

DMAD - schematy wyboru

Jak przygotować się do rozwiązywania zadań?

Przeczytaj rozdziały 3.1, 3.2, 3.3 i 3.4 z podręcznika/wykładu.

Co powinnaś/powinieneś wiedzieć:

Co to są: wariacje z powtórzeniami, wariacje bez powtórzeń, permutacje, kombinacje, kombinacje z powtórzeniami, permutacje z powtórzeniami?

Ile jest:

- ciągów długości k o elementach ze zbioru n -elementowego (np. ze zbioru $\{1, 2, \dots, n\}$);
- sposobów, na które możemy wybrać **kolejno ze zwracaniem** k elementów ze zbioru n -elementowego;
- ciągów długości k o **różnych** elementach ze zbioru n -elementowego;
- sposobów, na które można wybrać **kolejno bez zwracania** k elementów ze zbioru n -elementowego.
- sposobów, na które można ustawić n elementów w rzędzie.
- sposobów, na które można wybrać k -elementowy **podzbiór** zbioru n -elementowego;
- sposobów, na które można wybrać k **różnych** elementów ze zbioru n -elementowego (jeśli **kolejność** wybierania **nie jest istotna**);
- sposobów, na które można wybrać k „miejsc” spośród n „miejsc” ustawionych w ciągu.
- różnych rozmieszczeń identycznych k kul w n ponumerowanych szufladkach;
- rozwiązań w liczbach całkowitych równania

$$x_1 + \dots + x_n = k, \quad x_i \geq 0;$$

- sposobów, na które można utworzyć k -elementowy „pseudozbiór” z elementów n -elementowego zbioru;
- permutacji z powtórzeniami n elementów, jeśli mamy r typów elementów oraz t_i elementów i -tego typu, dla każdego $1 \leq i \leq r$, $t_1 + t_2 + \dots + t_r = n$;
- uporządkowanych podziałów zbioru n -elementowego na podzbiory A_1, \dots, A_r , gdzie $|A_i| = t_i$ dla każdego $1 \leq i \leq r$, $t_1 + t_2 + \dots + t_r = n$.

Ściąga

permutacje	ciągi złożone ze wszystkich wyrazów n -elementowego zbioru	$n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$
permutacje z powtórzeniami	ciągi złożone ze wszystkich wyrazów n -elementowego multizbioru w którym kolejne elementy występują k_1, k_2, \dots, k_r razy	$\binom{n}{k_1, k_2, \dots, k_r} = \frac{n!}{k_1! k_2! \dots k_r!}$
kombinacje	k -elementowe podzbiory zbioru n -elementowego	$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$
kombinacje z powtórzeniami	k -elementowe multizbiory złożone z elementów n -elementowego zbioru	$\binom{n+k-1}{k}$
wariacje	k -elementowe ciągi o wyrazach ze zbioru n -elementowego (wyrazy w ciągu nie mogą się powtarzać)	$(n)_k = \frac{n!}{(n-k)!}$
wariacje z powtórzeniami	k -elementowe ciągi o wyrazach ze zbioru n -elementowego (wyrazy w ciągu mogą się powtarzać)	n^k

A Zadania na ćwiczenia

W każdym z zadań określ, z jakich schematów wyboru i praw przeliczania korzystasz.

Zadanie A.1. Ile jest możliwych wyników 20 losowań jednej karty z talii 52 kart (kolejność losowań istotna), w których

- karty mogą się powtarzać (losowania ze zwracaniem)?
- karty nie mogą się powtarzać (losowania bez zwracania)?
- karty mogą się powtarzać i otrzymaliśmy dokładnie 5 kierów?
- karty nie mogą się powtarzać i otrzymaliśmy dokładnie 5 kierów?

Zadanie A.2. Na ile sposobów możemy umieścić 10 nierozróżnialnych kul w 20 rozróżnialnych urnach, jeśli

- każda urna może zawierać co najwyżej jedną kulę?
- każda urna może zawierać dowolną liczbę kul?

Jak zmieni się odpowiedź, jeśli kule są rozróżnialne?

Zadanie A.3. Na ile sposobów możemy umieścić 30 nierozróżnialnych kul w 20 rozróżnialnych urnach, jeśli

- pierwsza urna ma zawierać co najmniej 2 kule?
- każda urna ma zawierać co najmniej jedną kulę?

Przedyskutuj, ten sam problem w przypadku, gdy kule są rozróżnialne?

Zadanie A.4. Na ile sposobów możemy umieścić 50 rozróżnialnych kul po 10 w 5 urnach, jeśli

- urny są rozróżnialne?

b) urny są nierozróżnialne?

Zadanie A.5. Wyznacz liczbę całkowitoliczbowych rozwiązań równania:

$$x_1 + x_2 + \dots + x_{10} = 30, \quad \text{gdy } x_i \geq 0 \text{ dla } i = 1, \dots, 10 \text{ oraz}$$

$$x_1 \geq 3, 0 \leq x_2 \leq 2.$$

Zadanie A.6. Na ile sposobów można ustawić 8 mężczyzn i 5 kobiet w rzędzie tak, aby żadne dwie kobiety nie stały obok siebie?

B Zadania na ćwiczenia - jeśli czas pozwoli

Zadanie B.1. Ile ciągów

- a) binarnych;
- b) ternarnych (składających się ze znaków: 0, 1, 2);

długości 200 zawiera dokładnie 100 zer w 7 seriach? (Serią zer nazywamy ciąg kolejnych zer, który nie jest poprzedzony zerem i po którym nie następuje zero, np. ciąg 120000222010022 ma trzy serie zer)?

Zadanie B.2. Ile dodatnich liczb całkowitych mniejszych od 1 000 000 ma sumę cyfr równą 9?

Zadanie B.3. Na ile sposobów można umieścić n książek na k różnych półkach

- a) gdy książki są nierozróżnialnymi kopiami tej samej książki?
- b) gdy książki są różne i kolejność książek na półce nie jest istotna?
- c) gdy książki są różne i kolejność książek na półce jest istotna?
- d) gdy książki są różne, kolejność książek na półce jest istotna i żadna półka nie pozostaje pusta ($n \geq k$)?

Zadanie B.4. Ile jest ciągów liczbowych długości n ($n \leq 100$) o wyrazach ze zbioru $\{1, 2, 3, \dots, 100\}$, które są

- a) rosnące?
- b) niemalejące?

C Zadania do samodzielnej pracy w domu

W każdym z zadań określ, z jakich schematów wyboru i praw przeliczania korzystasz.

Zadanie C.1. Wyznacz liczbę całkowitoliczbowych rozwiązań równania:

$$x_1 + x_2 + \dots + x_{100} = 60000 \text{ oraz } x_i \geq i \text{ dla } i = 1, \dots, 100.$$

Zadanie C.2. Mamy do dyspozycji alfabet składający się z 26 liter (a, b, c, \dots, z). Ile słów (niekoniecznie mających sens) długości 10 można ułożyć jeśli w słowie:

- a) litery nie mogą się powtarzać;
- b) litery mogą się powtarzać;
- c) litery mogą się powtarzać oraz wykorzystujemy tylko litery "a" i "b";
- d) litery mogą się powtarzać, jest dokładnie 6 liter "a" i 4 litery "b";
- e) litery mogą się powtarzać, jest dokładnie 5 liter "a";
- f) litery mogą się powtarzać, są dokładnie 2 litery "a" i 3 litery "b";
- g) litery mogą się powtarzać i jest dokładnie jedna litera "a";
- h) litery mogą się powtarzać i nie ma żadnej litery "a";
- i) litery mogą się powtarzać i jest co najmniej jedna litera "a";
- j) litery mogą się powtarzać i są co najwyżej dwie litery "a";
- k) litery nie mogą się powtarzać i jest dokładnie jedna litera "a";
- l) litery nie mogą się powtarzać i nie ma żadnej litery "a"?

Zadanie C.3. W cukierni sprzedają 5 rodzajów drożdżówek: z makiem, z kruszonką, z jabłkiem, z budyniem i z serem. Zakładamy, że drożdżówek każdego rodzaju jest nieograniczona liczba i drożdżówki jednego rodzaju są nierozróżnialne. Na ile sposobów można wybrać 20 drożdżówek (kolejność wybierania nie jest istotna), jeśli

- a) chcemy co najmniej jedną drożdżówkę w każdym z rodzajów?
- b) chcemy dokładnie jedną drożdżówkę z serem?
- c) chcemy co najwyżej 2 drożdżówki z kruszonką?

Zadanie C.4. Ile można utworzyć różnych słów (niekoniecznie mających sens) z wszystkich liter słowa MISSISIPPI

- a) w ogóle?

- b) w których litery M i P stoją obok siebie?
- c) w których wszystkie trzy litery S stoją kolejno obok siebie?

Zadanie C.5. Na ile sposobów można włożyć 20 identycznych jabłek do 5 ponumerowanych koszyków tak, aby

- a) w każdym z koszyków było co najmniej jedno jabłko?
- b) w pierwszym koszyku było dokładnie jedno jabłko?
- c) w drugim koszyku były co najwyżej dwa jabłka?

Zadanie C.6. Alfabet łaciński zawiera 21 spółgłosek i 5 samogłosek. Ile ciągów składających się ze 100 wielkich liter alfabetu łacińskiego zawiera:

- a) dokładnie 3 samogłoski?
- b) co najmniej 3 samogłoski? (UWAGA:zmiana treści)
- c) tę samą liczbę spółgłosek co samogłosek?

Zadanie C.7. Na ile sposobów można usadzić 10 spośród 100 uczestników wesela wokół okrągłego stołu? Dwa ustawienia uznajemy za takie same, jeśli każda osoba przy stole ma tego samego sąsiada po prawej i po lewej w obu ustawieniach. Jak zmieni się odpowiedź, jeśli przy stole mają siedzieć obok siebie pan i pani młoda?

Zadanie C.8. Mamy do dyspozycji po 20 nierozróżnialnych jabłek, gruszek, kiwi, mango, śliwek, mandarynek i pomarańczy. Na ile sposobów możemy

- a) ustawić 4 różne z tych owoców w rzędzie od lewej do prawej?
- b) ustawić 10 (niekoniecznie różnych) z tych owoców w rzędzie od lewej do prawej?
- c) utworzyć koszyk piknikowy składający się z 4 różnych owoców?
- d) włożyć wszystkie gruszki do 7 ponumerowanych koszyków tak, żeby w każdym koszyku była co najmniej jedna gruszka?
- e) włożyć 7 owoców (po jednym z każdego rodzaju) do 4 ponumerowanych koszyków tak, aby w pierwszym koszyku były co najmniej 2 owoce?
- f) włożyć wszystkie pomarańcze do 9 ponumerowanych koszyków tak, aby w pierwszym koszyku były co najwyżej 3 pomarańcze?
- g) włożyć je wszystkie do 10 ponumerowanych koszyków o nieograniczonej pojemności?
- h) ustawić wszystkie owoce w rzędzie od lewej do prawej?
- i) uszykować z nich paczkę składającą się z 15 owoców?
- j) włożyć po (dokładnie) jednym owocu do każdego z 16 ponumerowanych koszyków?

Zadanie C.9. Profesor rozdziela 40 różnych numerów czasopisma po 10 do 4 pudeł. Na ile sposobów może to zrobić, jeśli

- a) pudła są rozróżnialne?
- b) pudła są identyczne?

Zadanie C.10. Ile jest rozdań po 5 kart z talii 52 kart dla każdego z 4 graczy, jeśli

- a) kolejność dostawania kart jest istotna?
- b) kolejność dostawania kart nie jest istotna?

Jak zmieni się odpowiedź, jeśli rozważymy rozdanie w brydża (po 13 kart)?

Zadanie C.11. Ile jest ciągów binarnych z 20 zerami i 10 jedynekami takich, że żadne dwie jedynki nie stoją obok siebie?

Zadanie C.12. Na ile sposobów można wybrać 10 monet ze świnki skarbonki, w której jest 50 identycznych monet 5zł, 100 nierozróżnialnych monet 2zł, 80 takich samych monet 1zł?

Zadanie C.13. Na ile sposobów można rozłożyć do 10 różnych koszy 20 różnych zajęczków i 30 identycznych jaj?

Zadanie C.14. W 25-osobowej klasie chcemy stworzyć 6-osobową drużynę szachową i 10-osobową drużynę bokserską. Na ile sposobów możemy to zrobić, jeżeli

- a) każdy może zostać bokserem i szachistą?
- b) nikt nie może być jednocześnie bokserem i szachistą?
- c) dokładnie jedna osoba jest jednocześnie bokserem i szachistą?

Zadanie C.15. Zadania 3.1 – 3.14 z podręcznika.

Odpowiedzi do niektórych zadań

C.1 $\binom{55049}{54950}$

C.2 a) $(26)_{10}$ b) 26^{10} c) 2^{10} d) $\binom{10}{6}$ e) $\binom{10}{5}25^5$ f) $\binom{10}{2}\binom{8}{3}24^5$ g) $10 \cdot 25^9$ h) 25^{10} i) $26^{10} - 25^{10}$
j) $25^{10} + 10 \cdot 25^9 + \binom{10}{2}25^8$ k) $10 \cdot (25)_9$ l) $(25)_{10}$

C.3 a) 3876 b) 1540 c) 4641

C.4 a) 2520 b) 560 c) 210

C.5 a) 3876 b) 1540 c) 4641

C.6 a) $\binom{100}{3}5^321^{97}$ b) $26^{100} - 21^{100} - 100 \cdot 21^{99} \cdot 5 - \binom{100}{2}21^{98}5^2$ c) $\binom{100}{50}21^{50}5^{50}$

C.7 $(100)_{10}/10$; $2 \cdot (98)_8$

C.8

a. $(7)_4$

b. 7^{10}

c. $\binom{7}{4}$

d. $\binom{19}{13}$

e. $4^7 - 3^7 - 7 \cdot 3^6$

f. $\binom{28}{20} - \binom{24}{16}$

g. $\left[\binom{29}{20}\right]^7$

h. $\frac{140!}{(20!)^7}$

i. $\binom{21}{15}$

j. 7^{16}

C.9 a) $40!/(10!)^4$ b) $40!/(4! \cdot (10!)^4)$

C.10 a) $(52)_{20}$ b) $52!/((5!)^4 \cdot 32!)$

rozdzanie brydża:

a) $52!$ b) $52!/(13!)^4$

C.11 $\binom{21}{10}$

C.12 66

C.13 $10^{20} \cdot \binom{39}{30}$

C.14 a) $\binom{25}{6}\binom{25}{10}$ b) $\binom{25}{6}\binom{19}{10}$ c) $\binom{25}{6} \cdot 6 \cdot \binom{19}{9}$

3.1 $3! \cdot 8!$

3.2 1485

3.4 a) $\binom{30}{11}\binom{19}{5}$ b) $\binom{30}{11}\binom{19}{5} + 30\binom{29}{10}\binom{19}{4}$ c) $\binom{30}{11}\binom{30}{5}$

3.5 a) $\binom{9}{n}$ (dla $n \leq 9$), 0 (dla $n > 9$) b) $\binom{n+8}{n}$ c) $\binom{n+8}{n} - 9$

3.7 $10!$

3.8 $20!/(2^{10} \cdot 10!)$

3.9 $\binom{m+n}{n} = \binom{m+n}{m}$

3.10 3^{12}

3.11 $\binom{8}{4}5^6$

3.12 $\binom{24}{15}$

3.13 $\binom{n-1}{k-1}$

3.14 $\binom{62}{54}$