Wstęp do rachunku prawdopodobieństwa
2. Prawdopodobieństwo geometryczne. Niezależność zdarzeń.

Dla dowolnego zbioru $A \subset \mathbb{R}^n$ przez $\lambda(A)$ oznaczamy **miarę** zbioru A (tzn. jego długość, pole, objętość, etc. w zależności od wymiaru przestrzeni $\mathbb{R}^n$). Dla zbioru $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ o skończonej mierze, prawdopodobieństwo zdarzenia $A \subseteq \Omega$ nazywamy **prawdopodobieństwem geometrycznym** i definiujemy jako:

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\lambda(A)}{\lambda(\Omega)}.$$

Definicja. *Zbiór zdarzeń* $\{A_i : i \in I\}$ *jest* **niezależny** *jeśli dla każdego (skończonego)* $J \subseteq I$ *mamy*

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{j\in J} A_j\right) = \prod_{j\in J} \mathbb{P}\left(A_j\right).$$

W szczególności zdarzenia A *i* B *są niezależne jeśli* $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)$.

Dodatek A. Zadania na ćwiczenia

Zadanie A.1. Rzucamy trzy razy kostką. Przez A oznaczamy zdarzenie, że w pierwszym rzucie wypadła parzysta liczba oczek, przez B, że w drugim rzucie wypadła nieparzysta liczba oczek, a przez C, że w każdym z trzech rzutów otrzymaliśmy inny wynik.

(a) Czy zdarzenia A i B są niezależne?
(b) Czy zdarzenia A i C są niezależne?
(c) Czy zdarzenia A, B i C są niezależne?

Zadanie A.2. Na odcinku o długości 10 wybrano losowo dwa punkty. Jakie jest prawdopodobieństwo zdarzenia D_3, że odległość między nimi jest równa 3, a jakie zdarzenia, $D_{>3}$, że jest ona większa niż 3?

Zadanie A.3. W przedziale $[0, 1]$ wybrano losowo dwa punkty, które podzieliły go na 3 odcinki. Jakie jest prawdopodobieństwo zdarzenia A, że z tych odcinków da się zbudować trójkąt?

Zadanie A.4. W sesji student zdaje dwa egzaminy, z analizy i algebry. Szansa, że student zda egzamin z analizy wynosi 0,8, że zda algebrę 0,7. Przyjmując mało realistyczne założenie, że zdarzenia te są od siebie niezależne, znajdź prawdopodobieństwo, że student:

(a) zda analizę, a obleje algebrę?
(b) zda oba egzaminy?
(c) zda tylko jeden egzamin?
(d) nie zda żadnego egzaminu?

Zadanie A.5. Wybieramy losowo liczbę ze zbioru $\{1, \ldots, 1800\}$. Niech A_k będzie zdarzeniem, że dzieli się ona przez k.

(a) Czy zdarzenia A_5 i A_6 są niezależne?
(b) Czy zdarzenia A_6 i A_9 są niezależne?

Dodatek B. Zadania domowe

Zadanie B.1. W kwadracie z brzegiem o boku o długości jeden wybrano jeden punkt. Ile wynosi prawdopodobieństwo, że znajduje się on

(a) na pewnej przekątnej?
(b) w wierzchołku kwadratu?
(c) w odległości co najwyżej 1/2 od środka kwadratu?

Zadanie B.2. Z odcinka $[0, 8]$ wybrano dwa punkty. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, że środek odcinka, który tworzą te dwa punkty należy do odcinka $[2, 4]$. **Uwaga:** *Środkiem odcinka o końcach* x *i* y *jest (oczywiście!) punkt* $(x + y)/2$.

Zadanie B.3. Rzucamy 4 razy monetą. Czy zdarzenie A, że w pierwszym rzucie wypadł orzeł i zdarzenie B, że orzeł wypadł dokładnie 2 razy, są niezależne?

Zadanie B.4. Z talii 52 kartowej wyciągamy dwie karty. Niech A oznacza zdarzenie, że obie karty to kiery, B będzie zdarzeniem, że wyciągnęliśmy króla i damę, a C, że nie wyciągnęliśmy żadnej blotki (blotki to karty o wartościach pomiędzy 2 i 9).

(a) Czy zdarzenia A i B są niezależne?
(b) Czy zdarzenia A, B i C są niezależne?

Zadanie B.5. Przerwanie obwodu elektrycznego następuje w przypadku zepsucia się elementu K_1 lub dwóch elementów K_2 i K_3, które psują sią niezależnie od siebie z prawdopodobieństwami odpowiednio 0.3, 0.2 i 0.1. Oblicz prawdopodobieństwo przerwania obwodu.

Zadanie B.6. Każdy spośród 100 pracowników Wydziału Matematyki i Informatyki przychodzi do pracy w losowym momencie między godziną 8:00 a 9:00. Jakie jest prawdopodobieństwo, że o godzinie 8:15 w pracy jest dokładnie 25 pracowników?

Zadanie B.7. Pociąg PKP "Losowy Wicher" ma przyjechać na stację Poznań Główny o godzinie 12.00. Gosia nie chce się spóźnić na pociąg, więc przychodzi na peron w losowym momencie między godziną 11.00 a 12.00. PKP działa jak działa, więc pociąg przyjeżdża w losowym momencie między godziną 12.00 a 13.00. Wyznacz prawdopodobieństwo zdarzenia, że

(a) Gosia czekała na pociąg dokładnie 15 minut (przyszła dokładnie 15 minut przed przyjazdem pociągu).
(b) Gosia czekała na pociąg co najmniej 15 minut?

Zadanie B.8. (Paradoks Bertranda) Na okręgu o promieniu 1 skonstruowano losowo cięciwę AB. Jaka jest szansa, że zajdzie zdarzenie A – losowo wybrana cięciwa jest dłuższa niż bok trójkąta równobocznego wpisanego w ten okrąg? Wyznacz prawdopodobieństwo zdarzenia A przyjmując za zdarzenie elementarne:

(a) wybór kąta środkowego α opartego na cięciwie AB;
(b) odległość środka skonstruowanej cięciwy od środka okręgu;
(c) wybór dowolnego punku wewnątrz koła (wybór środka cięciwy).

Dodatek C. Odpowiedzi do zadań domowych

B.1. (a) 0, (b) 0, (c) $\pi/4$

B.2 3/8

B.3 $\mathbb{P}(A) = 1/2$, $\mathbb{P}(B) = 3/8$, $\mathbb{P}(A \cap B) = 3/16$

B.4 (a) nie, (b) nie

B.5 0,314

B.6 $\binom{100}{25}\left(\frac{1}{4}\right)^{25}\left(\frac{3}{4}\right)^{75}$

B.7 (a) 0, (b) 31/32

B.8 Przykład 3, str. 39