DMAD - kod Prüfera, algorytm Kruskala, grafy Eulera i Hamiltona

Jak przygotować się do rozwiązywania zadań?

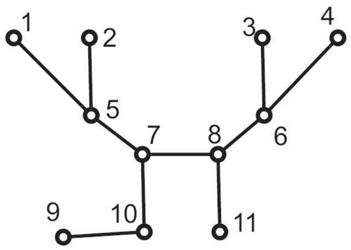
Przeczytać rozdziały 7.10 – 7.11, 8.2, 8.3 i 8.4 z materiałów.

Przed zajęciami powinnam/powinienem znać:

– definicję drzewa rozpiętego;
– twierdzenia 7.8, 7.10, 7.11;
– działanie kodu Prüfera;
– działanie **algorytmu Kruskala**.
– definicje grafu Eulera i grafu Hamiltona, Tw. 8.2, 8.4

A Zadania na ćwiczenia

Zadanie A.1. Podaj kod Prüfera poniższego drzewa:

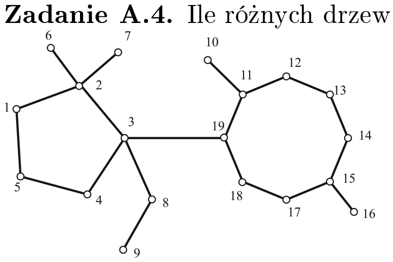


Zadanie A.2. Narysuj drzewo o podanym kodzie Prüfera: (1,1,2,5,2,2,6,8).

Zadanie A.3. Bez rysowania drzewa odpowiedz na poniższe pytania dotyczące drzewa o kodzie Prüfera (8,1,1,1,4,3,3,4,3,7).

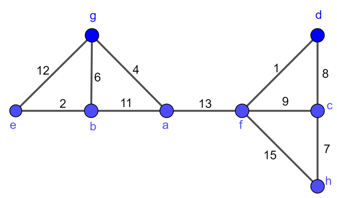
a) Ile ma ono wierzchołków?
b) Ile ma ono wierzchołków o stopniu 1?
c) Jaki ma stopień wierzchołek 3 w tym drzewie?

Zadanie A.4. Ile różnych drzew rozpiętych ma graf na poniższym rysunku?

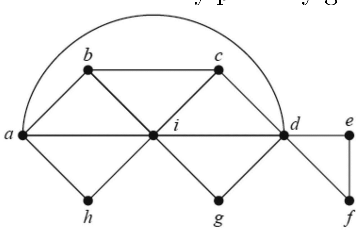


Zadanie A.5. W podanym niżej grafie wyznaczyć za pomocą algorytmu Kruskala optymalne drzewo rozpięte (o minimalnej wadze). Wykorzystaj etykiety korzeni w trakcie działania algorytmu.

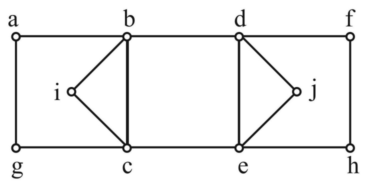
$$\begin{bmatrix} 0 & 11 & \infty & \infty & \infty & 13 & 4 & \infty \\ 11 & 0 & \infty & \infty & 2 & \infty & 6 & \infty \\ \infty & \infty & 0 & 8 & \infty & 9 & \infty & 7 \\ \infty & \infty & 8 & 0 & \infty & 1 & \infty & \infty \\ \infty & 2 & \infty & \infty & 0 & \infty & 12 & \infty \\ 13 & \infty & 9 & 1 & \infty & 0 & \infty & 15 \\ 4 & 6 & \infty & \infty & 12 & \infty & 0 & \infty \\ \infty & \infty & 7 & \infty & \infty & 15 & \infty & 0 \end{bmatrix}$$



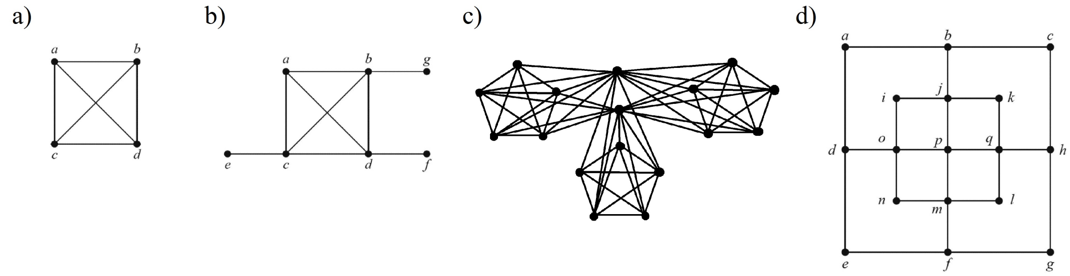
Zadanie A.6. Czy poniższy graf ma obchód/szlak Eulera?



Zadanie A.7. Korzystając z Algorytmu Fleury'ego wyznacz obchód Eulera w grafie poniżej (rozpatruj krawędzie uwzględniając wierzchołki w kolejności alfabetycznej).



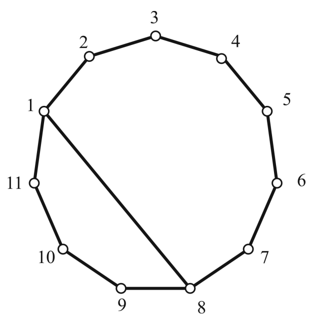
Zadanie A.8. Które z poniższych grafów mają cykl/ścieżkę Hamiltona? Odpowiedzi uzasadnij.



B Zadania na ćwiczenia - jeśli czas pozwoli

Zadanie B.1. Wyznacz liczbę drzew rozpiętych grafu $K_{2,3}$.

Zadanie B.2. Ile różnych drzew rozpiętych ma graf na rysunku poniżej? Ile najmniej i najwięcej może mieć drzew rozpiętych cykl na n ($n \geqslant 5$) wierzchołkach z jedną przekątną (np. graf na rysunku 4 jest cyklem na 11 wierzchołkach z przekątną $\{1, 8\}$)? Odpowiedź uzasadnij.



Zadanie B.3. Ile jest drzew na zbiorze wierzchołków $\{1, 2, \ldots, 2n\}$ ($n \geqslant 3$) o dwóch wierzchołkach stopnia n? Zadanie rozwiąż na dwa sposoby, bezpośrednio i korzystając z kodu Prüfera.

Zadanie B.4. Wyjaśnij jak, korzystając z algorytmu Kruskala, znaleźć minimalny rozpięty las w grafie niespójnym.

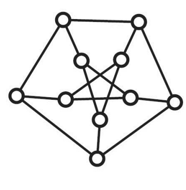
Zadanie B.5. Czy każdy graf, który posiada obchód Eulera ma parzystą liczbę krawędzi? Jeśli tak, to podaj uzasadnienie. Jeśli nie, to podaj kontrprzykład.

Zadanie B.6. Dla jakich k, k–kostka Q_k, $k \geqslant 2$, jest grafem eulerowskim/hamiltonowskim?

Zadanie B.7. Narysuj, o ile istnieje, najmniejszy graf spójny bez krawędzi cięcia i bez wierzchołka cięcia, który nie posiada cyklu Hamiltona.

Zadanie B.8. Ile różnych cykli Hamiltona jest w grafach K_n i $K_{n,n}$?

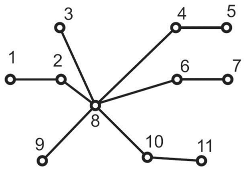
Zadanie B.9. Pokaż, że graf Petersena nie ma cyklu Hamiltona.



C Zadania do samodzielnej pracy w domu

Zadanie C.1. Ile drzew rozpiętych ma: K_6 i C_8?

Zadanie C.2. Podaj kod Prüfera drzewa na rysunku poniżej.



Zadanie C.3. Narysuj (o ile istnieją) drzewa o podanym kodzie Prüfera (zakładamy, że zbiór wierzchołków jest zbiorem kolejnych liczb naturalnych):

a) (9,7,7,7,3,4,5,4,10)
b) (9,7,7,7,3,10,5)
c) (9,7,10,7,2,4,2,4,1)
d) (8,7,7,7,11,5,1)

Zadanie C.4. Dla grafu podanego poniżej macierzą wag wyznacz drzewo rozpięte o minimalnej wadze za pomocą algorytmu Kruskala. Wykorzystaj etykiety korzeni w trakcie działania algorytmu.

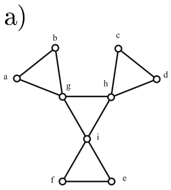
a) $\begin{bmatrix} \infty & \infty & 5 & 3 & 9 & \infty \\ \infty & \infty & 6 & 2 & 8 & 10 \\ 5 & 6 & \infty & 1 & \infty & \infty \\ 3 & 2 & 1 & \infty & 7 & \infty \\ 9 & 8 & \infty & 7 & \infty & 4 \\ \infty & 10 & \infty & \infty & 4 & \infty \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} \infty & \infty & 6 & 4 & 15 & \infty \\ \infty & \infty & 7 & 3 & 13 & 20 \\ 6 & 7 & \infty & 2 & \infty & \infty \\ 4 & 3 & 2 & \infty & 10 & \infty \\ 15 & 13 & \infty & 10 & \infty & 5 \\ \infty & 20 & \infty & \infty & 5 & \infty \end{bmatrix}$

Zadanie C.5. Czy każdy graf prosty o danym ciągu stopni ma obchód Eulera?

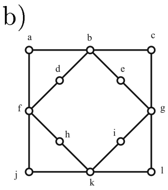
a) (4,4,4,4,4,4,4,4,4,4)
b) (6,4,4,4,4,4,4,4,4,4)

Zadanie C.6. Dla poniższych grafów rozstrzygnij, czy ma obchód/szlak Eulera, cykl/ścieżkę Hamiltona.
Jeśli TAK podaj go/ją (tzn. podaj w jakiej kolejności odwiedzane są wierzchołki w obchodzie/cyklu). Jeśli NIE, uzasadnij, dlaczego tak sądzisz.

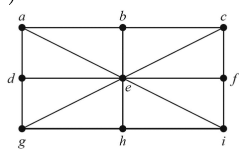
a)



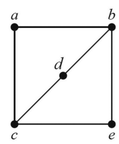
b)



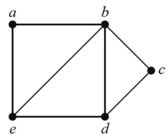
c)



d)



e)



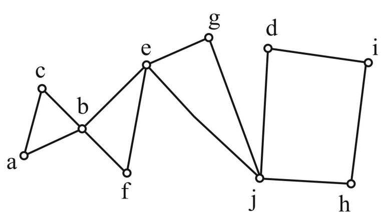
Zadanie C.7. Kiedy

a) graf pełny K_n, $n \geqslant 3$;
b) graf dwudzielny $K_{n,m}$, $n, m \geqslant 2$;
c) graf prosty o ciągu stopni $(2, 2, 2, 2, 2, 2)$;

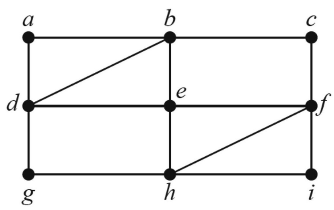
jest grafem eulerowskim/hamiltonowskim?

Zadanie C.8. Korzystając z Algorytmu Fleury'ego wyznacz obchód Eulera w poniższych grafach.

a)



b)



Zadanie C.9. Udowodnij, że jeśli graf G ma ścieżkę Hamiltona, to dla dowolnego niepustego podzbioru $S \subset V(G)$ mamy

$$\omega(G - S) \leqslant |S| + 1$$

WSKAZÓWKA: Spójrz na dowody z wykładu.

Zadanie C.10. Zadania B.6, B.7 i B.8, jeśli nie były zrobione na zajęciach.

Odpowiedzi do niektórych zadań

C.1 $\tau(K_6) = 6^4$. $\tau(C_8) = 8$.

C.2 $(4, 1, 6, 1, 2, 1, 1, 1, 3)$

C.3 a i c to kody Prüfera, b i d nie.

C.4 kolejność krawędzi dodawanych do drzewa: cd, bd, ad, ef de
a) waga: 17
b) waga: 24

C.5 a) Nie b) Tak

C.6 a) Ma obchód Eulera - wszystkie stopnie parzyste. Nie ma cyklu Hamiltona. Nie ma ścieżki Hamiltona. b) Ma obchód Eulera. Nie ma cyklu Hamiltona. Nie ma ścieżki Hamiltona. c) Nie ma obchodu ani szlaku Eulera (8 wierzchołków stopnia nieparzystego). Ma cykl Hamiltona. d) Nie ma obchodu, tylko szlak Eulera. Nie ma cyklu Hamiltona. Ma ścieżkę Hamiltona. e) Nie ma obchodu, tylko szlak Eulera. Ma cykl Hamiltona.

C.7 a) K_n jest zawsze hamiltonowski. Jest eulerowski, gdy n jest nieparzyste. b) $K_{n,m}$ jest hamiltonowski dla $n = m$. Jest eulerowski, gdy n i m są parzyste. c) Jest eulerowski i hamiltonowski wtw gdy jest spójny (jest wtedy cyklem C_6.)

C.8 Kolejność krawędzi: a) $ab, be, eg, gj, jd, di, ih, hj, je, ef, fb, bc, ca$ b) $ab, bc, cf, fe, eb, bd, de, eh, hf, fi, ih, hg, gd, da$

B.6 Q_k jest grafem eulerowskim dla parzystych k. Jest grafem hamiltonowskim dla $k \geqslant 2$.

B.7 Graf składający się z 3 trójkątów o jednej wspólnej krawędzi.

B.8 W K_n jest $\frac{(n-1)!}{2}$ cykli, a w $K_{n,n}$: $\frac{(n-1)!}{2}n!$.