DMAD - dowodzenie twierdzeń, indukcja

Jak przygotować się do rozwiązywania zadań?

Przeczytaj rozdziały 1.1 i 1.2 z podręcznika/wykładu.

Co powinnaś/powinieneś wiedzieć:

I. Jak udowodnić, że prawdziwa jest implikacja wykorzystując: **dowód wprost**, **dowód nie wprost**, **dowód przez zaprzeczenie**.
II. Jak udowodnić zdania typu $\forall_{n \geqslant n_0} p(n)$ korzystając z **zasady indukcji**.

A Zadania na ćwiczenia

Zadanie A.1. Udowodnij wprost, że jeśli a i b są wymierne, to ich suma $a + b$ też jest liczbą wymierną. (Liczba t jest wymierna wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją liczby całkowite r i s takie, że $t = r/s$).

Zadanie A.2. Pokaż nie wprost, że dla całkowitych a i b, jeśli $(a+b+1)^2$ jest liczbą parzystą, to a jest nieparzyste lub b jest nieparzyste. (Liczba całkowita t jest parzysta (nieparzysta) wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje liczba całkowita k taka, że $t = 2k$ ($t = 2k + 1$)).

Zadanie A.3. Udowodnij przez zaprzeczenie, że dla całkowitych m, n i r, jeśli $m + n$ i $n + r$ są parzyste, to $m + r$ też jest liczbą parzystą.

Zadanie A.4. Zaproponuj metodę dowodu twierdzenia: *Jeśli wybierzemy 3 skarpetki z szuflady zawierającej tylko czarne i niebieskie skarpetki, to będziemy mieli pewną jednokolorową parę skarpetek.*

Zadanie A.5. Udowodnij indukcyjnie, że dla wszystkich $n \geqslant 1$

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (2n-1)^2 = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}.$$

Zadanie A.6. Udowodnij indukcyjnie, że dla wszystkich $n \geqslant 1$ i dowolnej liczby rzeczywistej $x > -1$

$$(1+x)^n \geqslant 1 + nx.$$

Zadanie A.7. Pokazać indukcyjnie, że jeżeli dla ciągu a_n ($n \geqslant 0$) spełnione są warunki:

$$\begin{aligned} &a_0 = 1; \\ &a_1 = -1; \\ &a_2 = 1; \\ &a_n = a_{n-1} + a_{n-2} - a_{n-3}, \text{ dla } n \geqslant 3, \end{aligned}$$

to $a_n = (-1)^n$ dla $n \geqslant 0$.

B Zadania na ćwiczenia - jeśli czas pozwoli

Zadanie B.1. Pewna gra zaczyna się ze stosem n zapałek. Każdy z dwóch graczy w jednej rundzie może usunąć 1, 2 lub 3 zapałki. Gracz usuwający ostatnią zapałkę przegrywa. Korzystając z indukcji pokaż, że jeśli $n = 4j, 4j+2$ lub $n = 4j+3$ dla pewnej liczby całkowitej j, to pierwszy gracz ma strategię wygrywającą a drugi gracz ma strategię wygrywającą w pozostałym przypadku, gdy $n = 4j + 1$.

Zadanie B.2. Udowodnić indukcyjnie, że mając do dyspozycji nieograniczoną liczbę monet o wartości 2 lub 5 złotych, można kupić w automacie (niewydającym reszty) dowolny napój, którego cena wynosi $n \geqslant 5$ złotych.

Zadanie B.3. Rozważ grę, w której na początku mamy dwa stosy po n żetonów ($n \geqslant 1$). W każdej rundzie kolejno każdy z dwóch graczy bierze dowolną liczbę żetonów z jednego ze stosów. Gracz, który zabierze ostatni żeton wygrywa. Pokaż indukcyjnie, że dla dowolnego $n \geqslant 1$ drugi gracz ma strategię wygrywającą (tzn. gdy obaj gracze grają optymalnie, to zawsze drugi wygrywa).

Zadanie B.4. Załóżmy, że każda prostokątna tabliczka czekolady składa się z identycznych kwadratowych kostek. Dowolna taka tabliczka może zostać przełamana tylko wzdłuż pionowej lub poziomej linii prostej rozdzielającej kostki. Ile „przełamań" należy zrobić, aby podzielić dowolną prostokątną tabliczkę czekolady składającą się z n identycznych kwadratowych kostek na n kostek? Odpowiedź uzasadnij korzystając z indukcji.

C Zadania do samodzielnej pracy w domu

Zadanie C.1. Pokaż wprost, że jeśli a i b są podzielne przez 5, to ich suma też jest podzielna przez 5. (wsk. r jest podzielna przez 5 wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje liczba całkowita s taka, że $r = 5s$).

Zadanie C.2. Pokaż wprost, że jeśli a i b są nieparzyste, to $(a - b + 1)^2$ też jest liczbą nieparzystą.

Zadanie C.3. Pokaż wprost, że jeśli każda z liczb $x_1, x_2, \ldots, x_8$ jest większa niż 7, to ich średnia arytmetyczna jest większa niż 7.

Zadanie C.4. Pokaż nie wprost, że jeśli średnia arytmetyczna liczb $x_1, \ldots, x_{10}$ jest mniejsza niż 3, to pewna z liczb $x_1, \ldots, x_{10}$ jest mniejsza niż 3.

Zadanie C.5. Udowodnij nie wprost, że dla całkowitego n, jeśli $n^3 + 5$ jest nieparzyste, to n jest liczbą parzystą.

Zadanie C.6. Udowodnij przez zaprzeczenie, że dla całkowitego n, jeśli $n^3 + 5$ jest nieparzyste, to n jest liczbą parzystą.

Zadanie C.7. Udowodnij przez zaprzeczenie, że jeśli każda z liczb $x_1, x_2, \ldots, x_8$ jest większa niż 5, to ich średnia arytmetyczna jest większa niż 5.

Zadanie C.8. Udowodnij indukcyjnie, że dla wszystkich $n \geqslant 1$

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \ldots + n \cdot (n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}.$$

Zadanie C.9. Udowodnij indukcyjnie, że dla wszystkich $n \geqslant 1$

$$1^2 - 2^2 + 3^2 - \ldots + (-1)^{n-1} n^2 = (-1)^{n-1} \frac{n(n+1)}{2}.$$

Zadanie C.10. Udowodnij indukcyjnie, że dla wszystkich $n \geqslant 1$

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} = \frac{n}{n+1}.$$

Zadanie C.11. Udowodnij indukcyjnie, że dla wszystkich $n \geqslant 1$

$$7 \mid 2^{3n-1} + 3 \quad (\text{tzn. } \exists_{k-\text{całkowite}}\, 2^{3n-1} + 3 = 7k).$$

Zadanie C.12. Pokaż indukcyjnie, że dla wszystkich $n \geqslant 1$

$$4^n > n^2.$$

Zadanie C.13. Pokazać indukcyjnie, że jeżeli dla ciągu c_n $(n \geqslant 0)$ spełnione są warunki:

$$\begin{cases} c_0 = -3; \\ c_1 = 1; \\ c_n = 2c_{n-1} - c_{n-2} \quad \text{for } n \geqslant 2. \end{cases}$$

to $c_n = 4n - 3$ dla $n \geqslant 0$.

Zadanie C.14. Zadanie B.2, jeśli nie było zrobione na zajęciach.

Zadanie C.15. Zadania 1.2 - 1.16 z podręcznika.