WSTĘP DO RACHUNKU PRAWDOPODOBIEŃSTWA
ROZGRZEWKA PRZED DRUGĄ CZĘŚCIĄ EGZAMINU

Zadanie 1. O zmiennych losowych X i Y wiemy, że są niezależne i mają ten sam rozkład dany dystrybuantą

$$F(s) = \begin{cases} 0 & \text{dla } s \leqslant 2, \\ \frac{1}{4}(s-2)^2 & \text{dla } 2 < s \leqslant 4, \\ 1 & \text{dla } s > 4. \end{cases}$$

dystrybuanta jest f. ciągłą zatem X i Y mają rozkład ciągły

(a) Wyznacz $\mathbb{E}XY$.
(b) Wyznacz $\mathbb{P}(X > 3)$.
(c) Wyznacz $\mathbb{P}(X > 3, Y < 3)$.

a) $\mathbb{E}h(X,Y) = \iint_{\mathbb{R}^2} h(x,y) \cdot f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy$ $\Rightarrow$ musimy policzyć gęstość $f_{X,Y}$

Ponieważ X i Y są niezależne, to $f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$ prawie wszędzie.

$$f_X(s) = f_Y(s) = F'(s) = \begin{cases} \frac{1}{4}\cdot 2 \cdot (s-2) = \frac{1}{2}(s-2), & 2 < s \leq 4 \\ 0 & \text{w.p.p.} \end{cases}$$

$$\mathbb{E}XY = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot y \cdot f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot y \cdot f_X(x) \cdot f_Y(y)\,dx\,dy =$$

$$= \int_2^4 \left[\int_2^4 x \cdot y \cdot \frac{1}{2}(x-2)\cdot\frac{1}{2}(y-2)\,dx\right]dy = \int_2^4 \frac{1}{4}(y^2-2y)\cdot\left[\int_2^4 (x^2-2x)\,dx\right]dy$$

$$= \frac{1}{4}\int_2^4 (y^2-2y)\cdot\left[\frac{x^3}{3} - x^2\right]_2^4 dy = \frac{1}{4}\int_2^4 (y^2-2y)\cdot\left(\frac{4^3}{3} - 4^2 - \frac{2^3}{3} + 2^2\right)dy$$

$$= \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{56}{3} - 12\right)\left[\frac{y^3}{3} - y^2\right]_2^4 = \frac{1}{4}\cdot\frac{20}{3}\cdot\frac{20}{3} = \frac{100}{9}$$

Można zrobić to szybciej, jeśli zauważy się, że $\mathbb{E}XY = \mathbb{E}X \cdot \mathbb{E}Y = (\mathbb{E}X)^2$ bo X i Y niezależne.

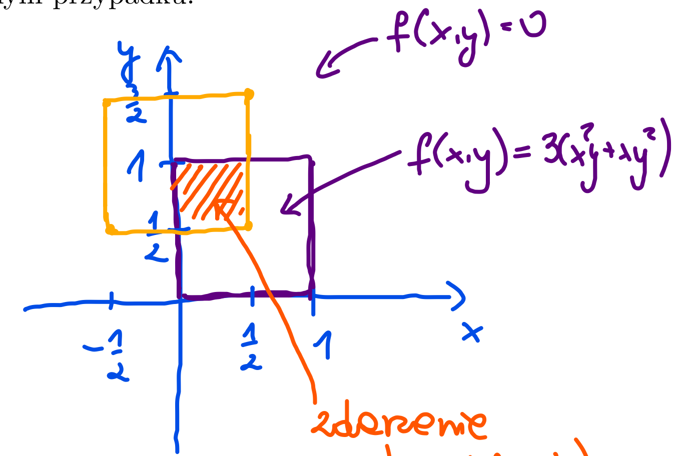
b) $\mathbb{P}(X>3) \overset{\text{2. przeciwne}}{=} 1 - \mathbb{P}(X \leq 3) = 1 - F(3) = 1 - \frac{1}{4}(3-2)^2 = \frac{3}{4}$

c) $\mathbb{P}(X>3, Y<3) \underset{\text{niezależność X i Y}}{=} \mathbb{P}(X>3)\,\mathbb{P}(Y<3) \underset{\text{Y ma rozkład ciągły}}{=} \frac{3}{4}\cdot\mathbb{P}(Y\leq 3) = \frac{3}{4}\cdot F(3) = \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4} = \frac{3}{16}$

Zadanie 2. Gęstość wektora losowego (X, Y) dana jest wzorem:

$$f(x,y) = \begin{cases} 3(x^2y + xy^2) & \text{dla } x, y \in [0,1], \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

(a) Oblicz $\mathbb{E}(X^3)$.
(b) Oblicz $\mathbb{P}(-\frac{1}{2} \leqslant X \leqslant \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \leqslant Y \leqslant \frac{3}{2})$.



zdarzenie z podpunktu b) możemy ograniczyć do tego zdarzenia gdzie $f(x,y) > 0$

a) $$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy$$

Aby wyznaczyć $\mathbb{E}(X^3)$ policzymy najpierw gęstość zmiennej losowej X:

1° $x \in [0,1]$: $$f_X(x) = \int_0^1 3(x^2y + xy^2)\,dy = 3\left[\frac{x^2y^2}{2} + \frac{xy^3}{3}\right]_0^1 = 3\cdot\left(\frac{x^2}{2} + \frac{x}{3}\right)$$

2° $x \notin [0,1]$: $f_X(x) = 0$

Zatem: $$\mathbb{E}(X^3) = \int_0^1 x^3 \cdot \underbrace{3\left(\frac{x^2}{2} + \frac{x}{3}\right)}_{f_X(x)} dx = 3\cdot\int_0^1 \frac{x^5}{2} + \frac{x^4}{3}\,dx = 3\cdot\left[\frac{x^6}{12} + \frac{x^5}{15}\right]_0^1 =$$
$$= 3\left(\frac{1}{12} + \frac{1}{15}\right) = \frac{1}{4} + \frac{1}{5} = \frac{9}{20}$$

b) $$\mathbb{P}(a \leq X \leq b,\ c \leq Y \leq d) = \int_a^b \int_c^d f(x,y)\,dy\,dx$$

$$\mathbb{P}\left(-\frac{1}{2} \leq X \leq \frac{1}{2},\ \frac{1}{2} \leq Y \leq \frac{3}{2}\right) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} f(x,y)\,dy\,dx =$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} \left[\int_{\frac{1}{2}}^{1} 3(x^2y + xy^2)\,dy\right] dx = 3\int_0^{\frac{1}{2}} \left[\frac{x^2y^2}{2} + \frac{xy^3}{3}\right]_{\frac{1}{2}}^{1} dx =$$

$$= 3\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^2}{2} + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{8} - \frac{x}{24}\,dx = 3\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{3x^2}{8} + \frac{7x}{24}\,dx = 3\cdot\left[\frac{x^3}{8} + \frac{7x^2}{48}\right]_0^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \frac{3}{64} + \frac{7}{64} = \frac{10}{64} = \frac{5}{32}$$

Zadanie 3. Roztargniona Ola zapomniała 4-cyfrowy kod do kłódki zamykającej jej szafkę w szatni. Chcąc być sprytną, postanowiła napisać program, który pomoże jej odgadnąć kod. Niestety jedyny pomysł na algorytm, który przyszedł jej do głowy, polegał na zastosowaniu generatora liczb losowych, który z równym prawdopodobieństwem losuje jedną z liczb całkowitych z przedziału $[0, 9999]$, i testuje, czy jest to szukany kod. Zakładamy, że przerywamy sprawdzanie w momencie odnalezienia właściwego kodu. Oceń, na ile algorytm zastosowany przez Olę przyspieszy poszukiwania. W tym celu policz wartość oczekiwaną liczby sprawdzanych losowych kodów oraz ich wariancję.

X - liczba sprawdzonych losowych kodów

Możemy każde losowanie potraktować jako próbę Bernoulliego, gdzie sukcesem jest wylosowanie właściwego kodu z puli liczb $[0, 9999]$, zatem $p = \frac{1}{10^4}$ jest prawdop. sukcesu i powtarzamy próby do osiągnięcia pierwszego sukcesu. Zatem X ma rozkład geometryczny z $p = \frac{1}{10^4}$.

Odczytujemy z tablic:

$$\mathbb{E}X = \frac{1}{p} = 10^4$$

$$\operatorname{Var} X = \frac{1-p}{p^2} = \frac{1 - \frac{1}{10^4}}{\frac{1}{10^8}} = \frac{9999}{10^4} \cdot 10^8 = 9999 \cdot 10^4$$

Zadanie 4. Dzienna liczba pasażerów pociągu do Kołobrzegu jest zmienną losową o wartości oczekiwanej 150 i wariancji 50. Oszacuj prawdopodobieństwo, że:

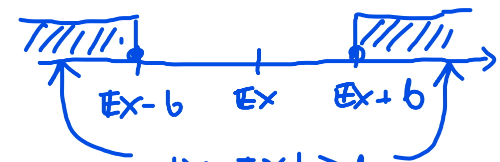
(a) w poniedziałek liczba pasażerów pociągu do Kołobrzegu będzie większa niż 200, używając nierówności Markowa i Czebyszewa;

(b) we wtorek liczba pasażerów pociągu do Kołobrzegu będzie miejsza niż 175, używając nierówności Markowa;

(c) w ciągu całego tygodnia (od poniedziałku do niedzieli) łączna liczba pasażerów pociągu do Kołobrzegu będzie większa od 1000 i mniejsza od 1100, używając nierówności Czebyszewa.

Uwaga! Zakładamy, że każdego dnia odjeżdża jeden pociąg do Kołobrzegu, a liczby pasażerów każdego dnia są niezależne.

$x \le EX-b$ lub $x \ge EX+b$



$|X-EX| \ge b$

X - dzienna liczba pasażerów do Kołobrzegu

$EX = 150$, $\operatorname{Var} X = 50$, $|X| = X$

Nierówność Markowa: $P(|X| \ge a) \le \frac{E|X|}{a}$

Nierówność Czebyszewa: $P(|X-EX| \ge b) \le \frac{\operatorname{Var} X}{b^2}$

a) $$P(X>200) \le P(X \ge 200) = P(|X| \ge 200) \underset{\text{nier. Markowa}}{\le} \frac{E|X|}{200} = \frac{EX}{200} = \frac{150}{200} = \frac{3}{4}$$

$$P(X>200) \le P(X \ge 200) = P(X-EX \ge 200-150) = P(X-EX \ge 50) \le$$
$$\le P(|X-EX| \ge 50) \underset{\text{nier. Czebyszewa}}{\le} \frac{\operatorname{Var} X}{50^2} = \frac{50}{50^2} = \frac{1}{15}$$

b) $$P(X<175) \underset{\text{z. przeciwne}}{=} 1 - P(X \ge 175) \underset{\text{nier. Markowa}}{\ge} 1 - \frac{EX}{175} = 1 - \frac{150}{175} = 1 - \frac{6}{7} = \frac{1}{7}$$

c) X_i - dzienna liczba pasażerów i-tego dnia tygodnia, $i = 1, 2, \dots, 7$

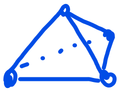
$S = X_1 + \dots + X_7$ - łączna liczba pasażerów w ciągu tygodnia

$ES = E(X_1 + \dots + X_7) = EX_1 + \dots + EX_7 = 7 \cdot 150 = 1050$

$\operatorname{Var} S = \operatorname{Var}(X_1 + \dots + X_7) = \operatorname{Var} X_1 + \dots + \operatorname{Var} X_7 = 7 \cdot 50 = 350$, bo X_i niezależne

$$P(1000 < S < 1100) = P(1000-1050 < S-ES < 1100-1050) =$$
$$= P(-50 < S-ES < 50) = P(|S-ES| < 50) \underset{\text{z. przeciwne}}{=} 1 - P(|S-ES| \ge 50) \underset{\text{nier. Czebyszewa}}{\ge}$$
$$\ge 1 - \frac{\operatorname{Var} S}{50^2} = 1 - \frac{350}{50 \cdot 50} = 1 - \frac{7}{50} = \frac{43}{50}$$

Zadanie 5. Używając CTG, oszacuj, ile co najmniej razy musimy rzucić symetryczną, czworościenną kostką do gry, aby z prawdopodobieństwem co najmniej 0,95 średnia liczba wyrzuconych w tych rzutach oczek należała do przedziału $(2\frac{2}{5}, 2\frac{3}{5})$.



czworościan foremny

X – wynik pojedynczego rzutu kostką, $X \in \{1,2,3,4\}$

k	1	2	3	4
$\mathbb{P}(X=k)$	$1/4$	$1/4$	$1/4$	$1/4$

$$\mathbb{E}X = 1\cdot\frac{1}{4} + 2\cdot\frac{1}{4} + 3\cdot\frac{1}{4} + 4\cdot\frac{1}{4} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$$

$$\mathbb{E}X^2 = 1^2\cdot\frac{1}{4} + 2^2\cdot\frac{1}{4} + 3^2\cdot\frac{1}{4} + 4^2\cdot\frac{1}{4} = \frac{30}{4}$$

$$\operatorname{Var} X = \mathbb{E}X^2 - (\mathbb{E}X)^2 = \frac{30}{4} - \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{30}{4} - \frac{25}{4} = \frac{5}{4}$$

niezależność X_i

$X_1, \dots, X_n$ – pomocnicze zmienne losowe, X_i – wynik i-tego rzutu

$S = X_1 + \dots + X_n$ – suma wyników n rzutów kostką, $\mathbb{E}S = n\cdot\mathbb{E}X$

$\operatorname{Var} S = n\cdot\operatorname{Var} X$

$\frac{S}{n} = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n}$ – średnia liczba wyrzuconych oczek

Chcemy dobrać n tak, żeby zachodziło $\mathbb{P}\left(2\frac{2}{5} < \frac{S}{n} < 2\frac{3}{5}\right) \geq 0{,}95$.

Oszacowanie z CTG:

standaryzacja

$$\mathbb{P}\left(2\frac{2}{5} < \frac{S}{n} < 2\frac{3}{5}\right) = \mathbb{P}\left(\frac{12}{5} < \frac{S}{n} < \frac{13}{5}\right) = \mathbb{P}\left(\frac{12n}{5} < S < \frac{13n}{5}\right) =$$

$$= \mathbb{P}\left(\frac{\frac{12n}{5} - \frac{5n}{2}}{\sqrt{\frac{5}{4}n}} < \frac{S - \mathbb{E}S}{\sqrt{\operatorname{Var} S}} < \frac{\frac{13n}{5} - \frac{5n}{2}}{\sqrt{\frac{5}{4}n}}\right) = \mathbb{P}\left(-\frac{\sqrt{5n}}{25} < \frac{S - \mathbb{E}S}{\sqrt{\operatorname{Var} S}} < \frac{\sqrt{5n}}{25}\right) \overset{CTG}{\approx}$$

$$\overset{CTG}{\approx} \Phi\left(\frac{\sqrt{5n}}{25}\right) - \Phi\left(-\frac{\sqrt{5n}}{25}\right) = 2\cdot\Phi\left(\frac{\sqrt{5n}}{25}\right) - 1 \geq 0{,}95$$

$$\Phi\Big(\underbrace{\frac{\sqrt{5n}}{25}}_{x}\Big) \geq \frac{1 + 0{,}95}{2} = 0{,}975 \implies x = \frac{\sqrt{5n}}{25} \geq 1{,}96$$

$$\implies n \geq \frac{(25\cdot 1{,}96)^2}{5} = 480{,}2$$

Φ – dystrybuanta rozkładu normalnego $\mathcal{N}(0,1)$

Zatem należy rzucić co najmniej 481 razy.

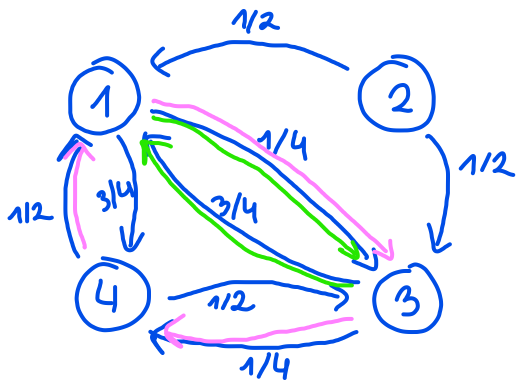
$\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$

$Y \sim \mathcal{N}(0,1) \implies \mathbb{P}(a \leq Y \leq b) = \Phi(b) - \Phi(a)$

Zadanie 6. Rozważmy łańcuch Markowa $(X_i)_{i=0}^{\infty}$ dany poniższą macierzą przejścia:

$$\Pi = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{3}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}.$$

(a) Wyznacz rozkład po trzech krokach, jeśli $\bar{\rho}^0 = (0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2})$ jest rozkładem początkowym tego łańcucha.
(b) Sprawdź, czy $(X_i)_{i=0}^{\infty}$ jest łańcuchem nieprzywiedlnym.
(c) Sprawdź, czy $(X_i)_{i=0}^{\infty}$ jest łańcuchem okresowym.
(d) Ustal, czy $(X_i)_{i=0}^{\infty}$ jest łańcuchem ergodycznym.
(e) Znajdź wszystkie rozkłady stacjonarne dla tego łańcucha.



a) $\bar{\rho}^0 = (0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2})$ – rozkład początkowy

$\bar{\rho}^t$ – rozkład po t krokach $\quad \bar{\rho}^t = \bar{\rho}^0 \cdot (\Pi)^t$

$\bar{\rho}^1 = \bar{\rho}^0 \cdot \Pi = \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}, 0\right) = \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 0\right)$

$\bar{\rho}^2 = \bar{\rho}^1 \cdot \Pi = \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 0\right) \cdot \Pi = \left(\frac{3}{8}, 0, \frac{1}{8}, \frac{1}{2}\right)$

$\bar{\rho}^3 = \bar{\rho}^2 \cdot \Pi = \left(\frac{3}{8}, 0, \frac{1}{8}, \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{11}{32}, 0, \frac{11}{32}, \frac{10}{32}\right)$

b) nieprzywiedlny – z każdego stanu da się dojść do każdego innego

Nasz łańcuch nie jest nieprzywiedlny, bo nie da się dojść do stanu nr 2.

c) $d(i) = \text{NWD}\{t : p_{ii}^t > 0\}$ – okres stanu i, p_{ii}^t – prawdop. przejścia z i do i w t krokach

$d(1) = \text{NWD}\{2, 3\} = 1$

$d(2)$ – niezdefiniowane

$d(3) = d(4) = \text{NWD}\{2, 3\} = 1$

żaden ze stanów nie jest okresowy, zatem i łańcuch jest nieokresowy

d) ergodyczny = nieprzywiedlny + nieokresowy

Nasz łańcuch nie jest nieprzywiedlny, więc nie jest ergodyczny.

e) cd. $\overline{\pi}$ jest rozkładem stacjonarnym jeśli $\overline{\pi} \cdot \Pi = \overline{\pi}$

$$\overline{\pi} = (x, y, z, 1-x-y-z) \quad \text{gdzie} \quad 0 \leq x, y, z, 1-x-y-z \leq 1$$

Aby wyznaczyć wszystkie rozkłady stacjonarne musimy rozwiązać układ równań wynikający z: $(x, y, z, 1-x-y-z) \cdot \Pi = (x, y, z, 1-x-y-z)$

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}y + \frac{3}{4}z + \frac{1}{2}(1-x-y-z) \\ y = 0 \\ z = \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}(1-x-y-z) \\ 1-x-y-z = \frac{3}{4}x + \frac{1}{4}z \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{1}{4}z + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x \quad \Rightarrow \quad \frac{3}{2}x = \frac{1}{4}z + \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{6}z + \frac{1}{3} \\ y = 0 \\ z = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}z \quad \Rightarrow \quad \frac{3}{2}z = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{6}z + \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{2} \\ 1-x-z = \frac{3}{4}x + \frac{1}{4}z \end{cases}$$

$$= -\frac{1}{12}z - \frac{1}{6} + \frac{1}{2} \quad / \cdot 12$$

$$19z = 4 \quad \Rightarrow \quad z = \frac{4}{19}$$

$$x = \frac{1}{6} \cdot \frac{4}{19} + \frac{1}{3} = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{19} + 1\right) = \frac{7}{19}$$

$$1-x-y-z = 1 - \frac{7}{19} - 0 - \frac{4}{19} = \frac{8}{19}$$

Jedynym rozkładem stacjonarnym jest wektor $\left(\frac{7}{19}, 0, \frac{4}{19}, \frac{8}{19}\right)$.