Wstęp do rachunku prawdopodobieństwa
9. Zmienne losowe ciągłe wielowymiarowe.

Przypomnijmy, że dowolną funkcję (mierzalną) $(X, Y) : \Omega \to \mathbb{R}^2$ nazywamy **wektorem losowym** lub **zmienną losową dwuwymiarową**. Dla takiego wektora **dystrybuanta** $F_{X,Y} : \mathbb{R}^2 \to [0,1]$ zdefiniowana jest wzorem

$$F_{X,Y}(x, y) = \mathbb{P}\left(X \leqslant x, Y \leqslant y\right).$$

Definicja. *Jeśli dystrybuanta* $F_{X,Y}(x, y) = \mathbb{P}\left(X \leqslant x, Y \leqslant y\right)$ *zmiennej losowej dwuwymiarowej* $(X, Y) : \Omega \to \mathbb{R}^2$ *daje się zapisać jako*

$$F_{X,Y}(x, y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f_{X,Y}(s, t)\, dt\, ds$$

dla pewnej nieujemnej funkcji $f_{X,Y} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$*, to zmienną losową* (X, Y) *nazywamy* **(absolutnie) ciągłą***, a funkcję* $f_{X,Y}$ **gęstością** *zmiennej losowej* (X, Y)*. Wtedy:*

$$f_{X,Y}(s, t) = \frac{\partial^2 F_{X,Y}(x, y)}{\partial x \partial y}\Big|_{x=s, y=t}$$

dla prawie wszystkich wartości (s, t)*. Zauważmy, że wówczas zachodzi również:*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(s, t)\, dt\, ds = 1.$$

Jeśli (X, Y) jest (absolutnie) ciągła, to gęstość i dystrybuantę zmiennej losowej X wyznaczamy ze wzorów:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, t)\, dt\,,$$

oraz

$$F_X(x) = \lim_{y \to \infty} F_{X,Y}(x, y)\,.$$

Podobnie zmienna losowa Y ma gęstość

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(s, y)\, ds$$

i dystrybuantę

$$F_Y(y) = \lim_{x \to \infty} F_{X,Y}(x, y)\,.$$

Twierdzenie. *Jeśli zmienna losowa dwuwymiarowa* (X, Y) *ma gęstość* $f_{X,Y}$*, to dla dowolnej funkcji (mierzalnej)* $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$\mathbb{E}g(X, Y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(s, t) f_{X,Y}(s, t)\, dt\, ds.$$

Przykład 1. *Jeśli zmienna losowa dwuwymiarowa* (X, Y) *ma gęstość* $f_{X,Y}$*, wówczas* $\mathbb{E}(X^2 Y)$ *możemy wyznaczyć w następujący sposób:*

$$\mathbb{E}(X^2 Y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} s^2 t f_{X,Y}(s, t)\, dt\, ds.$$

Definicja. *Zmienne losowe* X *i* Y *są* **niezależne***, jeśli dla wszystkich* x*,* y *zachodzi:*

$$F_{X,Y}(x, y) = F_X(x) F_Y(y).$$

Jeśli zmienna losowa dwuwymiarowa (X, Y) *ma gęstość* $f_{X,Y}$*, natomiast* X *i* Y *mają gęstości odpowiednio* f_X *i* f_Y*, to zmienne losowe* X *i* Y *są niezależne wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$f_{X,Y}(x, y) = f_X(x) f_Y(y),$$

dla (prawie) wszystkich x *i* y*.*

Twierdzenie. *Jeśli zmienna losowa X ma dystrybuantę $F = F_X$ to:*

$$\mathbb{P}\left(a < X \leqslant b\right) = F(b) - F(a).$$

Natomiast dla zmiennej losowej dwuwymiarowej (X, Y) o dystrybuancie $F = F_{X,Y}$ mamy:

$$\mathbb{P}\left(a < X \leqslant b, c < Y \leqslant d\right) = F(b, d) - F(b, c) - F(a, d) + F(a, c).$$

Twierdzenie. *Dla zmiennej losowej dyskretnej X oraz dla dowolnego $A \subseteq \mathbb{R}$ mamy:*

$$\mathbb{P}\left(X \in A\right) = \sum_{x \in A} \mathbb{P}\left(X = x\right).$$

Podobnie, dla zmiennej losowej ciągłej X o gęstości f_X i dowolnego (borelowskiego) $A \subseteq \mathbb{R}$ zachodzi

$$\mathbb{P}\left(X \in A\right) = \int_{x \in A} f_X(x)\, dx,$$

a dla zmiennej losowej dwuwymiarowej (X, Y) o gęstości $f_{(X,Y)}(x, y)$ oraz dowolnego (borelowskiego) $A \subseteq \mathbb{R}^2$

$$\mathbb{P}\left((X, Y) \in A\right) = \int\int_{(x,y) \in A} f_{(X,Y)}(x, y)\, dy\, dx.$$

Dodatek A. Zadania na ćwiczenia

Zadanie 1. Dystrybuanta zmiennej losowej (X, Y) wyraża się wzorem

$$F_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} (1 - \exp(-x))(1 - \exp(-2y)) & \text{dla } x \geqslant 0, y \geqslant 0, \\ 0 & \text{w pozostałych przypadkach.} \end{cases}$$

(a) Znajdź gęstość $f_{X,Y}$.
(b) Znajdź dystrybuanty F_X, F_Y i gęstości f_X, f_Y.
(c) Czy zmienne losowe X i Y są niezależne?
(d) Korzystając z dystrybuanty $F_{X,Y}$ znajdź $\mathbb{P}\left(-1 \leqslant X \leqslant 4, 2 \leqslant Y < 3\right)$.

Zadanie 2. Gęstość zmiennej losowej (X, Y) wyraża się wzorem

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} cy & \text{dla } (x, y) \text{ należących do prostokąta o wierzchołkach } (0, 0), (4, 0), (4, 1), (0, 1), \\ 0 & \text{w pozostałych przypadkach.} \end{cases}$$

(a) Znajdź stałą c.
(b) Wylicz gęstość f_X, dystrybuantę F_X oraz wartość oczekiwaną $\mathbb{E}X$.
(c) Czy zmienne losowe X i Y są niezależne?
(d) Korzystając z dystrybuanty F_X, znajdź $\mathbb{P}\left(1/2 \leqslant X \leqslant 3/2\right)$.
(e) Oblicz $\mathbb{P}\left(1/2 \leqslant X \leqslant 3/2\right)$, korzystając z gęstości f_X.
(f) Oblicz $\mathbb{E}XY$.

Zadanie 3. Wybieramy losowo punkt (x, y) z kwadratu $[0, 1] \times [0, 1]$. Niech X i Y będą odpowiednio zmiennymi losowymi oznaczającymi współrzędne tego punktu, a $Z = X + Y$. Znajdź dystrybuantę i gęstość zmiennej losowej dwuwymiarowej (X, Y). Znajdź rozkłady zmiennych losowych X, Y i Z, następnie oblicz ich wartości oczekiwane. Czy zmienne losowe X i Y są niezależne?

Dodatek B. Zadania domowe

Zadanie 1. Zmienna losowa (X, Y) ma dystrybuantę daną wzorem

$$F_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{gdy } x, y \geqslant 1, \\ xy & \text{gdy } x, y \in (0,1), \\ x & \text{gdy } x \in (0,1) \text{ i } y \geqslant 1, \\ y & \text{gdy } y \in (0,1) \text{ i } x \geqslant 1, \\ 0 & \text{w pozostałych przypadkach.} \end{cases}$$

Znajdź $f_{X,Y}(x,y)$, $f_X(x)$, $f_Y(y)$. Czy zmienne losowe X i Y są niezależne? Oblicz $\mathbb{E}X$, $\mathbb{E}Y$, $\mathrm{Cov}(X,Y)$.

Zadanie 2. Zmienna losowa (X, Y) ma gęstość

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} cx^2y & \text{gdy } x \in [0,1], y \in [1,2], \\ 0 & \text{w pozostałych przypadkach.} \end{cases}$$

Znajdź wartość stałej c oraz rozkłady brzegowe $f_X(x)$ i $f_Y(y)$. Czy zmienne losowe X i Y są niezależne?

Zadanie 3. Zmienna losowa (X, Y) ma gęstość

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{gdy } (x,y) \text{ należy do trójkąta o wierzchołkach } (0,0),\ (2,0),\ (2,1), \\ 0 & \text{w pozostałych przypadkach.} \end{cases}$$

Znajdź rozkłady brzegowe $f_X(x)$ i $f_Y(y)$. Czy zmienne losowe X i Y są niezależne?

Zadanie 4. Wybieramy losowo punkt (x, y) z prostokąta o wierzchołkach $(-2. -1)$, $(2, -1)$, $(2, 1)$ i $(-2, 1)$. Niech X i Y będą odpowiednio zmiennymi losowymi oznaczającymi współrzędne tego punktu. Znajdź dystrybuantę i gęstość zmiennej losowej dwuwymiarowej (X, Y). Znajdź rozkłady brzegowe zmiennych losowych X i Y, następnie oblicz ich wartości oczekiwane. Czy zmienne losowe X i Y są niezależne?

Zadanie 5. (*) Dla zmiennych losowych X i Z z zadania A.3 wyznacz dystrybuantę zmiennej losowej dwuwymiarowej (X, Z).

Odpowiedzi do zadań domowych

B.1

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x \in (0,1), y \in (0,1), \\ 0 & \text{w pozostałych przypadkach.} \end{cases}$$

$$f_X(x) = \begin{cases} 1 & x \in (0,1), \\ 0 & x \notin (0,1); \end{cases} \qquad f_Y(y) = \begin{cases} 1 & y \in (0,1), \\ 0 & y \notin (0,1). \end{cases}$$

Są niezależne.

$$EX = \frac{1}{2}, \;\; EY = \frac{1}{2}, \;\; \mathrm{Cov}(X,Y) = 0$$

B.2 $c = 2$

$$f_X(x) = \begin{cases} 3x^2 & x \in [0,1], \\ 0 & x \notin [0,1]; \end{cases} \qquad f_Y(y) = \begin{cases} \frac{2}{3}y & y \in [1,2], \\ 0 & y \notin [1,2]. \end{cases}$$

Są niezależne.

B.3

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x & x \in [0,2], \\ 0 & x \notin [0,2]; \end{cases} \qquad f_Y(y) = \begin{cases} 2-2y & y \in [0,1], \\ 0 & y \notin [0,1]. \end{cases}$$

Nie są niezależne.

B.4

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{8} & \text{dla } -2 \leqslant x \leqslant 2, -1 \leqslant y \leqslant 1, \\ 0 & \text{w pozostałych przypadkach;} \end{cases}$$

$$F_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x < -2 \text{ lub } y < -1, \\ \frac{(x+2)(y+1)}{8} & \text{dla } -2 \leqslant x \leqslant 2, -1 \leqslant y \leqslant 1, \\ \frac{y+1}{2} & \text{dla } x > 2, -1 \leqslant y \leqslant y, \\ \frac{x+2}{4} & \text{dla } -2 \leqslant x \leqslant 2, y > 1, \\ 1 & \text{w pozostałych przypadkach;} \end{cases}$$

X ma rozkład jednostajny na odcinku $[-2,2]$, $\mathbb{E}X = 0$
Y ma rozkład jednostajny na odcinku $[-1,1]$, $\mathbb{E}Y = 0$
X i Y są niezależne.