Matematyka dyskretna
2. Zasada szufladkowa

29.10.2020

Twierdzenie (Zasada szufladkowa Dirichleta)

Jeśli rozmieścimy n przedmiotów w m szufladkach, przy czym $n > k \cdot m$ ($k \in \mathbb{N}$), to w którejś szufladce znajdzie się co najmniej $k + 1$ przedmiotów.

Zadanie

Udowodnij, że wśród dowolnie wybranych 11 *liczb naturalnych zawsze znajdą się dwie z tą samą ostatnią cyfrą.*

Przedmioty:

Szufladki:

Przedmioty: Wybrane liczby ($n = 11$)

Szufladki:

Przedmioty: Wybrane liczby ($n = 11$)

Szufladki: Możliwe ostatnie cyfry w liczbie ($m = 10$)

Przedmioty: Wybrane liczby ($n = 11$)

Szufladki: Możliwe ostatnie cyfry w liczbie ($m = 10$)

$$11 > 1 \cdot 10$$

Przedmioty: Wybrane liczby ($n = 11$)

Szufladki: Możliwe ostatnie cyfry w liczbie ($m = 10$)

$$11 > 1 \cdot 10$$

Zatem na mocy zasady szufladkowej wśród wybranych liczb istnieją $1 + 1 = 2$ liczby z taką samą ostatnią cyfrą.

Zadanie

Pokaż, że wśród 10 kart wybranych z talii 52 kart co najmniej 3 karty są tego samego koloru.

Przedmioty:

Szufladki:

Przedmioty: 10 kart wybranych z talii 52 kart ($n = 10$)

Szufladki:

Przedmioty: 10 kart wybranych z talii 52 kart ($n = 10$)

Szufladki: Możliwe kolory kart - kiery, piki, kara i trefle ($m = 4$)

Przedmioty: 10 kart wybranych z talii 52 kart ($n = 10$)

Szufladki: Możliwe kolory kart - kiery, piki, kara i trefle ($m = 4$)

$$10 > 2 \cdot 4$$

Przedmioty: 10 kart wybranych z talii 52 kart ($n = 10$)

Szufladki: Możliwe kolory kart - kiery, piki, kara i trefle ($m = 4$)

$$10 > 2 \cdot 4$$

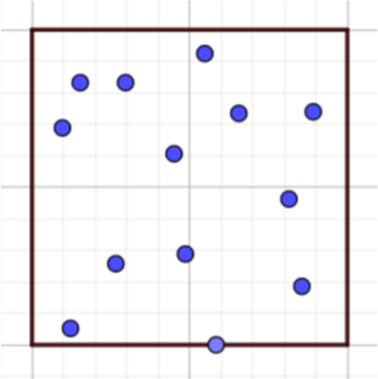
Zatem na mocy zasady szufladkowej wśród wybranych 10 kart istnieją $2 + 1 = 3$ karty, które mają ten sam kolor.

Zadanie

W kwadracie o boku 1 *wybrano* 103 *punkty (być może leżące na brzegu) w taki sposób, że żadne 3 z nich nie leżą na jednej prostej. Wykaż, że pewne trzy z tych punktów tworzą trójkąt o polu nie większym niż 0,01.*

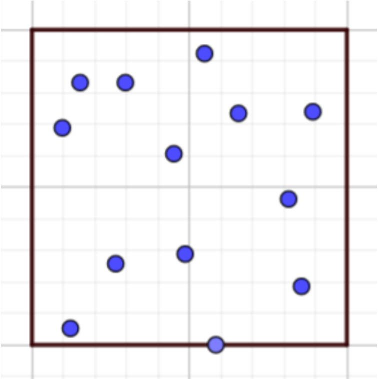
Przedmioty:

Szufladki:



Przedmioty: Wybrane punkty z kwadratu ($n = 103$)

Szufladki:



Zadanie

Danych jest 12 różnych dwucyfrowych liczb naturalnych. Pokaż, że można wybrać pewne dwie z nich tak, aby ich różnica była postaci aa (gdzie a jest cyfrą).

Pytanie: Kiedy różnica dwóch dwucyfrowych liczb naturalnych jest postaci *aa* (tzn. jest jedną z liczb ze zbioru $\{11, 22, \ldots, 99\}$)?

Pytanie: Kiedy różnica dwóch dwucyfrowych liczb naturalnych jest postaci *aa* (tzn. jest jedną z liczb ze zbioru $\{11, 22, \ldots, 99\}$)?

Odpowiedź: Wtedy, gdy różnica tych liczb jest dwucyfrową liczbą podzielną przez 11, co oznacza, że te dwie liczby muszą dawać taką samą resztę przy dzieleniu przez 11.

Pytanie: Kiedy różnica dwóch dwucyfrowych liczb naturalnych jest postaci *aa* (tzn. jest jedną z liczb ze zbioru $\{11, 22, \ldots, 99\}$)?

Odpowiedź: Wtedy, gdy różnica tych liczb jest dwucyfrową liczbą podzielną przez 11, co oznacza, że te dwie liczby muszą dawać taką samą resztę przy dzieleniu przez 11.

Uwaga! Zauważmy, że jeśli mamy dwie liczby naturalne a, b ($a > b$) *dwucyfrowe*, które przy dzieleniu przez 11 dają taką samą resztę, to $11 \leqslant a - b \leqslant 88$, a więc ta różnica też jest liczbą dwucyfrową

Przedmioty:

Szufladki:

Przedmioty: Wybrane liczby ($n = 12$)

Szufladki:

Przedmioty: Wybrane liczby ($n = 12$)

Szufladki: Możliwe reszty z dzielenia liczby przez 11 ($m = 11$)

Przedmioty: Wybrane liczby ($n = 12$)

Szufladki: Możliwe reszty z dzielenia liczby przez 11 ($m = 11$)

$$12 > 1 \cdot 11$$

Przedmioty: Wybrane liczby ($n = 12$)

Szufladki: Możliwe reszty z dzielenia liczby przez 11 ($m = 11$)

$$12 > 1 \cdot 11$$

Zatem na mocy zasady szufladkowej wśród wybranych liczb istnieją $1 + 1 = 2$ liczby, których różnica jest postaci aa.

Zadanie

Na płaszczyźnie danych jest pięć punktów kratowych (czyli punktów o obu współrzędnych całkowitych). Udowodnij, że środek jednego z odcinków łączących te punkty też jest punktem kratowym.

Przypomnienie: Środek odcinka o końcach w punktach $P = (x, y)$ i $Q = (u, v)$ ma współrzędne

$$S =$$

Pytanie: Kiedy środek odcinka o końcach w punktach kratowych też jest punktem kratowym?

Odpowiedź:

Przypomnienie: Środek odcinka o końcach w punktach $P = (x, y)$ i $Q = (u, v)$ ma współrzędne

$$S = \left(\frac{x+u}{2}, \frac{y+v}{2}\right).$$

Pytanie: Kiedy środek odcinka o końcach w punktach kratowych też jest punktem kratowym?

Odpowiedź:

Przypomnienie: Środek odcinka o końcach w punktach $P = (x, y)$ i $Q = (u, v)$ ma współrzędne

$$S = \left(\frac{x+u}{2}, \frac{y+v}{2} \right).$$

Pytanie: Kiedy środek odcinka o końcach w punktach kratowych też jest punktem kratowym?

Odpowiedź: Kiedy odpowiednie współrzędne są tej samej parzystości.

Przedmioty:

Szufladki:

Przedmioty: Wybrane punkty kratowe ($n = 5$)

Szufladki:

Przedmioty: Wybrane punkty kratowe ($n = 5$)

Szufladki: Możliwe parzystości par współrzędnych - (parzysta, parzysta), (parzysta, nieparzysta), (nieparzysta, parzysta), (nieparzysta, nieparzysta) ($m = 4$)

Przedmioty: Wybrane punkty kratowe ($n = 5$)

Szufladki: Możliwe parzystości par współrzędnych - (parzysta, parzysta), (parzysta, nieparzysta), (nieparzysta, parzysta), (nieparzysta, nieparzysta) ($m = 4$)

$$5 > 1 \cdot 4$$

Przedmioty: Wybrane punkty kratowe ($n = 5$)

Szufladki: Możliwe parzystości par współrzędnych - (parzysta, parzysta), (parzysta, nieparzysta), (nieparzysta, parzysta), (nieparzysta, nieparzysta) ($m = 4$)

$$5 > 1 \cdot 4$$

Zatem na mocy zasady szufladkowej wśród wybranych punktów kratowych istnieją $1 + 1 = 2$ punkty, które są końcami odcinka o środku w punkcie kratowym.

Zadanie

Dany jest zbiór złożony z dziesięciu liczb naturalnych, dwucyfrowych w rozwinięciu dziesiętnym. Pokazać, że w tym zbiorze istnieją takie dwa niepuste podzbiory, że sumy liczb obu podzbiorów są równe.

Przedmioty:

Szufladki:

Przedmioty: Niepuste podzbiory dziesięcioelementowego zbioru liczb dwucyfrowych

Szufladki:

Przedmioty: Niepuste podzbiory dziesięcioelementowego zbioru liczb dwucyfrowych

Szufladki: Możliwe sumy liczb w podzbiorach

Przedmioty: Niepuste podzbiory dziesięcioelementowego zbioru liczb dwucyfrowych

Szufladki: Możliwe sumy liczb w podzbiorach

Ile jest przedmiotów?

Przedmioty: Niepuste podzbiory dziesięcioelementowego zbioru liczb dwucyfrowych

Szufladki: Możliwe sumy liczb w podzbiorach

Ile jest przedmiotów? $n = 2^{10} - 1 = 1023$

Przedmioty: Niepuste podzbiory dziesięcioelementowego zbioru liczb dwucyfrowych

Szufladki: Możliwe sumy liczb w podzbiorach

Ile jest przedmiotów? $n = 2^{10} - 1 = 1023$

Ile jest szufladek? (Wskazówka: Jak duże sumy możemy otrzymać?)

Przedmioty: Niepuste podzbiory dziesięcioelementowego zbioru liczb dwucyfrowych

Szufladki: Możliwe sumy liczb w podzbiorach

Ile jest przedmiotów? $n = 2^{10} - 1 = 1023$

Ile jest szufladek? (Wskazówka: Jak duże sumy możemy otrzymać?)
Możliwe sumy zawierają się w zbiorze $\{10, 11, \ldots, 10 \cdot 100\}$, a więc możemy przyjąć $m = 1000 - 10 + 1 = 991$

Przedmioty: Niepuste podzbiory dziesięcioelementowego zbioru liczb dwucyfrowych

Szufladki: Możliwe sumy liczb w podzbiorach

Ile jest przedmiotów? $n = 2^{10} - 1 = 1023$

Ile jest szufladek? (Wskazówka: Jak duże sumy możemy otrzymać?)
Możliwe sumy zawierają się w zbiorze $\{10, 11, \ldots, 10 \cdot 100\}$, a więc możemy przyjąć $m = 1000 - 10 + 1 = 991$

$$1023 > 1 \cdot 991$$

Przedmioty: Niepuste podzbiory dziesięcioelementowego zbioru liczb dwucyfrowych

Szufladki: Możliwe sumy liczb w podzbiorach

Ile jest przedmiotów? $n = 2^{10} - 1 = 1023$

Ile jest szufladek? (Wskazówka: Jak duże sumy możemy otrzymać?)
Możliwe sumy zawierają się w zbiorze $\{10, 11, \ldots, 10 \cdot 100\}$, a więc możemy przyjąć $m = 1000 - 10 + 1 = 991$

$$1023 > 1 \cdot 991$$

Zatem na mocy zasady szufladkowej istnieją takie 2 niepuste podzbiory dziesięcioelementowego zbioru liczb naturalnych dwucyfrowych, że sumy liczb w obu podzbiorach są równe.

Zadanie

Pokazać, że dla dowolnych $n + 1$ różnych dodatnich liczb całkowitych mniejszych bądź równych $2n$ istnieją dwie, które są względnie pierwsze.

Przypomnienie: Dwie liczby naturalne a i b są względnie pierwsze wtedy i tylko wtedy, gdy

Przypomnienie: Dwie liczby naturalne a i b są względnie pierwsze wtedy i tylko wtedy, gdy $NWD(a,b) = 1$.

Przedmioty:

Szufladki:

Przedmioty: $n + 1$ dodatnich liczb całkowitych mniejszych lub równych $2n$

Szufladki:

Pytanie 1: Ile chcielibyśmy mieć szufladek?

Przedmioty: $n+1$ dodatnich liczb całkowitych mniejszych lub równych $2n$

Szufladki:

Pytanie 1: Ile chcielibyśmy mieć szufladek? $m \leqslant n$

Przedmioty: $n + 1$ dodatnich liczb całkowitych mniejszych lub równych $2n$

Szufladki:

Pytanie 1: Ile chcielibyśmy mieć szufladek? $m \leqslant n$

Pytanie 2: W jaki sposób możemy podzielić zbiór $\{1, 2, \ldots, 2n\}$ na n podzbiorów tak, aby w każdym podzbiorze wszystkie liczby były parami względnie pierwsze?

Przedmioty: $n+1$ dodatnich liczb całkowitych mniejszych lub równych $2n$

Szufladki:

Pytanie 1: Ile chcielibyśmy mieć szufladek? $m \leqslant n$

Pytanie 2: W jaki sposób możemy podzielić zbiór $\{1, 2, \dots, 2n\}$ na n podzbiorów tak, aby w każdym podzbiorze wszystkie liczby były parami względnie pierwsze?

Zauważmy, że dla dowolnej liczby naturalnej k liczby k i $k+1$ są względnie pierwsze. Zatem przykładowy podział to $\{1, 2\}, \{3, 4\}, \dots, \{2n-1, 2n\}$

Przedmioty: $n+1$ dodatnich liczb całkowitych mniejszych lub równych $2n$

Szufladki: $\{1,2\},\{3,4\},\ldots,\{2n-1,2n\}$, n szufladek

Przedmioty: $n+1$ dodatnich liczb całkowitych mniejszych lub równych $2n$

Szufladki:$\{1,2\},\{3,4\},\ldots,\{2n-1,2n\}$, n szufladek

Zatem na mocy zasady szufladkowej wśród dowolnie wybranych $n+1$ liczb całkowitych dodatnich mniejszych bądź równych $2n$ istnieją dwie, które są względnie pierwsze.