KOLOKWIUM POPRAWKOWE NR 1 (ASD, 12/02/2021)
Imię i nazwisko: ....

Zad. 1 (4pkt) Dany jest pseudokod następującego algorytmu:

```
ALG(m, n)
q = 0
r = m
while (r >= n) do
  q = q + 1
  r = r - n
return q, r
```

a) Czym są liczby `q` i `r` zwracane przez algorytm ALG? b) Jakie wartości zwróci algorytm ALG dla $\mathtt{m} = 7$ oraz $\mathtt{n} = 2$?

Zad. 2 (5 pkt) Dane są dwa ciągi liczb zdefiniowane następująco: $a_1 = 1$, $b_1 = 2$, $a_i = \frac{a_{i-1}^2}{b_{i-1}}$, $b_i = b_{i-1} * a_{i-1}$ dla $i = 2, 3, \ldots$ Napisz pseudokod algorytmu obliczającego dla danego n wartość sumy $\frac{a_1+b_1}{16} + \frac{a_2+b_2}{16^2} + \cdots + \frac{a_n+b_n}{16^n}$.

Zad. 3 (4 pkt) Napisz pseudokod rekurencyjnej funkcji f zdefiniowanej dla naturalnego $n \geqslant 1$ następująco: $f(1) = 2, f(2) = 3$ oraz $f(n) = 3 * f(n-1) + \frac{1}{n} * f(n-2)$ dla $n \geqslant 2$.

Zad. 4 (4 pkt) Dany jest następujący pseudokod algorytmu wyszukiwania największego elementu powyżej głównej przekątnej tablicy $A[1..n, 1..n]$:

```
a = A[1,1]
for i = 1 to n do
  for j = 1 to n do
     if a > A[i,j]
     then a = A[i,j]
return a
```

Czy ten algorytm jest poprawny? Uzasadnij odpowiedź.

Zad. 5 (3 pkt) Wykorzystując twierdzenie o rekurencji uniwersalnej podaj ograniczoność asymptotyczną funkcji $T(n)$ określonej wzorem
a) $T(n) = 25T(\frac{n}{5}) + n^2$ b) $T(n) = 5T(\frac{n}{5}) + n^2$ c) $T(n) = 5T(\frac{n}{2}) + n^2$

Zad. 6 (5 pkt) Dwie liczby naturalne nazywamy zaprzyjaźnionymi, jeżeli suma dzielników właściwych każdej z tych liczb równa się drugiej. (Przykład: 220 i 284 są liczbami zaprzyjaźnionymi.) Napisz pseudokod boolowskiej funkcji $FRIENDS(a, b)$ zwracającej **true** jeżeli a i b są zaprzyjaźnione oraz **false** w przeciwnym przypadku.

Twierdzenie o rekurencji uniwersalnej

Niech $a \geqslant 1$ i $b > 1$ będą stałymi, niech $f(n)$ będzie pewną funkcją i niech $T(n)$ będzie zdefiniowane dla nieujemnych liczb całkowitych przez rekurencję

$$T(n) = aT(\frac{n}{b}) + f(n),$$

gdzie $\frac{n}{b}$ interpretujemy jako $\lfloor \frac{n}{b} \rfloor$ bądź $\lceil \frac{n}{b} \rceil$. Wtedy funkcja $T(n)$ może być ograniczona asymptotycznie w następujący sposób:
1. jeśli $f(n) = O(n^{\log_b a - \epsilon})$ dla pewnej stałej $\epsilon > 0$, to $T(n) = \Theta(n^{\log_b a})$;
2. jeśli $f(n) = \Theta(n^{\log_b a})$, to $T(n) = \Theta(n^{\log_b a} \log n)$;
3. jeśli $f(n) = \Omega(n^{\log_b a + \epsilon})$ dla pewnej stałej $\epsilon > 0$ oraz $af(\frac{n}{b}) \leqslant cf(n)$ dla pewnej stałej $c < 1$ i wszystkich dostatecznie dużych n, to $T(n) = \Theta(f(n))$.

Notacja asymptotyczna

Piszemy $f(n) = \Omega(g(n))$, gdy funkcja $f(n)$ jest elementem zbioru

$$\Omega(g(n)) = \left\{ f(n) : \exists c > 0 \exists n_0 > 0 \forall n \geqslant n_0 \ \text{ zachodzi } 0 \leqslant cg(n) \leqslant f(n) \right\}.$$

Piszemy $f(n) = O(g(n))$, gdy funkcja $f(n)$ jest elementem zbioru

$$O(g(n)) = \left\{ f(n) : \exists c > 0 \exists n_0 > 0 \forall n \geqslant n_0 \ \text{ zachodzi } 0 \leqslant f(n) \leqslant cg(n) \right\}.$$

Piszemy $f(n) = \Theta(g(n))$, gdy funkcja $f(n)$ jest elementem zbioru

$$\Theta(g(n)) = \left\{ f(n) : \exists c_1, c_2 > 0 \exists n_0 > 0 \forall n \geqslant n_0 \ \text{ zachodzi } 0 \leqslant c_1 g(n) \leqslant f(n) \leqslant c_2 g(n) \right\}.$$