Logika i teoria mnogości

Ćwiczenia 6

Kwantyfikatory

Mamy dwa kwantyfikatory: ogólny $\forall$ i szczegółowy $\exists$.
Inne nazwy dla kwantyfikatora $\forall$: generalny, uniwersalny, duży;
dla $\exists$: istnienia, egzystencjalny, mały.
Kwantyfikator występuje ze zmienną.
$\forall_x$ czytamy: "dla każdego x"; $\exists_x$ czytamy: "istnieje x takie, że"
Np. $\forall_x(x + x = 2x)$ czytamy: "dla każdego x, x plus x równa się dwa x".
$\exists_x(x^2 = 4)$ czytamy: "istnieje x takie, że x kwadrat równa się cztery".

Kwantyfikatorowe schematy zdań języka polskiego

Za pomocą kwantyfikatorów możemy bardziej precyzyjnie opisać strukturę logiczną zdania. Rozważmy zdanie: Każdy student zdał jakiś egzamin. W tym zdaniu wyraz 'każdy' odpowiada kwnatyfikatorowi $\forall$, a wyraz 'jakiś' kwantyfikatorowi $\exists$.

W językach naturalnych nie występuje konstrukcja $\forall_x$, ani $\exists_x$. Wyrazy odpowiadające kwantyfikatorom, np. każdy, wszystkie (ogólny), jakiś, pewien, niektóre (szczegółowy), bezpośrednio łączą się z nazwami ogólnymi, np. student, studenci, człowiek, zwierzę.

Nie przyjmujemy zmiennych, reprezentujących nazwy ogólne. Nazwy ogólne zastępujemy predykatami jednoargumentowymi. Zamiast nazwy 'student' piszemy: x jest studentem. Zapis symboliczny: $P(x)$ czytamy: "P od x", co znaczy: x jest P.

W zdaniu 'Każdy student zdał jakiś egzamin' wyróżniamy dwa predykaty jednoargumentowe, odpowiadajace nazwom ogólnym 'student' i 'egzamin', oraz predykat dwuargumentowy, odpowiadajacy czasownikowi 'zdał'. Stosujemy zmienne x, y, z itp. Przyjmujemy, że ich zakres to zbiór wszystkich studentów i egzaminów. Nadajemy znaczenie formułom atomowym.

$P(x) : x$ jest studentem
$Q(x) : x$ jest egzaminem
$R(x, y) : x$ zdał y
Logiczny schemat zdania: $\forall_{P(x)}\exists_{Q(y)}R(x, y)$
W tym schemacie występują kwantyfikatory ograniczone.
$\forall_{P(x)}$ czytamy: "dla każdego x, spełniajacego $P(x)$", czyli: dla każdego x, będącego studentem.

$\exists_{Q(y)}$ czytamy: "istnieje y, spełniajace $Q(y)$" (i takie, że), czyli: istnieje y, będące egzaminem.

Możemy wyeliminować kwantyfikatory ograniczone, stosując prawa eliminacji:

$$\forall_{\varphi(x)}\psi(x) \Leftrightarrow \forall_x(\varphi(x) \Rightarrow \psi(x))$$

$$\exists_{\varphi(x)}\psi(x) \Leftrightarrow \exists_x(\varphi(x) \wedge \psi(x))$$

Wobec tego, schemat $\forall_{P(x)}\exists_{Q(y)}R(x,y)$ jest logicznie równoważny formule:

$$\forall_x(P(x) \Rightarrow \exists_y(Q(y) \wedge R(x,y)))$$

Uwaga 1. Struktura logiczna schematu różni się istotnie od struktury gramatycznej zdania. W zdaniu wyraz 'jakiś' występuje w dopełnieniu 'jakiś egzamin', które piszemy po czasowniku przechodnim. W logice kwantyfikator zawsze piszemy przed warunkiem, na który ten kwantyfikator działa. W drugim schemacie pojawiają się implikacja i koniunkcja, których nie ma w analizowanym zdaniu. Gdy tworzymy schemat zdania, na ogół dobrze jest najpierw utworzyć schemat z kwantyfikatorami ograniczonymi (ma prostszą strukturę), a potem wyeliminować kwantyfikatory ograniczone za pomocą praw eliminacji.

W powyższych schematach występowały dwa kwantyfikatory. Zdania z jednym wyrazem, odpowiadającym kwantyfikatorowi, mają prostsze schematy.
Rozważmy zdanie: Żaden student nie jest egzaminem. Wyraz 'żaden' odpowiada kwantyfikatorowi ogólnemu $\forall$. W języku polskim stosujemy go wtedy, gdy działa na zaprzeczone wyrażenie, tu 'nie jest egzaminem'.

Pierwszy schemat: $\forall_{P(x)}\neg Q(x)$.
Drugi schemat: $\forall_x(P(x) \Rightarrow \neg Q(x))$

Zdanie: Pewien student jest egzaminem. To zdanie jest fałszywe, ale przecież można tworzyć schematy zdań fałszywych.

Pierwszy schemat: $\exists_{P(x)}Q(x)$.
Drugi schemat: $\exists_x(P(x) \wedge Q(x))$

Przykłady z dwoma kwantyfikatorami.

Zdanie: Pewien student zdał wszystkie egzaminy.
Pierwszy schemat: $\exists_{P(x)}\forall_{Q(y)}R(x,y)$
Drugi schemat: $\exists_x(P(x) \wedge \forall_y(Q(y) \Rightarrow R(x,y)))$

Zdanie: Pewien student nie zdał żadnego egzaminu.
Pierwszy schemat: $\exists_{P(x)}\forall_{Q(y)}\neg R(x,y)$ (należy zauważyć, że $\forall_{Q(y)}$ działa na $\neg R(x,y)$)
Drugi schemat: $\exists_x(P(x) \wedge \forall_y(Q(y) \Rightarrow \neg R(x,y)))$

Zdanie: Pewien student nie zdał wszystkich egzaminów.
Pierwszy schemat: $\exists_{P(x)}\neg\forall_{Q(y)}R(x,y)$ (tu $\forall_{Q(y)}$ działa na warunek niezaprzeczony)
Drugi schemat: $\exists_x(P(x) \wedge \neg\forall_y(Q(y) \Rightarrow R(x,y)))$

Uwaga 2. W dotychczasowych przykładach zawsze x reprezentowało studentów, a y egzaminy. Tak się złożyło, ale nie przyjeliśmy takiej zasady. Przypomnijmy, że ustaliliśmy zakres wszystkich zmiennych jako zbiór studentów i egzaminów. Gdybyśmy zarezerwowali x dla studentów, a y dla egzaminów, to predykaty P, Q byłyby zbyteczne. Zdanie 'Każdy student zdał jakiś egzamin' miałoby schemat $\forall_x \exists_y R(x, y)$. Wtedy jednak nie moglibyśmy wyrazić bardziej skomplikowanych zdań, np.: Pewien student zdał jakieś egzaminy i nie zdał jakichś egzaminów.

Pierwszy schemat: $\exists_{P(x)} \exists_{Q(y)} \exists_{Q(z)} (R(x, y) \wedge \neg R(x, z))$
Drugi schemat: $\exists_x (P(x) \wedge \exists_y (Q(y) \wedge \exists_z (Q(z) \wedge R(x, y) \wedge \neg R(x, z))))$
Potrzebowaliśmy dwóch zmiennych, reprezentujacych egzaminy. Toteż umawiamy się, że zakres wszystkich zmiennych jest ten sam, a dodatkowe ograniczenia wyrażamy za pomocą predykatów. Kolejność zmiennych w schemacie nie ma znaczenia. Dotychczas wprowadzaliśmy je w kolejności alfabetycznej x, y, z, ale np. schemat $\forall_{P(x)} \exists_{Q(y)} R(x, y)$ jest logicznie równoważny schematowi $\forall_{P(y)} \exists_{Q(x)} R(y, x)$, na mocy praw zamiany zmiennych związanych.

Podamy jeszcze przykłady, w których warunki ograniczające są bardziej złożone.

Zdanie: Każdy student, który nie zdał jakiegoś egzaminu, nie zdał żadnego egzaminu.
Pierwszy schemat: $\forall_{P(x) \wedge \exists_{Q(y)} \neg R(x,y)} \forall_{Q(z)} \neg R(x, z)$
Drugi schemat: $\forall_x (P(x) \wedge \exists_y (Q(y) \wedge \neg R(x, y)) \Rightarrow \forall_z (Q(z) \Rightarrow \neg R(x, z)))$
W obu schematach można zamienić z na y, ale użycie z poprawia czytelność.

Zdanie: Każdy student, który zaliczył wszystkie ćwiczenia, zdał wszystkie egzaminy.
Potrzebne są nowe predykaty.
$C(x) : x$ jest ćwiczeniem,
$S(x, y) : x$ zaliczył y.
Pierwszy schemat $\forall_{P(x) \wedge \forall_{C(y)} S(x,y)} \forall_{Q(z)} R(x, z)$
Drugi schemat: $\forall_x (P(x) \wedge \forall_y (C(y) \Rightarrow S(x, y)) \Rightarrow \forall_z (Q(z) \Rightarrow R(x, z)))$

Zdanie: Niektórzy studenci nie zdali egzaminu.
Tu spotykamy się z użyciem nazwy ogólnej 'egzamin' w roli nazwy indywidualnej. Mówimy o jakimś konkretnym egzaminie, określonym przez kontekst wypowiedzi. Wobec tego wprowadzamy stałą e, oznaczającą ten egzamin.
Pierwszy schemat: $\exists_{P(x)} \neg R(x, e)$.
Drugi schemat: $\exists_x (P(x) \wedge \neg R(x, e))$

Zadanie. Utwórz schematy logiczne następujących zdań (zachowując podaną symbolikę). Ignorujemy liczbę mnogą, rozumiejąc 'wszyscy' jako $\forall$, 'niektórzy' jako $\exists$.

1. Niektórzy studenci zaliczyli wszystkie ćwiczenia.
2. Każdy student zaliczył ćwiczenia. (trzeba dodać stałą c, oznaczającą konkretne ćwiczenia)

3. Niektórzy studenci zaliczyli wszystkie ćwiczenia, lecz nie zdali wszystkich egzaminów. ('lecz' to koniunkcja)

4. Pewien egzamin zdali wszyscy studenci, którzy zaliczyli wszystkie ćwiczenia.