Logika i teoria mnogości

Ćwiczenia 1

Zadanie 1. Podać przykłady zdań w sensie logicznym.

Zadanie 2. Zbudować schematy podanych zdań:

1. Jeśli myślisz jasno, to nieprawda, że nie potrafisz jasno wyrazić swoich myśli.
2. Jeżeli dwa trójkąty mają parami równe boki lub parami równe kąty, to są przystające.
3. Jeśli czytasz swobodnie po angielsku, to o ile nie potrafisz mówić w tym języku, to znasz angielski biernie.
4. Nie posiadasz gruntownej wiedzy o języku, jeśli słabo znasz gramatykę i nigdy nie uczyłeś się logiki.
5. Jan zna logikę wtedy i tylko wtedy, gdy nie jest prawdą, że nie jest prawdą, że Jan zna logikę.
6. Jeżeli nie jest prawdą, że albo prosta L jest równoległa do prostej M albo prosta P nie jest równoległa do prostej M, to albo prosta L nie jest równoległa do prostej M albo prosta P jest równoległa do prostej M.

Definicja
(i) Każda zmienna zdaniowa jest formułą języka rachunku zdań.
(ii) Jeśli φ, ψ są formułami języka rachunku zdań, to napisy $\neg(\varphi)$, $(\varphi) \wedge (\psi), (\varphi) \vee (\psi), (\varphi) \Rightarrow (\psi), (\varphi) \Leftrightarrow (\psi)$ są formułami rachunku zdań.
(iii) Nie ma innych formuł języka rachunku zdań poza zmiennymi zdaniowymi i takimi formułami, które powstają dzięki zastosowaniu reguły (ii).

Zadanie 3. Zapisać poniższe formuły po poprawnym opuszczeniu nawiasów:

- $((p) \wedge (q) \Rightarrow (q) \vee (p))$
- $(p \wedge (q \vee (r))) \Leftrightarrow (\neg(p) \Leftrightarrow (q \vee r))$
- $((p) \Leftrightarrow (q)) \wedge (\neg(p \Rightarrow (q \wedge (p))))$

Notacja beznawiasowa Łukasiewicza

$\neg$	N	$\neg p$	Np
$\wedge$	K	$p \wedge q$	Kpq
$\vee$	A	$p \vee q$	Apq
$\Rightarrow$	C	$p \Rightarrow q$	Cpq
$\Leftrightarrow$	E	$p \Leftrightarrow q$	Epq

Przykład

$p \wedge (q \vee r)$	$KpAqr$
$(p \wedge q) \vee r$	$AKpqr$
$p \Rightarrow q \wedge \neg r$	$CpKqNr$

Zadanie 4. Zapisać w notacji beznawiasowej Łukasiewicza:

- $(p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow \neg r) \Leftrightarrow r$
- $(\neg p \vee \neg q) \Leftrightarrow \neg(p \wedge q)$
- $(r \Rightarrow (p \Rightarrow q)) \wedge \neg(p \Leftrightarrow \neg q \vee r)$

Zadanie 5. Zapisać w notacji nawiasowej:

- $EApEqrCpr$
- $CCNpKrqANrp$
- $CNKpNqApEqNp$

Definicja

Niech V będzie pewnym zbiorem zmiennych zdaniowych. *Wartościowaniem* zbioru V nazywamy dowolną funkcję $w : V \mapsto \{0, 1\}$.

Definicja

Tautologią KRZ nazywamy formułę KRZ, która przyjmuje wartość logiczną 1 dla każdego wartościowania (zmiennych występujących w tej formule).

Tablice prawdziwościowe spójników logicznych

p	$\neg p$
1	0
0	1

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \Rightarrow q$	$p \Leftrightarrow q$
1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	0	1	1	0
0	0	0	0	1	1

Zadanie 6. Używając metody zero-jedynkowej sprawdzić, czy poniższe formuły są tautologiami rachunku zdań:

1. $(p \Rightarrow q) \wedge p \Rightarrow q$
2. $(p \vee q) \wedge (p \Rightarrow q) \Rightarrow (q \Rightarrow p)$
3. $p \vee (q \wedge r) \Rightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
4. $\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$
5. $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \vee r \Rightarrow q \wedge r)$
6. $(p \Rightarrow q) \Rightarrow ((r \Rightarrow s) \Rightarrow (p \wedge r \Rightarrow q \wedge s))$

Przykład

Sprawdzić metodą zero-jedynkową, czy poniższa formuła jest tautologią rachunku zdań:

$$(p \Rightarrow (q \Rightarrow r)) \Leftrightarrow (q \wedge \neg r \Rightarrow \neg p)$$

Oznaczmy:
$\varphi : (p \Rightarrow (q \Rightarrow r)) \Leftrightarrow (q \wedge \neg r \Rightarrow \neg p)$
$\psi : p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$
$\chi : q \wedge \neg r \Rightarrow \neg p$
Zatem $\varphi : \psi \Leftrightarrow \chi$

p	q	r	$q \Rightarrow r$	ψ	$\neg r$	$q \wedge \neg r$	$\neg p$	χ	φ
1	1	1	1	1	0	0	0	1	1
1	1	0	0	0	1	1	0	0	1
1	0	1	1	1	0	0	0	1	1
1	0	0	1	1	1	0	0	1	1
0	1	1	1	1	0	0	1	1	1
0	1	0	0	1	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	0	0	1	1	1
0	0	0	1	1	1	0	1	1	1

Odpowiedź: φ jest tautologią rachunku zdań.