Matematyka dyskretna
4. Schematy wyboru

12.11.2020

Zadanie

Ile jest możliwych wyników 20 *losowań jednej karty z talii* 52 *kart (kolejność losowań istotna), w których*

a) *karty mogą się powtarzać (losowania ze zwracaniem)?*

Z jakiego schematu wyboru korzystamy?

Ile jest możliwych wyników?

Z jakiego schematu wyboru korzystamy?

Wariacja z powtórzeniami

Ile jest możliwych wyników?

Z jakiego schematu wyboru korzystamy?

Wariacja z powtórzeniami

Ile jest możliwych wyników?

52^{20}

Zadanie

Ile jest możliwych wyników 20 *losowań jednej karty z talii* 52 *kart (kolejność losowań istotna), w których*

b) *karty nie mogą się powtarzać (losowania bez zwracania)?*

Z jakiego schematu wyboru korzystamy?

Ile jest możliwych wyników?

Z jakiego schematu wyboru korzystamy?

Wariacja bez powtórzeń

Ile jest możliwych wyników?

Z jakiego schematu wyboru korzystamy?

Wariacja bez powtórzeń

Ile jest możliwych wyników?

$(52)_{20} = 52 \cdot 51 \cdot \ldots \cdot 33$

Zadanie

Ile jest możliwych wyników 20 *losowań jednej karty z talii* 52 *kart (kolejność losowań istotna), w których*

c) *karty mogą się powtarzać i otrzymaliśmy dokładnie 5 kierów?*

Z jakiego schematu wyboru korzystamy?

Ile jest możliwych wyników?

Z jakiego schematu wyboru korzystamy?

Wariacja z powtórzeniami (wybór kierów i pozostałych kart)

Ile jest możliwych wyników?

Z jakiego schematu wyboru korzystamy?

Wariacja z powtórzeniami (wybór kierów i pozostałych kart)
Kombinacja bez powtórzeń (miejsca na kiery)

Ile jest możliwych wyników?

Z jakiego schematu wyboru korzystamy?

Wariacja z powtórzeniami (wybór kierów i pozostałych kart)
Kombinacja bez powtórzeń (miejsca na kiery)

Ile jest możliwych wyników?

$13^5 \cdot 39^{15} \cdot \binom{20}{5}$ (Stosujemy prawo mnożenia)

Zadanie

Ile jest możliwych wyników 20 *losowań jednej karty z talii* 52 *kart (kolejność losowań istotna), w których*

d) *karty nie mogą się powtarzać i otrzymaliśmy dokładnie 5 kierów?*

Z jakiego schematu wyboru korzystamy?

Ile jest możliwych wyników?

Z jakiego schematu wyboru korzystamy?

Wariacja bez powtórzeń (wybór kierów i pozostałych kart)

Ile jest możliwych wyników?

Z jakiego schematu wyboru korzystamy?

Wariacja bez powtórzeń (wybór kierów i pozostałych kart)
Kombinacja bez powtórzeń (miejsca na kiery)

Ile jest możliwych wyników?

Z jakiego schematu wyboru korzystamy?

Wariacja bez powtórzeń (wybór kierów i pozostałych kart)
Kombinacja bez powtórzeń (miejsca na kiery)

Ile jest możliwych wyników?

$(13)_5 \cdot (39)_{15} \cdot \binom{20}{5}$ (Stosujemy prawo mnożenia)

Zadanie

Na ile sposobów możemy umieścić 10 nierozróżnialnych kul w 20 rozróżnialnych urnach, jeśli

a) *każda urna może zawierać co najwyżej jedną kulę?*

Z jakiego schematu wyboru korzystamy?

Ile jest możliwych wyników?

Z jakiego schematu wyboru korzystamy?

Kombinacja bez powtórzeń (wybieramy zbiór urn, do których trafiają kule)

Ile jest możliwych wyników?

Z jakiego schematu wyboru korzystamy?

Kombinacja bez powtórzeń (wybieramy zbiór urn, do których trafiają kule)

Ile jest możliwych wyników?

$\binom{20}{10}$

Zadanie

Na ile sposobów możemy umieścić 10 nierozróżnialnych kul w 20 rozróżnialnych urnach, jeśli

b) *każda urna może zawierać dowolną liczbę kul?*

Z jakiego schematu wyboru korzystamy?

Ile jest możliwych wyników?

Z jakiego schematu wyboru korzystamy?

Kombinacje z powtórzeniami (wybieramy multizbiór urn, do których trafiają kule)

Ile jest możliwych wyników?

Z jakiego schematu wyboru korzystamy?

Kombinacje z powtórzeniami (wybieramy multizbiór urn, do których trafiają kule)

Ile jest możliwych wyników?

$\binom{10+20-1}{10} = \binom{29}{10}$

Zadanie

Na ile sposobów możemy umieścić 10 rozróżnialnych kul w 20 rozróżnialnych urnach, jeśli

a) *każda urna może zawierać co najwyżej jedną kulę?*

Z jakiego schematu wyboru korzystamy?

Ile jest możliwych wyników?

Z jakiego schematu wyboru korzystamy?

Wariacja bez powtórzeń (wybieramy ciąg różnych urn, do których trafiają kule)

Ile jest możliwych wyników?

Z jakiego schematu wyboru korzystamy?

Wariacja bez powtórzeń (wybieramy ciąg różnych urn, do których trafiają kule)

Ile jest możliwych wyników?

$(20)_{10}$

Zadanie

Na ile sposobów możemy umieścić 10 rozróżnialnych kul w 20 rozróżnialnych urnach, jeśli

b) *każda urna może zawierać dowolną liczbę kul?*

Z jakiego schematu wyboru korzystamy?

Ile jest możliwych wyników?

Z jakiego schematu wyboru korzystamy?

Wariacje z powtórzeniami (wybieramy ciąg urn, do których trafiają kule)

Ile jest możliwych wyników?

Z jakiego schematu wyboru korzystamy?

Wariacje z powtórzeniami (wybieramy ciąg urn, do których trafiają kule)

Ile jest możliwych wyników?

20^{10}

Zadanie

Na ile sposobów możemy umieścić 30 nierozróżnialnych kul w 20 rozróżnialnych urnach, jeśli

a) *pierwsza urna ma zawierać co najmniej 2 kule?*

Z jakiego schematu wyboru korzystamy?

Jak poradzić sobie z warunkiem, że pierwsza urna ma zawierać co najmniej 2 kule?

Ile jest możliwych wyników?

Z jakiego schematu wyboru korzystamy?

Kombinacje z powtórzeniami (wybieramy multizbiór urn, do których trafiają kule)

Jak poradzić sobie z warunkiem, że pierwsza urna ma zawierać co najmniej 2 kule?

Ile jest możliwych wyników?

Z jakiego schematu wyboru korzystamy?

Kombinacje z powtórzeniami (wybieramy multizbiór urn, do których trafiają kule)

Jak poradzić sobie z warunkiem, że pierwsza urna ma zawierać co najmniej 2 kule?

Możemy na początku wrzucić dwie kule do pierwszej urny, a potem zastanowić się nad rozmieszczeniem pozostałych 28 kul.

Ile jest możliwych wyników?

Z jakiego schematu wyboru korzystamy?

Kombinacje z powtórzeniami (wybieramy multizbiór urn, do których trafiają kule)

Jak poradzić sobie z warunkiem, że pierwsza urna ma zawierać co najmniej 2 kule?

Możemy na początku wrzucić dwie kule do pierwszej urny, a potem zastanowić się nad rozmieszczeniem pozostałych 28 kul.

Ile jest możliwych wyników?

$\binom{28+20-1}{28} = \binom{47}{28}$

Zadanie

Na ile sposobów możemy umieścić 30 nierozróżnialnych kul w 20 rozróżnialnych urnach, jeśli

b) *każda urna ma zawierać co najmniej jedną kulę?*

Z jakiego schematu wyboru korzystamy?

Jak poradzić sobie z warunkiem, że każda urna ma zawierać co najmniej jedną kulę?

Ile jest możliwych wyników?

Z jakiego schematu wyboru korzystamy?

Kombinacje z powtórzeniami (wybieramy multizbiór urn, do których trafiają kule)

Jak poradzić sobie z warunkiem, że każda urna ma zawierać co najmniej jedną kulę?

Ile jest możliwych wyników?

Z jakiego schematu wyboru korzystamy?

Kombinacje z powtórzeniami (wybieramy multizbiór urn, do których trafiają kule)

Jak poradzić sobie z warunkiem, że każda urna ma zawierać co najmniej jedną kulę?

Możemy na początku wrzucić po jednej kuli do każdej urny, a potem zastanowić się nad rozmieszczeniem pozostałych 10 kul.

Ile jest możliwych wyników?

Z jakiego schematu wyboru korzystamy?

Kombinacje z powtórzeniami (wybieramy multizbiór urn, do których trafiają kule)

Jak poradzić sobie z warunkiem, że każda urna ma zawierać co najmniej jedną kulę?

Możemy na początku wrzucić po jednej kuli do każdej urny, a potem zastanowić się nad rozmieszczeniem pozostałych 10 kul.

Ile jest możliwych wyników?

$\binom{10+20-1}{10} = \binom{29}{10}$

Zadanie

Na ile sposobów możemy umieścić 30 rozróżnialnych kul w 20 rozróżnialnych urnach, jeśli

a) *pierwsza urna ma zawierać co najmniej 2 kule?*

Z jakiego schematu wyboru korzystamy?

Jak poradzić sobie z warunkiem, że pierwsza urna ma zawierać co najmniej 2 kule?

Ile jest możliwych wyników?

Z jakiego schematu wyboru korzystamy?

Wariacje z powtórzeniami (wybieramy ciąg urn, do których trafiają kule)

Jak poradzić sobie z warunkiem, że pierwsza urna ma zawierać co najmniej 2 kule?

Ile jest możliwych wyników?

Z jakiego schematu wyboru korzystamy?

Wariacje z powtórzeniami (wybieramy ciąg urn, do których trafiają kule)

Jak poradzić sobie z warunkiem, że pierwsza urna ma zawierać co najmniej 2 kule?

Możemy od wszystkich rozmieszczeń odjąć te, w których pierwsza urna zawiera dokładnie 0 lub 1 kulę.

Ile jest możliwych wyników?

Z jakiego schematu wyboru korzystamy?

Wariacje z powtórzeniami (wybieramy ciąg urn, do których trafiają kule)

Jak poradzić sobie z warunkiem, że pierwsza urna ma zawierać co najmniej 2 kule?

Możemy od wszystkich rozmieszczeń odjąć te, w których pierwsza urna zawiera dokładnie 0 lub 1 kulę.

Ile jest możliwych wyników?

$20^{30} - 19^{30} - 30 \cdot 19^{29}$

Zadanie

Na ile sposobów możemy umieścić 30 rozróżnialnych kul w 20 rozróżnialnych urnach, jeśli

b) *każda urna ma zawierać co najmniej jedną kulę?*

Zadanie

Na ile sposobów możemy umieścić 50 rozróżnialnych kul po 10 w 5 urnach, jeśli

a) *urny są rozróżnialne?*

Z jakiego schematu wyboru korzystamy?

Ile jest możliwych wyników?

Z jakiego schematu wyboru korzystamy?

Permutacje z powtórzeniami (uporządkowane podziały zbioru kul na 5 podzbiorów o mocy 10)

Ile jest możliwych wyników?

Z jakiego schematu wyboru korzystamy?

Permutacje z powtórzeniami (uporządkowane podziały zbioru kul na 5 podzbiorów o mocy 10)

Ile jest możliwych wyników?

$\binom{50}{10}\binom{40}{10}\binom{30}{10}\binom{20}{10}\binom{10}{10} = \frac{50!}{10!10!10!10!10!}$

Zadanie

Na ile sposobów możemy umieścić 50 rozróżnialnych kul po 10 w 5 urnach, jeśli

b) *urny są nierozróżnialne?*

Jaki jest związek pomiędzy takimi rozmieszczeniami, a tymi z podpunktu a)?

Jaki jest związek pomiędzy takimi rozmieszczeniami, a tymi z podpunktu a)?

Załóżmy, że umieściliśmy 50 rozróżnialnych kul w 5 nierozróżnialnych urnach, po 10 kul w każdej urnie. Jeśli następnie ponumerujemy urny liczbami od 1 do 5, to otrzymamy rozmieszczenie 50 rozróżnialnych kul w 5 rozróżnialnych urnach, po 10 kul w każdej.

Na ile sposobów możemy ponumerować 5 urn liczbami od 1 do 5?

Na ile sposobów możemy ponumerować 5 urn liczbami od 1 do 5?
5!

Na ile sposobów możemy ponumerować 5 urn liczbami od 1 do 5?
5!

Zatem:
(Liczba rozmieszczeń kul w nierozróżnialnych urnach)*5!=(Liczba rozmieszczeń w rozróżnialnych urnach)

Na ile sposobów możemy ponumerować 5 urn liczbami od 1 do 5?
5!

Zatem:
(Liczba rozmieszczeń kul w nierozróżnialnych urnach)*5!=(Liczba rozmieszczeń w rozróżnialnych urnach)

Ostatecznie:
Liczba rozmieszczeń 50 rozróżnialnych kul w 5 nierozróżnialnych urnach, po 10 kul w każdej urnie to:

$$\frac{1}{5!}\binom{50}{10}\binom{40}{10}\binom{30}{10}\binom{20}{10}\binom{10}{10} = \frac{50!}{5!10!10!10!10!10!}$$

Zadanie

Wyznacz liczbę całkowitoliczbowych rozwiązań równania:

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_{10} = 30, \quad \textit{gdy } x_i \geqslant 0 \textit{ dla } i = 1, \ldots, 10 \textit{ oraz}$$

$x_1 \geqslant 3,\ 0 \leqslant x_2 \leqslant 2.$

Z jakiego schematu wyboru korzystamy?

Jak poradzić sobie z warunkiem, że $x_1 \geqslant 3$?

Z jakiego schematu wyboru korzystamy?

Kombinacje

Jak poradzić sobie z warunkiem, że $x_1 \geqslant 3$?

Z jakiego schematu wyboru korzystamy?

Kombinacje

Jak poradzić sobie z warunkiem, że $x_1 \geqslant 3$?

Możemy rozważyć równoważne równanie:

$$(x_1 - 3) + x_2 + \ldots + x_{10} = 27, \quad \text{gdy } x_i \geqslant 0 \text{ dla } i = 1, \ldots, 10 \text{ oraz}$$

$x_1 \geqslant 3$, $0 \leqslant x_2 \leqslant 2$.
Po zastosowaniu podstawienia $y_1 = x_1 - 3$, $y_i = x_i$ dla $i = 2, 3, \ldots, 10$ szukamy liczby całkowitoliczbowych rozwiązań równania

$$y_1 + y_2 + \ldots + y_{10} = 27, \quad \text{gdy } y_i \geqslant 0 \text{ dla } i = 1, \ldots, 10 \text{ oraz}$$

$0 \leqslant y_2 \leqslant 2$.

Jak poradzić sobie z warunkiem, że $0 \leqslant y_2 \leqslant 2$?

Jak poradzić sobie z warunkiem, że $0 \leqslant y_2 \leqslant 2$?

Od wszystkich całkowitoliczbowych rozwiązań równania w liczbach nieujemnych możemy odjąć te, w których $y_2 > 2$.

Ile jest całkowitoliczbowych rozwiązań równania:

$$y_1 + y_2 + \ldots + y_{10} = 27, \quad \text{gdy } y_i \geqslant 0 \text{ dla } i = 1, \ldots, 10?$$

Ile jest całkowitoliczbowych rozwiązań równania:

$$y_1 + y_2 + \ldots + y_{10} = 27, \quad \text{gdy } y_i \geqslant 0 \text{ dla } i = 1, \ldots, 10?$$

$\binom{27+10-1}{27} = \binom{36}{27}$

Ile jest całkowitoliczbowych rozwiązań równania:

$$y_1 + y_2 + \ldots + y_{10} = 27, \quad \text{gdy } y_i \geqslant 0 \text{ dla } i = 1, \ldots, 10,$$

gdzie $y_2 > 2$ ($y_2 \geqslant 3$)?

Ile jest całkowitoliczbowych rozwiązań równania:

$$y_1 + y_2 + \ldots + y_{10} = 27, \quad \text{gdy } y_i \geqslant 0 \text{ dla } i = 1, \ldots, 10,$$

gdzie $y_2 > 2$ ($y_2 \geqslant 3$)?

Ile jest całkowitoliczbowych rozwiązań równania:

$$z_1 + z_2 + \ldots + z_{10} = 24, \quad \text{gdy } z_i \geqslant 0 \text{ dla } i = 1, \ldots, 10?$$

Ile jest całkowitoliczbowych rozwiązań równania:

$$y_1 + y_2 + \ldots + y_{10} = 27, \quad \text{gdy } y_i \geqslant 0 \text{ dla } i = 1, \ldots, 10,$$

gdzie $y_2 > 2$ ($y_2 \geqslant 3$)?

Ile jest całkowitoliczbowych rozwiązań równania:

$$z_1 + z_2 + \ldots + z_{10} = 24, \quad \text{gdy } z_i \geqslant 0 \text{ dla } i = 1, \ldots, 10?$$

$\binom{24+10-1}{24} = \binom{33}{24}$

Ostatecznie otrzymujemy:

$$\binom{36}{27} - \binom{33}{24}$$

Zadanie

Na ile sposobów można ustawić 8 mężczyzn i 5 kobiet w rzędzie tak, aby żadne dwie kobiety nie stały obok siebie?

Ustawmy najpierw samych mężczyzn. Na ile sposobów możemy to zrobić?

Ustawmy najpierw samych mężczyzn. Na ile sposobów możemy to zrobić?

8! (permutacja)

Gdzie mogą teraz stanąć kobiety?

Gdzie mogą teraz stanąć kobiety?

♂ ♂ ♂ ♂ ♂ ♂ ♂ ♂

Gdzie mogą teraz stanąć kobiety?

♂♀♂♀♂♂♀♂♂♀♂♀♂

☺

Gdzie mogą teraz stanąć kobiety?

♂♀♂♀♂♂♀♂♂♀♂♂♀

☺

Gdzie mogą teraz stanąć kobiety?

♀♂ ♀♂ ♀♂ ♂ ♀♂ ♂ ♀♂ ♂

☺

Gdzie mogą teraz stanąć kobiety?

♂♀♀♂♀♂♂♀♂♂♀♂♂

☹

Gdzie mogą teraz stanąć kobiety?

♀♀♀♂♂♂♂♀♂♂♀♂♂

☹

Gdzie mogą teraz stanąć kobiety?

_♂ _♂ _♂ _♂ _♂ _♂ _♂ _♂ _

Gdzie mogą teraz stanąć kobiety?

$$\_\male\ \_\male\ \_\male\ \_\male\ \_\male\ \_\male\ \_\male\ \_\male\ \_$$

Na ile sposobów możemy wybrać miejsca dla kobiet?

Gdzie mogą teraz stanąć kobiety?

$$\_\male\ \_\male\ \_\male\ \_\male\ \_\male\ \_\male\ \_\male\ \_\male\ \_$$

Na ile sposobów możemy wybrać miejsca dla kobiet?
$\binom{9}{5}$ (kombinacja)

Gdzie mogą teraz stanąć kobiety?

$$\_\male\ \_\male\ \_\male\ \_\male\ \_\male\ \_\male\ \_\male\ \_\male\ \_$$

Na ile sposobów możemy wybrać miejsca dla kobiet?
$\binom{9}{5}$ (kombinacja)

Na ile sposobów możemy ustawić kobiety na tych miejscach?

Gdzie mogą teraz stanąć kobiety?

$$\_\male\ \_\male\ \_\male\ \_\male\ \_\male\ \_\male\ \_\male\ \_\male\ \_$$

Na ile sposobów możemy wybrać miejsca dla kobiet?
$\binom{9}{5}$ (kombinacja)

Na ile sposobów możemy ustawić kobiety na tych miejscach?
5! (permutacja)

Liczba rozmieszczeń 8 mężczyzn i 5 kobiet w rzędzie tak, aby żadne dwie kobiety nie stały obok siebie:

Liczba rozmieszczeń 8 mężczyzn i 5 kobiet w rzędzie tak, aby żadne dwie kobiety nie stały obok siebie:

$$8! \cdot \binom{9}{5} \cdot 5!$$