# DMAD - zasada szufladkowa

### Jak przygotować się do rozwiązywania zadań?

Przeczytaj rozdział 1.3 z podręcznika/wykładu.

### Co powinnaś/powinieneś wiedzieć:

Jak zastosować **zasadę szufladkową**?

## A Zadania na ćwiczenia

**Zadanie A.1.** Udowodnij, że wśród dowolnie wybranych 11 liczb naturalnych zawsze znajdą się dwie z tą samą ostatnią cyfrą.

**Zadanie A.2.** Pokaż, że wśród 10 kart wybranych z talii 52 kart co najmniej 3 karty są tego samego koloru.

**Zadanie A.3.** W kwadracie o boku 1 wybrano 103 punkty (być może leżące na brzegu) w taki sposób, że żadne 3 z nich nie leżą na jednej prostej. Wykaż, że pewne trzy z tych punktów tworzą trójkąt o polu nie większym niż 0,01.

**Zadanie A.4.** Danych jest 12 różnych dwucyfrowych liczb naturalnych. Pokaż, że można wybrać pewne dwie z nich tak, aby ich różnica była postaci $aa$ (gdzie $a$ jest cyfrą).

**Zadanie A.5.** Na płaszczyźnie danych jest pięć punktów kratowych (czyli punktów o obu współrzędnych całkowitych). Udowodnij, że środek jednego z odcinków łączących te punkty też jest punktem kratowym.

**Zadanie A.6.** Dany jest zbiór złożony z dziesięciu liczb naturalnych, dwucyfrowych w rozwinięciu dziesiętnym. Pokazać, że w tym zbiorze istnieją takie dwa niepuste podzbiory, że sumy liczb obu podzbiorów są równe.

**Zadanie A.7.** Pokazać, że dla dowolnych $n+1$ różnych dodatnich liczb całkowitych mniejszych bądź równych $2n$ istnieją dwie, które są względnie pierwsze.

## B Zadania na ćwiczenia - jeśli czas pozwoli

**Zadanie B.1.** Pokazać, że dla dowolnego zbioru $n$ dodatnich liczb całkowitych istnieje jego niepusty podzbiór, którego suma liczb jest podzielna przez $n$.

**Zadanie B.2.** Niech dla ustalonego $n$ naturalnego $A$ będzie podzbiorem mocy $n+1$ zbioru $\{1, 2, ..., 2n\}$. Udowodnić, że $A$ zawiera dwie różne liczby $a$ i $b$, takie że $a$ jest dzielnikiem $b$.

**Zadanie B.3.** Przy okrągłym stole jest 100 miejsc oznaczonych proporczykami 100 różnych państw. Ambasadorowie tych państw usiedli przy stole w sposób losowy, ale tak, że żaden z nich nie usiadł na odpowiednim miejscu. Udowodnij, że można tak obrócić okrągły stół, aby co najmniej dwóch ambasadorów siedziało przy właściwych proporczykach.

**Zadanie B.4.** Na płaszczyźnie danych jest 6 punktów, z których żadne trzy nie leżą na jednej prostej. W każdym trójkącie wyznaczonym przez pewną trójkę tych punktów najkrótszy bok malujemy na czerwono. Udowodnij, że istnieje trójkąt o wszystkich bokach czerwonych.

**Zadanie B.5.** Udowodnij, że dla dowolnej liczby naturalnej istnieje taka jej wielokrotność, którą można zapisać w systemie dziesiętnym używając wyłącznie cyfr 0 i 1.

**Zadanie B.6.** Każdy punkt płaszczyzny pomalowano na jeden z kolorów: biały lub czarny. Pokaż, że istnieją dwa punkty w tym samym kolorze w odległości dokładnie 1cm.

## C Zadania do samodzielnej pracy w domu

**Zadanie C.1.** W sali znajduje się 47 osób. Wykaż, że wśród nich znajdzie się 7 osób urodzonych tego samego dnia tygodnia.

**Zadanie C.2.** Pokazać, że dla dowolnych $n+1$ różnych, dodatnich liczb całkowitych, mniejszych bądź równych $2n$ istnieją dwie, które sumują się do $2n+1$.

**Zadanie C.3.** Danych jest 1001 liczb naturalnych. Udowodnij, że istnieje wśród nich 501 liczb parzystych lub 501 liczb nieparzystych.

**Zadanie C.4.** W grupie 20 studentów przeprowadzono ankietę dotyczącą filmów: Avengers i Star Wars. Możliwe były 3 odpowiedzi: widziałem/am, nie widziałem/am, brak odpowiedzi. Pokaż, że pewnych 3 studentów udzieliło tych samych odpowiedzi.

**Zadanie C.5.** W sklepie dostępne są 3 rodzaje cukierków: krówki, toffi i raczki. Każde z 24 dzieci z klasy IF wybrało 3 cukierki. Pokaż, że pewne 3 z nich mają ten sam „zestaw” cukierków.

**Zadanie C.6.** Na nieskończonej szachownicy ustawionych jest 1999 skoczków szachowych. Udowodnij, że można spośród nich wybrać 1000 takich, że żadne dwa z nich się nie atakują.

**Zadanie C.7.** Udowodnij, że w dowolnym wielościanie:

a) istnieją dwa wierzchołki, z których wychodzi taka sama liczba krawędzi;
b) istnieją dwie ściany, które mają tyle samo krawędzi.

**Zadanie C.8.** W kole o promieniu 1

a) wybrano 8 punktów. Wykaż, że istnieje wśród nich co najmniej jedna para punktów, których odległość nie przekracza 1.
b) wybrano 14 punktów, z których żadne 3 nie są współliniowe. Wykaż, że 3 z nich tworzą trójkąt o polu co najwyżej 0.6.

**Zadanie C.9.** Wewnątrz kwadratu o boku długości 1 wybrano 51 punktów. Wykaż, że pewne trzy z nich leżą w kole o promieniu $\frac{1}{7}$.

**Zadanie C.10.** Zadania 1.17 - 1.23 z podręcznika.