WSTĘP DO RACHUNKU PRAWDOPODOBIEŃSTWA
8. ZMIENNE LOSOWE CIĄGŁE.

Zadanie 1. *Zmienna losowa ciągła X ma dystrybuantę daną wzorem*

$$F(x) = \begin{cases} 0 & dla\ x \leqslant 0, \\ cx^3 & dla\ 0 < x < 1, \\ 1 & dla\ x \geqslant 1, \end{cases}$$

gdzie c jest pewną stałą. Znajdź wartość stałej c. Następnie wyznacz gęstość $f(x)$, wartość oczekiwaną $\mathbb{E}X$ i wariancję $VarX$.

Zacznijmy od tego, że skoro mamy do czynienia z ciągłą zmienną losową X, jej dystrybuanta $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ powinna być ciągła w każdym punkcie dziedziny, w szczególności w punktach $x_0 = 0$ oraz $x_1 = 1$. Mamy zatem:

$$F(0) = \lim_{x \to 0^+} F(x) = \lim_{x \to 0^+} cx^3 = 0$$

oraz

$$F(1) = \lim_{x \to 1^-} F(x) = \lim_{x \to 1^-} cx^3 = c.$$

A zatem $c = F(1) = 1$.

Następnie wyznaczmy gęstość $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zmiennej losowej X pamiętając, że dla prawie wszystkich x zachodzi

$$f(x) = F'(x).$$

Przypomnijmy, że pochodna z funkcji stałej jest równa zero, natomiast pochodna z funkcji wielomianowej x^n po zmiennej x wynosi nx^{n-1}, a zatem gęstość zmiennej losowej X przedstawia się następująco:

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 & \text{dla } 0 < x < 1, \\ 0 & \text{w pozostałych przypadkach.} \end{cases}$$

Z kolei żeby wyznaczyć wartość oczekiwaną zmiennej losowej X posłużymy się wzorem:

$$\mathbb{E}X = \int_{-\infty}^{\infty} t \cdot f(t)dt.$$

Liczenie tej całki możemy rozbić na trzy naturalne przedziały $(-\infty, 0]$, $(0, 1)$, $[1, \infty)$ odpowiadające definicji funkcji gęstości $f(x)$. Ponadto, przypomnijmy, że całka oznaczona z funkcji 0 po dowolnym przedziale przyjmuje wartość zero, natomiast dla funkcji wielomianowych mamy:

$$\int_a^b x^n dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_a^b = \frac{b^{n+1}}{n+1} - \frac{a^{n+1}}{n+1}.$$

A zatem:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}X &= \int_{-\infty}^{0} t \cdot f(t)dt + \int_0^1 t \cdot f(t)dt + \int_1^{\infty} t \cdot f(t)dt = \int_{-\infty}^{0} t \cdot 0dt + \int_0^1 t \cdot 3t^2dt + \int_1^{\infty} t \cdot 0dt \\ &= \int_0^1 t \cdot 3t^2 dt = 3\int_0^1 t^3 dt = 3\left[\frac{t^4}{4}\right]_0^1 = 3\left(\frac{1^4}{4} - \frac{0^4}{4}\right) = \frac{3}{4}.\end{aligned}$$

Z kolei aby wyznaczyć wariancję zmiennej losowej X musimy najpierw wyznaczyć $\mathbb{E}X^2$. W tym celu posłużymy się wzorem:

$$\mathbb{E}X^2 = \int_{-\infty}^{\infty} t^2 \cdot f(t)dt.$$

Podobnie jak poprzednio mamy:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}X^2 &= \int_{-\infty}^{0} t^2 \cdot f(t)dt + \int_0^1 t^2 \cdot f(t)dt + \int_1^{\infty} t^2 \cdot f(t)dt = \int_{-\infty}^{0} t^2 \cdot 0dt + \int_0^1 t^2 \cdot 3t^2dt + \int_1^{\infty} t^2 \cdot 0dt \\ &= \int_0^1 t^2 \cdot 3t^2 dt = 3\int_0^1 t^4 dt = 3\left[\frac{t^5}{5}\right]_0^1 = 3\left(\frac{1^5}{5} - \frac{0^5}{5}\right) = \frac{3}{5}.\end{aligned}$$

A zatem wariancja zmiennej losowej X wynosi:

$$\mathrm{Var}X = \mathbb{E}X^2 - (\mathbb{E}X)^2 = \frac{3}{5} - \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{48}{80} - \frac{45}{80} = \frac{3}{80}.$$

Zadanie 2. *Gęstość zmiennej losowej X zadana jest wzorem*

$$f(x) = \begin{cases} a & \text{dla } x \in (-2,-1), \\ bx & \text{dla } x \in (1,2), \\ 0 & \text{w pozostałych przypadkach,} \end{cases}$$

gdzie a i b są pewnymi stałymi. Znajdź stałe a i b wiedząc, że $\mathbb{E}X = 0$. Następnie oblicz Var$X$ i znajdź dystrybuantę F_X tej zmiennej losowej.

Zacznijmy od wyliczenia wartości oczekiwanej zmiennej losowej X w oparciu o funkcję gęstości. Podobnie jak w poprzednim zadaniu, licząc odpowiednią całkę możemy od razu pominąć te przedziały, na których funkcja $f(x)$ się zeruje. Mamy zatem:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}X &= \int_{-\infty}^{\infty} t \cdot f(t)dt = \int_{-2}^{-1} t \cdot f(t)dt + \int_{1}^{2} t \cdot f(t)dt = \int_{-2}^{-1} t \cdot adt + \int_{1}^{2} t \cdot btdt \\ &= a\int_{-2}^{-1} tdt + b\int_{1}^{2} t^2dt = a\left[\frac{t^2}{2}\right]_{-2}^{-1} + b\left[\frac{t^3}{3}\right]_{1}^{2} = a\left(\frac{(-1)^2}{2} - \frac{(-2)^2}{2}\right) + b\left(\frac{2^3}{3} - \frac{1^3}{3}\right) = -\frac{3}{2}a + \frac{7}{3}b.\end{aligned}$$

W treści zadania podane jest, że $\mathbb{E}X = 0$, a zatem otrzymujemy równanie:

$$-\frac{3}{2}a + \frac{7}{3}b = 0.$$

Niestety to za mało aby wyznaczyć stałe a i b. Potrzebujemy jeszcze jednej zależności, która będzie wiązała te dwie stałe. W tym celu skorzystamy z własności funkcji gęstości, która mówi, że:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt = 1.$$

A zatem:

$$\begin{aligned}1 &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt = \int_{-2}^{-1} adt + \int_{1}^{2} btdt = a\int_{-2}^{-1} 1dt + b\int_{1}^{2} tdt = a\,[t]_{-2}^{-1} + b\left[\frac{t^2}{2}\right]_{1}^{2} \\ &= a((-1) - (-2)) + b\left(\frac{2^2}{2} - \frac{1^2}{2}\right) = a + \frac{3}{2}b,\end{aligned}$$

skąd otrzymujemy drugie równanie wiążące a i b, mianowicie:

$$a + \frac{3}{2}b = 1.$$

W celu wyznaczenia stałych a i b musimy zatem rozwiązać następujący układ równań:

$$\begin{cases} -\frac{3}{2}a + \frac{7}{3}b = 0 \\ a + \frac{3}{2}b = 1 \end{cases}$$

Po szybkich obliczeniach otrzymujemy:

$$\begin{cases} a = \frac{28}{55} \\ b = \frac{18}{55} \end{cases}$$

A zatem funkcja gęstości zmiennej losowej X dana jest wzorem:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{28}{55} & \text{dla } x \in (-2,-1), \\ \frac{18}{55}x & \text{dla } x \in (1,2), \\ 0 & \text{w pozostałych przypadkach.} \end{cases}$$

Następnie, aby wyznaczyć Var$X$, policzymy najpierw $\mathbb{E}X^2$, czyli:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}X^2 &= \int_{-2}^{-1} t^2 \cdot \frac{28}{55}dt + \int_{1}^{2} t^2 \cdot \frac{18}{55}tdt = \frac{28}{55}\int_{-2}^{-1} t^2dt + \frac{18}{55}\int_{1}^{2} t^3dt = \frac{28}{55}\left[\frac{t^3}{3}\right]_{-2}^{-1} + \frac{18}{55}\left[\frac{t^4}{4}\right]_{1}^{2} \\ &= \frac{28}{55}\left(\frac{(-1)^3}{3} - \frac{(-2)^3}{3}\right) + \frac{18}{55}\left(\frac{2^4}{4} - \frac{1^4}{4}\right) = \frac{196}{165} + \frac{27}{22} = \frac{797}{330} = 2\frac{137}{330}.\end{aligned}$$

Stąd otrzymujemy już wariancję:

$$\mathrm{Var}X = \mathbb{E}X^2 - (\mathbb{E}X)^2 = 2\frac{137}{330} - 0 = 2\frac{137}{330}\,.$$

Pozostało nam jeszcze wyznaczenie dystrybuanty F_X zmiennej losowej X. Ponieważ w tym zadaniu mamy do czynienia z tylko jedną zmienną losową, w dalszych rozważaniach możemy pominąć indeks, tzn. przyjmujemy konwencję $F = F_X$. Przypomnijmy na początek, że

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt.$$

Ponieważ w definicji funkcji gęstości dostajemy podział dziedziny na pięć przedziałów

$$(-\infty, -2],\ (-2, -1),\ [-1, 1],\ (1, 2),\ [2, \infty),$$

wyznaczanie wartości dystrybuanty $F(x)$ musimy podzielić na pięć przypadków w zależności od tego, do którego z nich należy zmienna x.

Uwaga: proszę pamiętać, że dystrybuanta rozkładu ciągłego jest funkcją ciągłą, dlatego też

$$F(x) = \lim_{t\to x^-} F(t).$$

1. przypadek: $x \in (-\infty, -2]$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{x} 0dt = 0$$

2. przypadek: $x \in (-2, -1)$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{-2} f(t)dt + \int_{-2}^{x} \frac{28}{55}dt = F(-2) + \frac{28}{55}\int_{-2}^{x} 1dt = 0 + \frac{28}{55}\,[t]_{-2}^{x} = \frac{28}{55}(x-(-2)) = \frac{28}{55}(x+2)$$

3. przypadek: $x \in [-1, 1]$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{-1} f(t)dt + \int_{-1}^{x} 0dt = F(-1) + 0 = \frac{28}{55}(-1+2) = \frac{28}{55}$$

4. przypadek: $x \in (1, 2)$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{1} f(t)dt + \int_{1}^{x} \frac{18}{55}tdt = F(1) + \frac{18}{55}\int_{1}^{x} tdt = \frac{28}{55} + \frac{18}{55}\left[\frac{t^2}{2}\right]_1^x = \frac{28}{55} + \frac{18}{55}\left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\right)$$

5. przypadek: $x \in [2, \infty)$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{2} f(t)dt + \int_{2}^{x} 0dt = F(2) + 0 = \frac{28}{55} + \frac{18}{55}\left(\frac{2^2}{2} - \frac{1}{2}\right) = \frac{28}{55} + \frac{18}{55}\cdot\frac{3}{2} = 1$$

Ostatecznie otrzymujemy poniższy wzór na dystrybuantę zmiennej losowej X:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \in (-\infty, -2], \\ \frac{28}{55}(x+2) & \text{dla } x \in (-2, -1), \\ \frac{28}{55} & \text{dla } x \in [-1, 1], \\ \frac{28}{55} + \frac{18}{55}\left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\right) & \text{dla } x \in (1, 2), \\ 1 & \text{dla } x \in [2, \infty). \end{cases}$$

Zadanie 3. *Na odcinku* $[0,1]$ *wybieramy losowo dwa punkty. Niech* Z *będzie zmienną losową oznaczającą odległość między tymi punktami.*

Dla przypomnienia, mieliśmy już do czynienia z podobnym problemem, mianowicie z wyborem dwóch punktów z odcinka. Podobnie jak poprzednio zastosujemy tutaj prawdopodobieństwo geometryczne, gdzie jako zbiór zdarzeń elementarnych przyjmiemy kwadrat jednostkowy, tzn. $\Omega = [0,1] \times [0,1]$.

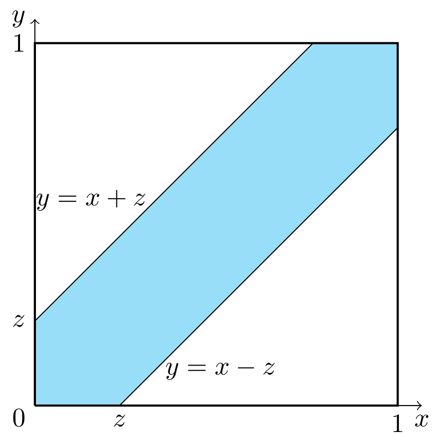
i) *Znajdź dystrybuantę* F_Z*, gęstość* f_Z*, wartość oczekiwaną* $\mathbb{E}Z$ *i wariancję* $VarZ$*.*

Zacznijmy od wyznaczenia dystrybuanty F_Z zmiennej losowej Z. Z definicji dystrybuanty mamy:

$$F_Z(z) = \mathbb{P}\left(Z \leqslant z\right).$$

Zastanówmy się zatem jak obliczyć $\mathbb{P}\left(Z \leqslant z\right)$. Mając daną losową parę punktów $(x,y) \in [0,1] \times [0,1]$, odległość między tymi punktami możemy wyrazić jako $|x-y|$. A zatem, skoro minimalna odległość jest równa 0, a maksymalna wynosi 1, dla $z \in [0,1]$ mamy:

$$\mathbb{P}\left(Z \leqslant z\right) = \mathbb{P}\left(|x-y| \leqslant z\right) = \mathbb{P}\left(-z \leqslant x-y \leqslant z\right) = \mathbb{P}\left((y \leqslant x+z) \wedge (y \geqslant x-z)\right).$$



Na powyższym rysunku błękitny obszar odpowiada zdarzeniu $Z = |x-y| \leqslant z$. Widzimy więc, że dla $z \in [0,1]$ zachodzi:

$$F_Z(z) = \mathbb{P}\left(Z \leqslant z\right) = 1 - (1-z)^2 = 2z - z^2.$$

Ponadto, ponieważ z prawdopodobieństwem 1 zmienna losowa Z przyjmuje wartości w przedziale $[0,1]$, dla $z < 0$ prawdą jest, że $\mathbb{P}\left(Z \leqslant z\right) = 0$. Z kolei dla $z > 1$ zachodzi $\mathbb{P}\left(Z \leqslant z\right) = 1$. Możemy więc podać wzór na dystrybuantę zmiennej losowej Z:

$$F_Z(z) = \begin{cases} 0 & \text{dla } z < 0, \\ 2z - z^2 & \text{dla } 0 \leqslant z \leqslant 1, \\ 1 & \text{dla } z > 1. \end{cases}$$

Następnie wyznaczamy gęstość f_Z pamiętając, że $f_Z(z) = F'_Z(z)$. A zatem:

$$f_Z(z) = \begin{cases} 2 - 2z & \text{dla } 0 \leqslant z \leqslant 1, \\ 0 & \text{w pozostałych przypadkach.} \end{cases}$$

Z kolei wartość oczekiwana zmiennej losowej Z wynosi:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}Z &= \int_{-\infty}^{\infty} z f_Z(z) dz = \int_0^1 z(2-2z) dz = \int_0^1 2z dz - \int_0^1 2z^2 dz = 2\int_0^1 z dz - 2\int_0^1 z^2 dz \\ &= 2\left[\frac{z^2}{2}\right]_0^1 - 2\left[\frac{z^3}{3}\right]_0^1 = 2\left(\frac{1^2}{2} - \frac{0^2}{2}\right) - 2\left(\frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3}\right) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Następnie liczymy $\mathbb{E}Z^2$:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}Z^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} z^2 f_Z(z) dz = \int_0^1 z^2(2-2z) dz = \int_0^1 2z^2 dz - \int_0^1 2z^3 dz = 2\int_0^1 z^2 dz - 2\int_0^1 z^3 dz \\ &= 2\left[\frac{z^3}{3}\right]_0^1 - 2\left[\frac{z^4}{4}\right]_0^1 = 2\left(\frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3}\right) - 2\left(\frac{1^4}{4} - \frac{0^4}{4}\right) = \frac{2}{3} - \frac{2}{4} = \frac{1}{6}, \end{aligned}$$

skąd otrzymujemy wariancję zmiennej losowej Z:

$$\mathrm{Var}Z = \mathbb{E}Z^2 - (\mathbb{E}Z)^2 = \frac{1}{6} - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{18}.$$

ii) *Znajdź dystrybuantę F_X zmiennej losowej $X = Z^2$, jej gęstość f_X i wartość oczekiwaną $\mathbb{E}X$. Jak obliczyć $\mathbb{E}X$ nie znajdując gęstości f_X?*

Aby wyznaczyć dystrybuantę zmiennej losowej X zauważmy na początek, że ponieważ $X = Z^2$, dla $x < 0$ zachodzi $F_X(x) = \mathbb{P}(X \leqslant x) = 0$. Wystarczy zatem rozważyć przypadek $x \geqslant 0$, dla którego mamy:

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leqslant x) = \mathbb{P}\left(Z^2 \leqslant x\right) = \mathbb{P}\left(-\sqrt{x} \leqslant Z \leqslant \sqrt{x}\right).$$

Następnie, ponieważ zmienna losowa Z przyjmuje wartości ujemne z zerowym prawdopodobieństwem (dystrybuanta F_Z jest stale równa zero dla $z < 0$), mamy:

$$\mathbb{P}\left(-\sqrt{x} \leqslant Z \leqslant \sqrt{x}\right) = \mathbb{P}\left(Z \leqslant \sqrt{x}\right) = F_Z(\sqrt{x}).$$

Stąd otrzymujemy już wzór na dystrybuantę zmiennej losowej X:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x < 0, \\ 2\sqrt{x} - x & \text{dla } 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ 1 & \text{dla } x > 1. \end{cases}$$

Następnie obliczamy gęstość zmiennej losowej X (proszę zwrócić uwagę, co się dzieje w punkcie $x = 0$):

$$f_X(x) = F_X'(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}} - 1 & \text{dla } 0 < x \leqslant 1, \\ 0 & \text{w pozostałych przypadkach.} \end{cases}$$

Wartość oczekiwana zmiennej losowej X wynosi:

$$\mathbb{E}X = \int_0^1 x\left(\frac{1}{\sqrt{x}} - 1\right)dx = \int_0^1 \sqrt{x}dx - \int_0^1 xdx = \left[\frac{x^{3/2}}{3/2}\right]_0^1 - \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}.$$

Gdybyśmy natomiast chcieli wyliczyć $\mathbb{E}X$ bez odwoływania się do rozkładu zmiennej losowej X, wówczas pamiętając, że $X = Z^2$, wystarczyłoby dokonać podstawienia:

$$\mathbb{E}X = \mathbb{E}Z^2 = \frac{1}{6}.$$