

Rozgrzewka I
Matematyka Dyskretna dla informatyków
semestr zimowy 2021/2022.

Zadanie 1. Dla n naturalnego mamy zdanie:

Jeżeli n jest liczbą pierwszą, to n jest równa 2 lub jest liczbą nieparzystą.

Możemy je zapisać w postaci $p \Rightarrow q$ i wówczas:

- A. $\neg q \Rightarrow \neg p$ brzmi:
Jeżeli n jest równa 2 i jest liczbą nieparzystą, to n nie jest liczbą pierwszą;
- B. $p \wedge \neg q$ brzmi: *n jest liczbą pierwszą i n jest różną od 2 liczbą parzystą;*
- C. Udowadniając twierdzenie nie wprost wyjdziemy z założenia, że:
 n jest liczbą pierwszą i n jest różna od 2 i n nie jest liczbą nieparzystą
i dojdziemy do sprzeczności;
- D. Udowadniając twierdzenie przez zaprzeczenie wyjdziemy z założenia, że:
 n jest różną od 2 liczbą parzystą,
i dojdziemy do wniosku, że
 n nie jest liczbą pierwszą;
- E. Udowadniając twierdzenie przez zaprzeczenie wyjdziemy z założenia, że:
 n jest liczbą pierwszą i n jest różna od 2 i n nie jest liczbą nieparzystą,
i dojdziemy do sprzeczności.

Zadanie 2. Na 11 półkach układamy 157 książek. Z zasady szufladkowej wiemy, że:

- A. na każdej półce jest co najmniej jedna książka;
- B. istnieje półka, na której jest co najmniej 15 książek;
- C. istnieją co najmniej 3 półki zawierające co najmniej 15 książek każda;
- D. jeśli na jednej półce nie ma książek, to na pewnej półce jest co najmniej 16 książek;
- E. jeśli na jednej półce nie ma książek, to istnieje 7 półek zawierających co najmniej 16 książek każda;

Zadanie 3. Mamy 150 studentów informatyki. 60 z nich lubi wykłady z Matematyki Dyskretnej. Tyle samo lubi wykłady z Teorii Mnogości i 50 studentów lubi wykłady z Analizy. 20 studentów lubi wszystkie trzy z tych wykładów. Nie ma studenta, który lubi dokładnie dwa z tych trzech wykładów. Wtedy:

- A. 20 studentów nie lubi żadnego z tych wykładów;
- B. 90 studentów lubi wykład z Analizy lub z Teorii Mnogości;
- C. 20 studentów lubi wykład z Analizy i wykład z Matematyki Dyskretnej;
- D. 130 studentów lubi co najmniej jeden z tych trzech wykładów;
- E. 100 studentów lubi wykład z Analizy lub wykład z Matematyki Dyskretnej.

Zadanie 4. Dana jest 20-osobowa klasa

- A. mamy $\frac{1}{2} \binom{20}{10}$ podziałów (nieuporządkowanych) tej klasy na dwie połowy po 10 uczniów;
- B. mamy $\binom{20}{11} \binom{20}{9}$ podziałów tej klasy na dwie grupy o liczebnościach 11 i 9;
- C. mamy $\frac{20!}{11!5!4!}$ podziałów tej klasy na trzy grupy o liczebnościach 11, 5 i 4;
- D. mamy $20 \binom{19}{9}$ wyborów 10-osobowej delegacji z tej klasy z wyróżnionym liderem;
- E. mamy $\binom{20}{10} 10$ wyborów 10-osobowej delegacji z tej klasy z wyróżnionym liderem;

Zadanie 5. Mamy do dyspozycji po 15 kul w kolorach: niebieski, biały, czerwony oraz 5 ponumerowanych pudełek. Do każdego z pudełek wkładamy dokładnie jedną kulę. Wtedy:

- A. Jeżeli kule w tym samym kolorze są nierozróżnialne, to mamy 3^5 różnych takich ułożeń kul w pudełkach;
- B. Jeżeli kule w tym samym kolorze są nierozróżnialne, to mamy 5^3 różnych takich ułożeń kul w pudełkach;
- C. Jeżeli kule w tym samym kolorze są nierozróżnialne, to mamy 15^5 różnych takich ułożeń kul w pudełkach;
- D. Jeżeli ponumerujemy wszystkie kule (staną się one rozróżnialne), to jest 45^5 takich różnych ułożeń kul w pudełkach;
- E. Jeżeli ponumerujemy wszystkie kule (staną się one rozróżnialne), to jest $(45)_5$ takich różnych ułożeń kul w pudełkach.

Zadanie 6. Podzbiorów zbioru $\{1, 2, \dots, 20\}$, które nie zawierają ani 8, ani 18 mamy

- A. $\binom{20}{2} 2^{18}$;
- B. tyle samo co ciągów binarnych długości 18;
- C. tyle samo co podzbiorów zbioru $\{1, 2, \dots, 20\}$, które zawierają co najmniej jeden z elementów 8 i 18;
- D. tyle samo co podzbiorów zbioru $\{1, 2, \dots, 20\}$, które zawierają zarówno element 8 jak i element 14;
- E. $2^{20} - (2^{19} + 2^{19} - 2^{18})$

Zadanie 7. Wykorzystując litery ze zbioru $X = \{A, B, C, D, E, F, G, H, I\}$, można utworzyć

- A. 5^9 różnych słów (mających lub nie mających sensu) długości 5, w których litery mogą się powtarzać.
- B. $5^9 - 5^8$ słów (mających lub nie mających sensu) długości 5, w których A występuje co najmniej raz i litery mogą się powtarzać.
- C. $9^9 - 8^9$ słów (mających lub nie mających sensu) długości 9, w których A występuje co najmniej raz i litery mogą się powtarzać.
- D. $(9)_5 - (8)_5$ słów długości 5, zawierających literę A i w których litery nie mogą się powtarzać.
- E. $2 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 + 3 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 5$ słów (mających lub nie mających sensu) długości 5, zawierających literę A , które nie mogą mieć B na żadnym z pierwszych dwóch miejsc i litery nie mogą się powtarzać.

Zadanie 8. Wyrażenie

$$\frac{17!}{2!6!8!} \text{ jest:}$$

- A. liczbą podziałów zbioru 17-elementowego na 4 niepuste podzbiory o mocy kolejno: 1, 2, 6, 8;
- B. liczbą permutacji z powtórzeniami pseudozbioru: $\{A, A, B, B, B, B, B, C, C, C, C, C, C, C, C\}$;
- C. liczbą najkrótszych dróg z punktu $(1, 1, 1)$ do punktu $(3, 9, 7)$ w kracie trójwymiarowej o współrzędnych całkowitoliczbowych;
- D. współczynnikiem wielomianu $(a + b + c + d)^{17}$ przy wyrazie $a^8 b^6 c^1 d^2$;
- E. współczynnikiem wielomianu $(a + b + \sqrt{17}c)^{16}$ przy czynniku $a^8 b^6 c^2$.

Zadanie 9. 12 osób podróżujących windą 3-piętrowego budynku może ją opuścić na (windę może się zatrzymać na każdym piętrze i każda osoba opuszcza windę dokładnie jeden raz)

- A. 12^3 sposobów;
- B. 3^{12} sposobów;
- C. $\frac{12!}{9!}$ sposobów;
- D. $3^{12} - 3 \cdot 2^{12} + 3$ sposobów takich, że na każdym piętrze wysiadła co najmniej jedna osoba;
- E. 3^{12} sposobów, dla których istnieje piętro, na którym wysiadły co najmniej trzy osoby.

Zadanie 10. Rozwiązań równania

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5,$$

gdzie x_1, x_2, x_3, x_4 są liczbami całkowitymi nieujemnymi oraz dodatkowo $x_2 \leq 2$, mamy:

- A. $\binom{5+4-1}{5} - \binom{2+4-1}{2}$;
- B. $\binom{3+4-1}{3}$
- C. $\binom{5+3-1}{5} + \binom{4+3-1}{4} + \binom{3+3-1}{3}$;
- D. $3^5 + 3^4 + 3^3$;
- E. mamy tyle samo ile jest możliwości włożenia 14 jednakowych kul do 4 rozróżnialnych urn, przy założeniu, że pierwsza urna może zawierać co najwyżej 2 kule, a pozostałe trzy urny muszą zawierać co najmniej 3 kule