MATEMATYKA DYSKRETNA dla INFORMATYKÓW

ROZGRZEWKA II – zadania otwarte – 2021Z

Wszystkie odpowiedzi uzasadnij!!!

Zadanie 1. .

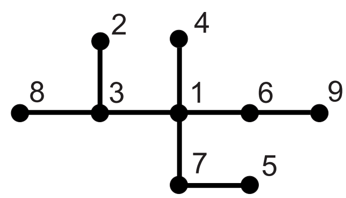
a. Ile krawędzi ma dopełnienie grafu prostego na 9 wierzchołkach i o ciągu stopni $(2, 2, 1, 3, 5, 2, 1, 1, 3)$?

b. W grafie na 13 wierzchołkach i o 45 krawędziach są **tylko** wierzchołki stopnia 10, stopnia 5 i stopnia 7. Wierzchołków stopnia 7 jest tyle samo co wierzchołków stopnia 5. Ile jest wierzchołków stopnia 10?

c. Ile najmniej i ile najwięcej krawędzi może mieć graf prosty na 15 wierzchołkach i o 8 składowych spójności?

d. Ile krawędzi jest w lesie na 79 wierzchołkach, składającym się z 21 drzew?

e. Podaj kod Prüfera podanego poniżej drzewa.



f. Bez odkodowywania podaj ciąg stopni drzewa o kodzie Prüfera $(1, 3, 5, 7, 2, 4, 6, 8)$. Czy drzewo to jest scieżką?

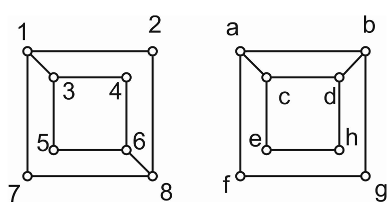
g. Ile jest drzew oznaczonych na zbiorze wierzchołków $\{1, 2, \ldots, 9\}$, o ciągu stopni (po uporządkowaniu): $(5, 3, 2, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$?

h. Czy 10–kostka Q_{10} ma obchód Eulera? Czy ma cykl Hamiltona?

i. Kiedy graf pełny dwudzielny $K_{n,m}$ jest planarny?

j. 5–regularny płaski spójny graf prosty ma 20 ścian. Ile wierzchołków ma ten graf?

Zadanie 2. Czy podane grafy są izomorficzne?

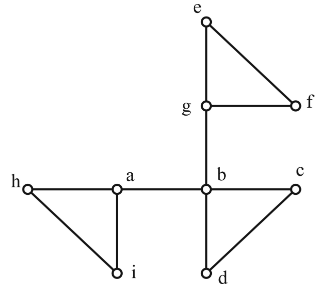


Zadanie 3. Ile maksymalnie krawędzi może mieć graf prosty na 16 wierzchołkach i o czterech składowych spójności, w którym nie ma wierzchołków izolowanych?

Zadanie 4. Narysuj wszystkie nieizomorficzne spójne dwudzielne grafy proste na 6 wierzchołkach i o 6 krawędziach.

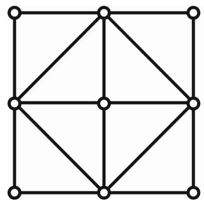
Zadanie 5. Pokaż, że jeżeli w grafie prostym G wszystkie wierzchołki mają stopień parzysty, to G nie ma krawędzi cięcia.

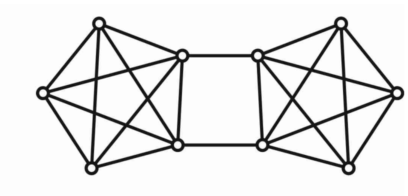
Zadanie 6. Do grafu na poniższym rysunku zastosuj algorytmy przeszukiwania wszerz (BFS) i w głąb (DFS), zaczynając od wierzchołka a i rozpatrując wierzchołki w kolejności alfabetycznej. Zanotuj dla BFS stany kolejki i krawędzie kolejno dodawane do tworzonego drzewa rozpiętego, a dla DFS stany stosu i krawędzie kolejno dodawane do tworzonego drzewa rozpiętego. Który z tych dwóch algorytmów możemy użyć do znalezienia najkrótszej ścieżki między ustalonymi wierzchołkami?



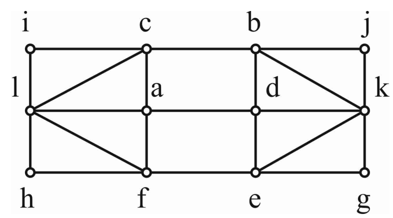
Zadanie 7. Które z grafów na rysunku poniżej są: eulerowskie, półeulerowskie, hamiltonowskie, półhamiltonowskie? Odpowiedź uzasadnij.

. a) b)





Zadanie 8. Korzystając z algorytmu Fleury'ego, znajdź szlak Eulera w grafie poniżej. Dlaczego w tym grafie nie ma obchodu Eulera?



Zadanie 9. Graf prosty G ma ciąg stopni

a) (5,5,4,4,3,3)

b) (5,5,4,4,4,4)

Czy G może być planarny? Jeśli nie, to uzasadnij. Jeśli tak, to podaj przykład grafu płaskiego o tym ciagu stopni.

Zadanie 10. W pewnym mieście władze postanowiły wybudować metro. Ustalono już miejsca, gdzie będą stacje, znane są też koszty budowy bezpośredniego połączenia tunelem między każdymi dwiema stacjami. Władze chcą wybudować metro tak, by z każdej stacji do każdej innej dało się dojechać (bezpośrednio lub pośrednio), a jednocześnie by koszt budowy był w sumie jak najniższy. Zinterpretuj problem w języku grafów. Za pomocą jakiego algorytmu można problem ten rozwiązać?

Zadanie 11. Znaleźć i udowodnić indukcją wzór na wyraz ogólny ciągu, dla którego zachodzi następujące równanie rekurencyjne

$$a_n = \frac{5(n+2)}{n} a_{n-1}, \qquad a_1 = 5\,.$$

Zadanie 12. Niech c_n będzie liczbą ciągów o długości n zbudowanych z liter ze zbioru $\{A, B, C, D, E, F, G, H, I\}$, w których żadne dwie spółgłoski nie występują obok siebie. Znajdź, uzasadnij i rozwiąż równanie rekurencyjne opisujące ciąg c_n.

Zadanie 13. Rozwiąż równanie rekurencyjne znajdując pierwiastki odpowiedniego równania :

$$a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2}, \qquad a_0 = 0,\ a_1 = 1\,.$$

Zadanie 14. Wyraz ogólny ciągu a_n spełniającego warunki początkowe

$$a_0 = 12,, \quad a_1 = 7, \quad a_2 = 15, \quad a_3 = 1, \quad a_4 = 27\,,$$

dany jest wzorem

$$a_n = (C_1 \cdot n^2 + C_2 \cdot n + C_3)(-2)^n + C_4(-1)^n + C_5\,.$$

Podaj układ równań (NIE ROZWIĄZUJ), z którego można wyznaczyć stałe w powyższym wzorze.