

WSTĘP DO RACHUNKU PRAWDOPODOBIEŃSTWA
4. PRAWDOPODOBIEŃSTWO CAŁKOWITE. WZÓR BAYESA.

Zadanie 1. Fabryka wytwarza gwoździe na trzech maszynach, których udział w produkcji wynosi odpowiednio 25%, 35% oraz 40%. Maszyny dają odpowiednio 5%, 4% oraz 2% gwoździ wybrakowanych.

(a) Jakie jest prawdopodobieństwo, że losowo wybrany gwóźdź wyprodukowany w fabryce jest wybrakowany?

Zacznijmy od ustalenia przestrzeni zdarzeń elementarnych. Skoro w zadaniu losujemy dowolny gwóźdź, to naturalnym jest przyjęcie jako Ω zbioru wszystkich gwoździ wytwarzanych w fabryce. Co więcej, ta przestrzeń zdarzeń ma naturalne rozbicie

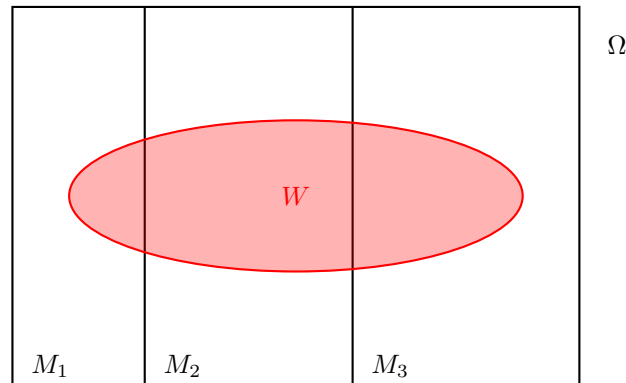
$$\Omega = M_1 \cup M_2 \cup M_3$$

na zdarzenia M_1 , M_2 i M_3 odpowiadające podziałowi gwoździ pomiędzy trzy maszyny, na których zostały wyprodukowane. Z treści zadania wynika, że:

$$\mathbb{P}(M_1) = 0,25, \quad \mathbb{P}(M_2) = 0,35, \quad \mathbb{P}(M_3) = 0,4.$$

Oznaczmy przez W zdarzenie polegające na tym, że losowo wybrany gwóźdź jest wybrakowany. Wówczas:

$$\mathbb{P}(W|M_1) = 0,05, \quad \mathbb{P}(W|M_2) = 0,04, \quad \mathbb{P}(W|M_3) = 0,02.$$



Korzystając ze **wzoru na prawdopodobieństwo całkowite**, otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(W) &= \mathbb{P}(W|M_1) \mathbb{P}(M_1) + \mathbb{P}(W|M_2) \mathbb{P}(M_2) + \mathbb{P}(W|M_3) \mathbb{P}(M_3) \\ &= 0,05 \cdot 0,25 + 0,04 \cdot 0,35 + 0,02 \cdot 0,4 = 0,0345. \end{aligned}$$

(b) Podczas kontroli jakości losowo wybrano gwóźdź, który okazał się być wybrakowany. Jakie jest prawdopodobieństwo, że został on wyprodukowany przez pierwszą maszynę?

Skoro losowo wybrany gwóźdź okazał się wybrakowany, to oznacza, że zaszło zdarzenie W . A zatem pytamy o prawdopodobieństwo zdarzenia warunkowego $\mathbb{P}(M_1|W)$. Do jego obliczenia wykorzystamy **wzór Bayesa**. Proszę zwrócić uwagę, że we wzorze Bayesa w mianowniku po prawej stronie pojawia się wzór na prawdopodobieństwo całkowite zdarzenia, po którym warunkujemy (w tym wypadku zdarzenia W). A zatem:

$$\mathbb{P}(M_1|W) = \frac{\mathbb{P}(W|M_1) \mathbb{P}(M_1)}{\mathbb{P}(W)}.$$

Możemy teraz wykorzystać podpunkt (a), gdzie policzyliśmy $\mathbb{P}(W)$. Ostatecznie otrzymujemy:

$$\mathbb{P}(M_1|W) = \frac{0,05 \cdot 0,25}{0,0345} = \frac{0,0125}{0,0345} \approx 0,3623.$$

Zadanie 2. Załóżmy, że prawdopodobieństwo kradzieży w sklepie wynosi $\frac{n}{n+k}$, gdzie k jest liczbą ochroniarzy, a n – liczbą złodziei ($n+k \geq 1$). Jeśli pewnego dnia zdarza się kradzież (zawsze można ją wykryć na podstawie manka na końcu dnia), to następnego dnia liczba ochroniarzy jest zwiększana o 1. Niestety po udanej kradzieży liczba złodziei też rośnie o 1. Jeżeli kradzież się nie zdarzy, to następnego dnia liczby złodziei i ochroniarzy pozostają bez zmian. W poniedziałek jest jeden pilnujący i dwóch złodziei. Jaka jest szansa, że sklep będzie okradany (skutecznie) aż do niedzieli włącznie?

Niech A_k , $k = 1, 2, \dots, 7$, oznacza zdarzenie, że sklep zostanie okradziony k -tego dnia. Wówczas interesuje nas prawdopodobieństwo zdarzenia

$$A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_7.$$

Do jego wyznaczenia skorzystamy ze **wzoru łańcuchowego**:

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_7) = \mathbb{P}(A_1) \cdot \mathbb{P}(A_2|A_1) \cdot \mathbb{P}(A_3|A_1 \cap A_2) \cdot \dots \cdot \mathbb{P}(A_7|A_1 \cap \dots \cap A_6).$$

Na początku $k = 1$ oraz $n = 2$, zatem

$$\mathbb{P}(A_1) = \frac{2}{3}.$$

Zgodnie z założeniami, po każdej skutecznej kradzieży liczby ochroniarzy i złodziei rosną o jeden, zatem mamy również

$$\mathbb{P}(A_2|A_1) = \frac{3}{5}, \quad \mathbb{P}(A_3|A_1 \cap A_2) = \frac{4}{7}, \quad \dots, \quad \mathbb{P}(A_7|A_1 \cap \dots \cap A_6) = \frac{8}{15},$$

skąd otrzymujemy

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_7) = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{5}{9} \cdot \frac{6}{11} \cdot \frac{7}{13} \cdot \frac{8}{15} = \frac{128}{6435}.$$

Zadanie 3. *Student zna odpowiedź na pytanie egzaminacyjne z prawdopodobieństwem $p \in (0, 1)$. Jeżeli nie zna odpowiedzi, to zgaduje jedną z k możliwych odpowiedzi z prawdopodobieństwem $1/k$. Jakie jest prawdopodobieństwo, że znał odpowiedź, jeżeli wiemy, że odpowiedział prawidłowo?*

W tym zadaniu eksperyment polega na wylosowaniu pytania. Możemy przyjąć, że zbiór pytań składa się z tych, na które student zna odpowiedź, oraz tych, na które odpowiedzi nie zna. A zatem jako przestrzeń zdarzeń elementarnych Ω przyjmujemy zbiór pytań z naturalnym rozbićm

$$\Omega = Z \cup Z',$$

gdzie Z to pytania, na które student zna odpowiedź, a Z' to pozostałe pytania. Z treści zadania wynika, że:

$$\mathbb{P}(Z) = p \quad \text{ i } \quad \mathbb{P}(Z') = 1 - p.$$

Następnie pojawia się dodatkowa informacja, że student odpowiedział prawidłowo na wylosowane pytanie. W związku z tym musimy wprowadzić kolejne zdarzenie P – student odpowiedział prawidłowo. To nowe zdarzenie jest zdarzeniem, po którym będziemy warunkować. Czyli pytanie z zadania można wyrazić tak: ile wynosi prawdopodobieństwo zdarzenia Z pod warunkiem zajścia zdarzenia P ? Aby je wyznaczyć, znów posłużymy się **wzorem Bayesa**:

$$\mathbb{P}(Z|P) = \frac{\mathbb{P}(P|Z) \mathbb{P}(Z)}{\mathbb{P}(P|Z) \mathbb{P}(Z) + \mathbb{P}(P|Z') \mathbb{P}(Z')},$$

gdzie $\mathbb{P}(P|Z) = 1$ (zna odpowiedź na pytanie, więc odpowiedział prawidłowo) i $\mathbb{P}(P|Z') = 1/k$ (nie zna odpowiedzi, więc strzela i wybiera jedną z k dostępnych odpowiedzi). Stąd otrzymujemy:

$$\mathbb{P}(Z|P) = \frac{1 \cdot p}{1 \cdot p + \frac{1}{k} \cdot (1 - p)} = \frac{kp}{kp + 1 - p}.$$

Zadanie 4. W pierwszej urnie znajdują się dwie białe i dwie czarne kule, druga zawiera jedną kulę białą i dwie czarne. Z pierwszej urny wyciągamy losowo dwie kule i przekładamy do drugiej urny, z której losujemy jedną kulę.

(a) Jakie jest prawdopodobieństwo, że do drugiej urny przełożyliśmy dwie białe kule, jeśli wylosowana z drugiej urny kula jest biała?

Proszę zwrócić uwagę, że w tym zadaniu eksperyment składa się z dwóch etapów: pierwszy z nich to losowanie dwóch kul z pierwszej urny, drugi etap to losowanie jednej kuli z drugiej urny. W związku z tym możliwe wyniki pierwszego etapu zadają rozbięcie przestrzeni zdarzeń elementarnych Ω , która jak zawsze składa się ze wszystkich możliwych wyników naszego eksperymentu.

Wynikiem pierwszego etapu jest para kul w kolorze białym lub czarnym, w związku z czym możemy wprowadzić następujące zdarzenia opisujące pierwsze losowanie:

- BB – w pierwszym losowaniu dwie kule białe,
- BC – w pierwszym losowaniu kula biała i czarna,
- CC – w pierwszym losowaniu dwie kule czarne,

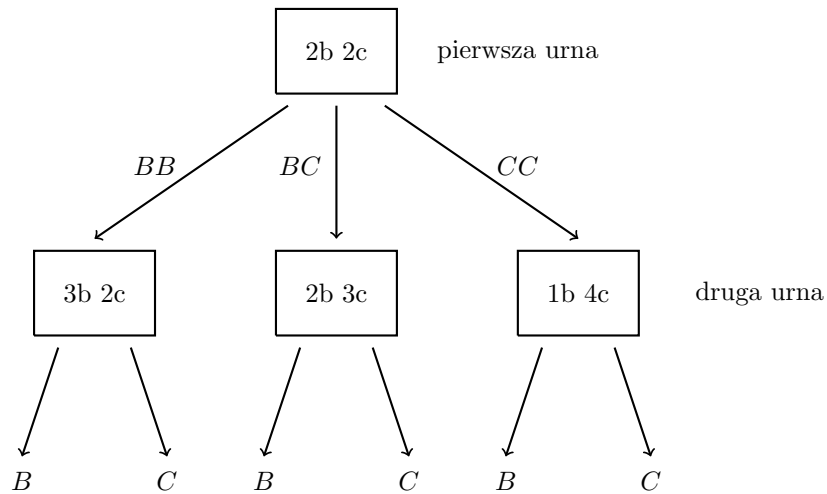
przy czym

$$\mathbb{P}(BB) = \mathbb{P}(CC) = \frac{\binom{2}{2}}{\binom{4}{2}} = \frac{1}{6}, \quad \mathbb{P}(BC) = \frac{\binom{2}{1}\binom{2}{1}}{\binom{4}{2}} = \frac{4}{6}.$$

Podobnie dla drugiego etapu możemy wprowadzić zdarzenia:

- B – w drugim losowaniu kula biała,
- C – w drugim losowaniu kula czarna,

ale prawdopodobieństwa tych zdarzeń będą zależały od tego, co wydarzyło się w pierwszym etapie. Proszę zauważyć, że $\mathbb{P}(B|BB) = 3/5$, $\mathbb{P}(B|BC) = 2/5$ i $\mathbb{P}(B|CC) = 1/5$.



Wracając do pytania z zadania musimy obliczyć prawdopodobieństwo warunkowe zdarzenia BB pod warunkiem zajścia zdarzenia B . Znow zastosujemy **wzór Bayesa**:

$$\mathbb{P}(BB|B) = \frac{\mathbb{P}(B|BB) \mathbb{P}(BB)}{\mathbb{P}(B|BB) \mathbb{P}(BB) + \mathbb{P}(B|BC) \mathbb{P}(BC) + \mathbb{P}(B|CC) \mathbb{P}(CC)} = \frac{\frac{3}{5} \cdot \frac{1}{6}}{\frac{3}{5} \cdot \frac{1}{6} + \frac{2}{5} \cdot \frac{4}{6} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{6}} = \frac{1}{4}.$$

(b) Jakie jest prawdopodobieństwo, że do drugiej urny przełożyliśmy dwie białe kule, jeśli wylosowana z drugiej urny kula jest czarna?

Postępując analogicznie jak w podpunkcie (a), tym razem chcemy wyznaczyć prawdopodobieństwo warunkowe zdarzenia BB pod warunkiem zajścia zdarzenia C .

$$\mathbb{P}(BB|C) = \frac{\mathbb{P}(C|BB) \mathbb{P}(BB)}{\mathbb{P}(C|BB) \mathbb{P}(BB) + \mathbb{P}(C|BC) \mathbb{P}(BC) + \mathbb{P}(C|CC) \mathbb{P}(CC)} = \frac{\frac{2}{5} \cdot \frac{1}{6}}{\frac{2}{5} \cdot \frac{1}{6} + \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{6} + \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{6}} = \frac{1}{9}.$$

Oczywiście powyższe wyniki nie powinny być dla nas żadnym zaskoczeniem. Informacja o tym, że w drugim losowaniu wybraliśmy kulę białą daje nam przesłanki ku temu, że w urnie znajdowało się dużo białych kul, czyli że po pierwszym losowaniu przełożyliśmy do drugiej urny dwie białe kule.

Zadanie 5. Bolek i Lolek codziennie kończą pracę niezależnie od siebie, tak by w losowym momencie pomiędzy godziną 17:00 i 17:20 zjawić się na pobliskim przystanku autobusowym, z którego autobus odjeżdża w losowym momencie między 17:00 a 17:10. Pewnego dnia Lolek dociera na przystanek o godz. 17:05 i nie zastaje na nim Bolka. Jakie jest prawdopodobieństwo, że autobus już odjechał?

Trudność tego zadania polega na tym, żeby dobrze zinterpretować jego treść i w pierwszej kolejności ustalić elementy losowe. Początkowo mogłoby się wydawać, że losowy może być zarówno czas przyjazdu Bolka na przystanek, czas przyjazdu Lolka oraz czas, w którym przyjeżdża autobus. Kluczowa jest tu jednak informacja, że danego dnia Lolek pojawia się na przystanku o godz. 17:05, a zatem odpada nam jeden element losowości.

Oczywiście mamy tutaj do czynienia z prawdopodobieństwem geometrycznym i jako przestrzeń zdarzeń elementarnych możemy przyjąć $\Omega = [0, 20] \times [0, 10]$, gdzie pierwsza współrzędna odpowiada momentowi przyjazdu Bolka na przystanek, a druga współrzędna to moment przyjazdu autobusu (liczone w minutach po godz. 17:00).

W zadaniu pada pytanie o prawdopodobieństwo tego, że autobus “już odjechał”, czyli że odjechał przed godz. 17:05. Wiemy natomiast, że o tej godzinie Bolka nie było na przystanku, w związku z tym mogły wydarzyć się dwie rzeczy: albo Bolek przyszedł na przystanek przed autobusem, wsiadł do niego i odjechał, albo jeszcze nie dotarł na przystanek.

Wprowadźmy zatem oznaczenia na interesujące nas zdarzenia:

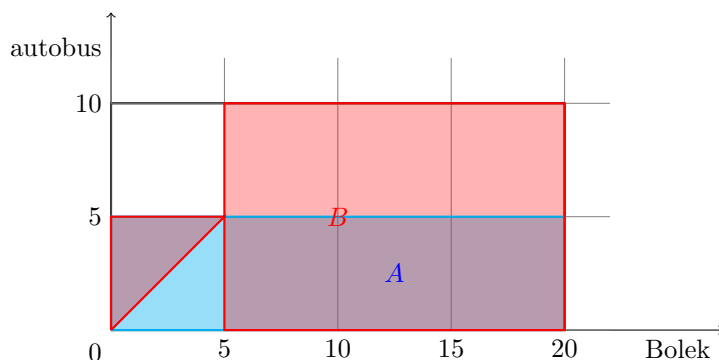
A – autobus odjechał przed 17:05,

B – Bolek przyszedł na przystanek przed odjazdem autobusu, który odjechał przed 17:05 lub przyszedł na przystanek po 17:05.

Interesuje nas prawdopodobieństwo warunkowe zdarzenia A pod warunkiem zajścia zdarzenia B , czyli:

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}.$$

Żeby obliczyć to prawdopodobieństwo, posłużymy się rysunkiem.



Zauważmy teraz, że zbiór Ω dzieli się na 8 kwadratów jednostkowych, z czego zdarzeniu A odpowiada dolna połowa, zdarzenie B to obszar zacieniowany na różowo. Stąd otrzymujemy:

$$\mathbb{P}(A) = \frac{1}{2}, \quad \mathbb{P}(B) = \frac{13}{16}, \quad \mathbb{P}(A \cap B) = \frac{7}{16}.$$

Podstawiając powyższe wartości do wzoru na prawdopodobieństwo warunkowe, otrzymujemy wynik:

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\frac{7}{16}}{\frac{13}{16}} = \frac{7}{13}.$$