Matematyka dyskretna
1. Dowodzenie twierdzeń, indukcja

22.10.2020

Zadanie

Udowodnij wprost, że jeśli a i b są wymierne, to ich suma $a + b$ też jest liczbą wymierną. (Liczba t jest wymierna wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją liczby całkowite r i s takie, że $t = r/s$).

Dowód wprost: $\forall x : P(x) \Rightarrow Q(x)$

- P : a i b są wymierne
- Q : suma $a+b$ też jest liczbą wymierną
- Skoro a i b są wymierne, to istnieją liczby całkowite r_1, s_1, r_2, s_2 t.że $a = r_1/s_1$ oraz $b = r_2/s_2$
- Wówczas:
$$a+b = \frac{r_1}{s_1} + \frac{r_2}{s_2} = \frac{r_1 s_2 + r_2 s_1}{s_1 s_2}$$
- Ponieważ liczby $r_1 s_2 + r_2 s_1$ oraz $s_1 s_2$ są całkowite, $a+b$ jest liczbą wymierną.

Dowód wprost: $\forall x : P(x) \Rightarrow Q(x)$

- P : a i b są wymierne
- Q : suma $a + b$ też jest liczbą wymierną
- Skoro a i b są wymierne, to istnieją liczby całkowite r_1, s_1, r_2, s_2 t.że $a = r_1/s_1$ oraz $b = r_2/s_2$
- Wówczas:
$$a + b = \frac{r_1}{s_1} + \frac{r_2}{s_2} = \frac{r_1 s_2 + r_2 s_1}{s_1 s_2}$$
- Ponieważ liczby $r_1 s_2 + r_2 s_1$ oraz $s_1 s_2$ są całkowite, $a + b$ jest liczbą wymierną.

Dowód wprost: $\forall x : P(x) \Rightarrow Q(x)$

- P : a i b są wymierne
- Q : suma $a + b$ też jest liczbą wymierną
- Skoro a i b są wymierne, to istnieją liczby całkowite r_1, s_1, r_2, s_2 t.że $a = r_1/s_1$ oraz $b = r_2/s_2$
- Wówczas:
$$a + b = \frac{r_1}{s_1} + \frac{r_2}{s_2} = \frac{r_1 s_2 + r_2 s_1}{s_1 s_2}$$
- Ponieważ liczby $r_1 s_2 + r_2 s_1$ oraz $s_1 s_2$ są całkowite, $a + b$ jest liczbą wymierną.

Dowód wprost: $\forall x : P(x) \Rightarrow Q(x)$

- P : a i b są wymierne
- Q : suma $a+b$ też jest liczbą wymierną
- Skoro a i b są wymierne, to istnieją liczby całkowite r_1, s_1, r_2, s_2 t.że $a = r_1/s_1$ oraz $b = r_2/s_2$
- Wówczas:
$$a+b = \frac{r_1}{s_1} + \frac{r_2}{s_2} = \frac{r_1 s_2 + r_2 s_1}{s_1 s_2}$$
- Ponieważ liczby $r_1 s_2 + r_2 s_1$ oraz $s_1 s_2$ są całkowite, $a+b$ jest liczbą wymierną.

Dowód wprost: $\forall x : P(x) \Rightarrow Q(x)$

- P : a i b są wymierne
- Q : suma $a + b$ też jest liczbą wymierną
- Skoro a i b są wymierne, to istnieją liczby całkowite r_1, s_1, r_2, s_2 t.że $a = r_1/s_1$ oraz $b = r_2/s_2$
- Wówczas:
$$a + b = \frac{r_1}{s_1} + \frac{r_2}{s_2} = \frac{r_1 s_2 + r_2 s_1}{s_1 s_2}$$
- Ponieważ liczby $r_1 s_2 + r_2 s_1$ oraz $s_1 s_2$ są całkowite, $a + b$ jest liczbą wymierną.

Dowód wprost: $\forall x : P(x) \Rightarrow Q(x)$

- P : a i b są wymierne
- Q : suma $a + b$ też jest liczbą wymierną
- Skoro a i b są wymierne, to istnieją liczby całkowite r_1, s_1, r_2, s_2 t.że $a = r_1/s_1$ oraz $b = r_2/s_2$
- Wówczas:
$$a + b = \frac{r_1}{s_1} + \frac{r_2}{s_2} = \frac{r_1 s_2 + r_2 s_1}{s_1 s_2}$$
- Ponieważ liczby $r_1 s_2 + r_2 s_1$ oraz $s_1 s_2$ są całkowite, $a + b$ jest liczbą wymierną.

Zadanie

Pokaż nie wprost, że dla całkowitych a i b, jeśli $(a+b+1)^2$ jest liczbą parzystą, to a jest nieparzyste lub b jest nieparzyste. (Liczba całkowita t jest parzysta (nieparzysta) wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje liczba całkowita k taka, że $t = 2k$ $(t = 2k + 1)$).

Dowód nie wprost (dla hipotezy $\forall x : P(x) \Rightarrow Q(x)$):

$$\forall x : \neg Q(x) \Rightarrow \neg P(x)$$

- P : a i b są całkowite oraz $(a+b+1)^2$ jest liczbą parzystą
- Q : a jest nieparzyste lub b jest nieparzyste
- $\neg Q$: a jest parzyste i b jest parzyste
- Zatem załóżmy, że a i b są liczbami parzystymi.
- Wówczas $a+b+1$ jest liczbą nieparzystą.
- Ponieważ iloczyn liczb nieparzystych jest nieparzysty, to $(a+b+1)^2$ jest też liczbą nieparzystą, czyli zachodzi $\neg P$.

Dowód nie wprost (dla hipotezy $\forall x : P(x) \Rightarrow Q(x)$):

$$\forall x : \neg Q(x) \Rightarrow \neg P(x)$$

- P : a i b są całkowite oraz $(a+b+1)^2$ jest liczbą parzystą
- Q : a jest nieparzyste lub b jest nieparzyste
- $\neg Q$: a jest parzyste i b jest parzyste
- Zatem załóżmy, że a i b są liczbami parzystymi.
- Wówczas $a+b+1$ jest liczbą nieparzystą.
- Ponieważ iloczyn liczb nieparzystych jest nieparzysty, to $(a+b+1)^2$ jest też liczbą nieparzystą, czyli zachodzi $\neg P$.

Dowód nie wprost (dla hipotezy $\forall x : P(x) \Rightarrow Q(x)$):

$$\forall x : \neg Q(x) \Rightarrow \neg P(x)$$

- P : a i b są całkowite oraz $(a+b+1)^2$ jest liczbą parzystą
- Q : a jest nieparzyste lub b jest nieparzyste
- $\neg Q$: a jest parzyste i b jest parzyste
- Zatem załóżmy, że a i b są liczbami parzystymi.
- Wówczas $a+b+1$ jest liczbą nieparzystą.
- Ponieważ iloczyn liczb nieparzystych jest nieparzysty, to $(a+b+1)^2$ jest też liczbą nieparzystą, czyli zachodzi $\neg P$.

Dowód nie wprost (dla hipotezy $\forall x : P(x) \Rightarrow Q(x)$):

$$\forall x : \neg Q(x) \Rightarrow \neg P(x)$$

- P : a i b są całkowite oraz $(a+b+1)^2$ jest liczbą parzystą
- Q : a jest nieparzyste lub b jest nieparzyste
- $\neg Q$: a jest parzyste i b jest parzyste
- Zatem załóżmy, że a i b są liczbami parzystymi.
- Wówczas $a+b+1$ jest liczbą nieparzystą.
- Ponieważ iloczyn liczb nieparzystych jest nieparzysty, to $(a+b+1)^2$ jest też liczbą nieparzystą, czyli zachodzi $\neg P$.

Dowód nie wprost (dla hipotezy $\forall x : P(x) \Rightarrow Q(x)$):

$$\forall x : \neg Q(x) \Rightarrow \neg P(x)$$

- P : a i b są całkowite oraz $(a+b+1)^2$ jest liczbą parzystą
- Q : a jest nieparzyste lub b jest nieparzyste
- $\neg Q$: a jest parzyste i b jest parzyste
- Zatem załóżmy, że a i b są liczbami parzystymi.
- Wówczas $a+b+1$ jest liczbą nieparzystą.
- Ponieważ iloczyn liczb nieparzystych jest nieparzysty, to $(a+b+1)^2$ jest też liczbą nieparzystą, czyli zachodzi $\neg P$.

Dowód nie wprost (dla hipotezy $\forall x : P(x) \Rightarrow Q(x)$):

$$\forall x : \neg Q(x) \Rightarrow \neg P(x)$$

- P : a i b są całkowite oraz $(a+b+1)^2$ jest liczbą parzystą
- Q : a jest nieparzyste lub b jest nieparzyste
- $\neg Q$: a jest parzyste i b jest parzyste
- Zatem załóżmy, że a i b są liczbami parzystymi.
- Wówczas $a+b+1$ jest liczbą nieparzystą.
- Ponieważ iloczyn liczb nieparzystych jest nieparzysty, to $(a+b+1)^2$ jest też liczbą nieparzystą, czyli zachodzi $\neg P$.

Dowód nie wprost (dla hipotezy $\forall x : P(x) \Rightarrow Q(x)$):

$$\forall x : \neg Q(x) \Rightarrow \neg P(x)$$

- P : a i b są całkowite oraz $(a + b + 1)^2$ jest liczbą parzystą
- Q : a jest nieparzyste lub b jest nieparzyste
- $\neg Q$: a jest parzyste i b jest parzyste
- Zatem załóżmy, że a i b są liczbami parzystymi.
- Wówczas $a + b + 1$ jest liczbą nieparzystą.
- Ponieważ iloczyn liczb nieparzystych jest nieparzysty, to $(a + b + 1)^2$ jest też liczbą nieparzystą, czyli zachodzi $\neg P$.

Zadanie

Udowodnij przez zaprzeczenie, że dla całkowitych m, n *i* r*, jeśli* $m + n$ *i* $n + r$ *są parzyste, to* $m + r$ *też jest liczbą parzystą.*

Dowód przez zaprzeczenie (hipotezy $\forall x : P(x) \rightarrow Q(x)$):

$$\forall x : \neg(P(x) \wedge \neg Q(x))$$

- P :
- Q :
- Załóżmy, że zachodzi $P \wedge \neg Q$

Dowód przez zaprzeczenie (hipotezy $\forall x : P(x) \rightarrow Q(x)$):

$$\forall x : \neg(P(x) \wedge \neg Q(x))$$

- P : m, n, r są liczbami całkowitymi, $m + n$ i $n + r$ są parzyste
- Q :
- Załóżmy, że zachodzi $P \wedge \neg Q$

Dowód przez zaprzeczenie (hipotezy $\forall x : P(x) \rightarrow Q(x)$):

$$\forall x : \neg(P(x) \land \neg Q(x))$$

- P : m, n, r są liczbami całkowitymi, $m + n$ i $n + r$ są parzyste
- Q : $m + r$ też jest liczbą parzystą
- Załóżmy, że zachodzi $P \land \neg Q$

Dowód przez zaprzeczenie (hipotezy $\forall x : P(x) \to Q(x)$):

$$\forall x : \neg(P(x) \land \neg Q(x))$$

- P : m, n, r są liczbami całkowitymi, $m + n$ i $n + r$ są parzyste
- Q : $m + r$ też jest liczbą parzystą
- Załóżmy, że zachodzi $P \land \neg Q$, czyli $m + n$ i $n + r$ są parzyste, ale $m + r$ jest liczbą nieparzystą.

Jak znaleźć tutaj sprzeczność?

Jak znaleźć tutaj sprzeczność?

Skoro $m + n$ i $n + r$ są parzyste, to $(m + n) + (n + r)$ też jest liczbą parzystą.

Jak znaleźć tutaj sprzeczność?

Skoro $m + n$ i $n + r$ są parzyste, to $(m + n) + (n + r)$ też jest liczbą parzystą.

Ale $(m + n) + (n + r) = (m + r) + 2n$, czyli ta liczba musi być nieparzysta, ponieważ $m + r$ jest nieparzysta.

Jak znaleźć tutaj sprzeczność?

Skoro $m+n$ i $n+r$ są parzyste, to $(m+n)+(n+r)$ też jest liczbą parzystą.

Ale $(m+n)+(n+r)=(m+r)+2n$, czyli ta liczba musi być nieparzysta, ponieważ $m+r$ jest nieparzysta.

Sprzeczność!

Zadanie

Zaproponuj metodę dowodu twierdzenia: Jeśli wybierzemy 3 skarpetki z szuflady zawierającej tylko czarne i niebieskie skarpetki, to będziemy mieli pewną jednokolorową parę skarpetek.

Zadanie

Udowodnij indukcyjnie, że dla wszystkich $n \geqslant 1$

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (2n-1)^2 = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}.$$

Twierdzenie (Zasada indukcji matematycznej)

Niech dla każdego n naturalnego $P(n)$ będzie zdaniem, które może być prawdziwe lub fałszywe. Aby udowodnić, że dla każdego naturalnego n, $n \geqslant n_0$, zdanie $P(n)$ jest prawdziwe, wystarczy pokazać, że

1. *zdanie $P(n_0)$ jest prawdziwe,*
2. *dla każdego $k \geqslant n_0$,*

$$P(k) \Rightarrow P(k+1),$$

tzn. zdanie $P(k+1)$ jest prawdziwe, jeśli tylko zdanie $P(k)$ jest prawdziwe.

Baza indukcji: $P(1)$, $n = 1$

Baza indukcji: $P(1)$, $n = 1$

$2n - 1 = 2 \cdot 1 - 1 = 1$

Baza indukcji: $P(1)$, $n = 1$

$2n - 1 = 2 \cdot 1 - 1 = 1$

$L = 1^2 = 1$

Baza indukcji: $P(1)$, $n = 1$

$2n - 1 = 2 \cdot 1 - 1 = 1$

$L = 1^2 = 1$

$P = \frac{1 \cdot (2 \cdot 1 - 1)(2 \cdot 1 + 1)}{3} = \frac{3}{3} = 1$

Baza indukcji: $P(1)$, $n = 1$

$2n - 1 = 2 \cdot 1 - 1 = 1$

$L = 1^2 = 1$

$P = \frac{1 \cdot (2 \cdot 1 - 1)(2 \cdot 1 + 1)}{3} = \frac{3}{3} = 1$

$L = P$

Krok indukcyjny: $P(n) \Rightarrow P(n+1)$

Załóżmy, że równość zachodzi dla pewnego $n \geqslant 1$, tzn. mamy następującą tożsamość:

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (2n-1)^2 = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}.$$

Musimy pokazać, że w takim razie równość zachodzi też dla $n+1$, czyli że zachodzi:

$$1^2+3^2+5^2+\ldots+(2(n+1)-1)^2 = \frac{(n+1)(2(n+1)-1)(2(n+1)+1)}{3}.$$

Krok indukcyjny: $P(n) \Rightarrow P(n+1)$

Załóżmy, że równość zachodzi dla pewnego $n \geqslant 1$, tzn. mamy następującą tożsamość:

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (2n-1)^2 = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}.$$

Musimy pokazać, że w takim razie równość zachodzi też dla $n+1$, czyli że zachodzi:

$$1^2+3^2+5^2+\ldots+(2(n+1)-1)^2 = \frac{(n+1)(2(n+1)-1)(2(n+1)+1)}{3}.$$

$$
\begin{aligned}
L &= 1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (2n-1)^2 + (2(n+1)-1)^2 \\
&= 1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (2n-1)^2 + (2n+1)^2 \\
&= \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3} + (2n+1)^2 \\
&= \frac{(2n+1)}{3} \cdot (n(2n-1) + 3(2n+1)) \\
&= \frac{(2n+1)}{3} \cdot \left(2n^2 + 5n + 3\right) \\
&= \frac{(2n+1)}{3} \cdot (2n+3)(n+1) = P
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
L &= 1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (2n-1)^2 + (2(n+1)-1)^2 \\
&= 1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (2n-1)^2 + (2n+1)^2 \\
&= \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3} + (2n+1)^2 \\
&= \frac{(2n+1)}{3} \cdot (n(2n-1) + 3(2n+1)) \\
&= \frac{(2n+1)}{3} \cdot \left(2n^2 + 5n + 3\right) \\
&= \frac{(2n+1)}{3} \cdot (2n+3)(n+1) = P
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
L &= 1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (2n-1)^2 + (2(n+1)-1)^2 \\
&= 1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (2n-1)^2 + (2n+1)^2 \\
&= \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3} + (2n+1)^2 \\
&= \frac{(2n+1)}{3} \cdot (n(2n-1) + 3(2n+1)) \\
&= \frac{(2n+1)}{3} \cdot \left(2n^2 + 5n + 3\right) \\
&= \frac{(2n+1)}{3} \cdot (2n+3)(n+1) = P
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
L &= 1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (2n-1)^2 + (2(n+1)-1)^2 \\
&= 1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (2n-1)^2 + (2n+1)^2 \\
&= \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3} + (2n+1)^2 \\
&= \frac{(2n+1)}{3} \cdot (n(2n-1) + 3(2n+1)) \\
&= \frac{(2n+1)}{3} \cdot \left(2n^2 + 5n + 3\right) \\
&= \frac{(2n+1)}{3} \cdot (2n+3)(n+1) = P
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
L &= 1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (2n-1)^2 + (2(n+1)-1)^2 \\
&= 1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (2n-1)^2 + (2n+1)^2 \\
&= \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3} + (2n+1)^2 \\
&= \frac{(2n+1)}{3} \cdot (n(2n-1) + 3(2n+1)) \\
&= \frac{(2n+1)}{3} \cdot \left(2n^2 + 5n + 3\right) \\
&= \frac{(2n+1)}{3} \cdot (2n+3)(n+1) = P
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
L &= 1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (2n-1)^2 + (2(n+1)-1)^2 \\
&= 1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (2n-1)^2 + (2n+1)^2 \\
&= \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3} + (2n+1)^2 \\
&= \frac{(2n+1)}{3} \cdot (n(2n-1) + 3(2n+1)) \\
&= \frac{(2n+1)}{3} \cdot \left(2n^2 + 5n + 3\right) \\
&= \frac{(2n+1)}{3} \cdot (2n+3)(n+1) = P
\end{aligned}
$$

Zadanie

Udowodnij indukcyjnie, że dla wszystkich $n \geqslant 1$ i dowolnej liczby rzeczywistej $x > -1$

$$(1 + x)^n \geqslant 1 + nx.$$

Baza indukcji: $P(1)$

Baza indukcji: $P(1)$

$L = (1+x)^1 = 1 + x = 1 + 1 \cdot x = P$

Krok indukcyjny: $P(n) \Rightarrow P(n+1)$

Załóżmy, że nierówność zachodzi dla pewnego $n \geqslant 1$, czyli dla każdego $x > -1$ mamy:

$$(1+x)^n \geqslant 1 + nx.$$

Naszym celem jest pokazać, że zachodzi również:

$$(1+x)^{n+1} \geqslant 1 + (n+1)x.$$

Krok indukcyjny: $P(n) \Rightarrow P(n+1)$

Załóżmy, że nierówność zachodzi dla pewnego $n \geqslant 1$, czyli dla każdego $x > -1$ mamy:

$$(1+x)^n \geqslant 1 + nx.$$

Naszym celem jest pokazać, że zachodzi również:

$$(1+x)^{n+1} \geqslant 1 + (n+1)x.$$

Krok indukcyjny: $P(n) \Rightarrow P(n+1)$

Załóżmy, że nierówność zachodzi dla pewnego $n \geqslant 1$, czyli dla każdego $x > -1$ mamy:

$$(1+x)^n \geqslant 1 + nx.$$

Naszym celem jest pokazać, że zachodzi również:

$$(1+x)^{n+1} \geqslant 1 + (n+1)x.$$

$$L = (1 + x)^{n+1}$$

$$L = (1+x)^{n+1} = (1+x)(1+x)^n$$

$$L = (1+x)^{n+1} = (1+x)(1+x)^n$$
$$\geqslant (1+x)(1+nx)$$

$$
\begin{aligned}
L &= (1+x)^{n+1} = (1+x)(1+x)^n \\
&\geqslant (1+x)(1+nx) \\
&= 1 + x + nx + nx^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
L &= (1+x)^{n+1} = (1+x)(1+x)^{n} \\
&\geqslant (1+x)(1+nx) \\
&= 1 + x + nx + nx^2 \\
&\geqslant 1 + (n+1)x
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
L &= (1+x)^{n+1} = (1+x)(1+x)^n \\
&\geqslant (1+x)(1+nx) \\
&= 1 + x + nx + nx^2 \\
&\geqslant 1 + (n+1)x = P
\end{aligned}$$

Zadanie

Pokazać indukcyjnie, że jeżeli dla ciągu a_n $(n \geqslant 0)$ spełnione są warunki:

$$a_0 = 1;$$
$$a_1 = -1;$$
$$a_2 = 1;$$
$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} - a_{n-3}, \ \text{dla } n \geqslant 3,$$

to $a_n = (-1)^n$ dla $n \geqslant 0$.

Tym razem będziemy musieli użyć **silnej indukcji**.

Dlaczego?

Krok indukcyjny: $P(n), P(n+1), P(n+2) \Rightarrow P(n+3)$

Tym razem będziemy musieli użyć **silnej indukcji**.

Dlaczego?

Krok indukcyjny: $P(n), P(n+1), P(n+2) \Rightarrow P(n+3)$

Tym razem będziemy musieli użyć **silnej indukcji**.

Dlaczego?

Krok indukcyjny: $P(n), P(n+1), P(n+2) \Rightarrow P(n+3)$

Twierdzenie (Silna zasada indukcji matematycznej)

Niech dla każdego n naturalnego $P(n)$ będzie zdaniem, które może być prawdziwe lub fałszywe. Aby udowodnić, że dla każdego naturalnego n, $n \geqslant n_0$, zdanie $P(n)$ jest prawdziwe, wystarczy pokazać, że

1. *zdanie $P(n_0)$ jest prawdziwe,*
2. *dla każdego $k \geqslant n_0$,*

$$(P(n_0) \wedge P(n_0+1) \wedge \ldots \wedge P(k)) \Rightarrow P(k+1),$$

tzn. zdanie $P(k+1)$ jest prawdziwe, jeśli tylko wszystkie zdania $P(i)$ są prawdziwe dla $n_0 \leqslant i \leqslant k$.

Baza indukcji: $P(0), P(1), P(2)$

$P(0) = 1 = (-1)^0$

$P(1) = -1 = (-1)^1$

$P(2) = 1 = (-1)^2$

Baza indukcji: $P(0), P(1), P(2)$

$P(0) = 1 = (-1)^0$

$P(1) = -1 = (-1)^1$

$P(2) = 1 = (-1)^2$

Baza indukcji: $P(0), P(1), P(2)$

$P(0) = 1 = (-1)^0$

$P(1) = -1 = (-1)^1$

$P(2) = 1 = (-1)^2$

Baza indukcji: $P(0), P(1), P(2)$

$P(0) = 1 = (-1)^0$

$P(1) = -1 = (-1)^1$

$P(2) = 1 = (-1)^2$

Krok indukcyjny: $P(n), P(n+1), P(n+2) \Rightarrow P(n+3)$

Krok indukcyjny: $P(n), P(n+1), P(n+2) \Rightarrow P(n+3)$

Załóżmy, że dla pewnego $n \geqslant 0$ mamy:

$$a_n = (-1)^n, \; a_{n+1} = (-1)^{n+1}, \; a_{n+2} = (-1)^{n+2}.$$

Krok indukcyjny: $P(n), P(n+1), P(n+2) \Rightarrow P(n+3)$

Załóżmy, że dla pewnego $n \geqslant 0$ mamy:

$$a_n = (-1)^n,\ a_{n+1} = (-1)^{n+1},\ a_{n+2} = (-1)^{n+2}.$$

Naszym celem jest pokazać, że $a_{n+3} = (-1)^{n+3}$.

Korzystając z rekurencji otrzymujemy:

$$a_{n+3} =$$

Korzystając z rekurencji otrzymujemy:

$$a_{n+3} = a_{n+2} + a_{n+1} - a_n$$

Korzystając z rekurencji otrzymujemy:

$$a_{n+3} = a_{n+2} + a_{n+1} - a_n = (-1)^{n+2} + (-1)^{n+1} - (-1)^n$$

Korzystając z rekurencji otrzymujemy:

$$
\begin{aligned}
a_{n+3} &= a_{n+2} + a_{n+1} - a_n = (-1)^{n+2} + (-1)^{n+1} - (-1)^n \\
&= -(-1)^n
\end{aligned}
$$

Korzystając z rekurencji otrzymujemy:

$$\begin{aligned} a_{n+3} &= a_{n+2} + a_{n+1} - a_n = (-1)^{n+2} + (-1)^{n+1} - (-1)^n \\ &= -(-1)^n = (-1)^{n+1} \end{aligned}$$

Korzystając z rekurencji otrzymujemy:

$$\begin{aligned} a_{n+3} &= a_{n+2} + a_{n+1} - a_n = (-1)^{n+2} + (-1)^{n+1} - (-1)^n \\ &= -(-1)^n = (-1)^{n+1} = (-1)^{n+3} \end{aligned}$$