Logika i teoria mnogości

Ćwiczenia 10

Prawa algebry zbiorów

Definicja. Dla dowolnych zbiorów A, B określamy ich sumę $A \cup B$, iloczyn $A \cap B$ i różnicę $A \backslash B$ w następujący sposób:
$A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}$,
$A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}$,
$A \backslash B = \{x : x \in A \wedge x \notin B\}$.
Czytamy $A \cup B$: A plus B, $A \cap B$: A razy B, $A \backslash B$: A minus B.
Iloczyn $A \cap B$ nazywamy też przekrojem (cześcią wspólną) zbiorów A i B.
(D$\cup$) $x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \vee x \in B$
(D$\cap$) $x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B$
(D$\backslash$) $x \in A \backslash B \Leftrightarrow x \in A \wedge x \notin B$

Wyprowadzanie praw za pomocą (EXT)

Wyprowadzamy prawo $L = P$, wykazując równoważność:

$$x \in L \Leftrightarrow x \in P$$

Zadanie 1. Za pomocą (Ext), wyprowadzić następujace prawa algebry zbiorów.
(a) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
(b) $(A \backslash B) \backslash C = A \backslash (B \cup C)$
(c) $A \backslash (B \backslash C) = (A \backslash B) \cup (A \cap C)$

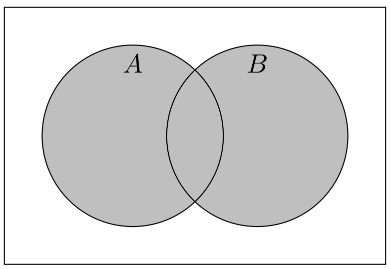
Rozwiązania
(a)
Wykazujemy: $x \in A \cap (B \cup C) \Leftrightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
$x \in A \cap (B \cup C) \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B \cup C) \Leftrightarrow$
$x \in A \wedge (x \in B \vee x \in C) \Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B) \vee (x \in A \wedge x \in C) \Leftrightarrow$
$x \in A \cap B \vee x \in A \cap C \Leftrightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

(b)
$x \in (A \backslash B) \backslash C \Leftrightarrow x \in A \backslash B \wedge \neg(x \in C) \Leftrightarrow$
$x \in A \wedge \neg(x \in B) \wedge \neg(x \in C) \Leftrightarrow x \in A \wedge \neg(x \in B \vee x \in C) \Leftrightarrow$
$x \in A \wedge \neg(x \in B \cup C) \Leftrightarrow x \in A \backslash (B \cup C)$

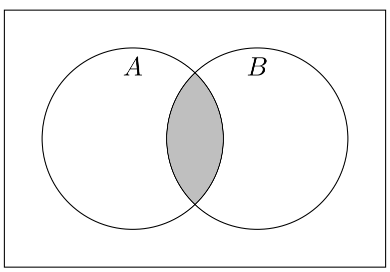
(c)
$x \in A\backslash(B\backslash C) \Leftrightarrow x \in A \wedge \neg(x \in B\backslash C) \Leftrightarrow$
$x \in A \wedge \neg(x \in B \wedge \neg(x \in C)) \Leftrightarrow x \in A \wedge (\neg(x \in B) \vee x \in C) \Leftrightarrow$
$(x \in A \wedge \neg(x \in B)) \vee (x \in A \wedge x \in C) \Leftrightarrow x \in A\backslash B \vee x \in A \cap C \Leftrightarrow$
$x \in (A\backslash B) \cup (A \cap C)$

Diagramy Venna

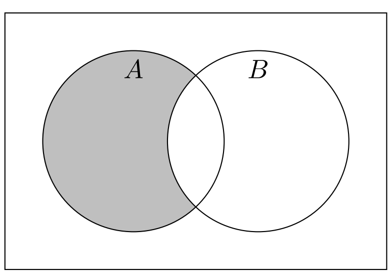
Diagramy Venna obrazują działania na zbiorach i równościowe prawa algebry zbiorów.



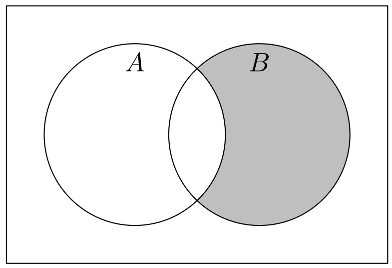
$A \cup B$



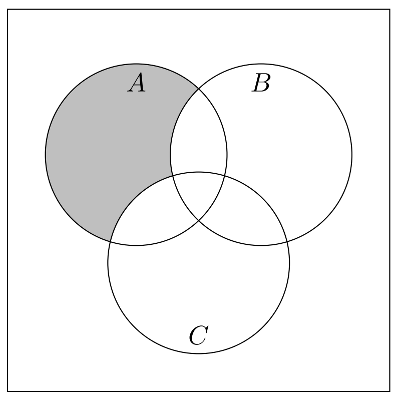
$A \cap B$



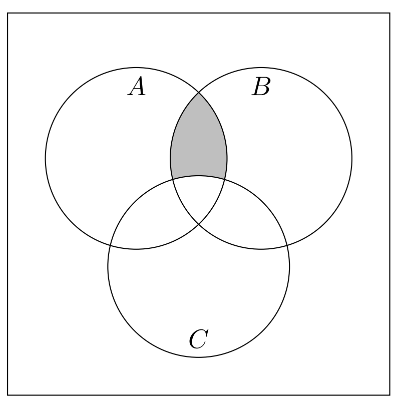
$A \setminus B$



$B \setminus A$



$A \setminus (B \cup C)$



$(A \cap B) \setminus C$

Dla zbioru $A \subset U$ (uniwersum) określamy zbiór:
$A' = U \backslash A = \{x \in U : x \notin A\}$
zwany *dopełnieniem* zbioru A (do uniwersum U).

Zadanie 2. Narysować diagramy Venna obrazujące następujące prawa:
(a) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
(b) $A \backslash (B \cup C) = (A \backslash B) \cap (A \backslash C)$
(c) $(A \backslash B) \cup (B \backslash A) = (A \cup B) \backslash (A \cap B)$

Zadanie 3. Wyprowadzić (za pomocą Ext) prawa z Zadania 2.

Zadanie 4. Narysować diagramy Venna dla praw z Zadania 1.

Logika i teoria mnogości

Ćwiczenia 11

Dla zbioru $A \subset U$ (uniwersum) określamy zbiór:
$A' = U \backslash A = \{x \in U : x \notin A\}$
zwany *dopełnieniem* zbioru A (do uniwersum U).

Różnica symetryczna zbiorów A i B:
$A \div B = \{x : (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \notin A \wedge x \in B)\}$
$x \in A \div B \Leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \notin A \wedge x \in B)$

Zadanie 1. Wyprowadzić następujące prawa:

(a) $(A \cup B)' = A' \cap B'$
(b) $(A \cap B)' = A' \cup B'$
(c) $(A \backslash B) \cap C' = A \cap (B \cup C)'$
(d) $A \div B = (A \cup B) \backslash (A \cap B)$
(e) $A \cap (B \div C) = (A \cap B) \div (A \cap C)$

Zadanie 2. Wykazać, że dla wszystkich zbiorów A, B, C zachodzą następujące implikacje:
(a) $A \subseteq B \Rightarrow A \cap C \subseteq B \cap C$
(b) $A \subseteq B \Rightarrow C \backslash B \subseteq C \backslash A$
(c) $A \subseteq B \wedge C \subseteq D \Rightarrow A \cap C \subseteq B \cap D$
(d) $A \subseteq B \wedge C \subseteq D \Rightarrow A \backslash D \subseteq B \backslash C$

Działania nieskończone

Indeksowana rodzina zbiorów: $\{A_i\}_{i \in I}$. Poszczególne zbiory tej rodziny są oznaczone indeksami.
I to ustalony zbiór indeksów.
Inne oznaczenie: $\{A_i : i \in I\}$
Określamy działania sumy i iloczynu indeksowanej rodziny zbiorów $\{A_i\}_{i \in I}$

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{x : \exists_{i \in I} (x \in A_i)\}$$

$$\bigcap_{i \in I} A_i = \{x : \forall_{i \in I} (x \in A_i)\}$$

Słownie: Suma rodziny $\{A_i\}_{i\in I}$ jest zbioren tych wszystkich elementów, które należą do przynajmniej jednego zbioru A_i.

Iloczyn rodziny $\{A_i\}_{i\in I}$ jest zbioren tych wszystkich elementów, które należą do każdego zbioru A_i.

Mamy:

$$\bigcup_{i\in I} A_i = \bigcup\{A_i\}_{i\in I}, \qquad \bigcup_{i\in\{1,2\}} A_i = A_1 \cup A_2$$

$$\bigcap_{i\in I} A_i = \bigcap\{A_i\}_{i\in I}, \qquad \bigcap_{i\in\{1,2\}} A_i = A_1 \cap A_2$$

Uwaga. Dla $I = \emptyset$, $\forall_{i\in I}(x \in A_i)$ jest prawdą dla dowolnego obiektu x, więc $\bigcap_{i\in\emptyset} A_i$ nie istnieje (jako zbiór). Zatem powyższą definicję iloczynu przyjmujemy tylko dla $I \neq \emptyset$. Dla sumy to ograniczenie nie jest potrzebne. Mamy $\bigcup_{i\in\emptyset} A_i = \emptyset$.

Uwaga. Gdy wszystkie zbiory A_i są podzbiorami ustalonego uniwersum U, często przyjmuje się inną definicję iloczynu:

$$\bigcap_{i\in I} A_i = \{x \in U : \forall_{i\in I}(x \in A_i)\}$$

Zgodnie z tą defincją $\bigcap_{i\in\emptyset} A_i = U$, czyli iloczyn pustej rodziny zbiorów jest określony. Dalej przyjmujemy poprzednią definicję (bez U).

Zadanie 3. Dane są nieskończone ciągi zbiorów:
(a) $\{x : -1 < x < 1\}, \{x : -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}\}, \{x : -\frac{1}{3} < x < \frac{1}{3}\}, \ldots$
(b) $\{x : 0 \leq x \leq 1\}, \{x : 0 \leq x \leq 1\frac{1}{2}\}, \{x : 0 \leq x \leq 1\frac{2}{3}\}, \ldots$
Wyznaczyć sumę i iloczyn tych zbiorów.

Prawa dla działań nieskończonych

Bezpośrednio z definicji działań nieskończonych wynikają równoważności:

$$x \in \bigcup_{i\in I} A_i \Leftrightarrow \exists_{i\in I}(x \in A_i)$$

$$x \in \bigcap_{i\in I} A_i \Leftrightarrow \forall_{i\in I}(x \in A_i)$$

Te równoważności stosujemy przy wyprowadzaniu praw dla działań nieskończonych za pomocą (Ext).

Zadanie 4. Za pomocą (Ext) wyprowadzić następujące prawa.
(a) $\bigcup_{i\in I}(A_i \cup B_i) = \bigcup_{i\in I} A_i \cup \bigcup_{i\in I} B_i$
(b) $\bigcap_{i\in I}(A_i \cap B_i) = \bigcap_{i\in I} A_i \cap \bigcap_{i\in I} B_i$
(c) $(\bigcup_{i\in I} A_i)' = \bigcap_{i\in I} A_i'$
(d) $(\bigcap_{i\in I} A_i)' = \bigcup_{i\in I} A_i'$

Logika i teoria mnogości

Ćwiczenia 12

Relacje binarne

Iloczyn kartezjański

$$A \times B = \{\langle x, y\rangle : x \in A \wedge y \in B\}$$

$$(D\times)\ \langle x, y\rangle \in A \times B \Leftrightarrow x \in A \wedge y \in B$$

Zadanie 1. Za pomocą (Ext) wyprowadzić prawa iloczynu kartezjańskiego:
(a) $(A_1 \cup A_2) \times B = (A_1 \times B) \cup (A_2 \times B)$
(b) $(A_1 \backslash A_2) \times B = (A_1 \times B) \backslash (A_2 \times B)$
(c) $A \times (\bigcup_{i \in I} B_i) = \bigcup_{i \in I} (A \times B_i)$

Relacja odwrotna i złożenie relacji

$R^{-1} = \{\langle x, y\rangle : \langle y, x\rangle \in R\}$ (relacja odwrotna do R)
$S \circ R = \{\langle x, y\rangle : \exists_z (\langle x, z\rangle \in R \wedge \langle z, y\rangle \in S)\}$ (złożenie relacji R i S)

Zadanie 2. Wyznaczyć relacje: $R^{-1}, S^{-1}, S \circ R, R \circ S$ dla
$R = \{\langle 1, 2\rangle, \langle 1, 3\rangle, \langle 2, 1\rangle\}, S = \{\langle 2, 1\rangle, \langle 3, 2\rangle, \langle 3, 1\rangle\}$.

Zadanie 3. Niech R i S będą relacjami określonymi na zbiorze $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ następująco:

$$xRy \Leftrightarrow x|y$$

$$xSy \Leftrightarrow y = x^2$$

dla $x, y \in X$.

Wyznaczyć $R \cup S, R \cap S, R \backslash S, S \backslash R, R^{-1}, S^{-1}, R \circ S, S \circ R$.

Zadanie 4. Za pomocą (Ext) wyprowadzić prawa algebry relacji:
(a) $(S_1 \cup S_2) \circ R = (S_1 \circ R) \cup (S_2 \circ R)$
(b) $(R \cup S)^{-1} = R^{-1} \cup S^{-1}$
(c) $(T \circ S) \circ R = T \circ (S \circ R)$

Relację $R \subset A^2$ nazywamy

- *zwrotną na zbiorze* A, jeżeli $\forall_{x\in A}(\langle x, x\rangle \in R)$
- *przeciwzwrotną na zbiorze* A, jeżeli $\forall_{x\in A}(\langle x, x\rangle \notin R)$
- *symetryczną*, jeżeli $\forall_{x,y}(\langle x, y\rangle \in R \Rightarrow \langle y, x\rangle \in R)$
- *przeciwsymetryczną*, jeżeli $\forall_{x,y}(\langle x, y\rangle \in R \Rightarrow \langle y, x\rangle \notin R)$
- *antysymetryczną*, jeżeli $\forall_{x,y}(\langle x, y\rangle \in R \wedge \langle y, x\rangle \in R \Rightarrow x = y)$
- *przechodnią*, jeżeli $\forall_{x,y,z}(\langle x, y\rangle \in R \wedge \langle y, z\rangle \in R \Rightarrow \langle x, y\rangle \in R)$
- *spójną na zbiorze* A, jeżeli $\forall_{x,y,\in A}(\langle x, y\rangle \in R \vee \langle y, x\rangle \in R)$
- *słabospójną na zbiorze* A, jeżeli $\forall_{x,y,\in A}(\langle x, y\rangle \in R \vee x = y \vee \langle y, x\rangle \in R)$

Dla relacji binarnych często piszemy xRx zamiast: $\langle x, y\rangle \in R$.

Zadanie 4. Określić rodzaje podanych relacji:

(a) Relacja $\perp$ prostopadłości prostych w zbiorze P wszystkich prostych na płaszczyźnie.

(b) Relacja R określona na zbiorze wszystkich figur geometrycznych na płaszczyźnie następująco: $R = \{\langle x, y\rangle$: pole figury x jest równe polu figury $y\}$.

(c) $R = \{\langle x, y\rangle \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x \leq |y|\}$.

(d) $R = \{\langle x, y\rangle \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : |x| \leq |y|\}$.

Logika i teoria mnogości

Ćwiczenia 13

Relacje równoważności

Definicja. Relację $R \subset A^2$ nazywamy *relacją równoważności* na zbiorze A, jeżeli relacja R jest zwrotna (na zbiorze A), symetryczna i przechodnia.
zwrotna na $A: \forall_{x \in A}(xRx)$
symetryczna: $\forall_{x,y}(xRy \Rightarrow yRx)$
przechodnia: $\forall_{x,y,z}(xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz)$

Definicja. Niech R będzie relacją równoważności na zbiorze A.
Dla elementu $x \in A$ określamy zbiór:
$[x]_R = \{y : xRy\}$ (równoważnie: $[x]_R = \{y \in A : xRy\}$
Zbiór $[x]_R$ nazywamy *klasą abstrakcji relacji równoważności* R wyznaczoną przez element x, zwany *reprezentantem* tej klasy.

Przykłady.

(1) Niech $R = I_A$. Dla $x \in A$ $\quad [x]_R = \{x\}$.

(2) Niech $R \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ będzie określona następująco: $xRy \Leftrightarrow |x| = |y|$ dla $x, y \in \mathbb{R}$.
Wtedy $[0]_R = \{0\}$ oraz dla $x \neq 0 \quad [x]_R = \{x, -x\}$.

(3) Niech R będzie relacją równoważności na zbiorze wszystkich ludzi określoną tak: xRy wtw, gdy x i y są tej samej płci.
Wtedy dla dowolnej kobiety x, $[x]_R$ jest zbiorem wszystkich kobiet, a dla dowolnego mężczyzny x, $[x]_R$ jest zbiorem wszystkich mężczyzn.

Zadanie 1. Dany jest zbiór $X = \{a, b, c, d\}$ i relacja $R \subset X \times X$. Sprawdzić, czy jest to relacja równoważności, a jeśli tak, to wyznaczyć klasy abstrakcji tej relacji.

(a) $R = \{\langle a,a\rangle, \langle b,b\rangle, \langle c,c\rangle, \langle d,d\rangle, \langle a,b\rangle, \langle b,a\rangle\}$

(b) $R = \{\langle a,a\rangle, \langle b,b\rangle, \langle c,c\rangle, \langle d,d\rangle, \langle a,c\rangle, \langle a,d\rangle, \langle c,a\rangle, \langle c,d\rangle, \langle d,a\rangle, \langle d,c\rangle\}$

(c) $R = \{\langle a,a\rangle, \langle b,b\rangle, \langle c,c\rangle, \langle d,d\rangle, \langle a,b\rangle, \langle b,a\rangle, \langle c,d\rangle, \langle d,c\rangle\}$

Zadanie 2. Zbadać, czy podane relacje są relacjami równoważności:

(a) relacja podzielności na zbiorze liczb naturalnych bez zera,

(b) relacja na zbiorze liczb naturalnych większych od 1 określona następująco:

$$mRn \Leftrightarrow nwd(m, n) > 1$$

Zadanie 3. Wyznaczyć relacje równoważności:

(a) na zbiorze 2-elementowym,

(b) na zbiorze 3-elementowym,

(c) na zbiorze 4-elementowym.

Logika i teoria mnogości

Ćwiczenia 14

Funkcje

Definicja. *Funkcją* nazywamy relację binarną R, spełniającą warunek prawostronnej jednoznaczności:

$\forall_{x,y,z}(< x, y >\in R \quad \wedge < x, z >\in R \Rightarrow y = z)$.

Zgodnie z tym warunkiem, dla każdego obiektu x istnieje najwyżej jeden obiekt y taki, że $< x, y >\in R$.

Definicja. Niech f będzie funkcją. Dla $x \in D(f)$ jedyny element y taki, że $< x, y >\in f$ nazywamy *wartością funkcji* f dla argumentu x i oznaczamy $f(x)$.

$(Df(x))\forall_{x\in D(f)}\forall_y(f(x) = y \Leftrightarrow < x, y >\in f)$

Zbiór $D(f)$ jest *dziedziną funkcji* f.

Mamy: $D^*(f) = \{f(x) : x \in D(f)\}$. Zbiór $D^*(f)$, czyli *przeciwdziedzinę funkcji* f, nazywamy też zbiorem wartości funkcji f.

Definicja. Niech f będzie funkcją. Mówimy, że funkcja f *odwzorowuje zbiór* X *w zbiór* Y , jeżeli $D(f) = X$ i $D^*(f) \subset Y$. Piszemy $f : X \mapsto Y$.

Definicja. Niech f będzie funkcją. Mówimy, że funkcja f *odwzorowuje zbiór* X *na zbiór* Y , jeżeli $D(f) = X$ i $D^*(f) = Y$. Piszemy $f : X \overset{na}{\mapsto} Y$.

Definicja. Funkcję f nazywamy *różnowartościową* (albo: wzajemnie jednoznaczną, jedno-jednoznaczną), jeżeli spełnia warunek:

$\forall x_1, x_2 \in D(f)(f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2)$.

Równoważnie: $\forall_{x_1,x_2\in D(f)}(x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2))$.

Piszemy $f : X \overset{1-1}{\mapsto} Y$, jeżeli funkcja $f : X \mapsto Y$ jest różnowartościowa.

Definicja. *Odwzorowaniem* nazywamy trójkę $< f, X, Y >$ taką, że f jest funkcją, X, Y są zbiorami i $f : X \mapsto Y$.

Definicja. Odwzorowanie $f : X \mapsto Y$ nazywamy:
iniekcją, jeżeli $f : X \overset{1-1}{\mapsto} Y$,
suriekcją, jeżeli $f : X \overset{na}{\mapsto} Y$,
bijekcją, jeżeli jest iniekcją i suriekcją.

Zadanie 1. Czy następujące relacje są funkcjami? Odpowiedź uzasadnić.

a) $R = \{< 0, 0 >, < 1, 0 >, < 1, 1 >\}$

b) $R = \{< 0, 0 >, < 1, 0 >, < 2, 1 >\}$

c) $R = \{< x, y >\in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x + y = 0\}$

d) $R = \{< x, y >\in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x \cdot y = 0\}$

e) $R = \{< x, y >\in X \times Y : y$ jest rokiem urodzenia osoby $x\}, Y = \mathbb{N}, X$-zbiór wszystkich ludzi.

f) $R = \{< x, y >\in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : x|y\}$

Definicja. Niech $f : X \mapsto Y$. Dla dowolnego $A \subset X$ określamy zbiór:
$f[A] = \{f(x) : x \in A\} = \{y : \exists_x (x \in A \wedge y = f(x))\}$,
zwany *obrazem zbioru A danym przez funkcję f*.
Dla dowolnego $B \subset Y$ określamy zbiór:
$f^{-1}[B] = \{x \in X : f(x) \in B\}$,
zwany *przeciwobrazem zbioru B danym przez funkcję f*.

Zadanie 2. Dana jest funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ i zbiór $A \subset \mathbb{R}$. Wyznaczyć obraz zbioru A w przekształceniu f.

a) $f(x) = 5x - 3, \qquad A = \{2, 3, 4\}$

b) $f(x) = 2x + 1 \qquad A = (-2, 1)$

c) $f(x) = |x| \qquad A =< -3, 0)$

d) $f(x) = \begin{cases} x - 2 \text{ dla } x < 1 \\ x + 4 \text{ dla } x \geq 1 \end{cases} \qquad A =< 0, 5 >$

Zadanie 3. Dana jest funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ i zbiór $B \subset \mathbb{R}$. Wyznaczyć przeciwobraz zbioru B w przekształceniu f.

a) $f(x) = 2x - 1 \qquad B = \{1, 3, 5\}$

b) $f(x) = 2 - 3x \qquad B =< 5, \infty)$

c) $f(x) = 5 \qquad B =< 4, 7)$

d) $f(x) = 5 \qquad B =< 1, 5)$

e) $f(x) = \begin{cases} x - 2 \text{ dla } x < 1 \\ x + 4 \text{ dla } x \geq 1 \end{cases} \qquad B =< 0, 6 >$

Zadanie 4. Wyprowadzić prawa dla obrazów i przeciwobrazów funkcji. Zakładamy, że $f : X \mapsto Y$.

a) $f[A_1 \cup A_2] = f[A_1] \cup f[A_2]$ dla $A_1, A_2 \subset X$

b) $f[\bigcup_{i\in I} A_i] = \bigcup_{i\in I} f[A_i]$ dla $A_i \subset X$ przy $i \in I$

c) $f^{-1}[B_1 \cap B_2] = f^{-1}[B_1] \cap f^{-1}[B_2]$, jeżeli $B_1, B_2 \subset Y$

d) $f^{-1}[B_1 \cup B_2] = f^{-1}[B_1] \cup f^{-1}[B_2]$, jeżeli $B_1, B_2 \subset Y$

e) $f^{-1}[\bigcap_{i\in I} B_i] = \bigcap_{i\in I} f^{-1}[B_i]$ przy $B_i \subset Y$ przy $i \in I, I \neq \emptyset$

Logika i teoria mnogości

Ćwiczenia 15

Relacje porządkujące

Definicja. Relację $R \subset A^2$ nazywamy relacją porządkującą na zbiorze A, jeżeli jest zwrotna (na A), antysymetryczna i przechodnia. Wtedy parę (A, R) nazywamy *zbiorem uporządkowanym*.

Definicja. Relację $R \subset A^2$ nazywamy relacją liniowo porządkującą na zbiorze A, jeżeli jest porządkująca i spójna (na A). Wtedy parę (A, R) nazywamy *zbiorem liniowo uporządkowanym*.

Przykłady

1. Relacja I_A jest relacja porządkującą. Jest to najmniejsza (w sensie za wierania) relacja porządkująca na zbiorze A, tzn. relacja I_A jest zawarta w każdej relacji porządkującej na A.
2. Relacja inkluzji na $\mathcal{P}(A)$, tj, $\{< X, Y >\in \mathcal{P}(A)^2 : X \subset Y\}$, jest relacją porządkującą.
3. Relacja podzielności na zbiorze $\mathbb{N}$ określona wzorem:

   $m|n \Leftrightarrow \exists_{k\in\mathbb{N}}(k \cdot m = n)$ dla $m, n \in \mathbb{N}$

   jest relacją porządkującą.
4. Relacja $\leq$ na zbiorze $\mathbb{N}$ jest relacją liniowo porządkującą. Podobnie $\leq$ na $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$.

Definicja. Niech (A, R) będzie zbiorem uporządkowanym. Zbiór $X \subset A$ nazywamy *łańcuchem* w (A, R), jeżeli $(X, R \cap X^2)$ jest zbiorem liniowo uporządkowanym.

Zauważmy, że zbiór $X \subset A$ jest łańcuchem w (A, R) wtedy i tylko wtedy, gdy $\forall_{x,y\in X}(xRy \vee yRx)$.

Przykłady

1. Rozważmy zbiór $\mathcal{P}(\{a, b\})$ uporządkowany przez ograniczenie inkluzji do tego zbioru. Ta relacja nie jest liniowym porządkiem, ponieważ ani $\{a\} \subset \{b\}$, ani $\{b\} \subset \{a\}$ nie zachodzi. Zbiory:

   $\{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}\}$ i $\{\emptyset, \{b\}, \{a, b\}\}$

   są łańcuchami w $\mathcal{P}(\{a, b\})$.

2. Rozważmy zbiór $\{1, 2, 3, 4\}$ z relacją podzielności ograniczoną do tego zbioru. Zbiory $\{1, 2, 4\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}$ są łańcuchami.

Diagramy Hassego skończonych zbiorów uporządkowanych

Niech $\leq$ będzie porządkiem na A. Ostry porządek $<$ wyznaczony przez $\leq$ określamy tak:

$$x < y \Leftrightarrow x \leq y \wedge x \neq y$$

Niech $(A, \leq)$ będzie zbiorem uporządkowanym. Element $y \in A$ nazywamy następnikiem elementu $x \in A$, jeżeli $x < y$, lecz nie istnieje $z \in A$ takie, że $x < z$ i $z < y$.

W diagramie Hassego przedstawiamy elementy zbioru jako wierzchołki i prowadzimy krawędzie od każdego wierzchołka do wszystkich następników tego wierzchołka, umieszczonych wyżej.

Mamy: $x \leq y$ wtedy i tylko wtedy, gdy w diagramie istnieje droga, idąca w górę, od x do y (dowolnej długości $n \geq 0$).

Droga jest to trasa, która nie przechodzi dwukrotnie przez żaden wierzchołek. Długość drogi: liczba krawędzi, przez które przechodzi ta droga.

Zadanie 1. Przedstawić diagram Hassego dla zbioru $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$:

1. z relacją podzielności ograniczoną do tego zbioru (jest to relacja częściowo porządkująca),

2. z naturalnym porządkiem $\leq$ ograniczonym do tego zbioru (jest to relacja liniowo porządkująca).

Zadanie 2. Przedstawić diagram Hassego:

1. dla relacji $\leq_P$ na $\mathbb{N}^2$ ograniczonej do $\{0, 1\}^2$

2. dla relacji $\leq_P$ na $\mathbb{N}^2$ ograniczonej do $\{0, 1, 2\}^2$

$$< x_1, y_1 > \leq_P < x_2, y_2 > \Leftrightarrow x_1 \leq x_2 \wedge y_1 \leq y_2$$

Definicja Niech $(A, \leq)$ będzie zbiorem uporządkowanym. Niech $X \subset A$. Element $a \in A$ nazywamy:

- *elementem najmniejszym w zbiorze* X, jeżeli $a \in X$ i $\forall_{x \in X}(a \leq x)$,
- *elementem największym w zbiorze* X, jeżeli $a \in X$ i $\forall_{x \in X}(x \leq a)$,
- *elementem minimalnym w zbiorze* X, jeżeli $a \in X$ i $\neg\exists_{x \in X}(x < a)$,
- *elementem maksymalnym w zbiorze* X, jeżeli $a \in X$ i $\neg\exists_{x \in X}(a < x)$,
- *ograniczeniem dolnym zbioru* X, jeżeli $\forall_{x \in X}(a \leq x)$,
- *ograniczeniem górnym zbioru* X, jeżeli $\forall_{x \in X}(x \leq a)$,

- *kresem dolnym zbioru* X, jeżeli a jest największym ograniczeniem dolnym zbioru X,
- *kresem górnym zbioru* X, jeżeli a jest najmniejszym ograniczeniem górnym zbioru X.

Zadanie 3. Niech X będzie zbiorem wszystkich podzbiorów zbioru liczb rzeczywistych i niech będzie dana relacja $R = \{< A, B >: A \subseteq B\}$. Uzasadnić, że relacja R jest relacją częściowego porządku w zbiorze X. Wyznaczyć elementy: minimalny, maksymalny, największy, najmniejszy.

Zadanie 4. Narysować diagram Hassego dla $(\mathcal{P}(\{a, b, c\}), \subset)$. Niech X będzie rodziną wszystkich niepustych podzbiorów zbioru $\{a, b, c\}$. Oczywiście $X \subset \mathcal{P}(\{a, b, c\})$. Wyznaczyć elementy: minimalny, maksymalny, największy, najmniejszy.

Zadanie 5. Dany jest zbiór X i relacja podzielności w tym zbiorze. Narysować diagram Hassego tej relacji i wyznaczyć elementy: minimalny, maksymalny, największy, najmniejszy.

a) $X = \{3, 5, 6, 10, 12\}$

b) $X = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 9\}$

c) $X = \{2, 3, 5, 6\}$

d) $X = \{2, 3, 4, 9, 36\}$