Matematyka dyskretna
6. Tożsamości kombinatoryczne

26.11.2020

Na czym polega dowodzenie **tożsamości kombinatorycznych**?

Główna idea opiera się na możliwości **zliczania** pewnej rodziny obiektów **na różne sposoby**.

A zatem znajdujemy **interpretację kombinatoryczną** jednej ze stron tożsamości. Następnie pokazujemy, że ta interpretacja odpowiada również drugiej stronie.

Klasyczny przykład:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

Zliczamy wszystkie podzbiory zbioru n-elementowego.

Na czym polega dowodzenie **tożsamości kombinatorycznych**?

Główna idea opiera się na możliwości **zliczania** pewnej rodziny obiektów **na różne sposoby**.

A zatem znajdujemy **interpretację kombinatoryczną** jednej ze stron tożsamości. Następnie pokazujemy, że ta interpretacja odpowiada również drugiej stronie.

Klasyczny przykład:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

Zliczamy wszystkie podzbiory zbioru n-elementowego.

Na czym polega dowodzenie **tożsamości kombinatorycznych**?

Główna idea opiera się na możliwości **zliczania** pewnej rodziny obiektów **na różne sposoby**.

A zatem znajdujemy **interpretację kombinatoryczną** jednej ze stron tożsamości. Następnie pokazujemy, że ta interpretacja odpowiada również drugiej stronie.

Klasyczny przykład:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

Zliczamy wszystkie podzbiory zbioru n-elementowego.

Na czym polega dowodzenie **tożsamości kombinatorycznych**?

Główna idea opiera się na możliwości **zliczania** pewnej rodziny obiektów **na różne sposoby**.

A zatem znajdujemy **interpretację kombinatoryczną** jednej ze stron tożsamości. Następnie pokazujemy, że ta interpretacja odpowiada również drugiej stronie.

Klasyczny przykład:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

Zliczamy wszystkie podzbiory zbioru n-elementowego.

Na czym polega dowodzenie **tożsamości kombinatorycznych**?

Główna idea opiera się na możliwości **zliczania** pewnej rodziny obiektów **na różne sposoby**.

A zatem znajdujemy **interpretację kombinatoryczną** jednej ze stron tożsamości. Następnie pokazujemy, że ta interpretacja odpowiada również drugiej stronie.

Klasyczny przykład:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

Zliczamy wszystkie podzbiory zbioru n-elementowego.

Na czym polega dowodzenie **tożsamości kombinatorycznych**?

Główna idea opiera się na możliwości **zliczania** pewnej rodziny obiektów **na różne sposoby**.

A zatem znajdujemy **interpretację kombinatoryczną** jednej ze stron tożsamości. Następnie pokazujemy, że ta interpretacja odpowiada również drugiej stronie.

Klasyczny przykład:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

Zliczamy wszystkie podzbiory zbioru n-elementowego.

Zadanie

Udowodnij **kombinatorycznie** *podaną tożsamość:*

$$n\binom{n-1}{k-1} = k\binom{n}{k}, \quad 1 \leqslant k \leqslant n.$$

Pytanie: Co możemy zliczyć za pomocą wyrażenia $n\binom{n-1}{k-1}$?

Pytanie: Co możemy zliczyć za pomocą wyrażenia $n\binom{n-1}{k-1}$?

Pytanie: Czemu z kolei odpowiada wyrażenie $k\binom{n}{k}$?

Niech A będzie n-elementowym zbiorem.

Niech A będzie n-elementowym zbiorem.

Wówczas $n\binom{n-1}{k-1}$ zlicza na ile sposobów możemy wybrać:

Niech A będzie n-elementowym zbiorem.

Wówczas $n\binom{n-1}{k-1}$ zlicza na ile sposobów możemy wybrać:

- ustalony element $x \in A$,

Niech A będzie n-elementowym zbiorem.

Wówczas $n\binom{n-1}{k-1}$ zlicza na ile sposobów możemy wybrać:

- ustalony element $x \in A$,
- oraz $k-1$ elementowy podzbiór $B \subseteq A \setminus \{x\}$.

Niech A będzie n-elementowym zbiorem.

Wówczas $n\binom{n-1}{k-1}$ zlicza na ile sposobów możemy wybrać:

- ustalony element $x \in A$,
- oraz $k-1$ elementowy podzbiór $B \subseteq A \setminus \{x\}$.

Inna interpretacja:

Niech A będzie n-elementowym zbiorem.

Wówczas $n\binom{n-1}{k-1}$ zlicza na ile sposobów możemy wybrać:

- ustalony element $x \in A$,
- oraz $k-1$ elementowy podzbiór $B \subseteq A \setminus \{x\}$.

Inna interpretacja: spośród n osób wybieramy kapitana drużyny na n sposobów,

Niech A będzie n-elementowym zbiorem.

Wówczas $n\binom{n-1}{k-1}$ zlicza na ile sposobów możemy wybrać:

- ustalony element $x \in A$,
- oraz $k-1$ elementowy podzbiór $B \subseteq A \setminus \{x\}$.

Inna interpretacja: spośród n osób wybieramy kapitana drużyny na n sposobów, po czym dobieramy mu $k-1$ pozostałych członków drużyny na $\binom{n-1}{k-1}$ sposobów.

Możemy też dokonać wyboru w innej kolejności.

Możemy też dokonać wyboru w innej kolejności.

$k\binom{n}{k} = \binom{n}{k}k$ zlicza na ile sposobów możemy wybrać:

Możemy też dokonać wyboru w innej kolejności.

$k\binom{n}{k} = \binom{n}{k}k$ zlicza na ile sposobów możemy wybrać:

- k-elementowy podzbiór B' zbioru A, czyli $B' \subseteq A$,

Możemy też dokonać wyboru w innej kolejności.

$k\binom{n}{k} = \binom{n}{k}k$ zlicza na ile sposobów możemy wybrać:

- k-elementowy podzbiór B' zbioru A, czyli $B' \subseteq A$,
- ustalony element x z tego podzbioru, $x \in B'$.

Możemy też dokonać wyboru w innej kolejności.

$k\binom{n}{k} = \binom{n}{k}k$ zlicza na ile sposobów możemy wybrać:

- k-elementowy podzbiór B' zbioru A, czyli $B' \subseteq A$,
- ustalony element x z tego podzbioru, $x \in B'$.

Przyjmując $B' = B \cup \{x\}$ widzimy, że zliczamy dokładnie to samo co na poprzednim slajdzie.

Możemy też dokonać wyboru w innej kolejności.

$k\binom{n}{k} = \binom{n}{k}k$ zlicza na ile sposobów możemy wybrać:

- k-elementowy podzbiór B' zbioru A, czyli $B' \subseteq A$,
- ustalony element x z tego podzbioru, $x \in B'$.

Przyjmując $B' = B \cup \{x\}$ widzimy, że zliczamy dokładnie to samo co na poprzednim slajdzie.

Inna interpretacja:

Możemy też dokonać wyboru w innej kolejności.

$k\binom{n}{k} = \binom{n}{k}k$ zlicza na ile sposobów możemy wybrać:

- k-elementowy podzbiór B' zbioru A, czyli $B' \subseteq A$,
- ustalony element x z tego podzbioru, $x \in B'$.

Przyjmując $B' = B \cup \{x\}$ widzimy, że zliczamy dokładnie to samo co na poprzednim slajdzie.

Inna interpretacja: spośród n osób wybieramy k-elementową drużynę na $\binom{n}{k}$ sposobów,

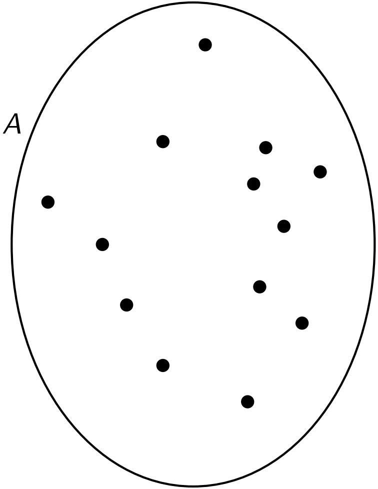
Możemy też dokonać wyboru w innej kolejności.

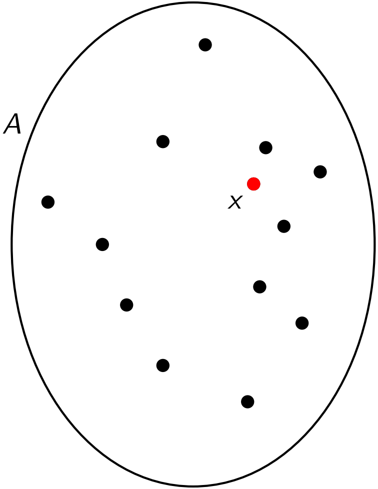
$k\binom{n}{k} = \binom{n}{k}k$ zlicza na ile sposobów możemy wybrać:

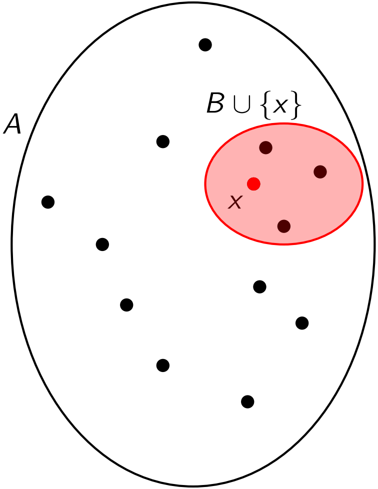
- k-elementowy podzbiór B' zbioru A, czyli $B' \subseteq A$,
- ustalony element x z tego podzbioru, $x \in B'$.

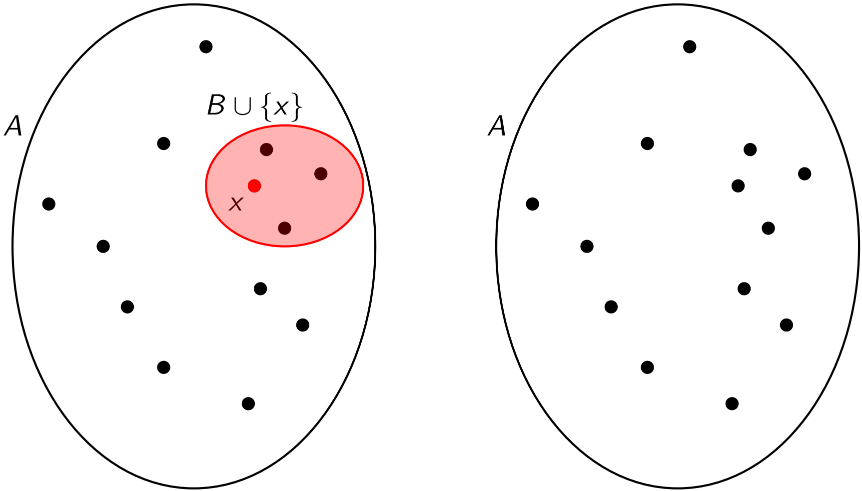
Przyjmując $B' = B \cup \{x\}$ widzimy, że zliczamy dokładnie to samo co na poprzednim slajdzie.

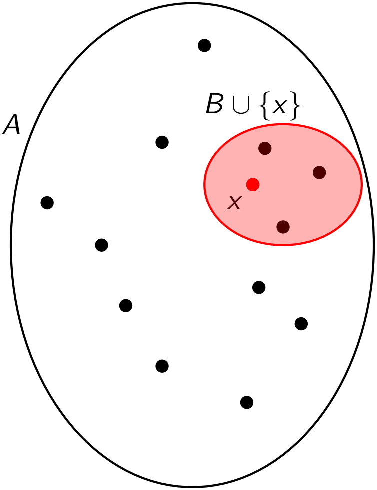
Inna interpretacja: spośród n osób wybieramy k-elementową drużynę na $\binom{n}{k}$ sposobów, po czym ustalamy kto będzie kapitanem na k sposobów.

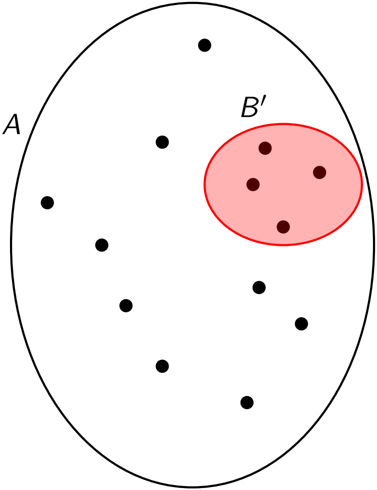

A

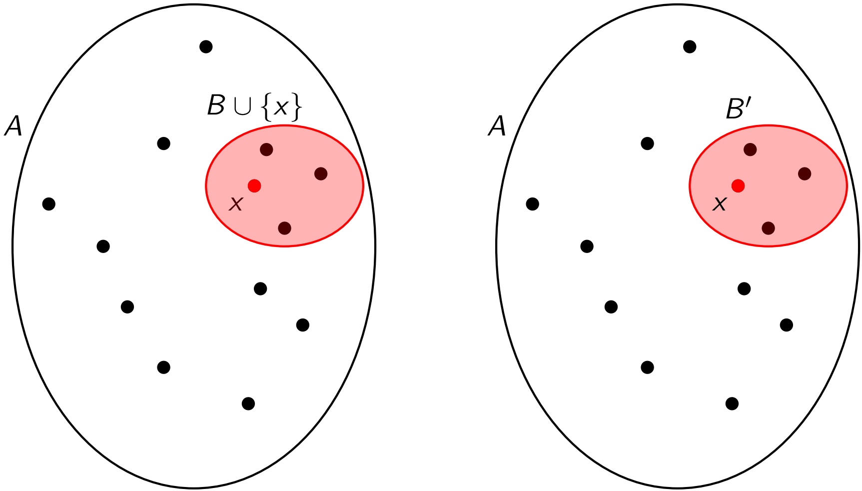

A
x


A
$B \cup \{x\}$
x


A
$B \cup \{x\}$
x
A


A
$B \cup \{x\}$
x


A
B'


A
$B \cup \{x\}$
x
A
B'
x

Zadanie

Udowodnij **kombinatorycznie** *podaną tożsamość:*

$$\sum_{k=2}^{n} (k)_2 \binom{n}{k} = (n)_2 2^{n-2}, \quad n \geqslant 2.$$

Pytanie: Co możemy zliczyć za pomocą wyrażenia

$$(n)_2 2^{n-2} = n(n-1)2^{n-2}\,?$$

Pytanie: Co możemy zliczyć za pomocą wyrażenia

$$(n)_2 2^{n-2} = n(n-1)2^{n-2}\,?$$

Rozważmy n elementowy zbiór A.

Pytanie: Co możemy zliczyć za pomocą wyrażenia

$$(n)_2 2^{n-2} = n(n-1)2^{n-2}\,?$$

Rozważmy n elementowy zbiór A.

- na n sposobów ustalamy pierwszy element tego zbioru: $x \in A$,

Pytanie: Co możemy zliczyć za pomocą wyrażenia

$$(n)_2 2^{n-2} = n(n-1)2^{n-2}\,?$$

Rozważmy n elementowy zbiór A.

- na n sposobów ustalamy pierwszy element tego zbioru: $x \in A$,
- następnie na $n-1$ sposobów ustalamy drugi element: $y \in A \setminus \{x\}$,

Pytanie: Co możemy zliczyć za pomocą wyrażenia

$$(n)_2 2^{n-2} = n(n-1)2^{n-2}\,?$$

Rozważmy n elementowy zbiór A.

- na n sposobów ustalamy pierwszy element tego zbioru: $x \in A$,
- następnie na $n-1$ sposobów ustalamy drugi element: $y \in A \setminus \{x\}$,
- dla każdego z pozostałych $n-2$ elementów z $A \setminus \{x, y\}$ na 2 sposoby ustalamy, czy dany element zostanie wybrany czy nie.

Pytanie: Co możemy zliczyć za pomocą wyrażenia

$$(n)_2 2^{n-2} = n(n-1)2^{n-2}\,?$$

Rozważmy n elementowy zbiór A.

- na n sposobów ustalamy pierwszy element tego zbioru: $x \in A$,
- następnie na $n-1$ sposobów ustalamy drugi element: $y \in A \setminus \{x\}$,
- dla każdego z pozostałych $n-2$ elementów z $A \setminus \{x, y\}$ na 2 sposoby ustalamy, czy dany element zostanie wybrany czy nie.

Pytanie: Co wybraliśmy w ten sposób?

Pytanie: Co możemy zliczyć za pomocą wyrażenia

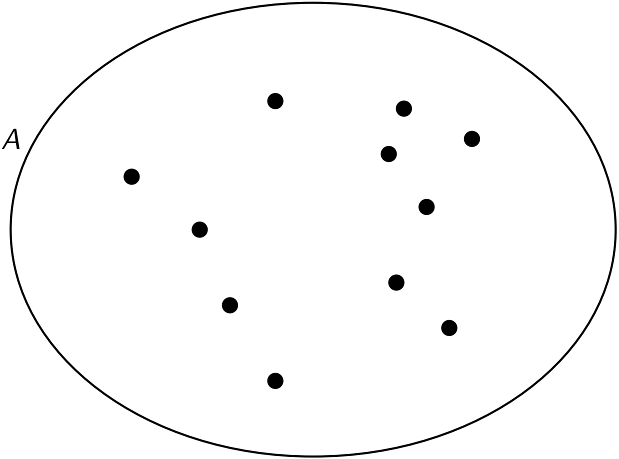
$$(n)_2 2^{n-2} = n(n-1)2^{n-2}\,?$$

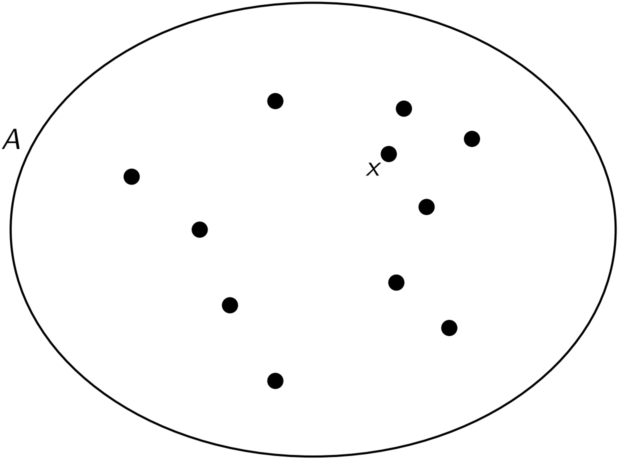
Rozważmy n elementowy zbiór A.

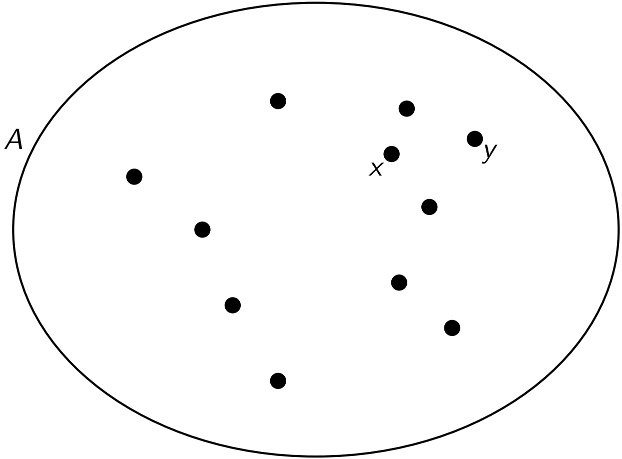
- na n sposobów ustalamy pierwszy element tego zbioru: $x \in A$,
- następnie na $n-1$ sposobów ustalamy drugi element: $y \in A \setminus \{x\}$,
- dla każdego z pozostałych $n-2$ elementów z $A \setminus \{x, y\}$ na 2 sposoby ustalamy, czy dany element zostanie wybrany czy nie.

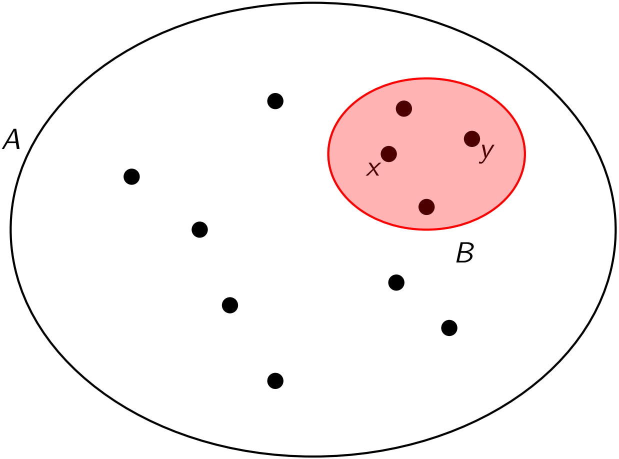
Pytanie: Co wybraliśmy w ten sposób?

Wybraliśmy podzbiór $B \subseteq A$ wraz z **uporządkowaną** parą elementów (x, y), t.że $x, y \in B$.


A


A
x


A
x
y


A
x
y
B

Pytanie: Jak inaczej można wybrać taki podzbiór B wraz z ustaloną uporządkowaną parą elementów (x, y)?

Pytanie: Jak inaczej można wybrać taki podzbiór B wraz z ustaloną uporządkowaną parą elementów (x, y)?

- najpierw ustalamy rozmiar k podzbioru B:

Pytanie: Jak inaczej można wybrać taki podzbiór B wraz z ustaloną uporządkowaną parą elementów (x, y)?

- najpierw ustalamy rozmiar k podzbioru B: $k = 2, 3, \ldots, n$,

Pytanie: Jak inaczej można wybrać taki podzbiór B wraz z ustaloną uporządkowaną parą elementów (x, y)?

- najpierw ustalamy rozmiar k podzbioru B: $k = 2, 3, \ldots, n$,
- następnie wybieramy k-elementowy podzbiór $B \subseteq A$ na

Pytanie: Jak inaczej można wybrać taki podzbiór B wraz z ustaloną uporządkowaną parą elementów (x, y)?

- najpierw ustalamy rozmiar k podzbioru B: $k = 2, 3, \dots, n$,
- następnie wybieramy k-elementowy podzbiór $B \subseteq A$ na $\binom{n}{k}$ sposobów,

Pytanie: Jak inaczej można wybrać taki podzbiór B wraz z ustaloną uporządkowaną parą elementów (x, y)?

- najpierw ustalamy rozmiar k podzbioru B: $k = 2, 3, \ldots, n$,
- następnie wybieramy k-elementowy podzbiór $B \subseteq A$ na $\binom{n}{k}$ sposobów,
- ustalamy pierwszy element pary, czyli $x \in B$, na

Pytanie: Jak inaczej można wybrać taki podzbiór B wraz z ustaloną uporządkowaną parą elementów (x, y)?

- najpierw ustalamy rozmiar k podzbioru B: $k = 2, 3, \dots, n$,
- następnie wybieramy k-elementowy podzbiór $B \subseteq A$ na $\binom{n}{k}$ sposobów,
- ustalamy pierwszy element pary, czyli $x \in B$, na k sposobów,

Pytanie: Jak inaczej można wybrać taki podzbiór B wraz z ustaloną uporządkowaną parą elementów (x, y)?

- najpierw ustalamy rozmiar k podzbioru B: $k = 2, 3, \ldots, n$,
- następnie wybieramy k-elementowy podzbiór $B \subseteq A$ na $\binom{n}{k}$ sposobów,
- ustalamy pierwszy element pary, czyli $x \in B$, na k sposobów,
- oraz drugi element pary, czyli $y \in B \setminus \{x\}$, na

Pytanie: Jak inaczej można wybrać taki podzbiór B wraz z ustaloną uporządkowaną parą elementów (x, y)?

- najpierw ustalamy rozmiar k podzbioru B: $k = 2, 3, \ldots, n$,
- następnie wybieramy k-elementowy podzbiór $B \subseteq A$ na $\binom{n}{k}$ sposobów,
- ustalamy pierwszy element pary, czyli $x \in B$, na k sposobów,
- oraz drugi element pary, czyli $y \in B \setminus \{x\}$, na $k - 1$ sposobów.

Pytanie: Jak inaczej można wybrać taki podzbiór B wraz z ustaloną uporządkowaną parą elementów (x, y)?

- najpierw ustalamy rozmiar k podzbioru B: $k = 2, 3, \ldots, n$,
- następnie wybieramy k-elementowy podzbiór $B \subseteq A$ na $\binom{n}{k}$ sposobów,
- ustalamy pierwszy element pary, czyli $x \in B$, na k sposobów,
- oraz drugi element pary, czyli $y \in B \setminus \{x\}$, na $k - 1$ sposobów.

Sumaryczna liczba sposobów:

Pytanie: Jak inaczej można wybrać taki podzbiór B wraz z ustaloną uporządkowaną parą elementów (x, y)?

- najpierw ustalamy rozmiar k podzbioru B: $k = 2, 3, \ldots, n$,
- następnie wybieramy k-elementowy podzbiór $B \subseteq A$ na $\binom{n}{k}$ sposobów,
- ustalamy pierwszy element pary, czyli $x \in B$, na k sposobów,
- oraz drugi element pary, czyli $y \in B \setminus \{x\}$, na $k - 1$ sposobów.

Sumaryczna liczba sposobów:

$$\sum_{k=2}^{n}$$

Pytanie: Jak inaczej można wybrać taki podzbiór B wraz z ustaloną uporządkowaną parą elementów (x, y)?

- najpierw ustalamy rozmiar k podzbioru B: $k = 2, 3, \ldots, n$,
- następnie wybieramy k-elementowy podzbiór $B \subseteq A$ na $\binom{n}{k}$ sposobów,
- ustalamy pierwszy element pary, czyli $x \in B$, na k sposobów,
- oraz drugi element pary, czyli $y \in B \setminus \{x\}$, na $k - 1$ sposobów.

Sumaryczna liczba sposobów:

$$\sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k}$$

Pytanie: Jak inaczej można wybrać taki podzbiór B wraz z ustaloną uporządkowaną parą elementów (x, y)?

- najpierw ustalamy rozmiar k podzbioru B: $k = 2, 3, \ldots, n$,
- następnie wybieramy k-elementowy podzbiór $B \subseteq A$ na $\binom{n}{k}$ sposobów,
- ustalamy pierwszy element pary, czyli $x \in B$, na k sposobów,
- oraz drugi element pary, czyli $y \in B \setminus \{x\}$, na $k - 1$ sposobów.

Sumaryczna liczba sposobów:

$$\sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} \cdot k$$

Pytanie: Jak inaczej można wybrać taki podzbiór B wraz z ustaloną uporządkowaną parą elementów (x, y)?

- najpierw ustalamy rozmiar k podzbioru B: $k = 2, 3, \ldots, n$,
- następnie wybieramy k-elementowy podzbiór $B \subseteq A$ na $\binom{n}{k}$ sposobów,
- ustalamy pierwszy element pary, czyli $x \in B$, na k sposobów,
- oraz drugi element pary, czyli $y \in B \setminus \{x\}$, na $k - 1$ sposobów.

Sumaryczna liczba sposobów:

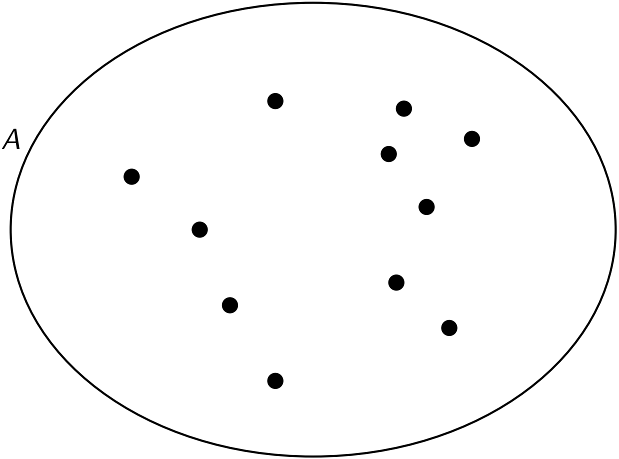
$$\sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} \cdot k \cdot (k-1)$$

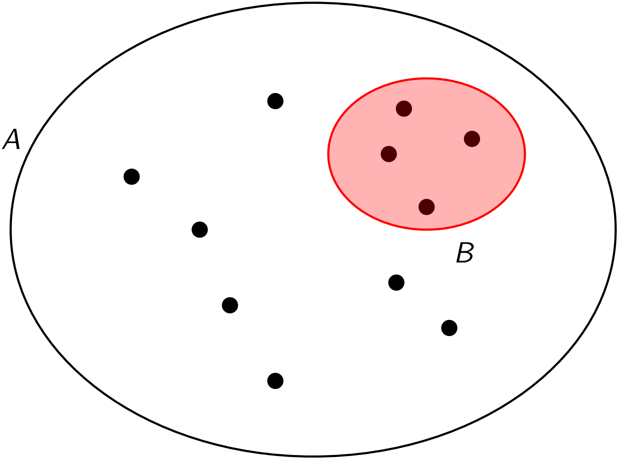
Pytanie: Jak inaczej można wybrać taki podzbiór B wraz z ustaloną uporządkowaną parą elementów (x, y)?

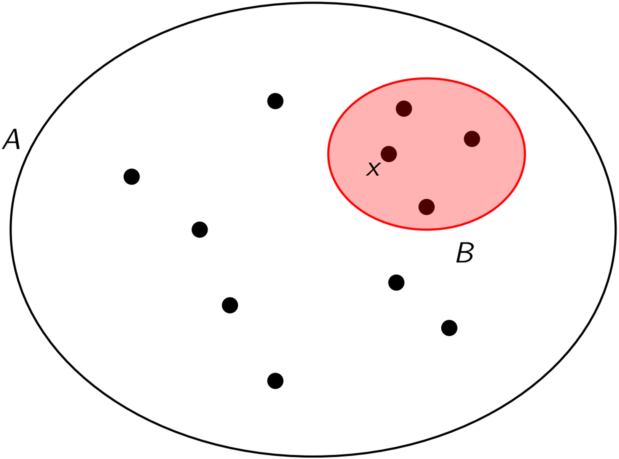
- najpierw ustalamy rozmiar k podzbioru B: $k = 2, 3, \ldots, n$,
- następnie wybieramy k-elementowy podzbiór $B \subseteq A$ na $\binom{n}{k}$ sposobów,
- ustalamy pierwszy element pary, czyli $x \in B$, na k sposobów,
- oraz drugi element pary, czyli $y \in B \setminus \{x\}$, na $k - 1$ sposobów.

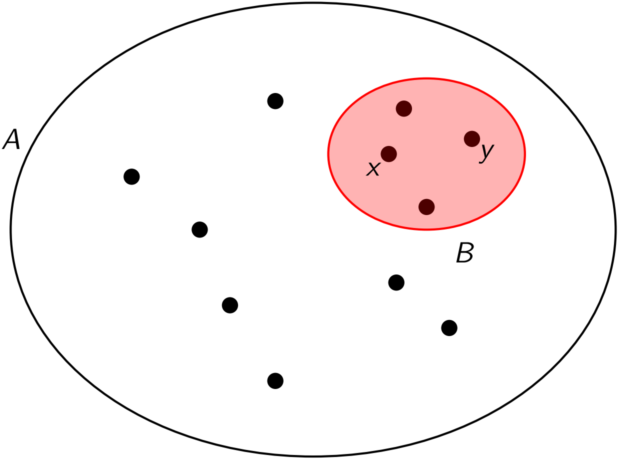
Sumaryczna liczba sposobów:

$$\sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} \cdot k \cdot (k-1) = \sum_{k=2}^{n} (k)_2 \binom{n}{k}$$


A


A
B


A
x
B


A
x
y
B

Pytanie: Czy potrafisz podać inną interpretację kombinatoryczną?

$$\sum_{k=2}^{n}(k)_2\binom{n}{k} = (n)_2 2^{n-2}, \quad n \geqslant 2.$$

Zadanie

Udowodnij **kombinatorycznie** *podaną tożsamość:*

$$\sum_{k=3}^{n} \binom{k-1}{2} = \binom{n}{3}, \quad n \geqslant 3.$$

$$\sum_{k=3}^{n} \binom{k-1}{2} = \binom{n}{3}, \quad n \geqslant 3.$$

W tym zadaniu łatwo można zinterpretować prawą stronę tożsamości.

$$\sum_{k=3}^{n} \binom{k-1}{2} = \binom{n}{3}, \quad n \geqslant 3.$$

W tym zadaniu łatwo można zinterpretować prawą stronę tożsamości.

$\binom{n}{3}$ to

$$\sum_{k=3}^{n} \binom{k-1}{2} = \binom{n}{3}, \quad n \geqslant 3.$$

W tym zadaniu łatwo można zinterpretować prawą stronę tożsamości.

$\binom{n}{3}$ to liczba wyborów trzech elementów zbioru n-elementowego

$$\sum_{k=3}^{n} \binom{k-1}{2} = \binom{n}{3}, \quad n \geqslant 3.$$

W tym zadaniu łatwo można zinterpretować prawą stronę tożsamości.

$\binom{n}{3}$ to liczba wyborów trzech elementów zbioru n-elementowego

- Jak to się ma do lewej strony tożsamości?

$$\sum_{k=3}^{n} \binom{k-1}{2} = \binom{n}{3}, \quad n \geqslant 3.$$

W tym zadaniu łatwo można zinterpretować prawą stronę tożsamości.

$\binom{n}{3}$ to liczba wyborów trzech elementów zbioru n-elementowego

- Jak to się ma do lewej strony tożsamości?
- Dlaczego $\binom{k-1}{2}$ skoro chcemy wybrać trzy elementy, a nie dwa?

$$\sum_{k=3}^{n} \binom{k-1}{2} = \binom{n}{3}, \quad n \geqslant 3.$$

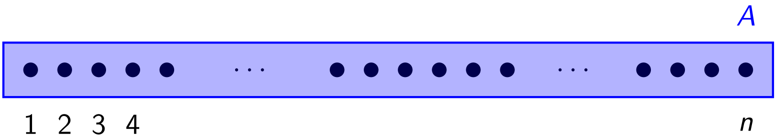
W tym zadaniu łatwo można zinterpretować prawą stronę tożsamości.

$\binom{n}{3}$ to liczba wyborów trzech elementów zbioru n-elementowego

- Jak to się ma do lewej strony tożsamości?
- Dlaczego $\binom{k-1}{2}$ skoro chcemy wybrać trzy elementy, a nie dwa?
- Gdzie jest trzeci element?

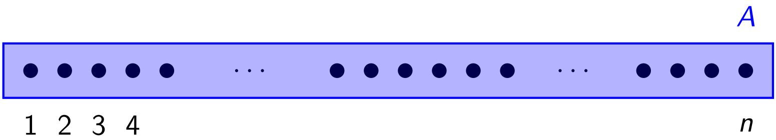
Załóżmy, że chcemy wybrać trzy elementy z **uporządkowanego** zbioru $A = \{1, 2, \ldots, n\}$.

X - 3-elementowy podzbiór zbioru A



Załóżmy, że chcemy wybrać trzy elementy z **uporządkowanego** zbioru $A = \{1, 2, \ldots, n\}$.

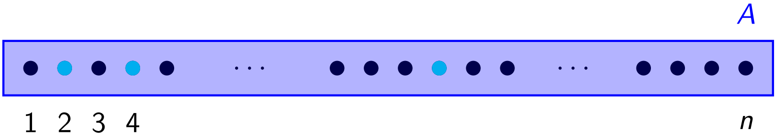
X - 3-elementowy podzbiór zbioru A



Możemy albo wybrać te elementy na raz,

Załóżmy, że chcemy wybrać trzy elementy z **uporządkowanego** zbioru $A = \{1, 2, \ldots, n\}$.

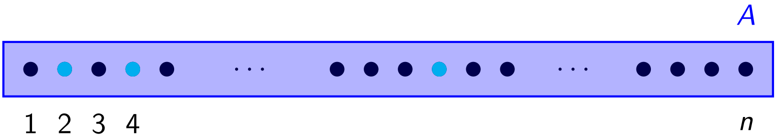
X - 3-elementowy podzbiór zbioru A



Możemy albo wybrać te elementy na raz,

Załóżmy, że chcemy wybrać trzy elementy z **uporządkowanego** zbioru $A = \{1, 2, \ldots, n\}$.

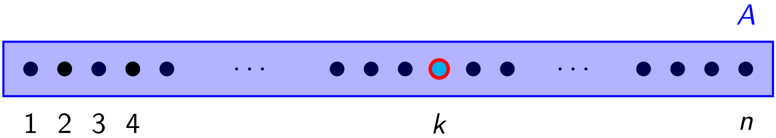
X - 3-elementowy podzbiór zbioru A



Możemy albo wybrać te elementy na raz, albo zacząć od ustalenia **największego** z nich.

Załóżmy, że chcemy wybrać trzy elementy z **uporządkowanego** zbioru $A = \{1, 2, \ldots, n\}$.

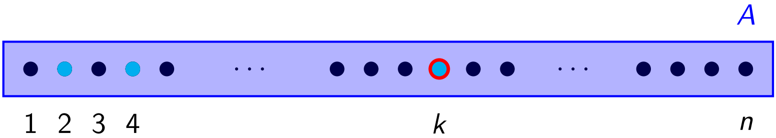
X - 3-elementowy podzbiór zbioru A



Możemy albo wybrać te elementy na raz, albo zacząć od ustalenia **największego** z nich.

Załóżmy, że chcemy wybrać trzy elementy z **uporządkowanego** zbioru $A = \{1, 2, \dots, n\}$.

X - 3-elementowy podzbiór zbioru A



Możemy albo wybrać te elementy na raz, albo zacząć od ustalenia **największego** z nich.

Jeśli k jest **największym elementem** spośród wybranych trzech, to pozostałe dwa elementy możemy wybrać na

Jeśli k jest **największym elementem** spośród wybranych trzech, to pozostałe dwa elementy możemy wybrać na $\binom{k-1}{2}$ sposobów.

Jeśli k jest **największym elementem** spośród wybranych trzech, to pozostałe dwa elementy możemy wybrać na $\binom{k-1}{2}$ sposobów.

Z kolei największy element k musi spełniać warunek

Jeśli k jest **największym elementem** spośród wybranych trzech, to pozostałe dwa elementy możemy wybrać na $\binom{k-1}{2}$ sposobów.

Z kolei największy element k musi spełniać warunek $k \geqslant 3$.

Jeśli k jest **największym elementem** spośród wybranych trzech, to pozostałe dwa elementy możemy wybrać na $\binom{k-1}{2}$ sposobów.

Z kolei największy element k musi spełniać warunek $k \geqslant 3$.

Zatem sumaryczna liczba wyborów trzech elementów z A to

Jeśli k jest **największym elementem** spośród wybranych trzech, to pozostałe dwa elementy możemy wybrać na $\binom{k-1}{2}$ sposobów.

Z kolei największy element k musi spełniać warunek $k \geqslant 3$.

Zatem sumaryczna liczba wyborów trzech elementów z A to

$$\sum_{k=3}^{n} \binom{k-1}{2}.$$

Pytanie: Czy potrafisz podać inną interpretację kombinatoryczną?

$$\sum_{k=3}^{n} \binom{k-1}{2} = \binom{n}{3}, \quad n \geqslant 3.$$

Zadanie

Rozpisz wyrażenie $(x + 2y + 3z)^4$ *i podaj współczynnik przy* x^2yz *oraz* x^3z.

$$(x + 2y + 3z)^4 =$$

$$(x+2y+3z)^4 = \left((x+2y+3z)^2\right)^2$$

$$
\begin{aligned}
(x+2y+3z)^4 &= \left((x+2y+3z)^2\right)^2 \\
&= (x^2+4y^2+9z^2+4xy+6xz+12yz)^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(x+2y+3z)^4 &= \left((x+2y+3z)^2\right)^2 \\
&= (x^2+4y^2+9z^2+4xy+6xz+12yz)^2 \\
&= x^4+16y^4+81z^4+16x^2y^2+36x^2z^2+144y^2z^2+
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}(x+2y+3z)^4 &= \left((x+2y+3z)^2\right)^2\\ &= (x^2+4y^2+9z^2+4xy+6xz+12yz)^2\\ &= x^4+16y^4+81z^4+16x^2y^2+36x^2z^2+144y^2z^2+\\ &\quad 8x^2y^2+18x^2z^2+8x^3y+12x^3z+24x^2yz+\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
(x+2y+3z)^4 = &\left((x+2y+3z)^2\right)^2 \\
= &\,(x^2+4y^2+9z^2+4xy+6xz+12yz)^2 \\
= &\,x^4+16y^4+81z^4+16x^2y^2+36x^2z^2+144y^2z^2+ \\
&\,8x^2y^2+18x^2z^2+8x^3y+12x^3z+24x^2yz+ \\
&\,72y^2z^2+32xy^3+48xy^2z+96y^3z+
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(x+2y+3z)^4 = &\left((x+2y+3z)^2\right)^2\\
=& \,(x^2+4y^2+9z^2+4xy+6xz+12yz)^2\\
=& \,x^4+16y^4+81z^4+16x^2y^2+36x^2z^2+144y^2z^2+\\
& 8x^2y^2+18x^2z^2+8x^3y+12x^3z+24x^2yz+\\
& 72y^2z^2+32xy^3+48xy^2z+96y^3z+\\
& 72xyz^2+108xz^3+216yz^3+
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(x+2y+3z)^4 = &\ \left((x+2y+3z)^2\right)^2 \\
&= (x^2+4y^2+9z^2+4xy+6xz+12yz)^2 \\
&= x^4+16y^4+81z^4+16x^2y^2+36x^2z^2+144y^2z^2+ \\
&\quad 8x^2y^2+18x^2z^2+8x^3y+12x^3z+24x^2yz+ \\
&\quad 72y^2z^2+32xy^3+48xy^2z+96y^3z+ \\
&\quad 72xyz^2+108xz^3+216yz^3+ \\
&\quad 48x^2yz+96xy^2z+144xyz^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(x+2y+3z)^4 &= \left((x+2y+3z)^2\right)^2 \\
&= x^4 + 16y^4 + 81z^4 + 24x^2y^2 + 54x^2z^2 + 216y^2z^2 \\
&+ 8x^3y + {\color{blue}12x^3z} + 32xy^3 + 96y^3z + 108xz^3 + 216yz^3 \\
&+ {\color{red}72x^2yz} + 144xy^2z + 216xyz^2
\end{aligned}
$$

Prostsza metoda

Aby obliczyć współczynnik przy $x_1^{t_1} x_2^{t_2} \ldots x_r^{t_r}$, $t_1 + t_2 + \ldots + t_r = n$, wielomianu $(a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_r x_r)^n$ wystarczy wyliczyć

$$\binom{n}{t_1, t_2, \ldots, t_r} a_1^{t_1} a_2^{t_2} \ldots a_r^{t_r}.$$

$$(x + 2y + 3z)^4$$

$$(x + 2y + 3z)^4$$

Współczynnik przy x^2yz to:

$$(x + 2y + 3z)^4$$

Współczynnik przy x^2yz to: $\binom{4}{2,1,1} \cdot 1^2 \cdot 2^1 \cdot 3^1 =$

$$(x + 2y + 3z)^4$$

Współczynnik przy x^2yz to: $\binom{4}{2,1,1} \cdot 1^2 \cdot 2^1 \cdot 3^1 = \frac{4!}{2!1!1!} \cdot 6 = 72$

$$(x + 2y + 3z)^4$$

Współczynnik przy x^2yz to: $\binom{4}{2,1,1} \cdot 1^2 \cdot 2^1 \cdot 3^1 = \frac{4!}{2!1!1!} \cdot 6 = 72$

Współczynnik przy x^3z to:

$$(x + 2y + 3z)^4$$

Współczynnik przy x^2yz to: $\binom{4}{2,1,1} \cdot 1^2 \cdot 2^1 \cdot 3^1 = \frac{4!}{2!1!1!} \cdot 6 = 72$

Współczynnik przy x^3z to: $\binom{4}{3,0,1} \cdot 1^3 \cdot 2^0 \cdot 3^1 =$

$$(x + 2y + 3z)^4$$

Współczynnik przy x^2yz to: $\binom{4}{2,1,1} \cdot 1^2 \cdot 2^1 \cdot 3^1 = \frac{4!}{2!1!1!} \cdot 6 = 72$

Współczynnik przy x^3z to: $\binom{4}{3,0,1} \cdot 1^3 \cdot 2^0 \cdot 3^1 = \frac{4!}{3!0!1!} \cdot 3 = 12$

Zadanie

Udowodnij **kombinatorycznie** *następującą tożsamość*

$$\sum_{k=0}^{n} 2^k \binom{n}{k} = 3^n, \quad n \geqslant 0.$$

Pytanie: Co możemy zliczyć za pomocą wyrażenia 3^n?

Pytanie: Co możemy zliczyć za pomocą wyrażenia 3^n ?

3^n oznacza liczbę n–elementowych **ciągów ternarnych**, czyli ciągów o wyrazach ze zbioru $\{0, 1, 2\}$.

Pytanie: Co możemy zliczyć za pomocą wyrażenia 3^n ?

3^n oznacza liczbę n–elementowych **ciągów ternarnych**, czyli ciągów o wyrazach ze zbioru $\{0, 1, 2\}$.

Pytanie: Jak inaczej policzyć takie ciągi?

Pytanie: Co możemy zliczyć za pomocą wyrażenia 3^n?

3^n oznacza liczbę n–elementowych **ciągów ternarnych**, czyli ciągów o wyrazach ze zbioru $\{0, 1, 2\}$.

Pytanie: Jak inaczej policzyć takie ciągi?

Ustalmy na początek ile mamy zer i jedynek oraz gdzie one stoją.

Niech k oznacza **liczbę zer i jedynek** w naszym ciągu. Wówczas k spełnia warunki:

Niech k oznacza **liczbę zer i jedynek** w naszym ciągu. Wówczas k spełnia warunki:

$$0 \leqslant k \leqslant n.$$

Niech k oznacza **liczbę zer i jedynek** w naszym ciągu. Wówczas k spełnia warunki:

$$0 \leqslant k \leqslant n.$$

Wybieramy pozycje dla zer i jedynek na

Niech k oznacza **liczbę zer i jedynek** w naszym ciągu. Wówczas k spełnia warunki:

$$0 \leqslant k \leqslant n.$$

Wybieramy pozycje dla zer i jedynek na $\binom{n}{k}$ sposobów.

Niech k oznacza **liczbę zer i jedynek** w naszym ciągu. Wówczas k spełnia warunki:

$$0 \leqslant k \leqslant n.$$

Wybieramy pozycje dla zer i jedynek na $\binom{n}{k}$ sposobów.

Następnie

Niech k oznacza **liczbę zer i jedynek** w naszym ciągu. Wówczas k spełnia warunki:

$$0 \leqslant k \leqslant n.$$

Wybieramy pozycje dla zer i jedynek na $\binom{n}{k}$ sposobów.

Następnie każdej z wybranych pozycji **przypisujemy zero lub jedynkę** na

Niech k oznacza **liczbę zer i jedynek** w naszym ciągu. Wówczas k spełnia warunki:

$$0 \leqslant k \leqslant n.$$

Wybieramy pozycje dla zer i jedynek na $\binom{n}{k}$ sposobów.

Następnie każdej z wybranych pozycji **przypisujemy zero lub jedynkę** na 2^k sposobów.

Niech k oznacza **liczbę zer i jedynek** w naszym ciągu. Wówczas k spełnia warunki:

$$0 \leqslant k \leqslant n.$$

Wybieramy pozycje dla zer i jedynek na $\binom{n}{k}$ sposobów.

Następnie każdej z wybranych pozycji **przypisujemy zero lub jedynkę** na 2^k sposobów.

Zauważmy jeszcze, że **na pozostałych pozycjach**

Niech k oznacza **liczbę zer i jedynek** w naszym ciągu. Wówczas k spełnia warunki:

$$0 \leqslant k \leqslant n.$$

Wybieramy pozycje dla zer i jedynek na $\binom{n}{k}$ sposobów.

Następnie każdej z wybranych pozycji **przypisujemy zero lub jedynkę** na 2^k sposobów.

Zauważmy jeszcze, że **na pozostałych pozycjach stoją dwójki**.

Niech k oznacza **liczbę zer i jedynek** w naszym ciągu. Wówczas k spełnia warunki:

$$0 \leqslant k \leqslant n.$$

Wybieramy pozycje dla zer i jedynek na $\binom{n}{k}$ sposobów.

Następnie każdej z wybranych pozycji **przypisujemy zero lub jedynkę** na 2^k sposobów.

Zauważmy jeszcze, że **na pozostałych pozycjach stoją dwójki**.

Podsumowując, liczba ciągów ternarnych długości n wynosi

Niech k oznacza **liczbę zer i jedynek** w naszym ciągu. Wówczas k spełnia warunki:

$$0 \leqslant k \leqslant n.$$

Wybieramy pozycje dla zer i jedynek na $\binom{n}{k}$ sposobów.

Następnie każdej z wybranych pozycji **przypisujemy zero lub jedynkę** na 2^k sposobów.

Zauważmy jeszcze, że **na pozostałych pozycjach stoją dwójki**.

Podsumowując, liczba ciągów ternarnych długości n wynosi

$$\sum_{k=0}^{n}$$

Niech k oznacza **liczbę zer i jedynek** w naszym ciągu. Wówczas k spełnia warunki:

$$0 \leqslant k \leqslant n.$$

Wybieramy pozycje dla zer i jedynek na $\binom{n}{k}$ sposobów.

Następnie każdej z wybranych pozycji **przypisujemy zero lub jedynkę** na 2^k sposobów.

Zauważmy jeszcze, że **na pozostałych pozycjach stoją dwójki**.

Podsumowując, liczba ciągów ternarnych długości n wynosi

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$$

Niech k oznacza **liczbę zer i jedynek** w naszym ciągu. Wówczas k spełnia warunki:

$$0 \leqslant k \leqslant n.$$

Wybieramy pozycje dla zer i jedynek na $\binom{n}{k}$ sposobów.

Następnie każdej z wybranych pozycji **przypisujemy zero lub jedynkę** na 2^k sposobów.

Zauważmy jeszcze, że **na pozostałych pozycjach stoją dwójki**.

Podsumowując, liczba ciągów ternarnych długości n wynosi

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k .$$

Pytanie: Czy potrafisz podać inną interpretację kombinatoryczną?

Zadanie

Udowodnij **kombinatorycznie** *następującą tożsamość*

$$\sum_{k=m}^{n-1} \binom{k}{r-1} = \binom{n}{r} - \binom{m}{r}, \quad 0 \leqslant m < n, 1 \leqslant r \leqslant m.$$

W tym zadaniu zdecydowanie łatwiej można zinterpretować prawą stronę tożsamości.

W tym zadaniu zdecydowanie łatwiej można zinterpretować prawą stronę tożsamości.

Czemu odpowiada wyrażenie $\binom{n}{r} - \binom{m}{r}$?

W tym zadaniu zdecydowanie łatwiej można zinterpretować prawą stronę tożsamości.

Czemu odpowiada wyrażenie $\binom{n}{r} - \binom{m}{r}$?

Możliwa interpretacja:

W tym zadaniu zdecydowanie łatwiej można zinterpretować prawą stronę tożsamości.

Czemu odpowiada wyrażenie $\binom{n}{r} - \binom{m}{r}$?

Możliwa interpretacja: Niech A będzie zbiorem mocy n, a $B \subset A$ jest jego podzbiorem mocy $m < n$. Wówczas $\binom{n}{r} - \binom{m}{r}$ to liczba r-elementowych podzbiorów zbioru A, które nie są całkowicie zawarte w B.

W tym zadaniu zdecydowanie łatwiej można zinterpretować prawą stronę tożsamości.

Czemu odpowiada wyrażenie $\binom{n}{r} - \binom{m}{r}$?

Możliwa interpretacja: Niech A będzie zbiorem mocy n, a $B \subset A$ jest jego podzbiorem mocy $m < n$. Wówczas $\binom{n}{r} - \binom{m}{r}$ to liczba r-elementowych podzbiorów zbioru A, które nie są całkowicie zawarte w B.

Musimy teraz pokazać, że można wyznaczyć liczbę takich podzbiorów w sposób odpowiadający lewej stronie naszej tożsamości:

$$\sum_{k=m}^{n-1} \binom{k}{r-1}$$

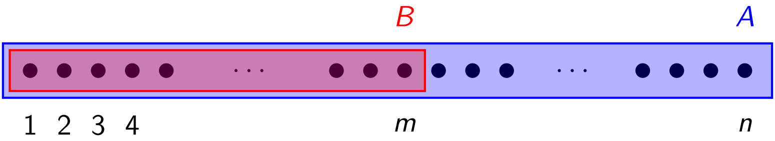
Niech A będzie zbiorem mocy n, a B będzie jego podzbiorem mocy $m < n$. Chcemy policzyć ile jest podzbiorów X mocy r, które nie są całkowicie zawarte w B.

Niech A będzie zbiorem mocy n, a B będzie jego podzbiorem mocy $m < n$. Chcemy policzyć ile jest podzbiorów X mocy r, które nie są całkowicie zawarte w B.

Bez straty ogólności możemy przyjąć, że $A = \{1, 2, \ldots, n\}$ oraz $B = \{1, 2, \ldots, m\}$.

Niech A będzie zbiorem mocy n, a B będzie jego podzbiorem mocy $m < n$. Chcemy policzyć ile jest podzbiorów X mocy r, które nie są całkowicie zawarte w B.

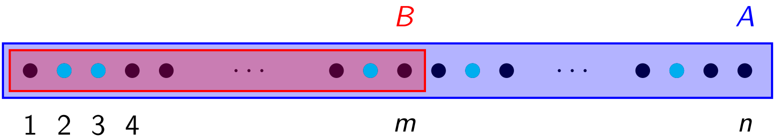
Bez straty ogólności możemy przyjąć, że $A = \{1, 2, \ldots, n\}$ oraz $B = \{1, 2, \ldots, m\}$.



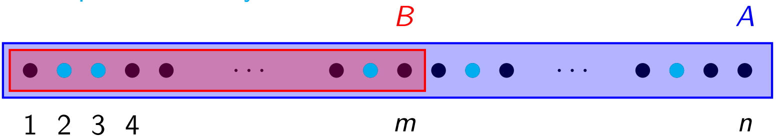
Niech A będzie zbiorem mocy n, a B będzie jego podzbiorem mocy $m < n$. Chcemy policzyć ile jest podzbiorów X mocy r, które nie są całkowicie zawarte w B.

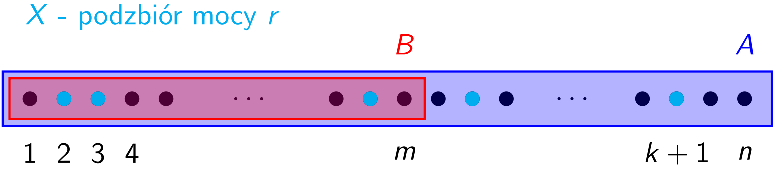
Bez straty ogólności możemy przyjąć, że $A = \{1, 2, \ldots, n\}$ oraz $B = \{1, 2, \ldots, m\}$.

X - podzbiór mocy r

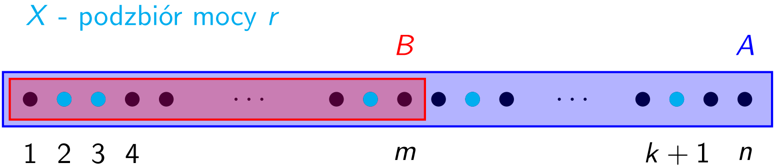


X - podzbiór mocy r



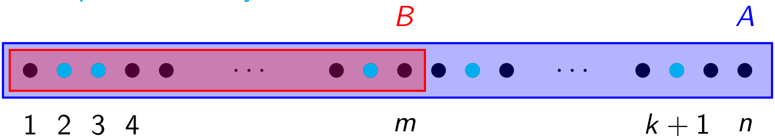


Niech $k+1$ będzie **największym elementem** podzbioru X.

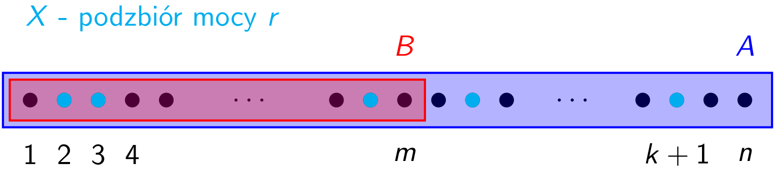


Niech $k+1$ będzie **największym elementem** podzbioru X. Jakie mamy założenia na $k+1$?

X - podzbiór mocy r



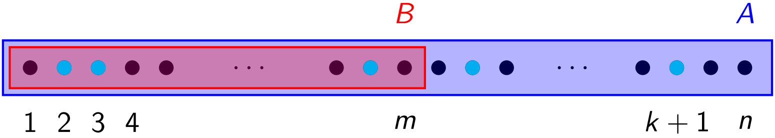
Niech $k+1$ będzie **największym elementem** podzbioru X.
Wówczas $k+1 \in \{m+1, m+2, \ldots, n\}$, bo inaczej $X \subseteq B$.



Niech $k+1$ będzie **największym elementem** podzbioru X.
Wówczas $k+1 \in \{m+1, m+2, \ldots, n\}$, bo inaczej $X \subseteq B$.

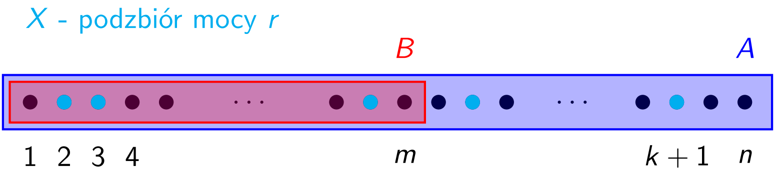
Teraz wystarczy dobrać **brakujące elementy** X spośród

X - podzbiór mocy r



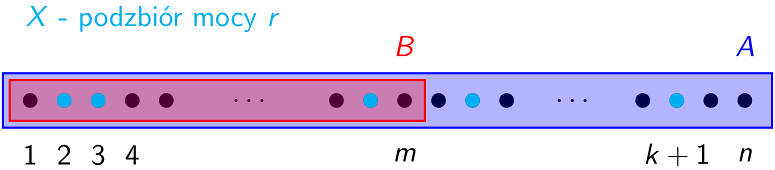
Niech $k+1$ będzie **największym elementem** podzbioru X. Wówczas $k+1 \in \{m+1, m+2, \dots, n\}$, bo inaczej $X \subseteq B$.

Teraz wystarczy dobrać **brakujące elementy** X spośród $\{1, 2, \dots, k\}$.



Niech $k+1$ będzie **największym elementem** podzbioru X. Wówczas $k+1 \in \{m+1, m+2, \ldots, n\}$, bo inaczej $X \subseteq B$.

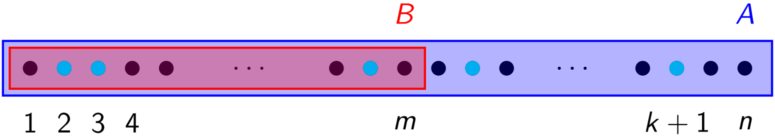
Teraz wystarczy dobrać **brakujące elementy** X spośród $\{1, 2, \ldots, k\}$. Możemy zrobić to na



Niech $k+1$ będzie **największym elementem** podzbioru X. Wówczas $k+1 \in \{m+1, m+2, \ldots, n\}$, bo inaczej $X \subseteq B$.

Teraz wystarczy dobrać **brakujące elementy** X spośród $\{1, 2, \ldots, k\}$. Możemy zrobić to na $\binom{k}{r-1}$ sposobów.

X - podzbiór mocy r

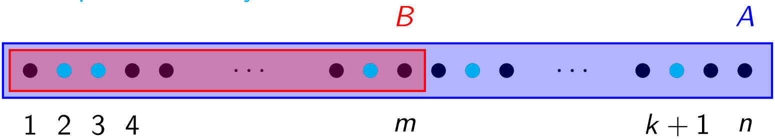


Niech $k+1$ będzie **największym elementem** podzbioru X.
Wówczas $k+1 \in \{m+1, m+2, \ldots, n\}$, bo inaczej $X \subseteq B$.

Teraz wystarczy dobrać **brakujące elementy** X spośród $\{1, 2, \ldots, k\}$. Możemy zrobić to na $\binom{k}{r-1}$ sposobów.

Zatem ustalamy $k \in \{m, m+1, \ldots, n-1\}$,

X - podzbiór mocy r



Niech $k+1$ będzie **największym elementem** podzbioru X. Wówczas $k+1 \in \{m+1, m+2, \ldots, n\}$, bo inaczej $X \subseteq B$.

Teraz wystarczy dobrać **brakujące elementy** X spośród $\{1, 2, \ldots, k\}$. Możemy zrobić to na $\binom{k}{r-1}$ sposobów.

Zatem ustalamy $k \in \{m, m+1, \ldots, n-1\}$, a następnie wybieramy pozostałe $r-1$ elementów na $\binom{k}{r-1}$ sposobów.

Pytanie: Czy potrafisz podać inną interpretację kombinatoryczną?

Zadanie

Udowodnij **kombinatorycznie** *następującą tożsamość*

$$\sum_{k=1}^{n} k(n+1-k) = \binom{n+2}{3}, \quad n \geqslant 1.$$

W Zadaniu A.3 na $\binom{n}{3}$ sposobów wybieraliśmy 3-elementowy podzbiór **uporządkowanego** zbioru n-elementowego.

W Zadaniu A.3 na $\binom{n}{3}$ sposobów wybieraliśmy 3-elementowy podzbiór **uporządkowanego** zbioru n-elementowego.

Tym razem mamy do czynienia ze zbiorem $(n+2)$-elementowym, stąd $\binom{n+2}{3}$.

W Zadaniu A.3 na $\binom{n}{3}$ sposobów wybieraliśmy 3-elementowy podzbiór **uporządkowanego** zbioru n-elementowego.

Tym razem mamy do czynienia ze zbiorem $(n+2)$-elementowym, stąd $\binom{n+2}{3}$.

W Zadaniu A.3 wybieraliśmy 3 elementy tego zbioru startując od elementu największego.

W Zadaniu A.3 na $\binom{n}{3}$ sposobów wybieraliśmy 3-elementowy podzbiór **uporządkowanego** zbioru n-elementowego.

Tym razem mamy do czynienia ze zbiorem $(n+2)$-elementowym, stąd $\binom{n+2}{3}$.

W Zadaniu A.3 wybieraliśmy 3 elementy tego zbioru startując od elementu największego.

W jaki inny sposób możemy wybrać ten podzbiór?

W Zadaniu A.3 na $\binom{n}{3}$ sposobów wybieraliśmy 3-elementowy podzbiór **uporządkowanego** zbioru n-elementowego.

Tym razem mamy do czynienia ze zbiorem $(n+2)$-elementowym, stąd $\binom{n+2}{3}$.

W Zadaniu A.3 wybieraliśmy 3 elementy tego zbioru startując od elementu największego.

W jaki inny sposób możemy wybrać ten podzbiór?

Zacznijmy od elementu **środkowego**!

$$\sum_{k=1}^{n} k(n+1-k) = \binom{n+2}{3}, \quad n \geqslant 1$$

$$\sum_{k=1}^{n} k(n+1-k) = \binom{n+2}{3}, \quad n \geqslant 1$$

Który element przyjąć jako ten środkowy?

$$\sum_{k=1}^{n} k(n+1-k) = \binom{n+2}{3}, \quad n \geqslant 1$$

Niech $k+1$ będzie **środkowym** elementem spośród wybieranej trójki.

$$\sum_{k=1}^{n} k(n+1-k) = \binom{n+2}{3}, \quad n \geqslant 1$$

Niech $k+1$ będzie **środkowym** elementem spośród wybieranej trójki.

Wówczas liczba sposobów wyboru **najmniejszego** elementu to

$$\sum_{k=1}^{n} k(n+1-k) = \binom{n+2}{3}, \quad n \geqslant 1$$

Niech $k+1$ będzie **środkowym** elementem spośród wybieranej trójki.

Wówczas liczba sposobów wyboru **najmniejszego** elementu to k.

$$\sum_{k=1}^{n} k(n+1-k) = \binom{n+2}{3}, \quad n \geqslant 1$$

Niech $k+1$ będzie **środkowym** elementem spośród wybieranej trójki.

Wówczas liczba sposobów wyboru **najmniejszego** elementu to k.

Z kolei liczba sposobów wyboru **największego** elementu to

$$\sum_{k=1}^{n} k(n+1-k) = \binom{n+2}{3}, \quad n \geqslant 1$$

Niech $k+1$ będzie **środkowym** elementem spośród wybieranej trójki.

Wówczas liczba sposobów wyboru **najmniejszego** elementu to k.

Z kolei liczba sposobów wyboru **największego** elementu to $(n+2)-(k+1) = n+1-k$.

$$\sum_{k=1}^{n} k(n+1-k) = \binom{n+2}{3}, \quad n \geqslant 1$$

Niech $k+1$ będzie **środkowym** elementem spośród wybieranej trójki.

Wówczas liczba sposobów wyboru **najmniejszego** elementu to k.

Z kolei liczba sposobów wyboru **największego** elementu to $(n+2)-(k+1) = n+1-k$.

Czy mamy jakieś założenia na $k+1$?

$$\sum_{k=1}^{n} k(n+1-k) = \binom{n+2}{3}, \quad n \geqslant 1$$

Niech $k+1$ będzie **środkowym** elementem spośród wybieranej trójki.

Wówczas liczba sposobów wyboru **najmniejszego** elementu to k.

Z kolei liczba sposobów wyboru **największego** elementu to $(n+2)-(k+1) = n+1-k$.

Musimy przyjąć $2 \leqslant k+1 \leqslant n+1$

$$\sum_{k=1}^{n} k(n+1-k) = \binom{n+2}{3}, \quad n \geqslant 1$$

Niech $k+1$ będzie **środkowym** elementem spośród wybieranej trójki.

Wówczas liczba sposobów wyboru **najmniejszego** elementu to k.

Z kolei liczba sposobów wyboru **największego** elementu to $(n+2)-(k+1) = n+1-k$.

Musimy przyjąć $2 \leqslant k+1 \leqslant n+1$ lub, równoważnie, $1 \leqslant k \leqslant n$.

$$\sum_{k=1}^{n} k(n+1-k) = \binom{n+2}{3}, \quad n \geqslant 1$$

Niech $k+1$ będzie **środkowym** elementem spośród wybieranej trójki.

Wówczas liczba sposobów wyboru **najmniejszego** elementu to k.

Z kolei liczba sposobów wyboru **największego** elementu to $(n+2)-(k+1) = n+1-k$.

Musimy przyjąć $2 \leqslant k+1 \leqslant n+1$ lub, równoważnie, $1 \leqslant k \leqslant n$.

Zatem sumaryczna liczba sposobów wyboru 3-elementowego podzbioru to

$$\sum_{k=1}^{n} k(n+1-k) = \binom{n+2}{3}, \quad n \geqslant 1$$

Niech $k+1$ będzie **środkowym** elementem spośród wybieranej trójki.

Wówczas liczba sposobów wyboru **najmniejszego** elementu to k.

Z kolei liczba sposobów wyboru **największego** elementu to $(n+2)-(k+1) = n+1-k$.

Musimy przyjąć $2 \leqslant k+1 \leqslant n+1$ lub, równoważnie, $1 \leqslant k \leqslant n$.

Zatem sumaryczna liczba sposobów wyboru 3-elementowego podzbioru to

$$\sum_{k=1}^{n} k(n+1-k).$$

Pytanie: Czy potrafisz podać inną interpretację kombinatoryczną?