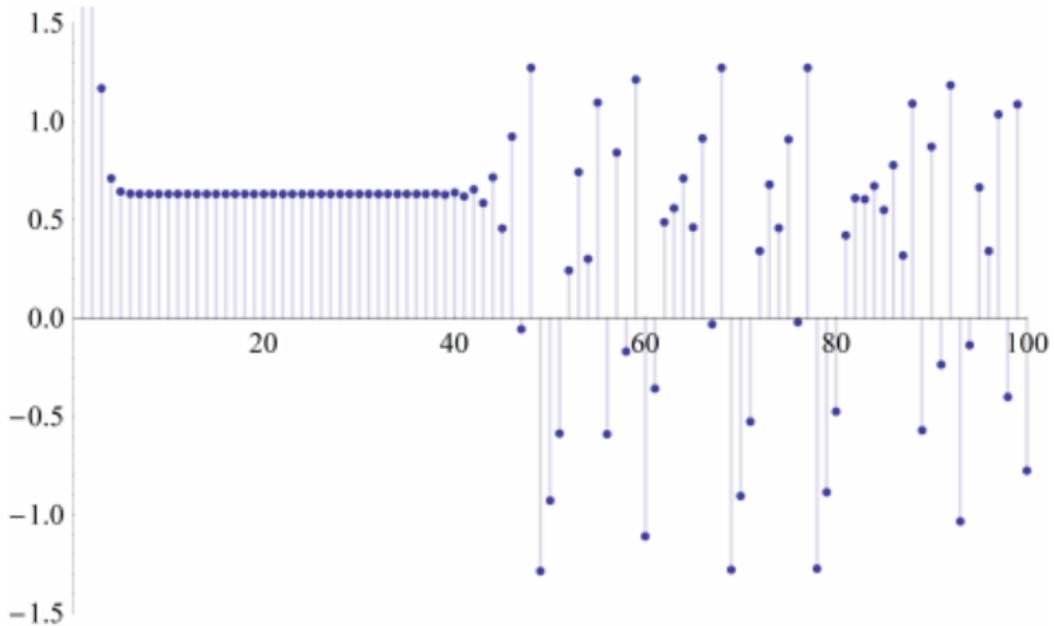
```
***** Henon.cpp ****
/* Przykład z zadanym rekurencyjnie ciągiem, pozorne zbieżnym. */
*****
#include <iostream>
#include <iomanip>
using namespace std;

int main(){
    cout << setprecision(15);
    /* Dla większej czytelności wyników narzucamy stalopozytyjny,
       wyrównywany w prawo zapis liczb */
    cout << fixed << right;

    /* Pomożnicze parametry a i b */
    double a=1.4,b=0.3;
    /* Dwa początkowe wyrazy ciągu */
    double x0=136.462554878752;
    double x1=5.39650717129623;
    /* Ilość wyrazów ciągu do policzenia */
    int nmax=15;
    /* Inna forma pętli. Instrukcje w bloku {...} wykonujemy dla wartości n
       od jeden do nmax zwiększając n za każdym razem o jeden */
    for(int n=1;n<=nmax;n=n+1){
        /* Kolejny wyraz ciągu wyliczamy w oparciu o dwa poprzednie */
        double x2=b*x0+a*x1*x1;
        /* Wyprowadzamy wyniki na standardowe wyjście. setw(p) ustala ilość pól
           dla wyprowadzanej kolejnej zmiennej. Pozwala to na lepsze
           formatowanie wypisywanych danych */
        cout << "x[" << setw(2) << n << "] = ";
        cout << setw(20) << x0 << endl;
        /* Nowe wartości dwóch porzednich wyrazów ciągu */
        x0=x1;
        x1=x2;
    }
}
```

Listing 8.7: Przykład ciągu pozorne zbieżnego w C++.

Granica pozorna III.



Ilustracja granicy ciągu.

Prezentacja CDF: [granica ciągu...](#)

albo

wybrany skrypt ilustracyjny granic ciągów w "Mathematica" -
potrzebny darmowy *CDF Player* lub *Mathematica*

Podstawowe własności ciągów zbieżnych.

Ciąg posiadający granicę nazywamy **zbieżnym** do tej granicy, ciąg który nie posiada granicy nazywamy **rozbieżnym**.

Twierdzenie. *Ciąg (a_n) ma granicę g wtedy i tylko wtedy, gdy ciąg $(a_n - g)$ ma granicę równą zeru.*

Twierdzenie. *Granica ciągu określona jest w sposób jednoznaczny.*

Twierdzenie. *Ciąg zbieżny jest ograniczony.*

Kilka przykładów granic ciągów [w skrypcie CDF](#).

Dla informatyków...

Uwaga: proszę przeczytać uwagi o warunku Cauchy'ego ([W] str 31 - patrz niżej), a zwłaszcza uwagi na dole strony! One odnoszą się idealnie do obliczeń komputerowych (komputer "nie wie" co ma być granicą ciągu, ale może sprawdzić jego zbieżność - można to jednak usprawnić...).

Warunek Cauchy'ego odgrywa ważną rolę z kilku powodów. Po pierwsze, pozwala stwierdzić zbieżność ciągu bez wskazywania konkretnej granicy, a także pozwala stwierdzić, że jakiś ciąg jest rozbieżny. Proszę zauważyc, że wcześniej, sprawdzając rozbieżność ciągu $a_n = (-1)^n$, sprawdziliśmy tak naprawdę, że warunek Cauchy'ego nie zachodzi dla $\varepsilon = 1$. Po drugie, można posłużyć się warunkiem Cauchy'ego, żeby skonstruować liczby rzeczywiste, mając do dyspozycji liczby wymierne; jest to konstrukcja na tyle ogólna, że używa się jej w wielu działach matematyki – do tej sprawy wróćmy jeszcze przy innej okazji.

Na ćwiczeniach.

Granice pewnych “klasycznych” ciągów będą obliczane [na ćwiczeniach](#).

Po co? po pierwsze, aby można korzystać od razu ze znajomości tych granic do wyznaczania innych (później np. własności arytmetyczne granic czy twierdzenie o 3 ciągach). Obliczanie wszystkich granic z definicji to zdecydowanie zły pomysł, a i wykorzystanie komputera jest łatwiejsze w oparciu o własności ciągów zbieżnych, niż o definicję...

patrz: [K] str. 145 czy [W] str. 18-19

Te granice powinniśmy znać...

8.9.1 Granice kilku ważnych ciągów

Twierdzenie 8.9.1

$$p \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[p]{p} = 1 \quad (8.14)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1 \quad (8.15)$$

$$\alpha \in \mathbb{Q}, a > 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^\alpha}{a^n} = 0 \quad (8.16)$$

$$p \in \mathbb{R} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} p^n = \begin{cases} 1 & p = 1 \\ 0 & p \in (-1, 1) \\ \text{nie istn. w } \mathbb{R} & p \leq -1 \text{ lub } p > 1. \end{cases} \quad (8.17)$$

Podciągi.

Niech (a_n) będzie dowolnym ciągiem oraz niech n_1, n_2, n_3, \dots będzie pewnym ciągiem rosnącym liczb naturalnych.

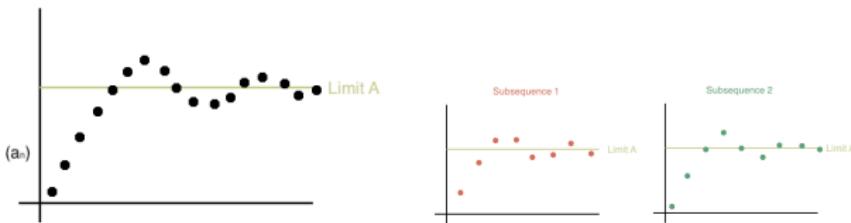
Wówczas ciąg (a_{n_k}) , tzn. ciąg o wyrazach

$$a_{n_1}, a_{n_2}, \dots, a_{n_k}, \dots$$

nazywamy podciągiem lub ciągiem częściowym ciągu (a_n) .

Twierdzenie. *Każdy podciąg ciągu zbieżnego jest zbieżny do tej samej granicy.*

To istotne - jeżeli wiemy, że ciąg jest zbieżny, to możemy (na komputerze) zbadać jego podciągi...



Własności arytmetyczne granic.

Twierdzenie. Jeżeli g_1 oraz g_2 są odpowiednio granicami ciągów (a_n) i (b_n) oraz jeśli $*$ oznacza jedno z działań algebraicznych (tzn. $+, -, \cdot$), to istnieje granica ciągu $(a_n * b_n)$ i prawdziwy jest wzór

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n * b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n * \lim_{n \rightarrow \infty} b_n .$$

Twierdzenie. Jeżeli $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = g$, to $\lim_{n \rightarrow \infty} (\lambda a_n) = \lambda g$, gdzie λ oznacza dowolną liczbę rzeczywistą.

Twierdzenie. Jeżeli $b_n \neq 0$ dla $n \in \mathbb{N}$ oraz $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = g \neq 0$, to $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{g}$.

Skrypt CDF ilustracyjny [granica sumy ciągów](#).

Twierdzenie o 3 ciągach.

Twierdzenie. Jeżeli ciągi (b_n) oraz (c_n) są zbieżne do tej samej granicy g i jeśli (a_n) jest ciągiem , którego prawie wszystkie wyrazy spełniają nierówność podwójną

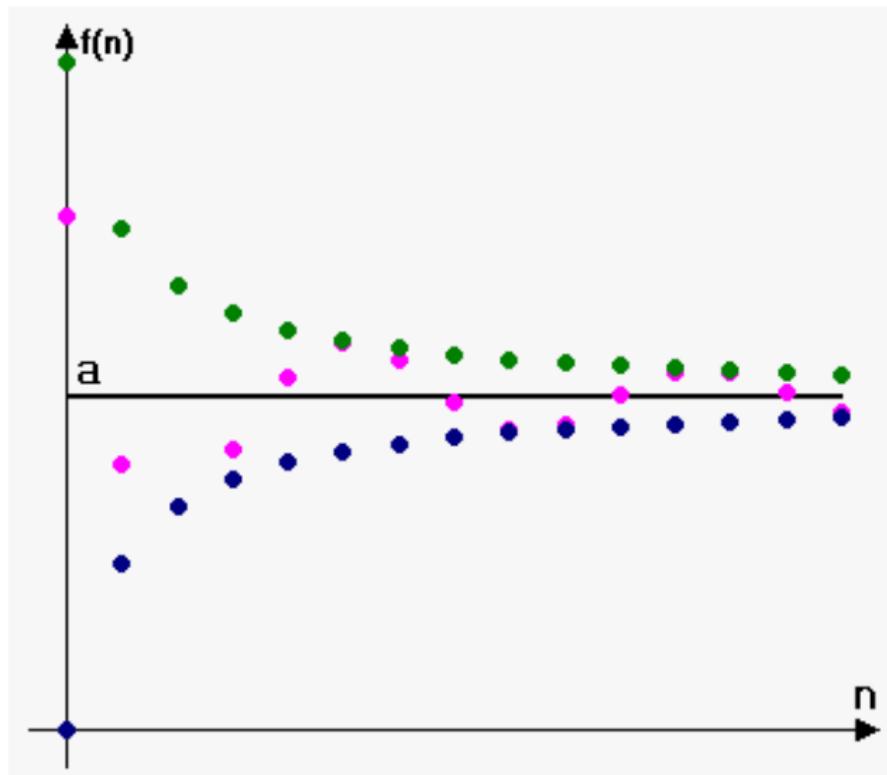
$$b_n \leq a_n \leq c_n ,$$

to także ciąg (a_n) jest zbieżny, a jego granica jest równa g .

BĘDZIE
TO
TWIERDZENIE,
KTÓRE PODAMY
BEZ
DOWODU!



Ilustracja graficzna twierdzenia o 3 ciągach.



Przykład zastosowania twierdzenia o 3 ciągach.

Przykład 2.15. Niech $x \in (0, 1)$. Obliczymy granicę ciągu $c_n = \sqrt[n]{x}$. Założymy najpierw, że $x \geq 1$. Wtedy dla wszystkich $n > n_1 = [x] + 1 > x$ zachodzą nierówności

$$1 \leq c_n = \sqrt[n]{x} < \sqrt[n]{n}.$$

Wiemy już jednak, że $b_n = \sqrt[n]{n} \rightarrow 1$ dla $n \rightarrow \infty$, a ciąg stały $a_n \equiv 1$ też ma granicę 1. Zatem, z twierdzenia o trzech ciągach wynika, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x} = 1. \tag{2.8}$$

Jeśli $x \in (0, 1)$, to $\sqrt[n]{x} = 1/\sqrt[n]{y}$ dla $y = 1/x > 1$, a więc wzór (2.8) także zachodzi. \square

Ilustracja graficzna twierdzenia o 3 ciągach - cd.

Przykład 2.17. Wykażemy, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{3^n + 4^n} = 4. \quad (2.9)$$

Wskażemy w tym celu odpowiednie oszacowania $\sqrt[n]{3^n + 4^n}$ z góry i z dołu. Ponieważ $0 < 3^n < 4^n$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$, więc

$$4 = \sqrt[n]{4^n} < \sqrt[n]{3^n + 4^n} < \sqrt[n]{2 \cdot 4^n} = 4 \sqrt[n]{2}.$$

Jednak $4 \sqrt[n]{2} \rightarrow 1$, gdy $n \rightarrow \infty$; to wynika z udowodnionego wcześniej wzoru (2.8). Oszacowaliśmy więc $\sqrt[n]{3^n + 4^n}$ z góry i z dołu przez wyrazy ciągów zbieżnych do liczby 4; można zastosować twierdzenie o trzech ciągach i stwierdzić, że wzór (2.9) rzeczywiście zachodzi.
□

W istocie, prawdziwy jest wzór nieco ogólniejszy od (2.9).

Przykład 2.18. Jeśli k jest liczbą naturalną i $0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_k$, to

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_1^n + x_2^n + \dots + x_k^n} = x_k. \quad (2.10)$$

Istotnie, możemy wypisać oczywiste nierówności

$$x_k = \sqrt[n]{x_k^n} \leq \sqrt[n]{x_1^n + x_2^n + \dots + x_k^n} \leq \sqrt[n]{k \cdot x_k^n} = x_k \sqrt[n]{k}.$$

Wiemy już jednak, że $\sqrt[n]{k} \rightarrow 1$, zatem, podobnie jak w poprzednim przykładzie, wzór (2.10) wynika z twierdzenia o trzech ciągach. □

Twierdzenie - na ćwiczenia.

(reguła Stolza) Jeżeli ciąg (b_n) jest rosnący i nieograniczony z góry dla prawie wszystkich wskaźników n , a ciąg (c_n) gdzie $c_n = \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n}$ jest zbieżny, to ciąg $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ jest także zbieżny i zachodzi wzór

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n},$$

(ciąg (a_n) jest zupełnie dowolny).

Twierdzenie o średnich - na ćwiczenia.

Twierdzenie. Jeżeli ciąg (a_n) jest zbieżny, to zbieżny jest ciąg średnich arytmetycznych $\left(\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \right)$, a ponadto gdy wyrazy ciągu (a_n) są dodatnie to zbieżne są ciągi $(\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n})$, $(\sqrt[n]{a_n})$, $\left(\frac{a_{n+1}}{a_n} \right)$ oraz zachodzą wzory

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

Pojęcie **granicy niewłaściwej** lub nieskończonej ciągu stanowi rozszerzenie pojęcia granicy ciągu zbieżnego. Będziemy wśród ciągów rozbieżnych wyróżniali ciągi rozbieżne do ∞ oraz ciągi rozbieżne do $-\infty$, a symbole ∞ oraz $-\infty$ nazywamy **granicami niewłaściwymi**. Ciągi mogą też nie mieć żadnej z tych własności!

Ciąg (a_n) nazywamy ciągiem rozbieżnym do ∞ , co zapisujemy $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ lub $a_n \underset{n \rightarrow \infty}{\rightarrow} \infty$, gdy każdy przedział postaci (r, ∞) zawiera prawie wszystkie wyrazy ciągu. Możemy to zapisać

$$\forall r \in \mathbb{R} \quad \exists N \quad \forall_{n > N} \quad r < a_n .$$

Ciąg (a_n) nazywamy ciągiem rozbieżnym do $-\infty$, co zapisujemy $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$ lub $a_n \underset{n \rightarrow \infty}{\rightarrow} -\infty$, gdy każdy przedział postaci $(-\infty, s)$ zawiera prawie wszystkie wyrazy ciągu. Możemy to zapisać

$$\forall s \in \mathbb{R} \quad \exists N \quad \forall_{n > N} \quad a_n < s .$$

(1) Każdy podciąg ciągu rozbieżnego do ∞ (lub do $-\infty$) jest także rozbieżny do ∞ (lub do $-\infty$).

(2) Niech dany będzie ciąg (a_n) taki, że $a_n > 0$ dla każdego wskaźnika n . Mamy wówczas $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} = 0$.

(3) Niech dany będzie ciąg (a_n) taki, że $a_n < 0$ dla każdego wskaźnika n . Mamy wówczas $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} = 0$.

(4) Założmy, że dany jest ciąg (a_n) taki, że wszystkie jego wyrazy są różne od zera. Mamy warunek $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = \infty$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} = 0$.

(5) Jeżeli prawie wszystkie wyrazy ciągów (a_n) oraz (b_n) spełniają nierówności $a_n \leq b_n$, to jeśli $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$, to wówczas $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$, jeśli $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = -\infty$, to wówczas $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$.

(6) Jeżeli ciąg (a_n) jest ograniczony oraz ciąg (b_n) ma własność $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$ lub $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = -\infty$, to
 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$.

(7) Jeżeli $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \pm\infty$ oraz $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \pm\infty$, to
 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \pm\infty$ i ponadto $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = \infty$.

(8) Jeżeli $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = g$ oraz $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \pm\infty$, to
 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \pm\infty$.

(9) Jeżeli $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = g > 0$ oraz $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \pm\infty$, to
 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = \pm\infty$. Jeśli przyjmiemy umowę, że dla zbioru A nieograniczonego z góry, piszemy $\sup A = \infty$, a dla zbioru A nieograniczonego z dołu, piszemy $\inf A = -\infty$, to dla granic niewłaściwych możemy sformułować twierdzenie.

(10) Ciąg monotoniczny (a_n) ma zawsze granicę, przy czym dla ciągu niemalejącego zachodzi $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sup_n a_n$, dla ciągu nierosnącego zachodzi $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \inf_n a_n$.

Punkty skupienia ciągu.

Punktem skupienia ciągu (a_n) nazywamy taką liczbę σ , że w dowolnym jej otoczeniu znajduje się nieskończoność wiele wyrazów ciągu. Możemy to zapisać następująco

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall n > N \quad |a_n - \sigma| < \varepsilon .$$

Jest oczywiste, że jeżeli ciąg posiada tylko jeden punkt skupienia, to jest to ciąg zbieżny.

Największy z punktów skupienia ciągu (a_n) nazywamy granicą górną ciągu lub mówimy, że jest to limes superior ciągu i zapisujemy to

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n \quad \text{lub} \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n .$$

Najmniejszy z punktów skupienia ciągu (a_n) nazywamy granicą dolną ciągu lub mówimy, że jest to limes inferior ciągu i zapisujemy to

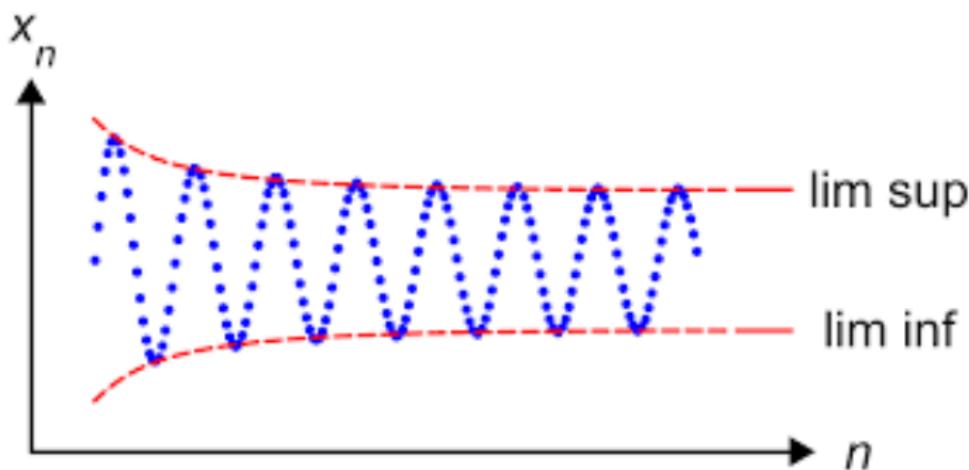
$$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n \quad \text{lub} \quad \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n .$$

Granica górska i dolna

Te pojęcia są zwłaszcza przydatne, gdy ciąg nie jest zbieżny,
Dla ciągu zbieżnego (a_n) mamy

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n.$$

W innym przypadku sytuację tłumaczy poniższy rysunek:



Twierdzenie. Jeżeli σ jest punktem skupienia ciągu (a_n) , to istnieje podciąg (a_{k_n}) ciągu (a_n) taki, że σ jest granicą tego podciągu.

Twierdzenie. Jeżeli pewien podciąg (a_{k_n}) danego ciągu (a_n) magranicę równą σ , to liczba σ jest punktem skupienia ciągu (a_n) .



Jednym z bardzo ważnych i mających różne zastosowania twierdzeń analizy matematycznej jest następujące twierdzenie.

Twierdzenie.
(Bolzano-Weierstrassa). Każdy ciąg liczbowy ograniczony posiada przynajmniej jeden punkt skupienia.

Ciągi monotoniczne i ograniczone.

Twierdzenie. *Ciąg monotoniczny i ograniczony jest zbieżny.*

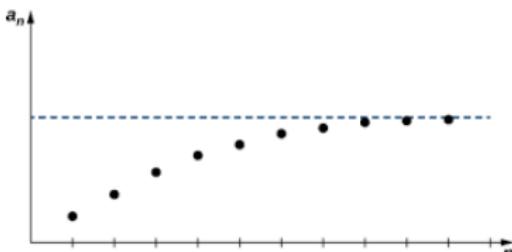
(a) Jeżeli ciąg (a_n) jest niemalejący i ograniczony z góry to jest zbieżny i wówczas

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sup_n a_n .$$

(b) Jeżeli ciąg (a_n) jest nierosnący i ograniczony z dołu to jest zbieżny i wówczas

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \inf_n a_n .$$

Te twierdzenie umożliwia (wraz z późniejszym tw. Bolzano-Weiertrassa) operowanie przez komputer na ciągach zamiast na dowolnych zbiorach...



Twierdzenie 8.9.2 Ciąg $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ jest rosnący i ograniczony, a więc ma skończoną granicę.

Dowód: Pokażemy najpierw, że ciąg ten jest rosnący. Podstawiając w nierówności Bernoullego (tw. 8.3.3) $-\frac{1}{n^2}$ za x i przekształcając uzyskaną nierówność otrzymujemy dla $n > 1$

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n &\geq 1 - \frac{1}{n} \\ \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &\geq 1 - \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

Z kolei dzieląc obustronnie przez $1 - \frac{1}{n}$, mnożąc przez $\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1}$ i przekształcając dostajemy

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n-1} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &\geq 1 \\ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &\geq \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1} \\ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &\geq \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1} \end{aligned}$$

do dowodzi, że rozważany ciąg jest rosnący.

Aby pokazać, że jest on ograniczony, najpierw zauważmy, że podstawiając 1 za b oraz $\frac{1}{2}$ za a we wzorze (7.6) otrzymujemy

$$1 - \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^{n-2}} + \dots + 1 \right). \quad (8.18)$$

Zatem podstawiając we wzorze (7.7) 1 za a oraz $\frac{1}{n}$ za b , przekształcając i na koniec wykorzystując (8.18) otrzymujemy

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &= 1 + \binom{n}{1} \frac{1}{n} + \binom{n}{2} \frac{1}{n^2} + \binom{n}{3} \frac{1}{n^3} + \dots + \binom{n}{n} \frac{1}{n^n} \\ &= 1 + \frac{n}{1} \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \frac{1}{n^3} + \dots + \frac{n(n-1) \cdots 1}{1 \cdot 2 \cdots n} \frac{1}{n^n} \\ &= 1 + 1 + \frac{1(1 - \frac{1}{n})}{1 \cdot 2} + \frac{1(1 - \frac{1}{n})(1 - \frac{2}{n})}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots + \frac{1(1 - \frac{1}{n}) \cdots (1 - \frac{n-1}{n})}{1 \cdot 2 \cdots n} \\ &< 1 + 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdots n} \\ &< 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} \\ &= 1 + 2 \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) < 1 + 2 = 3. \end{aligned}$$

Zatem na mocy twierdzenia 8.8.7 ciąg $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ jest zbieżny. □

Choć Bernoulli pierwszy zauważył, że ciąg o wyrazach $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ jest zbieżny, jego granicę nazywamy **liczbą Eulera** i oznaczamy literą e , bo to Leonard Euler (rys. 8.9), inny szwajcarski matematyk, pokazał jak ważna jest ona w matematyce. On pierwszy oznaczał ją literą e i tak pozostało do dziś.

Liczba e w przybliżeniu wynosi

$$e = 2.71828182845904523536\dots$$

Liczba e .

Liczba e nazywana jest także liczbą Nepera i definiowana jest jako granica ciągu nieskończonego $\left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right)$. Mamy więc

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Istnienie tej granicy wynika właśnie z faktu, że ten ciąg **JEST** monotoniczny i ograniczony (proszę sprawdzić na poprzednim slajdzie)!!

Informacje: np. [K] strony 146-150.

Skrypt ilustracyjny liczby e w “Mathematica” - potrzebny darmowy *CDF Player* lub *Mathematica*. Docenimy go w pełni dopiero po wprowadzeniu szeregów...

Można wykazać, że

(a) jeżeli $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$, to $\left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{a_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e,$

(b) jeżeli $b_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -\infty$, to $\left(1 + \frac{1}{b_n}\right)^{b_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e,$

(c) jeżeli $|c_n| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$, to $\left(1 + \frac{1}{c_n}\right)^{c_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e.$

I jeszcze taki skrypt z kilkoma ciągami o granicy e .

Liczbę e przyjmuje się jako podstawę tzw. logarytmów naturalnych oznaczanych symbolem \ln . Korzystając z definicji logarytmów możemy podać wzory na zamianę znanych ze szkoły średniej logarytmów dziesiętnych $\log_{10} b = \lg b$ z logarytmami naturalnymi $\log_e b = \ln b$. Mamy następujące wzory:

$$\lg b = \frac{\ln b}{\ln 10}, \quad \ln b = \frac{\lg b}{\lg e}.$$

```

***** CompoundInterest.cpp *****/
/* Obliczanie przybliżeń liczby e według idei procentu */
/* składanego (ang. compound interest) */
/***********************************************/

#include <iostream>
#include <cmath>
#include <iomanip>
using namespace std;

int main(){

    cout << fixed << right;
    cout << setprecision(15);

    // Policzmy 1000 wyrazów ciągu
    int nmax=1000;
    for(int n=1;n<=nmax;n=n+1){
        // Czynnik, który trzeba przemnożyć n razy przez siebie
        // Piszemy 1.0/n, a nie 1/n, bo w arytmetyce
        // całkowitoliczbowej 1/n daje zero.
        double x=1+1.0/n;
        // W C++ brak wbudowanego potęgowania,
        // więc liczymy potęgę przy pomocy pętli
        double prod=1;
        for(int i=1;i<=n; i=i+1) prod=prod*x;
        cout << " s[" << setw(3) << n << "] =" << setw(18) << prod;
        cout << endl;
    }
}

```

Listing 8.9: Eksperyment numeryczny z procentem składanym w C++

Rekurencja.

Klasyczną metodą definiowania ciągów jest rekurencja (zwłaszcza w informatyce!). Definiujemy kolejne wyrazy w oparciu o znajomość poprzednich...

To - niestety - prowadzi do poważnego problemu: jak zbadać zbieżność ciągu zadanego rekurencyjnie?

I tu jest widoczna przydatność naszych twierdzeń. **Podstawowe narzędzie to właśnie twierdzenie o ciągach monotonicznych i ograniczonych.**

Wniosek 2.23. Założmy, że ciąg $(a_n) \subset \mathbb{R}$ jest nierosnący i ograniczony z dołu. Wówczas ciąg (a_n) jest zbieżny. Jego granicą jest liczba

$$M = \inf \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

Przykład 2.24. Niech $a_1 = \sqrt{6}$ i $a_{n+1} = \sqrt{6 + a_n}$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$, tzn.

$$a_2 = \sqrt{6 + \sqrt{6}}, \quad a_3 = \sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{6}}}, \quad a_4 = \sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{6}}}}, \quad \dots$$

Sprawdzimy, że ciąg a_n jest rosnący i ograniczony. Niech $x > 0$. Zauważmy, że dla takich x nierówność $\sqrt{x+6} > x$ jest równoważna innej, $x^2 - x - 6 < 0$. Ponieważ $x^2 - x - 6 = (x+2)(x-3)$, więc ostatecznie

$$x > 0 \text{ i } \sqrt{x+6} > x \Leftrightarrow x \in (0, 3). \quad (2.11)$$

Zauważmy też, że

$$x \in (0, 3) \Rightarrow 0 < x+6 < 9 \Rightarrow \sqrt{x+6} \in (0, 3). \quad (2.12)$$

Wyrazy ciągu a_n są oczywiście dodatnie. Ponieważ $a_1 = \sqrt{6} \in (2, 3)$, więc z implikacji (2.12) wynika, na mocy zasady indukcji matematycznej, że $a_n \in (0, 3)$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$; ciąg (a_n) jest więc ograniczony. Ponadto,

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n + 6} \stackrel{(2.11)}{>} a_n, \quad \text{bowiem wiemy już, że } a_n \in (0, 3).$$

Zatem ciąg a_n jest rosnący. Z Twierdzenia 2.22 wynika, że istnieje granica tego ciągu.

Nietrudno tę granicę znaleźć: ponieważ

$$a_{n+1}^2 = 6 + a_n,$$

więc z Twierdzenia 2.10 wynika, że $a = \lim a_n$ spełnia równość $a^2 = 6 + a$, a przy tym $a \geq 0$, gdyż $a_n > 0$ dla wszystkich n . Przeto $a = 3$. \square

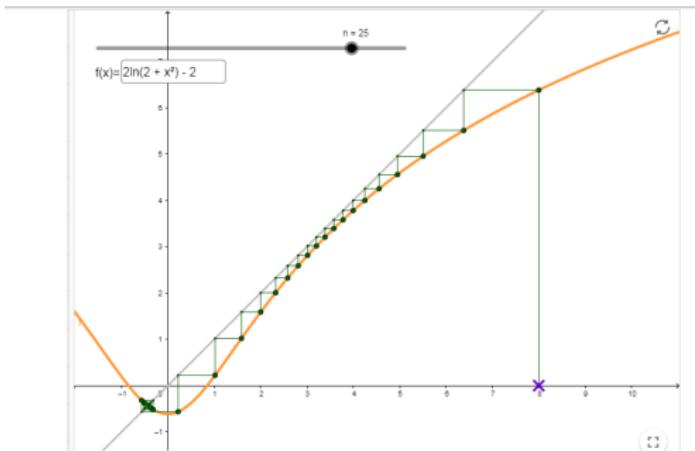
Uwaga. Ostatni fragment rozumowania wolno przeprowadzić dopiero wtedy, gdy wiadomo już, że liczba $a = \lim a_n$ istnieje. Wcześniej można stąd jedynie wywnioskować, że jeśli $a = \lim a_n$ istnieje i $a \geq 0$, to wtedy $a = 3$.

“Geogebra”.

W tym - i kolejnych - zajęciach **warto korzystać** z możliwości programu “Geogebra”. Ogólnie: warto go sobie zainstalować (legalny)... I kto potrafi - pisać własne skrypty...

Na początek ładna ilustracja powstawania ciągów rekurencyjnych.

GeoGebra



Funkcje tworzące.

Podstawową metodą do badań wzorów rekurencyjnych są **funkcje tworzące**, czyli zadane szeregami potęgowymi w oparciu o współczynniki danego ciągu: (a_n)

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n.$$

Należałoby o tym *trochę* dokładniej, bo ta metoda ma wiele innych zastosowań... Ale - o tym jak już formalnie wprowadzimy **szeregi!**

Istotny jest tu fakt, że traktujemy je jako **szeregi formalne**, czyli nie interesuje nas na ogół aspekt dziedziny ich zbieżności! Niestety - ta metoda wykracza poza podstawowy wykład z analizy (a szkoda...). A tu dla zainteresowanych: wprowadzenie do równań rekurencyjnych w terminologii ciągów geometrycznych (a nie funkcji tworzących) jak kto woli... - autor: prof. J. Matkowski.

Materiały poszerzające.

I jeszcze rekomendowane materiały prof. Jaworskiego (skrypt również współautorstwa prof. Palki i prof. Szymańskiego). Warto skorzystać...

No i materiały dla informatyków o rekurencji: prof. Strzeleckiego - strony 300-308.

Rekurencja.

Niech $a_0 = 1$, $b_0 = x > 0$. Definiujemy

$$a_{n+1} = \frac{2a_n \cdot b_n}{a_n + b_n},$$

$$b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}.$$

Kluczowe jest znalezienie podstawy (matematycznej) **dla czego** te wzory mogą posłużyć do oszacowania pierwiastka z liczby x (czyli: matematyka). Tu wystarczy twierdzenie o nierówności pomiędzy średnimi...

Sprawdzić, że $\sqrt{x} = \sup_{n \in \mathbb{N}} \{a_n\} = \inf_{n \in \mathbb{N}} \{b_n\}$. Obliczyć granice.

Zadanie.

Określmy ciąg wzorem rekurencyjnym:

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}.$$

Ciąg ten jest ograniczony z góry przez 2 (co można łatwo wykazać metodą indukcji zupełnej) oraz rosnący, gdyż

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \sqrt{2 + a_n} - a_n = \frac{(\sqrt{2 + a_n} - a_n)(\sqrt{2 + a_n} + a_n)}{\sqrt{2 + a_n} + a_n} = \\ &= \frac{2 + a_n - a_n^2}{\sqrt{2 + a_n} + a_n} = \frac{-(a_n + 1)(a_n - 2)}{\sqrt{2 + a_n} + a_n} \geq 0 \end{aligned}$$

(wykorzystaliśmy tu fakt, że $1 \leq a_n \leq 2$). Jako ciąg monotoniczny i ograniczony jest więc zbieżny. Jego granicę oznaczmy przez a .

Oczywiście (a właściwie dlaczego??) ciąg (a_{n+1}) jest również zbieżny do a , stąd:

$$a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$$

$$a = \sqrt{2 + a} .$$

Mamy więc kolejno: $a = \sqrt{2 + a}$, $a^2 = 2 + a$, $a^2 - a - 2 = 0$, czyli $a_1 = 2$ oraz $a_2 = -1$, który odpada, gdyż $a_n \geq 0$. Ostatnie równanie ma dwa pierwiastki. Ostatecznie $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2$.

Podkreślimy tu jeszcze konieczność wykazania istnienia granicy ciągu, zanim zaczynamy ją obliczać! Czyli: najpierw coś dla człowieka, później ewentualnie dla komputera...

A może rekurencja?

[N. Wirth]

Obliczanie $\frac{1}{x}$ dla rzeczywistych liczb x (poprzez mnożenie i dodawanie).

Dane: $a_0 = 1$, $c_0 = 1 - x$ ($x \neq 0$). Definiujemy:

$$a_n = a_{n-1} \cdot (1 + c_{n-1}) \quad c_n = c_{n-1} \cdot c_{n-1}$$

Wtedy (dlaczego?)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1}{x}$$

Ale **najpierw (!!)** wypadałoby sprawdzić, że te **ciągi są zbieżne** (tw.: **Ciąg monotoniczny i ograniczony jest zbieżny.**) !!

Dokładnie ta sama idea służy do obliczeń sum szeregów
(a więc i **wartości funkcji** np. $\sin x$, czy e^x) - o tym później.

I ponownie: najpierw zapewnić zbieżność szeregu, potem liczyć.

Problem dodatkowy: oszacowanie błędu !!! [N.Wirth str. 52-53]

Rekurencja - pułapki komputera...

Należy zachować ostrożność we wnioskach symulacji na komputerze.

Prezentacja: [ciąg rekurencyjny w prezentacji CDF - wymaga CDF Player](#).

Rekurencja - pytanie.

Dane są ciągi:

$$a_{n+1} = (a_n)^2 \text{ o ile } (a_n)^2 < 2 \text{ oraz } a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n^2 \text{ o ile } (a_n)^2 \geq 2,$$

$$b_{n+1} = \frac{b_n}{2},$$

$$s_{n+1} = s_n \text{ o ile } (a_n)^2 < 2 \text{ oraz } s_{n+1} = s_n + b_{n+1} \text{ o ile } (a_n)^2 \geq 2.$$

Pytania: czy istnieje i jaka jest granica ciągu (s_n) ?

Kiedy istnieje (dla jakich wartości początkowych: rozpoczęj od $a_0 = x > 0$, $b_0 = 1$ i $s_0 = 0$)?

Jak zakończyć obliczenia (warunek stopu)?

Problem stopu.

Proszę być świadomym **ograniczeń obliczeń komputerowych**:

"Diagonal arguments are used to prove many fundamental results about the limitations of computation, such as the undecidability of **the Halting Problem** for programs and the inherent, unavoidable inefficiency (exponential time or worse) of procedures for other computational problems. So computer scientists do need to study diagonal arguments in order to understand the logical limits of computation. Ad a well-educated computer scientist will be comfortable dealing with countable sets, finite as well as infinite."

(Mathematics for Computer Science, Eric Lehman, F Thomson Leighton, Albert R Meyer)

A to o teorii obliczalności...

Do tematu teorii obliczalności i złożoności algorytmów wróćmy - przy granicach funkcji. Na razie proszę pamiętać o moich uwagach przy obliczaniu granic ciągów!

Theorem 3.1 Suppose that $t_1(n)$ and $t_2(n)$ are time constructible, $s_1(n)$ and $s_2(n)$ are space constructible, $t_2(n) \geq t_1(n) \geq n$, and $s_2(n) \geq s_1(n) \geq n$.

i. If

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{t_1(n) \log(t_1(n))}{t_2(n)} = 0,$$

then $\text{TIME}(t_1(n)) \subsetneq \text{TIME}(t_2(n))$. (Hartmanis and Stearns 1965)

ii. If

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{t_1(n+1)}{t_2(n)} = 0,$$

then $\text{NTIME}(t_1(n)) \subsetneq \text{NTIME}(t_2(n))$. (Cook 1972)

iii. If

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{s_1(n)}{s_2(n)} = 0,$$

then $\text{SPACE}(s_1(n)) \subsetneq \text{SPACE}(s_2(n))$. (Stearns, Hartmanis, and Lewis 1965)

These results may all be demonstrated by modifications of the diagonal argument by which Turing (1937) originally demonstrated the undecidability of the classical Halting Problem.^[13] Nonetheless,

Linki: [Podstawy złożoności obliczeniowej](#) oraz [Stanford University](#)

Rekurencja - c.d.

Zadania do przemyślenia (etapy rozumowania, różnice pomiędzy przykładami) - **może na egzamin?**

$$a_0 = \sqrt{3}, \quad a_{n+1} = \sqrt{3 + a_n}.$$

$$b_0 = \sqrt{3}, \quad b_{n+1} = (3 + b_n)^2,$$

$$f_0 = 1, \quad f_1 = 1, \quad f_{n+2} = f_{n+1} + f_n.$$

(liczby Fibonacci'ego)

$$y_0 = c = \text{const.}, \quad y_{n+1} = \frac{1}{n+1} - 5 \cdot y_n$$

(ostatnia relacja to obliczanie rekurencyjne pewnych całek, tylko y_0 należy obliczyć wstępnie - por. metody numeryczne).

Ciągi a funkcja pierwiastek \sqrt{x} .

Jak już wiemy, pierwiastki z liczb całkowitych są albo całkowite, albo **niewymierne**. Wynika stąd konieczność ich **przybliżonego** obliczania na komputerze. To ważny, ale i ciekawy problem.

Metoda Newtona-Raphsona (bazująca na geometrii - pierwiastek jako pole kwadratu o boku x , rozpoczynamy od prostokąta i zmniejszamy różnicę pomiędzy długościami boków korzystając ze średniej arytmetycznej) $a > 0$ (*czasami nazywana metodą babilońską*):

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{a}{x_n} \right), \quad x_1 = \frac{a}{2}.$$

Sprawdzić, że ten ciąg jest zbieżny do \sqrt{a} . Pytanie (takie jak na egzamin - jakie twierdzenie jest konieczne, aby sprawdzić zbieżność tego ciągu?)

Różne algorytmy.

A jak programy obliczają wartości funkcji \sqrt{x} ?

Czy jest “najlepszy algorytm”? Dla zainteresowanych **przegląd** algorytmów dla funkcji $f(x) = \sqrt{x}$ można znaleźć tu: **kilkanaście algorytmów** (w tym kody algorytmów)! Np.

- ▶ metoda Herona $x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - N}{2x_n} = \frac{x_n + N/x_n}{2}$,
- ▶ metoda Halleya (-Householdera) $x_{n+1} = x_n - \frac{(2x_n^3 - 2ax_n)}{3x_n^2 + a}$,
- ▶ za pomocą pewnego szeregu Taylora (o czym później):

$$\sqrt{x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{a^{\frac{1}{2}-n}(x-a)^n}{\Gamma(\frac{3}{2}-n)n!},$$

- ▶

I **konieczne** pytanie: dlaczego jest ich tak dużo? A w algorytmach grafiki 3D isotne są też obliczania odwrotności pierwiastka **The Legendary Fast Inverse Square Root** (dla potrzeb ... gry Quake III)!

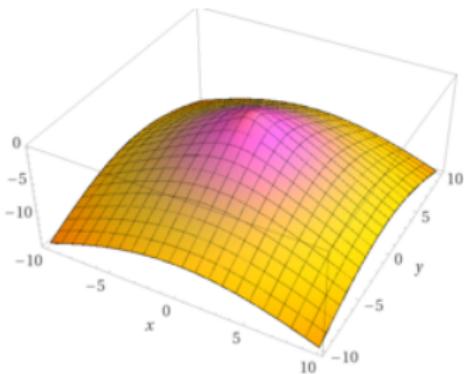
“Ciągi skończone”.

Zwracam uwagę, że ciąg to funkcja określona na **wszystkich** liczbach naturalnych - stąd problemy z obliczaniem granic, czy ogólnie zbieżnością badaną za pomocą komputera. Jednak niekiedy (już w szkole średniej) bada się tzw. **ciągi skończone**, czyli funkcje określone na skończonym podzbiorze liczb naturalnych. Proszę nie mylić tych pojęć!

W informatyce niekiedy nazywa je będą łańcuchami (gdy wartościami są znaki), a znajdują zastosowania np. w analizie tekstów (operacje na łańcuchach), sieciach neuronowych (ciągi uczące), czy kryptografii (choć tam też korzysta się ze “zwykłego pojęcia ciągu - np. generatory ciągu liczb pseudo-losowych) - ale tym pojęciem zajmą się Państwo oddzielnie na **matematyce dyskretnej**...

Ciągi w wielu wymiarach.

To co omawiamy to tylko podstawy wspomagające zrozumienie idei, które stoją za większością zastosowań w informatyce. i **nie będzie wystraczające** w zastosowaniach! Będą niezbędne **np.** ciągi elementów na płaszczyźnie \mathbb{R}^2 lub ogólniej w \mathbb{R}^n (np. nauczanie maszynowe, sieci neuronowe), np. ciągi punktów z takich powierzchni:



Co wtedy?

Ciągiem punktów na płaszczyźnie nazywamy przyporządkowanie każdej liczbie naturalnej punktu płaszczyzny \mathbb{R}^2 (czyli to funkcja $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^2$). Wartość tego przyporządkowania dla liczby naturalnej n nazywamy n -tym wyrazem ciągu i oznaczamy $P_n = (x_n, y_n)$.

Ciąg taki oznaczamy (P_n) lub $((x_n, y_n))$. Ciąg $(P_n) = ((x_n, y_n))$ jest zbieżny do punktu $P_0 = (x_0, y_0)$, co zapisujemy $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = P_0$ lub $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n, y_n) = (x_0, y_0)$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0, \text{ oraz } \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y_0.$$

Dla większej liczby zmiennych - analogicznie...

Ale to oznacza, że **wszystkie** definicje, twierdzenia i własności podawane tutaj będą też przydatne w sytuacji wielowymiarowej! I tak warto się ich nauczyć...

Tak naprawdę zajdzie też potrzeba badania ciągów w tzw. przestrzeniach metrycznych - ale o tym (niestety) tylko dla zainteresowanych...

Tajne/poufne.

Przykładowe zagadnienia na egzamin - po tym wykładzie...

- ▶ Czy eksperiment numeryczny (obliczanie na komputerze) może pozwolić sprawdzić zbieżność zadanego ciągu? A oszacować jego granicę? Jeśli tak - to kiedy? Jeśli nie - to dlaczego (wskazówka: "zbieżność pozorna")?
- ▶ Wykonując obliczenia (np. arkusz kalkulacyjny) wartości ciągu $a_n = \log_{10} n$ obliczamy różnicę Δ pomiędzy obliczonym a_n i uprzednio obliczonym a_{n-1} : $\Delta = a_n - a_{n-1}$ ("stop" dla pętli `while... do...` - to tzw. *kryterium przyrostowe stopu w metodach numerycznych*). Dla $n = 10^{13}$ mamy $\Delta = 0,0000000000042632564145606$, ale dla $n = 10^{14}$ uzyskamy $\Delta = 0$. Czy oznacza to, że obliczona wartość $a_{10^{14}}$ jest przybliżoną wartością granicy tego ciągu? **Odpowiedź uzasadnij.**
- ▶ Liczby wymierne w zapisie binarnym mogą mieć rozwinięcia okresowe (np. $a = 0,1$). Ich reprezentacja *double* lub *float* w arytmetyce komputerowej może więc być obarczona błędem i warto unikać obliczeń za pomocą takich liczb. Zbiór liczb wymiernych jest gęsty w zbiorze liczb rzeczywistych \mathbb{R} : a czy zbiór liczb wymiernych o skończonym rozwinięciu binarnym \mathcal{B} również jest gęsty w \mathbb{R} ? Rozważ ciągi liczb z \mathcal{B} i ich granice (punkty skupienia zbioru \mathcal{B}).
- ▶ W arkuszu kalkulacyjnym wprowadzając do kolumny A kolejne liczby naturalne, a do B formułę `=JEZELI((SIN(A1))> 0,99;"TAK";"NIE")` znajdujemy rosnący ciąg liczb naturalnych (n_k) dla których $\sin n_k$ różni się od 1 o mniej niż $1/100$ (można oczywiście uwzględnić mniejsze różnice). Liczby te są dowolnie duże (np. 31562 czy 3254654). Jakie pojęcie matematyczne ma zilustrować ten eksperyment? Czy oznacza to, że $\lim_{k \rightarrow \infty} \sin k = 1$? Dlaczego?

Analiza matematyczna dla informatyków.

Mieczysław Cichoń, ver. 2.1/2021

Mieczysław Cichoń - WMI UAM

Strony do lektury na wykłady 5, 6...

Szeregi liczbowe. Suma szeregu. Zbieżność i bezwzględna zbieżność szeregu. Zastosowania w informatyce. Własności szeregów zbieżnych. Działania na szeregach zbieżnych. Kryteria zbieżności. Podstawy teorii szeregów geometrycznych i potęgowych. Obliczanie sum szeregów na komputerze. Szeregi potęgowe.

Czytamy najpierw:

[K] : motywacje - strony 21-24

i dalej

[K] : strony 189-194

[W] : strony 42-50 oraz 54-55, 57-61

(lub alternatywnie: z tego wykładu strony 38-48).

Można też: te kilka stron...

Szeregi - motywacje...

Czy należy rozważyć jakieś formy "zliczania" nieskończonej ilości liczb? **Tak!** Inaczej nie moglibyśmy unikać wielu paradoksów, ale czy to oznacza "sumowanie" nieskończone? **Nie!**

Gdyby miało to być dodawanie, to miałoby jego własności, czyli musielibyśmy się zgodzić na taki paradoks:

$$0 = 0$$

$$0 = 0 + 0 + 0 + \dots$$

$$0 = (1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \dots$$

$0 = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 \dots$ przecież *dodawanie* jest łączne, więc możemy??

$0 = 1 - (1 - 1) - (1 - 1) - \dots$ przecież *dodawanie* jest łączne, j.w. możemy??

$0 = 1 - 0 - 0 - 0 - \dots$ na to chyba jest powszechna zgoda, obliczamy

$0 = 1$ z tym chyba się nie zgadzamy? \Rightarrow wszystkie liczby są równe...

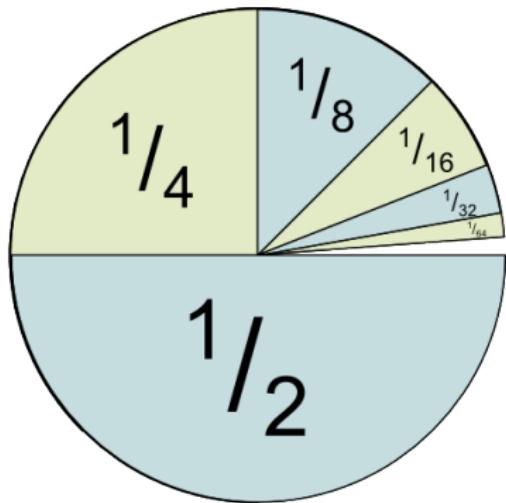
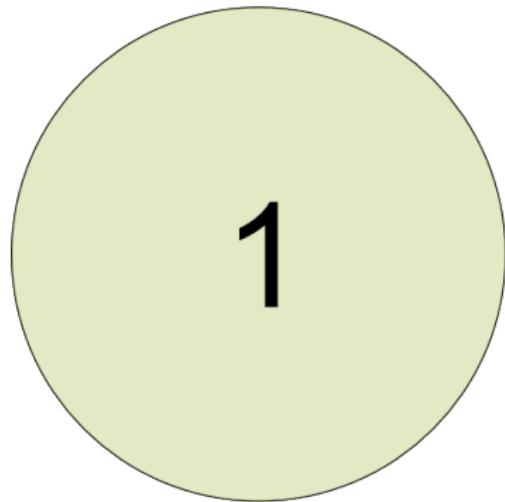
Uwagi.

Takie działanie nieskończone **nie może więc być sumą!**
(niech się nikt nie waży tak pisać, bo dostanie: w swoim rozumieniu "5", a ja wpiszę "2" - w końcu przy takim podejściu to byłyby takie same oceny :‐))

Jak się wkrótce okaże - w informatyce to m.in. znakomite narzędzie pozwalające operować na przybliżeniach liczb rzeczywistych, bez tego pojęcia nie byłoby sensownych obliczeń na komputerze.

ALE: jak już wiemy komputer nie może operować na zbiorach mieskończych, czyli to informatyk musi pogodzić przydatność operowania szeregami z możliwościami komputera. Czyli musimy się sami tego nauczyć i poznać własności tego pojęcia...

A jednak coś musimy liczyć...



Czy "dodane" ułamki po prawej stronie nie powinny dać wyniku po lewej?

Szeregi liczbowe...

... stanowią uogólnienie sum skończonych ([ale nie są wynikiem dodawania!](#)). Niech dany będzie ciąg liczb rzeczywistych $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ oraz niech $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ będzie ciągiem (sum częściowych danego ciągu), którego wyrazy określone są następująco

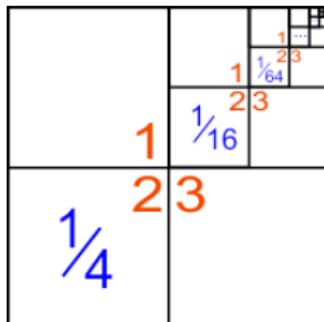
$$s_1 = a_1$$

$$s_2 = a_1 + a_2$$

.....

$$s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

.....



Szeregi liczbowe.

Jedna z możliwych definicji szeregu liczbowego mówi, że jest to para $((a_n), (s_n))$. Oznaczamy go

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots \equiv \sum_{n=1}^{\infty} a_n .$$

Bardziej interesować nas będzie to co nazwiemy **sumą szeregu**. Widzimy więc, że jeśli obliczamy sumę szeregu to w rzeczywistości danemu ciągowi (a_n) przyporządkowujemy liczbę rzeczywistą $s = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$, a więc szereg to funkcja, który oznaczamy

$$\sum_{n=1}^{\infty} : (a_n) \longrightarrow s = \sum_{n=1}^{\infty} a_n .$$

Mówimy, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, jest **zbieżny** do skończonej liczby s , lub, że ma sumę równą s , co zapisujemy $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$, jeżeli ciąg sum częściowych (s_n) jest zbieżny do granicy s , przy $n \rightarrow \infty$. Jeżeli ciąg sum częściowych (s_n) nie jest zbieżny, to szereg nazywamy **rozbieżnym**.

Warunek konieczny zbieżności szeregu.

Twierdzenie. Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ może być zbieżny tylko wtedy, gdy ciąg jego wyrazów (a_n) dąży do zera, przy $n \rightarrow \infty$, tj. gdy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 .$$

Zauważmy, że warunek podany w powyższym twierdzeniu jest **warunkiem koniecznym** zbieżności szeregu. Aby się przekonać, że nie jest to warunek dostateczny wystarczy rozważyć szereg harmoniczny $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

Wyraz ogólny szeregu harmonicznego spełnia warunek podany w powyższym twierdzeniu, jednak - jak pokażemy później - szereg ten nie jest zbieżny.

Uwaga: symulacje komputerowe wcale nam nie pomogą. Skrypt ilustracyjny szeregu harmonicznego w "Mathematica" - potrzebny darmowy *CDF Player* lub *Mathematica*.

W informatyce...

Tego jeszcze nie wprowadziliśmy, ale warto już teraz pamiętać, że to szeregi będą podstawą do obliczeń zarówno wartości funkcji w punktach, jak i wartości przybliżonych liczb rzeczywistych - por. przybliżanie π w tekście [K]... Tak będzie najwygodniej reprezentować liczby niewymierne - zamiast kumulować błąd można wielkość przybliżać raz - na końcu, a wcześniej operować wzorem na wyraz ogólny szeregu a_n .

I tu uwaga: nadal nie ma "najlepszego" wzoru na obliczanie komputerowe liczby poprzez szereg. To się nadal rozwija i tworzy się nowe algorytmy.

For estimating π

$$\frac{1}{\pi} = \frac{2\sqrt{2}}{9801} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(4k)!(1103 + 26390k)}{(k!)^4 396^{4k}}$$

Jedna liczba - wiele możliwych algorytmów...

Dla liczby π (jak każdej innej) mamy oczywiście wiele możliwości obliczeniowych m.in. za pomocą szeregów. Oto klasyczne:

4. INFINITE SERIES

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \dots \quad \text{LEIBNIZ-MADHAVA}$$

$$\frac{\pi^2}{6} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots \quad \text{EULER}$$

$$\frac{1}{\pi} = 12 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (6k)! (545140134k + 13591409)}{(3k)!(k!)^3 640320^{3k+3/2}} \quad \text{CHUDNOVSKY ALGORITHM (WORLD RECORD)}$$

(w jakim sensie algorytm Chudnovskiego to “rekord świata: największy przyrost dokładnie obliczonych miejsc po przecinku w jednym kroku). Przykłady dla liczby π - por. materiał [K].

1.3.2 Liczba π poprzez szereg.

Powrómy do obliczania liczby π . Widzieliśmy, że metoda oparta o przybliżanie obwodu koła daje niezbyt zadowalający wynik. Często jednak, jeśli jeden algorytm zastąpimy innym, to możemy uzyskać lepsze wyniki przy zastosowaniu tej samej arytmetyki komputerowej. Wiemy, że liczba π jest nie tylko obwodem koła o średnicy jeden, ale również polem koła o promieniu jeden.

Zastępując pole tego koła polami wpisanych w nie 2^n -kątów foremnych również otrzymamy ciąg przybliżeń liczby π . Oznaczmy przez P_n pole 2^n -kąta foremnego wpisanego w koło. Dla $n = 1$ rozważamy $2 - kt$ jako zdegenerowaną, pozbawioną pola figurę redukującą się do średnicy koła, zatem $P_1 = 0$.



Rysunek 1.8: Kolejne dodatki do pola koła.

Zauważmy, że 2^{n+1} -kąt powstaje z 2^n -kąta poprzez dorysowanie figury złożonej z 2^n trójkątów równoramiennych wpisanych w koło o podstawach leżących na bokach 2^n -kąta (patrz rys. 1.8). Niech A_n oznacza pole tej figury. Zatem Zatem

$$P_{n+1} = P_n + A_n,$$

czyli A_{n+1} jest poprawką, która dodana do pola 2^n -kąta daje pole 2^{n+1} -kąta. Stąd

$$P_n = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + \dots + A_{n-1},$$

a pole koła P_K otrzymamy sumując wszystkie poprawki:

$$P_K = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + \dots$$

Wartości A_i można wyliczyć. Aby wykorzystać wzory z podrozdziału 1.2.5, zamiast koła o promieniu jeden rozważmy ponownie koło o średnicy jeden, a więc o promieniu $1/2$. Zatem ze wzoru (1.3) jego pole to $\frac{\pi}{4}$. Zatem jako przybliżenie π interesuje nas ciąg $s_n := 4P_n$. Niech T_n oznacza pole trójkąta równoramiennego o podstawie równej bokowi 2^n -kąta, a ramionach równych bokowi 2^{n+1} -kąta. Mamy

$$A_n = 2^n T_n$$

Można policzyć, że $T_n = \frac{a_n(1 - \sqrt{1 - a_n^2})}{4}$, gdzie a_n , jak poprzednio, oznacza bok 2^n -kąta foremnego wpisanego w koło o średnicy jeden. Zatem

$$P_{n+1} = P_n + 2^n \frac{a_n(1 - \sqrt{1 - a_n^2})}{4}$$

oraz

$$s_{n+1} = s_n + 2^n a_n (1 - \sqrt{1 - a_n^2}). \quad (1.4)$$

Liczba π .

W rozdziale 1.3.2 zaprezentowaliśmy metodę przybliżania liczby π poprzez pola wielokątów wpisanych w koło i zauważliśmy, że stosowny ciąg (1.4) jest szeregiem. Przyjrzymy się teraz zachowaniu tego szeregu od strony numerycznej. Program wyznaczający wyrazy ciągu (1.4) w Mathematica jest przedstawiony na listingu 12.1, a w języku C++ na listingu 12.2.

Uruchamiając program łatwo sprawdzić, że metoda oparta o pola przy zastosowaniu tego samego typu **double** daje znacznie dokładniejsze wyniki niż metoda poprzednia, bo już 26-ta suma częściowa daje wartość

$$s_{26} = 3.141592653589793,$$

która jest poprawnym przybliżeniem liczby π do ostatniej cyfry włącznie.

W informatyce I.

Szeregi zastępują ciągi w wielu algorytmach. **Dlaczego?**
Po prostu - to często “lepsze” algorytmy ([czyli szybciej zbieżne](#)).

Prosty przykład: liczba e . Jeżeli obliczamy ją z definicji jako granice ciągu $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, to kolejne wyrazy są jej przybliżeniami.

Ale do obliczenia kolejnego wyrazu nie korzystamy z poprzedniego (“tracimy obliczenia”), a co gorsza wyniki są wolno...zne.

Jeśli skorzystamy z szeregu $e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$, to chcąc zwiększyć precyzję wystarczy operacja $S_n + \frac{1}{(n+1)!}$. Co więcej

$$e - S_n \leq \frac{1}{n \cdot n!},$$

a więc algorytm jest szybko zbieżny.

W informatyce II.

Pamiętajmy, że każda liczba rzeczywista, to właściwie suma szeregu jej rozwinięć dziesiętnych (lub o innej podstawie) rzeczywistych - dla pewnych specjalnie istotnych liczb (np. π) podaje się oczywiście lepsze sposoby reprezentacji. Cały czas pracujemy z szeregami!

Zadanie: poszukać samodzielnie materiałów na ten temat...

Szeregi bardzo dobrze nadają się do przybliżania wartości: każde kolejne przybliżenie powstaje przez dodanie nowo obliczonego wyrazu do poprzedniego przybliżenia!

Zadanie.

Informatycy napotykają raczej *odwrotne zagadnienie*: mamy dany algorytm obliczający daną wartość. **Czy i dlaczego jest poprawny? Czy można go usprawnić?**

Poniżej procedura - ćwiczenie do tych pytań:

```
def approximate_pi():
    EPSILON = 1.0e-7
    term = 1
    n = 0
    sum_pi = 0
    while abs(term) > EPSILON:
        term = 4 * (((-1) ** (n)) / (2 * n + 1))
        sum_pi += term
        n += 1
    print(float(round(sum_pi, 10)))
```

lub lepiej:

```
def approximate_pi():
    EPSILON = 1.0e-7
    n = 0
    sum_pi = 0
    sign = 1
    while True:
        term = 1 / (2 * n + 1)
        if term < EPSILON:
            break
        sum_pi += sign * term
        n += 1
        sign = -sign
    return float(round(4 * sum_pi, 10))

print(approximate_pi())
```

Szeregi w informatyce cd.

Pamiętajmy, że na pewno liczb niewymiernych nie da się reprezentować dokładnie na komputerze. Jedną z metod (całkiem niezłą) ich przybliżania będą szeregi. *Można skorzystać z gotowych bibliotek* (i co najmniej poznać ich algorytmy obliczeniowe) albo **można tworzyć i badać własne algorytmy...**

Czyli trzeba znać np. własności szeregów, aby wyeliminować ograniczenia arytmetyki komputerowej i uniknąć błędów...

[Skrypt ilustracyjny obliczania sum szeregów w "Mathematica"](#) - potrzebny darmowy *CDF Player* lub *Mathematica*

Zauważmy, że jeśli dany jest ciąg (s_n) , to jest on ciągiem sum częściowych szeregu postaci

$$s_1 + (s_2 - s_1) + (s_3 - s_2) + \dots = s_1 + \sum_{n=1}^{\infty} (s_{n+1} - s_n).$$

Twierdzenie. Szeregi zbieżne mają własność łączności dodawania wyrazów sąsiednich, tzn. jeżeli w szeregu zbieżnym $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$ połączymy wyrazy sąsiednie w grupy, np.

$$(a_1 + \dots + a_{n_1}) + (a_{n_1+1} + \dots + a_{n_2}) + (a_{n_2+1} + \dots + a_{n_3}) + \dots$$

gdzie $1 \leq n_1 < n_2 < \dots$, to otrzymany szereg jest zbieżny do tej samej sumy s .

Te twierdzenie ułatwi obliczenia przybliżeń sum szeregow - o ile tylko będziemy wiedzieli, że są zbieżne!

Wyrażenia w nawiasach można obliczać w podprocedurach...

Obliczenia symboliczne.

Jeśli nie możemy sobie pozwolić na kumulowanie błędów na komputerze, musimy skorzystać ze specjalizowanych programów matematycznych np. *Mathematica* czy *Maple*. Tam są uwzględnione wszelkie reguły, o których mówimy (i dużo więcej!)...
Np.

12.4.4 Szeregi w programie Mathematica

Program Mathematica dość dobrze radzi sobie z liczeniem sum szeregów, a w przypadku braku zbieżności sygnalizuje ten fakt. Do policzenia sumy szeregu $\sum_{i=p}^{\infty} a_n$ używamy instrukcji

```
Sum[a[n],{n,p,Infinity}]
```

Na przykład

```
Sum[1/n!, {n, 2, Infinity}]
```

zwraca $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} = -2 + e$. Oznacza to, że Mathematica, w miarę swoich umiejętności, stara się zwrócić wynik dokładny, używając symbolicznych oznaczeń na stałe matematyczne.

Dopiero w końcowym oszacowaniu musimy obliczyć e ...

Własności szeregów zbieżnych.

Twierdzenie. Założymy, że dane są dwa szeregi zbieżne $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = b$ oraz że λ jest dowolną liczbą.

Wówczas szeregi $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$, $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n)$ oraz $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda a_n$ są zbieżne i zachodzą wzory

$$(a) \quad \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = a + b \quad ,$$

$$(b) \quad \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n) = a - b \quad ,$$

$$(c) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \lambda a_n = \lambda a \quad .$$

Takie działania - TYLKO na szeregach, o których **wiemy**, że są zbieżne.

Szeregi bezwzględnie i warunkowo zbieżne.

Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nazywamy bezwzględnie zbieżnym, jeżeli szereg $\sum_{n \rightarrow \infty} |a_n|$ jest zbieżny.

Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nazywamy warunkowo zbieżnym jeżeli jest on zbieżny, ale nie jest bezwzględnie zbieżny.

Uwaga: warunkowa zbieżność szeregu może prowadzić do problemów w obliczeniach na komputerze. Dlaczego? Na kolejnym slajdzie...

Twierdzenia mówiące o bezwzględnej i warunkowej zbieżności szeregów liczbowych.

Twierdzenie. *Każdy szereg bezwzględnie zbieżny jest zbieżny.*

Twierdzenie. *Szereg bezwzględnie zbieżny pozostaje zbieżny i nie zmienia swojej sumy po dowolnej zmianie porządku wyrazów.*

Twierdzenie. (twierdzenie Riemanna) *W szeregu warunkowo zbieżnym można tak zmienić porządek wyrazów, aby nowy szereg był zbieżny do dowolnie obranej liczby, lub tak aby nowy szereg był rozbieżny.*

Przykładem szeregu warunkowo zbieżnego jest szereg anharmoniczny

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}.$$

Kluczowy problem w obliczeniach na komputerze: bez wiedzy o bezwzględnej zbieżności szeregu nie wolno zmieniać kolejności sumowania wyrazów - por. tw. Riemanna)

Działania na szeregach zbieżnych.

Trzy podstawowe własności już znamy: suma, różnica i iloczyn przez stałą szeregów zbieżnych są zbieżne (por. slajd (20)).

Pytanie: **czy i jak** można mnożyć szeregi (czyli również liczby reprezentowane nimi na komputerze)?

Mnożenie szeregów jest uogólnieniem mnożenia sum skończonych. Założymy, że dane są dwa szeregi zbieżne $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a$ oraz $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = b$. Dla utworzenia iloczynu szeregów $(\sum_{n=1}^{\infty} a_n) \cdot (\sum_{n=1}^{\infty} b_n)$ należy dodać wszystkie możliwe składniki postaci $a_i b_j$. W tym celu tworzymy tablice

$$a_1 b_1 \quad a_1 b_2 \quad a_1 b_3 \dots$$

$$a_2 b_1 \quad a_2 b_2 \quad a_2 b_3 \dots$$

$$a_3 b_1 \quad a_3 b_2 \quad a_3 b_3 \dots$$

.....

oraz ustalamy sposób dodawania wyrazów występujących w tej tablicy.

Iloczyn Cauchy'ego szeregów.

Oznaczmy

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n \right) \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n \right).$$

(a) Jeżeli wyrazy c_n zdefiniujemy wzorem

$$c_n = \sum a_i b_j ,$$

gdzie $n = i \cdot j$, a więc iloczyn wskaźników jest stały, to otrzymujemy sposób mnożenia metodą Dirichleta.

(b) Gdy $c_n = a_n b_1 + a_{n-1} b_2 + \dots + a_1 b_{n-2} + a_0 b_{n-1}$, a więc dodajemy wyrazy leżące na bocznych przekątnych powyższej tablicy, to otrzymujemy sposób mnożenia metodą Cauchy'ego.

(c) Jeżeli wyrazy szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ zdefiniujemy wzorem

$c_n = a_n b_1 + a_n b_2 + \dots + a_n b_{n-1} + a_n b_n + a_{n-1} b_n + \dots + a_2 b_n + a_1 b_n$
to otrzymujemy sposób mnożenia szeregów według kwadratów
(sumujemy te wyrazy powyższej tablicy, które leżą na dolnym i prawym boku odpowiedniego kwadratu tablicy).

Zbieżności iloczynów szeregów.

Twierdzenie. (twierdzenie Cauchy'ego). Jeżeli szeregi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ oraz $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ są bezwzględnie zbieżne, to ich iloczyn $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ jest bezwzględnie zbieżny i zachodzi wzór

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = a \cdot b ,$$

przy czym sposób sumowania jest dowolny.

Twierdzenie. (twierdzenie Mertensa¹). Jeżeli szeregi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ oraz $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ są zbieżne oraz przynajmniej jeden z nich jest bezwzględnie zbieżny, to ich iloczyn $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ otrzymany metodą mnożenia Cauchy'ego jest zbieżny i zachodzi wzór $\sum_{n=1}^{\infty} c_n = a \cdot b .$

¹F. Mertens: profesor Uniwersytetu Jagiellońskiego, w okresie 1865-1884

Sumy szeregów.

Na ogół obliczanie sumy szeregu może być skomplikowane.

Na razie poznaliśmy, w zasadzie, jeden przypadek, gdy potrafimy ją obliczyć: szeregi geometryczne: **jeżeli** $|q| < 1$, **to**

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}.$$

Nieco później poznamy kilka innych metod (na razie to niemożliwe...), ale zauważmy, że **gdybyśmy** wiedzieli, że szeregi są zbieżne, to można skorzystać z w własności szeregów zbieżnych i najpierw sprawdzić zbieżność kolejnych, a w efekcie co najmniej **obliczać przybliżone sumy szeregów** - co może być wystarczające (dla sum częściowych S_n szeregów **zbieżnych** (!) mamy: $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$, a więc S_n "przybliża" wartość S).

Kryteria zbieżności szeregów.

Oznacza to, że głównym celem dla nas jest

sprawdzanie CZY szereg jest zbieżny.

Takie twierdzenia, które orzekają zbieżność szeregu (lub: nie) w zależności od pewnych własności ciągów (a_n) nazywamy **kryteriami zbieżności**.

Na ćwiczeniach warto stosować - ciekawe **kryterium o zagęszczaniu**...

Stwierdzenie 4.18 (kryterium zagęszczeniowe). *Jeśli (a_n) jest malejącym ciągiem liczb dodatnich, to szereg*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{oraz} \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n, \quad \text{gdzie} \quad b_n = 2^n a_{2^n},$$

są albo jednocześnie zbieżne, albo jednocześnie rozbieżne.

Szeregi o wyrazach nieujemnych.

Rozważmy teraz szeregi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach dodatnich $a_n > 0$ lub nieujemnych $a_n \geq 0$ dla $n \in \mathbb{N}$.

Jest oczywiste, że przy takim założeniu o wyrazach szeregu ciąg sum częściowych (s_n) jest albo rosnący albo niemalejący.

Wynika stąd więc, że szeregi o wyrazach nieujemnych są albo zbieżne, co możemy zapisać $\sum_{n=1}^{\infty} a_k < \infty$, albo są rozbieżne do $+\infty$.

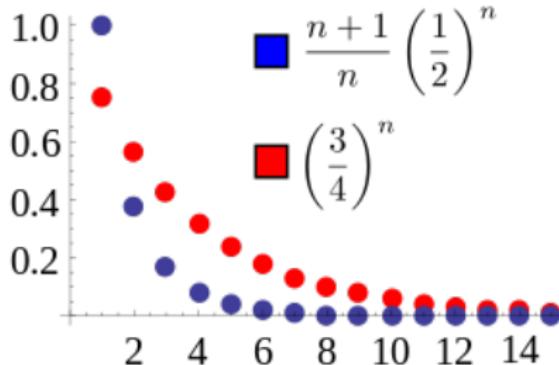
Podamy kilka twierdzeń, które pozwalają rozstrzygnąć ten problem.

Kryterium porównawcze.

Jeżeli wyrazy szeregów $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ oraz $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ dla prawie wszystkich n spełniają nierówności

$$0 \leq a_n \leq b_n ,$$

to gdy szereg $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ (nazywany majorantą) jest zbieżny, wówczas szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest także zbieżny, natomiast gdy szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (nazywany minorantą) jest rozbieżny to rozbieżny jest również szereg $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.



Stwierdzenie 4.12 (kryterium porównawcze, wersja I). *Założmy, że $a_n, b_n > 0$ i istnieją takie liczby $c > 0$ i $n_0 \in \mathbb{N}$, że $a_n \leq c \cdot b_n$ dla wszystkich $n \geq n_0$. Wtedy*

- (a) *Ze zbieżności szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ wynika zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$;*
- (b) *Z rozbieżności szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ wynika rozbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.*

Przykład 4.15. Jeśli $q \in (0, 1)$, to szereg o wyrazach $a_n = nq^n$ jest zbieżny. Istotnie, weźmy dowolne $s \in (q, 1)$. Ponieważ $(n+1)/n \rightarrow 1$, więc dla wszystkich dostatecznie dużych n jest

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+1}{n} q < s = \frac{b_{n+1}}{b_n}, \quad \text{gdzie } b_n = s^n.$$

Ponieważ dla każdego $s \in (0, 1)$ szereg geometryczny $\sum s^n$ jest zbieżny, więc szereg $\sum nq^n$ jest zbieżny. To wynika z punktu (a) ostatniego kryterium. \square

Przykład 4.16. Postępując praktycznie tak samo, jak w poprzednim przykładzie, można stwierdzić, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} n^k q^n$, gdzie k jest ustaloną liczbą naturalną i $q \in (0, 1)$, jest zbieżny. \square

Kryterium ilorazowe (d'Alemberta).

Kryterium ilorazowe, (d'Alemberta). Niech dany będzie szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, gdzie $a_n > 0$ dla $n = 1, 2, \dots$ oraz niech

$$g = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, gdy $g < 1$; jest rozbieżny, gdy $g > 1$, (przypadek gdy $g = 1$ wymaga **osobnego zbadania**).

Dla szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \equiv \sum_{n=1}^{\infty} A_n$ spełniony jest warunek

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A_{n+1}}{A_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1$, a jak wiemy szereg ten jest rozbieżny.

Dla szeregu $\zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \equiv \sum_{n=1}^{\infty} B_n$ mamy warunek

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{B_{n+1}}{B_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^2 = 1$, a szereg $\zeta(2)$ jest jednak zbieżny.

Kryterium pierwiastkowe (Cauchy'ego).

Kryterium pierwiastkowe (Cauchy'ego).

Załóżmy, że dany jest szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ taki, że $a_n \geq 0$ i niech

$$q = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n}$$

lub

$$q = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup \sqrt[n]{a_n} .$$

Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, gdy $q < 1$, jest rozbieżny gdy $q > 1$,
(w przypadku gdy $q = 1$ kryterium Cauchy'ego nie daje
rozstrzygnięcia).

Kryterium Raabe'go.

Jest ono mocniejsze od kryterium Cauchy'ego, a więc także mocniejsze od kryterium d'Alemberta (ale za to jego warunek jest nieco bardziej skomplikowany do obliczenia...).

Kryterium Raabe'go. Niech dany będzie szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, którego wyrazy są dodatnie i niech spełniony będzie następujący warunek

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = \gamma .$$

Jeżeli $\gamma > 1$, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, jeżeli $\gamma < 1$, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny, natomiast w przypadku gdy $\gamma = 1$ kryterium nie daje rozstrzygnięcia.

Szeregi naprzemienne.

To postać szeregu, która jest często spotykana, a co więcej ma bardzo proste kryterium zbieżności.

Szeregiem naprzemiennym lub przemiennym nazywamy szereg postaci $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$, gdzie $a_n \geq 0$ dla każdej liczby naturalnej n . Widzimy więc, że szereg naprzemienny to szereg postaci

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots + (-1)^{n+1} a_n + \dots$$

Kryterium Leibniza. Jeżeli (a_n) jest ciągiem malejącym zbieżnym do zera, to szereg naprzemienny

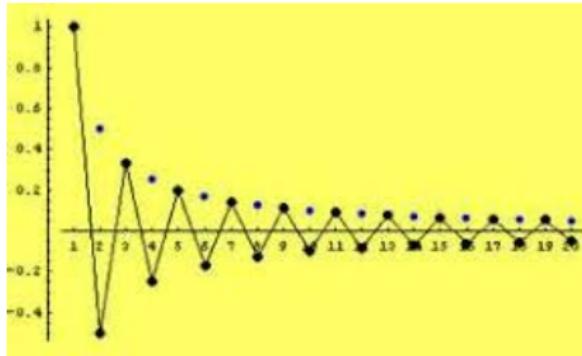
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$$

jest zbieżny. Co więcej można oszacować błąd przybliżenia jego sumy S przez sumy częściowe S_n :

$$|S - S_N| \leq |a_{N+1}|.$$

Szeregi naprzemienne II.

Ostatni fragment tezy kryterium Leibnitz'a jest kluczowy w zastosowaniu szeregów naprzemiennych w informatyce - i tłumaczy występowanie algorytmów, w których kolejne "poprawki" obliczeń sąbrane kolejno "z nadmiarem" i z "z niedomiarem". Zawsze znamy precyzję oszacowania...



Wyrazy (a_n) naprzemiennie zmieniają znak...

A może wystarczy komputer?

Niektórym może się wydawać, że zamiast używać matematyki - kryterów zbieżności, to wystarczy symulacja komputerowa.
Pomarzyć można!

Przy w miarę prostych szeregach to może być poprawna sugestia (ale i tak kryterium rozstrzyga, a nie sugeruje). Ale bywa gorzej.

Na początek szereg harmoniczny $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. Liczymy sumy częściowe (tu przyda się komputer) i małe zaskoczenie: suma 100 wyrazów $S_{100} \approx 5,6$ - dość daleko od hipotezy rozbieżności. No to milion: $S_{1000000} \approx 14,8$. nadal “niezbyt duża” liczba. No to kiedy będzie więcej niż 100? **Ktoś chce zrobić symulację?** Nie radzę! Potrzeba około **10^{43} wyrazów!** A i tak “jak daleko stąd do nieskończoności”! **Nie radzę wnioskować o zbieżności szeregu na podstawie symulacji komputerowych...**

A może wystarczy komputer - cd I.

No to może komputer pozwoli sprawdzić **łatwo** rozbieżność?

Niestety - proszę zapoznać się z przykładami 4.24 i 4.25 w materiale [W] strony 49-51. Mogłoby się wydawać, że szereg Kempnera jest "zblizony" do harmonicznego, ale jest **zbieżny**!

Przykład 4.25 (szereg Kempnera). Niech \mathcal{A} będzie zbiorem tych liczb naturalnych, w których zapisie dziesiętnym w ogóle nie występuje cyfra 9. Wtedy szereg

$$\sum_{n \in \mathcal{A}} \frac{1}{n}$$

jest **zbieżny**, a jego suma S nie przekracza liczby 80. Aby się o tym przekonać, oznaczmy

Porównać też: [K] strony 189-193.

A może wystarczy komputer - cd II.

A może szereg harmoniczny to jakiś wyjątek? Niestety - może być nawet znacznie gorzej... Jeden przykład:

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \ln n \ln(\ln n)}.$$

Proszę sprówać policzyć sumy częściowe, ale nie ustawiać zbyt wysoko swoich wymagań na sumę! Nawet $S_N \approx 10$ to trudne ($N \approx 10^{0,7 \cdot 10^{90}}$) i nie ma szans na domowym komputerze...

To pozwala mi przypomnieć **problem "stopu" algorytmu rekurencyjnego**, gdyby ktoś badał przyrost dwóch kolejnych obliczeń, to bardzo szybko wyjdzie mu "zero maszynowe" i ... **błędny wniosek...**

Zostańmy przy matematyce... Patrz też [W] strona 49 (przykłady 4.21 i 4.22).

Zadania.

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, (szereg harmoniczny).

R o z w i ą z a n i e. Gdyby szereg harmoniczny był zbieżny to wówczas $\lim_{n \rightarrow \infty} s_{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$. Jeśli obliczymy różnicę $s_{2n} - s_n$ to otrzymujemy

$$\begin{aligned}s_{2n} - s_n &= \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n}\right) - \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right) = \\&= \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n} \geq n \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Otrzymaliśmy sprzeczność, gdyż z jednej strony mamy nierówność

$$s_{2n} - s_n \geq \frac{1}{2} \quad \text{dla } n \in \mathbb{N},$$

a z drugiej strony wiemy, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (s_{2n} - s_n) = 0.$$

Wykazaliśmy więc, że szereg harmoniczny jest rozbieżny.

(2) $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$, $q \neq 1$, (szereg geometryczny).

Rozwiązańe. Przez indukcję obliczamy n -tą sumę częściową szeregu geometrycznego

$$s_n = 1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1} = \frac{1 - q^n}{1 - q} .$$

Wiemy, że ciąg (q^n) jest zbieżny do zera gdy $|q| < 1$, natomiast jest rozbieżny dla $|q| > 1$. Wynika więc, że $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \frac{1}{1 - q}$.

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1 - q} , \quad \text{dla } |q| < 1 .$$

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}$.

Rozwiązańe. Wyraz ogólny szeregu ma własność

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1 ,$$

a więc nie jest spełniony warunek konieczny zbieżności szeregu, czyli szereg $\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{4}{5} + \dots$ jest rozbieżny.

(4) Podamy drugi przykład, w którym potrafimy **obliczyć** sumę szeregu...

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}.$$

Rozwiązańe. Ponieważ prawdziwy jest wzór

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1},$$

więc n -tą sumę częściową możemy zapisać w postaci

$$s_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) +$$

+

$$+ \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1.$$

Ostatecznie otrzymaliśmy wzór $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$.

Zadanie (5).

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$$

R o z w i ą z a n i e. Pokażemy, że ciąg sum częściowych (s_n) posiada dwa punkty skupienia, a więc nie jest zbieżny, co oznacza, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ jest rozbieżny.

Obliczmy $s_{2n} = (-1 + 1) + \dots + (-1 + 1) = 0$,

$s_{2n+1} = (-1 + 1) + \dots + (-1 + 1) - 1 = -1$, a więc

$\lim_{n \rightarrow \infty} s_{2n} = 0$ oraz $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = -1$.

Szereg jest rozbieżny.

Zadanie (6).

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{n^n}$$

R o z w i ą z a n i e. Dany szereg jest rozbieżny, ponieważ po zastosowaniu kryterium ilorazowego stwierdzamy, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{3^n n!} = 3 \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^n = \frac{3}{e} > 1.$$

Szereg jest rozbieżny.

Zadanie (7).

$$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n \ln n}$$

Rozwiąż zanie. Dla zbadania zbieżności tego szeregu naprzemiennego zastosujemy kryterium Leibniza. W tym celu wystarczy obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n \ln n} = 0$$

oraz napisać nierówność prawdziwą dla $n = 2, 3, \dots$

$$\frac{1}{(n+1) \ln(n+1)} < \frac{1}{n \ln n}.$$

Ciąg (a_n) jest malejący do zera, a więc szereg jest zbieżny na mocy kryterium Leibnitz'a.

Szereg anharmoniczny.

Zadanie (8).

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$$

R o z w i ą z a n i e. Ponieważ ciąg $\left(\frac{1}{n}\right)$ jest malejący i dąży do zera przy $n \rightarrow \infty$, więc na podstawie kryterium Leibniza stwierdzamy, że szereg anharmoniczny jest zbieżny.

Można wykazać (nieco później zrobimy to... - obliczymy jego sumę!!), że:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} = \ln 2 .$$

Zadanie (9).

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$$

R o z w i ą z a n i e. Wyraz ogólny szeregu możemy przedstawić w następującej postaci przy pomocy ułamków prostych

$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2k} - \frac{1}{k+1} + \frac{1}{2(k+2)} ,$$

cd. - kolejny slajd...

a więc n -ta suma częściowa przyjmuje postać

$$\begin{aligned}s_n &= \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \dots \\&\dots + \frac{1}{(n-2)(n-1)n} + \frac{1}{(n-1)n(n+1)} + \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \\&= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 3}\right) + \left(\frac{1}{2 \cdot 2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2 \cdot 4}\right) + \\&+ \left(\frac{1}{2 \cdot 3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2 \cdot 5}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2(n-2)} - \frac{1}{n-1} + \frac{1}{2n}\right) + \\&+ \left(\frac{1}{2(n-1)} - \frac{1}{n} + \frac{1}{2(n+1)}\right) + \left(\frac{1}{2n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2(n+2)}\right) = \\&= \frac{1}{4} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{4(n+2)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{4}.\end{aligned}$$

Pokazaliśmy więc, że $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{4}$.

Zadanie (10). $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$.

R o z w i ą z a n i e. Dany szereg jest zbieżny, ponieważ po zastosowaniu kryterium ilorazowego stwierdzamy, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{2^n n!} = 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^n = \frac{2}{e} < 1.$$

Szeregi potęgowe.

Szereg postaci

$$a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots + a_n(x - x_0)^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n,$$

gdzie a_0, a_1, \dots są dowolnymi liczbami, nazywamy szeregiem potęgowym. Dla $x = x_0$ szereg ten jest zawsze zbieżny i ma sumę a_0 ; dla $x \neq 0$ szereg może być zbieżny, ale nie musi.

O pewnym zastosowaniu takich szeregów już mówiliśmy - **funkcje tworzące!**

Twierdzenie. (o zbieżności szeregu potęgowego). *Jeżeli szereg*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$$

jest zbieżny w punkcie $\tilde{x} \neq x_0$, to jest bezwzględnie zbieżny wewnątrz przedziału $(x_0 - \varrho, x_0 + \varrho)$, gdzie $\varrho = |x_0 - \tilde{x}|$ i jednostajnie zbieżny w każdym przedziale $[-\Theta(x_0 - \varrho), \Theta(x_0 + \varrho)]$, gdzie $0 < \Theta < 1$.

Promieniem zbieżności szeregu potęgowego $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ nazywamy kres górny r zbioru tych $|x - x_0|$, dla których szereg $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ jest zbieżny.

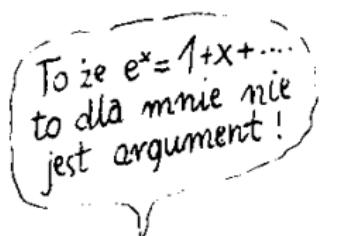
Gdy zbiór ten jest nieograniczony, umawiamy się przyjąć $r = \infty$. Przedział $(x_0 - r, x_0 + r)$ (koło $|x - x_0| < r$) nazywamy przedziałem zbieżności (kołem zbieżności) szeregu potęgowego o promieniu zbieżności r .

Twierdzenie Cauchy'ego - Hadamarda podaje wzór na promień zbieżności.

Twierdzenie. Niech $\lambda = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$. Wtedy promieniem zbieżności szeregu potęgowego $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ jest $r = \frac{1}{\lambda}$, przy czym gdy $\lambda = 0$ przyjmujemy $r = \infty$, a gdy $\lambda = \infty$, przyjmujemy $r = 0$.

Te ostatnie zastosowanie ma swoją podstawę w obserwacji, że *znane nam funkcje* (elementarne) mają swoje reprezentacje w postaci szeregów potęgowych i **wygodnie jest zastępować je szeregami** (co pozwala oszacować z dowolną dokładnością ich wartości!!).

Można m.in. wykazać, że:



$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$



Tak przy okazji - mamy nareszcie **formalne definicje** tych funkcji!
W szkole ich nie było...

Liczba e w obliczeniach komputerowych.

Te wzory pokazują jak efektywnie przybliżać wartości tych (i innych) funkcji na komputerze - np. dla liczby e to

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!},$$

$$e \approx \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!}.$$

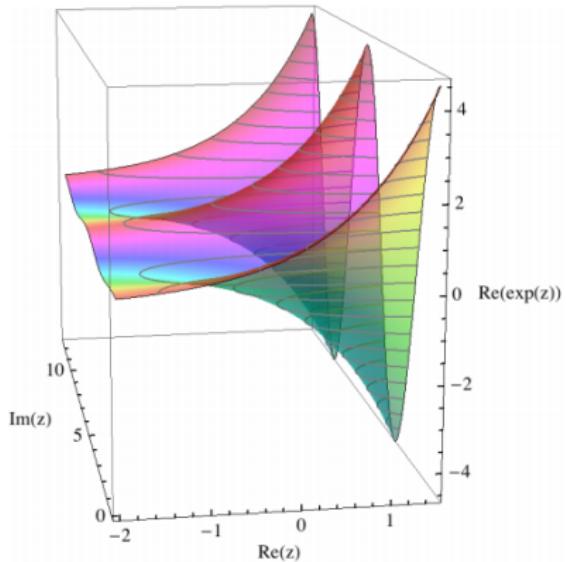
To oczywiście lepsza metoda niż z definicji tej liczby - aby zwiększyć dokładność obliczeń wystarczy zastosować ujęcie rekurencyjne (z definicji - musielibyśmy liczyć całkowicie od nowa).

Ćwiczenie: Obliczyć przybliżenia e z definicji i powyższego wzoru dla $N = 100$. A teraz dla $N = 101\dots$ Czy możemy skorzystać z poprzedniego wyniku? W którym przypadku?

A wszystko dzięki **mnożeniu szeregów**...

Uwagi.

W wielu zastosowaniach informatycznych potrzebne będą **funkcje zespolone** (lub: funkcje wielu zmiennych). To ponownie wykracza poza zaplanowany zakres tego wykładu (niestety...), ale mała uwaga nie zaszkodzi...



Portret \exp , I. Wykres funkcji $f(x, y) = \operatorname{Re}(\exp(x + iy))$ nad prostokątem $-2 \leq x \leq 1.5$, $0 \leq y \leq 12.56$; innymi słowy, wysokość punktu powierzchni nad dolnym dnem pudełka jest równa $\operatorname{Re}(\exp(x + iy))$. Szare linie to poziomice (jak na mapie: wysokość na poziomicy ma jedną, ustaloną wartość. Kolory powierzchni zależą liniowo od części urojonej liczby $\exp(x + iy)$. Przednia krawędź powierzchni odpowiada wartości $y = \operatorname{Im} z = 0$; widzimy wykres \exp na \mathbb{R} .

Szeregi trygonometryczne Fouriera.

Wyrażenie postaci $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ nazywamy *szeregiem trygonometrycznym*. Sumy częściowe tego szergu

$$s_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

to *wielomiany trygonometryczne*.

Twierdzenie. (o współczynnikach jednostajnie zbieżnego szeregu trygonometrycznego). Jeżeli szereg trygonometryczny $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ jest zbieżny jednostajnie do funkcji $f(x)$ dla $x \in (-\pi, \pi)$ to

$$a_0 = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx,$$

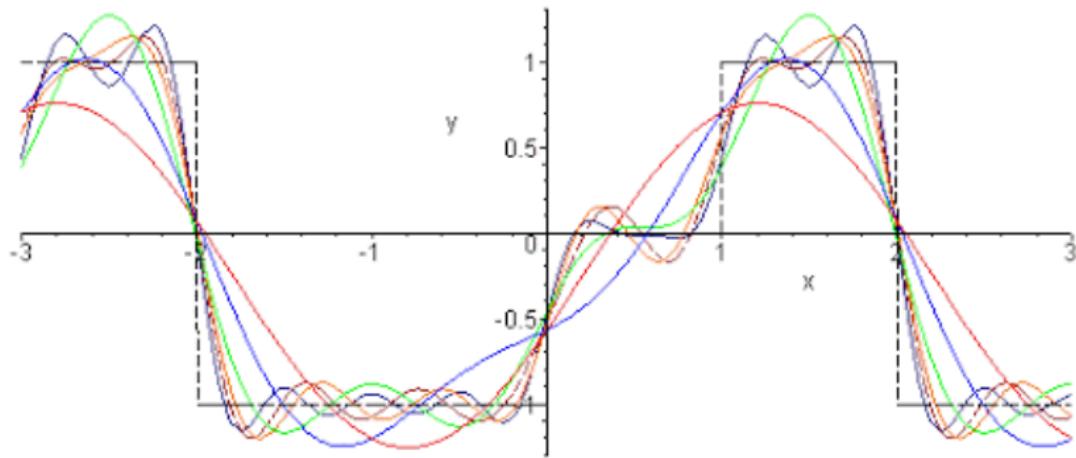
$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx,$$

dla $n = 1, 2, \dots$

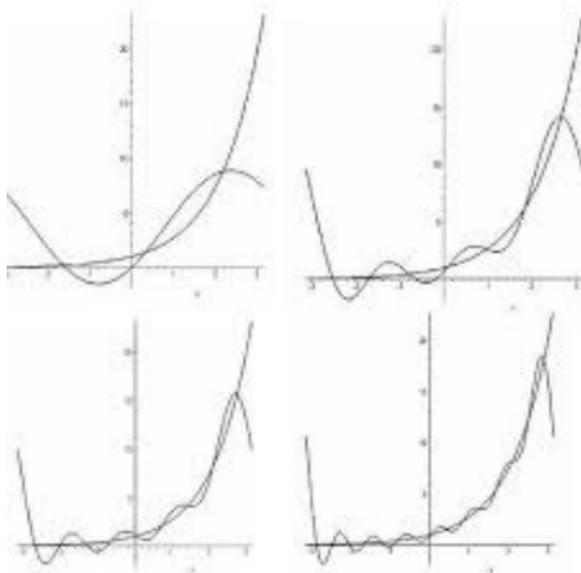
Powysze wzory współczynników a_0, a_n, b_n nazywamy *wzorami Eulera - Fouriera*, a współczynniki a_0, a_n, b_n *współczynnikami Fouriera* funkcji f . Szereg $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ nazywamy jej **szeregiem Fouriera**.

Funkcja schodkowa a szereg Fouriera.



Kolejne sumy częściowe - oznaczone różnymi kolorami.
Tu funkcja $f(x)$ jest schodkowa.

Funkcja wykładnicza e^x a szereg Fouriera.



Tu funkcja $f(x) = e^x$ jest zdefiniowana na $< -3, 3 >$ (i dalej przedłużona poprzez okresowość).

Tajne/poufne.

Przykładowe zagadnienia na egzamin - po tym wykładzie...

- ▶ Dokonujemy przybliżonych obliczeń liczby rzeczywistej e na komputerze za pomocą różnych metod:

[a] wzoru bezpośredniego $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$,

[b] sumy $S_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$ (wzoru rekurencyjnego: $S_n = S_{n-1} + \frac{1}{n!}$).

Dla $n = 9$ wyniki wynoszą odpowiednio: 2,5811747917132 dla [a] oraz 2,71828180114638 dla [b]. Czy można - **bez wykonywania obliczeń** - wskazać ile cyfr po przecinku jest dokładnie obliczone i w którym przypadku? Odpowiedź uzasadnij. Wnioski?

- ▶ Dla danego szeregu $((a_n), (S_n))$, gdzie $a_n > 0$ wiemy, że:

[a] $a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - a_6 + \dots = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + (a_5 - a_6) + \dots$,

[b] $a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - a_6 + \dots \neq (a_1 + a_3 + a_5 + \dots) - (a_2 + a_4 + a_6 + \dots)$,

[c] $a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - a_6 + \dots = (a_1 + a_3 - a_2) - (a_4 + a_6 - a_5) + \dots$.

Co można powiedzieć o zbieżności szeregu (zbieżny?, bezwzględnie zbieżny?, warunkowo zbieżny?, nic nie wiemy?): w każdym przypadku osobno. Odpowiedź uzasadnij.

- ▶ Oznaczmy przez a_n bok 2^n -kąta foremnego wpisanego w okrąg o średnicy jeden. Z twierdzenia Pitagorasa można obliczyć, że $a_2 = \sqrt{2}/2$ oraz
 $a_{n+1} = \frac{1}{2}\sqrt{2 - \sqrt{4 - a_n^2}}$. Zatem obwód tego 2^n -kąta wynosi $A_n = 2^n a_n$.
Z punktu widzenia obliczeń na liczbach rzeczywistych mamy oczywiście:
 $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \pi$. Dlaczego eksperyment numeryczny (obliczanie kolejnych liczb A_n) **nie daje** tego wyniku? Co jest tego przyczyną? Zaproponuj inny algorytm wyznaczania wartości liczby π .
- ▶ Podaj kryterium d'Alemberta zbieżności szeregu i przykład szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ dla którego kryterium te nie rozstrzyga o jego zbieżności.
- ▶ Szereg naprzemienny $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ jest zbieżny (do $\ln 2$). **Jak uzasadnić dlaczego?** Obliczając sumę pierwszych 99 wyrazów otrzymamy wynik przybliżony. Jaki jest błąd tego przybliżenia (twierdzenie!)?

Analiza matematyczna dla informatyków.

Mieczysław Cichoń, ver. 2.1/2021

Mieczysław Cichoń - WMI UAM

Plan wykładów 7,8 ...

Granica i ciągłość funkcji jednej zmiennej rzeczywistej. Punkt skupienia zbioru.

Granica funkcji w punkcie. Ciągłość funkcji (np. spline) i ciągłość jednostajna funkcji. Własność Darboux. Twierdzenie Weierstrassa o kresach.

Ciąg dalszy informacji o funkcjach zadanych szeregiem potęgowym. Wybrane funkcje elementarne. Funkcje zadane szeregami potęgowymi w informatyce (np. błędu).

Wybrane szeregi potęgowe i ich obliczanie. Błąd obliczeniowy. (na ćwiczeniach: kilka granic funkcji i badanie ciągłości funkcji zadanych klamrowo, wykorzystanie własności Darboux do obliczania miejsc zerowych równań nieliniowych.

Strony do lektury na wykłady 7, 8...

Czytamy najpierw motywacje:

[K] : motywacje - strony 24-27

teraz wstępne materiały

[K] : strony 163-166, 168-171

ale tym razem głównym źródłem jest:

[W] : strony 77-96, pomocniczo 98-102
(lub alternatywnie: z tego wykładu strony 53-69).

Funkcje 1.

Fakt, że badanie funkcji jest **niezbędne informatykom** nie podlega chyba (czyżby?) dyskusji (a już funkcje logarytmiczna i wykładnicza przy szacowaniach błędów metod, to już absolutna podstawa). Ale twierdzenia o ich własnościach też będą przydatne?

Funkcja dla komputera, to w uproszczeniu (na razie) pewna reguła zgodnie z którą powinien obliczyć dla dowolnej wartości x z dziedziny jej wartość $f(x)$ - oczywiście najczęściej dokładnie. Ale to nie takie oczywiste... Skoro liczba x jest reprezentowana z pewną dokładnością, to to nie może być mowy o dokładnym wyniku $f(x)$! Przybliżanie wartości to konieczny element większości obliczeń komputerowych. Poza tym dane x też mogą być obarczone dodatkową niepewnością np. pomiarową...

Funkcje 2.

Jeżeli liczba jest niewymierna, to ma nieskończone rozwinięcie (np. dziesiętne) i **można tylko operować na przybliżeniach**. Trzeba być świadomy błędu i kontrolować go. W miarę możliwości to programista ma go ograniczać. Wyobraźmy sobie, że mamy obliczyć $f(\sqrt{5})$ dla pewnej funkcji f , przesłać wynik, a odbiorca wykona dalsze obliczenie np. $g(f(\sqrt{5}))$. Po pierwsze $\sqrt{5}$ do obliczeń musi być przybliżone, czyli $f(\sqrt{5})$ też (zawsze?), teraz problem transmisji danych - to może zwiększyć błąd i znowu obliczenia przybliżone... Inny problem to m.in. czas obliczeń (niekiedy muszą być w czasie "rzeczywistym"). A może przekazać wartość $\sqrt{5}$ w dokładnej postaci i całość obliczeń wykonać po transmisji? Jak? Np. przekazać równanie $x^2 - 5 = 0$, ale to już inna historia. Jest niestety gorzej - nie wszystkie liczby rzeczywiste są pierwiastkami wielomianów o współczynnikach wymiernych (nie są *algebraiczne*) np. π . **Czyli kontrola przybliżeń to wyzwanie dla informatyków.**

Funkcje 3.

Proste **zastosowania**:

- ▶ twierdzenie o złożeniu funkcji obliczalnych (teoria obliczalności),
- ▶ funkcje tworzące i ich własności przy badaniach rekurencji,
- ▶ interpolacja trygonometryczna (funkcje okresowe),
- ▶ funkcje skrótów (haszujące),
- ▶ problemy złożoności obliczeniowej (np. funkcje logarytmiczne i wielomianowe),
- ▶ w metodach numerycznych własność Darboux przy badaniu istnienia rozwiązań równań nieliniowych (powiemy o tym przy okazji metody bisekcji),
- ▶ funkcje tworzące - dla “matematyki dyskretnej” zastosowanej w informatyce,
- ▶ grafika komputerowa, wizualizacja, analiza obrazów (a tam funkcje trygonometryczne, pochodne) itd.

Funkcje 4.

A jak programy obliczają wartości funkcji? Czy jest “najlepszy algorytm”? Dla zainteresowanych **przegląd** algorytmów dla funkcji $f(x) = \sqrt{x}$ można znaleźć tu:

<https://www.codeproject.com/Articles/69941/Best-Square-Root-Method-Algorithm-Function-Precisi>

Funkcje 5.

Z bardziej zaawansowanych zastosowań (bez metod numerycznych):

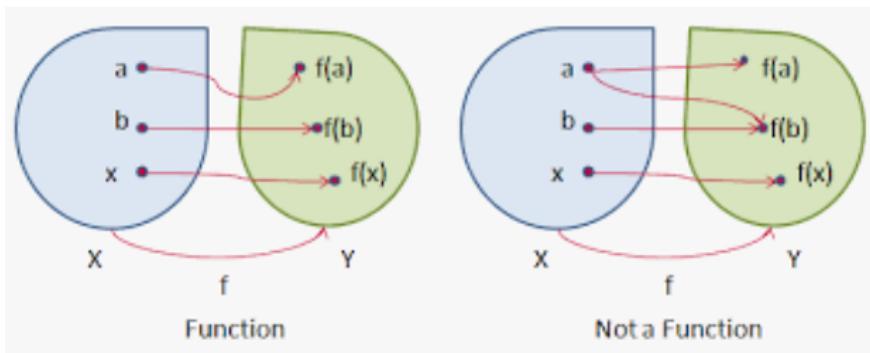
- ▶ Grafika komputerowa: interpolacja, transformaty (Fouriera w JPEG czy falkowa w formacie JPEG 2000) (i algebra liniowa),
- ▶ Optymalizacja: cały rachunek różniczkowy (i algebra liniowa),
- ▶ Robotyka (i inne modelowania fizyczne): analiza funkcji wielu zmiennych,
- ▶ Transmisja danych (np. oszczędne algorytmy przesyłu strumieniowego): rachunek różniczkowy stosowany do probabilistyki, (przesył danych - transformaty Fouriera itp.),
- ▶ Analiza algorytmów - o tym szerzej poniżej (np. asymptotyka)...
- ▶ Jako metoda komunikacji z użytkownikami oprogramowania!!
- ▶ Algorytmy kryptograficzne: istotna różnowartościowość funkcji, a także własności pewnych klasycznych funkcji (np. funkcja sinus w algorytmie MD5), ...

Odwzorowania

Niech X i Y oznaczają dowolne zbiory niepuste.

Odwzorowaniem określonym w zbiorze X o wartościach ze zbioru Y nazywamy przyporządkowanie (pewną metodą) każdemu elementowi $x \in X$ jakiś elementu $y \in Y$. Zapiszemy to $f : X \rightarrow Y$, gdzie f jest symbolem tego odwzorowania.

Odwzorowanie dla którego każdemu $x \in X$ przyporządkowano dokładnie jeden $y \in Y$ nazywamy **funkcją**.



Podstawowe pojęcia.

O ile nie określono inaczej: będziemy domyślnie rozumieć, że dziedziną jest zbiór dla którego dany wzór ma sens (największy taki zbiór). Mówimy, że funkcja $f : X \rightarrow Y$ odwzorowuje zbiór X na zbiór Y (f jest **surjekcją**), gdy dla każdego $y \in Y$ istnieje (co najmniej jeden) element $x \in X$ taki, że $y = f(x)$. Inaczej mówiąc $f(X) = Y$.

O ile $f(X) \subseteq Y$ (tj. $f(X) \subset Y$, ale istnieje $y \in Y \setminus f(X)$) to mówimy, że f odwzorowuje zbiór X w zbiór Y .

Przykładem funkcji f z \mathbb{R} na \mathbb{R} jest $f(x) = 4x + 2$, a przykładem funkcji f z \mathbb{R} w (nie jest to surjekcja) \mathbb{R} $f(x) = x^2 + 1$ (wówczas zbiór wartości: $f(X) = [1, \infty)$).

Fakt, że f odwzorowuje zbiór X na zbiór Y oznaczać będziemy

$$f : X \xrightarrow{\text{na}} Y.$$

Różnowartościowość.

Będziemy mówili, że funkcja $f : X \rightarrow Y$ jest **różnowartościowa** (inne nazwy: iniekcja, wzajemnie jednoznaczna, jedno-jednoznaczna, „jeden na jeden”), gdy zachodzi implikacja

$$(f(x) = f(y)) \implies (x = y), \quad \text{dla dowolnego } x, y \in X.$$

Funkcją różnowartościową jest np. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3x + 1$, a nie jest nią np. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$.

Fakt różnowartościowości funkcji f oznaczać będziemy

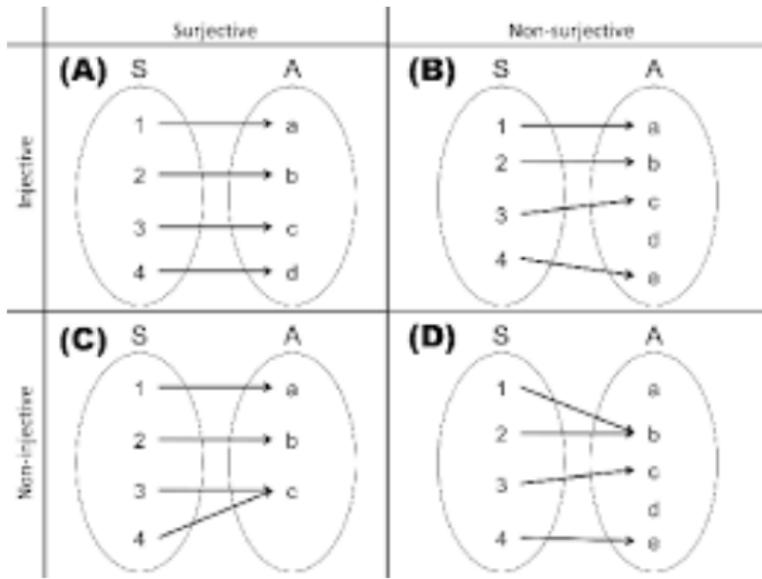
$$f : X \xrightarrow{1-1} Y.$$

Bijekcje i funkcje odwrotne.

Jeżeli funkcja $f : X \xrightarrow[\text{na}]^{1-1} Y$ jest równocześnie różnowartościowa i odwzorowuje zbiór X **na** zbiór Y to nazywamy ją **bijekcją**.

W tym przypadku f określa również inną funkcję (to ważne twierdzenie i powinniśmy to wykazać !!) z Y na X nazywaną **funkcją odwrotną do f** (oznaczaną przez f^{-1}): $f^{-1} : Y \longrightarrow X$.

$$(f^{-1}(y) = x) \iff (f(x) = y)$$



- (A) - funkcja 1-1 i "na"
- (B) - funkcja 1-1, ale nie "na"
- (C) - funkcja nie jest 1-1 i jest "na"
- (D) - funkcja nie jest ani 1-1, ani "na"

Przykład.

Niech $f(x) = 2x + 6$, pokażemy, że jest bijekcją.

Niech $x_1 \neq x_2$, czyli $x_1 - x_2 \neq 0$ oraz

$$\begin{aligned}f(x_1) - f(x_2) &= 2x_1 + 6 - (2x_2 + 6) = 2x_1 + 6 - 2x_2 - 6 = \\&= 2x_1 - 2x_2 = 2(x_1 - x_2) \neq 0 \quad \text{na mocy założenia.}\end{aligned}$$

Funkcja f jest więc różnowartościowa.

Weźmy teraz dowolne $y \in \mathbb{R}$. Ponieważ szukamy $x \in \mathbb{R}$ takiego, że $y = f(x)$, to uzyskamy równanie $y = 2x + 6$ i dalej $y - 6 = 2x$, czyli ostatecznie $\frac{1}{2}y - 3 = x$. Istnieje więc $x \in \mathbb{R}$ takie, że $y = f(x)$, czyli f jest "na" \mathbb{R} .

Stąd $f^{-1}(y) = \frac{1}{2}y - 3$, i $f^{-1} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ jest bijekcją.

Ważną rolę odgrywają pewne klasy odwzorowań:

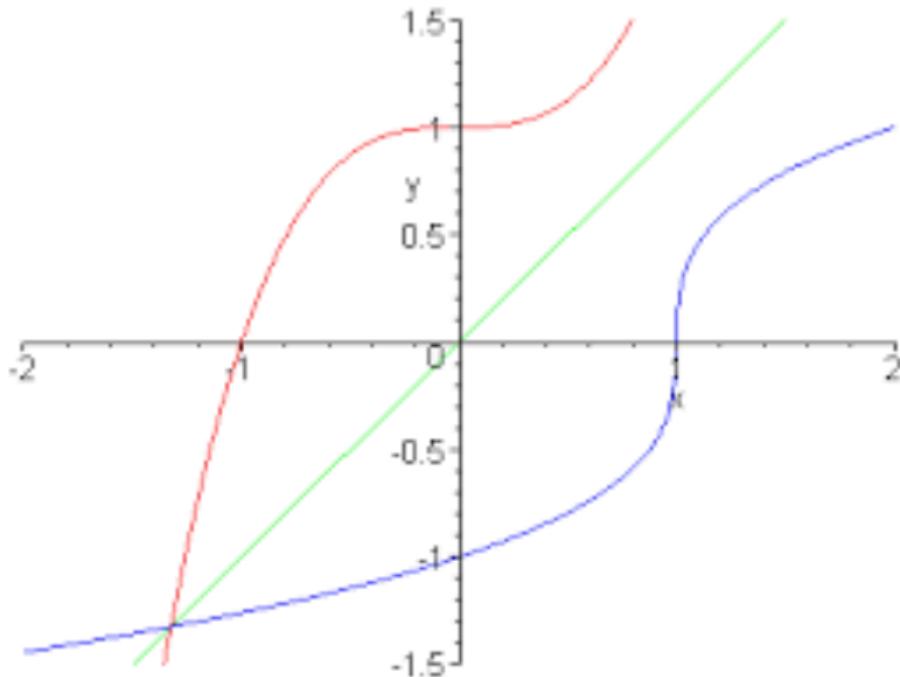
- (a) Niech $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$. Takie funkcje, dla których dziedziną jest zbiór liczb naturalnych nazywamy ciągami (o ile wartości funkcji są w \mathbb{R} to ciągami liczbowymi).
- (b) Niech $X_1 = \{1, 2, 3, \dots, n\}$, $X_2 = \{1, 2, \dots, m\}$.

Funkcje $f : X_1 \times X_2 \rightarrow \mathbb{R}$ nazywać będziemy macierzami $n \times m$ -elementowymi.

Więcej o tych klasach odwzorowań powiemy później.

Wykresy funkcji odwrotnych dla $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Jeżeli f^{-1} jest funkcją odwrotną dla $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, to jej **wykres jest symetryczny do wykresu funkcji f względem prostej $y = x$.**



Monotoniczność.

Definicja. Niech $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$.

Będziemy mówić, że funkcja f jest:

(a) rosnąca w A , gdy

$$(x_1, x_2 \in A, x_1 < x_2) \implies f(x_1) < f(x_2),$$

(b) malejąca w A , gdy

$$(x_1, x_2 \in A, x_1 < x_2) \implies f(x_1) > f(x_2),$$

(c) niemalejąca w A , gdy

$$(x_1, x_2 \in A, x_1 < x_2) \implies f(x_1) \leq f(x_2),$$

(d) nierosnąca w A , gdy

$$(x_1, x_2 \in A, x_1 < x_2) \implies f(x_1) \geq f(x_2).$$

W przypadku, gdy dla dowolnych $x_1, x_2 \in A$, $f(x_1) = f(x_2)$ funkcję nazywać będziemy stałą.

Monotoniczność cd.

Oczywiście funkcja może nie mieć żadnej z powyższych własności!

(np. $f(x) = \sin x$ dla $A = \mathbb{R}$), ale:

wszystkie funkcje posiadające jedną z powyższych własności nazywamy **monotonicznymi** (funkcje z (a) i (b) - ściśle monotonicznymi).

U w a g a : Zwracamy szczególną uwagę, że własność ta zależy od zbioru (dziedziny)! Umawiamy się, że mówiąc krótko „funkcja f jest monotoniczna” oznaczać to będzie, że jest monotoniczna w całej swojej dziedzinie.

Funkcje wypukłe.

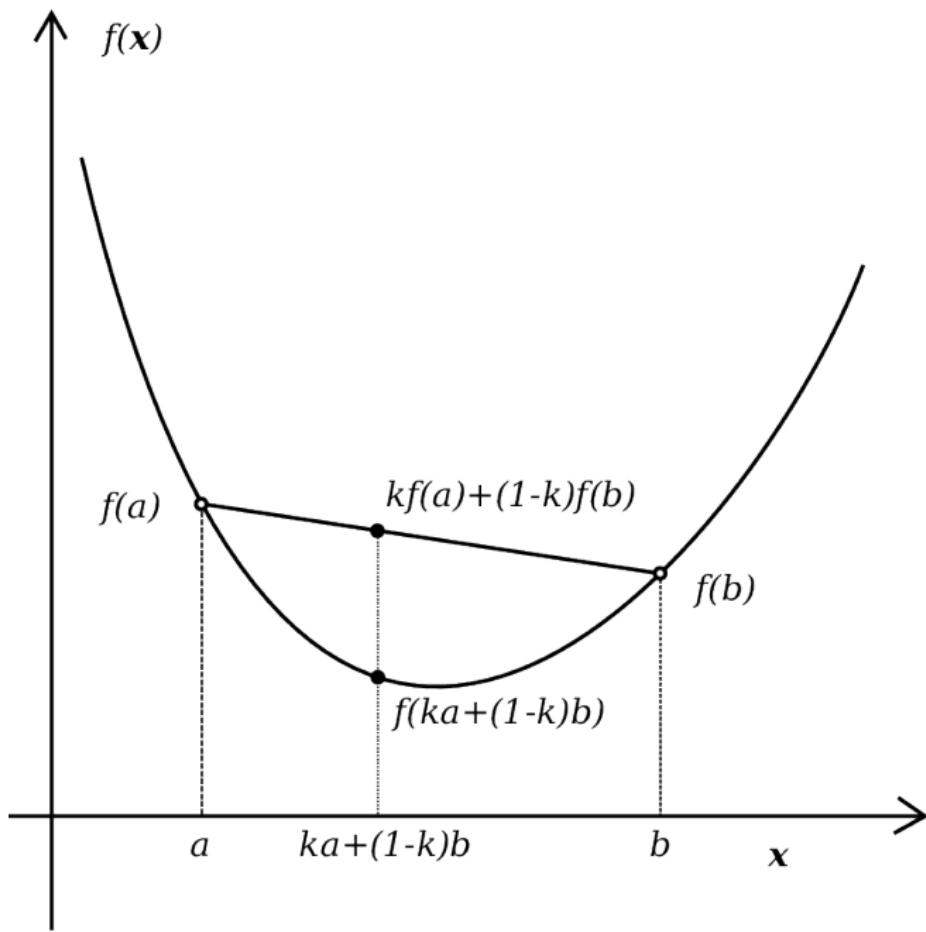
Definicja. Niech $A \subset \mathbb{R}$ będzie przedziałem. Funkcję $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ nazywamy **wypukłą** w A gdy dla dowolnych $a, b \in A$ oraz dowolnych $s, t \in \mathbb{R}$, $k \in \langle 0, 1 \rangle$, zachodzi nierówność

$$f(k \cdot a + (1 - k) \cdot b) \leq k \cdot f(a) + (1 - k) \cdot f(b).$$

W przypadku, gdy nierówność zachodzi w przeciwnym kierunku funkcję nazywamy **wklesłą** w A .

Ponownie zwracamy uwagę, że ta własność także zależy od zbioru, a nierówność jest na ogół bardzo dobrym oszacowaniem dla wartości funkcji f często wykorzystywanym w różnych zastosowaniach.

Nieco później podamy inną metodę badania wypukłości funkcji f . Ilustracją graficzną tej cechy jest fakt, iż odcinek łączący dowolne dwa punkty wykresu $\{(x, y) : x \in A, y = f(x)\}$ „leży nad” wykresem funkcji (dokładnie to stwierdza nierówność z definicji!! - zrobić odpowiedni rysunek).



Przykładami funkcji wypukłych są np. $f(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$ czy $f(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$, natomiast funkcja $f(x) = \sin x$ jest wypukła w $A = < \pi, 2\pi >$, ale nie jest wypukła w swojej dziedzinie. Funkcje wklęsłe to np. $f(x) = -x^2$, $x \in \mathbb{R}$ czy $f(x) = \log x$, $x \in (0, \infty)$.

Przykład. Ponieważ $2 = \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 3$, a funkcja $f(x) = \sqrt{x}$, $x \in < 0, \infty)$ jest wklęsła (sprawdzić !), to m.in. (!) wstawiając $a = 1$ oraz $b = 3$ do definicji uzyskamy

$$\sqrt{2} \geq \frac{1}{2} \cdot \sqrt{1} + \frac{1}{2} \sqrt{3},$$

czyli $2\sqrt{2} - \sqrt{3} \geq 1$, a ta nierówność nie dla wszystkich jest oczywista...

Podobnie natychmiast mamy przydatne oszacowanie pierwiastka: $\sqrt{2} \leq \frac{3}{2}$ (tu: $\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 0$, gdyż $f(x) = 2^x$ - wypukła).

Funkcje elementarne.

A teraz podamy klasę funkcji zwanych elementarnymi. Jest to niestety umowne pojęcie i można spotkać w literaturze zestawy takich funkcji nieco różniące się od naszego, ale na szczęście raczej rzadko.

Do funkcji elementarnych zaliczamy funkcje:

- ▶ potęgowe,
- ▶ wykładnicze,
- ▶ trygonometryczne,
- ▶ **odwrotne do powyższych klas funkcji:** pierwiastkowe, logarytmiczne, cyklometryczne.

Inne klasy funkcji będą uzyskiwane wykonując działania na funkcjach elementarnych, m.in.

- ▶ sumy i iloczyny: np. wielomianowe
 $(f(x) = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + \dots + a_n \cdot x^n)$ i hiperboliczne (!),
oraz ich ilorazy (np. funkcje wymierne - ilorazy funkcji wielomianowych, a szczególny przypadek to funkcje homograficzne $f(x) = \frac{a_0 + a_1 x}{b_0 + b_1 x}$,
- ▶ złożenia funkcji elementarnych,
- ▶ tzw. "klamrowe" (np. wartość bezwzględna, funkcje schodkowe czy funkcja $\text{sgn}(x)$) - różne wzory w różnych częściach dziedziny.

Funkcja znaku ("signum"):

$$f(x) = \text{sgn } x = \begin{cases} 1 & x > 0 , \\ 0 & x = 0 , \\ -1 & x < 0 . \end{cases}$$

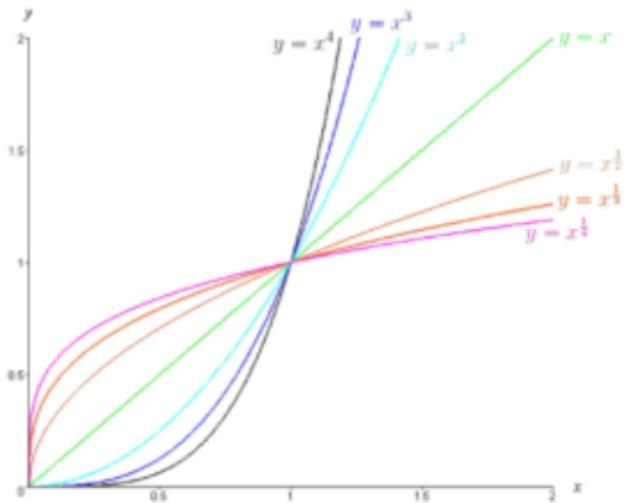
Wybrane funkcje.

Funkcja stała $f(x) = c = \text{const}$ oraz liniowa $f(x) = a \cdot x$ nie wymagają większych komentarzy (może uwaga: tzw. „funkcje liniowe” w szkole średniej $f(x) = a \cdot x + b$ posiadają nazwę od swojego wykresu - linii prostej, w rzeczywistości ta klasa funkcji nazywa się w matematyce funkcjami aficznymi),

Jeżeli $\alpha \in \mathbb{Z}$ to funkcję $f(x) = x^\alpha$ nazywamy funkcją potęgową $X = \mathbb{R}$. Dla α nie będącego liczbą całkowitą dziedzina $X = <0, \infty)$.

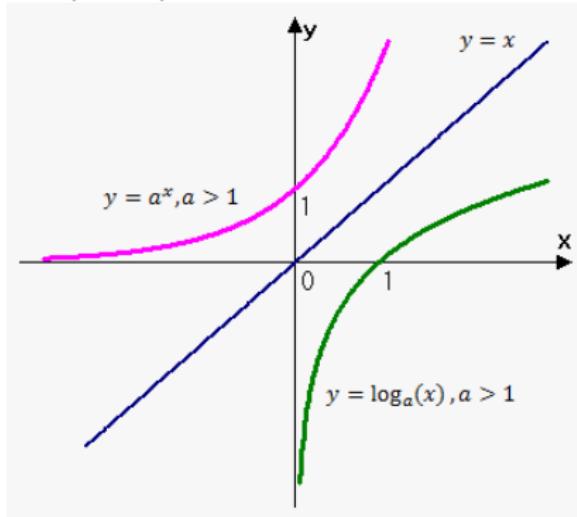
O ile $a > 0$ to funkcję $f : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$ określoną wzorem $f(x) = a^x$ nazywamy funkcją wykładniczą. Własności takich funkcji (w zależności od a) pozostawiamy jako ćwiczenie.

Funkcje potęgowe.



Wybrane funkcje potęgowe - wykresy dla $x \geq 0$. Zwracam uwagę na symetrię wykresów względem prostej $y = x$ (czyli funkcje "pierwiastkowe").

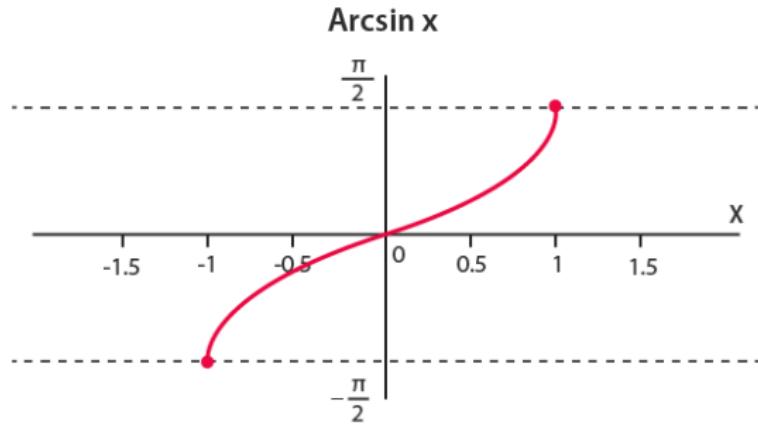
Teraz rozpatrzmy funkcję odwrotną do funkcji potęgowej (o ile $a \neq 1$) $f(x) = a^x$. Funkcja ta istnieje i jest nazywana **funkcją logarytmiczną**. Szczególnie istotną funkcją jest jedna z funkcji wykładniczych: $f(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$ oraz funkcja do niej odwrotna $f^{-1}(x) = \ln x$, $x \in (0, \infty)$.



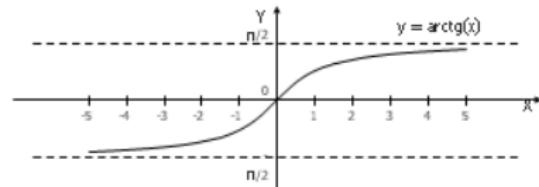
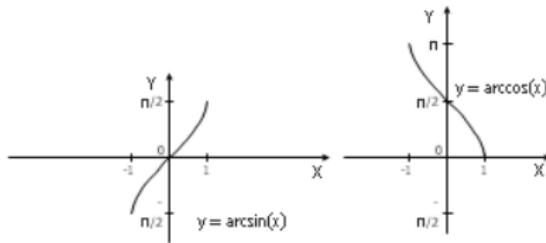
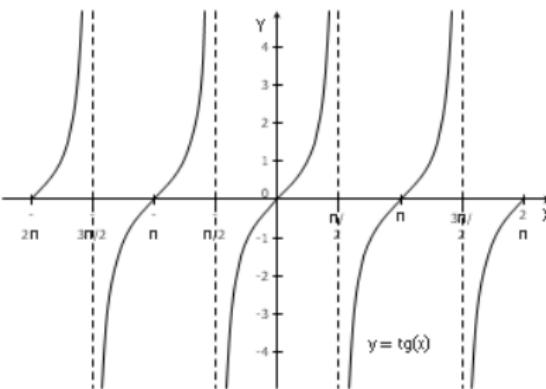
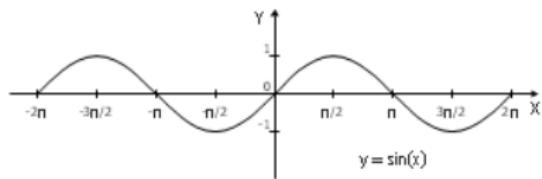
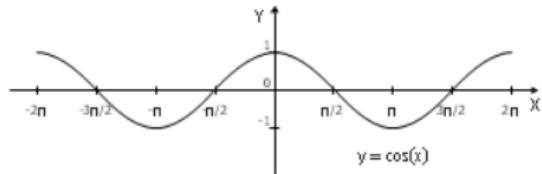
A funkcje logarytmiczne to w informatyce **absolutna podstawa**, por. materiał: takie ciekawostki dla początkujących - koniecznie przeczytać!

Znane z innych działów funkcje trygonometryczne
 $f(x) = \sin x$, $g(x) = \cos x$, $h(x) = \operatorname{tg} x$, $k(x) = \operatorname{ctg} x$ były już wspomniane przy własnościach funkcji. Proszę przypomnieć sobie JAK były definiowane w szkole średniej...

Funkcje odwrotne do nich, ich dziedziny i własności Czytelnik znajdzie częściowo w zadaniach na ćwiczeniach, a w celu poszerzenia wiadomości odsyłamy do literatury.



Funkcje trygonometryczne i odwrotne do nich...



Funkcje schodkowe i łamane.

Jeżeli $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$, oraz $a \leq x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n = t$ to funkcję f nazywamy schodkową, o ile jest stała w każdym z przedziałów (x_{i-1}, x_i) , ($i = 1, 2, \dots, n$); a łamaną, gdy jest afiniczna na każdym z tych przedziałów.

Funkcje hiperbowe.

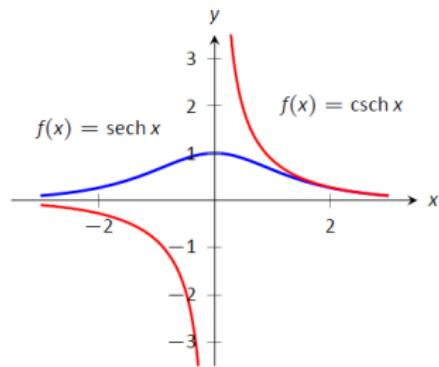
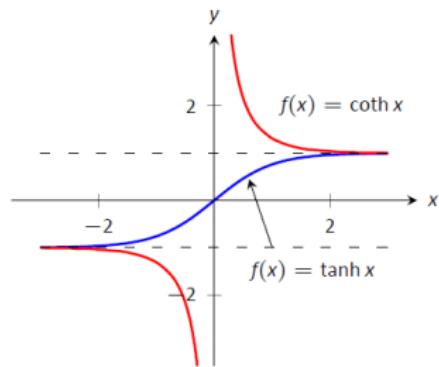
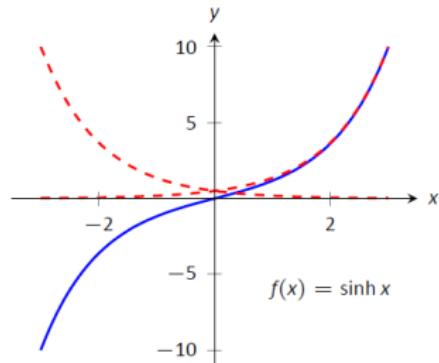
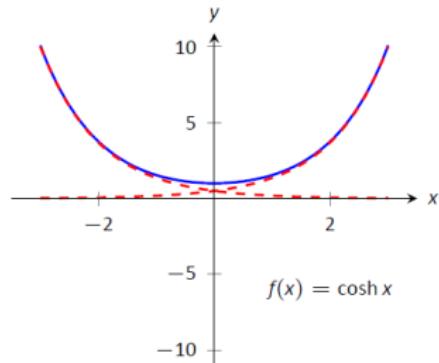
Inne przydatne w niektórych działach zastosowań funkcje **hiperbowe**:

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2},$$

$$\tgh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, \quad \ctgh x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}.$$

Pod pewnymi względami (relacje pomiędzy nimi przypominają te znane z trygonometrii - stąd nazwy) rzeczywiście przypominają funkcje trygonometryczne, ale ich wykresy są zdecydowanie inne niż funkcji trygonometrycznych...

Wykresy funkcji hiperbolicznych.



Cele operowania funkcjami w informatyce.

- (1) przybliżanie jednych funkcji innymi (aproksymacja),
- (2) korzystanie z ich ciągłości i jednostajnej ciągłości (np. własność Darboux),
- (3) znajdowanie punktów charakterystycznych (np. miejsc zerowych, wartości największych itp.),
- (4) badanie własności (np. monotoniczność, wypukłość),
- (5) korzystanie z granic funkcji do obliczeń granic ciągów,
- (6) korzystanie z asymptot (np. symbole Landaua) i inne...

Punkty skupienia zbioru.

Definicja. Element $x_0 \in X$ nazywa się punktem skupienia zbioru $A \subset X$ jeżeli w każdej kuli otwartej $K(x_0, r)$ ($r > 0$) istnieje co najmniej 1 element zbioru A różny od x_0 :

$$\forall_{r>0} \exists_{x \in A, x \neq x_0} x \in (A \cap K(x_0, r))$$

Inaczej mówiąc - x_0 jest punktem skupienia zbioru A jeżeli istnieje ciąg $(x_n) \subset A$ taki, że $|x_n - x_0| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

Oczywiście x_0 nie musi należeć do A . Np. $A = (0, 1)$. Wówczas każdy punkt $x \in A$ jest jego punktem skupienia, ale również 0 i 1 są jego punktami skupienia.

Granica funkcji w punkcie.

Niech $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ i niech x_0 niech będzie punktem skupienia zbioru X .

Definicja. (def. Heinego).

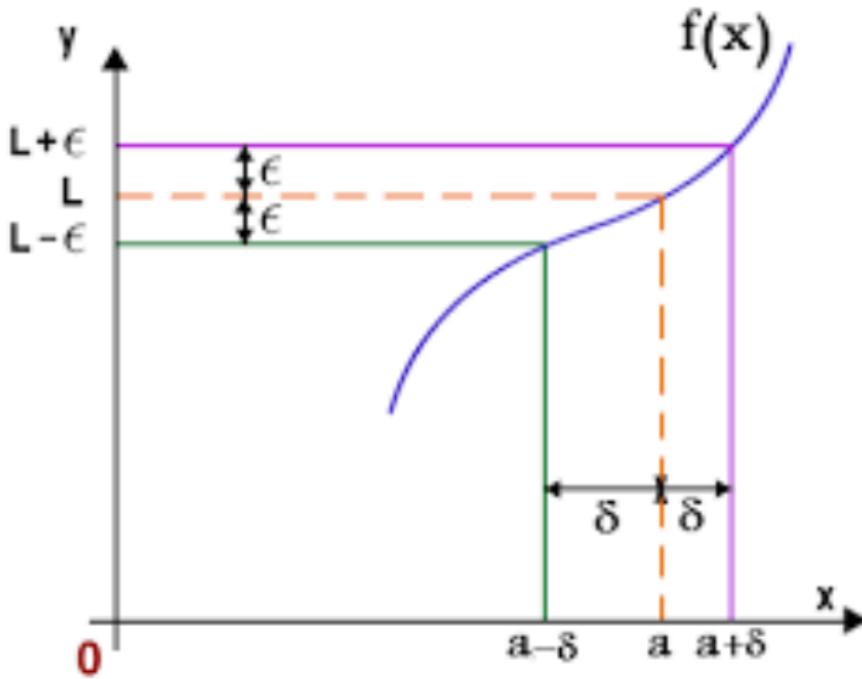
Mówimy, że element y_0 jest granicą funkcji f $x_0 \in X$, jeżeli dla dowolnego ciągu (x_n) elementów $x_n \in X$, $x_n \neq x_0$ oraz $|x_n - x_0| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ odpowiedni ciąg $(f(x_n))$ jest zbieżny do y_0 , czyli $|f(x_n) - y_0| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

Definicja. (def. Cauchy'ego).

Mówimy, że element y_0 jest granicą funkcji f w punkcie $x_0 \in X$, jeżeli dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje taka liczba $\delta > 0$, że dla wszystkich elementów $x \neq x_0 \in X$ takich, że $|x - x_0| < \delta$ zachodzi $|f(x) - y_0| < \varepsilon$

Wówczas piszemy $y_0 = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$.

Granica funkcji w punkcie a .



Równoważność definicji granicy.

Czyli definicja Cauchy'ego ma postać:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in X \quad |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - y_0| < \varepsilon.$$

W powyższych definicjach użyliśmy tej samej nazwy:
„granica funkcji f ” - usprawiedliwia to następujące:

Twierdzenie. *Definicje Heinego i Cauchy'ego granicy funkcji f w punkcie x_0 dla funkcji o wartościach rzeczywistych są równoważne tj. element y_0 jest granicą funkcji f w sensie definicji Heinego wtedy i tylko wtedy, gdy jest granicą funkcji f w sensie definicji Cauchy'ego.*

(C) = (H)

Definicje w przypadku funkcji $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$

(def. Heinego)

$$\forall_{(x_n)} x_n \neq x_0 (|x_n - x_0| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0) \implies (|f(x_n) - y_0| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0)$$

(def. Cauchy'ego)

$$\forall_{\varepsilon > 0} \exists_{\delta > 0} \forall_{x \in \mathbb{R}} |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - y_0| < \varepsilon$$

Granice jednostronne.

Dla funkcji rzeczywistych $f : P \rightarrow \mathbb{R}$, gdzie P jest przedziałem można pojęcie granicy nieco uogólnić.

Definicja. Niech x_0 będzie punktem skupienia przedziału P . Mówimy, że liczba $g \in \mathbb{R}$ jest granicą prawostronną funkcji f w punkcie x_0 jeżeli:

(a) (def. Heinego)

dla dowolnego ciągu (x_n) , $x_n \in P$, $x_n > x_0$ $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x_0$ ciąg $(f(x_n))$ jest zbieżny do g

(b) (def. Cauchy'ego)

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in P \quad 0 < x - x_0 < \delta \implies |f(x) - g| < \varepsilon$$

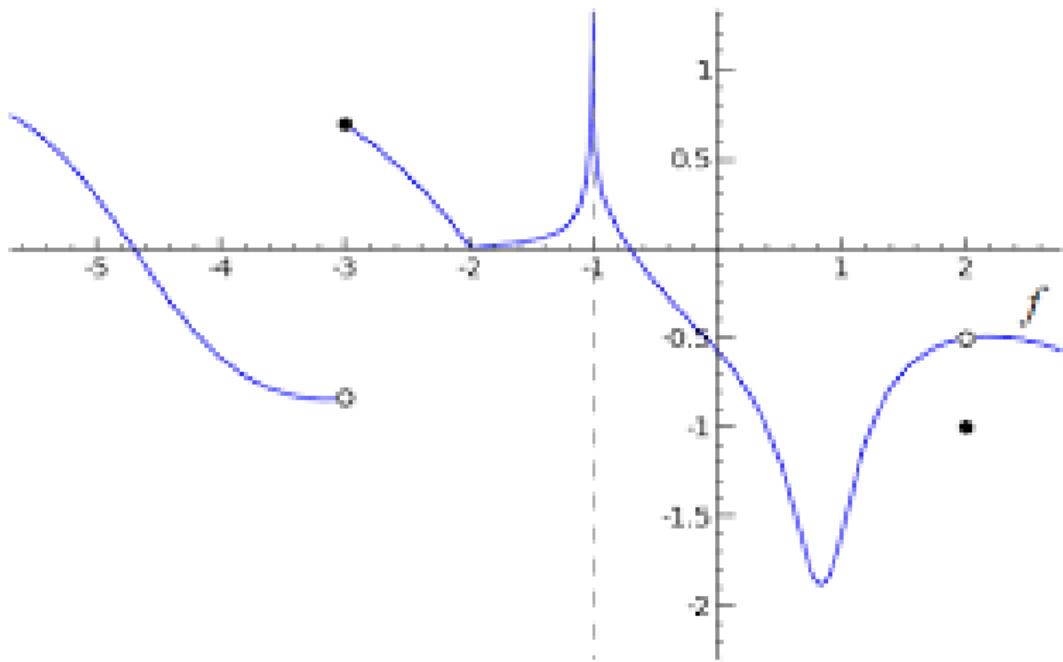
Ten fakt oznaczać będziemy: $g = \lim_{x \rightarrow x_0+} f(x)$

Analogicznie definiujemy granicę lewostronną h : w (a) bierzemy ciągi (x_n) takie, że $x_n < x_0$, a w (b) $x \in P$ spełniające warunek $0 < x_0 - x < \delta$.

Oznaczać ją będziemy $h = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ (lub $h = f(x_0 - 0) = f(x_0-)$). Granice także nazywać będziemy łącznie **jednostronnymi**.

Twierdzenie. Jeżeli $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$, to istnieje granica funkcji f w punkcie x_0 i równa jest wartości tych granic jednostronnych.

Wniosek. Jeżeli $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$, to funkcja f nie posiada granicy w punkcie x_0 .



Różne granice w $x = -3$, w $x = 2$ granice jednostronne równe (ale granica różna od wartości funkcji)...

Granice na komputerze...

Prezentacja: Skrypt ilustracyjny granic w "Mathematica" -
potrzebny darmowy *CDF Player* lub *Mathematica*

Twierdzenie o 3 funkcjach.

Otrzymujemy ważne (analogiczne do granic ciągów):

Twierdzenie. (o trzech funkcjach). Jeżeli funkcje f i g mają tę samą granicę k w punkcie x_0 oraz istnieje liczba $a > 0$ taka, że

$$f(x) \leq h(x) \leq g(x)$$

dla $0 < |x - x_0| < a$, to funkcja h ma granicę w punkcie x_0 i wynosi ona również k .

“Jeżeli obywatel h idzie pomiędzy dwoma policjantami f i g idącymi do komisariatu k , to też tam trafi...”

Działania na granicach.

A teraz kilka działań na granicach:

Twierdzenie. (granica sumy, iloczynu i różnicy). Jeżeli funkcje f i g mają granice w punkcie x_0 , to funkcje $f + g$, $f - g$ oraz $f \cdot g$ mają też granice w tym punkcie i odpowiednio:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) - \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

W szczególności dla $f(x) = c = \text{const.}$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (c \cdot g(x)) = c \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) .$$

Ciągłość funkcji w punkcie.

Definicja. Funkcję f określoną w $(x_0 - a, x_0 + a)$, $a > 0$, nazywamy ciągłą w punkcie x_0 , gdy istnieje granica funkcji f w tym punkcie i jest równa wartości funkcji $f(x_0)$:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) .$$

Twierdzenie. Niech $f : (x_0 - a, x_0 + a) \rightarrow \mathbb{R}$. Funkcja f jest ciągła w punkcie x_0 , gdy zachodzi jeden z równoważnych warunków:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in (x_0 - a, x_0 + a) \quad |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon ,$$

$$\forall_{(x_n)} \left(x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x_0 \right) \implies \left(f(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(x_0) \right) .$$

Analogicznie, jak dla granic, definicje te nazywa się odpowiednio ciągłością funkcji f w punkcie x_0 w sensie Cauchy'ego oraz w sensie Heinego.

Przykłady.

$$(1) \quad f(x) = 1 \text{ dla } x \neq 0 \text{ i } f(0) = 0.$$

Zauważmy, że $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$ (sprawdzenie tego oczywistego faktu pozostawiamy Czytelnikowi). Niemniej

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 1 \neq 0 = f(0).$$

Funkcja nie jest ciągła.

(2) Niech $g(x) = \sin \frac{1}{x}$ dla $x \neq 0$, $g(0) = a$. Jak wiemy, nie istnieje granica funkcji g w punkcie $x_0 = 0$. Co więcej dla jakiekolwiek wartości a nie można uzyskać równości $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = a$, a tak można postąpić w przykładzie (1) kładąc wartość funkcji w punkcie 0 jako $f(0) = 1$.

(3) I jeszcze jeden przypadek $h(x) = \frac{1}{x^2}$ dla $x \neq 0$ oraz $h(0) = 0$. Tu $\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = +\infty$, a więc $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) \neq h(0)$.

Rodzaje punktów nieciągłości.

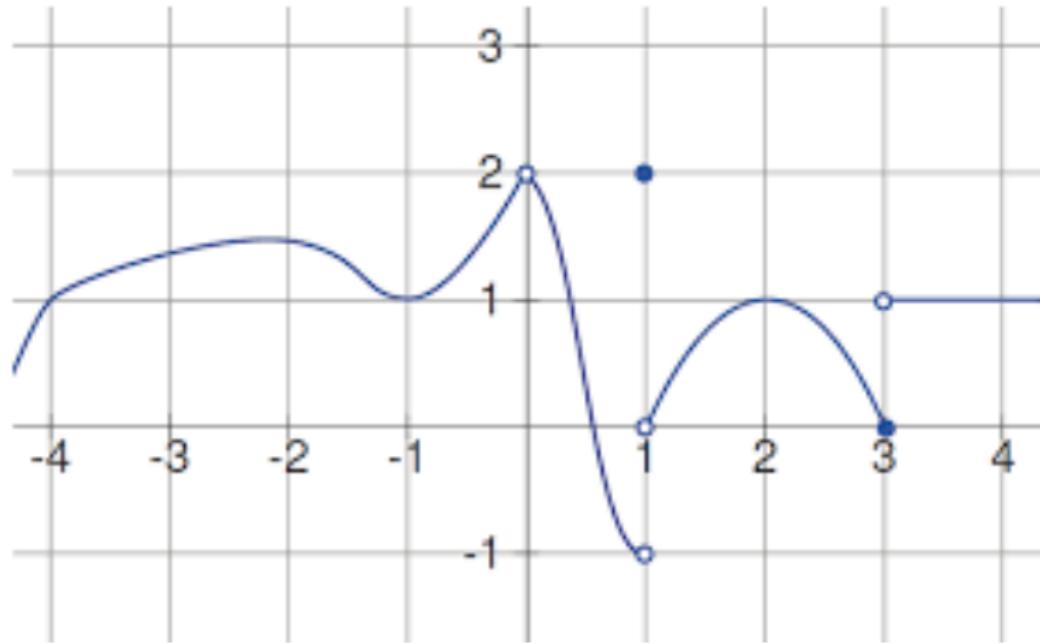
Punkty nieciągłości funkcji f w punkcie x_0 można podzielić na ważne przypadki:

Definicja. Niech $f : (x_0 - a, x_0 + a) \rightarrow \mathbb{R}$ i niech f będzie nieciągła w punkcie x_0 . Mówimy, że:

(1⁰) funkcja f ma nieciągłość I rodzaju o ile istnieją granice jednostronne $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ i $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$; jeżeli przy tym istnieje $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ to nieciągłość nazywamy usuwalną, a jeżeli nie - nieusuwalną,

(2⁰) funkcja f ma nieciągłość II rodzaju, o ile nie istnieje choć jedna z granic jednostronnych $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$.

Punkty nieciągłości.



Nieciągłości I rodzaju (nieusuwalne) w $x = 1$ i $x = 3$ (usuwalna w $x = 0$).

Funkcja z przykładu (1) ma więc nieciągłość I rodzaju usuwalną, a funkcja $f(x) = \operatorname{sgn} x$ nieciągłość I rodzaju nieusuwalną (tzw. skok). W pozostałych przykładach są nieciągłości II rodzaju.

Zadanie: zbadaj ciągłość i określ typ nieciągłości, o ile funkcje są w pewnych punktach nieciągłe:

(a) $f(x) = [\sin x],$

(b) $f(x) = x^2 \cdot ([x])^2,$

(c) $f(x) = x^2 \cdot e^{\frac{1}{x}} .$

(uwaga: $[x] = \operatorname{Ent}(x)$ to funkcja “entier”, czyli część całkowita liczby x)

Badanie nieciągłości za pomocą komputera.

Badanie ciągłości (lub nie) jest akurat jedną z czynności, których komputer (programista) zbyt łatwo nie wykona.

Mamy sporo trudności do pokonania: [skrypt ilustracyjny](#) problemu ze sprawdzaniem nieciągłości nawet w "Mathematica" - potrzebny darmowy *CDF Player* lub *Mathematica*

Dla chętnych (trocę przed czasem - bo temat funkcji wielu zmiennych nie mieści się już w programie "Analizy 1" !!): [skrypt ilustracyjny pokazujący problem z funkcjami wielu zmiennych](#) - **POLECAM!**

Własności funkcji ciągły I.

W związku z własnościami granic mamy oczywiście:

Twierdzenie. (o ciągłości ilorazu) *Jeżeli f i g są ciągłe w punkcie x_0 , to funkcje $f + g$, $f - g$, $f \cdot g$ oraz $a \cdot f$ ($a \in \mathbb{R}$) są ciągłe w x_0 , a jeżeli ponadto $g(x_0) \neq 0$ to także funkcja $\frac{f}{g}$ jest ciągła w x_0 .*

Twierdzenie. (o ciągłości funkcji złożonej) *Niech funkcja g będzie ciągła w punkcie x_0 i niech funkcja f będzie ciągła w punkcie $y_0 = g(x_0)$. Wtedy funkcja złożona $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ jest ciągła w punkcie x_0 .*

Twierdzenie. (o ciągłości funkcji odwrotnej) *Założymy, że funkcja $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ jest ścisłe monotoniczna w tym przedziale i ciągła w każdym punkcie tego przedziału oraz niech $m = \inf_{x \in (a, b)} f(x) \leq M = \sup_{x \in (a, b)} f(x)$. Wtedy funkcja odwrotna $f^{-1} : (m, M) \rightarrow \mathbb{R}$ jest ścisłe monotoniczna w (m, M) i ciągła w każdym punkcie przedziału (m, M) .*

Ciągłość jednostronna.

Definicja.

(1⁰) Funkcję $f : (x_0, x_0 + a) \rightarrow \mathbb{R}$ ($a > 0$) nazywamy prawostronnie ciągłą w punkcie x_0 , gdy istnieje $\lim_{x \rightarrow x_0+} f(x)$ oraz $\lim_{x \rightarrow x_0+} f(x) = f(x_0)$.

(2⁰) Funkcję $f : (x_0 - a, x_0) \rightarrow \mathbb{R}$ ($a > 0$) nazywamy lewostronnie ciągłą w punkcie x_0 , gdy istnieje $\lim_{x \rightarrow x_0-} f(x)$ oraz $\lim_{x \rightarrow x_0-} f(x) = f(x_0)$.

Asymptoty.

Ważną konsekwencją zastosowania pojęcia granicy funkcji w badaniach jej przebiegu jest możliwość wykorzystania tzw. **asymptot funkcji**.

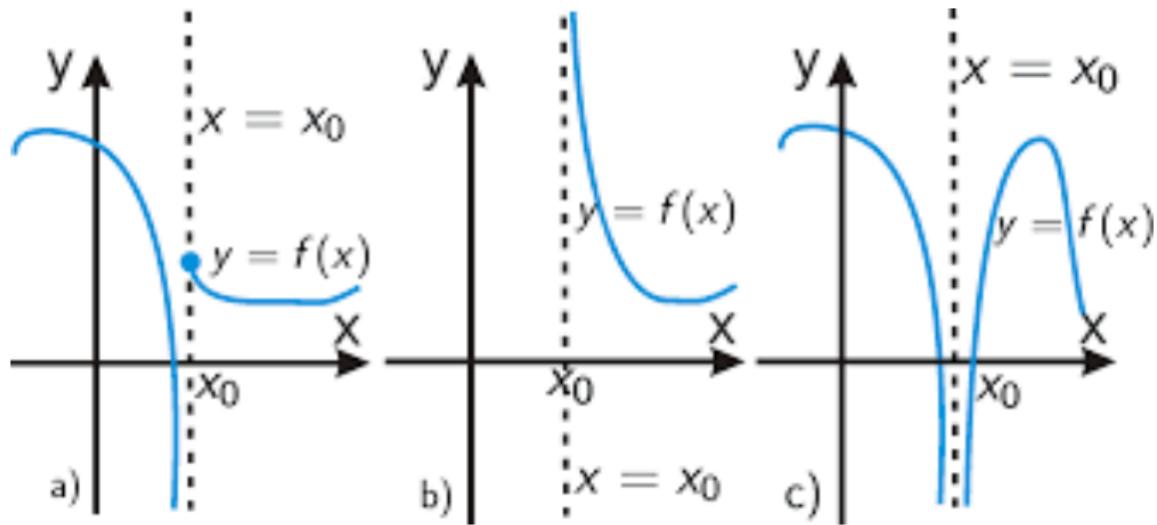
Definicja. Jeżeli funkcja f jest ciągła w przedziale $(x_0 - \varepsilon, x_0) \cup (x_0, x_0 + \varepsilon)$ dla pewnego $\varepsilon > 0$ oraz

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} |f(x)| = +\infty$$

to mówimy, że prosta $x = x_0$ jest **prawostronną [lewostronną] asymptotą pionową funkcji f** .

Na ogół nie będziemy precyzować czy prosta $x = x_0$ jest prawo- czy lewostronną asymptotą pionową i jeśli zajdzie choć jeden z tych przypadków, to będąmy po prostu mówić o asymptocie pionowej funkcji f . Oczywiste jest, że funkcja f może mieć wiele asymptot pionowych np. $f(x) = \tan x$ ma nieskończoność wiele asymptot pionowych (obustronnych!).

Asymptoty pionowe.



a) - lewostronna, b) - prawostronna, c) - dwustronna

a) funkcja prawostronnie ciągła w x_0

Asymptoty ukośne.

Definicja. Jeżeli istnieje $M \subset \mathbb{R}$ taka, że f jest ciągła w przedziale $(M, +\infty)$ $[(-\infty, M)]$, oraz istnieje prosta $y = mx + n$ taka, że

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (mx + n)] = 0 ,$$

odpowiednio: $\left[\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (mx + n)] = 0 \right]$

to tę prostą nazywamy **asymptotą ukośną funkcji f** przy $x \rightarrow +\infty$ [przy $x \rightarrow -\infty$]. W sytuacji, gdy $m = 0$ asymptotę nazywamy czasami poziomą. Jest widoczne, że funkcja może mieć co najwyżej 2 asymptoty ukośne.

Przykład asymptot.

Funkcja $f(x) = |x|$ ma 2 asymptoty ukośne

$$y = x \quad \text{przy } x \rightarrow +\infty ,$$

oraz

$$y = -x \quad \text{przy } x \rightarrow -\infty ,$$

gdziż

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (|x| - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - x) = 0 ,$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (|x| - (-x)) = \lim_{x \rightarrow -\infty} ((-x) - (-x)) = 0 .$$

Wzory na asymptoty ukośne.

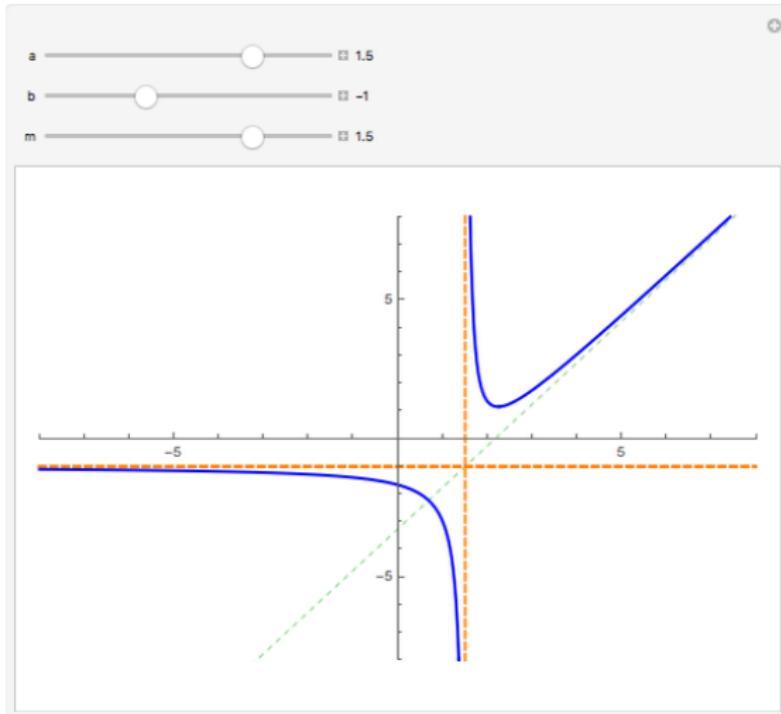
Pozostaje pytanie jak w ogólnym przypadku znaleźć te asymptoty?

Twierdzenie. Warunkiem koniecznym i wystarczającym na to, aby funkcja $y = mx + n$ była asymptotą ukośną funkcji f dla $x \rightarrow +\infty$ [$x \rightarrow -\infty$], jest aby:

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} \quad \text{oraz} \quad n = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - mx) ,$$

odpowiednio: $\left[m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} \quad \text{oraz} \quad n = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - mx) \right] .$

Przykłady asymptot.



Asymptota (pozioma) w $-\infty$ oraz ukośna w $+\infty$.
Jedna asymptota pionowa.

Przykład.

$$f(x) = x + \frac{1}{x}, \quad x \neq 0$$

Funkcja ta jest ciągła w każdym punkcie swojej dziedziny (sprawdzić!). Mamy więc:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$$

Czyli prosta $x = 0$ jest (obustronną) asymptotą pionową.
Rozpatrujmy prostą $y = mx + n$

$$m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) = 1,$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

Stąd $y = x$ jest asymptotą ukośną funkcji f (jedyną).

Zadanie.

Wyznacz asymptoty funkcji:

(a) $f(x) = \frac{x^2 - 6x + 3}{x - 3},$

(b) $f(x) = x \cdot \operatorname{arc ctg} x,$

(c) $f(x) = \ln(4 - x^2).$

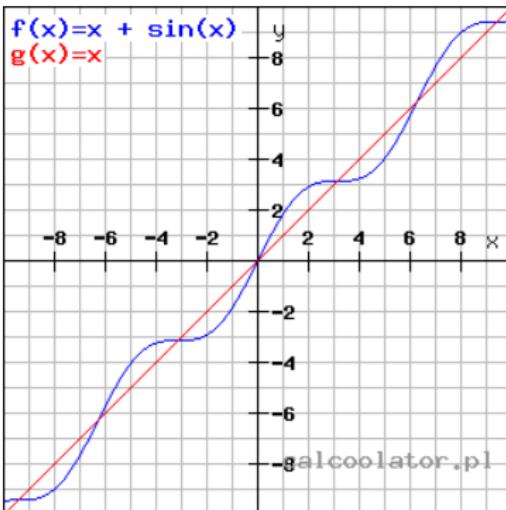
Prosimy zwrócić uwagę na istnienie OBU współczynników w definicji asymptoty ukośnej !!!

Przykład. Dla funkcji $f(x) = x + \sin x$ mamy:

$$m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$$

ALE

$n = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sin x$ nie istnieje, a więc funkcja **nie ma** asymptot ukośnych ...



Własności funkcji ciągły II.

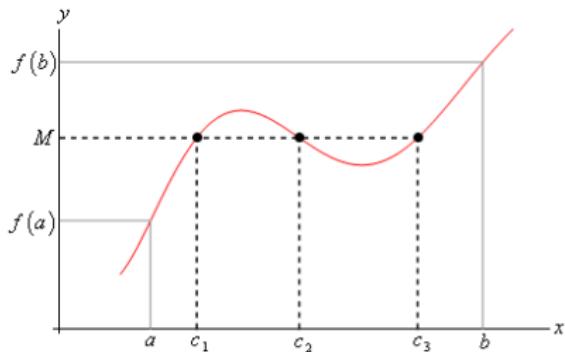
Mówimy, że funkcja f jest ciągła w zbiorze A , jeżeli jest ciągła w każdym punkcie x_0 tego zbioru. Jeżeli przy tym $A = \langle a, b \rangle$, to w punkcie $x_0 = a$ rozważamy ciągłość prawostronną, a w punkcie $x_0 = b$ - ciągłość lewostronną.

Twierdzenie. *Funkcja ciągła w przedziale domkniętym jest w tym przedziale ograniczona.*

Twierdzenie. *Funkcja ciągła w przedziale domkniętym osiąga w nim swoje kresy.*

Własność Darboux.

Twierdzenie. (własność Darboux) Jeżeli funkcja f jest określona i ciągła w przedziale $P = \langle a, b \rangle$ oraz $x_1, x_2 \in P$, $x_1 < x_2$ będą takie, że $y_1 = f(x_1) \neq f(x_2) = y_2$, to funkcja f przyjmuje w przedziale $\langle x_1, x_2 \rangle$ wszystkie wartości pośrednie między y_1 i y_2 .



<https://www.geogebra.org/m/CXEN5xM3>

Ciągłość jednostajna.

Zgodnie z definicją ciągłości funkcji f w punkcie x_0 , wybór liczby δ może być zależny od ε i od x_0 . Jeśli uda się dobrać δ niezależnie od wyboru punktu x_0 , to takie funkcje (a nie są to wszystkie funkcje ciągłe) będą miały szczególne własności.

Definicja. Funkcję f określzoną w niepustym zbiorze $A \subset \mathbb{R}$ nazywamy **jednostajnie ciągłą**, gdy dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $\delta > 0$ taka, że dla dowolnych $x, x_0 \in A$ spełniających warunek $|x - x_0| < \delta$, zachodzi nierówność $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Zestawimy tu powtórnie obie definicje:

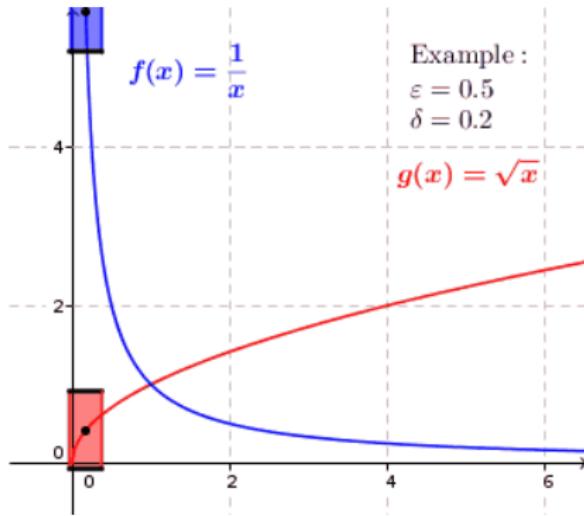
$$\forall_{x_0} \quad \forall_{\varepsilon > 0} \quad \exists_{\delta > 0} \quad \forall_{x \in A} \quad |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon ,$$

$$\forall_{\varepsilon > 0} \quad \exists_{\delta > 0} \quad \forall_{x_0 \in A} \quad \forall_{x \in A} \quad |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon .$$

Przykładem funkcji ciągłej jednostajnie na $A = \mathbb{R}$ jest $f(x) = \sin x$, ale np. dla $A = (0, 1)$ funkcja $f(x) = \frac{1}{x}$ nie jest ciągła jednostajnie.

Ta własność jest silniejsza niż ciągłość, ale mamy twierdzenie:

Twierdzenie. *Funkcja ciągła w przedziale domkniętym jest w tym przedziale jednostajnie ciągła.*



W informatyce...

Własność jednostajnej ciągłości wydaje się trudna i zbędna w informatyce, Błąd! **Tylko** takie funkcje są przydatne w obliczeniach! Zauważmy, że obliczając $f(x_0)$ (por. *Funkcje 2.*) wyznaczamy x_0 z pewną dokładnością, powiedzmy δ . Zgodnie z definicją ciągłości wartość $f(x_0)$ wyznaczamy z pewnym błędem ε . Oczekujemy, że w **innych** punktach x błąd **powinien być taki sam**. Ale to - to właśnie jednostajna ciąłość funkcji!!
Błąd oszacowania wartości $f(x)$ jest zależny od błędu oszacowania x , ale jest jednakowy dla wszystkich wartości $x \in A$ tylko dla funkcji **jednostajnie ciągłej na A**.

Stąd będziemy zwracali uwagę na warunki wystarczające ciągłości jednostajnej. Jeden już był, a drugi pojawi się po wprowadzeniu pochodnych (może już teraz: ograniczona pochodna na A , albo warunek Lipschitz'a). To często "ukryte" założenie algorytmów obliczania wartości funkcji...

Korzystając zaś z definicji Heinego i znanych już twierdzeń dla ciągów liczbowych można (oprócz powyższego) udowodnić kolejne twierdzenia.

Twierdzenie. Jeżeli $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ i funkcja g jest ograniczona w pewnym zbiorze $(x_0 - a, x_0) \cup (x_0, x_0 + a)$ (dla pewnego $a > 0$) to $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot g(x) = 0$.

Twierdzenie. (o granicy ilorazu). Jeżeli funkcje f i g mają granice w punkcie x_0 i $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \neq 0$, to funkcja $\frac{f}{g}$ ma też granicę w punkcie x_0 oraz

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)} .$$

Bisekcja.

A tu już coś korzystającego z własności funkcji - na początek ciągłość.

To prosta (czyżby?) metoda znajdowania przybliżonego rozwiązania równania.

Weźmy równanie (dla ułatwienia jest to wielomian o współczynnikach całkowitych):

$$W(x) = x^5 - 8x^4 + x + 11.$$

Na początek jest łatwo: wiemy (dzięki matematyce!), że mamy od 1 do 5 rozwiązań rzeczywistych (można wykonać wykres, o ile potrafimy...).

Obliczamy kilka wartości w różnych punktach (zastanowić się jak je wybierać). Np. $W(-2) = -151 < 0$, $W(0) = 11 > 0$, $W(2) = -83 < 0$, $W(10) = \dots > 0$. Zlokalizowaliśmy co najmniej 3 rozwiązania (a ile ich jest?).

Bisekcja - c.d.

Teraz stosujemy znany algorytm bisekcji, **ALE** ...

1. Ile jest rozwiązań?
2. Czy na pewno w przedziałach $[-2, 0]$, $[0, 2]$ i $[2, 10]$ mamy rozwiązanie i jest ono **jedynie**?
3. Czy (i jak?) można oszacować błąd przybliżenia?
4. O ile przyjmiemy zakładaną dokładność przez ε , to co się stanie z algorytmem, gdy $|x_1 - x_2| < \varepsilon$ (x_1, x_2 - rozwiązania)?

Dobre? No to

$$\sin \frac{2\pi}{x} = 0 \quad x \in \left[\frac{1}{10000000}, 1 \right]$$

i powodzenia... Problemem jest też powolna zbieżność metody...

Pomoże matematyka (i analiza matematyczna)...

Bisekcja - problemy.

Aby stosować ten algorytm musimy kontrolować własności funkcji f w równaniu $f(x) = 0$ w a, b . Zakładamy $f(a) \cdot f(b) < 0$. (jak zawsze - istnienie i jedyność)

- (1) musi **istnieć** rozwiązanie w tym przedziale (dzięki ciągłości możemy mieć własność Darboux, a to jest warunkiem wystarczającym),
- (2) aby wyznaczyć rozwiązanie musimy wyizolować **jedynie** rozwiązanie w pewnym podprzedziale (tu mogą pomóc inne własności jak moduł ciągłości, albo - o czym później - własności pochodnej...),
- (3) metoda nie gwarantuje znalezienia wszystkich rozwiązań.

... ale nawet wtedy algorytm nie musi być skuteczny (uwaga na przybliżenia...). Proponuję przeczytać: [K] str. 24-25 i może **sprawdzić** tamte informacje?

Błędy...

Proces aproksymacji to ważny punkt analizy matematycznej. Obliczanie przez komputer wyrażenia zadaną dokładnością nie jest banalne gdy obliczamy wartości rzeczywiste x . Przecież już w punkcie wyjścia mamy wartość przybliżoną (np. przekątna kwadratu o boku 1 ...). Przykłady ograniczania błędów (f - "trudna", g - "łatwa" obliczeniowo):

$$f(x) = x \cdot \sin x \text{ oraz } g(x) = x^2$$

mają "bliskie" wartości dla x w otoczeniu zera

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{x} \text{ oraz } g(x) = x$$

mają "bliskie" wartości dla "dostatecznie" dużych x .

A jak rola analizy matematycznej? Koniec z cudzysłowami, skorzystamy z **granic i asymptot** (symbole o "małe" i O "duże").

Granice niewłaściwe.

Definicja. Niech funkcja f będzie określona dla takich x , że $0 < |x - x_0| < a$ przy pewnym $a > 0$. Mówimy, że funkcja f ma w punkcie x_0 **granicę niewłaściwą** $+\infty$, gdy dla dowolnej liczby $M > 0$ istnieje taka $\delta > 0$, że jeśli $0 < |x - x_0| < \delta$, to $f(x) > M$.

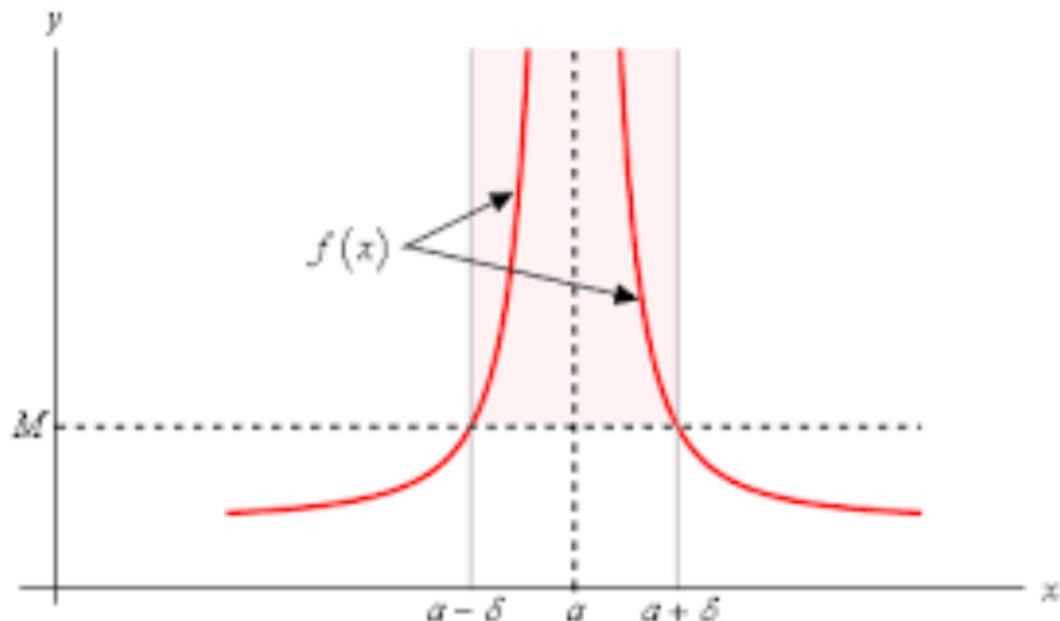
Fakt ten zapisujemy $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$.

$$\forall M > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad 0 < |x - x_0| < \delta \implies f(x) > M .$$

Analogicznie: funkcja f ma w punkcie x_0 **granicę niewłaściwą** $-\infty$, gdy

$$\forall M > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad 0 < |x - x_0| < \delta \implies f(x) < -M$$

Granica niewłaściwa.



Granice w nieskończoności.

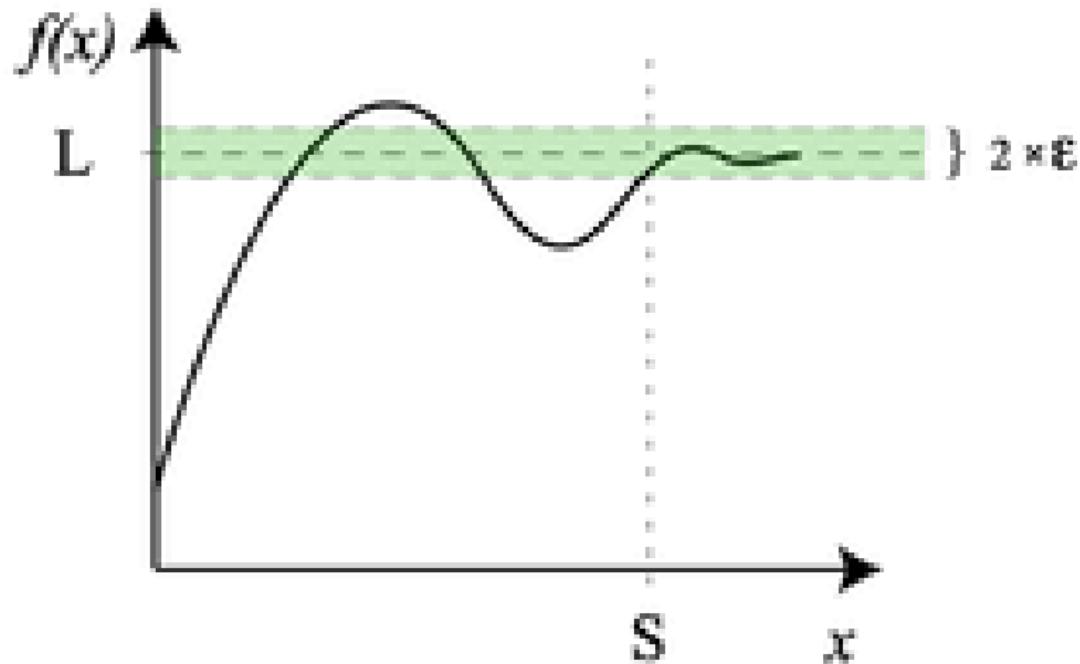
Definicja. Niech funkcja f będzie przy pewnym $a > 0$ określona w przedziale $< a, \infty$). Liczbę $g \in \mathbb{R}$ nazywamy **granicą funkcji f przy x dążącym do $+\infty$** (co zapiszemy $g = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ lub $f(x) \rightarrow g$ dla $x \rightarrow +\infty$) gdy dla dowolnej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje taka liczba $A > 0$, że jeśli $x > A$, to $|f(x) - g| < \varepsilon$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists A > a \quad \forall x \in < a, \infty) \quad x > A \quad \Rightarrow \quad |f(x) - g| < \varepsilon .$$

Analogicznie dla funkcji f określonej w $(-\infty, a >$ liczbę g nazwiemy **granicą funkcji f przy x dążącym do $-\infty$** ($g = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ lub $f(x) \rightarrow g$ przy $x \rightarrow -\infty$), gdy

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists A > 0 \quad \forall x \in (-\infty, a >) \quad x < -A \quad \Rightarrow \quad |f(x) - g| < \varepsilon .$$

Granica w nieskończoności.



Funkcje asymptotycznie niewiększe.

Prawie przy każdej okazji przedstawiania algorytmu podany będzie np. **rząd jego złożoności obliczeniowej**: "O" duże = symbol Landau'a, np. sortowanie o złożoności $O(n \log n)$, co pośluży do oceny i porównywania algorytmów. Alternatywą są nierówności pomiędzy ciągami dowodzone poprzez indukcję matematyczną...

Funkcja asymptotycznie niewiększa od funkcji $g(n)$ to taka funkcja $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, dla której istnieją $c > 0$ i $n_0 \in \mathbb{N}$, że $|f(n)| \leq c \cdot |g(n)|$ dla (prawie) wszystkich $n \geq n_0$.

Podstawowym zastosowaniem notacji asymptotycznej **w informatyce** jest szacowanie długości działania programów, w szczególności procedur rekurencyjnych, których złożoność łatwo opisać równaniem rekurencyjnym.

Patrz też notacje: "duże Theta" $\Theta(n)$ i "duże Omega" $\Omega(n)$ (ich warunki wystarczające w języku granic ciągów)...

Czasowa złożoność obliczeniowa.

Oznacza to, że $|f(n)| \leq c \cdot |g(n)|$ zachodzi dla (prawie wszystkich) liczb naturalnych n , czyli po prostu (warunek wystarczający)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} < \infty$$

lub nawet niekiedy warunek stosowany ogólniej:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} < \infty.$$

Zbiór funkcji asymptotycznie nie większych niż $g(n)$ oznaczamy przez $O(g(n))$. Przykładowe zastosowanie w informatyce:
twierdzenie o rekursji uniwersalnej (szacowanie długości działania programu wraz ze wzrostem ilości danych - oczywiście asymptotyczne oszacowanie).

<http://th-www.if.uj.edu.pl/~erichter/dydaktyka/Dydaktyka2013/TPI-2013/TPI-wyklad-3-2013-newTempl.pdf>

Funkcje asymptotycznie podobne (równe).

Jeżeli $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 1 < \infty$, to funkcje są asymptotycznie równe (czyli $f(n) \sim g(n)$). Studenci matematyki uczą się np. wzoru Stirliga

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

(o liczbie e powiemy oczywiście na wykładzie...), a w informatyce (kryptografia) np. przybliżenie na ilość liczb pierwszych nie większych niż n

$$\pi(n) \sim \frac{n}{\ln n}.$$

Możliwe zastosowanie wzoru Stirlinga dla **informatyków**: np. oszacowanie liczby cyfr rozwinięcia dziesiętnego liczby 999!.

Funkcje asymptotycznie mniejsze.

Kolejny szczególnie ciekawy przypadek:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0,$$

czyli symbol "o" małe..., czyli istnieje n_0 , takie, że dla dowolnego $c > 0$ nierówność $|f(n)| < c \cdot |g(n)|$ zachodzi dla wszystkich liczb naturalnych $n \geq n_0$.

W **informatyce** - np. przydatne w badaniach złożoności obliczeniowej, jak w twierdzeniach o hierarchii czasowej i pamięciowej czy w szacowaniu reszty we wzorze Taylora = błędu lub w badaniach złożoności czasowej algorytmów (np. istotny wynik: dla każdego k mamy $\log_2 n = o(n^k)$ - algorytm przeszukiwania połówkowego), patrz też - później - tw. Stolza i reguła de l'Hôspitala....

Poza tym dzięki twierdzeniu: jeżeli $f(n) = o(g(n))$, to $f(n) = O(g(n))$, pojęcie będzie przydatne bezpośrednio.

Symbole Landau'a.

Zależności algebraiczne O , o , Ω , ω , Θ .

zapis warunek wystarczający

$$f(x) \in O(g(x)) : \lim_{x \rightarrow \infty} \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| < \infty$$

$$f(x) \in o(g(x)) : \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

$$f(x) \in \Omega(g(x)) : \lim_{x \rightarrow \infty} \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| > 0$$

$$f(x) \in \omega(g(x)) : \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$$

$$f(x) \in \Theta(g(x)) : 0 < \lim_{x \rightarrow \infty} \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| < \infty$$

$f(x) \in O(1)$ – funkcja $f(x)$ jest ograniczona,

$f(x) \in O(\log n)$ – funkcja $f(x)$ jest ograniczona przez funkcję logarytmiczną,

$f(x) \in O(n)$ – funkcja $f(x)$ jest ograniczona przez funkcję liniową,

$f(x) \in O(n \log n)$ - w informatyce, funkcja $f(x)$ jest ograniczona przez funkcję quasi-liniową,

$f(x) \in O(n!)$ – funkcja $f(x)$ jest ograniczona przez silnię.

Zastosowanie: badanie złożoności obliczeniowej algorytmów.
Najczęstszym zastosowaniem asymptotycznego tempa wzrostu jest szacowanie złożoności problemów obliczeniowych, w szczególności algorytmów. Oszacowanie rzędów złożoności obliczeniowej funkcji pozwala na porównywanie ilości zasobów (np. czasu, pamięci), jakich wymagają do rozwiązania problemu opisanego określoną ilością danych wejściowych. W dużym uproszczeniu: im niższy rząd złożoności obliczeniowej algorytmu, tym będzie on wydajniejszy przy coraz większym rozmiarze problemu (np. ilości danych).

Tajne/poufne.

- ▶ Własność Darboux: rozpatrz 2 przypadki (funkcje ciągłe i pochodne funkcji). Uzasadnij konieczność jej wykorzystania w metodzie bisekcji. Podaj inny przykład, gdy w algorytmie numerycznym korzystamy z tej własności.
- ▶ W oszacowaniach złożoności algorytmów występuje symbol Landaua "o małe" (funkcje asymptotycznie mniejsze):
 $f(n) = o(g(n))$. W praktyce oczywiście funkcje $f(n)$ i $g(n)$ są rozbieżne do niekończoności, więc korzystnie jest rozszerzyć funkcje f i g jako zdefiniowane na \mathbb{R} i wykorzystać regułę de l'Hôspitala. **Podaj ją i sprawdź, że** dla dowolnego $\alpha > 0$
 $f(n) = \log_2(n) = o(n^\alpha)$.
- ▶ Wiemy, że funkcja $f(x)$ jest rzędu $o(x^2)$ przy $x \rightarrow 0$. Wybierz, które z funkcji podanych poniżej spełniają taki warunek - **wykonaj obliczenia**:

- [a] $f_1(x) = x^3$,
- [b] $f_2(x) = 274x^2$,
- [c] $f_3(x) = 2x^{\frac{3}{2}}$,
- [d] $f_4(x) = (\sin x)^2$.

- ▶ Obliczając za pomocą komputera wartość pewnej funkcji $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ w punkcie $x_0 \in [a, b]$ popełnimy na ogół błąd polegający na konieczności wykonania obliczeń przez komputer na liczbach rzeczywistych.

Oznaczmy przez $\varepsilon > 0$ akceptowalną dokładność obliczeń wartości funkcji f , a przez $\delta > 0$ możliwą dokładność wyznaczania wartości liczby rzeczywistej x_0 . Jaka własność funkcji f pozwala, przy ustalonym $\varepsilon > 0$ na uzyskanie **wspólnej dla wszystkich punktów x_0** wielkości $\delta > 0$?

Jaka klasa funkcji ciągłych f to zapewnia i podaj 2 przypadki (twierdzenia), pozwalające zbadać zachodzenie tej własności.

- ▶ Oblicz, czy $2^{n+1} = O(2^n)$? A czy $2^{2n} = O(2^n)$? (wsk. : symbole Landaua "O duże")

Analiza matematyczna dla informatyków.

Mieczysław Cichoń, ver. 2.4/2021

Mieczysław Cichoń - WMI UAM

Plan wykładów 9, 10, 11+12 ...

Rachunek różniczkowy funkcji jednej zmiennej rzeczywistej.

Pochodna i jej sens geometryczny.

Zastosowania w informatyce (m.in. podstawy interpolacji, funkcje spline).

Interpretacja geometryczna pochodnej. Liniowe przybliżanie funkcji (lokalne).

Podstawowe twierdzenia rachunku różniczkowego i wnioski z nich.

Metoda Newtona.

Rola wzoru Taylora w szacowaniu błędów.

Badanie przebiegu zmienności funkcji (na ćwiczeniach: obliczanie prostych pochodnych, sprawdzanie monotoniczności funkcji.)

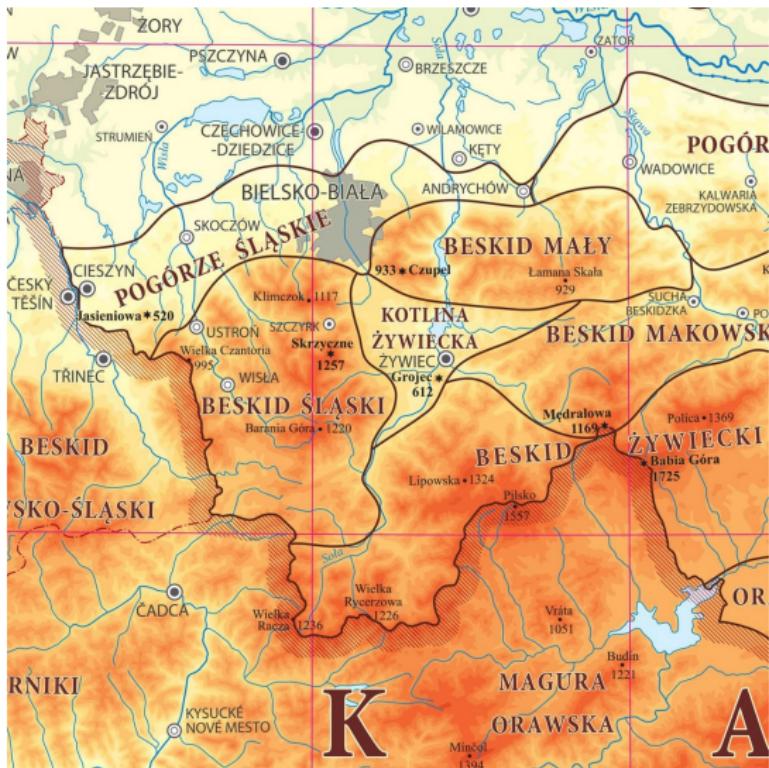
Dla zainteresowanych.

Tak naprawdę, to plan tych wykładów jest tylko podstawą i w wielu przypadkach trzeba to uogólnić na tzw. *funkcje wielu zmiennych* - np. w nauczaniu maszynowym. Podstawowe idee z naszego wykładu pozostają bez zmian, ale może **warto** sprawdzić jak to się da poszerzyć do przypadku takich funkcji.

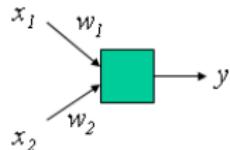
Zainteresowani mogą ode mnie otrzymać skrócone wersje takich materiałów z motywacjami w informatyce (będzie o nie - oczywiście - łatwiej niż dla funkcji jednej zmiennej).

Ale: podkreślam, że jednak podstawowe idee zastosowań będą widoczne już w naszym wykładzie...

Ale przecież funkcje wielu zmiennych były już w szkole np. ... na geografii. To prosty wykres funkcji wielu zmiennych...

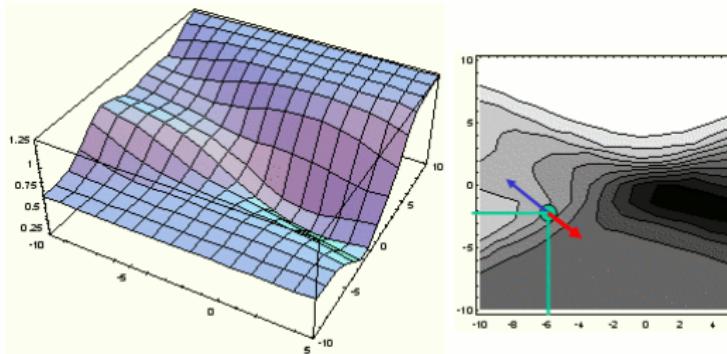
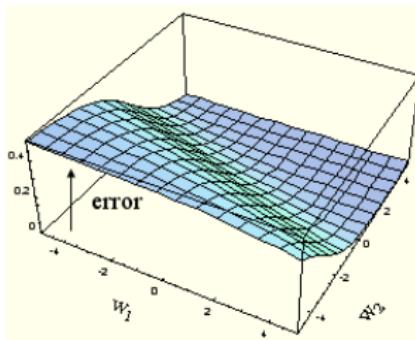


A to już funkcje wielu zmiennych w sieciach neuronowych...



$$y = f\left(w_0 + \sum_{i=1}^n w_i x_i\right)$$

$$f(s) = \frac{1}{1 + e^{-s}}$$



Strony do lektury na wykłady 9, 10, 11+12...

To 3 długie i ważne wykłady - naprawdę namawiam do przeczytania (w ciągu 3 tygodni!! - to 3,5 wykładu).

Czytamy najpierw motywacje:

[K] : motywacje - strony 31-32 oraz 35-36

teraz wstępne materiały

[K] : strony 219-255 - zwłaszcza paragraf 15.2 !!! Jest co czytać. Ale polecam lekturę "kolorowych" fragmentów. dla informatyków - BARDZO przydatne!!

oraz

[W] : strony 106-143

(lub alternatywnie: z tego wykładu strony 75-102).

Pochodna funkcji w punkcie.

Rozpatrzmy funkcję $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}$. Niech $x_0 \in A$ będzie punktem skupienia zbioru A . Niech $h \in \mathbb{R}$ będzie takie, że $x_0 + h \in A$ (oraz dla dowolnego $h_1 \leq h$, $x_0 + h_1 \in A$).

Iloraz postaci $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ nazywamy ilorazem różnicowym funkcji f w punkcie x_0 .

Można zauważyć, że jest to współczynnik kierunkowy tzw. prostej siecznej czyli prostej przechodzącej przez punkty $(x_0, f(x_0))$ oraz $(x_0 + h, f(x_0 + h))$. Mogą istnieć różne przypadki, gdy obliczamy granicę

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Mamy kilka możliwości...

(1⁰) granica ta istnieje i jest liczbą skończoną. Np.
 $f(x) = x^2$, $x_0 \in \mathbb{R}$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x_0 + h)^2 - x_0^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x_0^2 + 2x_0 h + h^2 - x_0^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (2x_0 + h) = 2x_0$$

(2⁰) granica ta istnieje i jest równa $\pm\infty$ (jest granicą niewłaściwą). Np. $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $x_0 = 0$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{h} - \sqrt[3]{0}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} h^{-\frac{2}{3}} = +\infty$$

(3⁰) granica ta nie istnieje, ale istnieją granice jednostronne (oczywiście w tym przypadku różne)

Np. $f(x) = |x|$, $x_0 = 0$

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{|0+h|-|0|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h}{h} = 1$$

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{|0+h|-|0|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-h}{h} = -1$$

(4⁰) nie istnieją nawet granice jednostronne ilorazu różnicowego funkcji f w punkcie x_0 . Np.

$$f(x) = \begin{cases} x \cdot \sin \frac{1}{x} & , x \neq 0 , \\ 0 & , x = 0 , \end{cases}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h \cdot \sin \frac{1}{h}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \sin \frac{1}{h} \quad - \text{ nie istnieje}$$

(granica lewostronna - analogicznie).

Definicja.

Definicja. Pochodną funkcji f w punkcie x_0 nazywamy granicę (skończoną lub nieskończoną) ilorazu różnicowego funkcji f w punkcie x_0 .

Sytuacja ta dotyczy więc przykładów z (1⁰) i (2⁰). W przypadku (3⁰) granice jednostronne nazywa się odpowiednio pochodną prawo- i lewostronną funkcji f w punkcie x_0 .

Jak widać nawet funkcja ciągła może nie mieć pochodnej w punkcie ciągłości (nawet jednostronnej) - por. przykład (4⁰).

Przykład obliczania pochodnej z definicji.

Niech $f(x) = \cos x$ i $x_0 \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x_0 + h) - \cos(x_0)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2 \sin\left(\frac{2x_0 + h}{2}\right) \cdot \sin\frac{h}{2}}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[-\sin\left(x_0 + \frac{h}{2}\right) \cdot \frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \right] = -\sin x_0\end{aligned}$$

gdzie $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} = 1$, a funkcja $\sin x$ jest funkcją ciągłą.

Oczywiście można teraz obliczyć pochodne np. z funkcji $g(x) = x + \cos x$ itd, ale obliczanie z definicji nie jest najlepszą z metod...

Pochodne.

Najprostsze przykłady zastosowań:

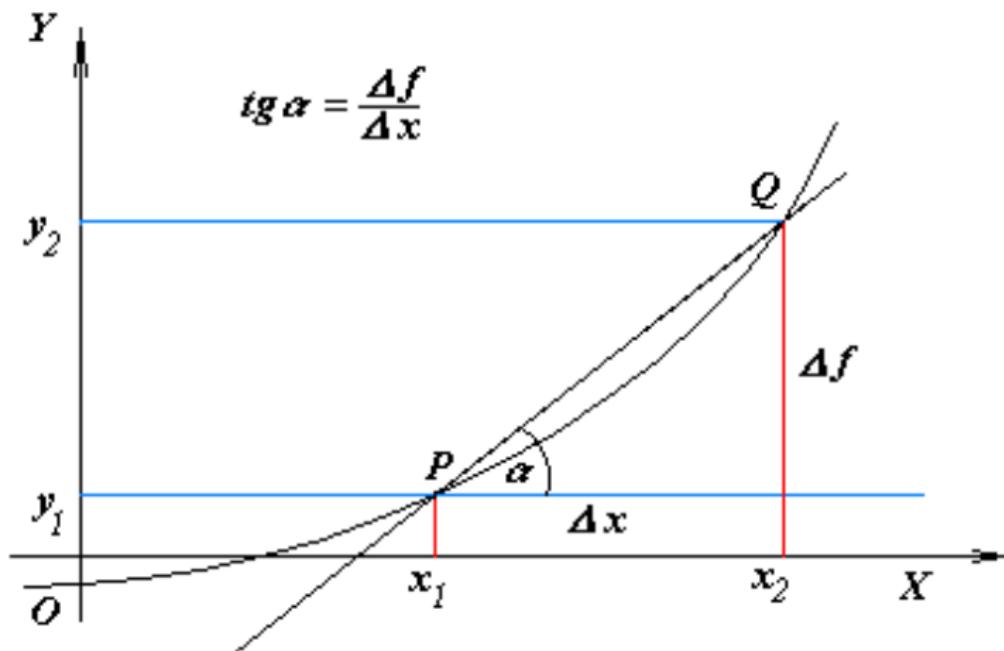
- ▶ metoda stycznych,
- ▶ szacowanie błędów wzorów interpolacyjnych (np. Lagrange'a),
- ▶ AI i automatyka : modelowanie dynamiki bardziej złożonych układów,
- ▶ przy korzystaniu z funkcji tworzących,
- ▶ grafika komputerowa i wizualizacja (w tym metody numeryczne),
- ▶

Styczna.

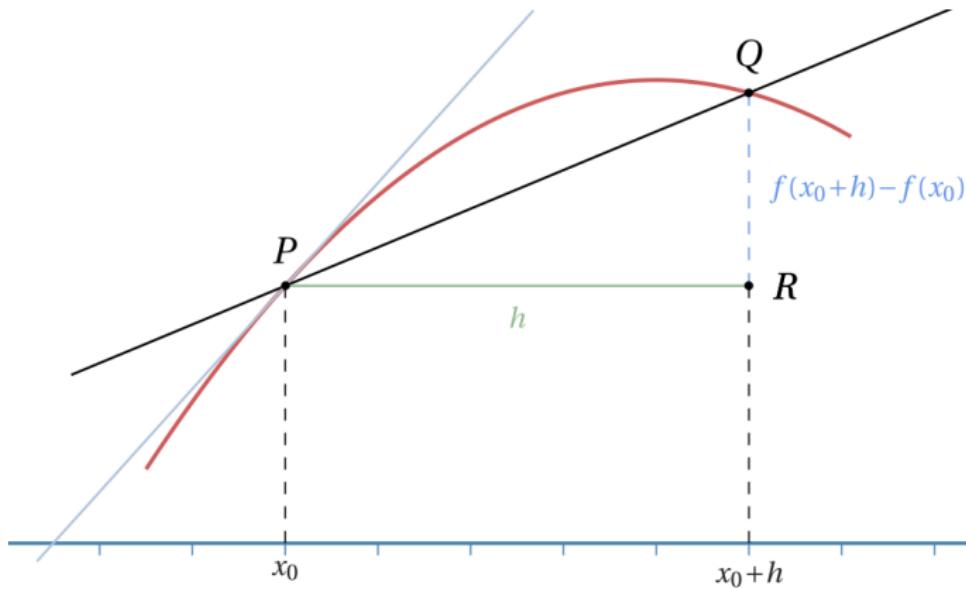
Prostą $y = mx + n$ o współczynniku $m = f'(x_0)$ przechodzącą przez punkt $(x_0, f(x_0))$ nazywamy **styczną**, tak więc pochodna funkcji f w punkcie x_0 to tangens kąta α nachylenia stycznej do osi OX.

Uwaga: w tej definicji nie ma żadnego związku pomiędzy ilością punktów wspólnych stycznej i wykresu funkcji (tylko: punkt $(x_0, f(x_0))$ musi być punktem wspólnym). Proszę nie czytać "internetowych" definicji...

Sieczna.



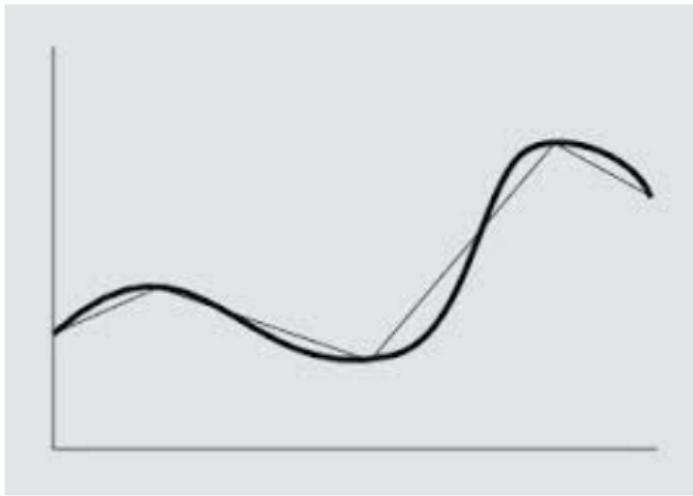
Styczna.



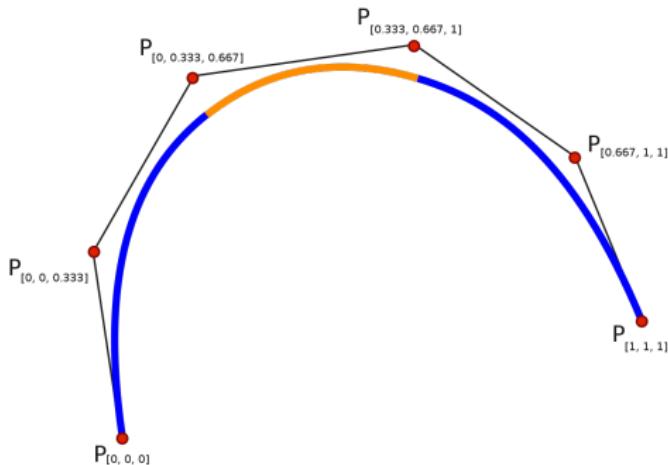
A tu prezentacja: [skrypt ilustracyjny w programie "Mathematica" \(.CDF\)](#).

Styczne w informatyce...

Ponieważ istnienie stycznej do wykresu funkcji f w punkcie $(x_0, f(x_0))$ jest w pewnym sensie równoważne istnieniu pochodnej funkcji f w x_0 , to nie może być zaskoczeniem, że w wielu zastosowaniach pochodnej pojawi się styczna.



Klasyczny przypadek to przy obrazowaniu ruchu (np. gry, ale nie tylko) mamy skomplikowany kształt krzywej w ruchu. *W dużym uproszczeniu*: zastępujemy zamiany układu współrzędnych (co daje skomplikowane wzory na krzywą) przez skończone układy punktów na krzywej i styczne do tej krzywej. Powstaje wielokąt (wielościan). Teraz kontrolujemy w ruchu tylko skończone układy punktów (lepsze będą **funkcje spline** zamiast stycznych, ale to inna historia...):

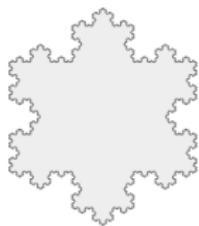


Styczne w grafice.

To będzie możliwe, gdy krzywa ma styczne (najlepiej w każdym punkcie). A co jeśli nie? To pytanie: czy są krzywe nie posiadające w **żadnym** punkcie stycznych?

Tak! To np. wykresy funkcji singularnych (ciągły bez pochodnej w żadnym punkcie). Ogólniej to krzywe zadane parametrycznie, których funkcje parametryzujące są singularne.

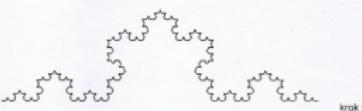
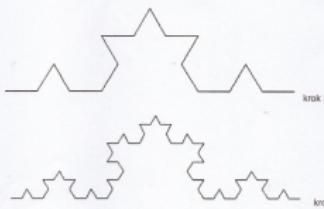
No to czas na fraktale!



Każdy punkt krzywej Kocha przypomina (w pewnym sensie) w charakterze punkt 0 na wykresie $f(x) = |x|...$

Newton i Leibniz (niezależnie od siebie) tworzą **rachunek różniczkowy** – doskonałe narzędzie (miedzy innym) do badania przebiegu funkcji. W epoce, kiedy maszyny liczące nie posiadały możliwości wykonywania wielu obliczeń w ciągu utartka sekundy, można było stosunkowo łatwo (dzięki Newtonowi i Leibnizowi) przedstawić kształt nawet bardzo skomplikowanej funkcji, jeśli tylko w dostatecznie dużych obszarach była różniczkowalna. Różniczkowalność w interpretacji geometrycznej oznaczała posiadanie stycznej określonej jednoznacznie. Pod koniec XIX i na początku XX wieku przy próbach dokładnego zrozumienia pojęcia podstawowych (takich jak np. „ciągłość” czy „krzywa”) zauważono istnienie struktur, które obecnie nazywamy fraktalami. Wśród matematyków związanych z fraktalami możemy wymienić na przykład Georga Cantora (1872), Giuseppe Peana (1890), Davida Hilberta (1901), Helge'a von Kocha (1904), Wacława Sierpińskiego (1916), Gastona Julia (1918), czy Felixa Hausdorffa (1919). Helge von Koch był szwedzkim matematykiem, który w roku 1904 wprowadził krzywą nazwaną obecnie **Krzywą Kocha**. Linię ta w każdym punkcie jest różniczkowalna. Pojęcie nachylenia krzywej jest zgodne z intuicją i ma związek z pojęciem stycznej. Jeśli jednak krzywa ma zaklinań to pojawi się problem. Nie możemy dopasować jednoznacznie stycznej. Otoż krzywa Kocha jest przykładem krzywej, która w każdym punkcie ma zaklinanie, co prowadzi do tego, że najmniej więcej jest określona stycznej w sposób jednoznaczny.

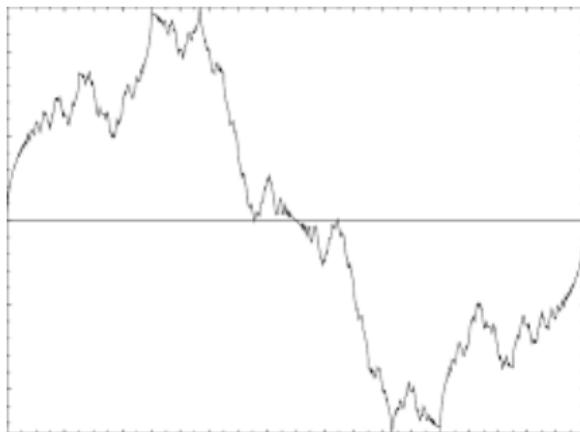
Konstrukcja krzywej Kocha przedstawia się następująco. Zaczynamy od odcinka (obiekt ten nazwujemy inicjalnym), dzielimy na trzy równe części, a w miejsce środkowej wstawiamy trójkąt równoboczny i usuwamy jego podstawę. Kontrarym w ten sposób podstawkowy krok konstrukcji. Otrzymana figura nosi nazwę generatora. Powtarzamy konstrukcję w ten sposób, że w miejscu każdego odcinka wstawiamy odpowiednio zmniejszony generator. Kilka początkowych kroków przedstawiają rysunki:



Pochodne i fraktale...

Brak stycznych w przypadku krzywych fraktalnych powoduje, że w informatyce (o ile są potrzebne) nie można ich badać, czy manipulować nimi za pomocą rachunku różniczkowego.

Każda krzywa fraktalna ma własność braku stycznych, ale nie odwrotnie - poniżej wykres funkcji Riemanna (ale nie fraktal):



Prezentacja kilku nieróżniczkowalnych funkcji.

Proszę w skrypcie wybrać po kolej funkcje, zwłaszcza funkcję Weirstrassa (i użyć "zoom"):

[Skrypt ilustracyjny granic ciągów w "Mathematica"](#) -
potrzebny darmowy *CDF Player* lub *Mathematica*

Różniczkowalność.

Odróżnimy istnienie pochodnej (skończonej lub nie) od różniczkowalności:

Definicja. Mówimy, że funkcja $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ ($A \subset \mathbb{R}$) jest w punkcie $x_0 \in A$ (punkcie skupienia zbioru A) różniczkowalna, jeśli posiada w tym punkcie skończoną pochodną $f'(x_0)$.

Definicja. Mówimy, że funkcja $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ jest różniczkowalna w zbiorze A jeżeli jest różniczkowalna w każdym punkcie zbioru A .

Funkcja różniczkowalna jest lokalnie przybliżana funkcją liniową. Pokażemy, że to różniczka funkcji w punkcie jest tym odwzorowaniem liniowym.

Twierdzenie. Jeżeli f jest różniczkowalna w punkcie x_0 to dla dostatecznie małych h prawdziwy jest wzór

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = f'(x_0) \cdot h + h \cdot \varphi(h)$$

przy czym $\lim_{h \rightarrow 0} \varphi(h) = 0$. (czyli "o małe" od h)

$f(x_0 + h) - f(x_0)$ nazywamy przyrostem funkcji f w punkcie x_0 o kroku h , zaś iloczyn $f'(x_0) \cdot h$ różniczką z funkcji f w punkcie x_0 na przyroście h i oznaczamy odpowiednio $\Delta f(x_0, h)$ i $df(x_0, h)$.

Teraz rozpatrzymy sytuację odwrotną.

Twierdzenie. Niech $f : A \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, i $x_0 \in A$ będzie punktem skupienia zbioru A . Jeżeli przyrost funkcji $\Delta f(x_0, h)$ daje się zapisać w postaci:

$$\Delta f(x_0, h) = I \cdot h + r(x_0, h) \quad (\Delta)$$

gdzie $I \in \mathbb{R}$, funkcja $r(x_0, h)$ jest określona dla tych $h \in \mathbb{R}$, dla których $x_0 + h \in A$ oraz $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(x_0, h)}{h} = 0$ to f jest różniczkowalna w punkcie x_0 oraz

$$f'(x_0) = I .$$

Różniczki zupełne.

Przez $df(x_0, h)$ oznaczać będziemy iloczyn $f'(x_0) \cdot h$ i nazywać będziemy różniczką z funkcji f w punkcie x_0 na przyrostie h . Mamy więc dla funkcji różniczkowalnej

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = df(x_0, h) + r(x_0, h)$$

gdzie $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(x_0, h)}{h} = 0$.

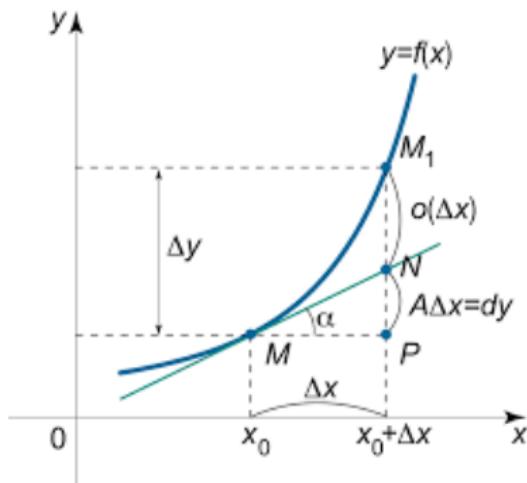
Interpretacja geometryczna różniczki.

Zauważmy, że jeśli f jest różniczkowalna w x_0 to dla małych przyrostów h reszta $r(x_0, h)$ jest mała, a więc

$$f(x_0 + h) - f(x_0) \approx df(x_0, h) .$$

Zazwyczaj łatwiej jest obliczyć różniczkę funkcji w punkcie, niż jej przyrost - wykorzystamy to.

Pochodna a różniczka.



Na rysunku: odcinek PM_1 reprezentuje przyrost funkcji f w punkcie x_0 : $f(x_0 + h) - f(x_0)$. Odcinek PN reprezentuje różniczkę $df(x_0, h)$, a odcinek NM_1 resztę $r(x_0, h)$.

Widoczne: $f(x_0 + h) - f(x_0) = df(x_0, h) + r(x_0, h)$ oraz szybki spadek długości odcinków pomiędzy styczną a krzywą $o(\Delta x)$!

Aproksymacja liniowa.

15.2.1 Aproksymacja liniowa

Interpretacja pochodnej jako współczynnika kierunkowego nachylenia stycznej w danym punkcie do wykresu nie jest jedyną użyteczną intuicją w tym kontekście. Pojęcie pochodnej wiąże się również z ideą przybliżania funkcji funkcją liniową.

Definicja 15.2.1 *Funkcja liniowa* $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ jednej zmiennej to funkcja postaci

$$\mathbb{R} \ni t \mapsto tv \in \mathbb{R}^n$$

dla ustalonego $v \in \mathbb{R}^n$. Wektor v (liczbę w przypadku $n = 1$) nazywać będziemy *współczynnikiem* funkcji liniowej jednej zmiennej.

Funkcję taką oznaczać będziemy L_v , lub krótko L , jeśli współczynnik v jest nieistotny. Latwo sprawdzić, że funkcja liniowa jest ciągła i w zerze ma wartość zero.

Uwaga 15.2.2 Jeśli $L : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$ jest funkcją liniową, to $L = L_v$ dla $v = L(1)$. Innymi słowy wartość funkcji liniowej dla argumentu jeden jest równa jej współczynnikowi.

Funkcja liniowa daje się bardzo prosto wyliczać, więc jest dobrym kandydatem na przybliżanie (lokalne) innych funkcji. Idea jest następująca. Wiemy, że pewna funkcja f ma w punkcie x_0 wartość $y_0 := f(x_0)$. Interesuje nas wartość funkcji f w punkcie x_1 bliskim x_0 , czyli $y_1 := f(x_1)$. Czy dysponując przyrostem zmiennej x , czyli różnicą $x_1 - x_0$, możemy przy pomocy pewnej funkcji liniowej wyliczyć przybliżenie przyrostu zmiennej y , czyli różnicę $y_1 - y_0 = f(x_1) - f(x_0)$? Podkreślimy, że chodzi nam o funkcję liniową w układzie współrzędnych przesuniętym do punktu (x_0, y_0) , a więc w układzie (\bar{x}, \bar{y}) , gdzie $\bar{x} := x - x_0$, $\bar{y} := y - y_0$, zwanym lokalnym układem współrzędnych względem punktu (x_0, y_0) . Zwrócić uwagę, że punkt o współrzędnych (x_0, y_0) w lokalnym układzie współrzędnych ma współrzędne $(0, 0)$. Nasze pytanie można więc sformułować następująco (rys. 15.2):

Czy istnieje funkcja liniowa L w lokalnym układzie współrzędnych (\bar{x}, \bar{y}) , taka że

$$y_1 - y_0 \approx \bar{y} = L(\bar{x}) = L(x_1 - x_0)?$$

Zwróćmy uwagę, że to pytanie należy uściślić. Jeśli przybliżenie rozumieć będziemy jako wymóg, by w granicy, przy $x \rightarrow x_0$, popełniony błąd, czyli wyrażenie

$$y_1 - y_0 - L(x_1 - x_0) = f(x_1) - f(x_0) - L(x_1 - x_0)$$

zmierzało do zera, to wymóg ten spełni każda funkcja liniowa, bo jako ciągła ma w zerze granicę równą wartości, czyli zero. Naturalne jest jednak oczekiwanie, że im bliżej znajdziemy się x_0 , tym przybliżenie będzie lepsze.

Miarą jakości przybliżenia jest błąd względem przyrostu $\bar{x} = x_1 - x_0$ mierzony ilorazem

$$\frac{y_1 - y_0 - L(x_1 - x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_0 + \bar{x}) - f(x_0) - L(\bar{x})}{\bar{x}}.$$

Chcemy, by ten błąd zmierzał do zera przy $\bar{x} \rightarrow 0$. Niech $L = L_v$. Przy użyciu bardziej tradycyjnego oznaczenia h w miejscu \bar{x} , nasz wymóg można zapisać jako

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - hv}{h} = 0,$$

co jak łatwo sprawdzić, sprowadza się do żądania, by

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = v.$$

Tak więc, jeśli stosowne przybliżenie liniowe istnieje, to współczynnik v jest pochodną funkcji w punkcie x_0 .

I pierwszy symbol Landaua...

Definicja 15.2.3 Mówimy, że funkcja f jest *o male* od funkcji g w otoczeniu punktu x_0 i piszemy

$$f(x) = o(g(x)) \text{ przy } x \rightarrow x_0,$$

jeżeli

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \quad |x - x_0| < \delta \Rightarrow ||f(x)|| < \epsilon |g(x)|.$$

Następującą uwagę można wywnioskować wprost z definicji granicy.

Uwaga 15.2.4 Relacja $f(x) = o(g(x))$ przy $x \rightarrow x_0$ zachodzi wtedy i tylko wtedy gdy

$$f(x_0) = 0 \text{ i } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{||f(x)||}{|g(x)|} = 0.$$

□

Wróćmy teraz do idei przybliżania przyrostu funkcji funkcją liniową. Wprowadźmy tradycyjne oznaczenia na przyrost wartości argumentu i przyrost wartości funkcji (różnice) w punkcie x_0 :

$$\begin{aligned}\Delta x &:= x - x_0, \\ \Delta y &:= f(x) - f(x_0).\end{aligned}$$

Niech $L = L_{f'(x_0)}$ będzie funkcją liniową przybliżającą w lokalnym układzie współrzędnych przyrost funkcji f . Wtedy

$$\Delta y \approx L(\Delta x) = f'(x_0)\Delta x, \tag{15.5}$$

przy czym popelniony błąd względny jest tym mniejszy im mniejsze jest Δx . Leibniz nie dysponował precyzyjnym aparatem i mówił, że jeśli Δx jest nieskończenie małe, to przybliżona równość (15.5) staje się równością. Takie nieskończenie małe różnice Δx i Δy nazywały różniczkami (malusinkimi różnicami) i oznaczały dy i dx . Używając jego języka napisalibyśmy, że różniczki dx i dy spełniają równanie

$$dy = f'(x)dx. \tag{15.6}$$

Problem w tym, że różniczki jako wielkości nieskończenie małe trudno jest precyzyjnie zdefiniować. Pojęcie różniczki odczarował A. Cauchy, traktując równanie (15.6) jako równanie odwzorowania liniowego przybliżającego przyrost funkcji, a samą różniczkę definiując jako to przybliżające odwzorowanie liniowe. I tak do dziś rozumiemy różniczkę. Natomiast termin różniczkowalność, ze względu na bezpośredni związek pomiędzy różniczką i pochodną, jest odnoszony zarówno do istnienia pochodnej jak i różniczki, bo, jak zobaczymy, są to fakty równoważne.

Przykład 1.

Obliczyć wartość wyrażenia $e^{0,03}$.

Rozpatrzmy funkcję $f(x) = e^x$, wówczas jest to wartość tej funkcji w punkcie $x = 0,03$ tj. $f(0,03)$. Nie jest to łatwe, ale łatwo jest obliczyć wartość f w „bliskim” punkcie $x_0 = 0$. Mamy więc

$$f(x_0 + h) \approx f(x_0) + df(x_0, h)$$

gdzie $h = 0,03$, $x_0 = 0$. Ponieważ $f'(x) = e^x$ (co pokażemy za chwilę), więc $f'(x_0) = e^0 = 1$, czyli

$$f(0,03) \approx 1 + 1 \cdot 0,03 = 1,03 .$$

Przykład 2.

Obliczyć wartość wyrażenia $A = \sin 40^0$.

Wykorzystamy miarę łukową kąta, a więc

$$A = \sin \frac{40 \cdot \pi}{180} = \sin \frac{2\pi}{9} .$$

Niech

$$f(x) = \sin x, \quad x_0 = \frac{\pi}{4}, \quad h = \frac{2\pi}{9} - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{36} \approx -0,09 .$$

Obliczamy (skorzystamy z pochodnych funkcji sinus - co można sprawdzić z definicji) :

$$f(x_0) = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0,71 \quad f'(x) = \cos x, \quad \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0,71$$

a więc

$$A = f(x_0 + h) \approx f(x_0) + df(x_0, h) = 0,71 + (0,71) \cdot (-0,09) \approx 0,65.$$

(tu wszystkie obliczenia prowadzimy z dokładnością 2 miejsc po przecinku).

Różniczkowalność a ciągłość.

Twierdzenie. Jeżeli f jest różniczkowalna w punkcie x_0 , to jest w tym punkcie ciągła.

Jak już wspomnieliśmy ciągłość nie jest wystarczająca nawet do istnienia pochodnych jednostronnych...

Funkcja pochodna.

A teraz pojęcie funkcji pochodnej - funkcję przyporządkowującą punktom $x_0 \in A^d$ liczby $f'(x_0)$ nazywamy **funkcją pochodną** funkcji f . Funkcję tę oznaczać będziemy przez f' .

Na ogólnie dziedzina funkcji f' jest zawarta w dziedzinie funkcji f .

Można wyprowadzić wzory na najważniejsze z funkcji (m.in. elementarne).

Tabela pochodnych.

Dziedzina f	Funkcja f	Dziedzina f'	Funkcja f'
\mathbb{R}	x^α	\mathbb{R}	$\alpha \cdot x^{\alpha-1}$
\mathbb{R}	a	\mathbb{R}	0
\mathbb{R}	$\sin x$	\mathbb{R}	$\cos x$
\mathbb{R}	$\cos x$	\mathbb{R}	$-\sin x$
\mathbb{R}	e^x	\mathbb{R}	e^x
$(0, +\infty)$	$\ln x$	$(0, +\infty)$	$\frac{1}{x}$
\mathbb{R}	$a^x (a > 0)$	\mathbb{R}	$a^x \cdot \ln a$
$< -1, 1 >$	$\arcsin x$	$(-1, 1)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
\mathbb{R}	$\arctan x$	\mathbb{R}	$\frac{1}{1+x^2}$
$< -1, 1 >$	$\arccos x$	$(-1, 1)$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
...

Prezentacja: Skrypt ilustracyjny możliwości obliczeniowych pochodnych programu "Mathematica".

Pochodne można obliczać korzystając z bardziej ogólnych reguł niż definicja...

Twierdzenie. *Dane są 2 funkcje $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$. Założymy, że f i g są różniczkowalne w ustalonym punkcie $x \in A$. Wówczas w tym samym punkcie $x \in A$ różniczkowalne są funkcje $f + g$, $f - g$, $f \cdot g$, $\lambda \cdot g$ ($\lambda \in \mathbb{R}$), a jeśli ponadto $g(x) \neq 0$ to także $\frac{f}{g}$.*

Prawdziwe są ponadto wzory:

$$(a) \quad (f + g)'(x) = f'(x) + g'(x),$$

$$(b) \quad (f - g)'(x) = f'(x) - g'(x),$$

$$(c) \quad (f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x),$$

$$(d) \quad (\lambda \cdot g)'(x) = \lambda \cdot g'(x),$$

$$(e) \quad \left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x)' - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)} .$$

Twierdzenie. (pochodna superpozycji) Niech $f : A \rightarrow B \subset \mathbb{R}$, $g : B \rightarrow \mathbb{R}$. Jeżeli f jest różniczkowalna w punkcie $x \in A$, a g jest różniczkowalna w $y = f(x) \in B$ to funkcja złożona (superpozycja) $g \circ f : A \rightarrow \mathbb{R}$ dana wzorem $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ jest różniczkowalna w punkcie $x \in A$, oraz prawdziwy jest wzór

$$(g \circ f)'(x) = g'(y) \cdot f'(x) \quad (\text{gdzie } y = f(x)).$$

Twierdzenie. (pochodna funkcji odwrotnej) Niech g będzie funkcją ciągłą i ściśle monotoniczną w przestrzeni P . Przez f oznaczmy funkcję odwrotną do g . Jeżeli funkcja g jest różniczkowalna w punkcie $y \in P$ oraz pochodna tej funkcji $g'(y) \neq 0$ to f jest różniczkowalna w punkcie $x = g(y)$ oraz

$$f'(x) = \frac{1}{g'(y)} \quad (\text{czyli} \quad (g^{-1})'(x) = \frac{1}{g'(y)}).$$

Przykłady.

(1) Niech $f(x) = x^3 + e^{\sin x}$, $x \in \mathbb{R}$.

Wówczas $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$, gdzie $f_1(x) = x^3$, $f_2(x) = e^{\sin x}$.
Stąd $(f_1)'(x) = 3x^2$, zaś f_2 jest funkcją złożoną

$$g(u) = e^u, \quad h(v) = \sin v.$$

Z działań na pochodnych mamy $(f_2)'(x) = \cos x \cdot e^{\sin x}$.
Ostatecznie $f'(x) = 3x^2 + \cos x \cdot e^{\sin x}$.

(2) Weźmy teraz $f(x) = \ln x$. Jest to funkcja odwrotna do
 $g(y) = e^y$

$$(x = e^y) \iff (y = \ln x)$$

$$g : \mathbb{R} \xrightarrow{\text{na}} (0, +\infty) \quad \text{oraz} \quad f(0, +\infty) \xrightarrow{\text{na}} \mathbb{R}$$

g - ścisłe rosnąca na $P = (-\infty, \infty)$ (oraz ciągła), co więcej

$$g'(y) = e^y \neq 0 \quad \text{dla dowolnych } y \in \mathbb{R}.$$

Mamy więc

$$(x = e^y) \quad f'(x) = \frac{1}{g'(y)} = \frac{1}{e^y} = \frac{1}{e^{\ln x}} = \frac{1}{x}$$

(kolejny wynik do tabeli pochodnych ...).

Ekstrema lokalne.

Mówimy, że funkcja $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ ma w tym punkcie maksimum lokalne (x_0 jest punktem wewnętrznym zbioru A) jeżeli istnieje $\delta > 0$ taka, że dla każdego $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ zachodzi nierówność

$$f(x) \leq f(x_0) .$$

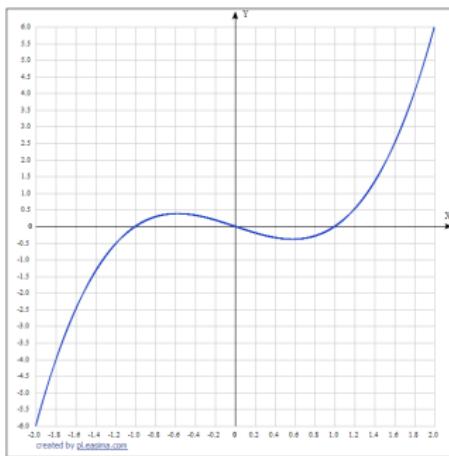
Funkcja ta ma minimum lokalne w x_0 jeżeli

$$\exists_{\delta>0} \quad \forall_{x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)} \quad f(x) \geq f(x_0) .$$

Minima i maksima lokalne noszą łączną nazwę ekstremów lokalnych.

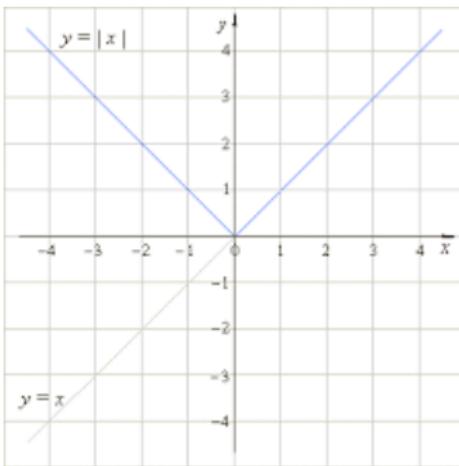
$$f(x) = x \cdot (x - 1) \cdot (x + 1)$$

funkcja ma w punkcie $x_0 = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ maksimum lokalne, a w punkcie $x_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}$ minimum lokalne, ale funkcja ta jest nieograniczona z góry i z dołu).

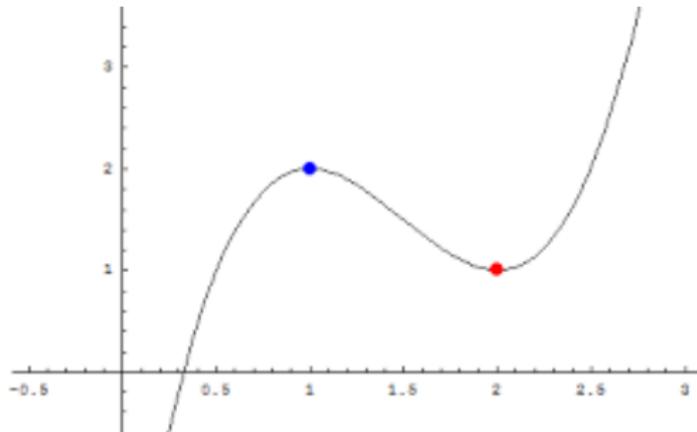


Rozpatrzmy kolejny przykład: $f(x) = |x|$.

Łatwo zauważyć, że w punkcie $x_0 = 0$ jest minimum lokalne ($f(x_0) = 0$ a dla każdego innego $x \in \mathbb{R}$ $f(x) > 0$ - jest to tzw. minimum globalne). Niemniej nie istnieje (jak już wiemy ...) $f'(x_0)$.



Ekstrema lokalne.



W maksimum lokalnym nie musi być wartością największą funkcji (niebieski punkt na wykresie), a w minimum lokalnym nie musi być wartością najmniejszą funkcji (czerwony punkt na wykresie).

Zasadnicze twierdzenia rachunku różniczkowego.

Twierdzenie. (tw. Fermata). Jeżeli $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ jest różniczkowalna w x_0 i ma w nim ekstremum lokalne, to $f'(x_0) = 0$.

Odwrotna zależność (jak już wiemy) nie zachodzi ...

Nie można stąd oczywiście wyciągać wniosków, że warunek $f'(x_0) = 0$ jest warunkiem koniecznym istnienia ekstremum.

Dla sformułowania warunków wystarczających istnienia ekstremum lokalnego musimy wprowadzić nowe pojęcia i zbadać je. Do tematu oczywiście wróćmy...

A tu prezentacja: [twierdzenia Fermata w formacie .CDF](#).

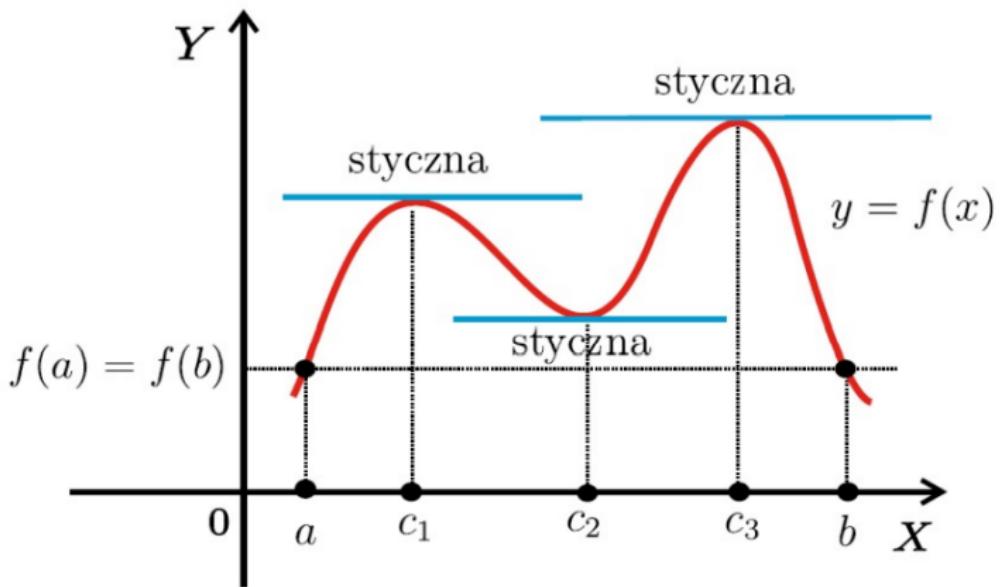
Twierdzenie Rolle'a.

Twierdzenie. (Rolle'a). Założmy, że funkcja f określona w przedziale $\langle a, b \rangle$ spełnia następujące warunki:

- (a) f jest ciągła w $\langle a, b \rangle$,
- (b) f jest różniczkowalna w (a, b) ,
- (c) $f(a) = f(b)$.

Wówczas istnieje taki punkt $\xi \in (a, b)$, że $f'(\xi) = 0$.

Sens geometryczny twierdzenia Rolle'a: na łuku krzywej będącej wykresem funkcji f , którego końce mają tę samą rzędną znajduje się co najmniej 1 punkt, w którym styczna jest równoległa do osi OX.



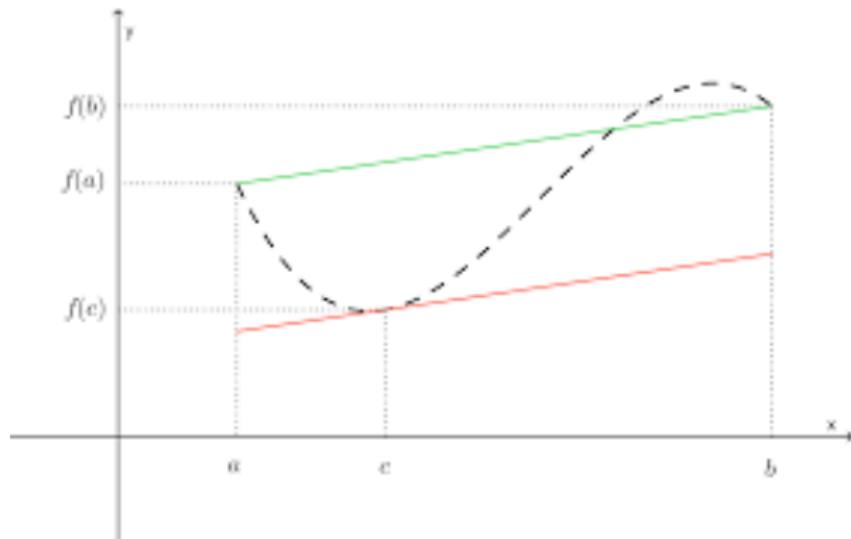
Twierdzenie Lagrange'a o wartości średniej.

Twierdzenie. (Lagrange'a o wartości średniej). Jeżeli funkcja f jest ciągła w przedziale $\langle a, b \rangle$ i różniczkowalna w (a, b) to istnieje punkt $c \in (a, b)$ taki, że

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Geometrycznie możemy to zilustrować następująco: istnieje więc co najmniej jeden punkt $c \in (a, b)$ w którym styczna jest równoległa do siecznej wykresu przechodzącej przez $(a, f(a))$ i $(b, f(b))$.

Interpretacja graficzna.



I jeszcze ilustracja graficzna tego twierdzenia w postaci skryptu: [skrypt ilustracyjny w programie "Mathematica" \(.CDF\)](#).

Twierdzenie Cauchy'ego.

Twierdzenie. (Cauchy'ego). Założymy, że 2 funkcje f i g są ciągłe w $a, b >$ i różniczkowalne w (a, b) oraz $g'(x) \neq 0$ dla $x \in (a, b)$.

Wówczas istnieje $\xi \in (a, b)$ takie, że

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} .$$

Wnioski.

Wniosek 1. Jeżeli f jest ciągła w (a, b) i jeżeli $f'(x) = 0$ dla każdego $x \in (a, b)$ to $f(x) = c = \text{const}$ dla $x \in (a, b)$ (funkcja jest stała).

Wniosek 2. Jeżeli dane są 2 funkcje f i g określone w (a, b) (o wartościach w \mathbb{R}) i $f'(x) = g'(x)$ dla $x \in (a, b)$ to funkcje różnią się co najwyżej o stałą tj. $f(x) = g(x) + C$ ($C = \text{const}, x \in (a, b)$)

Przykład zastosowania: $f(x) = \arcsin x$

$$g(x) = -\arccos x, \quad x \in [-1, 1].$$

Wówczas

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad g'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

czyli $f'(x) = g'(x)$ dla $x \in (-1, 1)$.

Stąd $(f(x) - g(x))' = f'(x) - g'(x) = 0$,

a więc $f(x) - g(x) = \text{const}$.

$$\arcsin x + \arccos x = \text{const.} \quad \text{dla } x \in [-1, 1]$$

Ponieważ

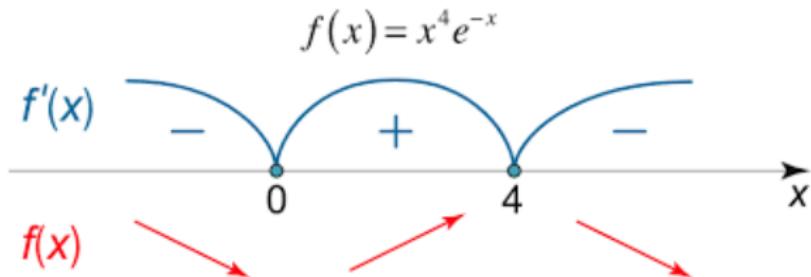
$$\arcsin 0 = 0, \quad \arccos 0 = \frac{\pi}{2},$$

więc ostatecznie

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2} \quad \text{dla } x \in [-1, 1].$$

Wniosek 3. Jeżeli f jest ciągła w (a, b) i $f'(x) \neq 0$ dla każdego $x \in (a, b)$ to f jest różniczkowalna.

Wniosek 4. Jeżeli f jest ciągła w (a, b) i różniczkowalna w (a, b) oraz $f'(x) > 0$ dla $x \in (a, b)$ [$f'(x) < 0$ dla $x \in (a, b)$] to f jest ścisłe rosnąca [malejąca] w (a, b) .



Wniosek 5. (reguła de l'Hôpitala).

Rozpatrzmy kilka przypadków:

(A) Założymy, że

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0 , \quad (*)$$

gdzie funkcje f i g są określone i różniczkowalne w pewnym otoczeniu punktu x_0 . Jeżeli $g'(x) \neq 0$ w tym otoczeniu, a ponadto istnieje granica $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ to istnieje granica $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ oraz zachodzi wzór

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Uwagi:

(1⁰) regułę tę można stosować do granic jednostronnych,

(2⁰) również w przypadku granic niewłaściwych ($x_0 = \pm\infty$) reguła jest prawdziwa.

(B) Przy założeniach reguły (A), gdzie w miejsce (*) zakładamy

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \infty \quad (**)$$

mamy

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Tu również możemy stosować tę regułę dla granic niewłaściwych ($x_0 = \pm\infty$) oraz w przypadku $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \pm\infty$.

W tej sytuacji będziemy mówić o wyrażeniu nieoznaczonym typu $[\frac{\infty}{\infty}]$.

(C) Jeżeli (*) zastąpimy przez

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0 \quad \text{oraz} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \infty$$

to

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}$$

i możemy stosować regułę (A).

Jest to tzw. symbol nieoznaczony typu $[0 \cdot \infty]$.

(D) Przy założeniu (**):

$$[f(x) - g(x)] = \frac{1}{\frac{1}{f(x)}} - \frac{1}{\frac{1}{g(x)}} = \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x) \cdot g(x)}}$$

i do ostatniego wyrażenia możemy stosować regułę (A) (tzw. symbol nieoznaczony typu $[\infty - \infty]$).

A tu prezentacja: [reguły de l'Hôpitala w formacie .CDF](#).

Uwaga: do symboli nieoznaczonych zaliczamy też $[0^0]$, $[\infty^\infty]$ oraz $[1^\infty]$ (mamy nadzieję, że Czytelnik „rozszыfruje” przez analogię jak one wyglądają – stosują się oczywiście do wyrażeń $f(x)^{g(x)}$...).

Jeżeli również można sprowadzić do postaci występującej w regule (A) lub (B) np:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0 \quad (\text{tj. } [0^0]) .$$

Niech $F(x) = f(x)^{g(x)}$. Przy założeniach gwarantujących istnienie funkcji $F(x)$ ($f(x), g(x) > 0$, $f(x) \neq 1$) możemy obliczyć $G(x) = \ln F(x)$. Wtedy

$$G(x) = \ln F(x) = \ln(f(x)^{g(x)}) = g(x) \cdot \ln f(x) ,$$

a to ostatnie wyrażenie jest typu $[0 \cdot \infty]$. Możemy więc (zgodnie z (C)) obliczyć $\lim_{x \rightarrow x_0} G(x)$. Z ciągłości funkcji logarytmicznej i wykładniczej:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)^{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} F(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} e^{G(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow x_0} G(x)}$$

czyli obliczymy granicę wyjściowego wyrażenia.

Uwagi dla informatyków.

Reguła de l'Hôpitala dotyczy **funkcji i punktów skupienia dziedziny**. **Nie wolno jej stosować do ciągów!!** Takie błędny komentarz to duży skrót myślowy! Przy ciągach (jak widać nawet tu przydadzą się pochodne!) postępujemy tak:

(1) Rozszerzamy dziedzinę: ciąg $a_n = f(n)$ określony jest na liczbach naturalnych, czyli rozpatrujemy **funkcję** $\tilde{f} : [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ taką, że $\tilde{f}(n) = f(n)$ np. dla ciągu $a_n = n^2 \cdot \ln n$ ta funkcja jest postaci $\tilde{f}(x) = x^2 \cdot \ln x$ - określona dla dziedziny $x > 0$.

(2) Do funkcji $\tilde{f}(x)$ stosujemy regułę de l'Hôpitala (o ile spełnione są założenia - w tym przypadku jest to granica w nieskończoności) uzyskując np. granicę g .

(3) Skoro znana jest granica funkcji \tilde{f} , to z definicji Heinego granic dla każdego ciągu (x_n) z dziedziny zbieżnego do ∞ mamy $\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{f}(x_n) = g$, a więc w szczególności dla $x_n = n$ tak jest. **Mamy szukaną granicę ciągu!**

Pochodne wyższych rzędów.

Definicja. Jeżeli f' jest różniczkowalna w zbiorze A to funkcję $f'' : A \rightarrow \mathbb{R}$ określoną wzorem $f''(x) = (f')'(x)$ nazywać będziemy pochodną drugiego rzędu z funkcji f .

Podobnie możemy zdefiniować pochodne wyższych rzędów:

jeżeli $f^{(n)}$ jest różniczkowalna w A to pochodną rzędu $(n+1)$ definiujemy następująco:

$$f^{(n+1)}(x) = (f^{(n)})'(x)$$

O funkcji mającej pochodne rzędu od 1 do n w x_0 będziemy krótko mówić, że jest n -krotnie różniczkowalna w x_0 .

Będziemy mówili, że funkcja f jest klasy C^n w zbiorze A , o ile f jest n -krotnie różniczkowalna w A i jeżeli $f^{(n)}$ jest funkcją ciągłą w A . Podobnie powiemy, że funkcja f jest klasy C^∞ w zbiorze A , jeżeli ma w A pochodne dowolnego rzędu. Fakty te zapisywać będziemy odpowiednio: $f \in C^n$ [$f \in C^\infty$].

Wzór Taylora.

Twierdzenie 12.12. (wzór Taylora). Założmy, że funkcja f określona w przedziale P jest w nim n -krotnie różniczkowalna.

Niech x_0 i h będą takie, że $x_0, x_0 + h \in P$. Wówczas istnieje taka liczba $0 < \nu < 1$, że

$$f(x_0+h) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} \cdot h + \frac{f''(x_0)}{2!} \cdot h^2 + \dots + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!} \cdot h^{n-1} + \nu_n(h),$$

gdzie $\nu_n(h) = \frac{f^{(n)}(x_0 + \nu h)}{n!} \cdot h^n$ (i jest nazywana resztą Lagrange'a we wzorze Taylora).

Prezentacja: [Skrypt ilustracyjny szeregu Taylora w "Mathematica"](#)
- oraz taki dodatkowy [skrypt ilustracyjny...](#)

I jeszcze prezentacja tych [wielomianów Taylora \(.CDF\)](#).

Można także zapisać uzyskany wzór w następującej postaci:
niech $x, x_0 \in P$, kładziemy $h = x - x_0$, a stąd

$$\begin{aligned}f(x) &= f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots \\&+ \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x - x_0)^{n-1} + \nu_n(x),\end{aligned}$$

gdzie

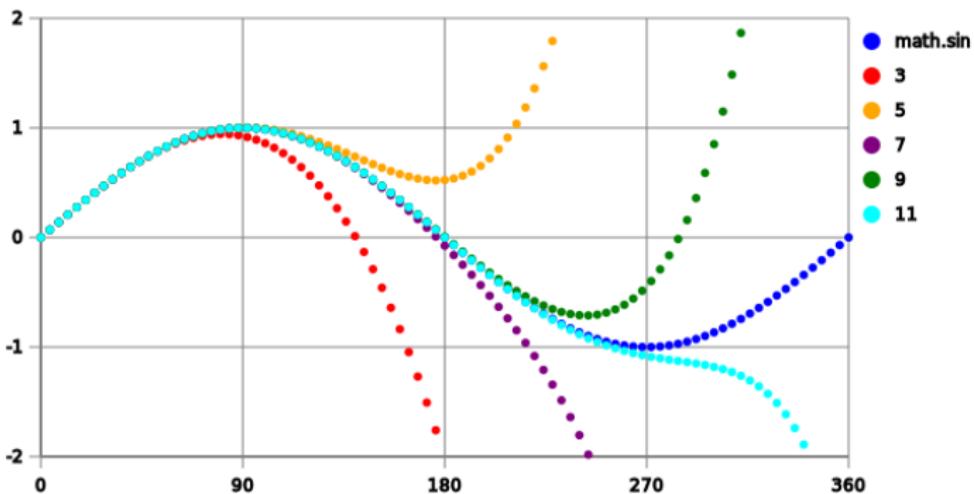
$$\nu_n(x) = \frac{f^{(n)}(x_0 + \nu(x - x_0))}{n!}(x - x_0)^n,$$

a w szczególności jeżeli $x_0 = 0 \in P$, to

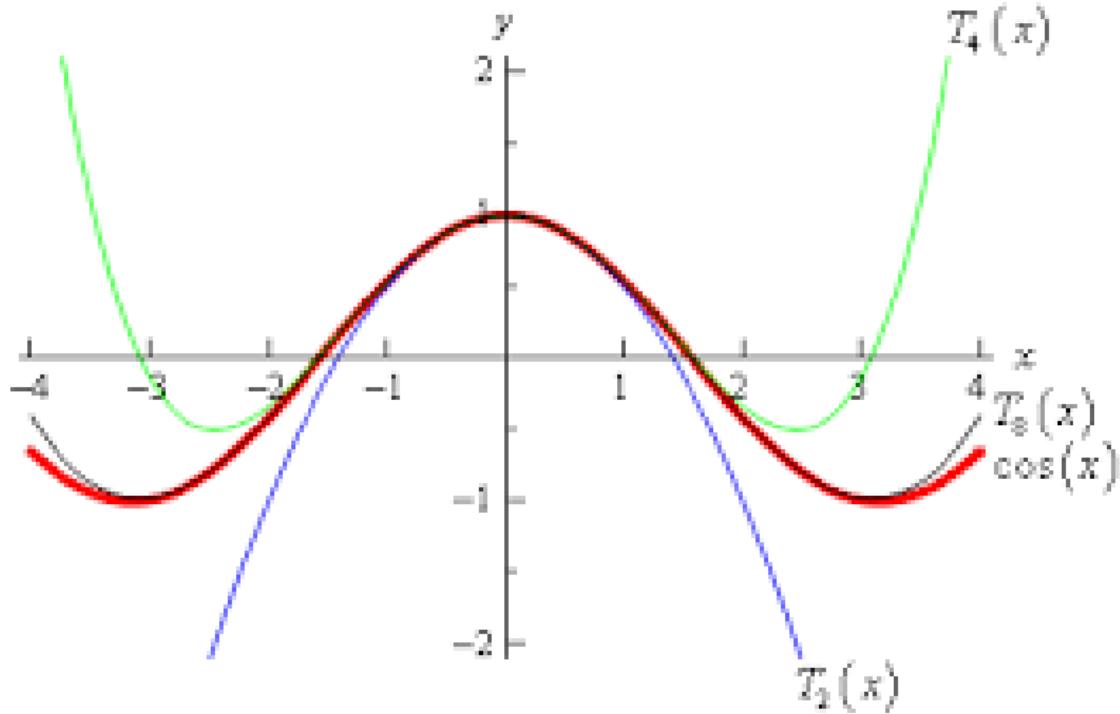
$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} \cdot x + \frac{f''(0)}{2!} \cdot x^2 + \dots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!} \cdot x^{n-1} + \frac{f^{(n)}(\nu x)}{n!} \cdot x^n.$$

Ten ostatni wzór nazywamy **wzorem MacLaurina**.

Sines calculated with Taylor Polynomials to degree 3, 5, 7, 9 and 11



A tu applet ilustrujący wielomiany Taylora: niskich stopni.
Zwracam uwagę: **błąd (oszacowanie reszty) rośnie** wyraźnie z
odległością x od x_0 ! To lokalne przybliżanie funkcji...



I tutaj obliczenia szeregów Taylora w Python'ie - może kogoś zainteresuje...

Uwagi.

Jak rozumieć wzór Taylora? Zauważmy, że kolejne pochodne danej funkcji, wyznaczone w tym samym punkcie, "kodują" coraz "większą i bardziej dokładną" informację o kształcie funkcji w "szerszym" przedziale. Już wykorzystanie kilku lub kilkunastu liczb wystarcza do osiągnięcia wystarczającej jakości aproksymacji. Skojarzone pojęcie z informatyki: "**błąd obcięcia**".

Jest to więc coś w rodzaju standaryzacji **zapisu funkcji i algorytmu ich kompresji** w jednym.

Przypominam - **te slajdy to szkic wykładu.** Proszę doczytać ze źródeł ważne dla informatyków informacje, np. własność Darboux dla pochodnej (str 122, Twierdzenie 6.47 [W]): proszę przeanalizować czym się różni od klasycznego wyniku (por. str 241 [K], Twierdzenie 15.10.2).

Poza tym np. **postacie reszt we wzorze Taylora** - od str. 125 [W], a ze źródła [K] funkcje klasy C^k - od str. 234 w [K].

Aproxymacja pochodnych.

Wielomian Taylor'a aproksymuje wartość funkcji poprzez **aproksymowanie wartości jej kolejnych pochodnych**. Wszystko staje się znacznie jaśniejsze po wyznaczeniu kolejnych **pochodnych wielomianu!**

Analizując poniższy schemat należy zwrócić uwagę jak człony wzoru przesuwają się "w lewo":

$$T_n(x) = \underbrace{f(x_0) + f^{(1)}(x_0)(x - x_0)}_{\text{liniowa aproksymacja } f(x) \text{ na bazie różniczki}} + \underbrace{\frac{1}{2!} f^{(2)}(x_0)(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n}_{\text{korekcja aproksymacji } f(x) \text{ na bazie pochodnych wyższych rzędów}}$$

$$T_n^{(1)}(x) = \underbrace{f^{(1)}(x_0) + f^{(2)}(x_0)(x - x_0)}_{\text{liniowa aproksymacja } f^{(1)}(x) \text{ na bazie różniczki}} + \underbrace{\frac{3}{3!} f^{(3)}(x_0)(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{n}{n!} f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^{n-1}}_{\text{korekcja aproksymacji } f^{(1)}(x) \text{ na bazie pochodnych wyższych rzędów}}$$

$$T_n^{(2)}(x) = \underbrace{f^{(2)}(x_0) + f^{(3)}(x_0)(x - x_0)}_{\text{liniowa aproksymacja } f^{(2)}(x) \text{ na bazie różniczki}} + \underbrace{\frac{3 \cdot 4}{4!} f^{(4)}(x_0)(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{(n-1)n}{n!} f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^{n-2}}_{\text{korekcja aproksymacji } f^{(2)}(x) \text{ na bazie pochodnych wyższych rzędów}}$$

Czyli

$$T_n^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0).$$

Zastosowania wzoru Taylora.

Rola wzoru Taylora w informatyce jest nie do przecenienia! Proszę sprawdzić w dowolnej książce z metod numerycznych - większość szacowań błędów obliczeń wartości funkcji jest oparta o szacowanie **reszty we wzorze Taylora**. Patrz np. ([po angielsku](#)).

Proszę zwrócić uwagę i **starannie przeczytać materiał [W]: strony 124-131** i zwrócić uwagę na różne reszty. Pytanie po lekturze: po co tyle różnych postaci reszt (łatwiej vs. dokładniej...)? ("**błędy obcięcia**") Np.

Twierdzenie 15.13.5 (wzór Taylora z resztą Lagrange'a) Niech $f : (c, d) \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją $n + 1$ -różniczkowalną. Niech $a, b \in (c, d)$ spełniają $a < b$. Wtedy istnieje $\xi \in (a, b)$ takie, że

$$f(b) = T_a^n f(b-a) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (b-a)^{n+1}. \quad (15.32)$$

Przyjmując oznaczenie $h := b - a$ oraz rozpisując wielomian Taylora możemy też powyższą tezę zapisać jako

$$f(a+h) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!} h + \frac{f''(a)}{2!} h^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} h^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} h^{n+1}.$$

Podamy teraz ogólne twierdzenie, pozwalające dokładniej szacować resztę we wzorze Taylora.

Twierdzenie 6.59 (wzór Taylora z resztą Schlömilcha–Roche'a). *Niech $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ ma w przedziale (a, b) pochodne do rzędu $(k+1)$ włącznie. Założymy, że $x_0, x_0 + d \in (a, b)$, $d > 0$. Oznaczmy*

$$r_k(x) = f(x) - \sum_{j=0}^k \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!} (x - x_0)^j.$$

Wówczas dla każdego $x \in (x_0, x_0 + d)$ i każdego $p > 0$ istnieje liczba $\theta \in (0, 1)$ taka, że

$$r_k(x) = \frac{f^{(k+1)}(x_0 + \theta(x - x_0))}{k! \cdot p} (1 - \theta)^{k+1-p} (x - x_0)^{k+1}. \quad (6.18)$$

A ta poniższa postać reszty jest ważna, wróćmy do tematu, gdy już "oficjalnie" wprowadzimy całki!

9.2.4 Wzór Taylora z resztą w postaci całkowej

W poprzednich podrozdziałach wykorzystaliśmy wzór na wielokrotne całkowanie przez części do dowodów niewymierności π i przestępności e . Teraz wskażemy jeszcze jedno zastosowanie tego wzoru, bardzo przydatne (także do analizowania funkcji wielu zmiennych, z którymi Czytelnik wielokrotnie zetknie się w późniejszych swoich studiach).

Twierdzenie 9.49 (wzór Taylora z resztą całkową). *Niech $g \in C^{k+1}([a, b])$, $a < x < b$. Wówczas*

$$g(x) = g(a) + \sum_{j=1}^k \frac{g^{(j)}(a)}{j!} (x - a)^j + \int_a^x \frac{(x - t)^k}{k!} g^{(k+1)}(t) dt. \quad (9.54)$$

Zwiększamy dokładność.

Kolejny raz zwracam uwagę: postęp w zastosowaniu w informatyce (tu: dokładność oszacowań) jest skutkiem użycia bardziej zaawansowanego aparatu matematycznego...

Aproxymacja liniowa poprzez różniczkę jest prosta, ale często nie jest wystarczająco dokładna. Możemy wtedy rozważać aproksymację krzywą drugiego stopnia (parabolą) zadaną wzorem $y = a_0 + a_1h + a_2h^2$ gdzie $h = x - x_0$ jest przyrostem zmiennej niezależnej (rys. 15.7). Możemy też przybliżać wielomianem n -ego stopnia postaci

$$W(h) := a_0 + a_1h + a_2h^2 + \dots + a_nh^n.$$

Różnica

$$f(x) - W[h] = f(x_0 + h) - (a_0 + a_1h + a_2h^2 + \dots + a_nh^n)$$

powinna być $o(h^n)$, bo oczekujemy błędu, który szybciej zmiera do zera niż wielomian aproksymacyjny. Pokażemy, że jeśli funkcja r jest n -różniczkowalna w zerze, to własność $r(h) = o(h^n)$ jest równoważna zerowaniu się pochodnych r do n -tej włącznie, tzn. warunkowi

$$r(0) = r'(0) = r''(0) = \dots = r^{(n)}(0) = 0.$$

W odniesieniu do naszego problemu aproksymacyjnego oznacza to, że funkcja

$$h \mapsto f(x_0 + h) - W(h)$$

powinna mieć zerowe pochodne w zerze do n -tej włącznie co jest równoważne postulatowi by funkcje $h \mapsto f(x_0 + h)$ i $h \mapsto W(h)$ miały te same pochodne do n -tej włącznie. Jak zobaczymy pochodne wielomianu jest stosunkowo łatwo policzyć: $W^{(i)}(0) = i!a_i$. Zatem tyle muszą wynosić pochodne funkcji $h \mapsto f(x_0 + h)$ w zerze. Są one równe pochodnym $x \mapsto f(x)$ w x_0 , zatem poszukiwana aproksymacja ma postać

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}h + \frac{f''(x_0)}{2!}h^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}h^n + r(h)$$

gdzie $r(h) = o(h^n)$. Otrzymany w ten sposób wielomian aproksymacyjny nazywany jest wielomianem Taylora funkcji f w x_0 , bo pochodzi od angielskiego matematyka Brook'a Taylora (rys. 15.8).

Niektóre zalety wzoru Taylora link: (źródło)

- ▶ Wzór Taylora definiuje wielomian Taylora, który tym lepiej (zwykle) aproksymuje funkcję im wyższy jest jego stopień.
- ▶ Twierdzenie Taylora (w wersji powyższej z resztą w postaci Peano), daje informację o błędzie aproksymacji (notacja „o-małe” w zagadnieniach asymptotycznego tempa wzrostu). Istnieją inne dodatkowe nierówności pozwalające szacować resztę - w innych podanych postaciach reszty.
- ▶ Wielomiany to sumy częściowe szeregu Taylora. Bardzo łatwo wyznaczać je numerycznie (tylko operacje mnożenia i dodawania). Z tego względu szereg kalkulatorów, programów i języków programowania implementuje inne funkcje (choć nie wszystkie - o czym mówiliśmy), poprzez odpowiednie wielomiany Taylora.
- ▶ Wielomiany z łatwością oddają się różniczkowaniu i całkowaniu. Można je zapisać w postaci iloczynowej, ułatwiając rozwiązywanie szeregu równań i nierówności. Wielomiany są określone na całej prostej rzeczywistej, co umożliwia analityczne „przedłużanie” wartości funkcji na dziedzinę, w której wyjściowa funkcja jest nieokreślona.

Funkcje wypukłe - powtórka.

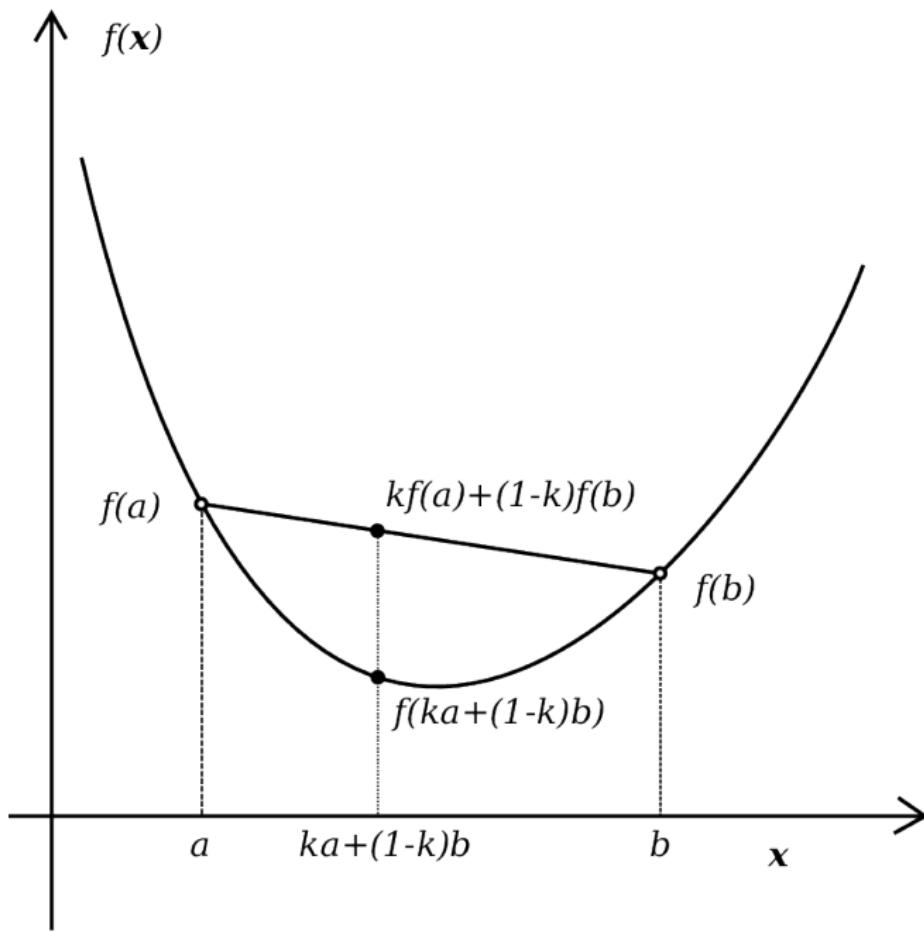
Definicja. Niech $A \subset \mathbb{R}$ będzie przedziałem. Funkcję $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ nazywamy **wypukłą** w A gdy dla dowolnych $x_1, x_2 \in A$ oraz dowolnych $s, t \in \mathbb{R}$, $s, t \geq 0$, $s + t = 1$, zachodzi nierówność

$$f(s \cdot x_1 + t \cdot x_2) \leq s \cdot f(x_1) + t \cdot f(x_2).$$

W przypadku, gdy nierówność zachodzi w przeciwnym kierunku funkcję nazywamy **wklesłą** w A .

Ponownie zwracamy uwagę, że ta własność także zależy od zbioru, a nierówność jest na ogół bardzo dobrym oszacowaniem dla wartości funkcji f często wykorzystywanym w różnych zastosowaniach. Nieco później podamy inną metodę badania wypukłości funkcji f . Ilustracją graficzną tej cechy jest fakt, iż odcinek łączący dowolne dwa punkty wykresu $\{(x, y) : x \in A, y = f(x)\}$ „leży nad” wykresem funkcji (dokładnie to stwierdza nierówność z definicji!! - zrobić odpowiedni rysunek).

To pojęcie niezbędne do zrozumienia jednej z najważniejszych z metod optymalizacyjnych (np. w nauczaniu maszynowym) – optymalizacja wypukła! Np. informacje podstawowe.



Przykładami funkcji wypukłych są np. $f(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$ czy $f(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$, natomiast funkcja $f(x) = \sin x$ jest wypukła w $A = < \pi, 2\pi >$, ale nie jest wypukła w swojej dziedzinie. Funkcje wklęsłe to np. $f(x) = -x^2$, $x \in \mathbb{R}$ czy $f(x) = \log x$, $x \in (0, \infty)$.

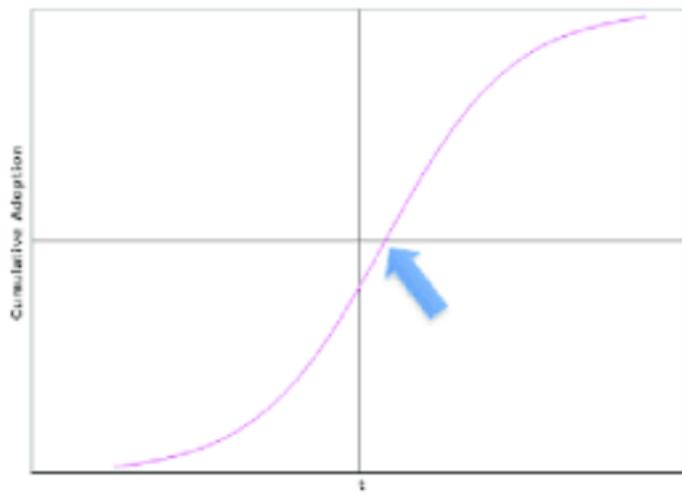
Przykład. Ponieważ $2 = \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 3$, a funkcja $f(x) = \sqrt{x}$, $x \in < 0, \infty >$ jest wklęsła (sprawdzić !), to m.in. (!) wstawiając $x_1 = 1$ oraz $x_2 = 3$ do definicji uzyskamy

$$\sqrt{2} \geq \frac{1}{2} \cdot \sqrt{1} + \frac{1}{2} \sqrt{3},$$

czyli $2\sqrt{2} - \sqrt{3} \geq 1$, a ta nierówność nie dla wszystkich jest oczywista...

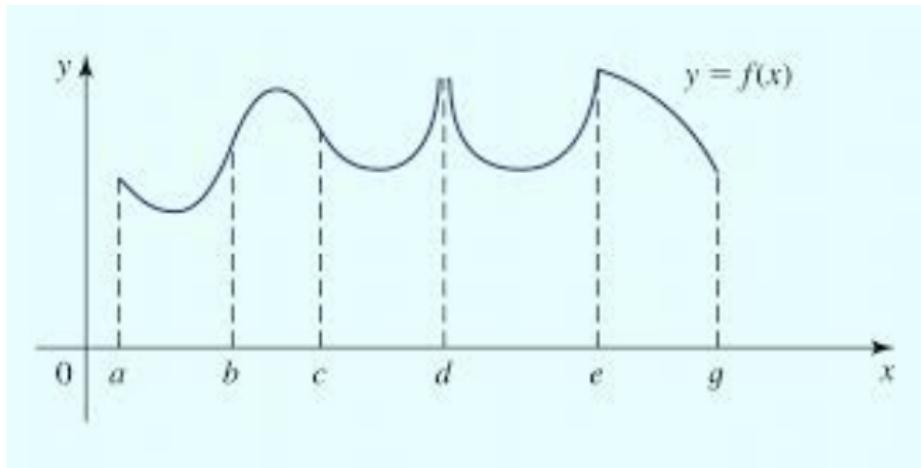
Podobnie natychmiast mamy przydatne oszacowanie pierwiastka: $\sqrt{2} \leq \frac{3}{2}$ (tu: $\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 0$, gdyż $f(x) = 2^x$ - wypukła).

Punkt przegięcia - zmiana wypukłości funkcji.



Zmiana wypukłości funkcji: na rysunku z wypukłej na wklęsłą
(w definicji dopuszczalna też odwrotna zmiana)...

Punkty, w których zmienia się własność funkcji z wypukłej na wklęsłą lub odwrotnie nazywamy **punktami przegięcia** - za chwilę formalna definicja.



Funkcja f ma punkty przegięcia w b , c oraz e !

Punkty przegięcia.

Definicja. Założymy, że $f : P \rightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła w przedziale P , oraz, że x_0 jest punktem wewnętrznym tego przedziału.

Mówimy, że x_0 jest punktem przegięcia funkcji f , jeżeli ten punkt jest jednocześnie końcem przedziału ścisłej wypukłości funkcji f i końcem przedziału ścisłej wklesłości tej funkcji.

Twierdzenie. Jeżeli x_0 jest punktem przegięcia funkcji f oraz f jest klasy C^2 w otoczeniu tego punktu, to $f''(x_0) = 0$.

Zwracam uwagę, że nie jest to warunek wystarczający.

Np. $f(x) = x^4$ nie ma w punkcie $x_0 = 0$ punktu przegięcia (ma w nim minimum lokalne), ale $f''(0) = 0$.

Uwaga: dla funkcji wielu zmiennych mamy też inne punkty charakterystyczne wykresu (np. punkt siodłowy) i ich lokalizacja będzie pewnym problemem w stosowaniu algorytmów gradientowych.

Badanie wypukłości funkcji.

Teraz pokażemy jeszcze jedno zastosowanie pochodnych wyższych rzędów do badania funkcji. Przypomnijmy, że definicja wypukłości funkcji była podana wcześniej.

Twierdzenie. (badanie wypukłości funkcji różniczkowalnej).
Założymy, że funkcja f określona w przedziale P jest w nim różniczkowalna. Na to by f była wypukła w P potrzeba i wystarcza by pochodna f' była funkcją rosnącą.

Wniosek. Jeżeli f jest dwukrotnie różniczkowalna w P i $f'' \geq 0$ (czyli f' jest rosnącą) to f jest wypukła.

Twierdzenie. Jeżeli x_0 jest punktem przegięcia funkcji f oraz f jest klasy C^2 w otoczeniu tego punktu, to $f''(x_0) = 0$.

Zwracamy uwagę, że nie jest to warunek wystarczający.

Np. $f(x) = x^4$ nie ma w punkcie $x_0 = 0$ punktu przegięcia (ma w nim minimum lokalne), ale $f''(0) = 0$.

Podamy więc warunek wystarczający:

Twierdzenie. Jeżeli f jest klasy C^2 w otoczeniu punktu x_0 oraz f'' ma następujące własności:

$$(a) \quad f''(x_0) = 0$$

$$(b) \quad f''(x) > 0 \text{ dla } x > x_0 \text{ (lub } x < x_0\text{) oraz } f''(x) < 0 \text{ dla } x < x_0 \text{ (}x > x_0 \text{ odpowiednio}),$$

to x_0 jest punktem przegięcia funkcji f .

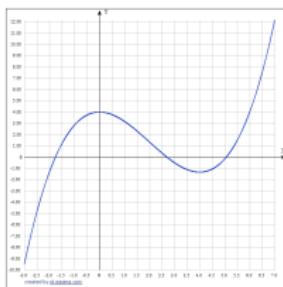
Przykład.

Rozpatrzmy funkcję:

$$f(x) = \frac{1}{6}x^3 - x^2 + 4 , \quad f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

Mamy $f'(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x$ oraz $f''(x) = x - 2$ $f''(x) > 0$ dla $x > 2$

oraz $f''(x) < 0$ dla $x < 2$ (i oczywiście $f''(2) = 0$). Stąd $x_0 = 2$ jest punktem przegięcia funkcji f .



Uwaga.

Zwracam uwagę, że zachodzi pewna analogia:

$f'(x_0) = 0$ jest warunkiem koniecznym istnienia ekstremum lokalnego funkcji różniczkowalnej (ale nie wystarczającym),

$f''(x_0) = 0$ jest warunkiem koniecznym istnienia punktu przegięcia takiej funkcji (i również nie jest wystarczającym ...).

Warunek wystarczający istnienia ekstremum lokalnego,

Teraz czas na kolejne ważne twierdzenie:

Twierdzenie. (warunek wystarczający istnienia ekstremum lokalnego). Jeżeli $f \in C^n$ w otoczeniu punktu x_0 ($n \geq 2$) i jeżeli

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0 ,$$

oraz $f^{(n)}(x_0) \neq 0$, to mamy 2 możliwości:

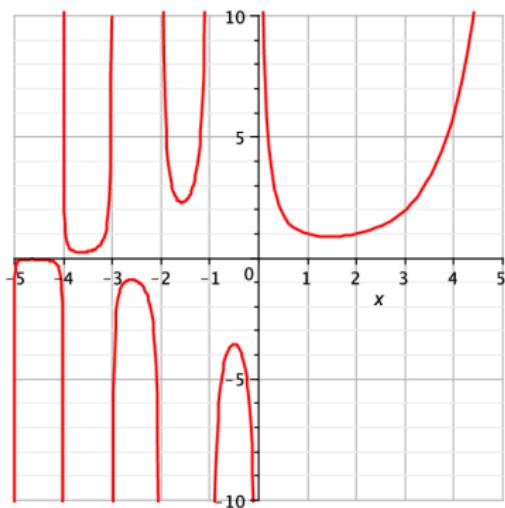
(1⁰) gdy n jest liczbą parzystą, to f ma w punkcie x_0 ekstremum lokalne, przy czym jeśli $f^{(n)}(x_0) > 0$ jest to minimum, a jeśli $f^{(n)}(x_0) < 0$ to jest to maksimum,

(2⁰) gdy n jest liczbą nieparzystą to f ma w x_0 punkt przegięcia (f jest monotoniczna w otoczeniu punktu x_0).

Wykresy.

Aby narysować wykres funkcji będziemy potrzebować **wszystkich** podanych wcześniej informacji!

Tzw. badanie przebiegu zmienności funkcji (o czym za chwilę) pozwoli narysować nawet takie przypadki jak ten poniżej (funkcja Γ Eulera):

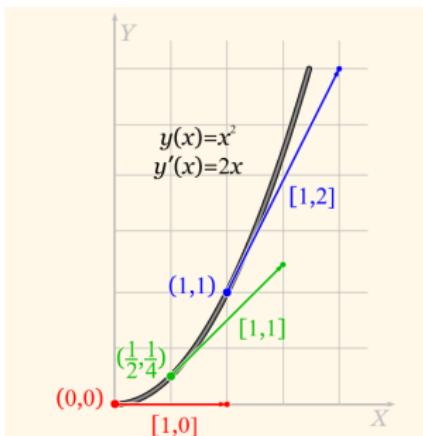


Grafika komputerowa - krzywe w \mathbb{R}^2 .

Najważniejszą postacią zapisu krzywych w grafice wektorowej jest ich postać parametryczna

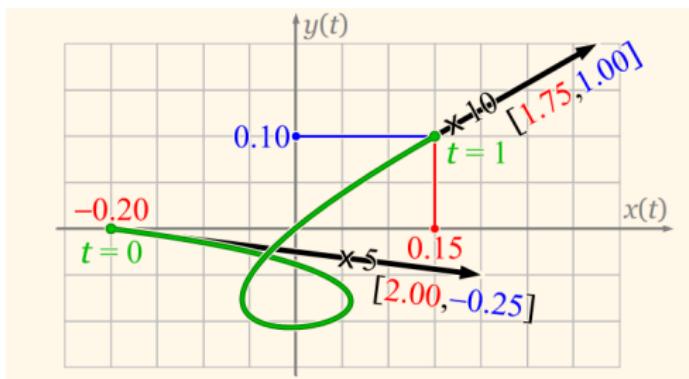
$$x = x(t), y = y(t)$$

dla $t \in [a, b]$. Najkorzystniej - ze względu na szybkość obliczeń aproksymować je za pomocą wielomianów (i to najczęściej stopnia co najwyżej trzeciego). Dla krzywych zadanych jawnie $y = f(x)$ wygodnie jest zaczepić w wybranych punktach wektory o pierwszej składowej równej 1, a drugiej równej $f'(x_k)$.



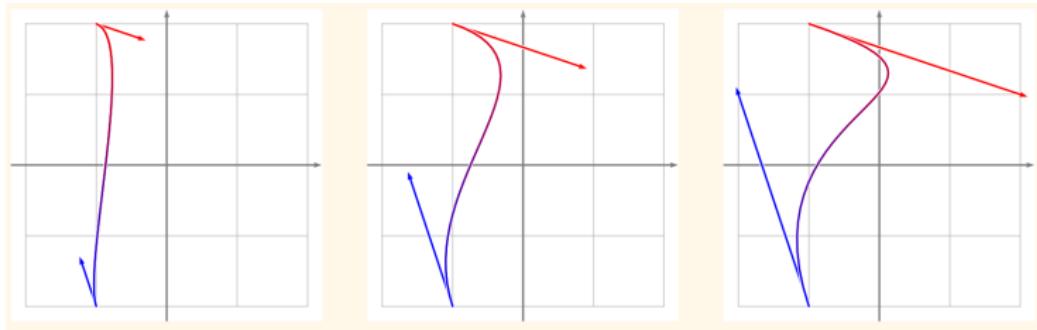
Krzywe i ich aproksymacja.

W przypadku krzywej parametrycznej postąpimy podobnie: w wybranych punktach krzywej zaczepiamy wektory o składowych $[x'(t), y'(t)]$. Na ogół wystarczy zaczepić te wektory w początkowym i końcowym punkcie krzywej (mogliśmy ją podzielić na fragmenty opisane jednym wzorem), co pozwala na ich **gładkie sklejanie**.

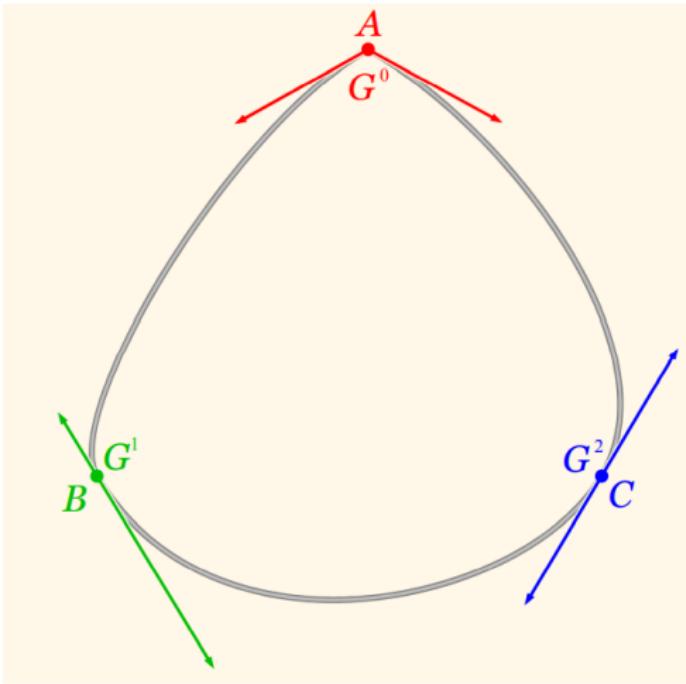


Długość łuku krzywej.

Jak się okaże - ale w pełni dopiero jak wprowadzimy całki - te wektory oparte o pochodne będą potrzebne również do obliczeń (i oszacowań!!) długości łuku krzywej i jej krzywizny:

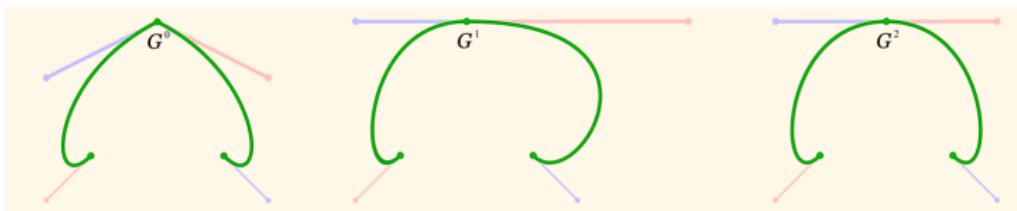


Aby rozpatrywane krzywe, które parametryzujemy kawałkami wyglądaly naturalnie, należy zapewnić odpowiednio gładkie przejście z jednej krzywej w drugą - co zapewniają właśnie te wektory oparte o pochodne. Widać różnice? Który z punktów wygląda najbardziej "dopasowany"?



cdn.

Więcej - na grafice komputerowej, fukcje Hermite'a czy Bezier'a (wielomiany Bernsteina - w matematyce) i b-spline itd...



Uwaga! Proszę zauważyć, że przywoałem przykład krzywych - ich parametryzacje są **funkcjami jednej zmiennej**. Podobnie będzie się badać płyty powierzchniowe, ale to wymaga funkcji **wielu zmiennych**, co wykracza poza ten wykład - ale można (i trzeba) to uzupełnić na kolejnych przedmiotach uzupełniających wiedzę matematyczną dla informatyków - **zachęcam!!**

Metoda Newtona obliczania miejsc zerowych funkcji (różniczkowalnych).

Wybieramy początkowy punkt c_1 aproksymacji miejsca zerowego c_0 . W punkcie $(c_1, f(c_1))$ prowadzimy styczną do wykresu funkcji f , która przetnie się z osią OX w punkcie $(c_2, 0)$. Teraz prowadzimy styczną do wykresu funkcji w punkcie $(c_2, f(c_2))$, a jej punkt wspólny z osią OX oznaczamy przez $(c_3, 0)$. Postępując tak dalej możemy oczekiwać, że c_n dąży do wartości c_0 (co stanowi jej przybliżenie). Teraz konkretnie:

$$y - f(c_1) = f'(c_1) \cdot (x - c_1)$$

jest równaniem stycznej do wykresu funkcji f w $(c_1, f(c_1))$. Stąd:

$$0 - f(c_1) = f'(c_1) \cdot (c_2 - c_1)$$

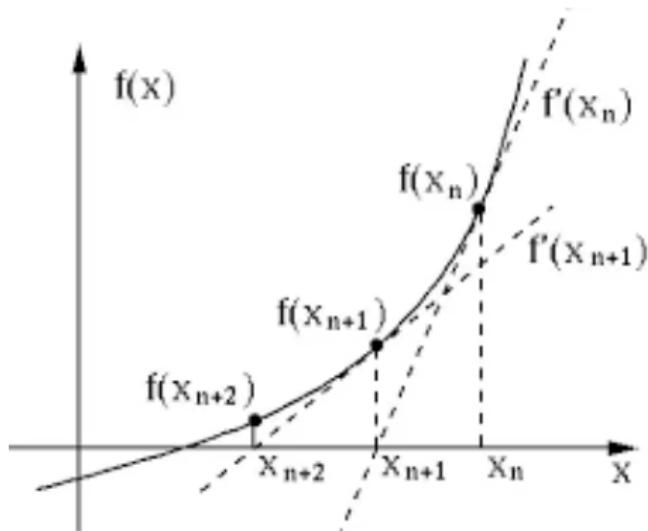
$$c_2 = c_1 - \frac{f(c_1)}{f'(c_1)} .$$

Metoda Newtona II.

Prowadząc dalej analogiczne rozumowanie otrzymamy:

$$c_{n+1} = c_n - \frac{f(c_n)}{f'(c_n)} .$$

Taki sposób postępowania nazywamy metodą Newtona.



Zbieżność metody Newtona.

Twierdzenie. Jeżeli $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła w $\langle a, b \rangle$ oraz:

(a) istnieje miejsce zerowe funkcji f w przedziale (a, b) ,

(b) f jest ściśle monotoniczna w $\langle a, b \rangle$,

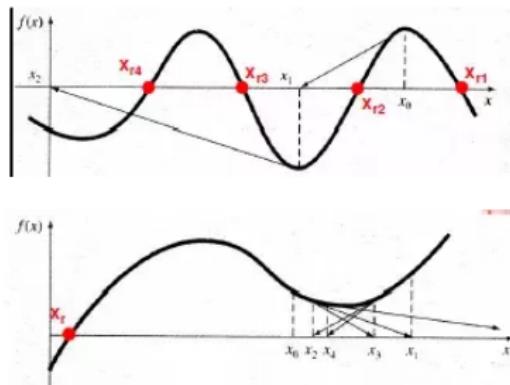
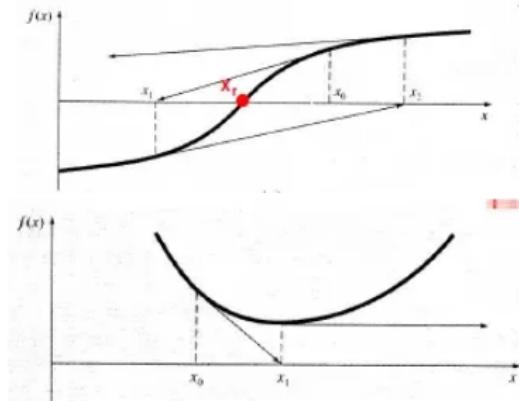
(c) f nie ma punktów przegięcia w $\langle a, b \rangle$,

(d) $\left| \frac{f(c)}{f'(c)} \right| \leq b - a$ dla punktu $c \in \langle a, b \rangle$, w którym $|f'|$ ma wartość najmniejszą,

wtedy ciąg aproksymacji metodą Newtona **jest zbieżny** dla dowolnego wyboru $c_1 \in \langle a, b \rangle$.

Sprawdzajmy założenia...

Wzór to nie twierdzenie (ani algorytm), ma swoje założenia.
Na rysunkach przypadki, w których metoda Newtona nie daje ciągu zbieżnego do rozwiązania (**nie działa**).



Proszę sprawdzić dlaczego?

Metoda Newtona III.

A teraz **błąd oszacowania metody Newtona w n -tym kroku:**

Twierdzenie. Jeżeli istnieje miejsce zerowe funkcji f w przedziale $\langle a, b \rangle$ oraz $|f''(x)| \leq M$, $|f'(x)| \geq m > 0$ dla $x \in \langle a, b \rangle$ i pewnych stałych $m, M \in \mathbb{R}$, to błąd oszacowania B_n w n -tym kroku metody Newtona ma następujące oszacowanie:

$$B_{n+1} \leq B_n^2 \cdot \frac{M}{2m} .$$

Jak widać nie wyliczamy tu błędu, lecz podajemy zależność rekurencyjną błędów z kolejnych kroków.

Proszę zwrócić uwagę na wykorzystanie wielu pojęć wprowadzonych na tym wykładzie...

Uwaga.

Główny problem metody Newtona - konieczność znajomości pochodnej i jej obliczanie. Można zmodyfikować algorytm (**metoda Steffensa**) eliminując tę konieczność (tak naprawdę stosuje się iloraz różnicowy w miejsce pochodnej, czyli korzystamy z definicji pochodnej), ale nie ma "lepszych" metod - jest ona czasochłonna.

Dobry, polecany przez mnie: [przegląd metod](#). Uwaga na założenia matematyczne!

Badanie przebiegu zmienności funkcji.

Korzystając z wprowadzonych wcześniej twierdzeń możemy określić własności funkcji na tyle dokładnie, że pozwala to na narysowanie (w miarę precyzyjnie) wykresu tej funkcji. Najpierw na przykładzie pokażemy niezbędne w tym celu czynności, a na zakończenie podsumujemy algorytm postępowania.

Niezbędne przy tym będą wszystkie wprowadzone wcześniej pojęcia i twierdzenia ...

Tu [strona w Geogebrze](#), gdzie można prześledzić badanie przebiegu zmienności funkcji.

Algorytm postępowania.

W celu ułatwienia zadania naszkicowania wykresu funkcji stosujemy następujące kroki, zwane schematem badania funkcji.
Należy:

1. wyznaczyć dziedzinę funkcji,
2. zbadać parzystość, nieparzystość i okresowość (tylko wtedy, gdy podejrzewamy, że taka własność zachodzi),
3. wyznaczyć miejsca zerowe funkcji oraz punkty przecięcia z osią OY ,
4. wyznaczyć granice lub wartości na końcach przedziałów określoności funkcji,
5. wyznaczyć asymptoty pionowe i ukośne,
6. wyznaczyć przedziały monotoniczności i ekstrema lokalne,
7. wyznaczyć przedziały wypukłości i punkty przegięcia,
8. zebrać informacje w tabeli,
9. narysować wykres funkcji.

Uwaga: pewne kroki możemy opuścić - o ile nie wpływa to zasadniczo na zdolność wykonania wykresu, a są skomplikowane obliczeniowo (np. czcionką pochyloną powyżej lub przy skomplikowanych obliczeniach drugiej pochodnej).

Przykład.

Przykład 1.

$$f(x) = \frac{x^3 + 4}{x^2}$$

Najpierw musimy określić dziedzinę funkcji. Tu oczywiście $x^2 \neq 0$, a więc $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Granice funkcji na końcach przedziału określoności pozwolą w miarę dokładnie szkicować wykres:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 + 4}{x^2} = -\infty ,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty ,$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 4}{x^2} = +\infty .$$

Następnie warto znaleźć punkty przecięcia wykresu z osiami współrzędnych. Tu, ponieważ $x \neq 0$, szukamy tylko wartości argumentu dla którego $f(x) = 0$.

Oczywiście $f(x) = 0 \iff x^3 + 4 = 0 \iff x = -\sqrt[3]{4}$.

Teraz znajdziemy asymptoty tej funkcji.

Pionową jest oczywiście $x = 0$, szukamy asymptot ukośnych. Niech $y = mx + n$, wówczas

$$m_1 = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 4}{x^3} = 1$$

$$m_2 = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = 1,$$

funkcja ta ma więc co najwyżej jedną asymptotę.

$$n = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[\frac{x^3 + 4}{x^2} - x \right] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{4}{x^2} = 0$$

Asymptotą ukośną jest więc prosta $y = x$.

Czas na badanie pochodnych funkcji f .

Obliczamy:

$$\begin{aligned}f'(x) &= \left(\frac{x^3 + 4}{x^2} \right)' = \frac{3x^2 \cdot x^2 - 2x(x^3 + 4)}{x^4} = \\&= \frac{3x^4 - 2x^4 - 8x}{x^4} = \frac{x^3 - 8}{x^3}\end{aligned}$$

dla $x \neq 0$.

Zbadamy dokładniej tę pochodną.

$$f'(x) = 0 \iff \frac{x^3 - 8}{x^3} = 0 \iff x^3 = 8 \iff x = 2$$

$$\begin{aligned}f'(x) > 0 &\iff \frac{x^3 - 8}{x^3} > 0 \iff \frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{x^3} > 0 \iff \\&\iff x \in (-\infty, 0) \cup (2, \infty)\end{aligned}$$

oraz $f'(x) < 0 \iff x \in (0, 2)$

Funkcja jest więc rosnąca w przedziale $(-\infty, 0)$ oraz w przedziale $(2, \infty)$, a malejąca w przedziale $(0, 2)$. Z definicji ekstremum wynika więc, że dla $x = 2$ funkcja ma minimum lokalne oraz $f(2) = 3$.

Zbadamy teraz drugą pochodną $f''(x)$:

$$f''(x) = \left(\frac{x^3 - 8}{x^3} \right)' = \frac{3x^2 \cdot x^3 - 3x^2 \cdot (x^3 - 8)}{x^6} = \frac{24x^2}{x^6} = \frac{24}{x^4},$$

$x \neq 0$. Stąd oczywiście $f''(x) > 0$ dla $x \in (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.

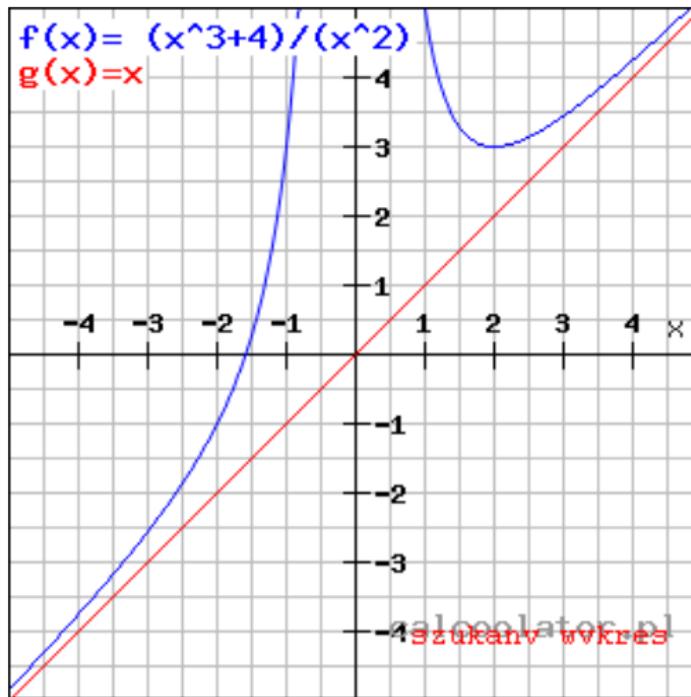
Funkcja jest wypukła w przedziale $(-\infty, 0)$ oraz w przedziale $(0, \infty)$.

Wyniki zbierzymy w postaci tabeli.

x	$(-\infty; 0)$	0	$(0; 2)$	2	$(2; \infty)$
$f'(x)$	+	X	-	0	+
$f''(x)$	+	X	+	+	+
$f(x)$	↗	X	↘	3_{min}	↗

Niezbędny jest komentarz: w pierwszym wierszu umieszczamy wszystkie punkty, które mogą ułatwić przygotowanie wykresu oraz przedziały pomiędzy nimi; w wierszach „ $f'(x)$ ” oraz „ $f''(x)$ ” podajemy jaki znak posiadają te pochodne w danym punkcie lub przedziale. Wreszcie ostatni wiersz to podsumowanie - strzałki mają sygnalizować wzrost (i wypukłość) funkcji, a w odpowiednich miejscach umieszczamy też wyliczone wcześniej granice. Warto tu zauważyć, że jest to także pewna forma kontroli - nie może być sprzeczności pomiędzy wzrostem funkcji, a jej granicami.

I na koniec - wykres...



Zastosowania...

To nie miejsce na szczegółowe przedstawienie roli pochodnych **w zastosowaniach informatycznych** - z jednej strony wprowadzamy dopiero podstawowe pojęcia matematyczne, a z drugiej potrzebujemy najpierw poznać pewne działy informatyki, aby zobaczyć potrzebę stosowania matematyki.

Dla chętnych: proszę np. poczytać o zastosowaniach (UJ) [w grafice komputerowej - strony od 155](#) - pochodne, styczne, ciągłość, funkcje gładkie i klas $C^{(k)}$, krzywe Hermite'a i Beziera, funkcje spline itd. (teraz wiadomo, dlaczego na ilustracji wcześniej podanej nie były styczne, tylko inne krzywe...). Szczegóły - oczywiście na innym przedmiocie, ale bez matematyki nie da się tego zrozumieć...

Grafika komputerowa ma **3 podstawowe działy**: **podstawy matematyczne (transformacje, krzywe i powierzchnie, oświetlenie - algebra, geometria i analiza)**, później **stosowanie istniejących bibliotek graficznych** (np. Direct3D, WebGL) i na koniec **aplikacje graficzne**. Proszę pamiętać: bez pierwszej części nie poznamy możliwości i ograniczeń pozostałych dwóch działów.

Proszę też poczytać materiał dla początkujących **grafików komputerowych** por. strona 3 mini-kursu: okaże się po co nam pochodne...

Funkcje wielu zmiennych (a więc i powierzchnie 3D) będą przedstawiane w ramach kolejnego kursu analizy dla informatyków - dla chętnych...

Tajne/poufne.

- ▶ Styczna do wykresu funkcji. Warunki jej istnienia. Związek z pewnym twierdzeniem o wartości średniej (jakim?). Omów wybrane zastosowanie w informatyce (np. metoda stycznych, grafika komputerowa itp.).
- ▶ Co to jest szereg (potęgowy) Taylora? Podaj definicję, wybrany przez siebie **przykład** oraz omów zastosowanie w obliczeniach na komputerze wartości pewnych funkcji.
- ▶ Jeśli funkcja f , której wartość należy obliczyć za pomocą komputera, spełnia warunek Lipschitza, to każdy algorytm numeryczny poprawny jest też numerycznie stabilny. Podaj co oznacza spełnianie warunku Lipschitz'a i wybrany warunek wystarczający, aby on zachodził.

- Za pomocą reguły de l'Hôpitala oblicz granicę:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{100} + x - 2}{x^{50} + x - 2}.$$

Sprawdź niezbędne założenia.

- Można sprawdzić, że algorytm Karatsuby mnożenia bardzo długich liczb całkowitych jest rzędu $O(n^{\log_2 3})$ ("Algorytmy i struktury danych"). Korzystając ze wzoru $\log_2 3 = \frac{\log_{10} 3}{\log_{10} 2}$ oszacuj tę wielkość i sprawdź, że $n^{\log_2 3} = o(n^2)$. Czy jest również rzędu $o(n^{3/2})$?
- Oblicz $f'''(x)$ dla funkcji $f(x) = \frac{1}{\ln x}$ (sprawdź dziedzinę!). Podaj definicję pochodnej wyższego rzędu i wykorzystane w obliczeniach twierdzenia lub własności funkcji.
- Omów zależności monotoniczności funkcji i znaku pochodnej. Zwrót uwagę na założenia! Podaj przykład (narysuj) wykres funkcji rosnącej i **nieciągłej** na przedziale $[0, 1]$. Co można powiedzieć o pochodnej funkcji z podanego przykładu?
- Co to jest szereg (potęgowy) Taylora? Podaj definicję, wybrany przez siebie **przykład** oraz omów zastosowanie do obliczania na komputerze wartości liczby rzeczywistej e.

- ▶ Oblicz $f'''(x)$ dla funkcji $f(x) = \operatorname{arctg} x$. Podaj definicję pochodnej wyższego rzędu i wykorzystane w obliczeniach twierdzenia lub własności funkcji.
- ▶ W ocenie złożoności obliczeniowej wykorzystywane jest pojęcie "asymptotycznej niewiększości", czyli $f(n) = O(g(n))$. Warunkiem wystarczającym na to jest

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} < \infty.$$

Oblicz, które z podanych niżej funkcji są asymptotycznie niewiększe niż funkcja (ciąg) $g(n) = n \ln n$ (np. zastosuj granice ciągów lub rozszerzenie do funkcji na \mathbb{R} i regułę de l'Hôspitala)?

- [a] $f_1(n) = n^2$,
- [b] $f_2(n) = n \ln(\ln n)$,
- [c] $f_3(n) = 5n$.

Definicja. Pochodne cząstkowe funkcji.

Niech funkcja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ będzie określona przynajmniej na otoczeniu punktu (x_0, y_0) .

Pochodną cząstkową I rzędu funkcji f w punkcie (x_0, y_0) względem zmiennej x nazywamy granicę ilorazu różnicowego:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}.$$

Pochodną tę oznaczać będziemy również:

$$f'_x(x_0) \quad lub \quad D_1 f(x_0, y_0).$$

Definicja. Pochodne cząstkowe funkcji.

Niech funkcja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ będzie określona przynajmniej na otoczeniu punktu (x_0, y_0) .

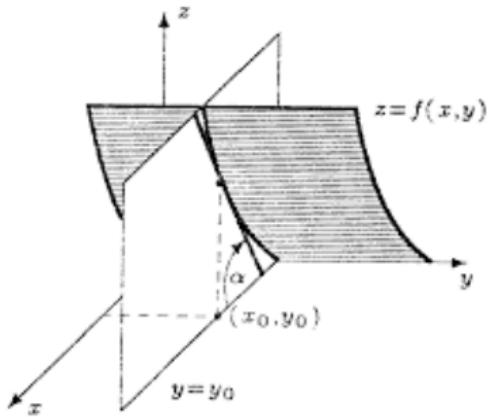
Pochodną cząstkową I rzędu funkcji f w punkcie (x_0, y_0) względem zmiennej y nazywamy granicę ilorazu różnicowego:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h}.$$

Pochodną tę oznaczać będziemy również:

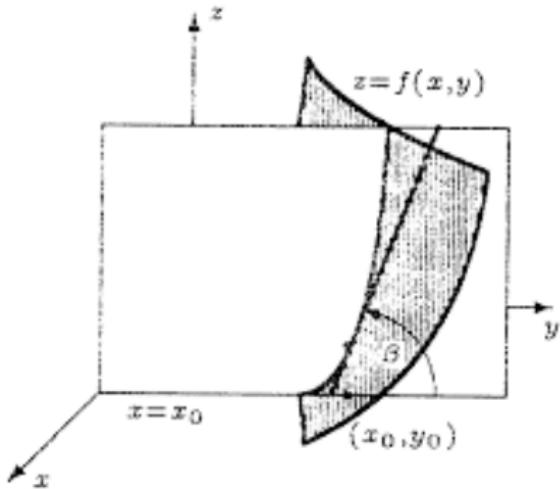
$$f'_y(x_0) \quad lub \quad D_2 f(x_0, y_0).$$

Interpretacja geometryczna pochodnej cząstkowej $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$.



$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \operatorname{tg} \alpha$. Pochodna cząstkowa $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ jest miarą lokalnej szybkości wzrostu funkcji f względem zmiennej x przy ustalonej wartości zmiennej y .

Interpretacja geometryczna pochodnej cząstkowej $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$.



$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \operatorname{tg} \beta.$$

WAŻNE

Podstawowe reguły różniczkowania - dotyczące sumy, różnicy, iloczynu i ilorazu pozostają bez zmian dla pochodnych cząstkowych.

Przykład

► $f(x, y) = x^2 \cdot y + e^{x \cdot y};$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2 \cdot x \cdot y + y \cdot e^{x \cdot y}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x^2 + x e^{x \cdot y}$$

► $f(x, y) = \sin^2(x - y^2);$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2 \sin(x - y^2) \cdot \cos(x - y^2) \cdot (1 - 0)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2 \sin(x - y^2) \cdot \cos(x - y^2) \cdot (0 - 2y)$$

Gradient.

Gradientem funkcji wielu zmiennych f w punkcie (x_1, x_3, \dots, x_n) , w którym istnieją wszystkie pochodne cząstkowe, nazywamy wektor

$$\nabla f(x_1, x_3, \dots, x_n) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_3, \dots, x_n), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_1, x_3, \dots, x_n) \right).$$

W przypadku, gdy pochodne cząstkowe istnieją w każdym punkcie, ∇f jest po prostu funkcją wielu zmiennych otrzymanych jako pochodne cząstkowe.

Wtedy **symbol** ∇ oznacza wektorowy operator liniowy $(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n})$, który przeprowadza funkcje wielu zmiennych posiadające wszystkie pochodne cząstkowe na wektorową funkcję wielu zmiennych.

Niech funkcja f ma pochodne cząstkowe $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ przynajmniej na $O(x_0, y_0)$. Pochodne cząstkowe II rzędu funkcji f w punkcie (x_0, y_0) określamy wzorami:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)(x_0, y_0)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)(x_0, y_0)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)(x_0, y_0)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)(x_0, y_0)$$

Twierdzenie Schwarza.

Niech funkcja dwóch zmiennych $f : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ posiada na otoczeniu punktu $(x_0, y_0) \in (a, b) \times (c, d)$ pochodne mieszane II rzędu, f_{xy} i f_{yx} , które są w tym punkcie ciągłe (jako funkcje dwóch zmiennych).

Wtedy pochodne te w (x_0, y_0) są sobie równe.

Różniczki funkcji wielu zmiennych.

Rezygnujemy tu z w pełni formalnego wprowadzenia różniczek jako pewnych odwzorowań wieloliniowych (pozostajemy przy intuicji dla funkcji jednej zmiennej).

Przedstawimy jedynie pewne wprowadzenie oznaczeń.

Wartość różniczki

$$d_a f \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$$

na wektorze $h = (h_1, h_2, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^n$ wyraża sumę

$$d_a f(h) = \frac{\partial f(a)}{\partial x_1} h_1 + \frac{\partial f(a)}{\partial x_2} h_2 + \dots + \frac{\partial f(a)}{\partial x_n} h_n.$$

Sumę tę można także wyrazić bez argumentu h jako

$$d_a f = \frac{\partial f(a)}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f(a)}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial f(a)}{\partial x_n} dx_n,$$

gdzie $dx_i : \mathbb{R}^n \ni h = (h_1, h_2, \dots, h_n) \mapsto dx_i(h) = h_i \in \mathbb{R}$ jest rzutowaniem na i -tą współrzędną.

Założymy, że $f \in C^m(U)$, gdzie $U \subset \mathbb{R}^n$ jest podzbiorem otwartym przestrzeni skończenie wymiarowej \mathbb{R}^n .

Wówczas różniczkę rzędu m można wyrazić efektywnie za pomocą pochodnych cząstkowych rzędu m .

Twierdzenie. Jeśli $f \in C^m(U)$, to w dowolnym punkcie $a \in U$ wartość różniczki rzędu m na m -ce jednakowych wektorów $h = (h_1, h_2, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^n$ wyraża sumą

$$d_a^m f \underbrace{(h, h, \dots, h)}_{m \text{ wektorów } h} = \sum_{|\alpha|=m} \binom{m}{\alpha} \frac{\partial^m}{\partial x^\alpha} f(a) h^\alpha,$$

gdzie sumowanie przebiega po wszystkich możliwych wielowskaźnikach (n -wskaźnikach) $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$ o długości $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = m$.

Natomiast $\binom{m}{\alpha} := \frac{m!}{(m - |\alpha|)! \alpha!}$, jest uogólnieniem symbolu Newtona, w którym silnię wielowskaźnika $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ definiujemy za pomocą iloczynu silni jego współrzędnych, tj.
 $\alpha! = \alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_n!$ oraz $h^\alpha = h_1^{\alpha_1} h_2^{\alpha_2} \dots h_n^{\alpha_n}$.

Uwaga.

Wzór

$$d_a^m f(h, h, \dots, h) = \sum_{|\alpha|=m} \binom{m}{\alpha} \frac{\partial^m}{\partial x^\alpha} f(a) h^\alpha,$$

który podaliśmy w tezie twierdzenia czasem zapisuje się bez
wyszczególniania argumentów w następującej postaci

$$d_a^m f = \sum_{|\alpha|=m} \binom{m}{\alpha} \frac{\partial^m f(a)}{\partial x^\alpha} dx^\alpha$$

lub

$$d_\cdot^m f = \sum_{|\alpha|=m} \binom{m}{\alpha} \frac{\partial^m f}{\partial x^\alpha} dx^\alpha,$$

gdzie $dx^\alpha : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ definiujemy na wektorze $h \in \mathbb{R}^n$ wzorem
 $dx^\alpha(h) := h^\alpha = h_1^{\alpha_1} h_2^{\alpha_2} \dots h_n^{\alpha_n} \in \mathbb{R}$.

Twierdzenie Taylora.

Dla dowolnych punktów a oraz $a + h$ zbioru U takich, że odcinek $\{a + th, t \in [0, 1]\} \subset U$, zachodzi równość

$$\begin{aligned} f(a+h) &= f(a) + d_a f(h) + \frac{1}{2!} d_a^2 f(h, h) + \frac{1}{3!} d_a^3 f(h, h, h) + \dots \\ &+ \frac{1}{m!} d_a^m f \underbrace{(h, h, \dots, h)}_{m \text{ wektorów } h} + R_m f(a, h), \end{aligned}$$

gdzie

$$\|R_m f(a, b)\|_y \leq \frac{1}{(m+1)!} \sup\{|d_{a+th}^{m+1}(h, h, \dots, h)|, t \in [0, 1]\}.$$

Wielomiany Taylora.

Funkcję

$$\begin{aligned} X \in h \mapsto T_a^m f(h) &= f(a) + d_a f(h) + \frac{1}{2!} d_a^2 f(h, h) + \dots \\ &+ \frac{1}{m!} d_a^m f \underbrace{(h, h, \dots, h)}_{m \text{ razy}} \\ &= \sum_{k=0}^m \frac{1}{k!} d_a^k \underbrace{(h, h, \dots, h)}_{k \text{ razy}} \in Y \end{aligned}$$

nazywamy **wielomianem Taylora rzędu m funkcji f** o środku w punkcie a .

Gradient a wzrost wartości funkcji.

Gradient wskazuje **kierunek największego wzrostu funkcji, a jego długość odpowiada współczynnikowi kierunkowemu tego wzrostu** (to wynika wprost z własności iloczynu skalarnego: iloczyn skalarny wektorów jest równy iloczynowi ich długości razy cosinus kąta między nimi; cosinus, a zatem pochodna kierunkowa jest największa gdy kąt jest zerowy, a wartość tej pochodnej, czyli iloczyn długości jest długością gradientu, bo drugi wektor ma długość 1).

To **kluczowa własność w zastosowaniach** - na ogólnie mówimy o "metodach gradientowych" gdy określamy najszybszy wzrost wartości pewnych funkcji wielu zmiennych...

Pojęcie gradientu w analizie obrazu...

The gradient of an image


$$\nabla f = \left[\frac{\partial f}{\partial x}, 0 \right]$$

The gradient of an image


$$\nabla f = \left[\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right]$$

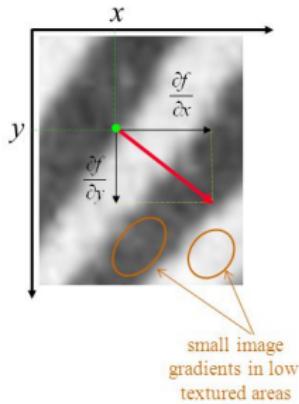
Jak to wyjaśnić? Po prostu: tworzymy funkcję nasycenia wypełnieniem i sprawdzamy jej gradient!

- The **gradient** at a point (x,y)

$$\nabla f = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} \nabla_x * f \\ \nabla_y * f \end{bmatrix}$$

- **Gradient Magnitude**

$$\| \nabla f \| = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2} \approx$$



- **Gradient Orientation**

- direction of the “steepest ascend”
- orthogonal to object boundaries in the image

- Edge at a point is orthogonal to the gradient vector at that point.
 - So the direction angle of the edge in this example is $\alpha - 90^\circ = 45^\circ$
 - All edge points in the figure have the same gradient, so that entire edge segment is in the same direction.
-



Ekstrema warunkowe wprowadzenie. Warunek konieczny.

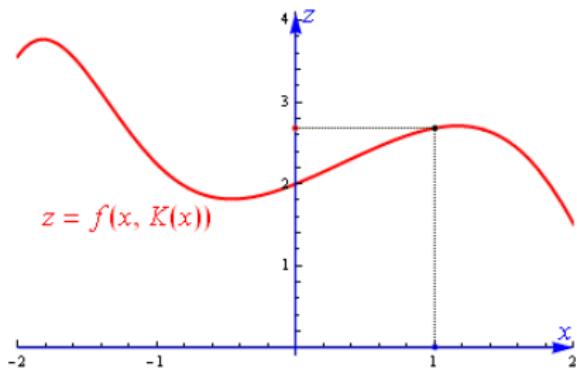
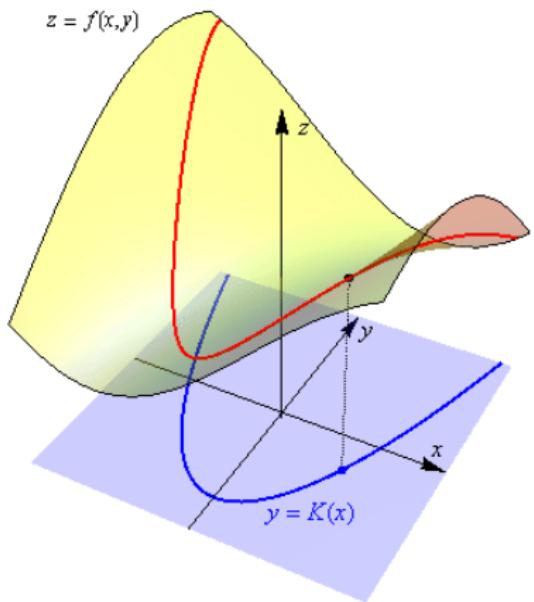
Wektor v jest styczny do hiperpowierzchni H w punkcie z_0 (co zapiszemy jako $v \in T_{z_0} H$), jeżeli istnieje krzywa $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow H$ klasy C^1 taka że:

$$\gamma'(0) = v, \quad \gamma(0) = z_0.$$

Jeżeli Φ przyjmuje ekstremum lokalne związane przez H w punkcie $z_0 \in H$ i istnieje $\Phi'(z_0)$ to $\forall v \in T_{z_0} H, \Phi'(z_0)(v) = 0$, $T_{z_0} H \subset \text{Ker } \Phi'(z_0)$ - z opisu hiperpowierzchni przez wektory styczne $\Phi : U \rightarrow \mathbb{R}$ $U \subset \mathbb{R}^N$ i niech $H \subset \mathbb{R}^N$ będzie hiperpowierzchnią klasy C^k n -wymiarową. Mamy określoną funkcję: $\phi : \Phi|_H : U \cap H \rightarrow \mathbb{R}$.

Mówimy że Φ przyjmuje max (min) lokalne związane przez H (lub inaczej mówiąc: **warunkowe**) w punkcie $z_0 \in H$ jeśli istnieje $\epsilon > 0$ taki że dla dowolnego $z \in B(z_0, \epsilon) \cap H$ (*i tylko takiego!!*)

$$f(z) \leq f(z_0).$$



Funkcja Lagrange'a.

Problem optymalizacji z ograniczeniem dla $f(x)$ pod warunkiem $h(x) = 0$ można sprowadzić do problemu optymalizacji bez ograniczeń funkcji

$$L(x, \lambda) = f(x) - \lambda \cdot h(x),$$

zwanej funkcją Lagrange'a, bowiem warunki pierwszego rzędu optymalizacji tej funkcji będą dokładnie równe warunkom

$$\nabla f(x) - \lambda h(x) = 0 \quad , \quad h(x) = c.$$

Gradient ograniczenia w punkcie optymalnym musi być różny od wektora zerowego.

Przykład.

Wyznaczmy najmniejszą i największą wartość funkcji

$$F(x, y, z) = x - y - 2z$$

na przecięciu się dwóch walców

$$x^2 + z^2 = 1, y^2 + z^2 = 1$$

(poźniej powiemy sobie, że to przykład **programowania kwadratowego**).

Podany warunek można opisać za pomocą poziomicy zerowej funkcji $G(x, y, z) = (x^2 + z^2 - 1, y^2 + z^2 - 1)$. Spośród punktów poziomicy $G = 0$ tylko dwa nie są regularne: $(0, 0, 1)$ oraz $(0, 0, -1)$.

Poza tymi dwoma punktami możemy zastosować metodę mnożników Lagrange'a, która sprowadza się do wyznaczenia rozwiązań układu równań:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial F}{\partial x} = \lambda_1 \frac{\partial g_1}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial g_2}{\partial x} \\ \frac{\partial F}{\partial y} = \lambda_1 \frac{\partial g_1}{\partial y} + \lambda_2 \frac{\partial g_2}{\partial y} \\ \frac{\partial F}{\partial z} = \lambda_1 \frac{\partial g_1}{\partial z} + \lambda_2 \frac{\partial g_2}{\partial z} \\ g_1(x, y, z) = 0 \\ g_2(x, y, z) = 0 \end{array} \right. \quad \text{czyli} \quad \left\{ \begin{array}{l} 1 = 2\lambda_1 x \\ -1 = 2\lambda_2 y \\ -2 = 2(\lambda_1 + \lambda_2)z \\ x^2 + z^2 - 1 = 0 \\ y^2 + z^2 - 1 = 0 \end{array} \right.$$

Układ ten ma dwa rozwiązania

$$-x = y = z = 2 - \sqrt{2},$$

przy czym $\lambda_1 = \lambda_2 = -2 - \sqrt{2}$, oraz

$$x = -y = -z = 2 - \sqrt{2}$$

przy czym $\lambda_1 = \lambda_2 = 2 - \sqrt{2}$.

Wartość funkcji F w tych punktach wynosi

$$F(-2 - \sqrt{2}, 2 - \sqrt{2}, 2 - \sqrt{2}) = -2\sqrt{2}$$

oraz

$$F(-2 - \sqrt{2}, 2 - \sqrt{2}, 2 - \sqrt{2}) = 2\sqrt{2}.$$

W obu punktach nieregularnych poziomicy $G = 0$ mamy
 $F(0, 0, -1) = 2$ oraz $F(0, 0, 1) = -2$.

Po porównaniu tych wartości: $-2\sqrt{2} < -2 < 2 < 2\sqrt{2}$ stwierdzamy, że największą wartość na poziomicy $G = 0$ równą $2\sqrt{2}$ funkcja F osiąga w punkcie $(2 - \sqrt{2}, -2 - \sqrt{2}, -2 - \sqrt{2})$, a najmniejszą, równą $-2\sqrt{2}$ w punkcie $(-2 - \sqrt{2}, 2 - \sqrt{2}, 2 - \sqrt{2})$.

Przykład zastosowanie ekstremum warunkowego - kodowanie.

Kody przedrostkowe. Wartość oczekiwana L długości słowa kodującego φ jest dana wzorem

$$L = E(\text{lgth}(\varphi)) := \sum_{s \in S} p(s) \cdot \text{lgth}(\varphi(s)) = \sum_i p_i \cdot l_i.$$

Jak dobrać wartości l_i by minimalizować wartość oczekiwanaą ilości pamięci?

Ponieważ wiemy jakie długości są dopuszczalne, dostajemy
problem minimalizacji

$$L(l_1, \dots, l_n) := \sum_i p_i l_i$$

przy warunku

$$\sum_i d^{-l_i} \leq 1.$$

Zapominamy o tym, że są całkowite (dostaniemy przybliżenie), i wtedy możemy zwiększyć L zakładając równość!

Metody optymalizacyjne.

Metody wyznaczania optymalnych rozwiązań, czyli rozwiązań najlepszych ze względu na przyjmowane kryteria. Na ogólny sposób zagadnienie może mieć różne kryteria (minimalny nakład pracy, maksymalny zysk, minimalna złożoność obliczeniowa czy wymagana pamięć itd.), co prowadzi do różnych rozwiązań optymalnych. Podamy ogólne metody, pozwalające je badać w jednolity sposób - niezależnie od konkretnej postaci kryterium.

Na ogólny jest to badanie ekstremum (niekiedy lokalnego, niekiedy globalnego) pewnej **funkcji celu** z uwzględnieniem ograniczeń - na ogólny w postaci równań (warunków brzegowych) lub nierówności. Np.

$$f(x_1, x_2, \dots, x_k) \rightarrow \text{MIN.} \quad \text{o ile} \quad (x_1, x_2, \dots, x_k) \in K,$$

$$f(x_1, x_2, \dots, x_k) \rightarrow \text{MAX.} \quad \text{o ile} \quad g(x_1, x_2, \dots, x_k) = 0 \quad \dots$$

Na ogół są to metody krokowe (iteracyjne), czyli korzysta się z dyskretyzacji pojęć znanych z analizy, a służących do określania ekstremum (z ograniczeniami wynikającymi z ich dyskretnej postaci).

O ile funkcja celu jest zależna od jednej zmiennej, to stosujemy metody z analizy funkcji jednej zmiennej (znane z kursu analizy matematycznej). Opiszemy bardziej realistyczną sytuację funkcji wielu zmiennych.

- Metody gradientowe (ang. *descent methods*)
 - Metoda najszybszego spadku (ang. *steepest descent method*)
 - Metoda Newtona
 - Metoda Marquardta
 - Metoda sprzężonego gradientu Fletcher-Reevesa
 - Metody quasinewtonowskie:
 - * Metoda Davidon-Fletcher-Powella (DFP)
 - * Metoda Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shannona (BFGS)

Proste algorytmy.

Metodą “naiwną” jest minimalizacja funkcji wielu zmiennych względem współrzędnych.

1. Ustalamy (x_0, y_0) - punkt startowy.
2. Ustalamy krok k .
3. Kontrolujemy wartości funkcji w 4 punktach:
 $(x_0, y_0 + k), (x_0, y_0 - k), (x_0 + k, y_0), (x_0 - k, y_0)$.
4. Jeżeli w jednym z punktów wartość funkcji $f(x, y)$ jest mniejsza niż w punkcie (x_0, y_0) to kładziemy go za punkt (x_0, y_0) i powtarzamy procedurę z poprzedniego kroku.
5. Jeśli w poprzednim punkcie algorytmu nie znaleziono takiego punktu kratowego, to zmniejszamy krok i powtarzamy punkt 3.

Metoda jest zawodna, bo kontrolujemy tylko 4 główne kierunki...

Metoda najszybszego spadku

... jest dość prostą gradientową, iteracyjną metodą optymalizacji bez ograniczeń. Każda iteracja polega na wykonaniu kroku w lokalnie najlepszym kierunku czyli w kierunku wyznaczonym przez **ujemny gradient** (niekiedy nazywany *antygradientem*). Przy czym długość kroku może być stała (metoda gradientu prostego) lub wybrana tak by spadek wartości funkcji celu w nowym punkcie był jak największy (dobra metoda optymalizacji jednowymiarowej). Uwaga: jednak nie musi prowadzić do ekstremum lokalnego!

Oznaczenia:

x_0 – pierwsze przybliżenie rozwiązania (punkt startowy)

x_i – i-te przybliżenie rozwiązania

i – numer iteracji (na początku równa 0)

Wybieramy punkt początkowy i obliczamy w nim wartość funkcji i wartość gradientu tej funkcji w tym punkcie.

Algorytm:

1. sprawdź czy punkt x_i spełnia warunek stopu tzn.

$$|\nabla f(x_i)|^2 \leq \varepsilon,$$

jeśli tak to zakończ (x_i jest rozwiązaniem)

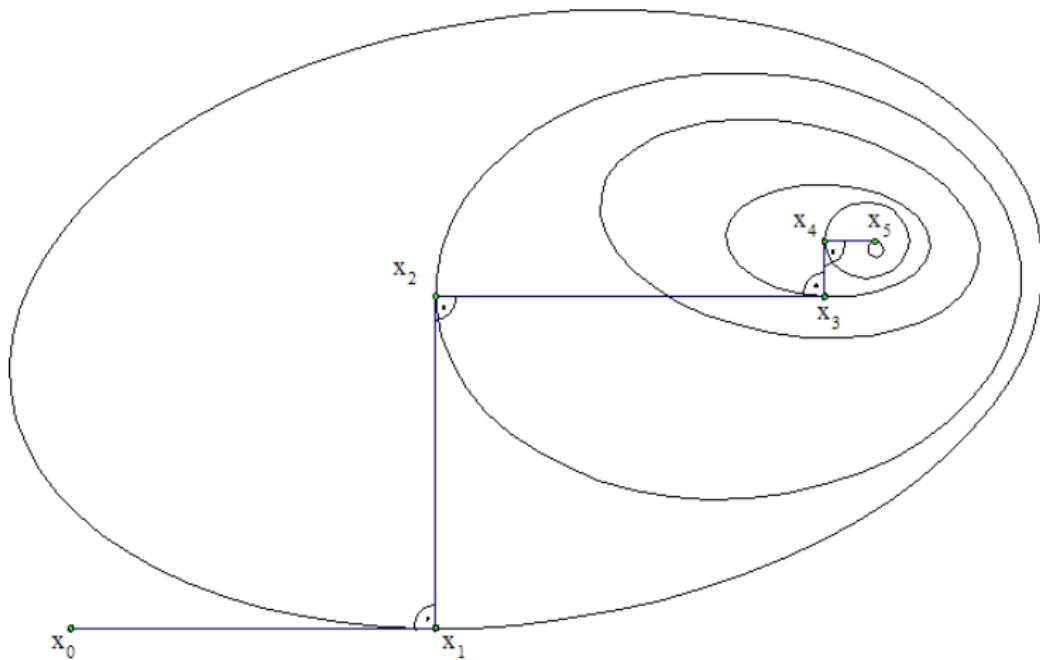
2. $i := i + 1$, obliczamy w nowym punkcie wartość funkcji i gradientu,

3. $x_i := x_{i-1} - \lambda_i \nabla f(x_{i-1})$, gdzie $\lambda_i > 0$ – długość kroku minimalizująca jednowymiarową funkcję

$$f(\lambda_i) = f(x_{i-1} - \lambda_i \nabla f(x_{i-1})),$$

4. przejdź do pkt. 1

Przykładowa trajektoria:

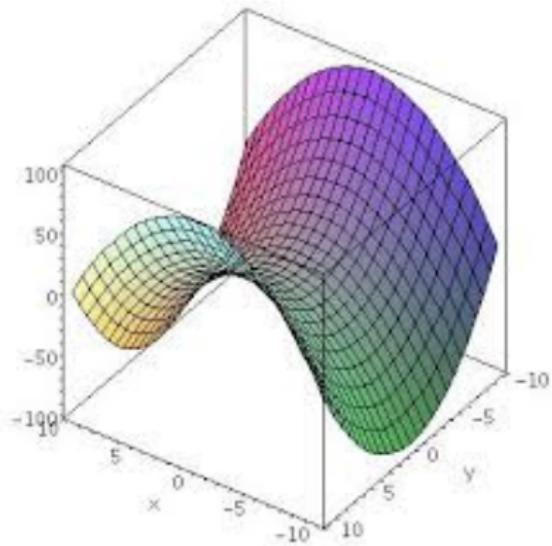


Uwidoczniono poziomice dwuwymiarowej funkcji celu i kolejne punkty eksperymentów.

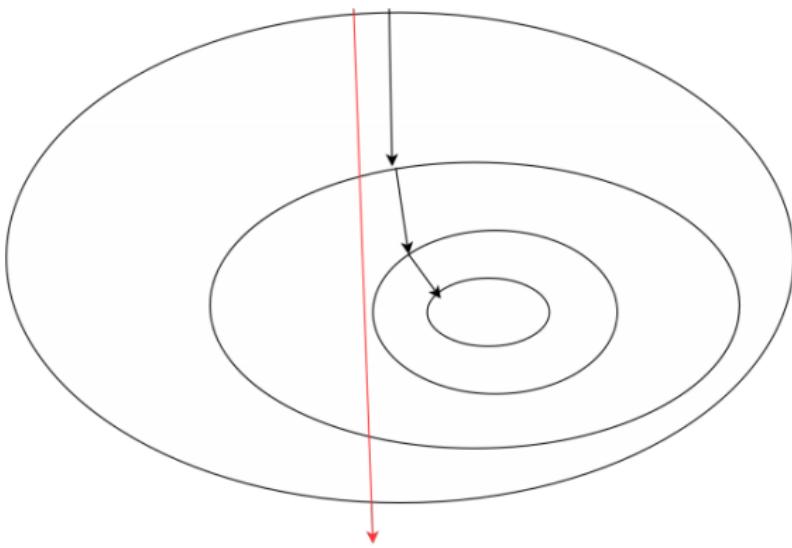
Organiczenia metody.

- ▶ Jeśli funkcja f ma więcej niż jedno minimum lokalne, otrzymany wynik może zależeć od punktu początkowego.
- ▶ Wybierając różne punkty początkowe, możemy otrzymać inne rozwiązania, a więc na końcu możemy wybrać najlepsze (najmniejsze) z nich.
- ▶ W sytuacjach gdy istnieje wiele minimów lokalnych wykorzystuje się sposoby dające możliwość wyjścia z optimum lokalnego poprzez rozszerzenie lokalnych poszukiwań.

Uwaga: metody gradientowe mają jednak słabe punkty - te procedury załamują się w otoczeniu punktów siodłowych i takie przypadki trzeba wykluczyć!!



Przypomnienie - w metodach gradientowych oprócz doboru kierunku istotne jest też określenie jak daleko można podążyć w danym kierunku. Na czerwono zaznaczono sytuację dla zbyt dużego współczynnika uczenia.



Zbyt mała jego wartość powodowałaby dużą liczbę drobnych kroków.

Optymalizacja kierunkowa służy do odpowiedniego doboru λ .

Analiza matematyczna dla informatyków.

Mieczysław Cichoń, ver. 2.5/2021

Mieczysław Cichoń - WMI UAM

Plan wykładów 13, 14, 15.

Rachunek całkowy funkcji jednej zmiennej. (13)

Funkcja pierwotna i całka nieoznaczona. (13)

Podstawowe metody całkowania. (13)

Całka oznaczona i jej zastosowania. (14)

Całka niewłaściwa i jej zastosowanie w informatyce. (14)

Metryki, odległości między funkcjami. Twierdzenie Banacha o kontrakcji. (14)

Całka Riemanna i jej zastosowania w informatyce. Podstawy całkowania numerycznego. Obliczenia numeryczne wybranych całek. Przegląd porównawczy metod (na ćwiczeniach też: proste całki - obliczenie przez części przez podstawienia). (15)

Równania różniczkowe - podstawy. (15)

Strony do lektury na wykłady 13, 14, 15.

Czytamy najpierw motywacje:

[K] : motywacje - strony 28-30

teraz wstępne materiały, **najpierw**

[K] : strony 269-275

oraz później

[K] : strony 257-267 I ta część jest konieczna dla zrozumienia całkowania numerycznego!

Mam też tym razem propozycję skorzystania **najpierw** ze źródła [W] - o czym na kolejnym slajdzie.

Alternatywna kolejność źródeł.

Jeśli ktoś woli, to zgodny z moim "kierunkiem" wykładu (od całki nieoznaczonej do oznaczonej) jest jednak drugi materiał - można go czytać po kolei (ale wtedy koniecznie trzeba po zapoznaniu się z [W] przeczytać "kolorowe" fragmenty z [K] dotyczące informatyki...)

[W] : strony 186-203 i 204-207 - ten ostatni fragment ze wzorem Stirlinga, który akurat w informatyce jest bardzo przydatny

Kolejny ważny fragment (potencjalne pytanie na egzamin...) to strony 214–226!!

Całki nieoznaczone.

Zajmiemy się obecnie działaniem odwrotnym do różniczkowania zwanym całkowaniem. Funkcje, o których będzie mowa, to funkcje o wartościach rzeczywistych, określone w pewnym przedziale.

Definicja. *Funkcją pierwotną* funkcji f w przedziale (a, b) nazywamy każdą funkcję F określoną w przedziale (a, b) i posiadającą pochodną $F'(x)$ w każdym punkcie $x \in (a, b)$ taką, że $F'(x) = f(x)$ dla każdego $x \in (a, b)$.

Funkcję f dla której istnieje funkcja pierwotna w (a, b) , nazywamy *całkowalną* w (a, b) .

Funkcje całkowalne.

Pojęcie całkowalności określa się w przedziale domkniętym a, b , przy czym w punktach końcowych a i b bierze się pochodną F' odpowiednio prawostronną i lewostronną.

Definicja. Rodzinę wszystkich funkcji pierwotnych funkcji f nazywamy *całką nieoznaczoną* z f i zapisujemy przy pomocy symbolu $\int f(x)dx$.

Zatem z definicji mamy $\int F'(x)dx = F(x) + C$, gdzie C jest dowolną stałą.

Twierdzenie. (o stałej całkowania). Jeżeli funkcja f jest całkowalna w (a, b) oraz F jest funkcją pierwotną funkcji f w (a, b) , to:

1⁰ przy dowolnej stałej C , funkcja $F + C$ jest też funkcją pierwotną funkcji f w (a, b) ,

2⁰ dla każdej funkcji pierwotnej G funkcji f w (a, b) istnieje taka stała C , że $G(x) = F(x) + C$ dla $x \in (a, b)$.

Podstawowe wzory rachunku całkowego.

$$1) \quad \int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C, \quad a \neq -1, \quad x > 0.$$

Gdy a jest liczbą naturalną, to zastrzeżenie $x > 0$ odpada; gdy a jest liczbą całkowitą ujemną to zamiast $x > 0$ wystarczy założyć $x \neq 0$.

Podajemy kilka szczególnych przypadków wzoru 1)

a) $a = 0$, wówczas $\int dx = x + C$;

b) $a = -\frac{1}{2}$, wówczas $\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C, \quad x > 0$;

c) $a = -2$, wówczas $\int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + C, \quad x \neq 0$.

2) $\int \frac{dx}{x} = \ln |x| + C, \quad x \neq 0$.

$$3) \int e^x dx = e^x + C ,$$

$$4) \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C , \quad a > 0 , \quad a \neq 1 .$$

$$5) \int \cos x dx = \sin x + C ,$$

$$6) \int \sin x dx = -\cos x + C ,$$

$$7) \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C , \quad \cos x \neq 0 .$$

$$8) \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C , \quad \sin x \neq 0 .$$

$$9) \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C = -\arccos x + C' , \quad -1 < x < 1 .$$

$$10) \int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C = -\operatorname{arctg} x + C' ,$$

$$11) \quad \int \sinh x dx = \cosh x + C \quad ,$$

$$12) \quad \int \cosh x dx = \sinh x + C \quad ,$$

$$13) \quad \int \frac{dx}{\cosh^2 x} = \operatorname{tgh} x + C \quad ,$$

$$14) \quad \int \frac{dx}{\sinh^2 x} = -\operatorname{ctgh} x + C \quad ,$$

$$15) \quad \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \operatorname{arsinh} x + C \quad ,$$

$$16) \quad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \operatorname{arccosh} x + C \quad .$$

Całkowalność a ciągłość.

Twierdzenie. (o całkowalności funkcji ciągłej). *Każda funkcja ciągła w (a, b) ma w (a, b) całkę nieoznaczoną.*

co więcej...

Twierdzenie. *Każda funkcja ciągła w (a, b) ma w (a, b) całkę nieoznaczoną.*

...a to ma dość nieoczekiwane konsekwencje przy całkowaniu numerycznym - nie da się bowiem wyznaczyć funkcji pierwotnych dla wszystkich funkcji ciągłych - jako funkcji wyznaczonych za pomocą skończonej liczby działań na funkcjach elementarnych...

Własności całek nieoznaczonych.

Twierdzenie. (o działaniach arytmetycznych na całkach nieoznaczonych). Jeżeli funkcje f i g są całkowalne w przedziale I (otwartym lub domkniętym), a c jest dowolną liczbą, to funkcje $f + g$, $f - g$ i cf są też całkowalne w I oraz

$$\int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx ,$$

$$\int [f(x) - g(x)]dx = \int f(x)dx - \int g(x)dx ,$$

$$\int cf(x)dx = c \int f(x)dx ,$$

z dokładnością do stałej całkowania.

Przykład. Obliczyć całkę $I = \int x(x+1)(x-2)dx$.

Po doprowadzeniu funkcji podcałkowej do postaci wielomianu i skorzystaniu z własności całki otrzymujemy:

$$\begin{aligned} I = \int (x^3 - x^2 - 2x)dx &= \int x^3 dx - \int x^2 dx - 2 \int x dx = \\ &= \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - 2 \cdot \frac{x^2}{2} + C \end{aligned}$$

Całkowanie przez części.

Twierdzenie. (o całkowaniu przez części całek nieoznaczonych). *Jeżeli funkcje f i g mają pochodne f' i g' ciągłe w przedziale I (otwartym lub domkniętym), to*

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx .$$

Przykład.

- (a) Obliczyć całkę $\int xe^x dx$.

Obierając $f(x) = x$, $g'(x) = e^x$ mamy $f'(x) = 1$ i $g(x) = e^x$, więc

$$\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C = e^x(x - 1) + C .$$

(b) Obliczyć całkę $\int e^x \sin x dx$. Korzystając z twierdzenia o całkowaniu przez części $f(x) = \sin x$ $g'(x) = e^x$ oraz $f'(x) = \cos x$ $g(x) = e^x$ mamy

$$\int e^x \sin x dx = e^x \sin x - \int e^x \cos x dx .$$

Obliczymy dalej całkę $\int e^x \cos x dx$.

Ponownie stosujemy dla tej całki, twierdzenie o całkowaniu przez części.

Podstawiając

$$f(x) = \cos x \quad g'(x) = e^x$$

$$f'(x) = -\sin x \quad g(x) = e^x$$

otrzymujemy

$$\int e^x \cos x dx = e^x \cos x + \int e^x \sin x dx .$$

Podstawiając otrzymaną wartość do poprzedniej równości otrzymujemy

$$\int e^x \sin x dx = e^x \sin x - e^x \cos x - \int e^x \sin x dx ,$$

stąd po przeniesieniu całki na lewą stronę równości mamy

$$2 \int e^x \sin x dx = e^x (\sin x - \cos x) \quad / : 2$$

Ostatecznie więc

$$\int e^x \sin x dx = \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x) + C .$$

(c) Obliczyć całkę $\int \ln x dx$.

Zakładamy, że $x > 0$. Całkujemy przez części przyjmując
 $f(x) = \ln x$, $g'(x) = 1$, $f'(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = x$. Obliczamy

$$\int \ln x dx = x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx = x \ln x - \int dx = x \ln x - x + C.$$

Całkowanie przez podstawienie.

Twierdzenie. (o obliczaniu całek nieoznaczonych przez podstawienie). *Niech funkcja f będzie ciągła w przedziale (a, b) oraz niech funkcja g ma ciągłą pochodną g' w przedziale (α, β) , $a < g(t) < b$ dla $t \in (\alpha, \beta)$. Wtedy*

$$\int f(x)dx = \int f(g(t))g'(t)dt , \quad \text{gdzie } x = g(t) , \quad \text{dla } \alpha < t < \beta .$$

Przykład.

(a) Obliczyć całkę $\int \frac{\ln x}{x} dx$.

Zakładamy, że $x > 0$. Wykonujemy podstawienie $\ln x = t$ i różniczkując obustronnie mamy $\frac{1}{x} dx = dt$. Otrzymujemy więc

$$\int \frac{\ln x}{x} dx = \int t dt = \frac{1}{2}t^2 + C = \frac{1}{2}(\ln x)^2 + C .$$

(b) Obliczyć całkę $\int xe^{x^2} dx$.

Wykonujemy podstawienie $x^2 = t$, skąd różniczkując obie strony otrzymujemy $2xdx = dt$, $xdx = \frac{1}{2}dt$, a więc

$$\int xe^{x^2} dx = \int e^{x^2} \cdot xdx = \int e^t \cdot \frac{1}{2} dt = \frac{1}{2} \int e^t dt = \frac{1}{2}e^t + C = \frac{1}{2}e^{x^2} + C .$$

(c) Obliczyć całkę $\int \sin x \cos x dx$.

Wykonujemy podstawienie $\cos x = t$; różniczkując otrzymujemy
 $-\sin x dx = dt$. Stosując dalej twierdzenie o całkowaniu przez
podstawienie mamy

$$\int \sin x \cos x dx = - \int t dt = -\frac{1}{2}t^2 + C = -\frac{1}{2}\cos^2 x + C .$$

Wzory rekurencyjne.

Metoda rekurencyjna obliczania całki $I_n = \int f_n(x)dx$ polega na obliczeniu całki dla $n = 1$ (lub $n = 0$) i na sprowadzeniu całki I_n do całki I_{n-1} (lub wcześniejszej).

Przykład. Obliczyć całkę $I_n = \int e^{-x}x^n dx$.

Otóz $I_0 = \int e^{-x}dx = -e^{-x} + C$. Całkując przez części całkę I_n (dla $n > 0$) mamy

$$\begin{aligned} I_n &= -x^n e^{-x} + \int e^{-x} \cdot n \cdot x^{n-1} dx = \\ &= -x^n e^{-x} + n \int e^{-x} x^{n-1} dx = -x^n e^{-x} + n \cdot I_{n-1} \end{aligned}$$

W szczególności

$$I_1 = -xe^{-x} + I_0$$

$$I_2 = -x^2e^{-x} + 2I_1, \dots .$$

Mnożąc kolejno I_0 przez $n!$, I_1 przez $\frac{n!}{1!}$, \dots , I_{n-1} przez $\frac{n!}{(n-1)!}$ i dodając otrzymujemy

$$\int e^{-x} x^n dx = -n! e^{-x} \left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} \right) + C .$$

Tylko na ćwiczeniach...

Całki funkcji wymiernych.

Funkcję wymierną nazywamy iloraz dwóch wielomianów.
Całka funkcji wymiernej jest więc postaci

$$\int \frac{W_1(x)}{W_2(x)} dx = \int \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0} dx . \quad (1)$$

Twierdzenie. (o rozkładzie funkcji wymiernej na ułamki proste). Przy obliczaniu całki (1) należy postępować w następujący sposób.

1⁰) Jeżeli stopień licznika nie jest mniejszy niż stopień mianownika ($n \geq m$), to licznik dzielimy przez mianownik i funkcję podcałkową przedstawiamy jako sumę wielomianu oraz funkcji wymiernej, w której już stopień licznika jest mniejszy niż stopień mianownika ($n < m$).

2⁰) Jeżeli $n < m$, to funkcję podcałkową rozkładamy na tzw. ułamki proste, tj. na wyrażenia postaci

$$\frac{A}{(x-a)^k} \quad \text{oraz} \quad \frac{Bx+C}{(x^2+dx+e)^p},$$

gdzie A, B, C, a, d, e są stałe, przy czym $d^2 - 4e < 0$ (wyróżnik trójmianu $cx^2 + dx + e = 0$ jest ujemny), k i p są liczbami naturalnymi.

CDN !!! na ćwiczeniach ...

Uwagi o ćwiczeniach.

Spora część materiału nie wymaga wprowadzania na wykładzie. Dotyczy to obliczania całek - bo z definicji **nie byłoby to praktycznie możliwe**.

Materiał ćwiczeń zakłada obliczanie całek:

- ▶ przez części,
- ▶ przez podstawienia,
- ▶ wymiernych,
- ▶ wybranych funkcji niewymiernych,
- ▶ trygonometrycznych,
- ▶

Mam tylko nadzieję, że wszyscy zdążą ...

Zadania.

Zadanie 1.

Obliczyć całki:

$$(a) \quad \int \frac{dx}{x^2 + 2x - 3},$$

$$(b) \quad \int \frac{(x+1)(x^2-3)}{x^2} dx,$$

$$(c) \quad \int \frac{x(\sqrt{x} - x^2 \sqrt[3]{x})}{\sqrt[3]{x}} dx.$$

$$(d) \quad \int \sqrt{2 \operatorname{arctg} x - 2} \frac{dx}{1+x^2} ,$$

Zadanie 2.

Na podstawie twierdzenia o całkowaniu przez części obliczyć całki:

(a) $\int x^4 \ln x dx,$

(b) $\int x^2 3^x dx,$

(c) $\int \frac{1}{2} e^x \sin^2 x dx.$

Zadanie 3.

Na podstawie twierdzenia o podstawianiu dla całek nieoznaczonych obliczyć całki:

$$(a) \quad \int \frac{e^x}{3 + 4e^x} dx ,$$

$$(b) \quad \int \frac{dx}{x^2(1+x^2)^2} ,$$

$$(c) \quad \int \frac{dx}{x \ln^3 x} .$$

Zadanie 4.

Wyprowadzić wzory rekurencyjne dla następujących całek:

$$(a) \quad \int x^n e^x dx,$$

$$(b) \quad \int \ln^n x dx .$$

Zadanie 5.

Obliczyć całki funkcji niewymiernych:

$$(a) \quad \int \frac{8x + 3}{\sqrt{4x^2 + 3x + 1}} dx ,$$

$$(b) \quad \int \frac{x + 1}{\sqrt{8 + 2x - x^2}} dx ,$$

$$(c) \quad \int \sqrt{3 - 2x - x^2} dx.$$

Zadanie 6.

Obliczyć całki:

$$(a) \quad \int \frac{\cos x}{\sqrt[3]{\sin^2 x}} dx ,$$

$$(b) \quad \int \frac{\sin 2x dx}{\sqrt{1 - \sin^4 x}} ,$$

$$(c) \quad \int \frac{dx}{\sin x} .$$

Całka oznaczona.

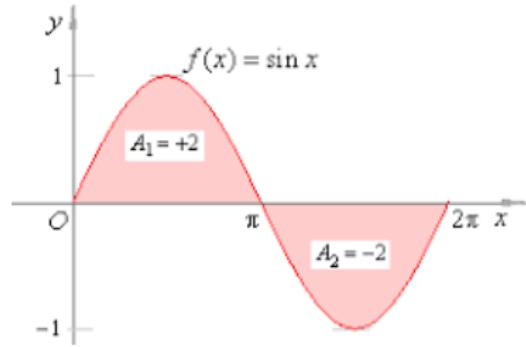
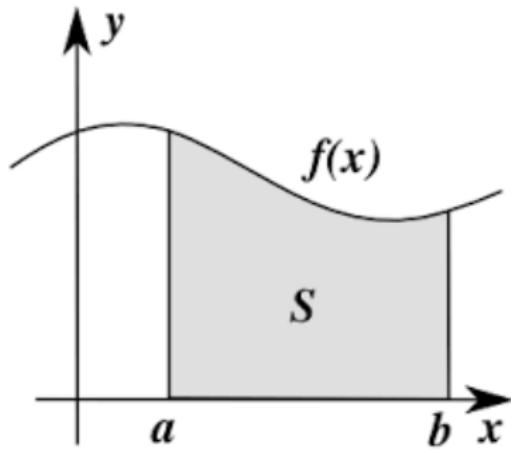
Punktem wyjścia naszych rozważań będzie powiązanie całki nieoznaczonej z polem obszaru, prowadzące do pojęcia całki oznaczonej.

Definicja. Niech F będzie funkcją pierwotną dla funkcji ciągłej f w przedziale $\langle a, b \rangle$. Wtedy całką oznaczoną z funkcji f w przedziale $\langle a, b \rangle$ nazywamy liczbę $F(b) - F(a)$ i oznaczamy ją

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Liczby a i b nazywamy odpowiednio *dolną i górną granicą całkowania*. Piszemy również $[F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$.

Różnica $F(b) - F(a)$ ma swoją interpretację geometryczną jako pole obszaru ograniczonego krzywą $y = f(x)$ oraz osią OX , gdy f jest dowolną funkcją ciągłą i nieujemną w $\langle a, b \rangle$.



Twierdzenie. (o podstawowych własnościach całki oznaczonej). *Niech f i g będą funkcjami ciągłymi w $a, b >$. Wtedy*

$$1) \quad \int_a^b 0 dx = 0$$

$$2) \quad \int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx , \quad a < b$$

$$3) \quad \int_a^b [f(x) + g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx ,$$

$$\int_a^b cf(x) dx = c \int_a^b f(x) dx$$

4) *Jeżeli $a < c < b$, to*

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

5) Jeżeli $f(x) \leq g(x)$ w a, b , to

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx.$$

W szczególności, gdy $f(x) \geq 0$ w a, b , to $\int_a^b f(x)dx \geq 0$.

6)
$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx .$$

7) Jeżeli $0 < h \leq b - a$, to istnieje taka liczba $\vartheta \in (0, 1)$, że
 $\int_a^{a+h} f(x)dx = hf(a + \vartheta h)$; w szczególności

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq (b - a) \max_{a \leq x \leq b} |f(x)|.$$

8) Jeżeli $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ dla $a \leq x \leq b$, to $F'(x) = f(x)$
w a, b . W szczególności, jeżeli F ma ciągłą pochodną F' w
 a, b , to $\int_a^x F'(x)dx = F(x) - F(a)$.

Dalsze własności są analogiczne do całki nieoznaczonej:

Twierdzenie. (o całkowaniu całek oznaczonych przez podstawianie). *Niech funkcja f będzie ciągła w $a, b >$ i niech funkcja g ma ciągłą pochodną g' w $\alpha, \beta >$, $a \leq g(t) \leq b$ dla $t \in \alpha, \beta >$, $g(\alpha) = a$, $g(\beta) = b$. Wtedy*
$$\int_a^b f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(g(t))g'(t)dt.$$

Twierdzenie. (o całkowaniu przez części całek oznaczonych).
Jeżeli funkcje f i g mają pochodne f' i g' ciągłe w $a, b >$, to

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx ,$$

gdzie $[f(x)g(x)]_a^b = f(b)g(b) - f(a)g(a)$.

Całka niewłaściwa.

Wcześniej omówiona została całka oznaczona tzn. całka z funkcji ciągłej w przedziale $[a, b]$ określona w przypadku, gdy funkcja całkowalna f była ciągła (ograniczona) oraz przedział $[a, b]$ był ograniczony.

Na początek zdefiniujmy całkę niewłaściwą funkcji określonej na przedziale postaci $[a, +\infty)$, następnie $(-\infty, b]$, a dalej na całym zbiorze liczb rzeczywistych.

Całka niewłaściwa I rodzaju w przedziale $[a, +\infty)$.

Niech $f : [a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją całkowalną w sensie Riemanna na każdym z przedziałów domkniętych $[a, \beta]$, gdzie $a < \beta$. **Całką niewłaściwą Riemanna I rodzaju** funkcji f

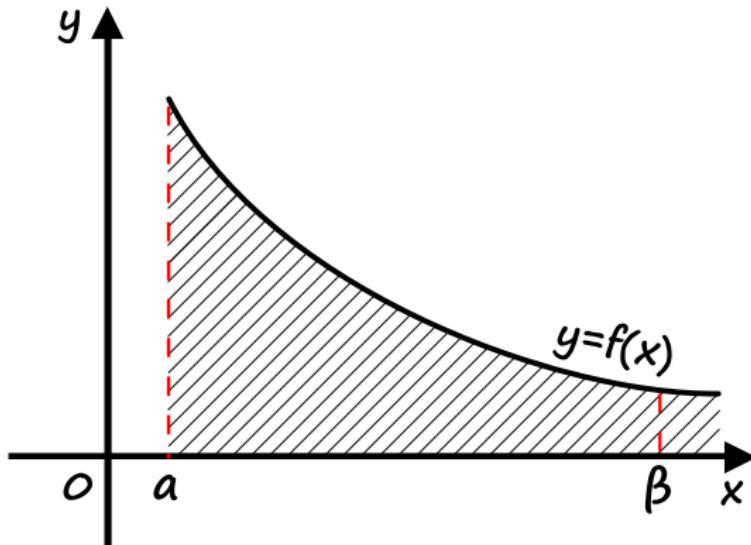
nazywamy granicę $\lim_{\beta \rightarrow +\infty} \int_a^{\beta} f(x) dx$ i oznaczamy ją symbolem

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{\beta \rightarrow \infty} \int_a^{\beta} f(x) dx.$$

Całka niewłaściwa I rodzaju w przedziale $[a, +\infty)$.

Jeżeli powyższa granica istnieje i jest skończona, to mówimy, że całka niewłaściwa $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ jest **zbieżna**, natomiast jeżeli granica ta nie istnieje lub jest niewłaściwa, to mówimy, że całka niewłaściwa $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ jest **rozbieżna**.

Interpretacja geometryczna całki niewłaściwej I rodzaju w przedziale $[a, +\infty)$



Przykładowe zastosowania w informatyce.

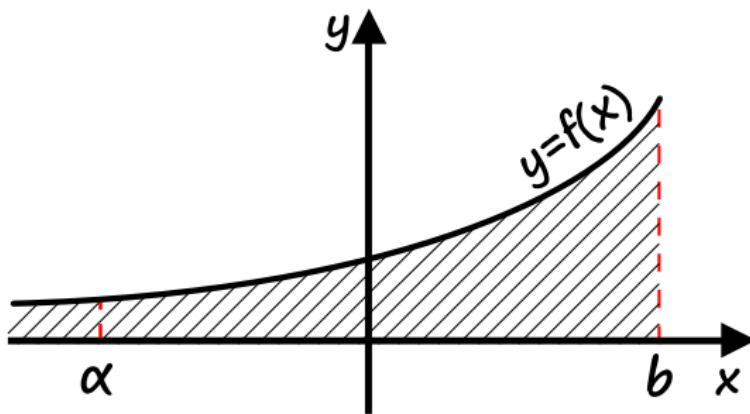
- ▶ gęstości i dystrybuanty rozkładów zmiennych losowych,
- ▶ całka Fouriera i transformata Fouriera (i inne transformaty),
- ▶ splot funkcji (filtry itp.),
- ▶ funkcje specjalne - gamma i beta Eulera,
- ▶ kryterium całkowe zbieżności szeregów,
- ▶ ...

Definicja. Całka niewłaściwa I rodzaju w przedziale $(-\infty, b]$.

W analogiczny sposób definiuje się całkę niewłaściwą Riemanna I rodzaju $\int_{-\infty}^b f(x)dx$ funkcji f określonej na przedziale $(-\infty, b]$, jak również pojęcia jej zbieżności i rozbieżności.
Przyjmujemy wówczas, że

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx := \lim_{\alpha \rightarrow -\infty} \int_{\alpha}^b f(x)dx.$$

Interpretacja geometryczna całki niewłaściwej I rodzaju w przedziale $(-\infty, b]$.



Definicja. Całka niewłaściwa I rodzaju w zbiorze liczb rzeczywistych.

Niech $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją całkowalną w sensie Riemanna w każdym przedziale domkniętym $[\alpha, \beta]$ zawartym w \mathbb{R} . **Całkę niewłaściwą Riemanna I rodzaju** funkcji f w \mathbb{R} definujemy jako

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx := \int_{-\infty}^a f(x) dx + \int_a^{+\infty} f(x) dx,$$

gdzie a jest dowolnie wybranym punktem z \mathbb{R} .

Całka niewłaściwa I rodzaju w zbiorze liczb rzeczywistych.

Jeżeli obie całki w powyższej sumie są zbieżne, to mówimy, że całka $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ jest zbieżna. Gdy któraś z tych całek nie istnieje lub jest rozbieżna, to mówimy, że całka $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ jest rozbieżna.

Należy podkreślić, że jeżeli całka $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ jest zbieżna, to można wykazać, że jej wartość nie zależy od wyboru punktu $a \in \mathbb{R}$ w powyższej definicji.

Kryterium całkowe zbieżności szeregów.

Kolejnym klasycznym **zastosowanie całek niewłaściwych** jest badanie za ich pomocą zbieżności szeregów (a to ważne w informatyce).

Twierdzenie. Ciąg (a_n) zadany jest poprzez nieujemną funkcję nierośnącą określoną na $(0, \infty)$ wzorem $a_n = f(n)$.

Wtedy szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny (do granicy właściwej) wtedy i tylko wtedy gdy zbieżna (do granicy właściwej) jest całka

$$\int_1^{\infty} f(x) dx.$$

[Dowód] Całkę od 1 do n można oszacować z góry przez sumę całkową s_{n-1} a z dołu przez $s_n - a_1$. Dalej skorzystać – w przypadku zbieżności – z twierdzenia o ciągu monotonicznym i ograniczonym, a w przypadku rozbieżności – z twierdzenia o trzech ciągach.

PRZYKŁAD

Ciąg postaci

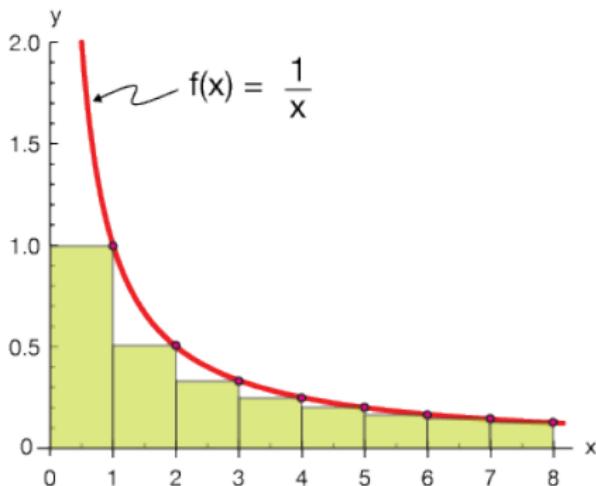
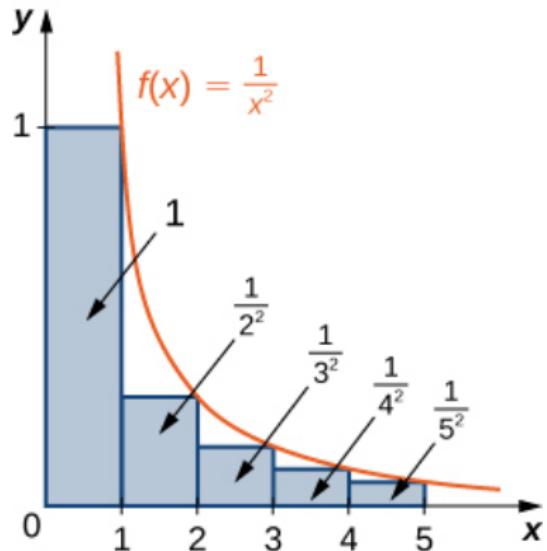
$$a_n = \frac{1}{n^\alpha}$$

jest sumowalny (czyli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny) dla $\alpha > 1$,

a niesumowalny dla $0 < \alpha \leq 1$ (mimo że wyrazy zawsze dążą do zera! - zachodzi warunek konieczny zbieżności szeregu).

Uwaga: ten wynik ma natychmiastowe zastosowanie przy badaniach **dyskretnej transformaty Fouriera!** Zbieżność występujących tam szeregów jest zapewniona poprzez te kryterium wraz z warunkami nakładanymi na całki Fouriera!

Interpretacja graficzna.



Splot.

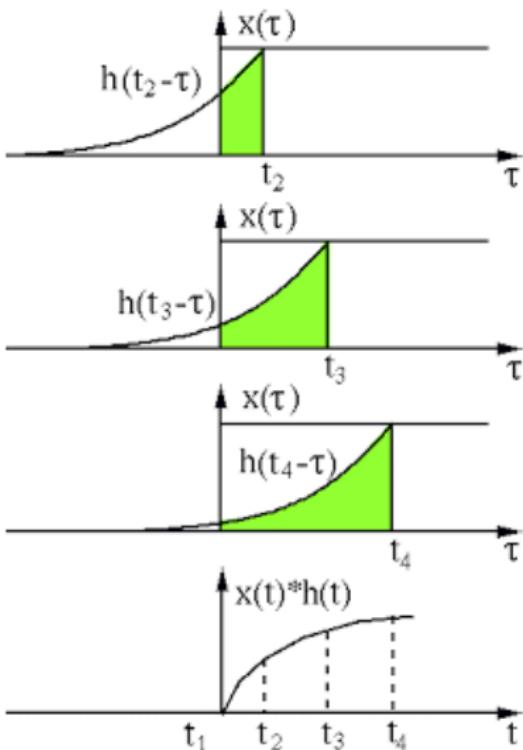
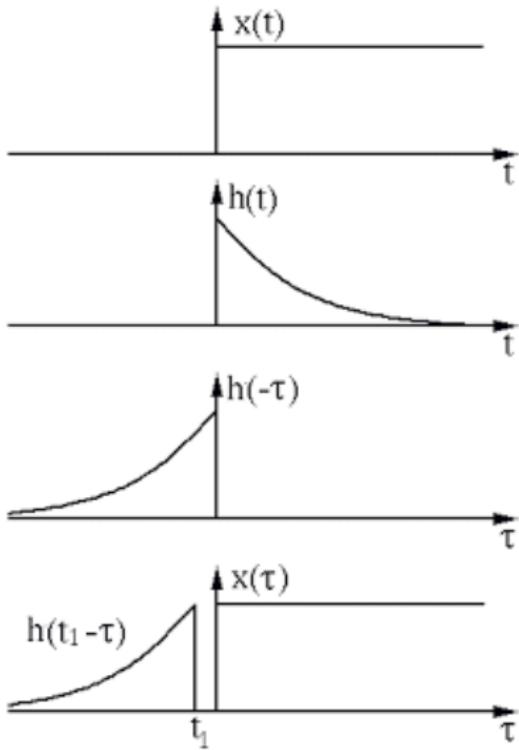
Splotem dwu funkcji $f(t)$ i $g(t)$ nazywamy funkcję

$$(f * g)(t) := \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t - \tau) d\tau.$$

W zastosowaniach informatycznych zachodzi niekiedy potrzeba dyskretyzacji funkcji i przyjęcie miary dyskretnej, co daje splot (dyskretny):

$$(r * s)_j := \sum_{k=-\frac{M}{2}+1}^{\frac{M}{2}} r_k \cdot s_{j-k}$$

Wzór wynika: albo z przyjęcia miary dyskretnej (ale to wymaga znajomości teorii miary i całki), albo po prostu z dyskretyzacji całki (co pokażemy później - całka Riemanna) - wprost z definicji.



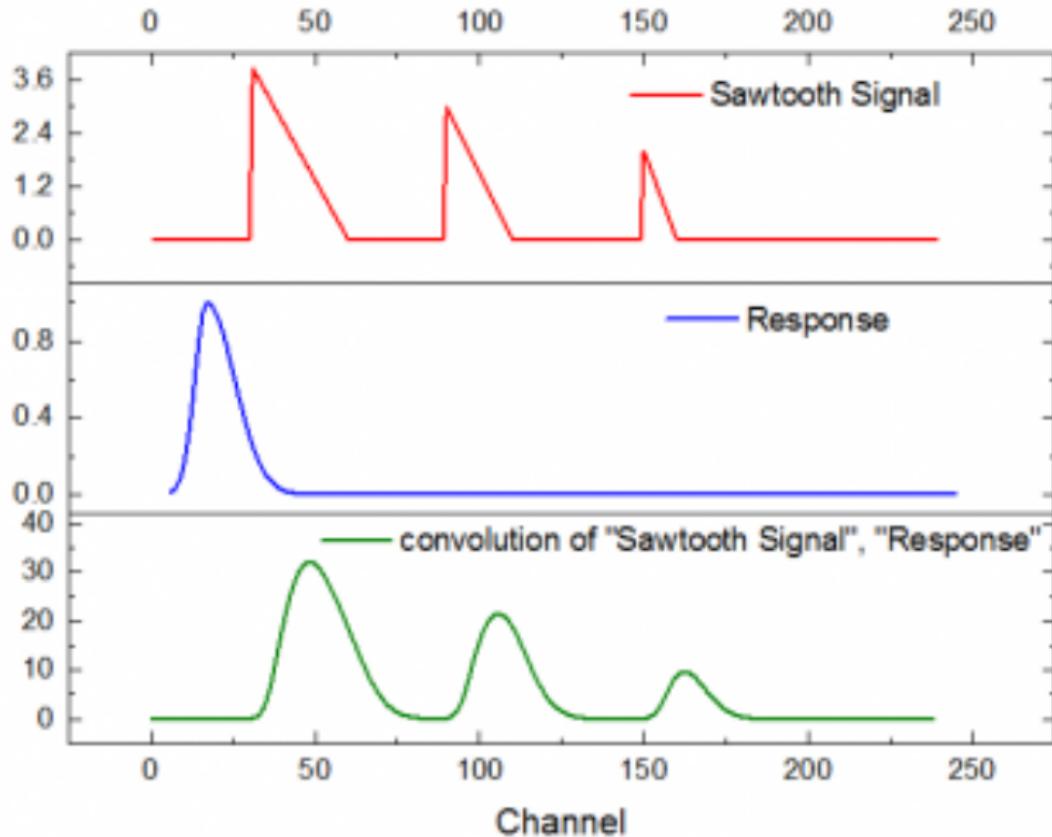
Splot - cd.

Splot jest operacją przemienną, tzn.

$$r * s = s * r.$$

Zazwyczaj jednak w zastosowaniach te dwie splatane funkcje mają inne znaczenie. Np. w **teorii sygnałów** jedna z nich, powiedzmy s , reprezentuje "prawdziwy" sygnał (niezaburzone wyniki) i jest funkcją o (przynajmniej teoretycznie) nieograniczonej dziedzinie. Funkcja r (druga funkcja) jest natomiast funkcją odpowiedzi aparatury, i ma skończoną dziedzinę, zazwyczaj odcinek zawierający zero (uzupełniamy ją do prostej kładąc zero wszędzie poza naturalną dziedziną). Operacja splotu $r * s$ opisuje wówczas rozmycie sygnału (danych) s zgodnie z przepisem danym funkcją odpowiedzi r . Np. dla funkcji odpowiedzi będącej deltą Diraca dla czasu t_0 tzn. $r(t) = \delta(t - t_0)$, splot $r * s$ daje sygnał przesunięty o t_0 :

$$(r * s)(t) = s(t - t_0).$$



Splot obrazów.

Mając dane funkcje obrazów $f : [0, w] \times [0, h] \rightarrow [0, 1]$ oraz $g : [0, v] \times [0, u] \rightarrow [0, 1]$, splotowi obrazów będzie odpowiadała następująca funkcja $s : [0, w + v] \times [0, u + h] \rightarrow [0, 1]$

$$\forall_{x \in [0, w + v], y \in [0, u + h]}$$

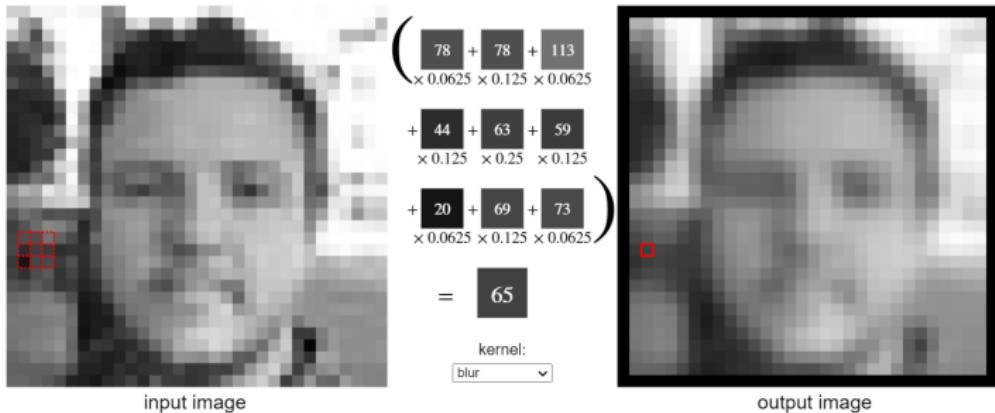
$$s(x, y) = \int_{\max\{0, y-u\}}^{\min\{y, h\}} \int_{\max\{0, x-v\}}^{\min\{x, w\}} f(z, t) \cdot g(x-z, y-t) \, dz \, dt$$

albo oczywiście wersja dyskretna (obrazy binarne).

Do lektury własnej...

ciekawy materiał o splocie obrazów - proszę poczytać (po angielsku) - interaktywna strona, można zmieniać filtry lub utworzyć własne...

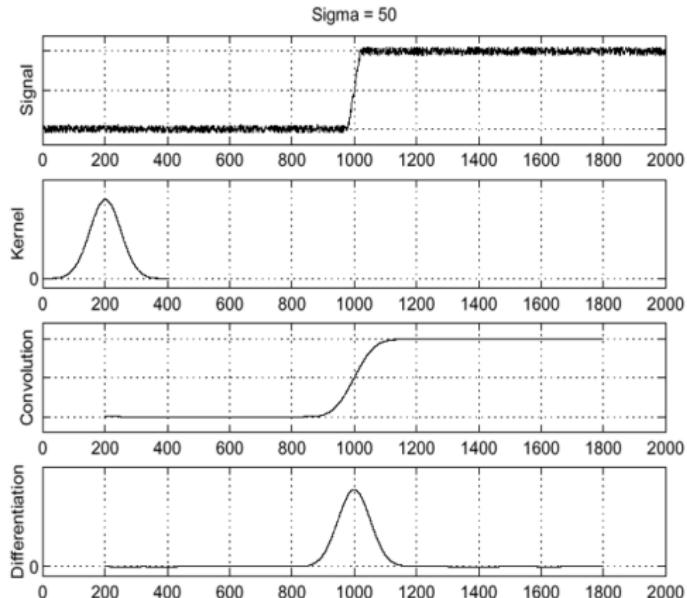
Below, for each 3x3 block of pixels in the image on the left, we multiply each pixel by the corresponding entry of the kernel and then take the sum. That sum becomes a new pixel in the image on the right. Hover over a pixel on either image to see how its value is computed.



Można też [tutaj](#) - po polsku.

A to w badaniach obrazu...

f
 h
Where is the
edge?
 $h \star f$



Rozmycie Gaussa.

Rozmycie obrazu przeważnie polega na tym, że jasność danego punktu obrazu zastępowana jest pewnego rodzaju uśrednioną wartością jasności punktów z jego otoczenia.

Taka właśnie idea przyświeca stosowaniu rozmycia Gaussa – dla danego punktu rozważa się wszystkie możliwe przesunięcia płaszczyzny obrazu, z prawdopodobieństwami wynikającymi z dwuwymiarowego rozkładu normalnego (Gaussa).

Wynikiem przekształcenia jest wartość oczekiwana jasności punktu po przesunięciu – oczywiście oznacza to, że najsilniej brane pod uwagę są obszary znajdujące się najbliżej rozważanego punktu. Specyficzny wzór na rozmycie Gaussa dla danej funkcji obrazu $f : [0, w] \times [0, h] \rightarrow [0, 1]$ można by zatem zapisać następująco:
 $\forall_{x \in [0, w], y \in [0, h]}$

$$s(x, y) = \int_0^h \int_0^w f(z, t) \cdot \phi_{\mu, \sigma}(x - z) \cdot \phi_{\mu, \sigma}(y - t) dz dt \quad (1)$$

Całka Riemanna.

Cała konstrukcja jest w podanych źródłach. Koniecznie trzeba wiedzieć: całka Riemanna i całka oznaczona (o ile istnieją) są równe!

To powoduje, że konstrukcja całki Riemanna jest **idealna do obliczeń przybliżonych, a więc i numerycznych**. Wszystko, co będzie na metodach numerycznych o całkowaniu numerycznym ma w swojej podstawie właśnie konstrukcję całki Riemanna.

A tu prezentacje: [skrypt ilustracyjny sumy dolnej w "Mathematica"](#) oraz drugi [skrypt ilustracyjny sumy górnej w "Mathematica"](#).

Teoria całki Riemanna.

Niech $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją ograniczoną (niekoniecznie ciągłą).

Zbiór punktów: $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$, gdzie $a = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n = b$, nazywamy **podziałem przedziału** $[a, b]$. Niech:

$$m_i = \inf\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$$

$$M_i = \sup\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$$

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$$

Suma dolna i suma górska Riemanna.

Sumą dolną $L(f, P)$ (odpowiednio sumą górną $U(f, P)$) funkcji f dla podziału P nazywamy liczbę:

$$L(f, P) = \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i,$$

$$\left(U(f, P) = \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i \right).$$

Jeżeli $m_i = \inf\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$ i
 $M_i = \sup\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$, to dla dowolnego podziału P :

$m(b-a) \leq L(f, P) \leq U(f, P) \leq M(b-a)$, gdzie:

$$m = \inf\{f(x) : x \in [a, b]\},$$

$$M = \sup\{f(x) : x \in [a, b]\}.$$

Z ostatniego faktu wynika, że sumy dolne i górske są ograniczone dla dowolnego podziału.

Całka dolna i górna.

Całką dolną (całką górną) Riemanna funkcji f na przedziale $[a, b]$ nazywamy liczby:

$$\int_a^b f(x) \, dx = \sup\{L(f, P) : P - \text{podział przedziału } [a, b]\}$$

$$\left(\int_a^b f(x) \, dx = \inf\{U(f, P) : P - \text{podział przedziału } [a, b]\} \right)$$

[funkcja całkowalna w sensie Riemanna] Funkcja f jest całkowalna w sensie Riemanna na przedziale $[a, b]$ (krótko: $f \in \mathcal{R}$) jeżeli całka dolna jest równa całce górnej. Wspólną wartość obu tych całek nazywamy **całką Riemanna funkcji f na przedziale $[a, b]$** i oznaczamy symbolem:

$$\int_a^b f(x) \, dx.$$

Zagęszczenie podziału.

Mówimy, że podział P^* jest zagęszczeniem podziału P , jeżeli $P \subset P^*$. Jeżeli dane są dwa podziały P_1 i P_2 , to ich wspólnym zagęszczeniem nazywamy podział $P_1 \cup P_2$.

Jeżeli P^* jest zagęszczeniem podziału P , to:

$$L(f, P) \leq L(f, P^*) \quad U(f, P^*) \leq U(f, P)$$

Zachodzi nierówność:

$$\int_a^b f(x) \, dx \leq \int_a^{\underline{b}} f(x) \, dx.$$

Kryterium całkowalności w sensie Riemanna.

Funkcja f jest całkowalna w sensie Riemanna na przedziale $[a, b]$ wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists P \quad U(f, P) - L(f, P) < \varepsilon.$$

Jeżeli funkcja $f[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła, to jest całkowalna w sensie Riemanna na tym przedziale.

Podobnie można pokazać, że jeżeli funkcja f jest monotoniczna na $[a, b]$ lub ograniczona i ma skończoną ilość punktów nieciągłości w $[a, b]$ to funkcja f jest całkowalna w sensie Riemanna na $[a, b]$.

Własności całki Riemanna.

Kilka podstawowych własności całki Riemanna:

1. Jeśli f i $g \in \mathcal{R}$ to $f \cdot g \in \mathcal{R}$ oraz $c \cdot f \in \mathcal{R}$. Ponadto całka Riemanna jest liniowa, tzn:

$$\int_a^b f(x) + g(x) \, dx = \int_a^b f(x) \, dx + \int_a^b g(x) \, dx$$

$$\int_a^b cf(x) \, dx = c \int_a^b f(x) \, dx$$

2. Jeżeli $f, g \in \mathcal{R}$ oraz $f(x) \leq g(x)$, to $\int_a^b f(x) \, dx \leq \int_a^b g(x) \, dx$

Jeżeli f jest całkowalna w sensie Riemanna na $[a, b]$ oraz $a < c < b$, to f jest całkowalna w sensie Riemanna na $[a, c]$ i $[c, b]$ oraz:

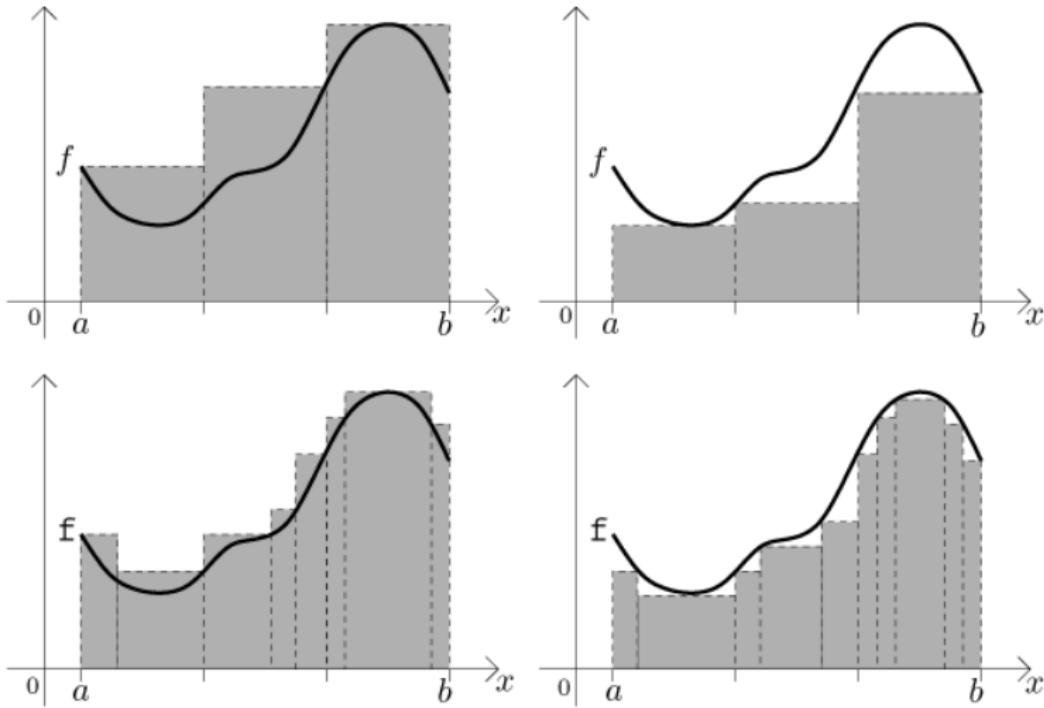
$$\int_a^b f(x) \, dx = \int_a^c f(x) \, dx + \int_c^b f(x) \, dx$$

Jeżeli funkcja f jest ciągła w przedziale $[a, b]$, to istnieje punkt $c \in [a, b]$ taki, że:

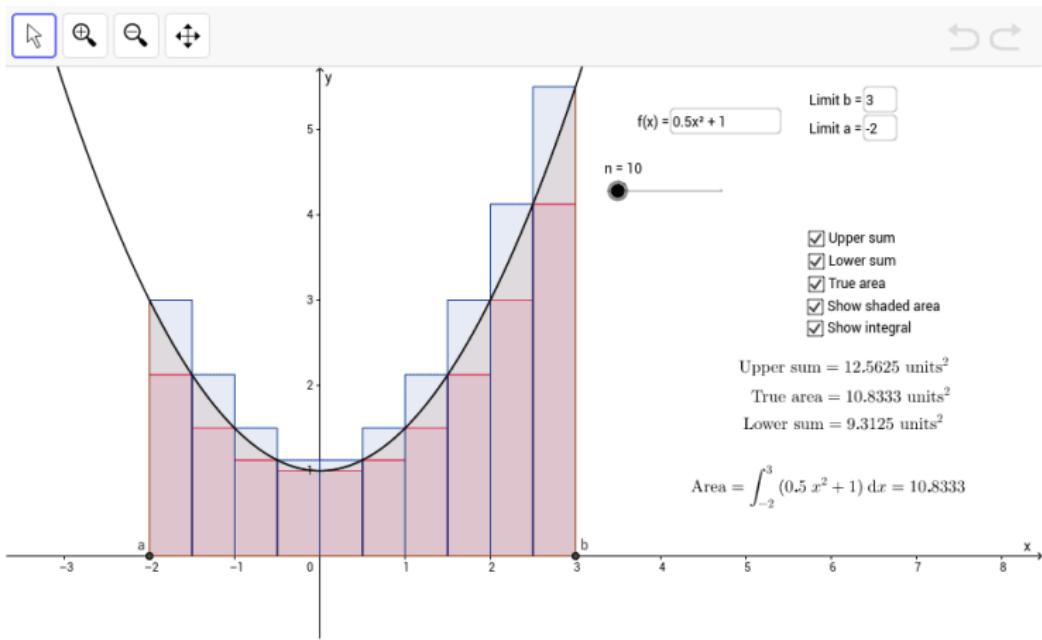
$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) \, dx.$$

Liczbę $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) \, dx$ nazywamy wartością średnią całkową funkcji f w przedziale $[a, b]$. Wzór na wartość średnią możemy też zapisać:

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) \, dx = f(a + \theta(b-a)) , \quad \theta \in [0, 1].$$

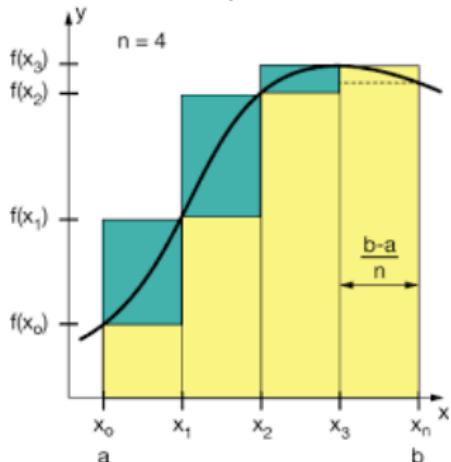


Sumy Riemanna...



Sumy górne i dolne - zwracam uwagę, że **jeżeli** funkcja jest całkowalna, to **możemy** ograniczyć się do podziałów na równe części.

Podstawowe metody całkowania numerycznego to po prostu definicja całki Riemanna z doborem: **podział na równe części** oraz z **ustaloną zasadą** wyboru punktów pośrednich. Np. lewe końce przedziałów (metoda prostokątów lewych - [na rysunku](#)), prawe końce przedziałów (metoda prostokątów prawych), czy środkowe... (wzory: na metodach numerycznych)

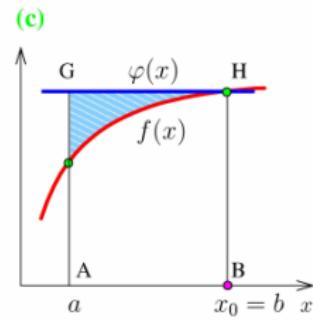
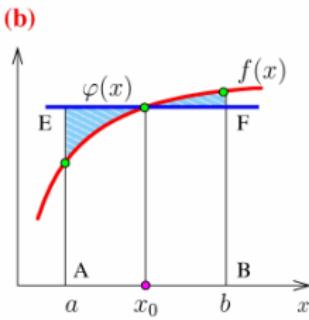
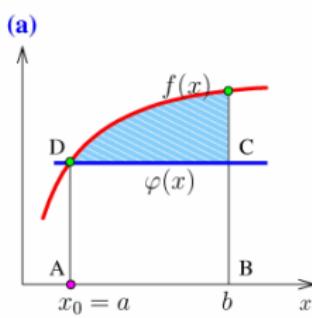


Nawet metoda trapezów to tylko lekko zmodyfikowana definicja całki Riemanna! Metody Simpsona czy Gaussa, to już inny dział - ale nadal **analizy matematycznej**: aproksymacja...

Metoda prostokątów:

W zależności od wyboru położenia węzła x_0 otrzymujemy wzory:

- (a) **lewych prostokątów, gdy $x_0 = a$**
- (b) **środkowych prostokątów, gdy $x_0 = (a + b)/2$**
- (c) **prawych prostokątów, gdy $x_0 = b$**



Ograniczenia całkowania numerycznego.

Jeśli się da - całki liczymy w oparciu o całki oznaczone!

Jeśli nie, a niestety nie zawsze się da (np. nie potrafimy znaleźć całki nieoznaczonej lub jest ona funkcją nieelementarną (!)), to kontrolujemy stabilność numeryczną algorytmów (to już inny przedmiot...).

Liczymy całkę (wzór rekurencyjny):

$$a_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x+5} dx$$

i po całkowaniu przez części (to już programista, a nie komputer!) uzyskamy:

$$a_n = \frac{1}{n} - 5a_{n-1}.$$

Metoda punktu średniego (środkowych prostokątów).

Jeżeli f jest funkcją ciągłą na przedziale $[a, b]$ oraz π jest podziałem przedziału $[a, b]$ takim, że $\pi: a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$

to $\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}[f(\bar{x}_1) + f(\bar{x}_2) + \dots + f(\bar{x}_n)],$ gdzie

$$\bar{x}_i = \frac{1}{2}(x_{i-1} + x_i).$$

Przykład 14.

Przybliżyć całkę $\int_1^2 \frac{1}{x} dx$ metodą punktu średniego.

Stąd

$$\int_1^2 \frac{1}{x} dx \approx 0,1 \left[\frac{1}{1,05} + \frac{1}{1,15} + \frac{1}{1,25} + \dots + \frac{1}{1,195} \right] \approx 0.6928 .$$

Ograniczenia całkowania numerycznego - cd.

$$y_0 = \int_0^1 \frac{dx}{x+5} = \ln(x+5) \Big|_0^1 = \ln 6 - \ln 5 \approx 0,182 \quad \text{błąd } |\varepsilon| \leq 5 \cdot 10^{-4}$$

$$y_1 = 1 - 5y_0 \approx 0,090 \quad \text{błąd } |\varepsilon| \leq 25 \cdot 10^{-4}$$

$$y_2 = \frac{1}{2} - 5y_1 \approx 0,050 \quad \text{błąd } |\varepsilon| \leq 125 \cdot 10^{-4}$$

$$y_3 = \frac{1}{3} - 5y_2 \approx 0,083 \quad \text{błąd } |\varepsilon| \leq 625 \cdot 10^{-4} \quad (y_3 > y_2 - \text{nie poprawne!})$$

$$y_4 = \frac{1}{4} - 5y_3 \approx -0,165 \quad \text{błąd } |\varepsilon| \leq 3125 \cdot 10^{-4} \quad (\text{ujemna wartość - absurd!})$$

I zobaczymy: błędy rosną. I od kiedy to całka z funkcji nieujemnej (pole pod krzywą) może wyjść ujemna? Zauważmy, że korzystamy tu z ciągu rekurencyjnego. Warto “popracować” nad algorytmem dla ciągów rekurencyjnych...

Całkowanie numeryczne - kolejne metody.

Przypuśćmy, że mamy znaleźć całkę $\int_a^b f(x)dx$, gdzie $f(x)$ jest pewną funkcją ciągłą określoną w przedziale a, b .

Poprzednio podaliśmy wiele przykładów obliczania takich całek za pomocą funkcji pierwotnych.

Zauważmy jednak, że wszystkie metody daje się zastosować jedynie do dość wąskiej klasy całek. Poza tą klasą musimy się uciekać do metod rachunku przybliżonego (całki Riemanna).

Obecnie poznamy najprostsze z metod, w których wzory przybliżone na całkę wykorzystują pewną wartość funkcji podcałkowej, obliczane dla pewnych wartości zmiennej niezależnej. Wzory te otrzymuje się najczęściej z równań geometrycznych, traktując całkę oznaczoną $\int_a^b f(x)dx$ jako pole pewnej figury geometrycznej ograniczonej krzywą $f(x)$.

Metoda trapezów.

Jeżeli funkcja f jest ciągła na przedziale domkniętym $[a, b]$ oraz jeżeli π jest podziałem przedziału $[a, b]$ takim, że
 $\pi : a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$, to

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2n} [f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \dots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)]. (*)$$

Funkcja f jest funkcją ciągłą na przedziale $[a, b]$. Dokonajmy podziału przedziału $[a, b] : a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$. Przez P_k oznaczamy punkt, który powstał z przecięcia krzywej $y = f(x)$ oraz prostej $x = x_k$, $k = 0, 1, 2, \dots, n$. Przez Δx oznaczamy $\Delta x = x_i - x_{i-1}$. Łączymy łączymy kolejne punkty P_0, P_1, \dots, P_n .

Zróbmy rysunek: powstają trapezy. Korzystając ze znanego z geometrii wzoru na pole trapezu $P = \frac{1}{2}(a + b) \cdot h$, gdzie a, b są podstawami trapezu, a h jego wysokością obliczmy pole $|P^i|$ trapezu P^i

$$|P^i| = \frac{\Delta x}{2} [f(x_{i-1}) + f(x_i)].$$

Pole obszaru jest sumą pól wszystkich trapezów, a więc

$$\begin{aligned}|P| &= |P^1| + \dots + |P^n| = \frac{\Delta x}{2} (f(x_0) + f(x_1)) + \frac{\Delta x}{2} (f(x_1) + f(x_2)) + \dots + \\&+ \frac{\Delta x}{2} (f(x_{n-1}) + 2f(x_n)) = \\&= \frac{\Delta x}{2} [f(x_0) + 2(x_1) + 2f(x_2) + \dots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)].\end{aligned}$$

Łatwo zauważyc, że otrzymaliśmy taką samą sumę jak we wzorze (*).

Tak więc całka $\int_a^b f(x)dx$ tzn. obszar ograniczony krzywą $y = f(x)$, osią Ox oraz rzędnymi $x = a$, $x = b$ została obliczona z pewnym przybliżeniem. Oczywiście wynik ten obarczony jest błędem. Poniżej podamy jaki błąd maksymalny może wystąpić w przypadku obliczania całki oznaczonej $\int_a^b f(x)dx$ przy pomocy metody trapezów.

Błąd przybliżenia dla metody trapezów. (**)

Jeżeli M jest dodatnią liczbą rzeczywistą taką, że $|f''(x)| < M$ dla każdego $x \in [a, b]$, to błąd jaki pojawia się w przypadku obliczania całki oznaczonej $\int_a^b f(x)dx$ metodą trapezów jest nie większy niż $\frac{M(b-a)^3}{12n^2}$.

Przykład 12.

Wykorzystując metodę trapezów, przybliżyć całkę $\int_1^2 \frac{1}{x} dx$, dla $n = 10$. Podać błąd przybliżenia.

Ponieważ $\frac{b-a}{2n} = (2-1) \cdot \frac{1}{20} = 0,05$, więc wykorzystując wzór (*) otrzymujemy

$$\int_1^2 \frac{1}{x} dx \approx (0,05) \cdot (13,8754) \approx 0.6938 .$$

Obliczamy błąd jaki wystąpił w powyższych obliczeniach.

Obliczamy drugą pochodną funkcji $f(x) = \frac{1}{x}$.

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} , \quad f''(x) = \frac{2}{x^3} .$$

Aby obliczyć błąd maksymalny musimy tak dobrać stałą M , aby $|f''(x)| < M$. Ponieważ maksymalną wartością $f''(x) = \frac{2}{x^3}$ w przedziale $[1, 2]$ jest $f''(1) = \frac{2}{1^3} = 2$, więc możemy przyjąć $M = 2$. Stąd na mocy $(**)$ maksymalny błąd obliczenia jaki wystąpił przy stosowaniu metody trapezów jest nie większy niż wartość

$$\frac{M(b-a)^3}{12n^2} = \frac{2 \cdot (2-1)^3}{12 \cdot (10)^2} = \frac{1}{600} < 2 \cdot 10^{-3} .$$

Metoda Simpsona.

Jeżeli f jest funkcją ciągłą określona w przedziale $[a, b]$ oraz jeżeli π jest podziałem przedziału $[a, b]$ takim, że
 $\pi : a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$, to

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{3n} [f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + \dots + \\ + 2f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)] .$$

Rozważmy funkcję postaci $y = cx^2 + dx + e$. Jeżeli $c \neq 0$, to wykresem tej funkcji jest parabola.

Pole A obszaru wynosi

$$A = \int_{-h}^h (cx^2 + dx + e)dx = \left[c\frac{x^3}{3} + d\frac{x^2}{2} + ex \right]_{-h}^h = \frac{1}{3}h(2ch^2 + 6e) .$$

Ponieważ punkty P_0, P_1, P_2 leżą na paraboli więc współrzędne tych punktów $P_0(-h, y_0)$, $P_1(0, y_1)$, $P_2(h, y_2)$ spełniają równanie tej paraboli tzn. $y_0 = ch^2 - dh + e$, $y_1 = e$, $y_2 = ch^2 + dh + e$.

Stąd $y_0 + 4y_1 + y_2 = 2ch^2 + 6e$. W konsekwencji

$$A = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2).$$

Pole B obszaru wynosi

$$\begin{aligned} B &= \int_{x_0}^{x_2} (cx^2 + dx + e) dx = \left[c\frac{x^3}{3} + d\frac{x^2}{2} + ex \right]_{x_0}^{x_2} = \\ &= c\frac{x_2^3}{3} + d\frac{x_2^2}{2} + ex_2 - c\frac{x_0^3}{3} - d\frac{x_0^2}{2} - ex_0 = \\ &= \frac{c}{3}(x_2^3 - x_0^3) + \frac{d}{2}(x_2^2 - x_0^2) + e(x_2 - x_0) = \\ &= \frac{c}{3}(x_2 - x_0)(x_2^2 + x_2x_0 + x_0^2) + \frac{d}{2}(x_2 - x_0)(x_2 + x_0) + e(x_2 - x_0) = \\ &= (x_2 - x_0) \left[\frac{c}{3}(x_2^2 + x_2x_0 + x_0^2) + \frac{d}{2}(x_2 + x_0) + e \right]. \end{aligned}$$

Jeżeli $f(x) \geq 0$ na $[a, b]$ to w metodzie Simpsona całąkę oznaczoną przybliżamy wartością pola obszaru znajdującego się pod krzywą f w przedziale $[a, b]$.

Niech $h = \frac{b-a}{n}$, $\pi : a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$.

Niech $P_k(x_k, y_k)$ będzie punktem na krzywej $y = f(x)$ powstającym z przecięcia wykresu funkcji f oraz prostej $x = x_k$. Jeżeli punkty P_0, P_1, P_2 leżą na paraboli $y = cx^2 + dx + e$ to pole obszaru poniżej łuku $P_0P_1P_2$ wyraża się wzorem $\frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2)$.

Jeżeli P_2, P_3, P_4 są punktami leżącymi na paraboli $y = cx^2 + dx + e$, która przybliża wykres naszej funkcji, to pole obszaru poniżej wyraża się wzorem $\frac{h}{3}(y_2 + 4y_3 + y_4)$.

Kontynuujemy nasze postępowanie dalej i dla punktów P_{n-2}, P_{n-1}, P_n otrzymujemy, że pole obszaru położonego poniżej paraboli przybliżającej wykres naszej funkcji od x_{n-2} do x_n wyraża się wzorem $\frac{h}{3}(y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n)$.

Sumując otrzymane wyniki mamy

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + \dots + 2y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n) .$$

Błąd przybliżenia dla metody Simpsona.

Jeżeli M jest dodatnią liczbą rzeczywistą taką, że $|f^{(4)}(x)| < M$ dla każdego $x \in [a, b]$ (gdzie $f^{(4)}(x)$ oznacza czwartą pochodną funkcji f w punkcie x), to błąd jaki pojawia się w przypadku obliczania całki nieoznaczonej $\int_a^b f(x)dx$ metodą Simpsona jest nie większy niż: $\frac{M(b-a)^5}{180n^4}$.

Przykład 13.

Wykorzystując metodę Simpsona, przybliżyć całkę $\int_1^2 \frac{1}{x} dx$, dla $n = 10$.

Podać błąd przybliżenia. Ponieważ

$$\frac{b-a}{3n} = \frac{2-1}{30} = \frac{1}{30}$$

więc wykorzystując metodę Simpsona mamy

$$\int_1^2 \frac{1}{x} dx \approx \frac{1}{30} \cdot (20.7944) \approx 0.6932 .$$

Chcąc obliczyć błąd jaki wystąpił przy obliczaniu całki tą metodą należy znaleźć czwartą pochodną funkcji f

$$f(x) = \frac{1}{x}, f'(x) = -\frac{1}{x^2}, f''(x) = \frac{2}{x^3}, f'''(x) = -\frac{6}{x^4}, f^{(4)}(x) = \frac{24}{x^5} .$$

Ponieważ największą wartością pochodnej czwartego rzędu w przedziale $[1, 2]$ jest

$$f^{(4)}(1) = 24$$

więc możemy przyjąć $M = 4$.

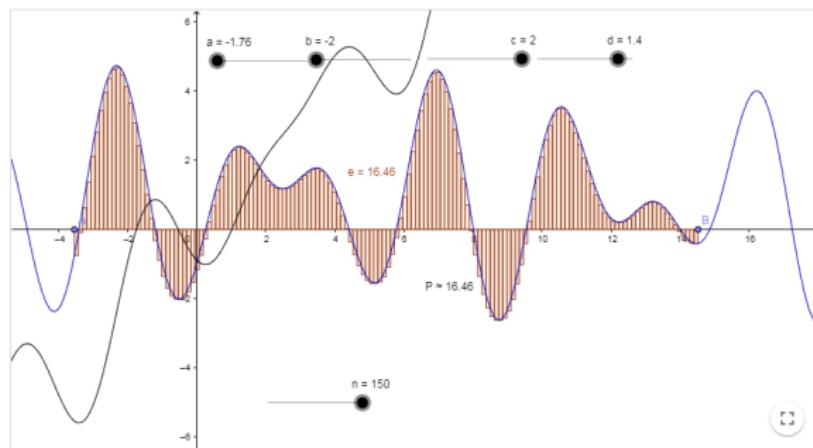
Na mocy naszych rozważań błąd jakiego szukamy jest nie większy niż $\frac{24(2-1)^5}{180(10)^4} = \frac{2}{150000} < 1,4 \cdot 10^{-5}$.

Zauważmy, że błąd jaki wystąpił przy obliczaniu całki metodą Simpsona jest mniejszy niż w przypadku stosowania metody trapezów.

Geogebra.

Wracamy do wykorzystania programu “Geogebra” do ilustracji materiału. Oczywiście: proszę uruchamiać skrypty na swoich komputerach...

Tutaj [sumy Riemanna i całki](#). Całka a pole. Kolejne materiały między innymi tutaj oraz [jeszcze tu](#). Inne materiały: opracować lub poszukać.



Całki 1.

Klasyczny przykład zastosowania całek w **grafice komputerowej** to równanie renderowania Kajiya (co gorsza - potrzebne na ogół metody całkowania numerycznego :-)).
Inny przypadek: w **teorii kolejkowania** - np. równanie całkowe Pollaczka (ale też: o czym później) - całki podwójne niewłaściwe (prawdopodobieństwo opóźniania kolejkowania) - to w kolejnym wykładzie (niestety tylko o ile zdązymy!).

Absolutna "klasyka" - szacowanie sum (częste w obliczeniach) poprzez całki:

$$\int_{m-1}^n f(x) \, dx \leq \sum_{k=m}^n f(k) \leq \int_m^{n+1} f(x) \, dx.$$

A teraz zadanie: jakie są **założenia**, aby powyższy wzór był prawdziwy? Odpowiedzi szukaj na wykładach z analizy...

Zastosowanie całek do obliczania pól.

Przedstawimy poniżej podstawowe wzory pól ograniczonych krzywymi.

Twierdzenie. *Pole $|P|$ obszaru P ograniczonego dwiema krzywymi $y = \varphi(x)$ i $y = \psi(x)$, gdzie $\psi(x) \geq \varphi(x)$ dla $a \leq x \leq b$ i rzędnymi w punktach $x = a$ i $x = b$ wyraża się wzorem*

$$|P| = \int_a^b [\psi(x) - \varphi(x)] dx .$$

Twierdzenie. Jeżeli krzywa k o równaniach parametrycznych $x = x(t)$, $y = y(t)$, $\alpha \leq t \leq \beta$ jest klasy C^1 (tzn. funkcje $x(t)$ oraz $y(t)$ mają ciągłe pochodne pierwszego rzędu) przy czym $y(t) \geq 0$ oraz $x'(t) > 0$ w $\langle \alpha, \beta \rangle$ to pole $|P|$ obszaru P zawartego między tą krzywą, osią Ox i rzędnymi w punktach końcowych krzywej, wyraża się wzorem

$$|P| = \int_{\alpha}^{\beta} y(t)x'(t)dt .$$

Przy założeniach twierdzenia oraz jeżeli $x'(t) < 0$ w $\langle \alpha, \beta \rangle$ mamy

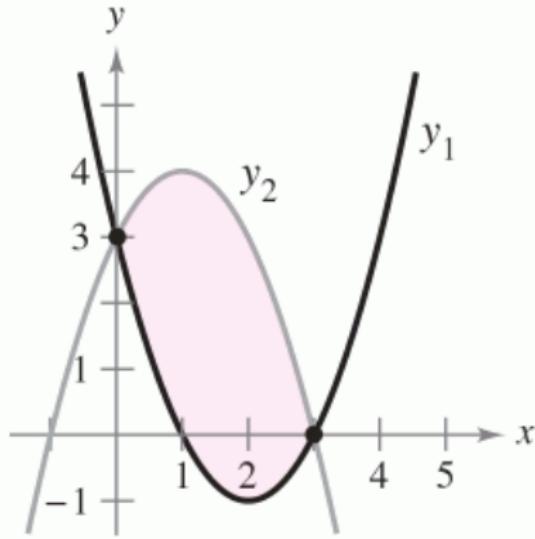
$$|P| = - \int_{\alpha}^{\beta} y(t)x'(t)dt .$$

Ćwiczenie.

Obliczyć samodzielnie pole pomiędzy krzywymi:

$$y_1 = x^2 - 4x + 3$$

$$y_2 = -x^2 + 2x + 3$$

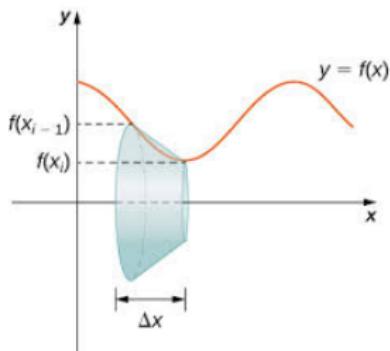


Obliczanie objętości i pola powierzchni brył obrotowych.

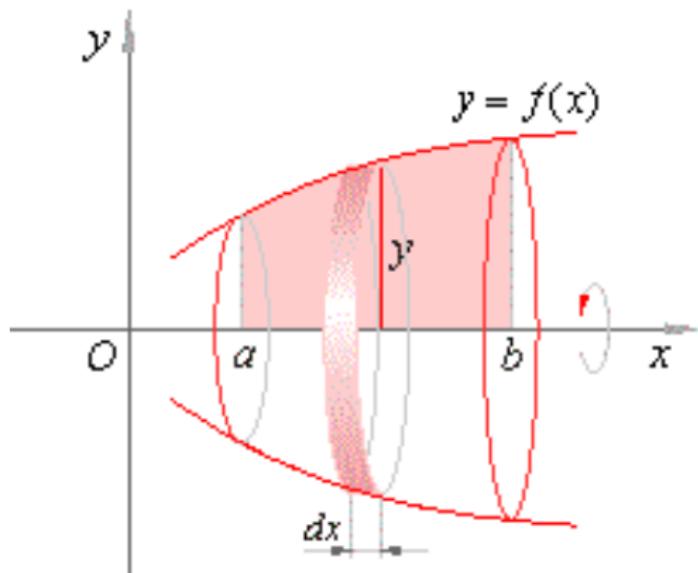
Niech dany będzie łuk AB krzywej o równaniu $y = f(x)$, gdzie $f(x)$ jest funkcją ciągłą i nieujemną w przedziale $\langle a, b \rangle$.

Wówczas objętość bryły obrotowej ograniczonej powierzchnią, która powstaje, gdy łuk AB wraz z rzędnymi w końcu łuku obraca się dookoła osi Ox, obliczamy według wzoru

$$V = \pi \int_a^b y^2 dx .$$



Bryły obrotowe.



Pole powierzchni bryły obrotowej.

Pole powierzchni obrotowej powstałej przez obrót łuku AB dookoła osi OX obliczamy według wzoru

$$S = 2\pi \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx ,$$

przy założeniu dodatkowym, że funkcja $y = f(x)$ ma w przedziale $a \leq x \leq b$ ciągłą pochodną.

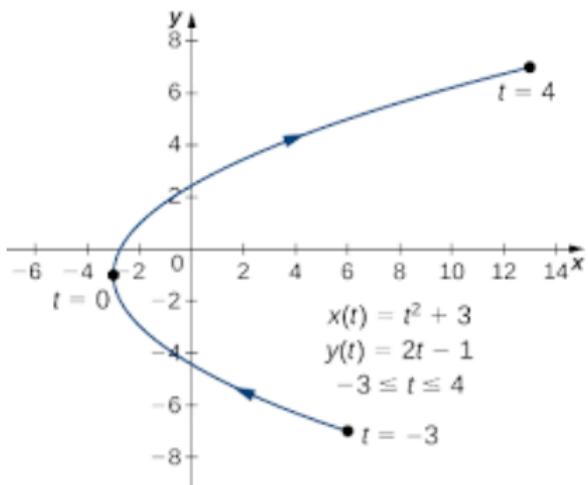
Obliczanie długości łuku.

Jeżeli krzywa wyznaczona jest równaniem postaci $y = f(x)$, przy czym funkcja $f(x)$ ma w przedziale $a \leq x \leq b$ ciągłą pochodną, to długość łuku w tym przedziale wyraża się wzorem

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx .$$

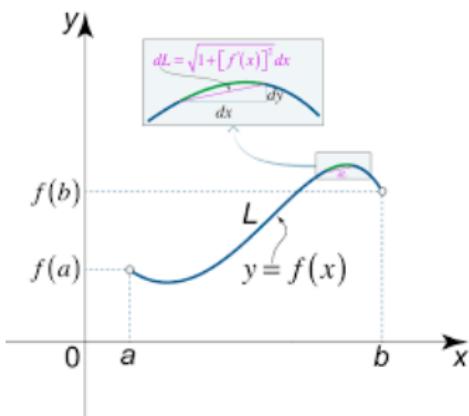
Jeżeli krzywa dana jest parametrycznie za pomocą równań $x = g(t)$, $y = h(t)$, przy czym funkcja $g(t)$ i $h(t)$ mają w przedziale $t_1 \leq t \leq t_2$ ciągłe pochodne oraz łuk nie ma części wielokrotnych, to długość łuku wyraża się wzorem

$$L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt .$$



Jeżeli krzywa dana jest równaniem we współrzędnych biegunowych $r = f(\Theta)$, przy czym funkcja $f(\Theta)$ ma w przedziale $\alpha \leq \Theta \leq \beta$ ciągłą pochodną i łuk nie ma części wielokrotnych, to długość łuku wyraża się wzorem

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\Theta} \right)^2} d\Theta .$$



Odległości pomiędzy funkcjami. Przybliżenia.

Czas najwyższy sprecyzować co oznacza “przybliźmy funkcję” czy “błąd przybliżenia” ...

Wszyscy intuicyjnie znają pojęcie odległości między dwoma punktami (obiektami). Naturalne wydaje się, że jest to długość odcinka łączącego te punkty.

A jednak czasami, nawet nieświadomie, inaczej mierzmy odległość ... Podamy tu jak w matematyce usystematyzowano to pojęcie i wskażemy kilka przykładów.

Wprowadzimy pojęcie metryki (odległości) na dowolnym zbiorze X .

Metryki.

Definicja. Jeżeli w niepustym zbiorze X ... dla każdych dwóch elementów x, y tego zbioru przyporządkowano liczbę nieujemną $d(x, y)$ taką, że

$$1^0 \quad d(x, y) = 0 \iff x = y ,$$

$$2^0 \quad d(x, y) = d(y, x) ,$$

$$3^0 \quad d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) \text{ dla każdego } z \in X.$$

Wówczas d nazywamy odległością albo metryką, a parę (X, d) przestrzenią metryczną. Elementy x przestrzeni metrycznej X nazywamy punktami, a warunek 3^0 - nierównością trójkąta.

Przykłady I.

Warto tu podkreślić, że definicja podaje jedynie aksjomaty jakie musi spełnić funkcja d , aby być metryką, natomiast konstrukcja takiej funkcji może być różna. Stąd w szczególności na zbiorze X może być kilka różnych metryk. Podamy tu kilka ciekawych i charakterystycznych przykładów.

(1) Zaczniemy od pokazania, że metrykę można wprowadzić na dowolnym zbiorze X . Określmy funkcję d następująco:

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & x = y , \\ 1 & x \neq y . \end{cases}$$

Metrykę tę nazywamy dyskretną.

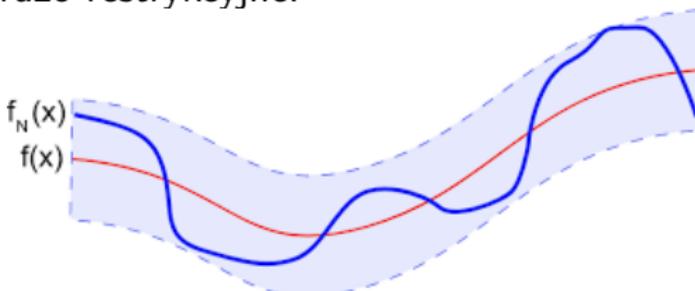
Metryka jednostajna.

Przypomnijmy metrykę jednostajną: $x, y \in C(a, b)$

$$d(x, y) = \sup_{t \in [0, 1]} |x(t) - y(t)|.$$

To ważny przykład w wielu dziedzinach matematyki i informatyki. Tę samą metrykę można rozpatrywać na obszerniejszych przestrzeniach, niż tylko funkcji ciągłych!

To ważna metryka. Wydaje się bardzo dobrą w zastosowaniach informatycznych, ale posiada jedną istotną wadę: wymaga sprawdzenia różnic wartości funkcji we **wszystkich** punktach przedziału, a to jest trudne i nie zawsze wykonalne, a ponadto - bardzo restrykcyjne.



Ciągi funkcyjne.

Być może główną operacją opartą o metryki w informatyce będzie dla Państwa jednak przybliżanie danej danej funkcji f ciągami funkcji (f_k) o pewnych “lepszych” własnościach np. łatwiej lub dokładniej wyliczalnych (np. funkcję ciągłą wielomianem, funkcję schodkową lub łamaną).

Musimy wyjaśnić

- ▶ jak to zrobić (w jakim sensie jest zbieżność),
 - ▶ jak kontrolować błąd popełniany przy tej operacji (odległość granicy f od przybliżenia f_k).

Ciągi w przestrzeniach metrycznych.

I kolejna ważna definicja. Proszę zawsze wyobrażać sobie w tym miejscu ciągi *funkcji* przybliżających daną funkcję...

Definicja. Mówimy, że ciąg (x_n) punktów $x_n \in X$ jest zbieżny do punktu $x \in X$ gdy

$$d(x_n, x) \rightarrow 0 \quad \text{dla } n \rightarrow \infty ,$$

gdzie zbieżność jest w sensie ciągu liczbowego tj.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N d(x_n, x) < \varepsilon .$$

Warto zauważyć, że ciąg (x_n) jest zbieżny do $x \in X \iff$ dla każdej kuli $K(x, r)$ (dla $r > 0$) prawie wszystkie wyrazy ciągu (x_n) należą do kuli $K(x, r)$.

Uogólnijmy teraz znaną dla ciągów liczbowych definicję:

Definicja. Ciąg (x_n) punktów przestrzeni metrycznej (X, d) spełnia warunek Cauchy'ego (jest ciągiem Cauchy'ego), gdy dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje taka liczba $N \in \mathbb{N}$ taka, że dla dowolnych $m, n > N$ mamy $d(x_n, x_m) < \varepsilon$.

A teraz kilka związkanych z tym własności:

Twierdzenie.

- (a) Ciąg zbieżny jest ciągiem Cauchy'ego.
- (b) Ciąg Cauchy'ego jest ograniczony.
- (c) Ciąg Cauchy'ego zawierający podciąg zbieżny do punktu x jest też zbieżny do x .

Nie zachodzi natomiast twierdzenie analogiczne do twierdzenia Bolzano-Weierstrassa dla ciągów liczbowych !

Przestrzeń zupełna.

Mamy więc nową definicję:

Definicja. Przestrzeń metryczna (X, d) nazywa się zupełną, jeżeli każdy ciąg Cauchy'ego w tej przestrzeni jest ciągiem zbieżnym (do pewnego $x \in X$).

Tak więc tw. Bolzano-Weierstrassa stwierdza, że (\mathbb{R}, d_2) jest przestrzenią zupełną. My możemy podać ogólniejsze:

Twierdzenie. Przestrzeń (\mathbb{R}^k, d_2) jest zupełna.

Ciąg kolejnych przybliżeń.

Definicja. Odwzorowanie $T : X \rightarrow X$ przestrzeni metrycznej $\langle X, d \rangle$ w siebie nazywamy **kontrakcją lub odwzorowaniem zwężającym**, gdy istnieje taka liczba L , spełniająca nierówności $0 < L < 1$, że dla każdych $x, y \in X$ zachodzi nierówność

$$d(T(x), T(y)) \leq Ld(x, y) .$$

Przestrzeń metryczną nazywamy zupełną, gdy każdy ciąg spełniający warunek Cauchy'ego jest zbieżny.

Twierdzenie (Banacha o punkcie stałym).

Niech X będzie przestrzenią metryczną zupełną. Jeżeli odwzorowanie $T : X \rightarrow X$ jest kontrakcją ze stałą $L < 1$, to istnieje dokładnie jeden punkt stały x_0 tego odwzorowania. Ponadto punkt ten można otrzymać jako granicę ciągu (x_n) określonego w następujący sposób: x_1 jest dowolnym punktem z przestrzeni X , a $x_{n+1} = T(x_n)$ dla $n = 1, 2, \dots$.

Prawdziwa jest również następująca nierówność

$$d(x_n, x_0) \leq \frac{L^{n-1}}{1-L} \cdot d(x_2, x_1).$$

Ciąg (x_n) nazywamy ciągiem kolejnych przybliżeń lub ciągiem kolejnych iteracji odwzorowania T . Nierówność ta przedstawia błąd popełniony kiedy rozwiązanie równania $T(x) = x$ zastąpimy rozwiązaniem przybliżonym x_n .

O tej i innych **metodach iteracyjnych** - na metodach numerycznych.

Metoda iteracji prostych bazuje na twierdzeniu Banacha o punkcie stałym i ma kilka zalet...

Ćwiczenie: obliczyć tą metodą przybliżone rozwiązanie równania w przedziale $[0, 2]$:

$$x - \frac{x^2 + 2}{3x^2 + 1} = 0.$$

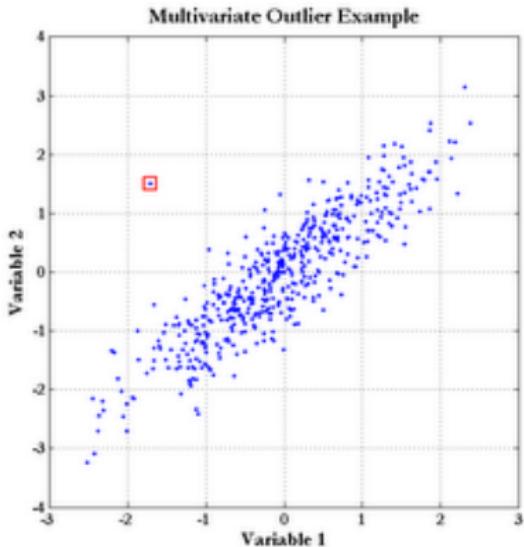
(Wsk.: zapisujemy $x = \frac{x^2 + 2}{3x^2 + 1}$, czyli stosujemy twierdzenie dla $T(x) = \frac{x^2 + 2}{3x^2 + 1}$, sprawdzamy warunek Lipschitz'a (powinno wyjść $L = 2\dots$), kładziemy np. $x = 1$ itd.)

Więcej o metrykach i ich zastosowaniach - na **innym** przedmiocie (będzie wśród takich do wyboru)...

Metryka Mahalanobisa.

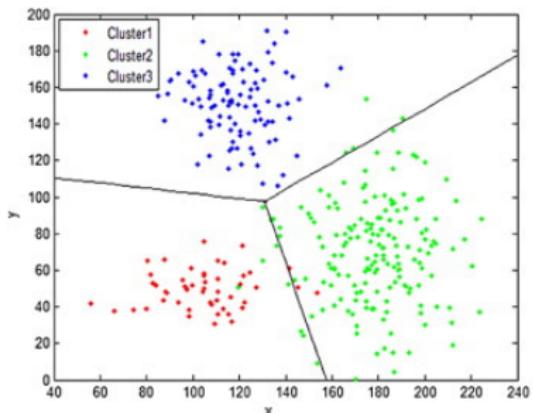
Dane mamy 2 wektory $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]$, $y = [y_1, y_2, \dots, y_n]$ w przestrzeni \mathbb{R}^n , oraz pewną macierz symetryczną C . **Metryka Mahalanobisa** zdefiniowana jest jako:

$$d_m(x, y) := \sqrt{(x - y)^T C^{-1}(x - y)}.$$

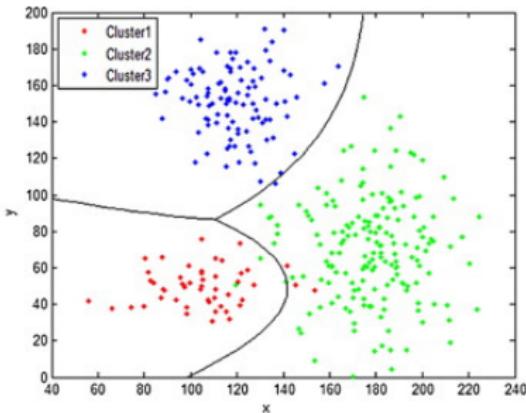


Metryka Mahalanobisa.

To jednak robi różnicę ... - a to przecież **metryka ważona!!**

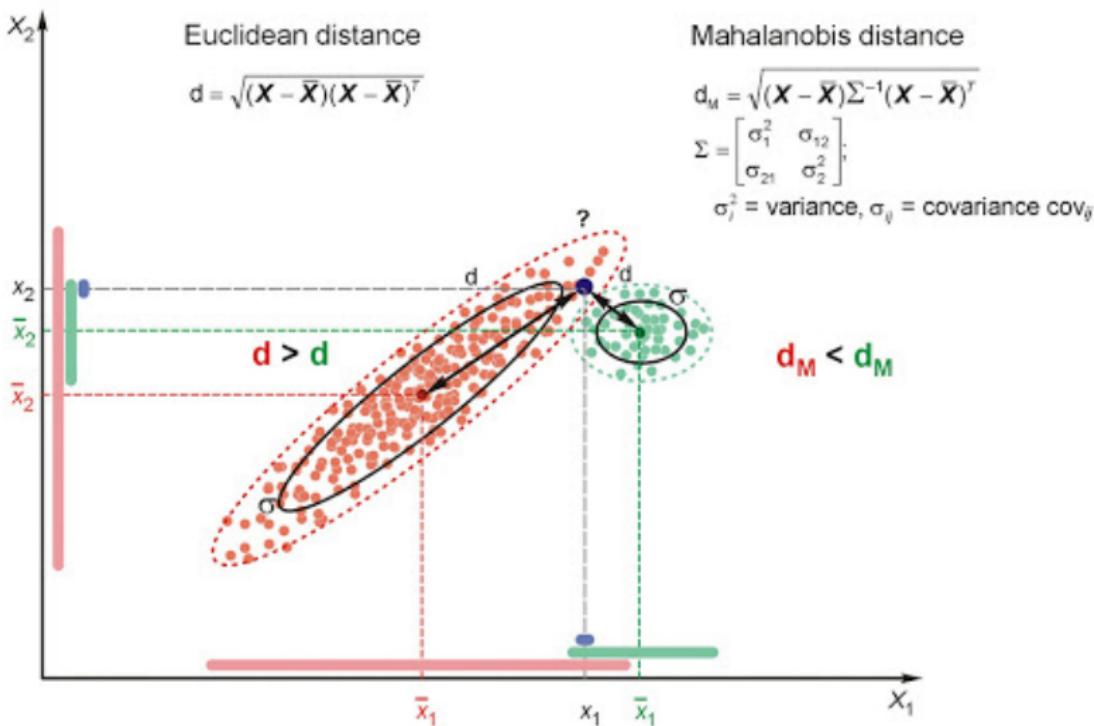


(a) Clusters' boundaries by Euclidean distance



(b) Clusters' boundaries by Mahalanobis distance

(np. w przypadku zmiennych losowych wagi a_i to odwrotności wariancji $d_m(x, \mu) = \sqrt{\frac{(x_1 - \mu_1)^2}{\sigma_1^2} + \dots + \frac{(x_n - \mu_n)^2}{\sigma_n^2}}$).



Metryki Hamminga i Levenshteina.

Metryka Hamminga to miara odmienności dwóch ciągów o takiej samej długości, wyrażająca liczbę miejsc (pozycji), na których te dwa ciągi się różnią. Innymi słowy jest to najmniejsza liczba zmian (operacji zastępowania elementu innym), jakie pozwalają przeprowadzić jeden ciąg na drugi.

Jest stosowana w kodowaniu i w przypadku ciągów binarnych (można stosować też dla innych łańcuchów) a i b odległość Hamminga jest równa liczbie jedynek w słowie $a \text{ XOR } b$, czyli jeśli $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, $b = (b_1, b_2, \dots, b_n)$, to

$$d_{HM}(a, b) = \sum_{i=1}^n [a_i(1 - b_i) + b_i(1 - a_i)].$$

Metryka Levenshteina jest to metryka w przestrzeni ciągów znaków, zdefiniowana następująco - działaniem prostym na napisie nazwiemy: wstawienie nowego znaku do napisu, usunięcie znaku z napisu, zamianę znaku w napisie na inny znak.

Przykład.

A tu zadanie z konkursu dla uczniów szkół średnich “Koala” 2020/21 - to właśnie **metryka Levenshteina** pomiędzy danymi układami monet z działaniem prostym opisanym w zadaniu (m.in. przesuwanie par monet o różnych nominałach itd.)...

9. Przekładaniec

Ulóżcie trzy złotówki i dwie dwuzłotówki na przemian w rzędzie, dokładnie tak jak na obrazku (a). Ruch polega na przesunięciu dwóch stykających się monet o różnych nominalach na inne miejsce w rzędzie, przy czym obowiązują takie zasady:

- Obie przesuwane monety muszą nadal się stykać i pozostać w tej samej kolejności.
- Pozostałe monety pozostają na swoich miejscach i nie można ich przesuwać, np. zsuwać po powstaniu luk.
- Cały rząd może zmienić położenie, w trakcie przesuwania mogą powstawać luki w układzie, np. takie jak na rysunku (c), gdzie pierwsza luka może pomieścić dwie monety, a druga trzy.

Wykonując jak najmniej ruchów, doprowadźcie do układu, w którym złotówki zajmują trzy pierwsze miejsca w rzędzie, a dwuzłotówki – dwa kolejne, dokładnie tak jak na obrazku (b). Ile ruchów wykonaliście?

Nazwijmy rozpiętością układu odległość między pierwszą a ostatnią monetą w układzie, mierzoną średnicą monety (np. rozpiętość układu początkowego to 4, a rozpiętość układu z rysunku (c) to 9). Rozpiętością serii ruchów nazwijmy największą z rozpiętości wszystkich układów powstających po drodze (czyli jeśli np. rozpiętości układów powstających w kolejnych krokach to: 4, 5, 6, 7, 9, 6, 7, 4, to rozpiętość całej serii wynosi 9). Spośród możliwych rozwiązań o minimalnej liczbie ruchów wybierzcie to, dla którego rozpiętość jest najmniejsza. Ile wynosi ta rozpiętość?

Jako odpowiedź podajcie dwie liczby: liczbę ruchów i rozpiętość.



(a)



(b)

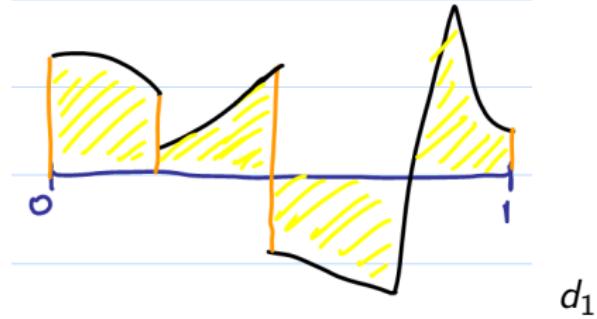
```
int LevenshteinDistance(char s[1..m], char t[1..n])  
  
declare int d[0..m, 0..n] // d - tablica (m+1) na (n+1)  
for i from 0 to m  
    d[i, 0] := i  
for j from 1 to n  
    d[0, j] := j  
  
for i from 1 to m  
    for j from 1 to n  
        if s[i] = t[j] then cost := 0  
            else cost := 1  
        d[i, j] := minimum(d[i-1, j] + 1, // usuwanie  
                            d[i, j-1] + 1, // wstawianie  
                            d[i-1, j-1] + cost) // zamiana  
  
return d[m, n]
```

Inne metryki na rodzinach funkcji.

W praktyce informatycznej poza metryką jednostajną korzysta się na ogół z dwóch innych (nawet częściej niż z tej). Nie będziemy skupiać się teraz na zbiorze funkcji (tak naprawdę klas funkcji), na których definiujemy te metryki, temat można poszerzyć korzystając z literatury.

Niech x, y będą funkcjami całkowalnymi. Utożsamiając funkcje równe prawie wszędzie (poza zbiorem miary zero) mamy na takiej rodzinie metrykę d_1 :

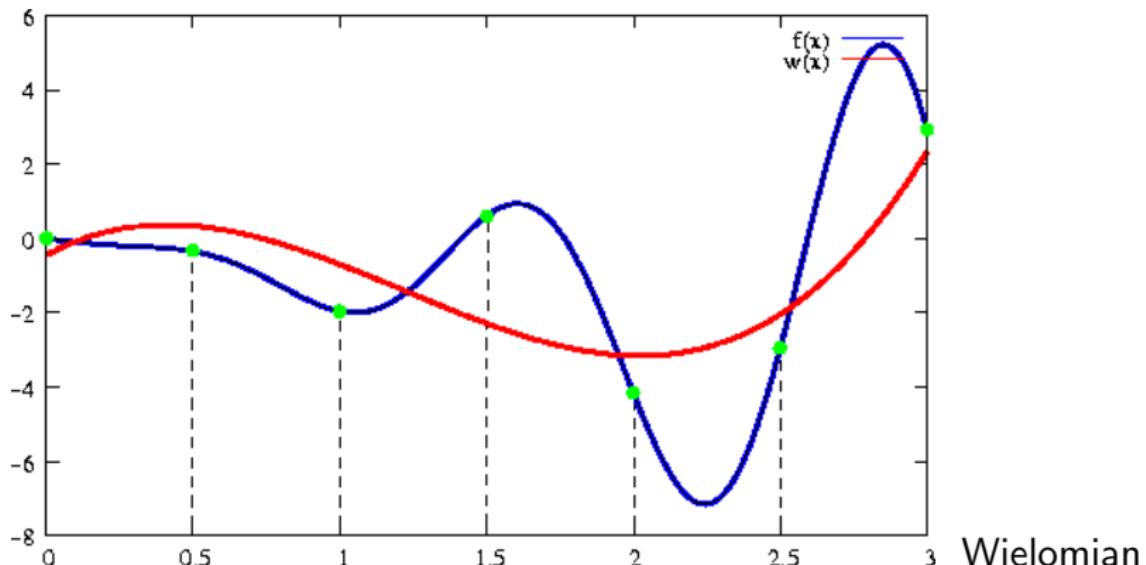
$$d_1(x, y) = \int_a^b |x(t) - y(t)| dt,$$



... a jeżeli te funkcje są całkowalne z kwadratem (tj. x^2 i y^2 są całkowalne) - z takim samym utożsamieniem mamy metrykę "średniokwadratową" d_2 :

$$d_2(x, y) = \left(\int_a^b |x(t) - y(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Może to zaskakujące, ale ta ostatnia metryka jest podstawową do oceny odległości pomiędzy funkcjami (lub zbiorami ich wartości) w większości algorytmów aproksymacyjnych.



w (czerwony) stopnia 3, aproksymujący 7 zadanych wartości (zaznaczone na zielono) danej funkcji f w sensie minimalizacji błędu średniokwadratowego.

Analiza matematyczna dla informatyków.

Mieczysław Cichoń, ver. 2.4/2021

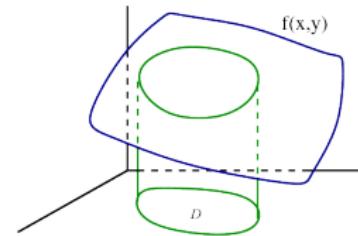
Mieczysław Cichoń - WMI UAM

Całki podwójne.

Definicja i najprostsze własności całki podwójnej.

Zagadnienie pola trapezu krzywoliniowego przywiódło nas do pojęcia zwykłej całki oznaczonej. Podobnie zagadnienie objętości walca krzywoliniowego prowadzi nas do nowego pojęcia - *całki podwójnej* (oznaczonej).

Rozważmy bryłę V ograniczoną z góry powierzchnią $z = f(x, y)$, z boków powierzchnią walcową o tworzących równoległych do osi Oz i z dołu - figurą płaską D na płaszczyźnie OXY.

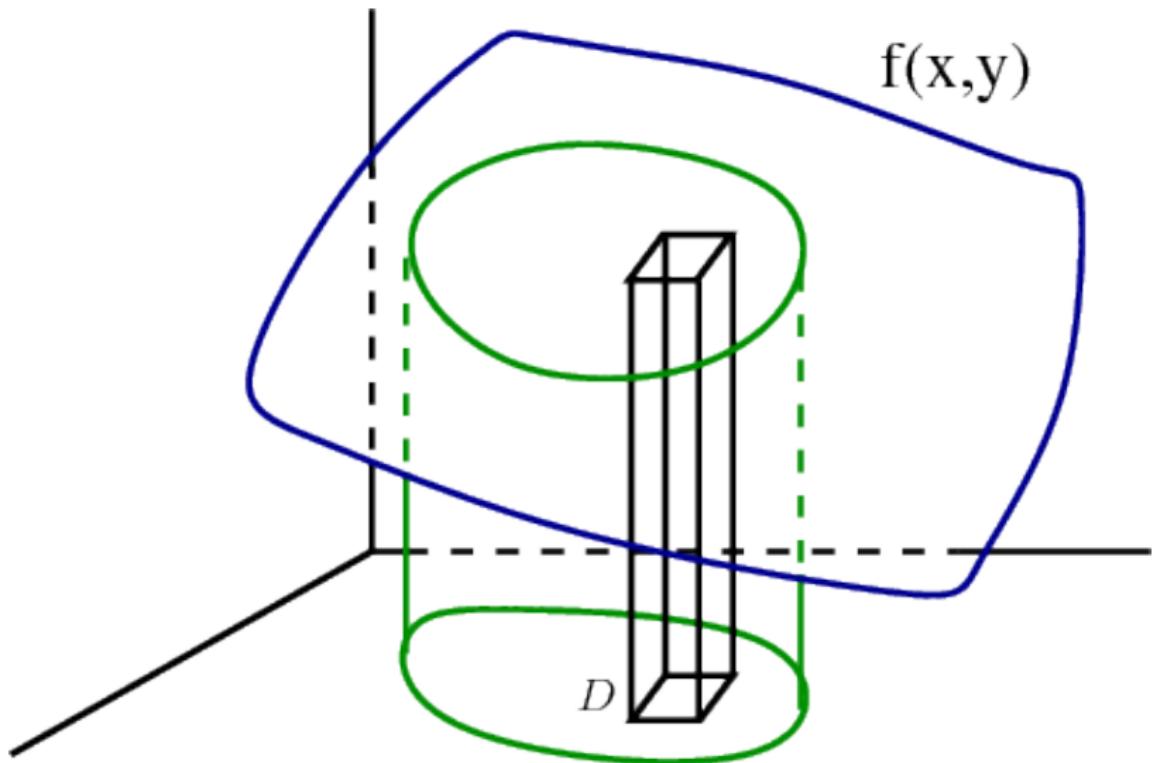


Należy znaleźć objętość bryły V .

Dla rozwiązania tego zagadnienia posłużymy się metodą polegającą na rozkładzie szukanej wielkości na części elementarne, przybliżonym obliczeniu każdej z części, zsumowaniu i przejściu do granicy.

W tym celu podzielimy obszar D siatką krzywych na części P_1, P_2, \dots, P_n i rozważmy zbiór małych walców mających te właśnie części za podstawy i składających się w sumie na bryłę V .

W celu obliczenia objętości poszczególnych walców weźmy w każdej figurze P_i dowolny punkt (ξ_i, η_i) . Jeżeli w przybliżeniu zastąpimy każdy walec walcem o podstawach równoległych i o wysokości równej rzędnej $f(\xi_i, \eta_i)$, to objętość walca wynosi: $f(\xi_i, \eta_i) \cdot |P_i|$, gdzie $|P_i|$ oznacza pole figury D .



W takim razie przybliżona objętość całej bryły wynosi

$$|V| \approx \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) |P_i| .$$

Dla zwiększenia dokładności tego przybliżenia zmniejszajmy wymiary pól $|P_i|$ zwiększając ich liczbę. Przechodząc do granicy, przy zdążaniu do zera największej ze średnic obszarów P_i , otrzymujemy dokładną równość, mamy więc

$$|V| = \lim \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) |P_i| .$$

Wzór ten stanowi rozwiązańe zagadnienia.

Granicę tego typu nazywamy całką podwójną funkcji $f(x, y)$ po obszarze P_i ; oznaczamy ją symbolem: $\iint_P f(x, y) dP$, a więc wzór na objętość przyjmuje postać:

$$|V| = \iint_P f(x, y) dP .$$

Definicja. Suma całkowa funkcji po prostokącie

Niech funkcja $f(x, y)$ będzie ograniczona na prostokącie R oraz niech P będzie podziałem tego prostokąta. **Sumą całkową funkcji f** nazywamy liczbę

$$\sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k) \Delta x_k \Delta y_k.$$

Pojedyncze składniki powyższej sumy są objętościami prostopadłościianów, których podstawami są prostokąty R_k , a wysokościami $f(\xi_k, \eta_k)$.

Definicja. Całka podwójna funkcji po prostokącie.

Niech funkcja $f(x, y)$ będzie ograniczona na prostokącie R . Całkę podwójną funkcji f po prostokącie R określamy wzorem

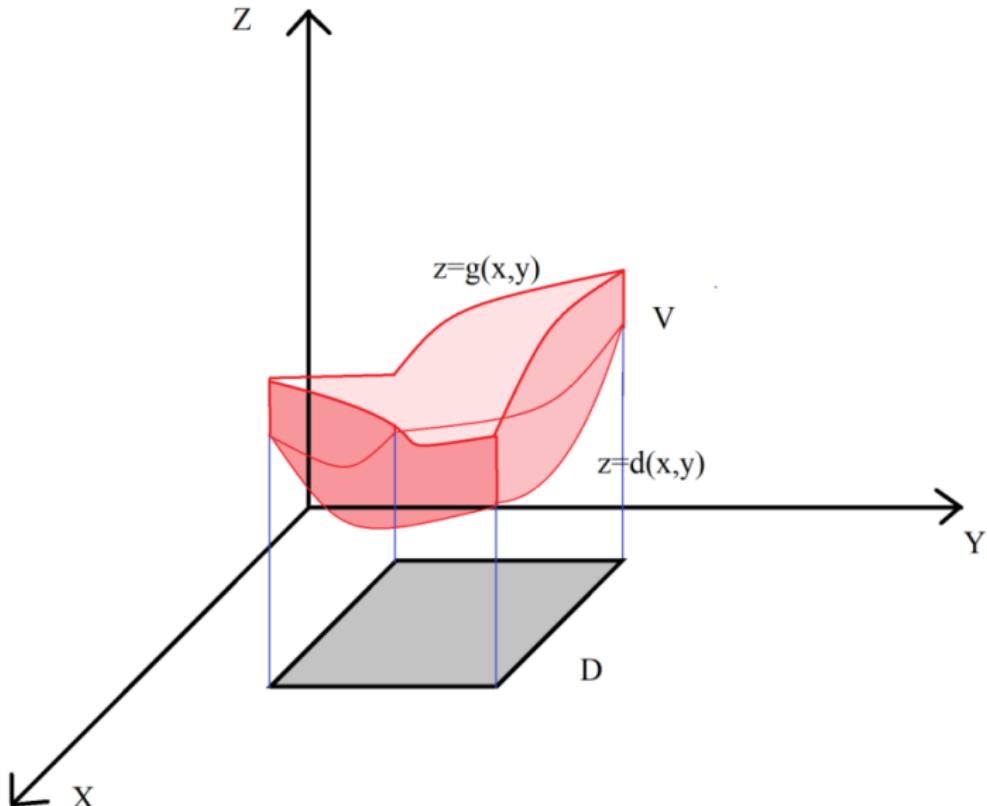
$$\iint_R f(x, y) dx dy = \lim_{\delta(P) \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k) \Delta x_k \Delta y_k,$$

o ile ta granica jest właściwa. Jeżeli całka istnieje, to mówimy, że funkcja jest całkowalna. Każda funkcja ciągła jest całkowalna.

Interpretacja geometryczna.

Składnik $f(\xi_k, \eta_k) \Delta x_k \Delta y_k$ sumy całkowej można interpretować jako objętość prostopadłościanu, którego podstawa jest prostokątem o wymiarach $\Delta x_k, \Delta y_k$ a wysokością jest $f(\xi_k, \eta_k)$. Suma całkowa jest zatem przybliżeniem objętości bryły ograniczonej prostokątem R , powierzchnią $z = f(x, y)$ i ścianami bocznymi równoległymi do os OZ .

$$|V| = \iint_D [g(x, y) - d(x, y)] dx dy$$



Własności całki podwójnej po prostokącie.

- ▶ Funkcja ciągła na prostokącie jest na nim całkowalna;

- ▶ $f(x, y) = 0 \Rightarrow \iint_R f(x, y) dx dy = 0;$

- ▶ liniowość całki

$$\iint_R (\alpha f(x, y) + \beta g(x, y)) dx dy =$$

$$\alpha \iint_R f(x, y) dx dy + \beta \iint_R g(x, y) dx dy,$$

gdzie $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$;

Własności całki podwójnej po prostokącie.

- ▶ addytywność całki względem obszaru całkowania
Jeżeli funkcja f jest całkowalna na prostokącie R , to dla dowolnego podziału tego prostokąta na prostokąty R_1, R_2 o rozłącznych wnętrzach zachodzi

$$\iint_R f(x, y) dx dy = \iint_{R_1} f(x, y) dx dy + \iint_{R_2} f(x, y) dx dy;$$

Jeżeli D jest prostokątem danym nierównościami $a \leq x \leq b$,
 $c \leq y \leq d$, to

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y) dy \right] dx = \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y) dx \right] dy ,$$

a jeżeli ponadto funkcja $f(x, y) = \varphi(x)\psi(y)$, to całka podwójna równa się iloczynowi całek pojedynczych:

$$\iint_D \varphi(x)\psi(y) d\sigma = \int_a^b \varphi(x) dx \int_c^d \psi(y) dy .$$

Całki określone powyższymi wzorami nazywamy **całkami iterowanymi**.

Przykłady

Obliczyć podane całki iterowane:

$$\int_1^2 \left(\int_0^3 (x + y^2 x) dy \right) dx = \int_1^2 \left(x \int_0^3 dy + x \int_0^3 y^2 dy \right) dx =$$

$$\int_1^2 \left(x[y]_0^3 + x \left[\frac{y^3}{3} \right]_0^3 \right) dx = \int_1^2 (3x + 9x) dx = 12 \int_1^2 x dx$$

$$12 \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_1^2 = 12 \left(2 - \frac{1}{2} \right) = 18.$$

Przykłady

$$\int_0^{\ln 4} \left(\int_0^{\ln 3} e^{x+y} dy \right) dx = \begin{vmatrix} & t = x + y \\ & dt = dy \\ \hline y & | & 0 & | & \ln 3 \\ \hline t & | & x & | & x + \ln 3 \end{vmatrix} =$$

$$\int_0^{\ln 4} \left(\int_x^{x+\ln 3} e^t dt \right) dx = \int_0^{\ln 4} \left(e^t \right)_x^{x+\ln 3} dx =$$

$$\int_0^{\ln 4} \left(e^{x+\ln 3} - e^x \right) dx = \int_0^{\ln 4} \left(e^x \cdot e^{\ln 3} - e^x \right) dx =$$

$$\int_0^{\ln 4} \left(3e^x - e^x \right) dx = 2 \int_0^{\ln 4} e^x dx = 2e^x \Big|_0^{\ln 4} = 2e^{\ln 4} - 2e^0 =$$

$$= 8 - 2 = 6.$$

UWAGA.

Jeżeli f jest funkcją postaci $f(x, y) = g(x) \cdot h(y)$, gdzie funkcje g i h są ciągłe odpowiednio na przedziałach $[a, b]$, $[c, d]$, to

$$\iint_{[a,b] \times [c,d]} f(x, y) \, dx \, dy = \left(\int_a^b g(x) \, dx \right) \cdot \left(\int_c^d h(y) \, dy \right).$$

Przykład.

$$\iint_R xy(x+y) \, dx \, dy, \text{ gdzie } R = [-1, 1] \times [-1, 1].$$

$$\iint_R (x^2y + xy^2) \, dx \, dy = \iint_R x^2y \, dx \, dy + \iint_R xy^2 \, dx \, dy =$$

$$\int_{-1}^1 \left(\int_{-1}^1 x^2y \, dy \right) \, dx + \int_{-1}^1 \left(\int_{-1}^1 xy^2 \, dy \right) \, dx =$$

$$\left(\int_{-1}^1 x^2 \, dx \right) \cdot \left(\int_{-1}^1 y \, dy \right) + \left(\int_{-1}^1 x \, dx \right) \cdot \left(\int_{-1}^1 y^2 \, dy \right) =$$

$$\left(\frac{x^3}{3} \Big|_{-1}^1 \right) \cdot \left(\frac{y^2}{2} \Big|_{-1}^1 \right) + \left(\frac{x^2}{2} \Big|_{-1}^1 \right) \cdot \left(\frac{y^3}{3} \Big|_{-1}^1 \right) = 0$$

Definicja. Całka podwójna po obszarze

Niech f będzie funkcją określoną i ograniczoną na obszarze ograniczonym $D \subset \mathbb{R}^2$ oraz niech R będzie dowolnym prostokątem zawierającym obszar D . Ponadto niech funkcja f^* będzie rozszerzeniem funkcji f na R określonym wzorem:

$$f^*(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & \text{dla } (x, y) \in D \\ 0 & \text{dla } (x, y) \in R \setminus D. \end{cases}$$

Definicja. Całka podwójna po obszarze

Całkę podwójną funkcji f po obszarze D definiujemy wzorem:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_R f^*(x, y) dx dy$$

o ile całka poprawej stronie istnieje. Mówimy wtedy, że funkcja f jest całkowalna na obszarze D .

Uwaga. Całka $\iint_R f^*(x, y) dx dy$ nie zależy od wyboru prostokąta R .

Zamiana całki podwójnej na całkę iterowaną.

Wygodnym sposobem obliczenia całki podwójnej jest jej zamiana na całkę iterowaną. Aby taką zamianę przeprowadzić musimy zdefiniować pojęcie obszaru normalnego względem osi układu współrzędnych OX i OY .

Definicja. Obszar normalny.

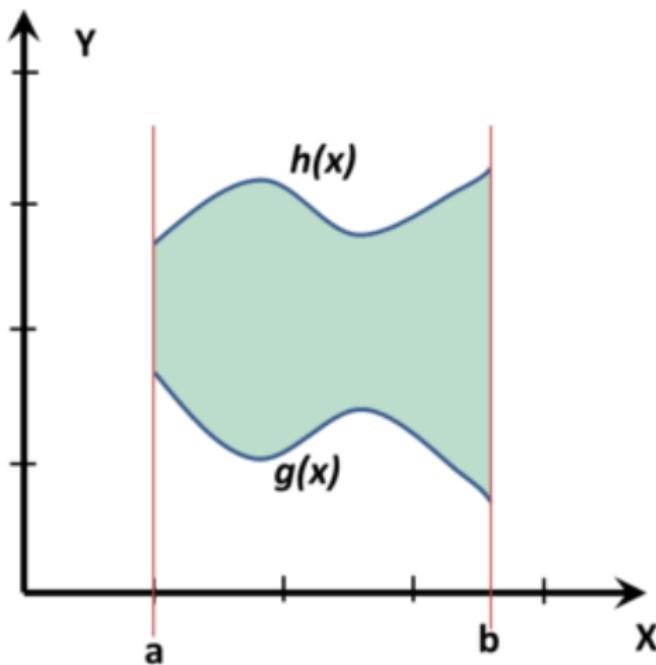
Obszar normalny względem osi OX to zbiór punktów (x, y) spełniających warunek

$$\begin{cases} a \leq x \leq b \\ g(x) \leq y \leq h(x), \end{cases}$$

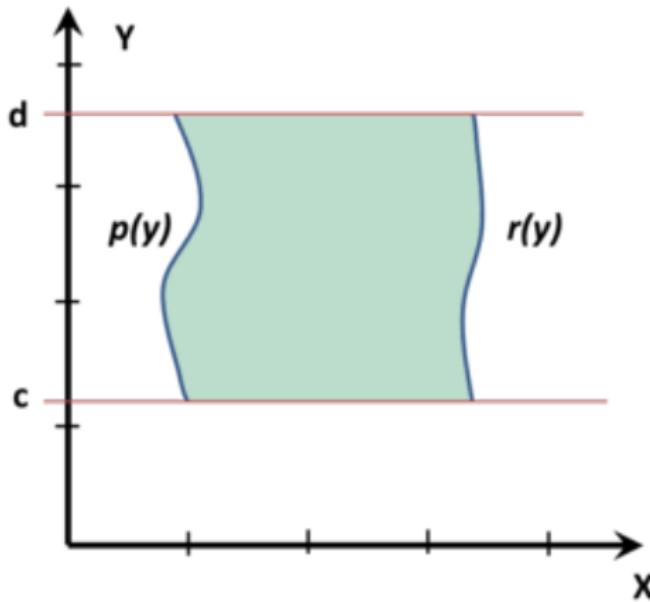
a obszar normalny względem osi OY to następujący zbiór punktów

$$\begin{cases} c \leq y \leq d \\ p(y) \leq x \leq r(y). \end{cases}$$

Obszar normalny względem osi OX .

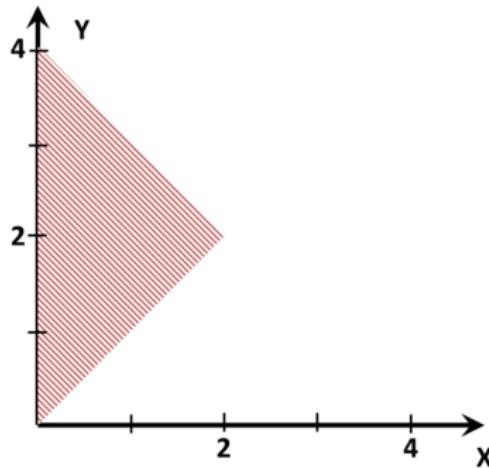


Obszar normalny względem osi Oy .



Przykłady

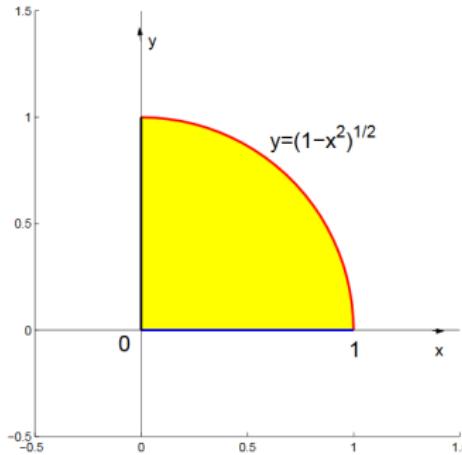
Obszary przedstawione na poniższych rysunkach zapisać jako normalne względem osi OX lub OY .



Obszar jest obszarem normalnym względem osi OX . Możemy go opisać:

$$D : \begin{cases} 0 \leq x \leq 2 \\ x \leq y \leq 4 - x. \end{cases}$$

Przykłady



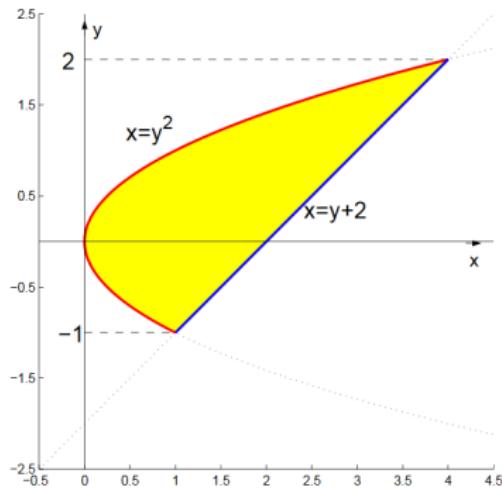
Obszar jest obszarem normalnym względem osi OX oraz OY . Możemy go opisać:
wzgl. OX :

$$\{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \sqrt{1 - x^2}\};$$

wzgl. OY :

$$\{(x, y) : 0 \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq \sqrt{1 - y^2}\}.$$

Przykłady



Obszar jest obszarem normalnym względem osi Oy . Możemy go opisać:

$$D : \begin{cases} -1 \leq y \leq 2 \\ y^2 \leq x \leq y + 2. \end{cases}$$

Zamiana całki podwójnej na iterowaną.

Założmy, że funkcje występujące pod znakiem całki są ograniczone i ciągłe w rozpatrywanych obszarach. Wtedy jeżeli obszar D jest obszarem normalnym względem osi OX (tzn. jest zbiorem punktów $M(x, y)$), których współrzędne spełniają (jednocześnie) nierówności: $a \leq x \leq b$, $h(x) \leq y \leq k(x)$, przy czym funkcje $h(x)$ i $k(x)$ są ciągłe w przedziale $\langle a, b \rangle$ oraz spełniają nierówność $h(x) < k(x)$ w przedziale (a, b)) danym nierównościami $a \leq x \leq b$, $\varphi(x) \leq y \leq \psi(x)$ to

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \int_a^b \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dy \right) dx .$$

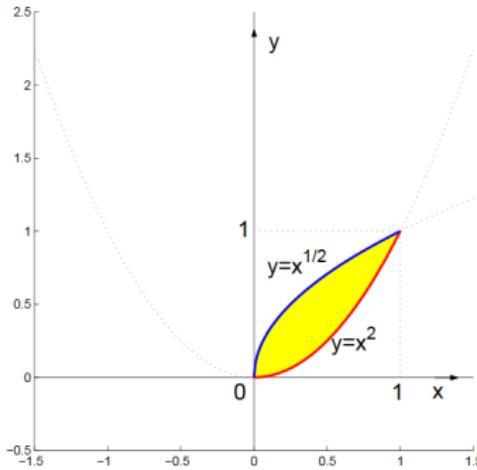
Jeżeli obszar D jest obszarem normalnym względem osi OY (tzn. jest zbiorem punktów $M(x, y)$, których współrzędne spełniają (jednocześnie) nierówności $l(y) \leq x \leq p(y)$, $c \leq y \leq d$, gdzie $l(y)$ i $p(y)$ są funkcjami ciągłymi w przedziale $c, d >$) danym nierównościami $\alpha(y) \leq x \leq \beta(y)$, $c \leq y \leq d$, to

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \int_c^d \left(\int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x, y) dx \right) dy .$$

Przykłady

Zamienić całkę podwójną $\iint_D f(x, y) dx dy$ na całkę iterowaną, jeżeli obszar D ograniczony jest krzywymi:

$$y = x^2, y^2 = x;$$



Przykłady

- ▶ Szukamy punktów wspólnych podanych krzywych: $x^2 = \sqrt{x}$
 $x^4 = x, x \geq 0$
 $x(x^3 - 1) = 0, x \geq 0$
 $x = 0 \vee x = 1,$
dla $x = 0$ mamy $y = 0$, dla $x = 1$ mamy $y = 1$.
- ▶ D jest obszarem normalnym względem osi OX ,
 $D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq \sqrt{x}\};$
- ▶ Stąd

$$\iint_D f(x, y) \, dxdy = \int_0^1 \left(\int_{x^2}^{\sqrt{x}} f(x, y) \, dy \right) dx.$$

Przykłady

- ▶ D jest również obszarem normalnym względem osi OY ,
 $D = \{(x, y) : 0 \leq y \leq 1, y^2 \leq x \leq \sqrt{y}\}$;
- ▶ Stąd

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_0^1 \left(\int_{y^2}^{\sqrt{y}} f(x, y) dx \right) dy.$$

Definicja. Obszar regularny na płaszczyźnie.

Sumę skończonej liczby obszarów normalnych (względem osi OX lub OY) o parami rozłącznych wnętrzach nazywamy **obszarem regularnym na płaszczyźnie**.

Niech obszar regularny D będzie sumą obszarów normalnych D_1, D_2, \dots, D_n o parami rozłącznych wnętrzach oraz niech funkcja f będzie całkowalna na tym obszarze. Wtedy

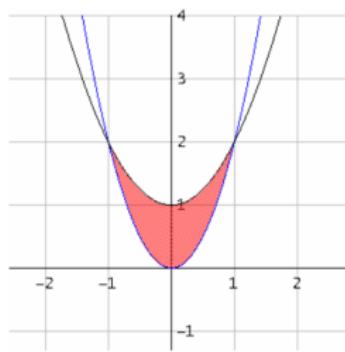
$$\iint_D f(x, y) \, dx \, dy =$$

$$\iint_{D_1} f(x, y) \, dx \, dy + \iint_{D_2} f(x, y) \, dx \, dy + \dots + \iint_{D_n} f(x, y) \, dx \, dy.$$

Przykład.

Obliczyć podane całki podwójne po zbiorach ograniczonych wskazanymi krzywymi:

- (a) $\iint_D dydx$, gdzie D jest obszarem ograniczonym krzywymi $y = 2x^2$, $y = x^2 + 1$.



Przykład.

- ▶ Obszar całkowania jest normalny względem osi OX :

$$D : \begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ 2x^2 \leq y \leq x^2 + 1 \end{cases}$$

- ▶ Stąd

$$\int_{-1}^1 \left(\int_{2x^2}^{x^2+1} dy \right) dx = \int_{-1}^1 \left(\frac{y^2}{2} \right)_{2x^2}^{x^2+1} dx = \int_{-1}^1 (1 - x^2) dx = \frac{4}{3}.$$

Przykład.

- Obszar całkowania jest regularny względem osi OY :

$$D_1 : \begin{cases} 0 \leq y \leq 1 \\ -\sqrt{\frac{y}{2}} \leq x \leq \sqrt{\frac{y}{2}} \end{cases}$$

$$D_2 : \begin{cases} 1 \leq y \leq 2 \\ -\sqrt{\frac{y}{2}} \leq x \leq -\sqrt{y-1} \end{cases}$$

$$D_3 : \begin{cases} 1 \leq y \leq 2 \\ \sqrt{y-1} \leq x \leq \sqrt{\frac{y}{2}} \end{cases}$$

Definicja.

Niech Δ i D będą obszarami na płaszczyznach Ouv i Oxy odpowiednio. Przekształceniem obszaru Δ w obszar D nazywamy funkcję $T : \Delta \rightarrow D$:

$$T(u, v) = (x, y), \text{ gdzie } x = \phi(u, v), y = \psi(u, v).$$

Definicja. Jakobian.

Jakobianem przekształcenia $T(u, v) = (\phi(u, v), \psi(u, v))$ nazywamy funkcję:

$$J(u, v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial \phi}{\partial v}(u, v) \\ \frac{\partial \psi}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial \psi}{\partial v}(u, v) \end{vmatrix}$$

Twierdzenie.

Jeżeli

- ▶ $T : \Delta \rightarrow D$, $T(u, v) = (\phi(u, v), \psi(u, v))$ przekształca wzajemnie jednoznacznie wnętrze obszaru Δ na wnętrze obszaru D ;
- ▶ funkcje ϕ, ψ mają ciągłe pochodne cząstkowe;
- ▶ funkcja $f(x, y)$ jest ciągła na D ;
- ▶ jakobian $J(u, v)$ jest różny od 0 wewnątrz obszaru Δ , to

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{\Delta} f(\phi(u, v), \psi(u, v)) |J(u, v)| du dv.$$

Specjalnym, ważnym przypadkiem przekształcenia płaskiego jest przekształcenie:

$$x = r \cos \Theta , \quad y = r \sin \Theta ,$$

które odwzorowuje płaszczyznę $O\varrho\Theta$ w płaszczyznę OXY.

Przekształcenie to odpowiada zamianie współrzędnych prostokątnych na współrzędne biegunowe.

Po przekształceniu obrazem prostej $\Theta = \alpha$ jest prosta $y = x \operatorname{tg} \alpha$ przy $\alpha \neq \frac{1}{2}\pi + k\pi$, a prosta $x = 0$ przy $\alpha = \frac{1}{2}\pi + k\pi$ (k -całkowite), natomiast obrazem prostej $r = r_0$ jest okrąg $x^2 + y^2 = r_0^2$

Przykład.

Obliczyć całkę niewłaściwą $\int_0^\infty e^{-x^2} dx$.

Całki tej nie da się obliczyć w ten sposób, w jaki obliczaliśmy dotychczas całki niewłaściwe ponieważ funkcji $F(x) = \int e^{-x^2} dx$ nie da się wyrazić przez znane nam funkcje elementarne.

Całka ta daje się łatwo obliczyć przez zastosowanie właściwości całek podwójnych.

Niech k_1 oznacza koło o środku w początku układu i promieniu u , k_2 niech oznacza koło o środku w początku układu i promieniu $u\sqrt{2}$ oraz niech k będzie kwadratem o środku w początku układu współrzędnych i bokach równoległych do osi współrzędnych, równych $2u$.

Biorąc pod uwagę, że $e^{-(x^2+y^2)} > 0$, na podstawie własności całek podwójnych, otrzymujemy:

$$\iint_{k_1} e^{-(x^2+y^2)} dx dy \leq \iint_k e^{-(x^2+y^2)} dx dy \leq \iint_{k_2} e^{-(x^2+y^2)} dx dy .$$

W skrajnych całkach wprowadźmy współrzędne biegunowe:
 $x = \varrho \cos \varphi$ $y = \varrho \sin \varphi$. Środkową całkę zamieniamy natomiast na iloczyn całek pojedynczych.

Wówczas otrzymujemy:

$$\begin{aligned} & \iint_{0 \leq \varrho \leq u; 0 \leq \varphi \leq 2\pi} \varrho \cdot e^{-(\varrho^2 \cos^2 \varphi + \varrho^2 \sin^2 \varphi)} d\varrho d\varphi = \\ &= \iint_{0 \leq \varrho \leq u; 0 \leq \varphi \leq 2\pi} e^{-\varrho^2} \cdot \varrho d\varrho d\varphi \leq \\ &\leq \int_{-u}^u e^{-x^2} dx \int_{-u}^u e^{-y^2} dy \leq \iint_{0 \leq \varrho \leq u\sqrt{2}; 0 \leq \varphi \leq 2\pi} e^{-\varrho^2} \varrho d\varrho d\varphi . \end{aligned}$$

Zamieniając skrajne całki na iloczyn całek pojedynczych, upraszczając wyrażenie środkowe i biorąc pod uwagę, że

$$\int_{-u}^u e^{-x^2} dx = \int_{-u}^u e^{-y^2} dy$$

mamy:

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^u e^{-\varrho^2} \varrho d\varrho \leq \left(\int_{-u}^u e^{-x^2} dx \right)^2 \leq \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{u\sqrt{2}} e^{-\varrho^2} \varrho d\varrho .$$

Ponieważ $\int e^{-\varrho^2} \varrho d\varrho = -\frac{1}{2}e^{-\varrho^2}$ oraz $\int_{-u}^u e^{-x^2} dx = 2 \int_0^u e^{-x^2} dx$ (ponieważ e^{-x^2} jest funkcją parzystą), otrzymujemy:

$$\pi(1 - e^{-u^2}) \leq 4 \left(\int_0^u e^{-x^2} dx \right)^2 \leq \pi(1 - e^{-2u^2}) ,$$

$$\frac{1}{4}\pi(1 - e^{-u^2}) \leq \left(\int_0^u e^{-x^2} dx \right)^2 \leq \frac{1}{4}\pi(1 - e^{-2u^2}) .$$

A skoro mamy do czynienia z wyrażeniami dodatnimi, to możemy nierówność pierwiastkować stronami, zatem

$$\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\sqrt{1-e^{-u^2}} \leq \int_0^u e^{-x^2} dx \leq \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\sqrt{1-e^{-2u^2}}.$$

Przechodząc do granicy przy u dążącym do nieskończoności i stosując twierdzenie o trzech funkcjach otrzymujemy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^u e^{-x^2} dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi},$$

ponieważ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{1-e^{-u^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{1-e^{-2u^2}} = 1.$$

Ostatecznie:

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi} .$$

Całka ta nazywa się *całką Poissona, całką Laplace'a lub całką Gaussa.*

Wobec parzystości funkcji e^{-x^2} mamy także:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi} .$$

Jak obliczamy całki podwójne? Np.

$$\begin{aligned}V &= \iint_{\{(x,y):x^2+y^2 \leq 1\}} (3 - 3x^2 - 3y^2) dx dy \\&= \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} (3 - 3x^2 - 3y^2) dy dx \\&= \int_{-1}^1 (3y - 3x^2y - y^3) \Big|_{y=-\sqrt{1-x^2}}^{y=\sqrt{1-x^2}} dx \\&= \int_{-1}^1 (6\sqrt{1-x^2} - 6x^2\sqrt{1-x^2} - 2(1-x^2)^{3/2}) dx \\&= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (6\sqrt{1-\sin^2 \theta} - 6\sin^2 \theta \sqrt{1-\sin^2 \theta} - 2(1-\sin^2 \theta)^{3/2}) \cos \theta d\theta \\&= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (6\cos \theta - 6\sin^2 \theta \cos \theta - 2\cos^3 \theta) \cos \theta d\theta \\&= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 4\cos^4 \theta d\theta \\&= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\frac{3}{2} + 2\cos 2\theta + \frac{1}{2}\cos 4\theta \right) d\theta \\&= \left[\frac{3}{2}\theta + \sin 2\theta + \frac{1}{8}\sin 4\theta \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{3\pi}{2}.\end{aligned}$$

Definicja całki podwójnej **Riemanna**.

Tak więc całka podwójna jest bezpośrednim uogólnieniem pojęcia zwykłej całki oznaczonej na przypadek funkcji dwóch zmiennych. Odgrywa ona ważną rolę przy definiowaniu różnych wielkości geometrycznych i fizycznych. Podajmy teraz ogólną **definicję całki podwójnej Riemanna**.

Ten **formalizm** przyda się do zrozumienia metod numerycznych dla całki podwójnej - analogicznych jak omawialiśmy przy całce (pojedynczej) Riemanna.

Niech w obszarze P określona będzie funkcja $f(x, y)$. Podzielimy obszar P siecią krzywych na skończoną ilość obszarów P_1, P_2, \dots, P_n o polach $|P_1|, |P_2|, \dots, |P_n|$.

W każdym z obszarów elementarnych P_i obierzmy dowolny punkt (ξ_i, η_i) , pomóżmy wartość funkcji w tym punkcie $f(\xi_i, \eta_i)$ przez pole $|P_i|$ obszaru i zsumujmy wszystkie iloczyny. Otrzymujemy sumę

$$\sigma = \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) |P_i|,$$

która będziemy nazywać *sumą całkową dla funkcji $f(x, y)$* w obszarze P . Oznaczmy przez λ największą ze średnic obszarów częściowych P_i .

Skończoną granicę I sumy całkowej σ przy $\lambda \rightarrow 0$ nazywamy całką podwójną funkcji $f(x, y)$ po obszarze P i oznaczamy symbolem:

$$I = \iint_P f(x, y) dP.$$

Funkcję mającą całkę nazywamy *funkcją całkowalną*.

Warunki istnienia całki podwójnej.

Funkcja całkowalna musi być ograniczona:

$$m \leq f(x, y) \leq M .$$

Wprowadźmy tzw. dolną i górną sumę Darboux:

$$s = \sum_{i=1}^n m_i |P_i| , \quad S = \sum_{i=1}^n M_i |P_i| ,$$

gdzie m_i i M_i oznaczają odpowiednio kresy dolny i górny wartości funkcji $f(x, y)$ w obszarze P_i . Przy danym sposobie podziału obszaru P na części, niezależnie od wyboru punktów (ξ_i, η_i) , spełnione są nierówności

$$s \leq \sigma \leq S .$$

Można tak dobrać wartości $f(\xi_i, \eta_i)$ dowolnie bliskie $m_i(M_i)$, a zatem sumę σ uczynić dowolnie bliską $s(S)$. W takim razie górną i dolna suma Darboux są odpowiednio kresem górnym i dolnym sum całkowych odpowiadających temu sposobowi podziału obszaru.

Dla sum Darboux możemy ustalić następujące własności:

Własność 1.

Przy dalszym podziale części P_i , otrzymanym przez dołączenie nowych krzywych podziału do krzywych starych, dolna suma Darboux nie maleje, a góra nie rośnie.

Własność 2.

Żadna dolna suma Darboux nie przewyższa żadnej sumy górnej, choćby różniącej się od drugiej sposobem podziału obszaru P .

I z tych własności korzysta się przy tworzeniu metod numerycznych...

Twierdzenie. *Na to, aby istniała całka podwójna, potrzeba i wystarcza, aby zachodził warunek:*

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} (S - s) = 0 ,$$

czyli przy innych oznaczeniach:

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n w_i |P_i| = 0 ,$$

gdzie w_i jest oscylacją $M_i - m_i$ funkcji $f(x, y)$ w obszarze częściowym P_i .

Własności funkcji całkowalnych i całek podwójnych.

Jak już podawaliśmy dla całek podwójnych po prostokącie, po innych obszarach mamy analogiczne własności:

1. Jeżeli wartość funkcji $f(x, y)$ całkowalnej w obszarze P zmienimy dowolnie wzdłuż jakiejś krzywej L o polu O , to otrzymana funkcja będzie również całkowalna w obszarze P , a jej całka będzie równa całce funkcji $f(x, y)$.

2. Jeżeli obszar P , w którym dana jest funkcja $f(x, y)$, został podzielony krzywą L (o polu O) na obszary P' , P'' , to z całkowalności funkcji $f(x, y)$ w całym obszarze P wynika jej całkowalność w obu częściach P' i P'' i odwrotnie.

Z całkowalności funkcji w obydwu obszarach P' i P'' wynika całkowalność w obszarze P . Przy tym

$$\iint_P f(x, y) dP = \iint_{P'} f(x, y) dP + \iint_{P''} f(x, y) dP .$$

3. Jeżeli pomnożymy funkcję $f(x, y)$ całkowalną w obszarze P przez stałą k , to otrzymana funkcja jest również całkowalna oraz

$$\iint_P kf(x, y) dP = k \iint_P f(x, y) dP .$$

4. Jeżeli w obszarze P są całkowalne funkcje $f(x, y)$ i $g(x, y)$, to całkowalne są także funkcje $f(x, y) \pm g(x, y)$, przy czym

$$\iint_P [f(x, y) \pm g(x, y)] dP = \iint_P f(x, y) dP \pm \iint_P g(x, y) dP .$$

5. Jeżeli całkowalne w obszarze P funkcje $f(x, y)$ i $g(x, y)$ spełniają nierówność $f(x, y) \leq g(x, y)$ to

$$\iint_P f(x, y) dP \leq \iint_P g(x, y) dP .$$

6. W przypadku całkowalności funkcji $f(x, y)$ całkowalna jest również funkcja $|f(x, y)|$ i zachodzi nierówność:

$$\left| \int_P f(x, y) dP \right| \leq \iint_P |f(x, y)| dP .$$

7. Jeśli całkowalna w obszarze P funkcja $f(x, y)$ spełnia nierówność:

$$m \leq f(x, y) \leq M ,$$

to

$$m |P| \leq \iint_P f(x, y) dP \leq M |P| .$$

Całki niewłaściwe.

Podobnie jak w przypadku całki pojedynczej można (i będzie to przydatne!!) zdefiniować całki wielokrotne niewłaściwe. Tak naprawdę już przy omawianiu splotu obrazów czy rozmycia gaussa napotkaliśmy tego typu obiekty - choć wtedy były przedstawiane jako całe iterowane, czyli można było to rozumieć w sensie całek pojedynczych niewłaściwych. Niestety - nie mamy czasu na ich omawianie... Omówią to prowadzący przedmioty bazujące na rachunku prawdopodobieństwa, a zastosowania np. na grafice komputerowej. Zainteresowani znajdą proste materiały np. [tutaj](#).

Równania różniczkowe.

Równaniem różniczkowym zwyczajnym rzędu pierwszego nazywamy równanie postaci

$$F(x, y, y') = 0$$

w którym y' występuje istotnie, pozostałe zaś argumenty, tzn. x i y mogą występować, lecz nie muszą.

Rozwiązaniem (całką) równania różniczkowego nazywamy każdą funkcję różniczkowaną w pewnym przedziale I .

$$\varphi = \varphi(x),$$

która spełnia dane równanie dla każdej wartości $x \in I$.

Rozwiązywanie równania różniczkowego.

Rozwiązaniem ogólnym (całką ogólną) równania różniczkowego nazywamy każdą funkcję postaci

$$y = \psi(x, C)$$

która dla każdej wartości C należącej do pewnego przedziału jest rozwiązaniem równania, jest to więc jednoparametrowa **rodzina** linii. Rozwiązanie szczególne (całką szczególną) równania różniczkowego otrzymujemy nadając parametrowi C pewną stałą wartość (należącą do jego dziedziny).

Równania różniczkowe opisują dynamikę zmian obiektu i są absolutną podstawą do opisu każdego zmiennego procesu - niekiedy badana są też wersje różnicowe, będące oparte o modele dyskretnie.

Rząd równania różniczkoowego to rząd najwyższej pochodnej funkcji niewiadomej występujący istotnie w równaniu.
Np.

1. $\frac{dy}{dx} = x^2 + y^2$ RRZ rzędu pierwszego,
2. $\frac{d^2x}{dt^2} + 3xt + 2x = 4$ RRZ rzędu drugiego,
3. $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$ równanie różniczkowe cząstkowe = funkcja niewiadoma zależy od więcej niż jednej zmiennej...

Podany przykład jest klasycznym równaniem **o zmiennych rozdzielonych**, stanowiących podstawową klasę równań...

Równaniem różniczkowym o zmiennych rozdzielonych nazywamy równanie postaci

$$y'(x) = f_1(x)f_2(y) .$$

Twierdzenie. *Niech funkcje f_1 i f_2 będą ciągłe odpowiednio dla $a < x < b$ i $c < y < d$, przy czym funkcja f_2 nigdzie nie jest równa零. Wówczas przez każdy punkt (x, y) prostokąta $Q = \{(x, y) : a < x < b, c < y < d\}$ przechodzi dokładnie jedno rozwiązanie powyższego równania.*

Przykład.

Rozwiążemy równanie $y' = (2x - 1)y$ (czyli: $\frac{dy}{dx} = (2x - 1)y$).

Możemy postąpić w następujący sposób: założymy, że $y \neq 0$. Wówczas nasze równanie możemy napisać w postaci (rozdzielić zmienne)

$$\frac{dy}{y} = (2x - 1)dx .$$

Całkując obie strony otrzymujemy

$$\ln |y| = x^2 - x + C , \quad (C = \text{const.})$$

Stąd

$$y = \tilde{C}e^{x^2-x} , \quad (\text{gdzie } \tilde{C} = \pm e^C) .$$

Zauważmy, że dla $\tilde{C} = 0$ otrzymujemy z powyższego wzoru całkę $y = 0$ rozpatrywanego równania. Zatem całka ogólna tego równania ma postać

$$y = Ce^{x^2-x} ,$$

gdzie C jest stałą dowolną.

Rozwiązywanie równań różniczkowych.

Istnieje wiele typów równań różniczkowych i do części z nich (ale nie wszystkich!) istnieją algorytmy postępowania pozwalające na ich rozwiązanie. Nie mamy szans ich tu omówić...

Poza tym interesuje nas w informatyce głównie sytuacja, gdy mamy znaleźć **jedną** funkcję spełniającą równanie różniczkowe i pewien dodatkowy warunek, który powinien zapewnić **jedyność** rozwiązania. Na ogół wystarczy podać tzw. warunek początkowy, czyli wartość poszukiwanej funkcji w pewnym (początkowym) punkcie (to nie zawsze gwarantuje istnienie i jedyność, ale nie możemy tu rozwijać problemu - zakładając będziemy, że f jest ciągła i spełnia warunek Lipschitz'a ze względu na drugi argument).

Zagadnieniem Cauchy'ego nazywamy równanie różniczkowe z zadanym warunkiem początkowym:

$$x'(t) = f(t, x(t)) \quad , \quad x(0) = x_0 \quad , \quad t \in [a, b].$$

Rozwiązań przybliżone.

Istnieje wiele metod **rozwiązywania przybliżonego** zagadnienia Cauchy'ego - bez stosowania całek nieoznaczonych. Między innymi:

(1) metody różnicowe (numeryczne) (zastępowanie pochodnej przez ilorazy różnicowe i stąd schematy różnicowe),

(2) metody numeryczne bazujące na tzw. postaci całkowej zagadnienia Cauchy'ego

$$x(t) = x_0 + \int_a^b f(s, x(s)) \, ds$$

i obliczane za pomocą całkowania numerycznego (materiał można znaleźć na mojej stronie),

(3) analityczne metody przybliżone np. rozwiązywanie metodą kolejnych przybliżeń (konsekwencja twierdzenia Banacha o kontrakcji), czy metodą szeregów potęgowych (o ile rozwiązania są analityczne - może zdążeć omówić przykłady??).

Metoda szeregow potęgowych Frobeniusa.

ad 3) Analityczna metoda przybliżona. Szukamy rozwiązania y w postaci sumy szeregu potęgowego:

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot t^n.$$

Podstawiamy szereg do zagadnienia początkowego:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \cdot a_{n+1} \cdot t^n = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n \cdot t^{n-1} = y'(t) = -y(t) = -\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot t^n.$$

Stąd metoda prowadzi do ciągu zadanego rekurencyjnie (obliczamy kolejne współczynniki tego szeregu):

$$\begin{cases} a_{n+1} = -\frac{1}{n+1} \cdot a_n, \\ a_0 = 1. \end{cases}$$

Rozwiążujemy równanie rekurencyjne

$$a_n = (-1)^n \cdot \frac{1}{n!}.$$

Ostatecznie mamy rozwiązanie:

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot t^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \cdot t^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-t)^n}{n!} = e^{-t}.$$

Metody przybliżone.

Metody przybliżonego całkowania zagadnień początkowych można podzielić na **dwie** istotnie różne klasy.

Pierwsza, rzadziej używana w rachunku numerycznym, jest klasą metod zmierzających do wyznaczenia jakiejś **analitycznej postaci rozwiązania**, np. rozwinięcia w szereg potęgowy czy w szereg Fouriera.

Metody tego rodzaju mają dwie istotne wady. Stosują się do bardzo wąskiej klasy zadań, a otrzymane szeregi bywają bardzo **wolno zbieżne**. Ponadto łatwo zauważać, że rachunek numeryczny przy wyznaczaniu przybliżeń takich analitycznych postaci spełnia w gruncie rzeczy mniej istotną, drugorzędną rolę.

Metody różnicowe.

ad 2). Drugą, bardziej uniwersalną klasę metod polegającą na tablicowaniu poszukiwanej funkcji stanowi tzw. klasa **metod różnicowych**.

Wyznaczają one jedynie **przybliżenia wartości rozwiązań** $y(x_i)$ w pewnych punktach x_i należących do przedziału całkowania $[a, b]$. Tutaj będziemy się zajmowali przypadkiem, w którym $x_i = a + ih$ dla $i = 0, 1, \dots, N$, gdzie wielkość $h = \frac{b-a}{N}$ nazywamy *krokiem całkowania*.

Główny postulat jaki muszą spełniać metody różnicowe, to zbieżność wyznaczanych przez nie przybliżeń $y_i = y_i(h)$, tzn. $y_i(h) \rightarrow y(x)$ przy $h \rightarrow 0$ dla każdego ustalonego $x = a + ih$.

Jest to oczywiście jedynie 'teoretyczna' własność metody. Realizując ją numerycznie możemy uzyskać przybliżenie rozwiązania jedynie z określona skońzoną dokładnością.

Klasy metod różnicowych.

Będziemy rozważali dwie klasy metod różnicowych.

Metody jednokrokowe konstruujące ciąg przybliżeń $y_i \approx y(x_i)$ dla $i = 0, 1, \dots, N$ zgodnie ze wzorem

$$y_{i+1} = y_i + h\Phi_f(x_i, y_i; h), \quad i = 0, 1, \dots, N - 1 \quad (1a)$$

$$y_0 = y_a \quad (1b)$$

gdzie funkcja $\Phi = \Phi_f$ może zależeć od f nieliniowo. Druga klasą będą liniowe metody wielokrokowe.

Najprostszą z nich jest metoda Eulera...

Skąd takie wzory?

Niech $y = y(x)$ będzie rozwiązaniem równania w dziedzinie $[a, b]$. Dla ustalonego punktu x in $[a, b]$ i dla małych wartości h pochodna funkcji $y(x)$ jest dana przez $y'(x)$ i może być przybliżana przez **iloraz różnicowy**

$$y'(x) \approx \frac{y(x+h) - y(x)}{(x+h) - x}$$

I to właśnie stanowi podstawę metody Eulera przybliżania $y(x+h)$ następująco:

$$y(x+h) \approx y(x) + hy'(x)$$

Czyli

$$y(x+h) \approx y(x) + hf(x, y(x))$$

co zapisujemy jako

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$$

Wyraz y_{n+1} daje nam przybliżenie wartości $y(x_{n+1})$, gdzie $x_n = x_0 + nh$ są punktami węzłowymi w przedziale $[a, b]$.

Zmniejszając krok h ulepszamy przybliżanie rozwiązania...

Metoda łamanych Eulera.

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(0) = w_0 \\ y : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}. \end{cases}$$

Dzielimy przedział $[0, T]$ na N równych części:

$$h = \frac{T}{N} \quad (\text{tzw. } \textit{długość kroku}), \quad t_i = i \cdot h,$$

$$(i = 0, 1, \dots, N), \quad [0, T] = \bigcup_{i=1}^N [t_{i-1}, t_i].$$

Schemat Eulera.

Kolejno obliczamy:

$$w_{i+1} = w_i + h \cdot f(t_i, w_i), \quad i = 0, 1, \dots, (N-1).$$

Rozwiążanie przybliżone:

$$\text{łamana } \left(\underbrace{(t_0, w_0), (t_1, w_1), \dots, (\underbrace{t_N, w_N})}_{=(0, y(0))} \right).$$

Metoda Eulera mimo swej prostoty jest już rzadko stosowana ze względu na bardzo wolną zbieżność. Istnieją dwie proste, szybciej zbieżne jej modyfikacje takie, że $e_i = e_i(h) = \mathcal{O}(h^2)$

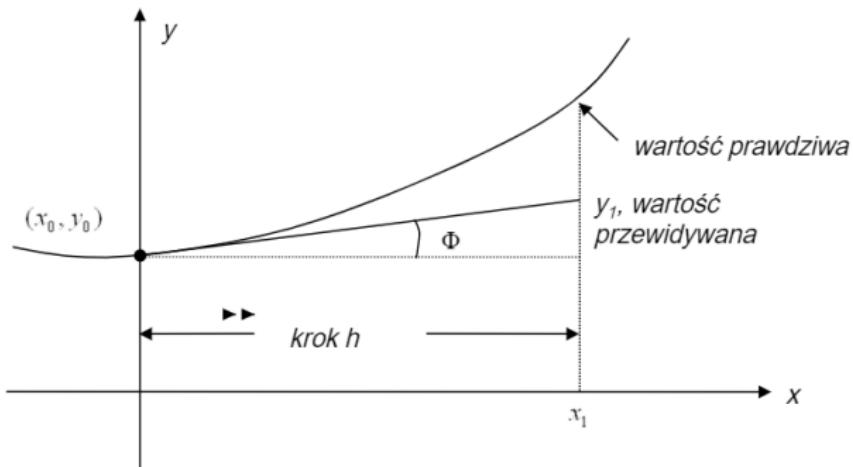
- ▶ 'ulepszona metoda Eulera' (metoda Heuna)

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{2}h(f(x_i, y_i) + f(x_i + h, y_i + hf(x_i, y_i)))$$

- ▶ zmodyfikowana metoda Eulera

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}hf(x_i, y_i))$$

Metoda Eulera ma prostą interpretację geometryczną.
Rozpoczynając od punktu (a, y_a) leżącego na krzywej całkowej będącej rozwiązaniem zagadnienia początkowego posuwamy się tak długo po stycznych do wykresów całek równania różniczkowego przechodzących przez kolejno otrzymywane punkty (x_i, y_i) aż osiągniemy punkt odciętej o h większej niż początkowy punkt na danej stycznej.



Metody Rungego–Kutty

Klasa metod Rungego–Kutty (RK) jest zdefiniowana przez rodzinę funkcji Φ postaci

$$\Phi(x, y; h) = \sum_{i=1}^r c_i k_i \quad (2a)$$

$$k_i = k_i(x, y; h) \quad (2b)$$

$$= f\left(x + h \sum_{j=1}^r b_{ij}, y + h \sum_{j=1}^r b_{ij} k_j\right) \quad \text{dla } i = 1, 2, \dots, r$$

zależnych parametrycznie od wielkości $c_i, b_{ij}, i, j = 1, 1, \dots, r$.

Jeżeli wszystkie $b_{ij} = 0$ dla $j \geq i, i = 1, 2, \dots, r$ to równania definiujące wielkości k_i (przy ustalonych x i y) redukują się do postaci

$$k_i = f\left(x + h \sum_{j=1}^{i-1} b_{ij}, y + h \sum_{j=1}^{i-1} b_{ij} k_j\right) \quad \text{dla } 1, 2, \dots, r. \quad (3)$$

Stanowią więc układ zależności rekurencyjnych, liniowych ze względu na kolejne k_i . Ten typ metod RK nosi nazwę *otwartych*.

Przy ustalonym r koszt jednego kroku metody (tzn. obliczenia kolejnego y_i) jest równy kosztowi obliczenia r wartości funkcji f i nie zależy od wyboru parametrów c_i, b_{ij} . Wielkości te dobiera się tak, aby przy ustalonym r rząd metody był możliwie najwyższy, wtedy bowiem metoda jest najbardziej efektywna. Można pokazać, że maksymalny rząd ($p(r)$) metody RK korzystającej z r wartości funkcji jest równy r dla $r = 1, 2, 3, 4$ oraz, że dla dowolnych r jest $p(r) \leq r$.

Klasyczna metoda RK.

Najczęściej stosowana jest tzw. klasyczna metoda RK, czyli metoda czwartego rzędu określona wzorami

$$\Phi(x, y; h) = \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \quad (4a)$$

$$k_1 = f(x, y) \quad (4b)$$

$$k_2 = f\left(x + \frac{1}{2}h, y + \frac{1}{2}hk_1\right) \quad (4c)$$

$$k_3 = f\left(x + \frac{1}{2}h, y + \frac{1}{2}hk_2\right) \quad (4d)$$

$$k_4 = f(x + h, y + hk_3) \quad (4e)$$

Warto spojrzeć do matematycznych podstaw tej metody - pytanie do wszystkich: skąd takie, a nie inne wartości k_i ? O tych i innych, bardziej zaawansowanych, metodach - na przedmiocie "Metody numeryczne" ...

Tajne/poufne.

- ▶ Metoda trapezów obliczania numerycznego całek. Zilustruj zasadę jej działania odpowiednim rysunkiem. Jak metoda ta ma się do definicji całki Riemanna?
- ▶ Wyjaśnij krótko różnice pomiędzy funkcją pierwotną, a całką nieoznaczoną.
- ▶ *Metoda trapezów obliczania numerycznego całek. Z jaką metodą numerycznego rozwiązywanie równań różniczkowych wiąże się ta metoda?
- ▶ Postać całkowa reszty we wzorze Taylora. Zastosowanie.
- ▶ *Równanie różniczkowe $y' = 3y$ rozwiąż za pomocą metody szeregów potęgowych (bez szczegółowych obliczeń omówić metodę).