

DMAD - podstawowe pojęcia grafowe

Jak przygotować się do rozwiązywania zadań?

Przeczytać rozdziały 7.1 – 7.5 z materiałów.

Przed zajęciami powinnam/powinienem wiedzieć co to jest:

$G(V, E, \psi)$ – graf; $G(V, E)$ – graf prosty

stopień wierzchołka $d_G(v)$

maksymalny/minimalny stopień wierzchołka $\Delta(G)/\delta(G)$

graf pusty i graf pełny (graf pełny K_n na n wierzchołkach)

dopełnienie G^c grafu prostego G

macierz przyległości ($a_{ij} = 1$ gdy v_i i v_j przyległe)

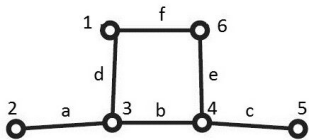
macierz incydencji ($m_{ij} = 1$ gdy v_i i e_j incydentne i e_j nie jest pętlą)

i znać twierdzenie:

$$\sum_{v \in V} d_G(v) = 2|E|$$

A Zadania na ćwiczenia

Zadanie A.1.



Dla grafu G na rysunku odpowiedz na pytania/wykonaj polecenia:

- ile ma krawędzi/wierzchołków?
- podaj funkcję incydencji,
- ile wynoszą stopnie wierzchołków?
- ile wynosi $\Delta(G)$ i $\delta(G)$?
- jak wygląda jego dopełnienie?
- podaj jego macierz przyległości?
- podaj jego macierz incydencji?

Zadanie A.2. Bez rysowania grafu, na podstawie podanej poniżej macierzy przyległości, określ liczbę wierzchołków, liczbę krawędzi i stopnie wierzchołków grafu. Następnie narysuj ten graf i sprawdź wynik.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Zadanie A.3. Uzasadnij, że $\delta \leq 2\varepsilon/\nu \leq \Delta$, gdzie ν jest liczbą wierzchołków a ε liczbą krawędzi.

Zadanie A.4. Uzasadnij, że w każdym grafie liczba wierzchołków stopnia nieparzystego jest parzysta.

Zadanie A.5. W grafie G o 19 krawędziach są tylko wierzchołki stopnia 3 i stopnia 5. Są cztery wierzchołki stopnia 5. Ile jest wszystkich wierzchołków?

Zadanie A.6. (Przykład 7.2. z wykładu)

- Pokaż, że jeżeli graf G jest grafem prostym na zbiorze wierzchołków $\{1, \dots, \nu\}$ o ε krawędziach, to $\varepsilon(G) \leq \binom{\nu}{2}$.
- Ile można utworzyć grafów prostych na zbiorze wierzchołków $\{1, \dots, \nu\}$, które mają dokładnie ε krawędzi?
- Ile jest wszystkich grafów prostych na zbiorze wierzchołków $\{1, \dots, \nu\}$?

B Zadania na ćwiczenia - jeśli czas pozwoli

Zadanie B.1. Grafy mają macierze przyległości:

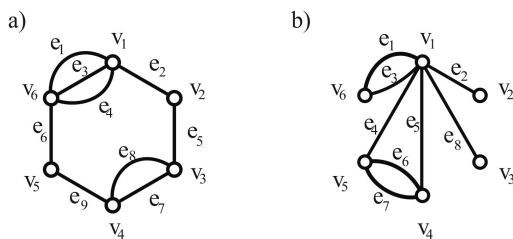
$$G_1 : \begin{bmatrix} 0 & A_{n \times m} \\ A_{m \times n} & 0 \end{bmatrix} \quad \text{ i } \quad G_2 : \begin{bmatrix} B_n & 0 \\ 0 & B_m \end{bmatrix},$$

gdzie przez 0 oznaczamy macierz składającą się z samych 0, przez $A_{k \times l}$ oznaczamy macierz o k wierszach i l kolumnach składającą się z samych 1 oraz przez B_k macierz o k wierszach i k kolumnach składającą się z samych 0 na przekątnej, a poza tym samych jedynek. Narysuj te grafy dla $n = 4$ i $m = 5$. Następnie dla dowolnego n i m :

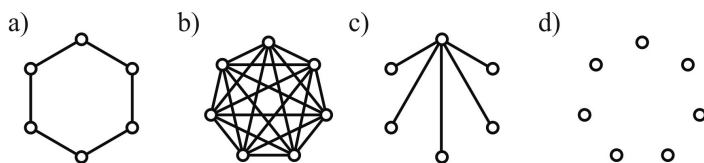
- Wyznacz liczbę wierzchołków dla każdego z tych grafów.
- Podaj stopnie każdego wierzchołka.
- Podaj ile krawędzi ma każdy z tych grafów.
- Czy któryś z tych grafów jest dwudzielny?

C Zadania do samodzielnej pracy w domu

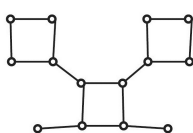
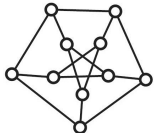
Zadanie C.1. Dla podanego grafu podaj zbiór wierzchołków, krawędzi i zapisz funkcję incydencji.



Zadanie C.2. Narysuj dopełnienie grafu



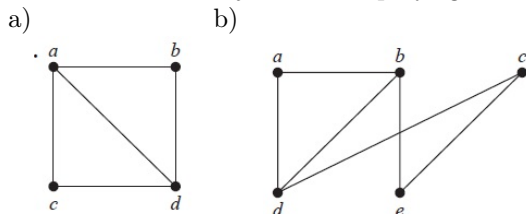
Zadanie C.3.



Dla grafów na rysunkach odpowiedz na pytania:

- ile mają krawędzi/wierzchołków?
- ile wynoszą stopnie wierzchołków?
- ile wynosi $\Delta(G)$ i $\delta(G)$?

Zadanie C.4. Znajdź macierz przyległości i incydencji następujących grafów



Zadanie C.5. Bez rysowania grafu, na podstawie macierzy przyległości, określ liczbę wierzchołków, liczbę krawędzi i stopnie wierzchołków grafu. Następnie narysuj ten graf i sprawdź wynik.

a.
$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

b.
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

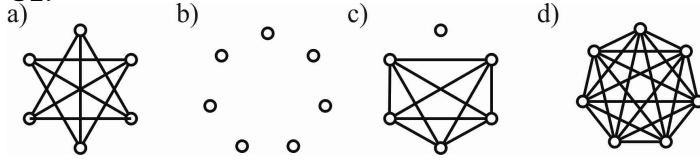
c.
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Zadanie C.6. Graf prosty G ma 40 wierzchołków. Ile krawędzi ma graf G jeżeli jego dopełnienie G^c ma 480 krawędzi?

Odpowiedzi do niektórych zadań

C1. a) $V = \{v_1, v_2, \dots, v_6\}$, $E = \{e_1, e_2, \dots, e_9\}$, $\psi(e_1) = \psi(e_3) = \psi(e_4) = v_1v_6$, $\psi(e_2) = v_1v_2$, $\psi(e_5) = v_2v_3$, $\psi(e_7) = \psi(e_8) = v_3v_4$, $\psi(e_9) = v_4v_5$, $\psi(e_6) = v_5v_6$
 b) $V = \{v_1, v_2, \dots, v_6\}$, $E = \{e_1, e_2, \dots, e_8\}$, $\psi(e_1) = \psi(e_3) = v_1v_6$, $\psi(e_2) = v_1v_2$, $\psi(e_8) = v_1v_3$, $\psi(e_5) = v_1v_4$, $\psi(e_4) = v_1v_5$, $\psi(e_6) = \psi(e_7) = v_4v_5$

C2.



C3. a) $|E| = 15$, $|V| = 10$, $\forall v : d_G(v) = 3$, $\Delta(G) = \delta(G) = 3$
 b) $|E| = 16$, $|V| = 14$, $d_G(v) = 1, 2, 3$, $\Delta(G) = 3$, $\delta(G) = 1$

C4. a) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

C5. a) $|V| = 7$, $|E| = 12$, $3, 3, 3, 3, 4, 4, 4$
 b) $|V| = 6$, $|E| = 9$, $3, 3, 3, 3, 3, 3$
 c) $|V| = 6$, $|E| = 12$, $3, 3, 4, 4, 5, 5$

C6. 300