Logika i teoria mnogości

Ćwiczenia 1

Zadanie 1. Podać przykłady zdań w sensie logicznym.

Zadanie 2. Zbudować schematy podanych zdań:

1. Jeśli myślisz jasno, to nieprawda, że nie potrafisz jasno wyrazić swoich myśli.
2. Jeżeli dwa trójkąty mają parami równe boki lub parami równe kąty, to są przystające.
3. Jeśli czytasz swobodnie po angielsku, to o ile nie potrafisz mówić w tym języku, to znasz angielski biernie.
4. Nie posiadasz gruntownej wiedzy o języku, jeśli słabo znasz gramatykę i nigdy nie uczyłeś się logiki.
5. Jan zna logikę wtedy i tylko wtedy, gdy nie jest prawdą, że nie jest prawdą, że Jan zna logikę.
6. Jeżeli nie jest prawdą, że albo prosta L jest równoległa do prostej M albo prosta P nie jest równoległa do prostej M, to albo prosta L nie jest równoległa do prostej M albo prosta P jest równoległa do prostej M.

Definicja
(i) Każda zmienna zdaniowa jest formułą języka rachunku zdań.
(ii) Jeśli φ, ψ są formułami języka rachunku zdań, to napisy $\neg(\varphi)$, $(\varphi) \wedge (\psi), (\varphi) \vee (\psi), (\varphi) \Rightarrow (\psi), (\varphi) \Leftrightarrow (\psi)$ są formułami rachunku zdań.
(iii) Nie ma innych formuł języka rachunku zdań poza zmiennymi zdaniowymi i takimi formułami, które powstają dzięki zastosowaniu reguły (ii).

Zadanie 3. Zapisać poniższe formuły po poprawnym opuszczeniu nawiasów:

- $((p) \wedge (q) \Rightarrow (q) \vee (p))$
- $(p \wedge (q \vee (r))) \Leftrightarrow (\neg(p) \Leftrightarrow (q \vee r))$
- $((p) \Leftrightarrow (q)) \wedge (\neg(p \Rightarrow (q \wedge (p))))$

Notacja beznawiasowa Łukasiewicza

$\neg$	N	$\neg p$	Np
$\wedge$	K	$p \wedge q$	Kpq
$\vee$	A	$p \vee q$	Apq
$\Rightarrow$	C	$p \Rightarrow q$	Cpq
$\Leftrightarrow$	E	$p \Leftrightarrow q$	Epq

Przykład

$p \wedge (q \vee r)$	$KpAqr$
$(p \wedge q) \vee r$	$AKpqr$
$p \Rightarrow q \wedge \neg r$	$CpKqNr$

Zadanie 4. Zapisać w notacji beznawiasowej Łukasiewicza:

- $(p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow \neg r) \Leftrightarrow r$
- $(\neg p \vee \neg q) \Leftrightarrow \neg(p \wedge q)$
- $(r \Rightarrow (p \Rightarrow q)) \wedge \neg(p \Leftrightarrow \neg q \vee r)$

Zadanie 5. Zapisać w notacji nawiasowej:

- $EApEqrCpr$
- $CCNpKrqANrp$
- $CNKpNqApEqNp$

Definicja

Niech V będzie pewnym zbiorem zmiennych zdaniowych. *Wartościowaniem* zbioru V nazywamy dowolną funkcję $w : V \mapsto \{0, 1\}$.

Definicja

Tautologią KRZ nazywamy formułę KRZ, która przyjmuje wartość logiczną 1 dla każdego wartościowania (zmiennych występujących w tej formule).

Tablice prawdziwościowe spójników logicznych

p	$\neg p$
1	0
0	1

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \Rightarrow q$	$p \Leftrightarrow q$
1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	0	1	1	0
0	0	0	0	1	1

Zadanie 6. Używając metody zero-jedynkowej sprawdzić, czy poniższe formuły są tautologiami rachunku zdań:

1. $(p \Rightarrow q) \wedge p \Rightarrow q$
2. $(p \vee q) \wedge (p \Rightarrow q) \Rightarrow (q \Rightarrow p)$
3. $p \vee (q \wedge r) \Rightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
4. $\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$
5. $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \vee r \Rightarrow q \wedge r)$
6. $(p \Rightarrow q) \Rightarrow ((r \Rightarrow s) \Rightarrow (p \wedge r \Rightarrow q \wedge s))$

Przykład

Sprawdzić metodą zero-jedynkową, czy poniższa formuła jest tautologią rachunku zdań:

$$(p \Rightarrow (q \Rightarrow r)) \Leftrightarrow (q \wedge \neg r \Rightarrow \neg p)$$

Oznaczmy:
$\varphi : (p \Rightarrow (q \Rightarrow r)) \Leftrightarrow (q \wedge \neg r \Rightarrow \neg p)$
$\psi : p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$
$\chi : q \wedge \neg r \Rightarrow \neg p$
Zatem $\varphi : \psi \Leftrightarrow \chi$

p	q	r	$q \Rightarrow r$	ψ	$\neg r$	$q \wedge \neg r$	$\neg p$	χ	φ
1	1	1	1	1	0	0	0	1	1
1	1	0	0	0	1	1	0	0	1
1	0	1	1	1	0	0	0	1	1
1	0	0	1	1	1	0	0	1	1
0	1	1	1	1	0	0	1	1	1
0	1	0	0	1	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	0	0	1	1	1
0	0	0	1	1	1	0	1	1	1

Odpowiedź: φ jest tautologią rachunku zdań.

Logika i teoria mnogości

Ćwiczenia 2

Zadanie 1. Używając metody skróconej - nie wprost, sprawdzić, czy poniższe formuły są tautologiami rachunku zdań:

1. $(p \Rightarrow q) \wedge p \Rightarrow q$
2. $(\neg p \Rightarrow q) \Rightarrow (\neg q \Rightarrow p)$
3. $(p \Leftrightarrow q) \Rightarrow \neg p \wedge q$
4. $(p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow q \wedge r)$
5. $(p \vee q) \wedge (p \Rightarrow q) \Rightarrow (q \Rightarrow p)$
6. $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow \neg p \vee q$
7. $(p \wedge q \Rightarrow r) \Leftrightarrow (p \Rightarrow (q \Rightarrow r))$
8. $\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$
9. $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \vee r \Rightarrow q \wedge r)$
10. $(p \Rightarrow q) \Rightarrow ((r \Rightarrow s) \Rightarrow (p \wedge r \Rightarrow q \wedge s))$

Definicja
Schematem wnioskowania wyrażonym w języku rachunku zdań jest para uporządkowana (X, φ), gdzie X jest zbiorem formuł rachunku zdań, a φ jest formułą.

Schemat wnioskowania można zapisać następująco:

$$\frac{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n}{\varphi}$$

Formuły $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ nazywa się **schematami przesłanek**, a formułę φ **schematem wniosku**.

Definicja
Ze zdań o schematach $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ **wynika logicznie** zdanie o schemacie φ wtw, gdy formuła $\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \cdots \wedge \varphi_n \Rightarrow \varphi$ jest tautologią.

Wnioskowanie nazywamy **dedukcyjnym** (na gruncie KRZ), jeżeli wniosek wynika logicznie z przesłanek, tzn. schemat wniosku wynika logicznie (w KRZ) ze schematów przesłanek.

Lemat Jeśli schemat wnioskowania

$$\frac{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n}{\varphi}$$

jest niezawodny, a formuły $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ uzyskują wartość 1, to formuła φ też uzyskuje wartość 1.

Zadanie 2. Sprawdzić, czy poniższe wnioskowania są dedukcyjne:

1. Jeśli nie jesteś uparty, to niekiedy zmieniasz zdanie. Jeśli niekiedy zmieniasz zdanie, to czasem uznajesz twierdzenia fałszywe. Zatem, jeżeli nie jesteś uparty, to czasem uznajesz twierdzenia fałszywe.

2. Jeżeli Jan nie będzie grał systematycznie na loterii, to nie wygra. Jeżeli Jan będzie grał systematycznie na loterii, to musi znaleźć dodatkowe źródło dochodów. Jeżeli Jan nie wygra na loterii, to też musi znaleźć dodatkowe źródło dochodów. Zatem, Jan musi znaleźć dodatkowe źródło dochodów.

3. Jeżeli Jan nie będzie schlebiał Piotrowi, to straci posadę. Jeżeli Jan straci posadę, to popadnie w kłopoty finansowe. Jeżeli Jan będzie schlebiał Piotrowi, to straci dobrą opinię. Zatem, Jan popadnie w kłopoty finansowe lub straci dobrą opinię.

4. Jan uważa Piotra za autorytet. Jeśli Jan jest bardzo młody, to jeśli uważa Piotra za autorytet, to z góry podziela wszystkie poglądy Piotra. Jednakże Jan nie jest bardzo młody. Zatem, Jan nie podziela z góry wszystkich poglądów Piotra.

5. Jeśli nauka logiki przychodzi Janowi zbyt łatwo lub sprawia wiele trudności, to Jan uważa logikę za nieciekawą. Nauka logiki przychodzi Janowi zbyt łatwo. Zatem, Jan uważa logikę za nieciekawą.

6. Jeśli $m = 0$ i $n \neq 0$, to $m \cdot n = 0$. Jeśli $m \neq 0$ i $n = 0$, to $m \cdot n = 0$. Zatem, Jeśli $n \neq 0$ i $m \neq 0$, to $m \cdot n \neq 0$.

Logika i teoria mnogości

Ćwiczenia 3

Literał jest to zmienna zdaniowa lub jej negacja.

Przykład. $p, q, r, \neg p, \neg q, \neg r$

Koniunkcja elementarna jest to koniunkcja skończenie wielu literałów.

Przykład. $p \wedge q \wedge \neg q, \quad \neg p \wedge r, \quad p$

Alternatywa elementarna jest to alternatywa skończenie wielu literałów.

Przykład. $p \vee \neg q \vee q, \quad p \vee \neg r, \quad q$

Formuła w alternatywnej postaci normalnej (APN) jest to alternatywa skończenie wielu koniunkcji elementarnych.

Przykład. $(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q) \vee (\neg q \wedge p), \quad (r \wedge \neg q) \vee (p \wedge \neg r \wedge q)$

Formuła w koniunkcyjnej postaci normalnej (KPN) jest to koniunkcja skończenie wielu alternatyw elementarnych.

$(p \vee q) \wedge (\neg p \vee q \vee \neg r), \quad (p \vee q \vee r) \wedge (p \vee \neg p \vee q) \wedge (q \vee \neg p)$

Przykład wyznaczania formuły w APN i formuły w KPN, logicznie równoważnych danej formule, metoda tablicy. Formuła: $p \wedge q \Leftrightarrow p \wedge r$. Rysujemy tablicę formuły, poszerzoną o dwie kolumny: APN i KPN.

p	q	r	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \wedge q \Leftrightarrow p \wedge r$	APN	KPN
1	1	1	1	1	1	$p \wedge q \wedge r$	
1	1	0	1	0	0		$\neg p \vee \neg q \vee r$
1	0	1	0	1	0		$\neg p \vee q \vee \neg r$
1	0	0	0	0	1	$p \wedge \neg q \wedge \neg r$	
0	1	1	0	0	1	$\neg p \wedge q \wedge r$	
0	1	0	0	0	1	$\neg p \wedge q \wedge \neg r$	
0	0	1	0	0	1	$\neg p \wedge \neg q \wedge r$	
0	0	0	0	0	1	$\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r$	

W kolumnie APN zapisujemy koniunkcje elementarne odpowiadajace wartościowaniom, dla których cała formuła przyjmuje wartość 1. Dana koniunkcja elementarna jest prawdziwa tylko dla odpowiadajacego jej wartościowania. Poszukiwana formuła w APN jest alternatywą otrzymanych koniunkcji elementarnych. W kolumnie KPN zapisujemy alternatywy elementarne odpowiadające wartościowaniom, dla których cała formuła przyjmuje wartość 0. Dana alternatywa elementarna jest fałszywa tylko dla odpowiadajacego jej wartościowania. Poszukiwana formuła w KPN jest koniunkcją otrzymanych alternatyw elementarnych.

APN: $(p \wedge q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee \neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r)$

KPN: $(\neg p \vee \neg q \vee r) \wedge (\neg p \vee q \vee \neg r)$

Zadanie 1. Wyznaczyć metodą tablicy formuły w APN i KPN, logicznie równoważne następujacym formułom:

(a) $p \vee r \Leftrightarrow q \vee r$

(b) $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (q \Rightarrow r)$

(c) $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (q \Rightarrow p)$

Sprowadzanie formuł do KPN i APN metodą przekształceń równoważnościowych

Metoda ta polega na kolejnym zastępowaniu podformuł przez ich równoważniki. Można wyróżnić trzy etapy procedury. Zawsze zastępujemy lewą stronę równoważności prawą stroną.

Etap I. Eliminujemy $\Leftrightarrow$ i $\Rightarrow$ stosując prawa:

$$(\varphi \Leftrightarrow \psi) \Leftrightarrow (\varphi \Rightarrow \psi) \wedge (\psi \Rightarrow \varphi)$$

$$(\varphi \Rightarrow \psi) \Leftrightarrow \neg\varphi \vee \psi$$

Etap II. Sprowadzamy formułę do negacyjnej postaci normalnej (NPN), tj. formuły zawierajacej tylko $\wedge, \vee, \neg$, przy czym $\neg$ występuje tylko w literałach, stosując prawa De Morgana:

$$\neg(\varphi \wedge \psi) \Leftrightarrow (\neg\varphi \vee \neg\psi)$$

$$\neg(\varphi \vee \psi) \Leftrightarrow (\neg\varphi \wedge \neg\psi)$$

Na etapach I i II stosujemy prawo podwójnej negacji $\neg\neg\varphi \Leftrightarrow \varphi$, gdy pojawia sie $\neg\neg\varphi$.

Etap III. Otrzymana formuła jest kombinacją literałów za pomocą $\wedge, \vee$. Sprowadzamy ją do KPN, stosując prawa rozdzielności alternatywy względem koniunkcji (stosujemy je w dwóch formach):

$$\varphi \vee (\psi \wedge \chi) \Leftrightarrow (\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \chi)$$

$$(\psi \wedge \chi) \vee \varphi \Leftrightarrow (\psi \vee \varphi) \wedge (\chi \vee \varphi)$$

Po kilkakrotnym zastosowaniu tych przekształceń, wszystkie koniunkcje wyprowadzimy "na zewnątrz".

Przy sprowadzaniu formuły do APN, stosujemy prawa rozdzielności koniunkcji względem alternatywy:

$$\varphi \wedge (\psi \vee \chi) \Leftrightarrow (\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \chi)$$

$$(\psi \vee \chi) \wedge \varphi \Leftrightarrow (\psi \wedge \varphi) \vee (\chi \wedge \varphi)$$

Przykład. Zastosujemy tę metodę do formuły z poprzedniego przykładu: $p \wedge q \Leftrightarrow p \wedge r$.

Zapisujemy kolejne równoważniki jeden po drugim.

Etap I.

$p \wedge q \Leftrightarrow p \wedge r$

$(p \wedge q \Rightarrow p \wedge r) \wedge (p \wedge r \Rightarrow p \wedge q)$

$[\neg(p \wedge q) \vee (p \wedge r)] \wedge [\neg(p \wedge r) \vee (p \wedge q)]$

Etap II.

$[\neg p \vee \neg q \vee (p \wedge r)] \wedge [\neg p \vee \neg r \vee (p \wedge q)]$ NPN

Opuszczono nawiasy wokół $\neg p \vee \neg q$, ponieważ jest argumentem alternatywy; podobnie dla $\neg p \vee \neg r$.

Etap III. Sprowadzajac do KPN, wystarczy zastosować prawa rozdzielności alternatywy względem koniunkcji w każdym nawiasie kwadratowym.

$(\neg p \vee \neg q \vee p) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg r \vee p) \wedge (\neg p \vee \neg r \vee q)$ KPN

Sprowadzając do APN, stosujemy do NPN prawa rozdzielności koniunkcji względem alternatywy. Ponieważ prawy argument zewnętrznej koniunkcji jest alternatywą trójczłonową, możemy od razu zastosować to prawo w wersji wieloczłonowej:

$$\varphi \wedge (\psi_1 \vee \psi_2 \ldots \psi_n) \Leftrightarrow (\varphi \wedge \psi_1) \vee (\varphi \wedge \psi_2 \vee \cdots \vee (\varphi \wedge \psi_n)$$

zamiast dochodzić do tego wyniku w kilku krokach.

$[[\neg p \vee \neg q \vee (p \wedge r)] \wedge \neg p] \vee [[\neg p \vee \neg q \vee (p \wedge r)] \wedge \neg r] \vee [[\neg p \vee \neg q \vee (p \wedge r)] \wedge p \wedge q]$

Następnie w każdym zewnętrznym nawiasie kwadratowym stosujemy analogiczne prawo (w drugiej formie).

$(\neg p \wedge \neg p) \vee (\neg q \wedge \neg p) \vee (p \wedge r \wedge \neg p) \vee (\neg p \wedge \neg r) \vee (\neg q \wedge \neg r) \vee (p \wedge r \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge p \wedge q) \vee (\neg q \wedge p \wedge q) \vee (p \wedge r \wedge p \wedge q)$ APN

Twierdzenie Formuła w KPN jest tautologią KRZ wtw, gdy w każdej składowej alternatywie elementarnej występuje para przeciwnych literałów.

Twierdzenie Formuła w APN jest niespełnialna wtw, gdy w każdej składowej koniunkcji elementarnej występuje para przeciwnych literałów.

W otrzymanej KPN druga alternatywa elementarna $\neg p \vee \neg q \vee r$ nie zawiera pary przeciwnych literałów (pierwsza zawiera $\neg p, p$), więc ta formuła nie jest tautologią. Zatem formuła poczatkowa $p \wedge q \Leftrightarrow p \wedge r$ nie jest tautologią, skoro jest logicznie równoważna tamtej. W otrzymanej APN pierwsza koniunkcja elementarna $\neg p \wedge \neg p$ nie zawiera pary przeciwnych literałów (taka para występuje w trzeciej koniunkcji i dalszych), więc ta formuła jest spełnialna. Oczywiście wiedzieliśmy to już wcześniej, skoro sporządziliśmy tablice tej formuły. Na podstawie tych twierdzeń można sprawdzać tautologiczność i spełnialność, jeżeli sprowadzimy formułę do KPN i APN bez pomocy tablicy.

Zadanie 2. Sprowadzić do KPN i sprawdzić, czy poniższe formuły są tautologiami KRZ:

1. $(p \Rightarrow q) \wedge p \Rightarrow q$
2. $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg p \Rightarrow \neg q)$
3. $(p \Rightarrow (q \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \wedge q \Rightarrow r)$
4. $(p \wedge q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow (q \Rightarrow r))$
5. $(p \Rightarrow q \wedge r) \Rightarrow (p \vee q \Rightarrow \neg r)$

Zadanie 3. Sprowadzić do APN i sprawdzić, czy poniższe formuły są niespełnialne:

1. $p \vee (p \wedge q) \Rightarrow p$
2. $\neg(p \wedge (q \vee r) \Rightarrow (p \wedge q) \vee r)$
3. $(p \wedge q) \Rightarrow (\neg p \vee \neg q)$
4. $\neg(p \Rightarrow q) \vee ((q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r))$
5. $\neg(p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \wedge \neg q)$

Wykonując przekształcenia, można eliminować powtórzenia, a więc pisać φ zamiast $\varphi \wedge \varphi$ oraz $\varphi \vee \varphi$. Np. $\neg p \wedge \neg p$ zastępujemy przez $\neg p$.

Metodę przekształceń równoważnosciowych można też wykorzystać do wyprowadzania tautologii, których głównym spójnikiem jest $\Leftrightarrow$. Przekształcamy lewą stronę równoważności w prawą stronę. W ten sposób można wyprowadzić mniej intuicyjne prawa dla implikacji w oparciu o bardziej intuicyjne i łatwiejsze do zapamiętania prawa dla koniunkcji, alternatywy i negacji, np. prawa idempotentności, łaczności, przemienności, rozdzielności i De Morgana. Rozważmy prawo eksportacji-importacji: $(p \wedge q \Rightarrow r) \Leftrightarrow [p \Rightarrow (q \Rightarrow r)]$. Następujące formuły są logicznie równoważne.

$p \wedge q \Rightarrow r$ (lewa strona)
$\neg(p \wedge q) \vee r$ (eliminujemy $\Rightarrow$)
$\neg p \vee \neg q \vee r$ (stosujemy prawo De Morgana)
$\neg p \vee (q \Rightarrow r)$ (wprowadzamy $\Rightarrow$)
$p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$ (wprowadzamy $\Rightarrow$)

Zadanie 4. Metodą przekształceń równoważnosciowych wyprowadzić następujace prawa.

1. $(p \Rightarrow q \wedge r) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r)$
2. $(p \vee q \Rightarrow r) \Leftrightarrow (p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)$
3. $(p \wedge q \Rightarrow r) \Leftrightarrow (p \Rightarrow r) \vee (q \Rightarrow r)$

Logika i teoria mnogości

Ćwiczenia 4

System sekwentowy dowodzenia praw KRZ

Sekwent: skończona lista formuł $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$, interpretowana jako alternatywa $\varphi_1 \vee \cdots \vee \varphi_n$.

Aksjomaty: wszystkie sekwenty zawierające parę sprzecznych formuł $\varphi, \neg\varphi$ (na dowolnych miejscach).

Reguły dowodzenia:

$$(R\neg\neg)\ \frac{X, \varphi, Y}{X, \neg\neg\varphi, Y}$$

$$(R\wedge)\ \frac{X, \varphi, Y; \quad X, \psi, Y}{X, \varphi \wedge \psi, Y} \qquad (R\neg\wedge)\ \frac{X, \neg\varphi, \neg\psi, Y}{X, \neg(\varphi \wedge \psi), Y}$$

$$(R\vee)\ \frac{X, \varphi, \psi, Y}{X, \varphi \vee \psi, Y} \qquad (R\neg\vee)\ \frac{X, \neg\varphi, Y; \quad X, \neg\psi, Y}{X, \neg(\varphi \vee \psi), Y}$$

$$(R \Rightarrow)\ \frac{X, \neg\varphi, \psi, Y}{X, \varphi \Rightarrow \psi, Y} \qquad (R\neg \Rightarrow)\ \frac{X, \varphi, Y; \quad X, \neg\psi, Y}{X, \neg(\varphi \Rightarrow \psi), Y}$$

$$(R \Leftrightarrow)\ \frac{X, \neg\varphi, \psi, Y; \quad X, \varphi, \neg\psi, Y}{X, \varphi \Leftrightarrow \psi, Y} \qquad (R\neg \Leftrightarrow)\ \frac{X, \varphi, \psi, Y; \quad X, \neg\varphi, \neg\psi, Y}{X, \neg(\varphi \Leftrightarrow \psi), Y}$$

W tych regułach litery X, Y oznaczają dowolne konteksty, czyli skończone listy formuł (mogą być puste).

W przypadku reguły z jedną przesłanką wniosek jest logicznie równoważny tej przesłance; w przypadku reguły z dwiema przesłankami wniosek jest logicznie równoważny koniunkcji przesłanek (listy interpretujemy jako alternatywy).

Formuła w korzeniu drzewa jest logicznie równoważna koniunkcji wszystkich alternatyw elementarnych na liściach drzewa. Zatem system sekwentów może służyć do sprowadzania formuł do KPN.

Przykład

$$
\begin{array}{c}
(p \Rightarrow q) \Rightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p) \\
| \\
\neg(p \Rightarrow q), \neg q \Rightarrow \neg p \\
\swarrow \qquad \searrow \\
\begin{array}{cc}
p, \neg q \Rightarrow \neg p & \neg q, \neg q \Rightarrow \neg p \\
| & | \\
p, \neg\neg q, \neg p & \neg q, \neg\neg q, \neg p \\
| & | \\
p, q, \neg p & \neg q, q, \neg p
\end{array}
\end{array}
$$

Drzewo dowodu formuły $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$
KPN: $(p \vee q \vee \neg p) \wedge (\neg q \vee q \vee \neg p)$

Porównaj:

$$
\begin{array}{c}
(p \Rightarrow q) \Rightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p) \\
| \\
\neg(p \Rightarrow q), \neg q \Rightarrow \neg p \\
| \\
\neg(p \Rightarrow q), \neg\neg q, \neg p \\
| \\
\neg(p \Rightarrow q), q, \neg p \\
\swarrow \qquad \searrow \\
\begin{array}{cc}
p, q, \neg p & \neg q, q, p
\end{array}
\end{array}
$$

Przykład

$$
\begin{array}{c}
p \vee q \Rightarrow p \wedge q \\
| \\
\neg(p \vee q), p \wedge q \\
\swarrow \qquad \searrow \\
\begin{array}{cc}
\neg p, p \wedge q & \neg q, p \wedge q \\
\swarrow \quad \searrow & \swarrow \quad \searrow \\
\neg p, p \qquad \neg p, q & \neg q, p \qquad \neg q, q
\end{array}
\end{array}
$$

Poszukiwanie dowodu formuły $p \vee q \Rightarrow p \wedge q$ zakończyło się porażką, ponieważ dwa sekwenty elementarne na liściach drzewa nie są aksjomatami.

KPN: $(\neg p \vee p) \wedge (\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p) \wedge (\neg q \vee q)$

Przykład. Korzystając z metody drzew sekwentów sprawdzić, czy formuła $(p \wedge q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow (q \Rightarrow r))$ jest tautologią KRZ.

Drzewo sekwentów:

$$
\begin{array}{c}
(p \wedge q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow (q \Rightarrow r)) \\
| \\
\neg(p \wedge q \Rightarrow r), (p \Rightarrow (q \Rightarrow r)) \\
| \\
\neg(p \wedge q \Rightarrow r), \neg p, q \Rightarrow r \\
| \\
\neg(p \wedge q \Rightarrow r), \neg p, \neg q, r \\
\swarrow \qquad\qquad \searrow \\
\begin{array}{c} p \wedge q, \neg p, \neg q, r \\ \swarrow \quad \searrow \\ p, \neg p, \neg q, r \qquad q, \neg p, \neg q, r \end{array} \qquad \begin{array}{c} \neg r, \neg p, \neg q, r \\ \\ \\ \end{array}
\end{array}
$$

KPN: $(p \vee \neg p \vee \neg q \vee r) \wedge (q \vee \neg p \vee \neg q \vee r) \wedge (\neg r \vee \neg p \vee \neg q \vee r)$
Odpowiedź: Formuła jest tautologią.

Zadanie 1. Korzystając z metody drzew sekwentów sprawdzić, czy poniższe formuły są tautologiami KRZ:

1. $\neg(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow p \wedge \neg q$
2. $(p \Rightarrow q) \Rightarrow ((q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r))$
3. $(p \Rightarrow q) \wedge p \Rightarrow q$
4. $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg p \Rightarrow \neg q)$
5. $(p \Rightarrow (q \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \wedge q \Rightarrow r)$
6. $(p \Rightarrow q \wedge r) \Rightarrow (p \vee q \Rightarrow \neg r)$

Logika i teoria mnogości

Ćwiczenia 5

Funkcje logiczne

Definicja. Niech $n \geq 1$. Funkcję n-argumentową, której argumenty i wartości są wartościami logicznymi $0, 1$, nazywamy n-argumentową *funkcją boolowską*.

Inne nazwy: funkcja logiczna, funkcja przełączająca.
Niech x, y, z reprezentują wartości logiczne.

Funkcje jednoargumentowe ($n = 1$)

x	f_0^1	f_1^1	f_2^1	f_3^1
1	0	0	1	1
0	0	1	0	1

$f_0^1(x) = 0$ funkcja zero
$f_1^1(x) = \neg x$ funkcja negacji
$f_2^1(x) = x$ funkcja identycznościowa
$f_3^1(x) = 1$ funkcja jeden

$f_0^1(1) = 0, f_0^1(0) = 0$ kod: 00
$f_1^1(1) = 0, f_1^1(0) = 1$ kod: 01
$f_2^1(1) = 1, f_2^1(0) = 0$ kod: 10
$f_3^1(1) = 1, f_3^1(0) = 1$ kod: 11

Fakt. Liczba wszystkich n-argumentowych funkcji boolowskich wynosi 2^{2^n}.

Zatem, są 4 funkcje boolowskie 1-argumentowe, jest 16 funkcji boolowskich 2-argumentowych i 256 3-argumentowych.

Funkcje dwuargumentowe ($n = 2$)

x	y	f_0^2	f_1^2	f_2^2	f_3^2	f_4^2	f_5^2	f_6^2	f_7^2	f_8^2	f_9^2	f_{10}^2	f_{11}^2	f_{12}^2	f_{13}^2	f_{14}^2	f_{15}^2
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
0	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Zauważmy, że kody funkcji logicznych są binarnymi rozwinięciami numeru funkcji.

$f_8^2(x,y) = x \wedge y$ funkcja koniunkcji
$f_9^2(x,y) = x \Leftrightarrow y$ funkcja równoważności
$f_{11}^2(x,y) = x \Rightarrow y$ funkcja implikacji
$f_{14}^2(x,y) = x \vee y$ funkcja alternatywy

Zadanie 1. Znaleźć numery funkcji

1. $x \Leftrightarrow \neg y$
2. $x \downarrow y$
3. $x \uparrow y$

Funkcja 2-argumentowa (strzałka Sheferra lub funkcja NAND): $x \uparrow y = \neg(x \wedge y)$ odpowiada spójnikowi "co najwyżej jedno z dwojga".

Funkcja 2-argumentowa (binegacja lub funkcja NOR): $x \downarrow y = \neg(x \vee y)$ odpowiada spójnikowi "ani … ani … "

x	y	$x \uparrow y$	$x \downarrow y$
1	1	0	0
1	0	1	0
0	1	1	0
0	0	1	1

Przykład. Wyznaczyć tablicę funkcji f_{200}^3.
Rozwiązanie:
$200 = (11001000)_2$ Kod 11001000 wpisujemy do tablicy wartościowań:

x	y	z	$f_{200}^3(x,y,z)$
1	1	1	1
1	1	0	1
1	0	1	0
1	0	0	0
0	1	1	1
0	1	0	0
0	0	1	0
0	0	0	0

Zadanie 2. Wyznaczyć tablice funkcji: a) $f_{25}^3(x,y,z)$, b) $f_{33}^3(x,y,z)$, c) $f_{105}^3(x,y,z)$, d) $f_{199}^3(x,y,z)$.

Wskazówka. $25 = (11001)_2$. Kod 11001 uzupełniamy zerami do 8 znaków (na początku (!)) otrzymując: 00011001 i ten kod wpisujemy do tablicy.

Zadanie 3. Znaleźć numer funkcji logicznej 3-argumentowej o kodzie a) 11001, b) 100001, c) 11001101.

Fakt. Każdą funkcję boolowską można przedstawić jako wyrażenie w KPN i jako wyrażenie w APN.

Przykład
$f_0^2(x,y) = x \wedge \neg x = (\neg x \vee \neg y) \wedge (\neg x \vee y) \wedge (x \vee \neg y) \wedge (x \vee y)$
$f_1^2(x,y) = \neg x \wedge \neg y = (\neg x \vee \neg y) \wedge (\neg x \vee y) \wedge (x \vee \neg y)$
$f_2^2(x,y) = \neg x \wedge y = (\neg x \vee \neg y) \wedge (\neg x \vee y) \wedge (x \vee y)$
$f_3^2(x,y) = (\neg x \wedge y) \vee (\neg x \wedge \neg y) = (\neg x \vee \neg y) \wedge (\neg x \vee y)$

Dla funkcji logicznych zachodzą pewne prawa, zwane prawami algebry logiki:

- dla 0: $x \wedge 0 = 0, x \vee 0 = x, x \wedge \neg x = 0$
- dla 1: $x \vee 1 = 1, x \wedge 1 = x, x \vee \neg x = 1$
- prawa pochłaniania: $x \wedge x = x, x \vee x = x$
- prawa przemienności: $x \wedge y = y \wedge x, x \vee y = y \vee x$
- prawa łączności: $(x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z)$
  $(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z)$
- prawa rozdzielności: $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$
  $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$
- prawo podwójnej negacji: $\neg\neg x = x$
- prawa De Morgana: $\neg(x \wedge y) = \neg x \vee \neg y, \neg(x \vee y) = \neg x \wedge \neg y$
- prawo transpozycji: $x \Rightarrow y = \neg y \Rightarrow \neg x$

Wyrażenie w APN dla $f_3^2(x,y)$ można uprościć, stosując prawa algebry logiki:

$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z), x \vee \neg x = 1, x \wedge 1 = x$

$f_3^2(x,y) = \neg x \wedge (y \vee \neg y) = \neg x \wedge 1 = \neg x$

Zadanie 4. Stosując prawa algebry logiki uprościć następujące funkcje logiczne:

1. $f(x,y,z) = (x \wedge y \wedge z) \vee (x \wedge y \wedge \neg z) \vee (\neg x \wedge y \wedge z) \vee (\neg x \wedge y \wedge \neg z)$
2. $f(x,y,z) = (x \wedge \neg y \wedge \neg z) \vee (\neg x \wedge \neg y \wedge z) \vee (x \wedge \neg y \wedge z) \vee (\neg x \wedge \neg y \wedge \neg z)$

Definicja. Zbiór funkcji boolowskich F nazywamy *zupełnym*, jeżeli każda funkcja boolowska jest przedstawialna przez funkcje ze zbioru F.

Przykład. Zbiór $\{\neg, \wedge, \vee\}$ jest zbiorem zupełnym, gdyż $\Rightarrow$ oraz $\Leftrightarrow$ można przedstawić za pomocą $\neg, \wedge$ oraz $\vee$.

$x \Rightarrow y = \neg x \vee y$

$x \Leftrightarrow y = (x \Rightarrow y) \wedge (y \Rightarrow x) = (\neg x \vee y) \wedge (\neg y \vee x)$

Również:

$x \Leftrightarrow y = (x \wedge y) \vee (\neg x \vee \neg y)$

Zadanie 5. Wykazać, że następujące zbiory są zupełne:

1. $\{\neg, \wedge\}$
2. $\{\neg, \vee\}$
3. $\{\neg, \Rightarrow\}$
4. $\{\uparrow\}$
5. $\{\downarrow\}$

Logika i teoria mnogości

Ćwiczenia 6

Kwantyfikatory

Mamy dwa kwantyfikatory: ogólny $\forall$ i szczegółowy $\exists$.
Inne nazwy dla kwantyfikatora $\forall$: generalny, uniwersalny, duży;
dla $\exists$: istnienia, egzystencjalny, mały.
Kwantyfikator występuje ze zmienną.
$\forall_x$ czytamy: "dla każdego x"; $\exists_x$ czytamy: "istnieje x takie, że"
Np. $\forall_x(x + x = 2x)$ czytamy: "dla każdego x, x plus x równa się dwa x".
$\exists_x(x^2 = 4)$ czytamy: "istnieje x takie, że x kwadrat równa się cztery".

Kwantyfikatorowe schematy zdań języka polskiego

Za pomocą kwantyfikatorów możemy bardziej precyzyjnie opisać strukturę logiczną zdania. Rozważmy zdanie: Każdy student zdał jakiś egzamin. W tym zdaniu wyraz ‘każdy’ odpowiada kwnatyfikatorowi $\forall$, a wyraz ’jakiś’ kwantyfikatorowi $\exists$.

W językach naturalnych nie występuje konstrukcja $\forall_x$, ani $\exists_x$. Wyrazy odpowiadające kwantyfikatorom, np. każdy, wszystkie (ogólny), jakiś, pewien, niektóre (szczegółowy), bezpośrednio łączą się z nazwami ogólnymi, np. student, studenci, człowiek, zwierzę.

Nie przyjmujemy zmiennych, reprezentujących nazwy ogólne. Nazwy ogólne zastępujemy predykatami jednoargumentowymi. Zamiast nazwy ’student’ piszemy: x jest studentem. Zapis symboliczny: $P(x)$ czytamy: "P od x", co znaczy: x jest P.

W zdaniu ’Każdy student zdał jakiś egzamin’ wyróżniamy dwa predykaty jednoargumentowe, odpowiadajace nazwom ogólnym ’student’ i ’egzamin’, oraz predykat dwuargumentowy, odpowiadajacy czasownikowi ’zdał’. Stosujemy zmienne x, y, z itp. Przyjmujemy, że ich zakres to zbiór wszystkich studentów i egzaminów. Nadajemy znaczenie formułom atomowym.

$P(x) : x$ jest studentem
$Q(x) : x$ jest egzaminem
$R(x, y) : x$ zdał y
Logiczny schemat zdania: $\forall_{P(x)}\exists_{Q(y)}R(x, y)$
W tym schemacie występują kwantyfikatory ograniczone.
$\forall_{P(x)}$ czytamy: "dla każdego x, spełniajacego $P(x)$", czyli: dla każdego x, będącego studentem.

$\exists_{Q(y)}$ czytamy: "istnieje y, spełniajace $Q(y)$" (i takie, że), czyli: istnieje y, będące egzaminem.

Możemy wyeliminować kwantyfikatory ograniczone, stosując prawa eliminacji:

$$\forall_{\varphi(x)}\psi(x) \Leftrightarrow \forall_x(\varphi(x) \Rightarrow \psi(x))$$

$$\exists_{\varphi(x)}\psi(x) \Leftrightarrow \exists_x(\varphi(x) \land \psi(x))$$

Wobec tego, schemat $\forall_{P(x)}\exists_{Q(y)}R(x,y)$ jest logicznie równoważny formule:

$$\forall_x(P(x) \Rightarrow \exists_y(Q(y) \land R(x,y)))$$

Uwaga 1. Struktura logiczna schematu różni się istotnie od struktury gramatycznej zdania. W zdaniu wyraz 'jakiś' występuje w dopełnieniu 'jakiś egzamin', które piszemy po czasowniku przechodnim. W logice kwantyfikator zawsze piszemy przed warunkiem, na który ten kwantyfikator działa. W drugim schemacie pojawiają się implikacja i koniunkcja, których nie ma w analizowanym zdaniu. Gdy tworzymy schemat zdania, na ogół dobrze jest najpierw utworzyć schemat z kwantyfikatorami ograniczonymi (ma prostszą strukturę), a potem wyeliminować kwantyfikatory ograniczone za pomocą praw eliminacji.

W powyższych schematach występowały dwa kwantyfikatory. Zdania z jednym wyrazem, odpowiadającym kwantyfikatorowi, mają prostsze schematy.
Rozważmy zdanie: Żaden student nie jest egzaminem. Wyraz 'żaden' odpowiada kwantyfikatorowi ogólnemu $\forall$. W języku polskim stosujemy go wtedy, gdy działa na zaprzeczone wyrażenie, tu 'nie jest egzaminem'.

Pierwszy schemat: $\forall_{P(x)}\neg Q(x)$.

Drugi schemat: $\forall_x(P(x) \Rightarrow \neg Q(x))$

Zdanie: Pewien student jest egzaminem. To zdanie jest fałszywe, ale przecież można tworzyć schematy zdań fałszywych.

Pierwszy schemat: $\exists_{P(x)}Q(x)$.

Drugi schemat: $\exists_x(P(x) \land Q(x))$

Przykłady z dwoma kwantyfikatorami.

Zdanie: Pewien student zdał wszystkie egzaminy.

Pierwszy schemat: $\exists_{P(x)}\forall_{Q(y)}R(x,y)$

Drugi schemat: $\exists_x(P(x) \land \forall_y(Q(y) \Rightarrow R(x,y)))$

Zdanie: Pewien student nie zdał żadnego egzaminu.

Pierwszy schemat: $\exists_{P(x)}\forall_{Q(y)}\neg R(x,y)$ (należy zauważyć, że $\forall_{Q(y)}$ działa na $\neg R(x,y)$)

Drugi schemat: $\exists_x(P(x) \land \forall_y(Q(y) \Rightarrow \neg R(x,y)))$

Zdanie: Pewien student nie zdał wszystkich egzaminów.

Pierwszy schemat: $\exists_{P(x)}\neg\forall_{Q(y)}R(x,y)$ (tu $\forall_{Q(y)}$ działa na warunek niezaprzeczony)

Drugi schemat: $\exists_x(P(x) \land \neg\forall_y(Q(y) \Rightarrow R(x,y)))$

Uwaga 2. W dotychczasowych przykładach zawsze x reprezentowało studentów, a y egzaminy. Tak się złożyło, ale nie przyjeliśmy takiej zasady. Przypomnijmy, że ustaliliśmy zakres wszystkich zmiennych jako zbiór studentów i egzaminów. Gdybyśmy zarezerwowali x dla studentów, a y dla egzaminów, to predykaty P, Q byłyby zbyteczne. Zdanie 'Każdy student zdał jakiś egzamin' miałoby schemat $\forall_x \exists_y R(x, y)$. Wtedy jednak nie moglibyśmy wyrazić bardziej skomplikowanych zdań, np.: Pewien student zdał jakieś egzaminy i nie zdał jakichś egzaminów.

Pierwszy schemat: $\exists_{P(x)} \exists_{Q(y)} \exists_{Q(z)} (R(x, y) \wedge \neg R(x, z))$

Drugi schemat: $\exists_x (P(x) \wedge \exists_y (Q(y) \wedge \exists_z (Q(z) \wedge R(x, y) \wedge \neg R(x, z))))$

Potrzebowaliśmy dwóch zmiennych, reprezentujacych egzaminy. Toteż umawiamy się, że zakres wszystkich zmiennych jest ten sam, a dodatkowe ograniczenia wyrażamy za pomocą predykatów. Kolejność zmiennych w schemacie nie ma znaczenia. Dotychczas wprowadzaliśmy je w kolejności alfabetycznej x, y, z, ale np. schemat $\forall_{P(x)} \exists_{Q(y)} R(x, y)$ jest logicznie równoważny schematowi $\forall_{P(y)} \exists_{Q(x)} R(y, x)$, na mocy praw zamiany zmiennych związanych.

Podamy jeszcze przykłady, w których warunki ograniczające są bardziej złożone.

Zdanie: Każdy student, który nie zdał jakiegoś egzaminu, nie zdał żadnego egzaminu.

Pierwszy schemat: $\forall_{P(x) \wedge \exists_{Q(y)} \neg R(x,y)} \forall_{Q(z)} \neg R(x, z)$

Drugi schemat: $\forall_x (P(x) \wedge \exists_y (Q(y) \wedge \neg R(x, y)) \Rightarrow \forall_z (Q(z) \Rightarrow \neg R(x, z)))$

W obu schematach można zamienić z na y, ale użycie z poprawia czytelność.

Zdanie: Każdy student, który zaliczył wszystkie ćwiczenia, zdał wszystkie egzaminy.

Potrzebne są nowe predykaty.

$C(x) : x$ jest ćwiczeniem,

$S(x, y) : x$ zaliczył y.

Pierwszy schemat $\forall_{P(x) \wedge \forall_{C(y)} S(x,y)} \forall_{Q(z)} R(x, z)$

Drugi schemat: $\forall_x (P(x) \wedge \forall_y (C(y) \Rightarrow S(x, y)) \Rightarrow \forall_z (Q(z) \Rightarrow R(x, z)))$

Zdanie: Niektórzy studenci nie zdali egzaminu.

Tu spotykamy się z użyciem nazwy ogólnej 'egzamin' w roli nazwy indywidualnej. Mówimy o jakimś konkretnym egzaminie, określonym przez kontekst wypowiedzi. Wobec tego wprowadzamy stałą e, oznaczającą ten egzamin.

Pierwszy schemat: $\exists_{P(x)} \neg R(x, e)$.

Drugi schemat: $\exists_x (P(x) \wedge \neg R(x, e))$

Zadanie. Utwórz schematy logiczne następujących zdań (zachowując podaną symbolikę). Ignorujemy liczbę mnogą, rozumiejąc 'wszyscy' jako $\forall$, 'niektórzy' jako $\exists$.

1. Niektórzy studenci zaliczyli wszystkie ćwiczenia.
2. Każdy student zaliczył ćwiczenia. (trzeba dodać stałą c, oznaczającą konkretne ćwiczenia)

3. Niektórzy studenci zaliczyli wszystkie ćwiczenia, lecz nie zdali wszystkich egzaminów. ('lecz' to koniunkcja)

4. Pewien egzamin zdali wszyscy studenci, którzy zaliczyli wszystkie ćwiczenia.

Logika i teoria mnogości

Ćwiczenia 7

Kwantyfikatory w matematyce

Omówimy przykłady stosowania kwantyfikatorów w matematyce. Rozważmy język arytmetyki. Podstawowe pojęcia to predykat $=$ (równość), działania $+$ (dodawanie) i $\cdot$ (mnożenie) oraz nazwy liczb $0, 1, 2$ itd. Zakresem zmiennych x, y, z (także z indeksami) jest zbiór liczb naturalnych, czyli nieujemnych liczb całkowitych.

Możemy definiować inne predykaty.

Predykat $\neq$ (różność). Definicja: $x \neq y \Leftrightarrow \neg(x = y)$.

Każdą definicję tego rodzaju traktujemy jako formułę ogólnie prawdziwą, czyli prawdziwą dla wszystkich wartości zmiennych wolnych. Zatem możemy dodać ogólną kwantyfikację całej równoważności: $\forall_x \forall_y (x \neq y \Leftrightarrow \neg(x = y))$. Często takie dwie kolejne kwantyfikacje zapisujemy $\forall_{x,y}$ i podobnie dla $\exists$.

Predykat $\leq$ (niewiększość). Definicja: $x \leq y \Leftrightarrow \exists_z (x + z = y)$.

Ponieważ ta formuła jest ogólnie prawdziwa, wiec ogólnie prawdziwe są też dowolne formuły, powstające przez podstawienie za x, y termów tego języka (na mocy reguły podstawiania, podanej na wykładzie).

Przykłady:
$0 \leq 1 \Leftrightarrow \exists_z (0 + z = 1)$; podstawiono $x/0, y/1$.
$y \leq x \Leftrightarrow \exists_z (y + z = x)$; podstawiono $x/y, y/x$.
$x \leq x + y \Leftrightarrow \exists_z (x + z = x + y)$; podstawiono $y/x + y$.

Chcemy otrzymać równoważność, definiującą $z \leq y$. Nie można po prostu podstawić x/z w naszej definicji, bo nastąpi kolizja zmiennych przy podstawianiu: zmienna x jest wolna po prawej stronie, a gdy zamienimy ją na z, stanie się związana. Na mocy praw zamiany zmiennych związanych, prawa strona definicji jest logicznie równoważna $\exists_{z'} (x + z' = y)$. Wobec tego, nasza definicja jest logicznie równoważna formule $x \leq y \Leftrightarrow \exists_{z'} (x + z' = y)$. W tej formule możemy podstawić x/z, otrzymując $z \leq y \Leftrightarrow \exists_{z'} (z + z' = y)$.

Ten przykład ilustruje ogólną zasadę. Gdy mamy podstawić za zmienną w formule term, który spowoduje kolizję zmiennych, należy najpierw dokonać zamiany zmiennych związanych w tej formule, żeby nie było kolizji zmiennych (nie zmieniamy termu).

Predykat $<$ (mniejszość).
Definicja: $x < y \Leftrightarrow x \leq y \wedge x \neq y$.
Wykorzystaliśmy zdefiniowany predykat $\neq$.

Predykat $>$ (większość).
Definicja: $x > y \Leftrightarrow y < x$.

Predykat $|$ (podzielność). $x|y$ czytamy: x jest dzielnikiem y lub: x dzieli y.
Definicja: $x|y \Leftrightarrow \exists_z (x \cdot z = y)$. Zauważ, że zgodnie z tą definicją $0|0$ jest prawdą, ale $0|k$ jest fałszem dla $k \neq 0$.

Predykat Pr. Znaczenie $Pr(x) : x$ jest liczbą pierwszą.
Definicja: $Pr(x) \Leftrightarrow \ x > 1 \wedge \forall_y (y|x \Rightarrow y = 1 \vee y = x)$.

Predykat Pa. Znaczenie $Pa(x) : x$ jest liczbą parzystą.
Definicja: $Pa(x) \Leftrightarrow \exists_y (x = y + y)$.

Zadanie Napisać definicje następujących predykatów (stosując predykaty, działania i stałe dla liczb, podane powyżej).

1. $K(x) : x$ jest kwadratem pewnej liczby.

2. $S(x) : x$ jest sumą kwadratów dwóch liczb.

3. $WP(x, y)$: liczby x i y są względnie pierwsze (tzn. obie są większe od 0 i jedynym ich wspólnym dzielnikiem jest 1).

4. $MIN(x, y, z) : x = min(y, z)$. Tu nie wolno zastosować symbolu min, który nie został przez nas zdefiniowany, lecz napisać równoważną definicję, stosujacą zdefiniowane predykaty. Wskazówka: nie potrzeba kwantyfikatorów.

5. $MAX(x, y, z) : x = max(y, z)$.

6. $NWD(x, y, z) : x$ jest największym wspólnym dzielnikiem y i z.

Logika i teoria mnogości

Ćwiczenia 8

Prawa dla kwantyfikatorów

Negacyjna postać normalna

Najpierw, stosując prawa rachunku zdań i prawa De Morgana dla kwantyfikatorów, będziemy sprowadzać formuły do negacyjnej postaci normalnej (NPN), czyli postaci, w której występuję tylko $\neg, \wedge, \vee, \forall, \exists$, przy czym negacja występuje tylko przy formułach atomowych.

Etap 1. Eliminacja $\Leftrightarrow$ i $\Rightarrow$ jak w rachunku zdań.

Etap 2. Wprowadzanie negacji "do środka" przy pomocy praw De Morgana w rachunku zdań i dla kwantyfikatorów:

$$\neg\forall_x \varphi(x) \Leftrightarrow \exists_x \neg\varphi(x)$$

$$\neg\exists_x \varphi(x) \Leftrightarrow \forall_x \neg\varphi(x)$$

Zadanie 1. Sprowadzić następujace formuły domknięte do NPN.

(a) $\neg\forall_x (P(x) \Rightarrow Q(x))$,

(b) $\neg\forall_x (\exists_y P(x,y) \Rightarrow \exists_y Q(x,y))$,

(c) $\neg\forall_x \forall_y (P(x,y) \Rightarrow Q(x,y))$.

Rozwiazania

(a)

$\neg\forall_x (P(x) \Rightarrow Q(x))$

$\neg\forall_x (\neg P(x) \vee Q(x))$

$\exists_x \neg(\neg P(x) \vee Q(x))$

$\exists_x (P(x) \wedge \neg Q(x))$

Uwaga: Zdania są logicznie równoważne, jeżeli ich schematy są logicznie równoważne. Zatem zdanie 'Nieprawda, że każdy student jest sportowcem' (schemat: pierwsza formuła) jest logicznie równoważne zdaniu 'Pewien student nie jest sportowcem' (schemat: ostatnia formuła). Zakres zmiennych: zbiór ludzi.

(b)

$\neg\forall_x (\exists_y P(x,y) \Rightarrow \exists_y Q(x,y))$

$\neg\forall_x (\neg\exists_y P(x,y) \vee \exists_y Q(x,y))$

$\exists_x \neg(\neg\exists_y P(x,y) \vee \exists_y Q(x,y))$

$\exists_x(\exists_y P(x,y) \wedge \neg\exists_y Q(x,y))$
$\exists_x(\exists_y P(x,y) \wedge \forall_y \neg Q(x,y))$

Na przykład, zdanie 'Nieprawda, że każda liczba naturalna, będąca sześcianem pewnej liczby naturalnej, jest kwadratem pewnej liczby naturalnej' jest logicznie równoważne zdaniu 'Istnieje liczba naturalna, która jest sześcianem pewnej liczby naturalnej, lecz nie jest kwadratem żadnej liczby naturalnej'. Tu $P(x,y)$ znaczy: $x = y^3$, $Q(x,y)$ znaczy $x = y^2$. Zakres zmiennych: zbiór liczb naturalnych.

(c)
$\neg\forall_x\forall_y(P(x,y) \Rightarrow Q(x,y))$
$\neg\forall_x\forall_y(\neg P(x,y) \vee Q(x,y))$
$\exists_x\neg\forall_y(\neg P(x,y) \vee Q(x,y))$
$\exists_x\exists_y\neg(\neg P(x,y) \vee Q(x,y))$
$\exists_x\exists_y(P(x,y) \wedge \neg Q(x,y))$

Na przykład, zdanie 'Nieprawda, że wszyscy studenci, którzy się znają, lubią się' jest logicznie równoważne zdaniu 'Niektórzy studenci, którzy się znają, nie lubią się'. Uwaga: W przykładach z wcześniejszych ćwiczeń traktowaliśmy 'niektórzy studenci' jako jeden ograniczony kwantyfikator istnienia, ale tu trzeba wprowadzić dwie zmienne, ponieważ 'zna' i 'lubi' są stosunkami dwuargumentowymi. Zakres zmiennych: zbiór studentów.

Preneksowa postać normalna

Można zrobić więcej: sprowadzić formułę do preneksowej postaci normalnej (PPN), czyli postaci, w której wszystkie kwantyfikatory stanowią prefiks kwantyfikatorowy, działający na formułę bez kwantyfikatorów w NPN:

$$K1_{x_1} \dots Kn_{x_n}\varphi$$

gdzie $Ki \in \{\forall, \exists\}$ jest bez kwantyfikatorów (formuła otwarta) w NPN.

Etap 1. Sprowadzamy formułę do NPN jak wyżej.

Etap 2. Wyprowadzamy wszystkie kwantyfikatory na zewnątrz, stosujac prawa rozdzielności kwantyfikatorów:

$$\forall_x\varphi(x) \wedge \forall_x\psi(x) \Leftrightarrow \forall_x(\varphi(x) \wedge \psi(x))$$
$$\exists_x\varphi(x) \vee \exists_x\psi(x) \Leftrightarrow \exists_x(\varphi(x) \vee \psi(x))$$

i prawa wyłączania kwantyfikatorów przed nawias:

$$\forall_x\varphi(x) \wedge \psi \Leftrightarrow \forall_x(\varphi(x) \wedge \psi)$$
$$\forall_x\varphi(x) \vee \psi \Leftrightarrow \forall_x(\varphi(x) \vee \psi)$$
$$\exists_x\varphi(x) \wedge \psi \Leftrightarrow \exists_x(\varphi(x) \wedge \psi)$$
$$\exists_x\varphi(x) \vee \psi \Leftrightarrow \exists_x(\varphi(x) \vee \psi)$$

gdzie ψ jest formułą, w której x nie jest wolne. Ponieważ $\wedge$ i $\vee$ są przemienne, mamy też przestawione wersje tych praw, w których ψ jest lewym argumentem.

Gdy pojawi się formuła $\forall_x \varphi(x) \wedge \psi(x)$ i x jest wolne w $\psi(x)$, musimy najpierw zmienić zmienną związaną x w $\forall_x \varphi(x)$ na inną zmienną, która nie jest wolna w $\psi(x)$, podobnie dla $\vee$ oraz kombinacji $\exists$ z $\wedge, \vee$. Stosujemy prawa zamiany zmiennych związanych.

$$\forall_x \varphi(x) \Leftrightarrow \forall_y \varphi(y)$$

$$\exists_x \varphi(x) \Leftrightarrow \exists_y \varphi(y)$$

Tu są warunki ograniczające (patrz wykład, rozdział 8), ale w praktyce wybiera się nową zmienną, która nie wystepuje w rozważanej formule.

Przykład. NPN uzyskane w zadaniu 1 (a) i (c) już są w PPN. Sprowadzimy do PPN NPN z zadania 1(b).

$\exists_x (\exists_y P(x, y) \wedge \forall_y \neg Q(x, y))$

$\exists_x \exists_y (P(x, y) \wedge \forall_y \neg Q(x, y))$

Nie można "przeciagnąć" $\forall_y$ przez $P(x, y)$, bo y jest wolne w $P(x, y)$.

Zmieniamy zmienną y w $\forall_y \neg Q(x, y)$ na z.

$\exists_x \exists_y (P(x, y) \wedge \forall_z \neg Q(x, z))$

Teraz już można wyciagnąć $\forall_z$ przed nawias.

$\exists_x \exists_y \forall_z (P(x, y) \wedge \neg Q(x, z))$

Zadanie 2. Sprowadzić do PPN następujące formuły.

(a) $\exists_x P(x) \vee \exists_x Q(x)$.

Podamy rozwiązanie (nie przepisujemy formuły). Wystarczy zastosować raz prawo rozdzielności $\exists$ względem $\vee$.

$\exists_x (P(x) \vee Q(x))$.

Prawa rozdzielności można zastąpić prawami wyłączania kwantyfikatorów przed nawias, ale dostajemy dłuższe formuły.

$\exists_x P(x) \vee \exists_y Q(y)$

$\exists_x \exists_y (P(x) \vee Q(y))$

Uwaga: $\exists_y \exists_x (P(x) \vee Q(y))$ też jest dobrze. Gdy kwantyfikatory występują niezależnie, można je wyciągać w dowolnej kolejności. Gdy jednak mamy $\forall_x \exists_y$ nie można wyciagnąć $\exists_y$ przed $\forall_x$.

(b) $\forall_x P(x) \vee \forall_x Q(x)$.

Rozwiązanie: Nie można zastosować prawa rozdzielności.

$\forall_x P(x) \vee \forall_y Q(y)$

$\forall_x \forall_y (P(x) \vee Q(y))$ Ta formuła jest logicznie równoważna pierwszej, czyli $\Leftrightarrow$ jest prawem logiki.

(c) $\forall_x (P(x) \Rightarrow Q(x)) \Rightarrow (\forall_x P(x) \Rightarrow \forall_x Q(x))$.

Rozwiazanie: Sprowadzamy do NPN.

$\neg \forall_x (P(x) \Rightarrow Q(x)) \vee (\forall_x P(x) \Rightarrow \forall_x Q(x))$

$\neg \forall_x (\neg P(x) \vee Q(x)) \vee \neg \forall_x P(x) \vee \forall_x Q(x)$

$\exists_x (P(x) \wedge \neg Q(x)) \vee \exists_x \neg P(x) \vee \forall_x Q(x)$ NPN

$\exists_x ((P(x) \wedge \neg Q(x)) \vee \neg P(x)) \vee \forall_x Q(x)$

$\exists_x ((P(x) \wedge \neg Q(x)) \vee \neg P(x)) \vee \forall_y Q(y)$ Zamieniliśmy x na y w $\forall_x Q(x)$.

$\exists_x\forall_y((P(x) \wedge \neg Q(x)) \vee \neg P(x) \vee Q(y))$ PPN
Dobrze jest też $\forall_y\exists_x$ (ale mniej naturalne).

Inne przekształcenia równoważnościowe

Podobnie jak w rachunku zdań możemy wyprowadzać prawa równoważnościowe metodą przekształceń równoważnościowych. Najpierw zajmiemy się prawami wyłączania kwantyfikatorów przed nawias dla implikacji. Opieramy się na analogicznych prawach dla koniunkcji i alternatywy, stosowanych już przy sprowadzaniu do PPN.

Zadanie 3. Metodą przekształceń równoważnościowych wyprowadzić następujące prawa logiki (zakładamy, że x nie jest wolne w ψ).
(a) $(\forall_x\varphi(x) \Rightarrow \psi) \Leftrightarrow \exists_x(\varphi(x) \Rightarrow \psi)$
(b) $(\psi \Rightarrow \forall_x\varphi(x)) \Leftrightarrow \forall_x(\psi \Rightarrow \varphi(x))$

Rozwiązania:
(a)
$\forall_x\varphi(x) \Rightarrow \psi$ lewa strona równoważności
$\neg\forall_x\varphi(x) \vee \psi$ Eliminujemy $\Rightarrow$.
$\exists_x\neg\varphi(x) \vee \psi$ Stosujemy prawo De Morgana.
$\exists_x(\neg\varphi(x) \vee \psi)$ Stosujemy prawo wyłączania $\exists$ przed nawias dla $\vee$.
$\exists_x(\varphi(x) \Rightarrow \psi)$ Wprowadzamy $\Rightarrow$.

(b)
$\psi \Rightarrow \forall_x\varphi(x)$
$\neg\psi \vee \forall_x\varphi(x)$
$\forall_x(\neg\psi \vee \varphi(x))$ Stosujemy prawo wyłączania $\forall$ przed nawias dla $\vee$ (przestawione).
$\forall_x(\psi \Rightarrow \varphi(x))$

Podobnie możemy wyprowadzać prawa dla kwantyfikatorów ograniczonych, opierając się na analogicznych prawach dla kwantyfikatorów $\forall_x, \exists_x$.

Zadanie 4. Tą samą metodą wyprowadzić następujące prawa dla kwantyfikatorów ograniczonych.
(a) $\neg\forall_{\varphi(x)}\psi(x) \Leftrightarrow \exists_{\varphi(x)}\neg\psi(x)$
(b) $\forall_{\varphi(x)}(\psi(x) \wedge \chi(x)) \Leftrightarrow \forall_{\varphi(x)}\psi(x) \wedge \forall_{\varphi(x)}\chi(x)$