Rachunek różniczkowy funkcji wielu zmiennych

Z uwagi na prostotę zapisu i łatwe interpretacje graficzne ograniczymy się jedynie do funkcji 2 lub 3 zmiennych. Naturalne uogólnienia wprowadzanych pojęć na funkcje k zmiennych zostawiamy czytelnikowi jako ćwiczenie.

Niech $R^2=\{(x,y): x\in R, y\in R\}$ oznacza zbiór par liczb rzeczywistych, a $R^3=\{(x,y,z): x\in R, y\in R, z\in R\}$ zbiór trójek (3-elementowych ciągów) takich liczb. Elementy zbiorów R^2 i R^3 możemy traktować jako

- punkty w 2 lub 3-wymiarowej przestrzeni z naturalnym układem współrzędnych
- wektory zaczepione w ustalonym punkcie będącym początkiem układu współrzędnych i końcach w zadanych punktach wodzącego
- wektory swobodne w 2 lub 3-wymiarowej przestrzeni, które można zaczepiać w dowolnym punkcie.

Traktując elementy (x_1, y_1) i (x_2, y_2) przestrzeni R^2 jako punkty – P_1 i P_2 możemy zdefiniować odległość (euklidesową) pomiędzy tymi punktami

$$\rho(P_1,P_2)=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)}$$

Przestrzeń (R^2,ρ) jest tzw. przestrzenią metryczną.

Metryka ρ spełnia następujące postulaty:

1. $\forall_{P_1,P_2\in R^2}\ \rho(P_1,P_2)\geq 0$ i $\rho(P_1,P_2)=0 \Leftrightarrow P_1=P_2$
2. $\forall_{P_1,P_2\in R^2}\ \rho(P_1,P_2)=\rho(P_2,P_1)$
3. $\forall_{P_1,P_2,P_2\in R^2}\ \rho(P_1,P_3)\leq \rho(P_1,P_2)+\rho(P_2,P_3)$ (warunek trójkąta)

Granica ciągu o wartościach w R^k

Wiadomo, że ciąg o wartościach rzeczywistych to funkcja rzeczywista określona na zbiorze liczb rzeczywistych.Podobnie funkcję $P: N \ni n \to P(n)=P_n \in R^k$ nazwiemy ciągiem w przestrzeni R^k.

Przyjmując oznaczenia $P_n=(x_1^n,...,x_k^n)$ $P=(g_1,...,g_k)$ możemy zdefiniować granice ciągu w R^k

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} P_n = P \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty}\ \rho(P_n,P)=0}$$

przy czym odległość $\rho(P,Q)$ pomiędzy punktami $P=(x_1,...,x_k)$ i $Q=(y_1,...,y_k)$ jest zadana

wzorem $\rho(P,Q)=\sqrt{\sum_{i=1}^{k}(x_i-y_i)^2}$.

Uwaga. Powyżej zdefiniowana zbieżność jest równoważna zbieżności „po współrzędnych”- uzasadnić.

Przykład. $\lim\limits_{n\to\infty}\left((1+\frac{1}{n})^n, \frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}, \frac{2n}{n+1}\right) = (e,1,2)$.

Podobnie jak w rozważanym poprzednio przypadku funkcji f: $R \to R$ rzeczywistej zmiennej rzeczywistej możemy zdefiniować otoczenie i sąsiedztwo punktu w przestrzeni metrycznej

$Ot(P_0,\delta)= K(P_0,\delta)= \{P \in D_f : \rho(P,P_0) < \delta\}$; $S(P_0,\delta)= Ot(P_0,\delta)-\{P_0\}$

Funkcja rzeczywista k zmiennych rzeczywistych

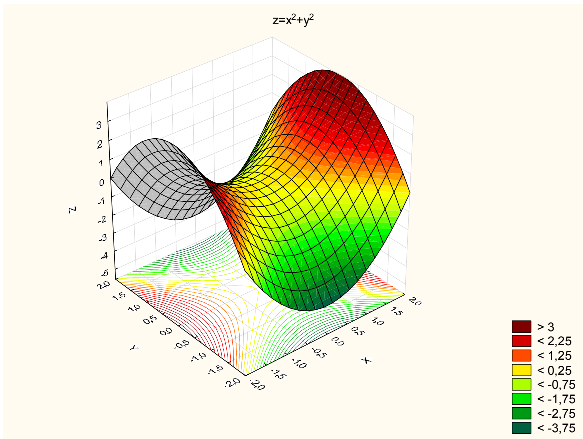
Utożsamiając punkt P z jego współrzędnymi $\mathbf{x} = (x_1,...,x_k)$ rozważać będziemy rzeczywistą funkcję punktu P jako funkcję wielu zmiennych (współrzędnych punktu)

$$f : R^k \supset D \ni \mathbf{x} \to f(\mathbf{x}) \in R$$

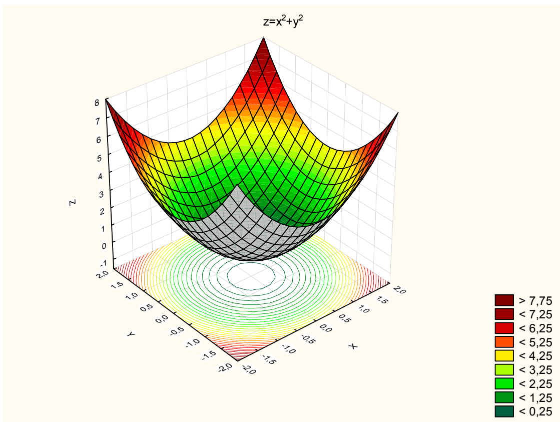
Przykład. $f(x,y)=\arcsin\frac{x}{a} + \arcsin\frac{y}{b}$ jest rzeczywistą funkcją dwóch zmiennych rzeczywistych określoną na prostokącie $[-a, a]\times[-b, b]$.

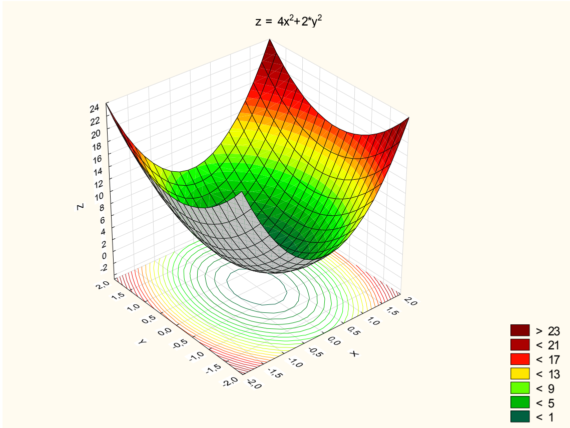
Przykładowe wykresy funkcji 2 zmiennych- przekroje- powierzchnie obrotowe np.:

- Paraboloida hiperboliczna $f(x,y)=x^2-y^2$ (siodło)



- paraboloida obrotowa $f(x,y)=x^2+y^2$





- paraboloida eliptyczna $f(x,y)=4x^2+9y^2$

Granica funkcji $f: R^k \supset D \ni P \to f(P) \in R$ w punkcie skupienia P_0 dziedziny D (punkt skupienia zbioru D nie musi należeć do zbioru D)

<u>Heine</u> $\quad \lim\limits_{P\to P_0} f(P) = g \Leftrightarrow \underset{(P_n)\subset S(P_0,\delta)}{\forall} \lim\limits_{n\to\infty} P_n = P_0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f(P_n) = g$

<u>Cauchy</u> $\quad \lim\limits_{P_n\to P_0} f(P) = g \Leftrightarrow \underset{\varepsilon}{\forall} \underset{\delta}{\exists} \underset{P\in D}{\forall} 0 < \rho(P,P_0) \le \delta \Rightarrow | f(P) - g | \le \varepsilon$

Ciągłość funkcji $f: R^k \supset D \ni P \to f(P) \in R$ **w punkcie** $P_0 \in D$

<u>Heine</u> $\quad f$ jest ciągła w $P_0 \in D \Leftrightarrow \underset{(P_n)\subset Ot(P_0,\delta)}{\forall} \lim\limits_{n\to\infty} P_n = P_0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f(P_n) = f(P_0)$

<u>Cauchy</u> $\quad f$ jest ciągła w $P_0 \in D$

$\Leftrightarrow \underset{\varepsilon}{\forall} \underset{\delta}{\exists} \underset{P\in D}{\forall} \rho(P,P_0) \le \delta \Rightarrow | f(P) - f(P_0) | \le \varepsilon$

Podobnie jak w przypadku funkcji jednej zmiennej funkcja f: $R^k \supset Ot(P_0,\delta) \ni P \to f(P) \in$ R jest ciągła w każdym punkcie izolowanym $P_0 \in D$, a w punkcie skupienia P_0 zbioru D jest ciągła jeżeli $\lim\limits_{P\to P_0} f(P) = f(P_0)$.

Ciągłość punktowa i jednostajna funkcji na zbiorze D jest definiowana dokładnie tak jak poprzednio zastępując moduł różnicy dwóch liczb rzeczywistych przez odległość punktów przestrzeni metrycznej R^k.

Def. Funkcja $f: R^k \supset D \ni P \to f(P) \in$ R jest **jednostajnie ciągła** w D gdy

$$\forall_{\varepsilon>0} \exists_{\delta>0} \forall_{P\in D} \forall_{Q\in D} \; \rho(P,Q) \le \delta \Rightarrow | f(P) - f(Q) | \le \varepsilon$$

Tw.

ciągłość jednostajna $\Rightarrow$ ciągłość punktowa

POCHODNE CZĄSTKOWE I KIERUNKOWE

$f : R^k \supset E \to R$, E - otwarty, $\mathbf{x} = (x_1,...,x_k) \in E$

Def. **Pochodną cząstkową** funkcji f w punkcie $\mathbf{x}$ względem i-tej zmiennej (czyli x_i) nazywamy skończoną (o ile istnieje) granicę

$$\lim_{h_i \to 0} \frac{f(x_1,...,x_i + h_i,...,x_k) - f(x_1,...,x_i,...,x_k)}{h_i} \overset{df}{=} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}) = f'_{x_i}(\mathbf{x})$$

Def. **Pochodną kierunkową** funkcji f w punkcie $\mathbf{x}$ w kierunku wektora $\mathbf{k} \neq \mathbf{0}$ (zwykle przyjmuje się, że $\|\mathbf{k}\| = 1$, czyli w kierunku wersora) nazywamy skończoną (o ile istnieje) granicę $\lim_{t \to 0} \frac{f(\mathbf{x} + t\mathbf{k}) - f(\mathbf{x})}{t} \overset{df}{=} \mathbf{f}'_{\mathbf{k}}(\mathbf{x})$.

Uwaga 1. $\varphi(t) = f(\mathbf{x} + t\mathbf{k})$ - funkcja jednej zmiennej

Uwaga 2. Pochodna cząstkowa jest szczególnym przypadkiem pochodnej kierunkowej w kierunku i-tego wersora bazy kanonicznej (wersora i-tej osi) $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}) = f'_{\mathbf{e}_i}(\mathbf{x})$

Przykład . $$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^3}{x^2 + y^6}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

- pochodne cząstkowe

x= $(x,y) \neq (0,0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{y^3(x^2 + y^6) - xy^3(2x)}{(x^2 + y^6)^2} = \frac{y^3(-x^2 + y^6)}{(x^2 + y^6)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{3y^2x(x^2 + y^6) - xy^3(6y^5)}{(x^2 + y^6)^2} = \frac{3xy^2(x^2 - y^6)}{(x^2 + y^6)^2}$$

$(x,y) = (0,0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(0 + \Delta x, 0) - f(0,0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{\Delta x 0}{\Delta x^2 + 0} - 0}{\Delta x} = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$$

- pochodna kierunkowa

x= $(x,y) \neq (0,0)$ $\quad \mathbf{k} = (k_x, k_y) \quad \|(k_x, k_y)\| = \sqrt{k_x^2 + k_y^2} = 1$

$$f'_{(k_x,k_y)}(x,y) = \lim_{t \to 0} \frac{f(\mathbf{x}^\circ + t\mathbf{k}) - f(\mathbf{x}^\circ)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{f(x + tk_x, y + tk_y) - f(x,y)}{t} =$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{\frac{(x + tk_x)(y + tk_y)^3}{(x + tk_x)^2 + (y + tk_y)^6} - \frac{xy^3}{x^2 + y^6}}{t} = \frac{y^2(-x^2 + y^6)(yk_x - 3xk_y)}{(x^2 + y^6)^2} =$$

$$= \frac{y^3(-x^2 + y^6)}{(x^2 + y^6)^2} k_x + \frac{3xy^2(x^2 - y^6)}{(x^2 + y^6)^2} k_y = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)k_x + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)k_y$$

W punkcie $\mathbf{x} = (x, y) = (0,0)$

$$f'_{\mathbf{k}}(0,0) = \lim_{t \to 0} \frac{f\big((0,0) + t(k_x, k_y)\big) - f(0,0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{f(tk_x, tk_y)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{\frac{tk_x (tk_y)^3}{(tk_x)^2 + (tk_y)^6}}{t} = 0$$

Funkcja f ma więc w każdym punkcie i w każdym kierunku pochodną.

Pytanie. Czy istnieje granica $\lim\limits_{(x,y) \to (0,0)} f(x, y)$?

Powyższa granica nie istnieje, gdyż $(\frac{1}{n}, 0) \to (0,0)$ i $f(\frac{1}{n}, 0) = 0 \to 0$, a $(\frac{1}{n^3}, \frac{1}{n}) \to (0,0)$ i $f(\frac{1}{n^3}, \frac{1}{n}) = \frac{1}{2} \to \frac{1}{2}$.

Wykazaliśmy wiec, że **posiadanie pochodnej kierunkowej** w dowolnym kierunku (w szczególności posiadanie pochodnych cząstkowych) **nie zapewnia nawet ciągłości funkcji**.