

WSTĘP DO RACHUNKU PRAWDOPODOBIENSTWA
WYKŁAD 1: KLASYCZNA DEFINICJA PRAWDOPODOBIENSTWA

$\Omega = \{\omega_i : i \in I\}$ – zbiór zdarzeń elementarnych, ω_i – zdarzenie elementarne, $i \in I$.

Gdy $|I| < \infty$ oraz $\mathbb{P}(\{\omega\}) = \frac{1}{|\Omega|}$ dla każdego $\omega \in \Omega$, to (Ω, \mathbb{P}) nazywamy *klasycznym modelem prawdopodobieństwa*. W tym przypadku *prawdopodobieństwo* dowolnego zdarzenia A wynosi:

$$\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}.$$

Przydatne własności funkcji prawdopodobieństwa \mathbb{P} – dla dowolnych zdarzeń $A, B \subset \Omega$ mamy:

$$\mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(A'), \quad \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B).$$

Przydatne wzory kombinatoryczne:

- $\binom{n}{k}$ – liczba k -elementowych podzbiorów zbioru n -elementowego (kombinacje bez powtórzeń);
- n^k – liczba ciągów długości k o elementach ze zbioru n -elementowego (wariacje z powtórzeniami);
- $(n)_k = n \cdot \dots \cdot (n - k + 1)$ – liczba ciągów długości k o elementach ze zbioru n -elementowego bez powtarzających się elementów (wariacje bez powtórzeń);
- $n!$ – liczba permutacji zbioru n -elementowego.

DODATEK A. ZADANIA NA ĆWICZENIA

Zadanie A.1. Rzucamy dwiema symetrycznymi monetami. Interesuje nas wyłącznie liczba orłów, zatem przyjmujemy $\Omega = \{0, 1, 2\}$. Czy przyjęcie $\mathbb{P}(\{k\}) = \frac{1}{3}$, $k = 0, 1, 2$, daje model dobrze opisujący doświadczenie? (Jeśli tak, uzasadnij, jeśli nie, zaproponuj inną przestrzeń.)

Zadanie A.2. Tworzymy losowo słowo o długości 7 (niekoniecznie mające sens) z liter: a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n (łącznie mamy 14 liter). Z jakim prawdopodobieństwem litery w słowie nie będą się powtarzać?

Zadanie A.3. Jakie jest prawdopodobieństwo, że w dobrze potasowanej talii (52 karty) wszystkie 4 asy sąsiadują ze sobą (tzn. nie są rozdzielone innymi kartami)?

Zadanie A.4. Jaka jest szansa, że przy n -krotnym ($n \geq 3$) rzucie standardową kostką do gry

- (a) wypadną dokładnie trzy szóstki?
- (b) wypadną co najwyżej dwie szóstki?
- (c) wypadną przynajmniej trzy szóstki?

Zadanie A.5. Jakie jest prawdopodobieństwo, że zapisując losowo każdego z s ($s \geq 2$) studentów do jednej z k grup ćwiczeniowych G_1, \dots, G_k ($k \geq 2$), sprawimy, że

- (a) żadna z dwóch pierwszych grup nie będzie pusta?
- (b) pierwsza lub ostatnia grupa będzie pusta?

Zadanie A.6. Rozdano 52 karty czterem graczom, po 13 kart każdemu. Jaka jest szansa, że każdy ma asa?

Zadanie A.7. Z tradycyjnej talii 24 kart wybieramy pięć. Oblicz prawdopodobieństwo otrzymania następujących układów: jedna para (i nic więcej), dwie pary (i nic więcej).

DODATEK B. ZADANIA DOMOWE

Zadanie B.1. Oblicz prawdopodobieństwo, że w 5-osobowej delegacji wybranej losowo z klasy liczącej 15 dziewcząt i 16 chłopców, znajdzie się dokładnie 3 chłopców.

Zadanie B.2. W urnie są 2 kule białe i 4 czarne. Losujemy 2 kule bez zwracania. Co jest bardziej prawdopodobne, wyciągnięcie

- (a) kul tego samego koloru,
- (b) różnych kolorów?

Zadanie B.3. Z tradycyjnej talii 24 kart wybieramy pięć. Oblicz prawdopodobieństwo otrzymania następujących układów: strit, full, poker (proszę sprawdzić, co każda z tych nazw oznacza).

Zadanie B.4. Jaka jest szansa, że przy losowym przedstawianiu wszystkich 26 liter alfabetu (bez polskich liter) utworzymy sekwencję

- (a) abc?
- (b) rachunek?

Zadanie B.5. Oblicz prawdopodobieństwo, że losowo wybrany ciąg binarny (składający się z „0” i „1”) długości 15 ma dokładnie 10 zer.

Zadanie B.6. Rzucamy n razy ($n \geq 9$) standardową kostką do gry. Jaka jest szansa, że wypadnie dokładnie sześć jedynek, trzy czwórki i poza tym inne wartości?

Zadanie B.7. Do n różnych urn wrzucamy losowo k różnych kulek. Jakie jest prawdopodobieństwo, że

- (a) w każdej urnie będzie co najwyżej jedna kulka (zakładamy tutaj, że $k \leq n$)?
- (b) w pierwszej urnie będą co najwyżej 2 kule?
- (c) w ostatniej urnie będą co najmniej 2 kule?

Zadanie B.8. Ustawiamy losowo w rzędzie p kul białych i q kul czarnych ($p > q$). Z jakim prawdopodobieństwem żadne dwie czarne kule nie znajdą się obok siebie?

Zadanie B.9. Dzielimy talię 52 kart na dwie równe części. Oblicz prawdopodobieństwo, że:

- (a) w obu częściach będą po 2 asy,
- (b) w jednej z części będą 3 asy.

Zadanie B.10. Oblicz prawdopodobieństwo wypadnięcia k orłów w n rzutach symetryczną monetą.

Zadanie B.11. Rzucamy 5 razy kostką. Oblicz prawdopodobieństwo, że uzyskamy dokładnie dwie różne wartości (np. 2,4,2,2,4).

Zadanie B.12. Z cyfr 1, 2, ..., 9 losujemy kolejno 10 ze zwracaniem i zapisujemy w otrzymanej kolejności. Oblicz prawdopodobieństwo, że największa z wylosowanych cyfr jest równa 7.

Zadanie B.13. Wybieramy losowo liczbę ze zbioru $\{1, \dots, 1800\}$. Oblicz prawdopodobieństwo, że wybrana liczba

- (a) dzieli się przez 4 lub 5?
- (b) nie dzieli się ani przez 6 ani przez 9?

DODATEK C. ODPOWIEDZI DO ZADAŃ DOMOWYCH

$$\text{B.1. } \frac{\binom{16}{3}\binom{15}{2}}{\binom{31}{5}}$$

$$\text{B.2 (a) } \frac{7}{15}, \quad (\text{b}) \frac{8}{15}$$

$$\text{B.3. strit: } \frac{2 \cdot 4^5 - 2 \cdot 4}{\binom{24}{5}}, \quad \text{full: } \frac{6 \cdot \binom{4}{3} \cdot 5 \cdot \binom{4}{2}}{\binom{24}{5}}, \quad \text{poker: } \frac{2 \cdot 4}{\binom{24}{5}}$$

$$\text{B.4. (a) } \frac{1}{(26)_2}, \quad (\text{b}) \frac{1}{(26)_7}$$

$$\text{B.5. } \frac{\binom{15}{10}}{2^{15}}$$

$$\text{B.6. } \frac{\binom{n}{6}\binom{n-6}{3}4^{n-9}}{6^n}$$

$$\text{B.7. (a) } \frac{\binom{n}{k}}{n^k}, \quad (\text{b}) \frac{(n-1)^k + k(n-1)^{k-1} + \binom{k}{2}(n-1)^{k-2}}{n^k}, \quad (\text{c}) 1 - \frac{(n-1)^k + k(n-1)^{k-1}}{n^k}$$

$$\text{B.8. } \frac{\binom{p+1}{p-q+1}}{\binom{p+q}{q}}$$

$$\text{B.9. (a) } \frac{\binom{4}{2}\binom{48}{24}}{\binom{52}{26}}, \quad (\text{b}) \frac{\binom{4}{3}\binom{48}{23} + \binom{4}{1}\binom{48}{25}}{\binom{52}{26}}$$

$$\text{B.10. } \frac{\binom{n}{k}}{2^n}$$

$$\text{B.11. } \frac{\binom{6}{2}(2^5 - 2)}{6^5}$$

$$\text{B.12. } \frac{7^{10} - 6^{10}}{9^{10}}$$

$$\text{B.13. (a) } \frac{2}{5}, \quad (\text{b}) \frac{7}{9}$$