Def. Mówimy, że funkcja *f* jest klasy C_D^1 jeżeli posiada w każdym punkcie zbioru *D* wszystkie pochodne cząstkowe ciągłe, czyli jest *F*- różniczkowalna w każdym punkcie zbioru *E*.

Pochodne cząstkowe wyższych rzędów.

Rozważmy funkcję rzeczywistą *n* zmiennych $f : R^n \supset D \to R$ określoną na zbiorze otwartym *D*. Jeżeli w każdym punkcie zbioru *D* funkcja *f* ma pochodną cząstkową $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, to mamy określoną funkcją rzeczywistą $\frac{\partial f}{\partial x_i} : D \ni (x_1,..., x_n) \to \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1,..., x_n)$, dla której można w dowolnym ustalonym punkcie $(x_1,..., x_n)$ zdefiniować (o ile istnieje) pochodną cząstkową po zmiennej x_j. W ten sposób określamy drugą pochodną cząstkową funkcji

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\frac{\partial f}{\partial x_i}\right]$$

Tw. Schwarza. Jeżeli $f(x_1,...,x_n)$ ma w pewnym obszarze *D* ciągłe pochodne cząstkowe $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ i $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$, to są one sobie równe w *D*.

Przykład Funkcja $f(x,y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \quad , & (x,y) = (0,0) \end{cases}$ jest ciągła w punkcie (0,0) i jej pochodne cząstkowe są równe $\frac{\partial f}{\partial x}(0,y) = -y$; $\frac{\partial f}{\partial y}(x,0) = x$. Stąd $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = -1$ a $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 1$, gdyż $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ i $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ nie są ciągłe w punkcie

Pochodne cząstkowe funkcji złożonych.

Twierdzenie Jeżeli

1. $f(x_1,...,x_n)$ ma w pewnym obszarze $D \subset R^n$ ciągłe pochodne cząstkowe
2. funkcje $x_i = x_i(u_1,...,u_m)$ i=1,...,*n* mają ciągle pochodne cząstkowe w pewnym obszarze $\Delta \subset R^m$
3. $(x_1(u_1,...,u_m),..., x_n(u_1,...,u_m)) \in D$, gdy $(u_1,...,u_m) \in \Delta$

to funkcja złożona $F(u_1,...,u_m) = f(x_1(u_1,...,u_m),..., x_n(u_1,...,u_m))$ ma ciągłe pochodne cząstkowe w każdym punkcie obszaru Δ i

$$\frac{\partial F}{\partial u_j}(u_1,...,u_m) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1(u_1,...,u_m),..., x_n(u_1,...,u_m)) \frac{\partial x_i}{\partial u_j}(u_1,...,u_m)$$

Dowód. dla przypadku szczególnego *n*=2, *m*=1 $F(t) = f(x(t), y(t))$

$$F'(t) = \lim_{h\to 0} \frac{F(t+h) - F(t)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x(t+h), y(t+h)) - f(x(t), y(t))}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x(t+h), y(t+h)) - f(x(t), y(t+h)) + f(x(t), y(t+h)) - f(x(t), y(t))}{h} = \{\text{tw.Lagrange'a}\} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\partial f(c_1, y(t+h))}{\partial x} \frac{(x(t+h) - x(t)}{h} + \frac{\partial f(x(t), c_2)}{\partial y} \frac{(y(t+h) - y(t))}{h} = \{\text{ciągłość poch. cząstkowych}\} =$$

$$= \frac{\partial f(x(t), y(t))}{\partial x} x'(t) + \frac{\partial f(x(t), y(t))}{\partial y} y'(t)$$

Przykłady

1. $f(x,y)=e^x\cos y$, $x(u,v)=3u+5v$, $y(u,v)=2u-v$, $F(u,v)= e^{3u+5v}\cos(2u-v)$. Obliczyć pochodne cząstkowe $\frac{\partial^2 F}{\partial u^2}$ i $\frac{\partial^2 F}{\partial v^2}$.

2. $F(u_1,u_2) = f(r(u_1,u_2))$ gdzie $r(u_1,u_2) = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$. Wykazać że $\frac{\partial^2 F}{\partial u_1^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial u_2^2} = \frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{df}{dr}$

Różniczki

Oznaczenia $\mathbf{x}^0=(x_1^0,\dots,x_n^0)$ $\Delta\mathbf{x}=(\Delta x_1,\dots,\Delta x_n)$ $f: Ot(\mathbf{x}^0,\delta) \to R$

Różniczką funkcji f w punkcie $\mathbf{x}^0$ dla przyrostu $\Delta\mathbf{x}$ nazywamy wyrażenie

$$df(\mathbf{x}^0, \Delta\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}^0)\Delta x_i$$

Różniczki wyższych rzędów

Jeżeli przy ustalonym $\Delta\mathbf{x}$ funkcja $d(\,\cdot\,,\Delta\mathbf{x}) : Ot(\mathbf{x}^0,\delta) \to R$ ma różniczkę , to nazywamy ją druga różniczką funkcji f w punkcie $\mathbf{x}^0$ i oznaczamy $d^2 f(\mathbf{x}^0, \Delta\mathbf{x})$.

Przykład. Wyprowadzić wzór na drugą różniczkę funkcji dwóch zmiennych.

$$d((x_1,x_2),(\Delta x_1,\Delta x_2)) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1,x_2)\Delta x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1,x_2)\Delta x_2$$

$$d^2((x_1,x_2),(\Delta x_1,\Delta x_2)) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_1}\left[\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1,x_2)\Delta x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1,x_2)\Delta x_2\right]\Delta x_1 + \frac{\partial}{\partial x_2}\left[\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1,x_2)\Delta x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1,x_2)\Delta x_2\right]\Delta x_2 =$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x_1,x_2)\Delta x_1^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(x_1,x_2)\Delta x_1 \Delta x_2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x_1,x_2)\Delta x_2^2 = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\Delta x_1 + \frac{\partial}{\partial x_2}\Delta x_1\right)^2 f$$

Druga różniczka funkcji wielu zmiennych w danym punkcie jest formą kwadratową przyrostów

$$d^2 f\big((x_1,\dots,x_n),(\Delta x_1,\dots,\Delta x_n)\big) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\mathbf{x})\Delta x_i \Delta x_j$$

Uwagi o zapisie macierzowym drugiej różniczki.

$$d^2\big((x_1,x_2),(\Delta x_1,\Delta x_2)\big) = \begin{bmatrix}\Delta x_1 & \Delta x_2\end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x_1,x_2) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(x_1,x_2) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x_1,x_2) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x_1,x_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix}\Delta x_1 \\ \Delta x_2\end{bmatrix}$$

Wzór na m-tą różniczkę funkcji n zmiennych

$$d^m f = \left(\tfrac{\partial}{\partial x_1}\Delta x_1 + ,\dots, + \tfrac{\partial}{\partial x_n}\Delta x_n\right)^m f$$

Zadanie. Napisać wzór na drugą różniczkę funkcji trzech zmiennych i trzecią różniczkę funkcji dwóch zmiennych

Wzór Taylora

Jeżeli funkcja $f: R^n \supset Ot(\mathbf{x}^0,\delta) \ni \mathbf{x} \to f(\mathbf{x}) \in R$ ma ciągłe pochodne cząstkowe do rzędu m w $Ot(\mathbf{x}^0,\delta)$, to istnieje $\theta \in (0,1)$ takie , że dla każdego $\mathbf{x} \in Ot(\mathbf{x}^0,\delta)$ prawdziwy jest wzór

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}^0) + \tfrac{1}{1!} df(\mathbf{x}^0, \mathbf{x}-\mathbf{x}^0) + \tfrac{1}{2!} d^2 f(\mathbf{x}^0, \mathbf{x}-\mathbf{x}^0) + \cdots + \tfrac{1}{(m-1)!} d^{m-1} f(\mathbf{x}^0, \mathbf{x}-\mathbf{x}^0) + r_m$$

gdzie $r_m = \tfrac{1}{m!} d^m f(\mathbf{x}^0 + \theta(\mathbf{x}-\mathbf{x}^0), \mathbf{x}-\mathbf{x}^0)$

Uwaga: punkt „pośredni” $\mathbf{c} = \mathbf{x}^0 + \theta(\mathbf{x}-\mathbf{x}^0)$ leży wewnątrz odcinka o końcach $\mathbf{x}^0$, $\mathbf{x}$

Dow. Parametryzujemy odcinek $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}^\circ + t(\mathbf{x}-\mathbf{x}^\circ)$; $t \in [0,1]$ i tworzymy funkcję jednej zmiennej $\varphi(t) = f(\mathbf{x}^\circ + t(\mathbf{x}-\mathbf{x}^\circ))$. Mamy więc rzeczywistą funkcję φ określoną na domkniętym odcinku $[0,1]$ spełniającą założenia twierdzenia Taylora dla funkcji jednej zmiennej. Stosując do niej wzór Maclaurina otrzymujemy $\varphi(1) = \varphi(0) + \dfrac{\varphi'(0)}{1!}(1-0) + \ldots + \dfrac{\varphi^{m-1}(0)}{(m-1)!}1^{m-1} + \dfrac{1}{m!}\varphi^m(\theta)1^m \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \varphi(1) = \varphi(0) + \frac{1}{1!} d\varphi(0,1) + \ldots + \frac{1}{(m-1)!} d^{m-1}\varphi(0,1) + \frac{1}{m!} d^m \varphi(\theta,1)$$

Ale $d^k \varphi(t_0,t) = d^k f\big(\mathbf{x}(t_0), \mathbf{x}(t+t_0) - \mathbf{x}(t_0)\big)$. Stąd $d^k\varphi(0,1) = d^k f(\mathbf{x}^0, \mathbf{x}-\mathbf{x}^0)$ itd.

Przykład. Napisać wzór Taylora dla funkcji $f(x,y)=e^x \sin y$ w punkcie (0,0) (wzór Maclaurina) dla $m=4$.

Odp. $e^x \sin y = y + xy + \tfrac{1}{2}x^2 y - \tfrac{1}{6}y^3 + r_4$

Zastosowanie różniczki w teorii błędów

Dana jest funkcja f wielu zmiennych. Wektorowy argument funkcji nie jest znany lecz dysponujemy jego pomiarem $\mathbf{x}$ obarczonym błędem Niech $\mathbf{x}+\Delta\,\mathbf{x}$ oznacza prawdziwą nieznaną wartość argumentu a błąd bezwzględny pomiaru (wektorowego) nie przekracza $\mathbf{b}$ ($|\Delta\mathbf{x}| \le \mathbf{b}$ nierówność wektorowa).

Wówczas $\quad | f(\mathbf{x}+\Delta\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}) | \approx | df(\mathbf{x},\Delta\mathbf{x}) | \le \sum_{i=1}^{n} \left| \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}) \right| b_i$.

Wytłumaczenie przybliżonego charakteru wzoru , kiedy to przybliżenie jest „dobre” i jak postąpić gdy przybliżenia nie jest zadowalające.

Przykład. Oszacować metodą różniczki zupełnej błąd jaki popełniamy obliczając objętość prostopadłościanu o krawędziach 4.1, 3.2, 8.4 zmierzonych odpowiednio z dokładnością 0.1, 0.1, 0.2. Odp. (błąd bezwzględny≤ 8.756, błąd względny 8% (wytłumaczyć jak rozumiemy błąd względny)

Ekstrema lokalne

Def. Funkcja $f: R^n \supset Ot(\mathbf{x}^0,\delta) \ni \mathbf{x} \to f(\mathbf{x}) \in R$ ma w punkcie $\mathbf{x}^0$ maksimum lokalne właściwe jeżeli
$\forall\ \mathbf{x} \in S(\mathbf{x}^0,\delta)\quad f(\mathbf{x}) < f(\mathbf{x}^0)$ (Uwaga $S(\mathbf{x}^0,\delta) = Ot(\mathbf{x}^0,\delta) - \{\mathbf{x}^0\}$)

Podobnie minimum lokalne właściwe.

Warunek konieczny istnienia ekstremum

Jeżeli funkcja $f: R^n \supset Ot(\mathbf{x}^0,\delta) \ni \mathbf{x} \to f(\mathbf{x}) \in R$

- ma w punkcie $\mathbf{x}^0$ pochodne cząstkowe
- ma w punkcie $\mathbf{x}^0$ ekstremum

to $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}^0) = 0$, $i=1,\ldots,n$.

Dowód. Dla prostoty przyjmijmy $n=2$. Jeżeli funkcja $f(x,y)$ ma w punkcie (x_0,y_0) ekstremum i pochodne cząstkowe, to różniczkowalna funkcja jednej zmiennej $f(x, y_0)$ ma w punkcie x_0 ekstremum.
Stąd $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0$. Podobnie $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$.

Uwaga: punktami krytycznymi są także punkty w których pochodne cząstkowe nie istnieją.

Warunek wystarczający istnienia ekstremum

Jeżeli $f: R^n \supset Ot(\mathbf{x}^0,\delta) \ni \mathbf{x} \to f(\mathbf{x}) \in R$

- jest klasy $C^2(Ot(\mathbf{x}^0,\delta))$ (tzn. ma drugie pochodne cząstkowe ciągłe w $Ot(\mathbf{x}^0,\delta)$)
- $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}^0) = 0$, $i=1,\ldots,n$
- $d^2 f(\mathbf{x}^0, \Delta\mathbf{x}) > 0$ (<), $\forall \Delta\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$

to f ma w punkcie $\mathbf{x}^0$ minimum (maksimum) lokalne właściwe

Dowód. Z wzoru Taylora dokładnie jak dla funkcji jednej zmiennej mamy
$f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}^0) = \frac{1}{2!} d^2 f(\mathbf{x}^0 + \theta(\mathbf{x} - \mathbf{x}^0), \mathbf{x} - \mathbf{x}^0) > 0$ $\forall \Delta\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, gdy $d^2 f(\mathbf{x}^0, \Delta\mathbf{x}) > 0$, gdyż z ciągłości pochodnych rzędu drugiego, dla ustalonych przyrostów druga różniczka jest funkcją ciągłą w $\mathbf{x}^0$ więc z twierdzenia o lokalnym zachowaniu znaku $d^2 f(\mathbf{x}^0, \mathbf{x} - \mathbf{x}^0)$ i $d^2 f(\mathbf{x}^0 + \theta(\mathbf{x} - \mathbf{x}^0), \mathbf{x} - \mathbf{x}^0)$ mają ten sam znak dla $\forall \Delta\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$

Problem. Jak badać warunek $d^2 f(\mathbf{x}^0, \Delta\mathbf{x}) > 0$ (<), $\forall \Delta\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$. Dla $n=2$

$$d^2((x_1,x_2),(\Delta x_1,\Delta x_2)) = \begin{bmatrix} \Delta x_1 & \Delta x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x_1,x_2) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(x_1,x_2) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x_1,x_2) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x_1,x_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \Delta x_1 & \Delta x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ B & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \end{bmatrix} = A\Delta x_1^2 + 2B\Delta x_1 \Delta x_2 + C\Delta x_2^2 = \{\text{gdy } A \neq 0\}$$

$$= A\{\Delta x_1^2 + 2\frac{B}{A}\Delta x_1 \Delta x_2 + \frac{B^2}{A^2}\Delta x_2^2\} - \frac{B^2}{A}\Delta x_2^2 + C\Delta x_2^2 = A\left((\Delta x_1 + \frac{B}{A}\Delta x_2)^2 + \frac{AC - B^2}{A^2}\Delta x_2^2 \right)$$

Widać, że jeśli

- $D_1 = A > 0$ i $D_2 = \det\begin{bmatrix} A & B \\ B & C \end{bmatrix} > 0$ **to druga różniczka jest dodatnia**
- $D_1 = A < 0$ i $D_2 = \det\begin{bmatrix} A & B \\ B & C \end{bmatrix} > 0$ **to druga różniczka jest ujemna**

Uzupełnienia z algebry (nieobowiązujące)

- Formą kwadratową n zmiennych rzeczywistych nazywamy funkcję

$$\varphi : R^n \ni \mathbf{x} \to \varphi(\mathbf{x}) = \varphi(x_1,\dots,x_n) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j \quad \text{przy czym } a_{ij} = a_{ji}$$

- Forma kwadratowa ma przy ustalonej bazie przestrzeni $X=R^n$ ma dokładnie jedną reprezentację macierzową $\varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{x} = \langle \mathbf{A}\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle$ gdzie **A** jest macierzą symetryczną.

Formę kwadratową φ nazywamy

- nieujemną - gdy $\forall \mathbf{x} \in R^n \quad \varphi(\mathbf{x}) \geq 0$
- niedodatnią - gdy $\forall \mathbf{x} \in R^n \quad \varphi(\mathbf{x}) \leq 0$
- dodatnią - gdy $\forall \mathbf{x} \in R^n, \mathbf{x} \neq \mathbf{0} \ : \ \varphi(\mathbf{x}) > 0$
- ujemna - gdy $\forall \mathbf{x} \in R^n, \mathbf{x} \neq \mathbf{0} \ : \ \varphi(\mathbf{x}) < 0$
- dodatnio określoną - gdy $\exists c>0 \ \forall \mathbf{x} \in R^n \ : \ \varphi(\mathbf{x}) \geq c\|\mathbf{x}\|^2$
- ujemnie określoną - gdy $\exists c>0 \ \forall \mathbf{x} \in R^n \ : \ \varphi(\mathbf{x}) \leq -c\|\mathbf{x}\|^2$
- nieokreśloną - gdy $\exists \ \mathbf{x} \in R^n \ \varphi(\mathbf{x}) > 0$ i $\exists \ \mathbf{y} \in R^n \ \varphi(\mathbf{y}) < 0$

Uwaga. W przypadku definiowania form kwadratowych na nieskończenie wymiarowej przestrzeni liniowej unormowanej należy odróżniać pojęcia.

dodatniość formy	i	dodatnia określoność formy
ujemność formy	i	ujemna określoność formy

W przypadku przestrzeni skończenie wymiarowych pojęcia te pokrywają się. Jest to konsekwencją zwartości sfery jednostkowej w przestrzeni skończenie wymiarowej.

Def. Minorami kątowymi (odpowiednich stopni) macierzy $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$ nazywamy

następujące wyznaczniki $D_1 = |a_{11}|$, $D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$, ..., $D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$.

Twierdzenie. (**kryterium Sylvestera**).

Forma kwadratowa $\varphi(\mathbf{x})=\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{x}$ jest dodatnia (dodatnio określona) $\Leftrightarrow D_i>0 \quad \forall i$

Forma kwadratowa $\varphi(\mathbf{x})=\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{x}$ jest ujemna (ujemnie określona) $\Leftrightarrow (-1)^i D_i>0 \quad \forall i$

Jeżeli wszystkie minory kątowe D_i są różne od 0 i zmieniają się inaczej niż w powyższych przypadkach , to forma jest nieokreślona

Przykłady Wyznaczyć ekstrema lokalne funkcji

a) $f(x,y)=x^4+y^4-2x^2+4xy-2y^2$

(punkty krytyczne (0,0), $(\sqrt{2},-\sqrt{2})$, $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$. WW nie rozstrzyga w (0,0) ($f(x,x)-f(0,0)=2x^4>0$, $f(x,0)-f(0,0)=x^2(2-x^2)<0$ dla dostatecznie małych $x\neq 0$ $\Rightarrow$ brak ekstremum w (0,0) w pozostałych punktach minimum lokalne (-8))

b) $f(x,y,z)=x^2-2x-y^3+3y+5z^2$ (nieobowiązkowe)

Ekstrema globalne

Z twierdzenia Weierstrassa funkcja ciągła (wielu zmiennych) na zbiorze domkniętym i ograniczonym (a więc zwartym) D osiąga swoje kresy.

Algorytm

- szukamy punktów krytycznych we wnętrzu *int D* (*int D* *int*=interior= wnętrze)
- szukamy największej i najmniejszej wartości funkcji na brzegu D (to samo zagadnienie ale niższy wymiar)
- obliczamy wartości funkcji w wyznaczonych powyżej punktach i wybieramy (ze skończonej listy) wartość najmniejszą i największą

Przykład. Znaleźć najmniejszą i największą) wartość funkcji $f(x,y)=x^2+y^2-xy+x+y$ w trójkącie domkniętym ograniczonym przez proste $x=0$, $y=0$, $x+y+3=0$.

Odp. Max $=f(-3,0)=f(0,-3)=6$ Min$=f(-1,-1)=-1$