MATEMATYKA DYSKRETNA dla INFORMATYKÓW

ROZGRZEWKA II – zadania testowe – 2021Z

Zadanie 1. Czy prawdą jest, że 10–kostka Q_{10}

A. jest grafem 9-regularnym?

B. ma liczbę chromatyczną równą 2?

C. zawiera jako podgraf cykl o 9 wierzchołkach?

D. zawiera jako podgraf 4-kostkę Q_4?

Zadanie 2. Dla grafów prostych prawdą jest, że

A. istnieje graf o ciągu stopni $(8, 7, 5, 4, 4, 4, 3, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$.

B. każda para izomorficznych grafów ma ten sam ciąg stopni.

C. każde dwa grafy o tym samym ciągu stopni są izomorficzne.

D. jeżeli $(d_1, d_2, d_3, \ldots, d_8)$ jest graficzny to ciąg $(3, d_1 + 1, d_2 + 1, d_3 + 1, d_4, \ldots, d_8)$ też jest graficzny.

Zadanie 3. Dany jest graf prosty G zbudowany na 14 wierzchołkach i mający dokładnie 21 krawędzi. Prawdą jest, że

A. G może być spójny.

B. G może być lasem.

C. jego dopełnienie G^c ma dokładnie 70 krawędzi.

D. G może mieć 9 składowych spójności.

Zadanie 4. Dane jest drzewo T, którego zbiorem wierzchołków jest $\{1, 2, \ldots, K\}$ o kodzie Prüfera $(1, 2, 8, 8, 2, 2, 3)$. Wiemy, że

A. T ma 8 wierzchołków ($K = 8$).

B. wierzchołek 2 ma stopień 3.

C. T ma 5 wierzchołków wiszących (stopnia 1).

D. T zawiera krawędź $\{2, 3\}$.

Zadanie 5. Niech a_k oznacza dla $k \geqslant 3$ liczbę wszystkich parami nieizomorficznych grafów prostych o k krawędziach i k wierzchołkach. Czy prawdziwe są poniższe stwierdzenia?

A. $a_3 = 1$;

B. $a_4 = 3$;

C. $a_6 \geqslant 10$;

D. $a_k \leqslant \binom{\binom{k}{2}}{k}$.

Zadanie 6. Czy prawdziwe są poniższe stwierdzenia?

A. Istnieje dokładnie n^{n-2} drzew o zbiorze wierzchołków $\{1, 2, \dots, n\}$.

B. Istnieje dokładnie n drzew o zbiorze wierzchołków $\{1, 2, \dots, n\}$, w których jeden z wierzchołków ma stopień $n-1$.

C. Drzewo o kodzie Prüfera $(1, 1, 1, 4, 2, 2, 4, 8)$ ma dokładnie 4 wierzchołki stopnia 1.

D. Drzewo o kodzie Prüfera $(1, 3, 5, 7, 2, 4, 6, 8)$ jest ścieżką.

Zadanie 7. Po zastosowaniu algorytmu Kruskala znajdującego optymalne drzewo rozpięte (o minimalnej sumie wag) dla grafu z wagami

$$\begin{bmatrix} \infty & 6 & \infty & \infty & \infty & 8 & 2 & \infty \\ 6 & \infty & \infty & \infty & 2 & \infty & 3 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 4 & \infty & 5 & \infty & 3 \\ \infty & \infty & 4 & \infty & \infty & 1 & \infty & \infty \\ \infty & 2 & \infty & \infty & \infty & \infty & 6 & \infty \\ 8 & \infty & 5 & 1 & \infty & \infty & \infty & 9 \\ 2 & 3 & \infty & \infty & 6 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & 3 & \infty & \infty & 9 & \infty & \infty \end{bmatrix}$$

otrzymano drzewo T,

A. dla którego ostatnia zaakceptowana krawędź ma wagę 8;

B. którego suma wag krawędzi to 24;

C. szóstą zaakceptowaną krawędzią (dodaną do niego) jest $\{v_3, v_4\}$;

D. które zawiera krawędź $\{v_3, v_6\}$;

Zadanie 8. Niech G będzie spójnym prostym grafem planarnym na 14 wierzchołkach. Czy prawdą jest, że

A. dla jego liczby krawędzi $\varepsilon(G)$ zachodzi nierówność $\varepsilon(G) \leqslant 36$?

B. jeżeli jego liczba krawędzi $\varepsilon(G) = 30$, to każdy jego graf płaski ma 16 ścian?

C. żaden taki graf nie może zawierać jako podgrafu, grafu pełnego K_6?

D. jego minimalny stopień jest większy od 5?

Zadanie 9. Niech d_n oznacza liczbę ciągów binarnych długości n, $n \geqslant 3$, takich, że wśród każdych trzech kolejnych bitów jest co najwyżej jedna 1. Łatwo zauważyć, że $d_3 = 4$. Mamy ponadto

A. $d_5 = 10$;

B. dla każdego $n \geqslant 6$ mamy $d_n = d_{n-2} + d_{n-3}$;

C. dla każdego $n \geqslant 6$ mamy $d_n = d_{n-1} + d_{n-3}$;

D. dla każdego $n \geqslant 7$ mamy $d_n = d_{n-2} + d_{n-3} + d_{n-4}$.

Zadanie 10. Dany jest ciąg spełniający zależność rekurencyjną

$$a_n = 4a_{n-1} + b \cdot a_{n-2}\,, \quad n \geqslant 2,$$

dla którego $a_0 = 0$, $a_1 = 1$. Wtedy:

A. równanie charakterystyczne powyższej zależności to $x^2 = 4x + b$;

B. równanie charakterystyczne powyższej zależności to $bx^2 + 4x - 1 = 0$;

C. jeżeli $b = -4$ to $a_n = C_1 \cdot (-2)^n + C_2 \cdot 2^n$ gdzie C_1 i C_2 spełniają układ równań:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ (-2) \cdot C_1 + 2 \cdot C_2 = 1 \end{cases}$$

D. jeżeli $b = -3$ to $a_n = (C_1 + C_2 n) \cdot 3^n$ gdzie C_1 i C_2 spełniają układ równań:

$$\begin{cases} (C_1 + 0 \cdot C_2) \cdot 1 = 0 \\ (C_1 + 1 \cdot C_2) \cdot 3 = 1 \end{cases}$$