Zadanie 1. *(6 pkt)*
Napisz pseudokod funkcji BLIZNIACZE(a, b), która zwraca $true$, jeśli dane liczby całkowite dodatnie a, b są bliźniacze, oraz $false$ w przeciwnym przypadku. Liczby a i b są bliźniacze, jeśli obie są pierwsze i różnią się o 2. Np. liczby 5 i 7 są bliźniacze. Określ pesymistyczną złożoność swojego algorytmu, używając notacji Θ (odpowiedź uzasadnij).

Zadanie 2. *(5 pkt)*
Niech $A[1..n]$ będzie tablicą zawierającą pewne liczby. Napisz pseudokod **rekurencyjnego** algorytmu znajdującego najmniejszy element w tej tablicy. Podaj równanie rekurencyjne opisujące czas działania tego algorytmu.

Zadanie 3. *(5 pkt)*
Stosując metodę **programowania dynamicznego**, napisz pseudokod algorytmu znajdującego dla danych liczb naturalnych n, k wartość funkcji $f(n, k)$ określonej wzorami:

$$f(n,k) = \begin{cases} k+1 & \text{dla } n = 0 \\ n+3 & \text{dla } k = 0 \text{ i } n > 0 \\ f(n,k-1) + 3f(n-1,k) - 2 & \text{dla } n,k > 0 \end{cases}$$

Określ pesymistyczną złożoność swojego algorytmu, używając notacji Θ (odpowiedź uzasadnij).

Zadanie 4. *(4 pkt)*
- *a.* Korzystając z definicji, sprawdź, czy prawdziwe jest oszacowanie: $3n^3 - 2n^2 + 3 = \Theta(n^3)$.
- *b.* Określ ograniczoność asymptotyczną funkcji $T(n)$ danej wzorem: $T(n) = 6T(n/3) + n$.
- *c.* Określ ograniczoność asymptotyczną funkcji $T(n)$ danej wzorem: $T(n) = 3T(n/3) + n^2$.
- *d.* Określ ograniczoność asymptotyczną funkcji $T(n)$ danej wzorem: $T(n) = T(n-1) + n/3$.

Uzasadnij wszystkie odpowiedzi.

Zadanie 5. *(5 pkt)*
Dana jest tablica $A[1..n]$ zawierająca liczby całkowite dodatnie. Napisz pseudokod algorytmu sortującego te liczby w porządku nierosnącym względem ostatniej cyfry, dowolną metodą **za wyjątkiem** sortowania przez wstawianie i sortowania bąbelkowego. Np. dla wejściowej tablicy [12, 45, 33, 87, 26, 41] prawidłowym wynikiem jest [87, 26, 45, 33, 12, 41]. Określ pesymistyczną złożoność swojego algorytmu, używając notacji Θ. Odpowiedź uzasadnij.

Twierdzenie o rekurencji uniwersalnej. Niech $a \geqslant 1$ i $b > 1$ będa stałymi, niech $f(n)$ będzie pewną funkcją i niech $T(n)$ będzie zdefiniowane dla nieujemnych liczb całkowitych przez rekurencję

$$T(n) = aT(n/b) + f(n),$$

gdzie n/b interpretujemy jako $\lfloor n/b \rfloor$ lub $\lceil n/b \rceil$. Wtedy funkcja $T(n)$ może być ograniczona asymptotycznie w następujący sposób:

1. Jeśli $f(n) = O(n^{\log_b a - \varepsilon})$ dla pewnej stałej $\varepsilon > 0$, to $T(n) = \Theta(n^{\log_b a})$.
2. Jeśli $f(n) = \Theta(n^{\log_b a})$, to $T(n) = \Theta(n^{\log_b a} \lg n)$.
3. Jeśli $f(n) = \Omega(n^{\log_b a + \varepsilon})$ dla pewnej stałej $\varepsilon > 0$ oraz $af(n/b) \leqslant cf(n)$ dla pewnej stałej $c < 1$ i wszystkich dostatecznie dużych n, to $T(n) = \Theta(f(n))$.