Analiza matematyczna dla informatyków.

Mieczysław Cichoń, ver. 2.5/2021

Mieczysław Cichoń - WMI UAM

Plan wykładów 13, 14, 15.

Rachunek całkowy funkcji jednej zmiennej. (13)

Funkcja pierwotna i całka nieoznaczona. (13)

Podstawowe metody całkowania. (13)

Całka oznaczona i jej zastosowania. (14)

Całka niewłaściwa i jej zastosowanie w informatyce. (14)

Metryki, odległości między funkcjami. Twierdzenie Banacha o kontrakcji. (14)

Całka Riemanna i jej zastosowania w informatyce. Podstawy całkowania numerycznego. Obliczenia numeryczne wybranych całek. Przegląd porównawczy metod (na ćwiczeniach też: proste całki - obliczenie przez części przez podstawienia). (15)

Równania różniczkowe - podstawy. (15)

Strony do lektury na wykłady 13, 14, 15.

Czytamy najpierw motywacje:

[K] : motywacje - strony 28-30

teraz wstępne materiały, najpierw

[K] : strony 269-275

oraz później

[K] : strony 257-267 I ta część jest konieczna dla zrozumienia całkowania numerycznego!

Mam też tym razem propozycję skorzystania najpierw ze źródła [W] - o czym na kolejnym slajdzie.

Alternatywna kolejność źródeł.

Jeśli ktoś woli, to zgodny z moim "kierunkiem" wykładu (od całki nieoznaczonej do oznaczonej) jest jednak drugi materiał - można go czytać po kolei (ale wtedy koniecznie trzeba po zapoznaniu się z [W] przeczytać "kolorowe" fragmenty z [K] dotyczące informatyki...

[W] : strony 186-203 i 204-207 - ten ostatni fragment ze wzorem Stirlinga, który akurat w informatyce jest bardzo przydatny .

Kolejny ważny fragment (potencjalne pytanie na egzamin...) to strony 214–226!!

Zajmiemy się obecnie działaniem odwrotnym do różniczkowania zwanym całkowaniem. Funkcje, o których będzie mowa, to funkcje o wartościach rzeczywistych, określone w pewnym przedziale.

Definicja. *Funkcją pierwotną* funkcji f w przedziale (a, b) nazywamy każdą funkcję F określoną w przedziale (a, b) i posiadającą pochodną $F'(x)$ w każdym punkcie $x \in (a, b)$ taką, że $F'(x) = f(x)$ dla każdego $x \in (a, b)$.

Funkcję f dla której istnieje funkcja pierwotna w (a, b), nazywamy *całkowalną* w (a, b).

Funkcje całkowalne.

Pojęcie całkowalności określa się w przedziale domkniętym $< a, b >$, przy czym w punktach końcowych a i b bierze się pochodną F' odpowiednio prawostronną i lewostronną.

Definicja. Rodzinę wszystkich funkcji pierwotnych funkcji f nazywamy *całką nieoznaczoną* z f i zapisujemy przy pomocy symbolu $\int f(x)dx$.

Zatem z definicji mamy $\int F'(x)dx = F(x) + C$, gdzie C jest dowolną stałą.

Twierdzenie. (o stałej całkowania). *Jeżeli funkcja f jest całkowalna w (a, b) oraz F jest funkcją pierwotną funkcji f w (a, b), to:*

1^0 *przy dowolnej stałej C, funkcja $F + C$ jest też funkcją pierwotną funkcji f w (a, b),*

2^0 *dla każdej funkcji pierwotnej G funkcji f w (a, b) istnieje taka stała C, że $G(x) = F(x) + C$ dla $x \in (a, b)$.*

Podstawowe wzory rachunku całkowego.

1) $\int x^a dx = \dfrac{x^{a+1}}{a+1} + C \quad , \quad a \neq -1 \quad , \quad x > 0 \quad .$

Gdy a jest liczbą naturalną, to zastrzeżenie $x > 0$ odpada; gdy a jest liczbą całkowitą ujemną to zamiast $x > 0$ wystarczy założyć $x \neq 0$.

Podajemy kilka szczególnych przypadków wzoru 1)

a) $a = 0$, wówczas $\int dx = x + C$;

b) $a = -\frac{1}{2}$, wówczas $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C \quad , \quad x > 0;$

c) $a = -2$, wówczas $\int \dfrac{dx}{x^2} = -\dfrac{1}{x} + C \quad , \quad x \neq 0.$

2) $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C \quad , \quad x \neq 0 \quad .$

3) $\int e^x dx = e^x + C \quad ,$

4) $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad , \qquad a > 0 \quad , \qquad a \neq 1 \quad .$

5) $\int \cos x dx = \sin x + C \quad ,$

6) $\int \sin x dx = -\cos x + C \quad ,$

7) $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \mathrm{tg}\ x + C \quad , \qquad \cos x \neq 0 \quad .$

8) $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -c\mathrm{tg}\ x + C \quad , \qquad \sin x \neq 0 \quad .$

9) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C = -\arccos x + C' \quad , \qquad -1 < x < 1 \quad .$

10) $\int \frac{dx}{1+x^2} = \mathrm{arctg}\ x + C = -\mathrm{arctg}\ x + C' \quad ,$

11) $\int \sinh x dx = \cosh x + C$,

12) $\int \cosh x dx = \sinh x + C$,

13) $\int \frac{dx}{\cosh^2 x} = \mathrm{tgh}\; x + C$,

14) $\int \frac{dx}{\sinh^2 x} = -\mathrm{ctgh}\; x + C$,

15) $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \mathrm{arc}\sinh x + C$,

16) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \mathrm{arc}\cosh x + C$.

Całkowalność a ciągłość.

Twierdzenie. (o całkowalności funkcji ciągłej). *Każda funkcja ciągła w* $< a, b >$ *ma w* $< a, b >$ *całkę nieoznaczoną*.

co więcej...

Twierdzenie. *Każda funkcja ciągła w* (a, b) *ma w* (a, b) *całkę nieoznaczoną.*

...a to ma dość nieoczekiwane konsekwencje przy całkowaniu numerycznym - nie da się bowiem wyznaczyć funkcji pierwotnych dla wszystkich funkcji ciągłych - jako funkcji wyznaczonych za pomocą skończonej liczby działań na funkcjach elementarnych...

Własności całek nieoznaczonych.

Twierdzenie. (o działaniach arytmetycznych na całkach nieoznaczonych). *Jeżeli funkcje* f *i* g *są całkowalne w przedziale* I *(otwartym lub domkniętym), a* c *jest dowolną liczbą, to funkcje* $f+g$, $f-g$ *i* cf *są też całkowalne w* I *oraz*

$$\int [f(x)+g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx \quad ,$$

$$\int [f(x)-g(x)]dx = \int f(x)dx - \int g(x)dx \quad ,$$

$$\int cf(x)dx = c\int f(x)dx \quad ,$$

z dokładnością do stałej całkowania.

Przykład. Obliczyć całkę $I = \int x(x+1)(x-2)dx$.

Po doprowadzeniu funkcji podcałkowej do postaci wielomianu i skorzystaniu z własności całki otrzymujemy:

$$\begin{aligned} I = \int (x^3 - x^2 - 2x)dx &= \int x^3 dx - \int x^2 dx - 2\int x dx = \\ &= \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - 2\cdot\frac{x^2}{2} + C \end{aligned}$$

Całkowanie przez części.

Twierdzenie. (o całkowaniu przez części całek nieoznaczonych). *Jeżeli funkcje f i g mają pochodne f' i g' ciągłe w przedziale I (otwartym lub domkniętym), to*

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx \ .$$

Przykład.

(a) Obliczyć całkę $\int xe^x dx$.

Obierając $f(x) = x$, $g'(x) = e^x$ mamy $f'(x) = 1$ i $g(x) = e^x$, więc

$$\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C = e^x(x-1) + C \ .$$

(b) Obliczyć całkę $\int e^x \sin x dx$. Korzystając z twierdzenia o całkowaniu przez części $f(x) = \sin x$ $g'(x) = e^x$ oraz $f'(x) = \cos x$ $g(x) = e^x$ mamy

$$\int e^x \sin x dx = e^x \sin x - \int e^x \cos x dx \ .$$

Obliczymy dalej całkę $\int e^x \cos x dx$.

Ponownie stosujemy dla tej całki, twierdzenie o całkowaniu przez części.

Podstawiając

$$f(x) = \cos x \qquad g'(x) = e^x$$

$$f'(x) = -\sin x \qquad g(x) = e^x$$

otrzymujemy

$$\int e^x \cos x dx = e^x \cos x + \int e^x \sin x dx \ .$$

Podstawiając otrzymaną wartość do poprzedniej równości otrzymujemy

$$\int e^x \sin x dx = e^x \sin x - e^x \cos x - \int e^x \sin x dx \ ,$$

stąd po przeniesieniu całki na lewą stronę równości mamy

$$2 \int e^x \sin x dx = e^x (\sin x - \cos x) \qquad / : 2$$

Ostatecznie więc

$$\int e^x \sin x dx = \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x) + C \ .$$

(c) Obliczyć całkę $\int \ln x dx$.

Zakładamy, że $x > 0$. Całkujemy przez części przyjmując $f(x) = \ln x$, $g'(x) = 1$, $f'(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = x$. Obliczamy

$$\int \ln x dx = x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx = x \ln x - \int dx = x \ln x - x + C.$$

Twierdzenie. (o obliczaniu całek nieoznaczonych przez podstawienie). *Niech funkcja* f *będzie ciągła w przedziale* (a, b) *oraz niech funkcja* g *ma ciągłą pochodną* g' *w przedziale* (α, β), $a < g(t) < b$ *dla* $t \in (\alpha, \beta)$. *Wtedy*

$$\int f(x)dx = \int f(g(t))g'(t)dt\,, \quad \textit{gdzie} \quad x = g(t)\,, \quad \textit{dla} \quad \alpha < t < \beta\,.$$

Przykład.

(a) Obliczyć całkę $\int \frac{\ln x}{x} dx$.

Zakładamy, że $x > 0$. Wykonujemy podstawienie $\ln x = t$ i różniczkując obustronnie mamy $\frac{1}{x} dx = dt$. Otrzymujemy więc

$$\int \frac{\ln x}{x} dx = \int t dt = \frac{1}{2} t^2 + C = \frac{1}{2} (\ln x)^2 + C \ .$$

(b) Obliczyć całkę $\int x e^{x^2} dx$.

Wykonujemy podstawienie $x^2 = t$, skąd różniczkując obie strony otrzymujemy $2xdx = dt$, $xdx = \frac{1}{2} dt$, a więc

$$\int x e^{x^2} dx = \int e^{x^2} \cdot x dx = \int e^t \cdot \frac{1}{2} dt = \frac{1}{2} \int e^t dt = \frac{1}{2} e^t + C = \frac{1}{2} e^{x^2} + C \ .$$

(c) Obliczyć całkę $\int \sin x \cos x dx$.

Wykonujemy podstawienie $\cos x = t$; różniczkując otrzymujemy $-\sin x dx = dt$. Stosując dalej twierdzenie o całkowaniu przez podstawienie mamy

$$\int \sin x \cos x dx = -\int t dt = -\frac{1}{2} t^2 + C = -\frac{1}{2} \cos^2 x + C \ .$$

Wzory rekurencyjne.

Metoda rekurencyjna obliczania całki $I_n = \int f_n(x)dx$ polega na obliczeniu całki dla $n = 1$ (lub $n = 0$) i na sprowadzeniu całki I_n do całki I_{n-1} (lub wcześniejszej).

Przykład. Obliczyć całkę $I_n = \int e^{-x}x^n dx$.

Otóż $I_0 = \int e^{-x}dx = -e^{-x} + C$. Całkując przez części całkę I_n (dla $n > 0$) mamy

$$\begin{aligned} I_n &= -x^n e^{-x} + \int e^{-x} \cdot n \cdot x^{n-1} dx = \\ &= -x^n e^{-x} + n \int e^{-x} x^{n-1} dx = -x^n e^{-x} + n \cdot I_{n-1} \end{aligned}$$

W szczególności

$$I_1 = -xe^{-x} + I_0$$

$$I_2 = -x^2 e^{-x} + 2I_1, \dots \quad .$$

Mnożąc kolejno I_0 przez $n!$, I_1 przez $\frac{n!}{1!}, \dots, I_{n-1}$ przez $\frac{n!}{(n-1)!}$ i dodając otrzymujemy

$$\int e^{-x} x^n dx = -n! e^{-x} (1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^3}{n!}) + C \ .$$

Całki funkcji wymiernych.

Funkcją wymierną nazywamy iloraz dwóch wielomianów. Całka funkcji wymiernej jest więc postaci

$$\int \frac{W_1(x)}{W_2(x)} dx = \int \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0} dx \ . \quad (1)$$

Twierdzenie. (o rozkładzie funkcji wymiernej na ułamki proste). *Przy obliczaniu całki (1) należy postępować w następujący sposób.*

1^0) *Jeżeli stopień licznika nie jest mniejszy niż stopień mianownika* $(n \geq m)$, *to licznik dzielimy przez mianownik i funkcję podcałkową przedstawiamy jako sumę wielomianu oraz funkcji wymiernej, w której już stopień licznika jest mniejszy niż stopień mianownika* $(n < m)$.

2^0) *Jeżeli* $n < m$, *to funkcję podcałkową rozkładamy na tzw. ułamki proste, tj. na wyrażenia postaci*

$$\frac{A}{(x-a)^k} \qquad \text{oraz} \qquad \frac{Bx + C}{(x^2 + dx + e)^p} \ ,$$

gdzie A, B, C, a, d, e *są stałe, przy czym* $d^2 - 4e < 0$ *(wyróżnik trójmianu* $cx^2 + dx + e = 0$ *jest ujemny),* k *i* p *są liczbami naturalnymi.*

CDN !!! na ćwiczeniach ...

Uwagi o ćwiczeniach.

Spora część materiału nie nie wymaga wprowadzania na wykładzie. Dotyczy to obliczania całek - bo z definicji nie byłoby to praktycznie możliwe.

Materiał ćwiczeń zakłada obliczanie całek:

- przez części,
- przez podstawienia,
- wymiernych,
- wybranych funkcji niewymiernych,
- trygonometrycznych,
- ....

Mam tylko nadzieję, że wszyscy zdążą ...

Zadanie 1.

Obliczyć całki:

(a) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+2x-3}$,

(b) $\displaystyle\int \frac{(x+1)(x^2-3)}{x^2}\,dx$,

(c) $\displaystyle\int \frac{x(\sqrt{x}-x^2\sqrt[3]{x})}{\sqrt[3]{x}}\,dx$.

(d) $\displaystyle\int \sqrt{2\operatorname{arctg} x-2}\,\frac{dx}{1+x^2}$,

Zadanie 2.

Na podstawie twierdzenia o całkowaniu przez części obliczyć całki:

(a) $\int x^4 \ln x dx$,

(b) $\int x^2 3^x dx$,

(c) $\int \frac{1}{2} e^x \sin^2 x dx$.

Zadanie 3.

Na podstawie twierdzenia o podstawianiu dla całek nieoznaczonych obliczyć całki:

(a) $\displaystyle\int \frac{e^x}{3+4e^x}\,dx$,

(b) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2(1+x^2)^2}$,

(c) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\ln^3 x}$.

Zadanie 4.

Wyprowadzić wzory rekurencyjne dla następujących całek:

(a) $\int x^n e^x dx$,

(b) $\int \ln^n x dx$.

Zadanie 5.

Obliczyć całki funkcji niewymiernych:

(a) $\int \frac{8x+3}{\sqrt{4x^2+3x+1}} dx$,

(b) $\int \frac{x+1}{\sqrt{8+2x-x^2}} dx$,

(c) $\int \sqrt{3-2x-x^2} dx$.

Zadanie 6.

Obliczyć całki:

(a) $\int \frac{\cos x}{\sqrt[3]{\sin^2 x}} dx$,

(b) $\int \frac{\sin 2x dx}{\sqrt{1 - \sin^4 x}}$,

(c) $\int \frac{dx}{\sin x}$.

Całka oznaczona.

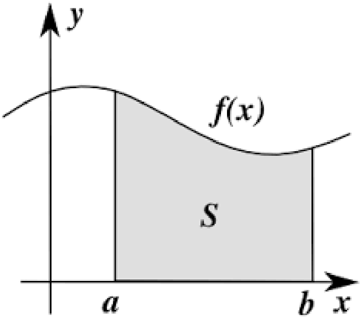
Punktem wyjścia naszych rozważań będzie powiązanie całki nieoznaczonej z polem obszaru, prowadzące do pojęcia całki oznaczonej.

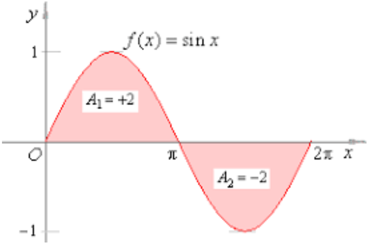
Definicja. Niech F będzie funkcją pierwotną dla funkcji ciągłej f w przedziale $< a, b >$. Wtedy *całką oznaczoną* z funkcji f w przedziale $< a, b >$ nazywamy liczbę $F(b) - F(a)$ i oznaczamy ją

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Liczby a i b nazywamy odpowiednio *dolną i górną granicą całkowania*. Piszemy również $[F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$.

Różnica $F(b) - F(a)$ ma swoją interpretację geometryczną jako pole obszaru ograniczonego krzywą $y = f(x)$ oraz osią OX, gdy f jest dowolną funkcją ciągłą i nieujemną w $< a, b >$.


y
f(x)
S
a
b
x


y
$f(x) = \sin x$
1
$A_1 = +2$
O
π
2π
x
$A_2 = -2$
−1

Twierdzenie. (o podstawowych własnościach całki oznaczonej). *Niech f i g będą funkcjami ciągłymi w $< a, b >$. Wtedy*

1) $\int_a^b 0 dx = 0$

2) $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx \quad , \quad a < b$

3) $\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx \quad ,$

$\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx$

4) *Jeżeli* $a < c < b$, *to*

$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

5) Jeżeli $f(x) \leq g(x)$ w $< a, b >$, to

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx.$$

W szczególności, gdy $f(x) \geq 0$ w $< a, b >$, to $\int_a^b f(x)dx \geq 0$.

6) $$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b | f(x) | dx \quad .$$

7) Jeżeli $0 < h \leq b - a$, to istnieje taka liczba $\vartheta \in (0, 1)$, że $\int_a^{a+h} f(x)dx = hf(a + \vartheta h)$; w szczególności $\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq (b - a) \max_{a \leq x \leq b} | f(x) |$.

8) Jeżeli $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ dla $a \leq x \leq b$, to $F'(x) = f(x)$ w $< a, b >$. W szczególności, jeżeli F ma ciągłą pochodną F' w $< a, b >$, to $\int_a^x F'(x)dx = F(x) - F(a)$.

Dalsze własności są analogiczne do całki nieoznaczonej:

Twierdzenie. (o całkowaniu całek oznaczonych przez podstawianie). *Niech funkcja f będzie ciągła w $< a, b >$ i niech funkcja g ma ciągłą pochodną g' w $< \alpha, \beta >$, $a \leq g(t) \leq b$ dla $t \in < \alpha, \beta >$, $g(\alpha) = a$, $g(\beta) = b$. Wtedy* $\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)dt$.

Twierdzenie. (o całkowaniu przez części całek oznaczonych). *Jeżeli funkcje f i g mają pochodne f' i g' ciągłe w $< a, b >$, to*

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx \ ,$$

gdzie $[f(x)g(x)]_a^b = f(b)g(b) - f(a)g(a)$.

Wcześniej omówiona została całka oznaczona tzn. całka z funkcji ciągłej w przedziale $[a, b]$ określona w przypadku, gdy funkcja całkowalna f była ciągła (ograniczona) oraz przedział $[a, b]$ był ograniczony.

Na początek zdefiniujmy całkę niewłaściwą funkcji określonej na przedziale postaci $[a, +\infty)$, następnie $(-\infty, b]$, a dalej na całym zbiorze liczb rzeczywistych.

Całka niewłaściwa I rodzaju w przedziale $[a, +\infty)$.

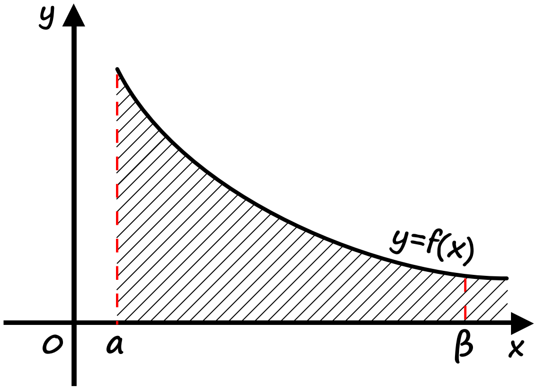
Niech $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ będzie funkcją całkowalną w sensie Riemanna na każdym z przedziałów domkniętych $[a, \beta]$, gdzie $a < \beta$. **Całką niewłaściwą Riemanna I rodzaju** funkcji f nazywamy granicę $\lim\limits_{\beta \to +\infty} \int\limits_a^\beta f(x)\, dx$ i oznaczamy ją symbolem

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)\, dx = \lim_{\beta \to \infty} \int_a^\beta f(x)\, dx.$$

Całka niewłaściwa I rodzaju w przedziale $[a, +\infty)$.

Jeżeli powyższa granica istnieje i jest skończona, to mówimy, że całka niewłaściwa $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ jest **zbieżna**, natomiast jeżeli granica ta nie istnieje lub jest niewłaściwa, to mówimy, że całka niewłaściwa $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ jest **rozbieżna**.

Interpretacja geometryczna całki niewłaściwej I rodzaju w przedziale $[a, +\infty)$



Przykładowe zastosowania w informatyce.

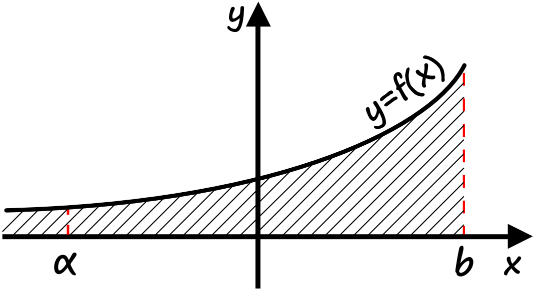
- gęstości i dystrybuanty rozkładów zmiennych losowych,
- całka Fouriera i transformata Fouriera (i inne transformaty),
- splot funkcji (filtry itp.),
- funkcje specjalne - gamma i beta Eulera,
- kryterium całkowe zbieżności szeregów,
- ...

Definicja. Całka niewłaściwa I rodzaju w przedziale $(-\infty, b]$.

W analogiczny sposób definiuje się całkę niewłaściwą Riemanna I rodzaju $\int_{-\infty}^{b} f(x)dx$ funkcji f określonej na przedziale $(-\infty, b]$, jak również pojęcia jej zbieżności i rozbieżności. Przyjmujemy wówczas, że

$$\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)dx := \lim_{\alpha \to -\infty} \int\limits_{\alpha}^{b} f(x)dx.$$

Interpretacja geometryczna całki niewłaściwej I rodzaju w przedziale $(-\infty, b]$.



Definicja. Całka niewłaściwa I rodzaju w zbiorze liczb rzeczywistych.

Niech $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie funkcją całkowalną w sensie Riemanna w każdym przedziale domkniętym $[\alpha, \beta]$ zawartym w $\mathbb{R}$. **Całkę niewłaściwą Riemanna I rodzaju** funkcji f w $\mathbb{R}$ definujemy jako

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx := \int_{-\infty}^{a} f(x)dx + \int_{a}^{+\infty} f(x)dx,$$

gdzie a jest dowolnie wybranym punktem z $\mathbb{R}$.

Jeżeli obie całki w powyższej sumie są zbieżne, to mówimy, że całka $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ jest zbieżna. Gdy któraś z tych całek nie istnieje lub jest rozbieżna, to mówimy, że całka $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ jest rozbieżna.

Należy podkreślić, że jeżeli całka $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ jest zbieżna, to można wykazać, że jej wartość nie zależy od wyboru punktu $a \in \mathbb{R}$ w powyższej definicji.

Kryterium całkowe zbieżności szeregów.

Kolejnym klasycznym **zastosowanie całek niewłaściwych** jest badanie za ich pomocą zbieżnosci szeregów (a to ważne w informatyce).

Twierdzenie. Ciąg (a_n) zadany jest poprzez nieujemną funkcję nierosnącą określoną na $(0,\infty)$ wzorem $a_n = f(n)$.

Wtedy szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny (do granicy właściwej) wtedy i tylko wtedy gdy zbieżna (do granicy właściwej) jest całka

$$\int_1^\infty f(x)\,dx.$$

[Dowód] Całkę od 1 do n można oszacować z góry przez sumę całkową s_{n-1} a z dołu przez $s_n - a_1$. Dalej skorzystać – w przypadku zbieżności – z twierdzenia o ciągu monotonicznym i ograniczonym, a w przypadku rozbieżności – z twierdzenia o trzech ciągach.

PRZYKŁAD

Ciąg postaci

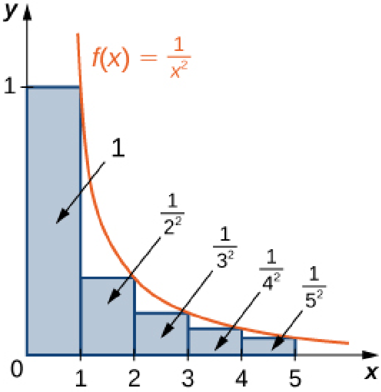
$$a_n = \frac{1}{n^\alpha}$$

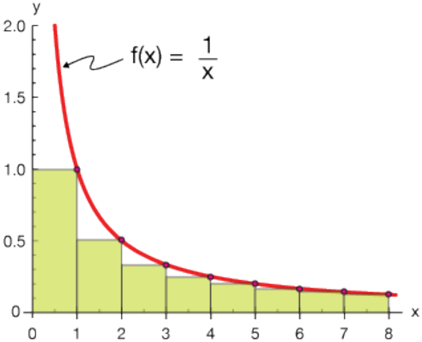
jest sumowalny (czyli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny) dla $\alpha > 1$,

a niesumowalny dla $0 < \alpha \leq 1$ (mimo że wyrazy zawsze dążą do zera! - zachodzi warunek konieczny zbieżności szeregu).

Uwaga: ten wynik ma natychmiastowe zastosowanie przy badaniach **dyskretnej transformaty Fouriera**! Zbieżność występujących tam szeregów jest zapewniona poprzez te kryterium wraz z warunkami nakładanymi na całki Fouriera!

Interpretacja graficzna.





Splot.

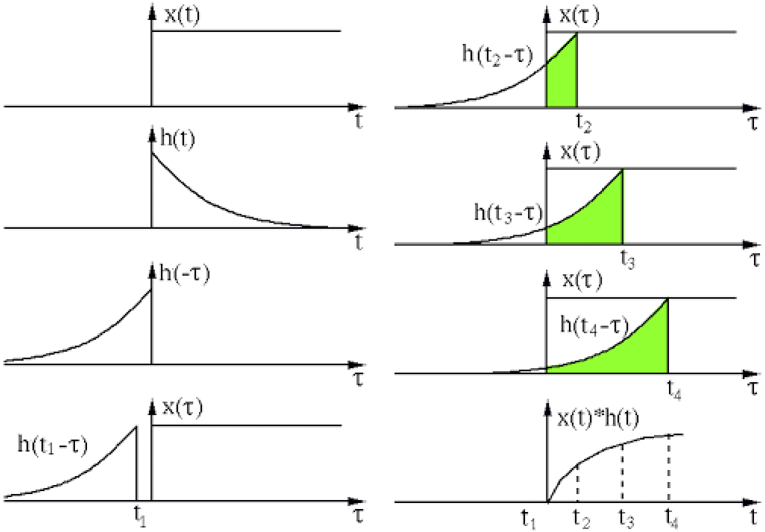
Splotem dwu funkcji $f(t)$ i $g(t)$ nazywamy funkcję

$$(f * g)(t) := \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t-\tau)\, d\tau.$$

W zastosowaniach informatycznych zachodzi niekiedy potrzeba dyskretyzacji funkcji i przyjęcie miary dyskretnej, co daje splot (dyskretny):

$$(r * s)_j := \sum_{k=-\frac{M}{2}+1}^{\frac{M}{2}} r_k \cdot s_{j-k}$$

Wzór wynika: albo z przyjęcia miary dyskretnej (ale to wymaga znajomości teorii miary i całki), albo po prostu z dyskretyzacji całki (co pokażemy później - całka Riemanna) - wprost z definicji.



x(t)
t
h(t)
t
h(-τ)
τ
x(τ)
h(t1 -τ)
t1
τ
x(τ)
h(t2 -τ)
t2
τ
x(τ)
h(t3 -τ)
t3
τ
x(τ)
h(t4 -τ)
t4
τ
x(t)*h(t)
t1
t2
t3
t4
t

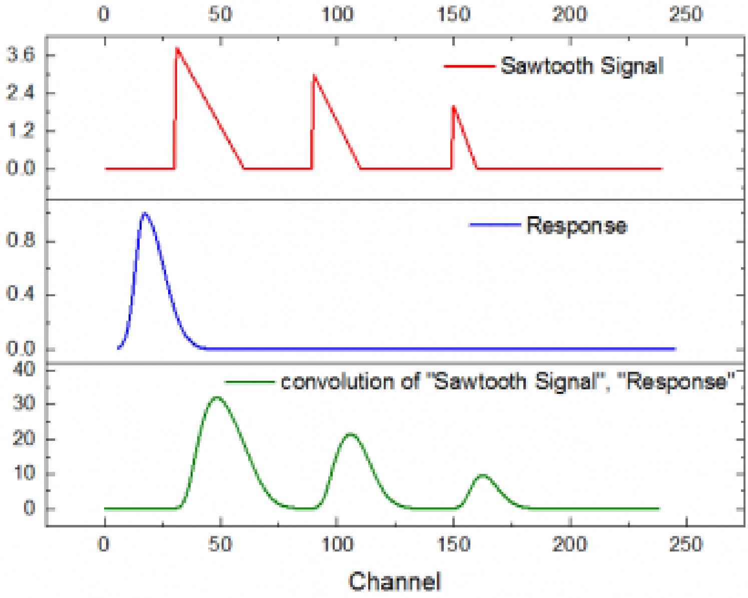
Splot - cd.

Splot jest operacją przemienną, tzn.

$$r * s = s * r.$$

Zazwyczaj jednak w zastosowaniach te dwie splatane funkcje mają inne znaczenie. Np. w **teorii sygnałów** jedna z nich, powiedzmy s, reprezentuje "prawdziwy" sygnał (niezaburzone wyniki) i jest funkcją o (przynajmniej teoretycznie) nieograniczonej dziedzinie. Funkcja r (druga funkcja) jest natomiast funkcją odpowiedzi aparatury, i ma skończoną dziedzinę, zazwyczaj odcinek zawierający zero (uzupełniamy ją do prostej kładąc zero wszedzie poza naturalną dziedziną). Operacja splotu $r * s$ opisuje wówczas rozmycie sygnału (danych) s zgodnie z przepisem danym funkcją odpowiedzi r. Np. dla funkcji odpowiedzi będącej deltą Diraca dla czasu t_0 tzn. $r(t) = \delta(t - t_0)$, splot $r * s$ daje sygnał przesunięty o t_0:

$$(r * s)(t) = s(t - t_0).$$


0
50
100
150
200
250
3.6
2.4
1.2
0.0
Sawtooth Signal
0.8
0.4
0.0
Response
40
30
20
10
0
convolution of "Sawtooth Signal", "Response"
Channel

Splot obrazów.

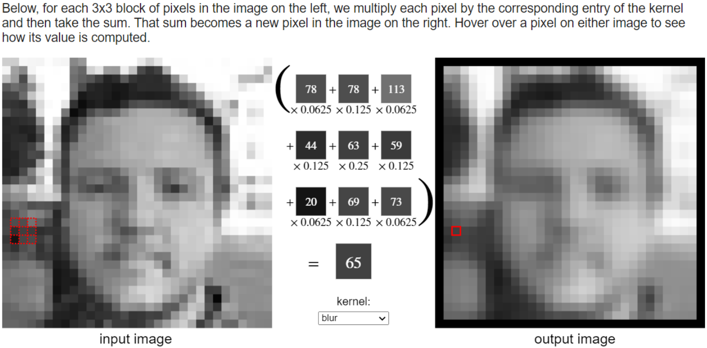
Mając dane funkcje obrazów $f : [0, w] \times [0, h] \to [0, 1]$ oraz $g : [0, v] \times [0, u] \to [0, 1]$, splotowi obrazów będzie odpowiadała następująca funkcja $s : [0, w + v] \times [0, u + h] \to [0, 1]$ $\forall_{x \in [0, w + v], y \in [0, u + h]}$

$$s(x, y) = \int_{\max\{0, y-u\}}^{\min\{y, h\}} \int_{\max\{0, x-v\}}^{\min\{x, w\}} f(z, t) \cdot g(x - z, \ y - t) \ dz \ dt$$

albo oczywiście wersja dyskretna (obrazy binarne).

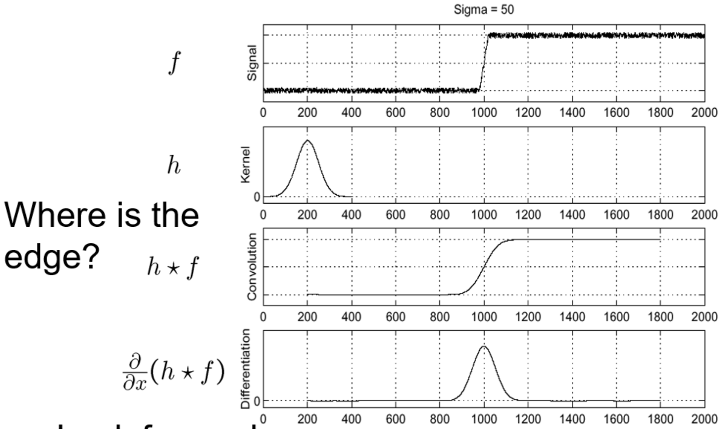
Do lektury własnej...

ciekawy materiał o splocie obrazów - proszę poczytać (po angielsku) - interaktywna strona, można zmieniać filtry lub utworzyć własne...



Można też tutaj - po polsku.

A to w badaniach obrazu...



Rozmycie Gaussa.

Rozmycie obrazu przeważnie polega na tym, że jasność danego punktu obrazu zastępowana jest pewnego rodzaju uśrednioną wartością jasności punktów z jego otoczenia.

Taka właśnie idea przyświeca stosowaniu rozmycia Gaussa – dla danego punktu rozważa się wszystkie możliwe przesunięcia płaszczyzny obrazu, z prawdopodobieństwami wynikającymi z dwuwymiarowego rozkładu normalnego (Gaussa).

Wynikiem przekształcenia jest wartość oczekiwana jasności punktu po przesunięciu – oczywiście oznacza to, że najsilniej brane pod uwagę są obszary znajdujące się najbliżej rozważanego punktu. Specyficzny wzór na rozmycie Gaussa dla danej funkcji obrazu $f : [0, w] \times [0, h] \to [0, 1]$ można by zatem zapisać następująco: $\forall_{x \in [0,w], y \in [0,h]}$

$$s(x, y) = \int_0^h \int_0^w f(z, t) \cdot \phi_{\mu,\sigma}(x - z) \cdot \phi_{\mu,\sigma}(y - t) \, dz \, dt \quad (1)$$

Cała konstrukcja jest w podanych źródłach. Koniecznie trzeba wiedzieć: całka Riemanna i całka oznaczona (o ile istnieją) są równe!

To powoduje, że konstrukcja całki Riemanna jest idealna do obliczeń przybliżonych, a więc i numerycznych. Wszystko, co będzie na metodach numerycznych o całkowaniu numerycznym ma w swojej podstawie właśnie konstrukcję całki Riemanna.

A tu prezentacje: skrypt ilustracyjny sumy dolnej w "Mathematica" oraz drugi skrypt ilustracyjny sumy górnej w "Mathematica".

Niech $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ograniczoną (niekoniecznie ciągłą).

Zbiór punktów: $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$, gdzie $a = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_n = b$, nazywamy **podziałem przedziału** $[a, b]$. Niech:

$$m_i = \inf\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$$

$$M_i = \sup\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$$

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$$

Suma dolna i suma górna Riemanna.

Sumą dolną $L(f,P)$ (odpowiednio sumą górną $U(f,P)$) funkcji f dla podziału P nazywamy liczbę:

$$L(f,P) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i,$$

$$\left(U(f,P) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i \right).$$

Jeżeli $m_i = \inf\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$ i $M_i = \sup\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$, to dla dowolnego podziału P:

$$m(b-a) \leq L(f,P) \leq U(f,P) \leq M(b-a), \text{gdzie:}$$

$$m = \inf\{f(x) : x \in [a,b]\},$$

$$M = \sup\{f(x) : x \in [a,b]\}.$$

Z ostatniego faktu wynika, że sumy dolne i górne są ograniczone dla dowolnego podziału.

Całka dolna i górna.

Całką dolną (całką górną) Riemanna funkcji f na przedziale $[a,b]$ nazywamy liczby:

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \sup\{L(f,P) : \text{P - podział przedziału } [a,b]\}$$

$$\left(\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \inf\{U(f,P) : \text{P - podział przedziału } [a,b]\}\right)$$

[funkcja całkowalna w sensie Riemanna] Funkcja f jest całkowalna w sensie Riemanna na przedziale $[a,b]$ (krótko: $f \in \mathcal{R}$) jeżeli całka dolna jest równa całce górnej. Wspólną wartość obu tych całek nazywamy całką Riemanna funkcji f na przedziale $[a,b]$ i oznaczamy symbolem:

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

Zagęszczenie podziału.

Mówimy, że podział P^* jest zagęszczeniem podziału P, jeżeli $P \subset P^*$. Jeżeli dane są dwa podziały P_1 i P_2, to ich wspólnym zagęszczeniem nazywamy podział $P_1 \cup P_2$.

Jeżeli P* jest zagęszczeniem podziału P, to:

$$L(f,P) \leq L(f,P^*) \qquad U(f,P^*) \leq U(f,P)$$

Zachodzi nierówność:

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx \leq \overline{\int_a^b} f(x)\,dx.$$

Kryterium całkowalności w sensie Riemanna.

Funkcja f jest całkowalna w sensie Riemanna na przedziale $[a,b]$ wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$\forall_{\varepsilon>0}\exists_P \quad U(f,P)-L(f,P)<\varepsilon.$$

Jeżeli funkcja $f[a,b]\to\mathbb{R}$ jest ciągła, to jest całkowalna w sensie Riemanna na tym przedziale.

Podobnie można pokazać, że jeżeli funkcja f jest monotoniczna na $[a,b]$ lub ograniczona i ma skończoną ilość punktów nieciągłości w $[a,b]$ to funkcja f jest całkowalna w sensie Riemanna na $[a,b]$.

Własności całki Riemanna.

Kilka podstawowych własności całki Riemanna:

1. Jeśli f i $g \in \mathcal{R}$ to $f \cdot g \in \mathcal{R}$ oraz $c \cdot f \in \mathcal{R}$. Ponadto całka Riemanna jest liniowa, tzn:

$$\int_a^b f(x) + g(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx + \int_a^b g(x)\, dx$$

$$\int_a^b cf(x)\, dx = c \int_a^b f(x)\, dx$$

2. Jeżeli $f, g \in \mathcal{R}$ oraz $f(x) \leq g(x)$, to $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$

Jeżeli f jest całkowalna w sensie Riemanna na $[a, b]$ oraz $a < c < b$, to f jest całkowalna w sensie Riemanna na $[a, c]$ i $[c, b]$ oraz:

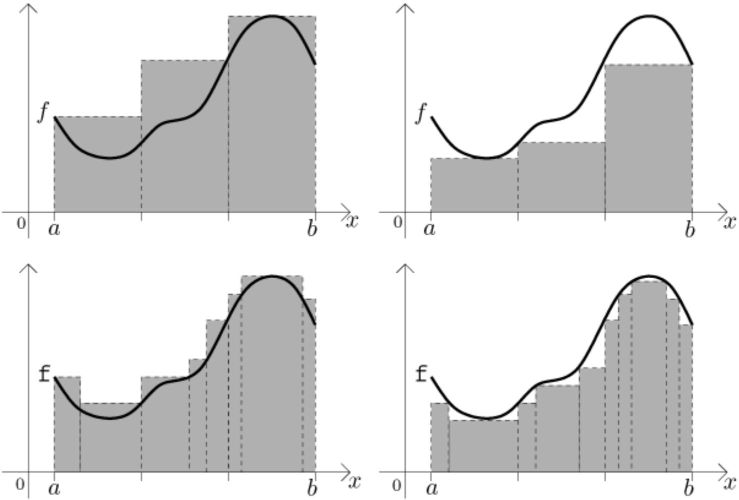
$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx$$

Jeżeli funkcja f jest ciągła w przedziale $[a, b]$, to istnieje punkt $c \in [a, b]$ taki, że:

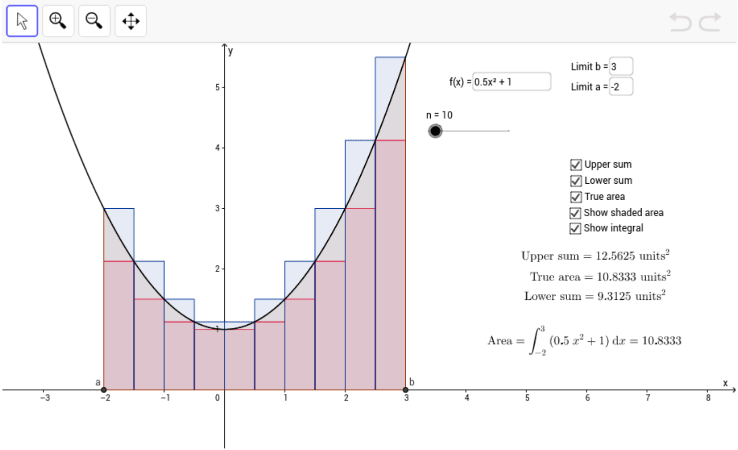
$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\, dx.$$

Liczbę $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\, dx$ nazywamy wartością średnią całkową funkcji f w przedziale $[a, b]$. Wzór na wartość średnią możemy też zapisać:

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\, dx = f(a + \theta(b-a)) \ , \ \theta \in [0, 1].$$

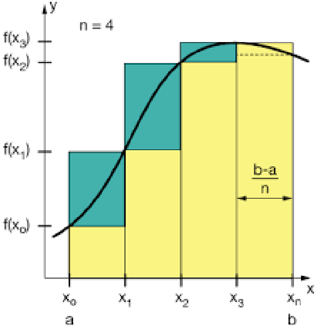


Sumy Riemanna...



Sumy górne i dolne - zwracam uwagę, że **jeżeli** funkcja jest całkowalna, to **możemy** ograniczyć się do podziałów na równe części.

Podstawowe metody całkowania numerycznego to po prostu definicja całki Riemanna z doborem: **podział na równe części** oraz z **ustaloną zasadą** wyboru ponktów pośrednich. Np. lewe końce przedziałow (metoda prostokątów lewych - na rysunku), prawe końce przedziałow (metoda prostokątów prawych), czy środkowe... (wzory: na metodach numerycznych)



Nawet metoda trapezów to tylko lekko zmodyfikowana definicja całki Riemanna! Metody Simpsona czy Gaussa, to już inny dział - ale nadal analizy matematycznej: aproksymacja...

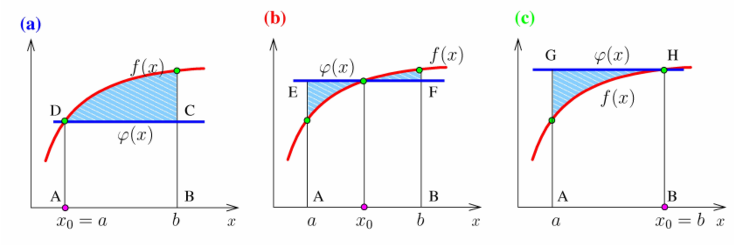
Metoda prostokątów:

W zależności od wyboru położenia węzła x_0 otrzymujemy wzory:

(a) **lewych prostokątów, gdy** $x_0 = a$

(b) **środkowych prostokątów, gdy** $x_0 = (a+b)/2$

(c) **prawych prostokątów, gdy** $x_0 = b$



Ograniczenia całkowania numerycznego.

Jeśli się da - całki liczymy w oparciu o całki oznaczone!

Jeśli nie, a niestety nie zawsze się da (np. nie potrafimy znaleźć całki nieoznaczonej lub jest ona funkcją nieelementarną (!)), to kontrolujemy stabilność numeryczną algorytmów (to już inny przedmiot...).

Liczymy całkę (wzór rekurencyjny):

$$a_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x+5}\, dx$$

i po całkowaniu przez części (to już programista, a nie komputer!) uzyskamy:

$$a_n = \frac{1}{n} - 5a_{n-1}.$$

Metoda punktu średniego (środkowych prostokątów).

Jeżeli f jest funkcją ciągłą na przedziale $[a,b]$ oraz π jest podziałem przedziału $[a,b]$ takim, że $\pi: \ a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$

to $\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}[f(\overline{x}_i) + f(\overline{x}_2) + \ldots + f(\overline{x}_n)],$ gdzie

$$\overline{x}_i = \frac{1}{2}(x_{i-1} + x_i).$$

Przykład 14.

Przybliżyć całkę $\int_1^2 \frac{1}{x} dx$ metodą punktu średniego.

Stąd

$$\int_1^2 \frac{1}{x} dx \approx 0,1 \left[\frac{1}{1,05} + \frac{1}{1,15} + \frac{1}{1,25} + \ldots + \frac{1}{1,195} \right] \approx 0.6928 \ .$$

$$y_0 = \int_0^1 \frac{dx}{x+5} = \ln(x+5)\Big|_0^1 = \ln 6 - \ln 5 \approx 0{,}182 \quad \text{błąd } |\varepsilon| \le 5 \cdot 10^{-4}$$

$$y_1 = 1 - 5y_0 \approx 0{,}090 \quad \text{błąd } |\varepsilon| \le 25 \cdot 10^{-4}$$

$$y_2 = \frac{1}{2} - 5y_1 \approx 0{,}050 \quad \text{błąd } |\varepsilon| \le 125 \cdot 10^{-4}$$

$$y_3 = \frac{1}{3} - 5y_2 \approx 0{,}083 \quad \text{błąd } |\varepsilon| \le 625 \cdot 10^{-4} \quad (y_3 > y_2 - \textbf{nie poprawne!})$$

$$y_4 = \frac{1}{4} - 5y_3 \approx -0{,}165 \quad \text{błąd } |\varepsilon| \le 3125 \cdot 10^{-4} \quad (\text{ujemna wartość} - \textbf{absurd!})$$

I zobaczmy: błędy rosną. I od kiedy to calka z funkcji nieujemnej (pole pod krzywą) może wyjść ujemna? Zauważmy, że korzystamy tu z ciągu rekurencyjnego. Warto "popracować" nad algorytmem dla ciągów rekurencyjnych...

Całkowanie numeryczne - kolejne metody.

Przypuśćmy, że mamy znaleźć całkę $\int_a^b f(x)dx$, gdzie $f(x)$ jest pewną funkcją ciągłą określoną w przedziale $< a, b >$. Poprzednio podaliśmy wiele przykładów obliczania takich całek za pomocą funkcji pierwotnych.

Zauważmy jednak, że wszystkie metody daje się zastosować jedynie do dość wąskiej klasy całek. Poza tą klasą musimy się uciekać do metod rachunku przybliżonego (całki Riemanna).

Obecnie poznamy najprostsze z metod, w których wzory przybliżone na całkę wykorzystują pewną wartość funkcji podcałkowej, obliczane dla pewnych wartości zmiennej niezależnej. Wzory te otrzymuje się najczęściej z równań geometrycznych, traktując całkę oznaczoną $\int_a^b f(x)dx$ jako pole pewnej figury geometrycznej ograniczonej krzywą $f(x)$.

Metoda trapezów.

Jeżeli funkcja f jest ciągła na przedziale domkniętym $[a, b]$ oraz jeżeli π jest podziałem przedziału $[a, b]$ takim, że $\pi: \ a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$, to

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2n}[f(x_0)+2f(x_1)+2f(x_2)+\ldots+2f(x_{n-1})+f(x_n)]. \ (*)$$

Funkcja f jest funkcją ciągłą na przedziale $[a, b]$. Dokonajmy podziału przedziału $[a, b] \ : \ a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$. Przez P_k oznaczamy punkt, który powstał z przecięcia krzywej $y = f(x)$ oraz prostej $x = x_k, \ \ k = 0, 2, \ldots, n$. Przez Δx oznaczamy $\Delta x = x_i - x_{i-1}$. Łączymy łamaną kolejne punkty $P_0, P_1, \ldots, P_n$.

Zróbmy rysunek: powstają trapezy. Korzystając ze znanego z geometrii wzoru na pole trapezu $P = \frac{1}{2}(a+b)\cdot h$, gdzie a, b są podstawami trapezu, a h jego wysokością obliczmy pole $\mid P^i \mid$ trapezu P^i

$$\mid P^i \mid = \frac{\Delta x}{2}[f(x_{i-1} + f(x_i)] \; .$$

Pole obszaru jest sumą pól wszystkich trapezów, a więc

$$\mid P \mid = \mid P^1 \mid + \ldots + \mid P^n \mid = \frac{\Delta x}{2}(f(x_0) + f(x_1)) + \frac{\Delta x}{2}(f(x_1) + f(x_2)) + \ldots +$$
$$+ \frac{\Delta x}{2}(f(x_{n-1}) + 2f(x_n)) =$$
$$= \frac{\Delta x}{2}[f(x_0) + 2(x_1) + 2f(x_2) + \ldots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)] \; .$$

Łatwo zauważyć, że otrzymaliśmy taką samą sumę jak we wzorze $(*)$.

Tak więc całka $\int_a^b f(x)dx$ tzn. obszar ograniczony krzywą $y = f(x)$, osią Ox oraz rzędnymi $x = a$, $x = b$ została obliczona z pewnym przybliżeniem. Oczywiście wynik ten obarczony jest błędem. Poniżej podamy jaki błąd maksymalny może wystąpić w przypadku obliczania całki oznaczonej $\int_a^b f(x)dx$ przy pomocy metody trapezów.

Błąd przybliżenia dla metody trapezów. $(**)$

Jeżeli M jest dodatnią liczbą rzeczywistą taką, że $| f''(x) | < M$ dla każdego $x \in [a, b]$, to błąd jaki pojawia się w przypadku obliczania całki oznaczonej $\int_a^b f(x)dx$ metodą trapezów jest nie większy niż $\dfrac{M(b-a)^3}{12n^2}$.

Przykład 12.

Wykorzystując metodę trapezów, przybliżyć całkę $\int_1^2 \frac{1}{x}dx$, dla $n = 10$. Podać błąd przybliżenia.

Ponieważ $\dfrac{b-a}{2n} = (2-1)\cdot\dfrac{1}{20} = 0,05$, więc wykorzystując wzór $(*)$ otrzymujemy

$$\int_1^2 \frac{1}{x}dx \approx (0,05)\cdot(13,8754) \approx 0.6938\ .$$

Obliczamy błąd jaki wystąpił w powyższych obliczeniach.
Obliczamy drugą pochodną funkcji $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}\ , \qquad\qquad f''(x) = \frac{2}{x^3}\ .$$

Aby obliczyć błąd maksymalny musimy tak dobrać stałą M, aby $| f''(x) | < M$. Ponieważ maksymalną wartością $f''(x) = \frac{2}{x^3}$ w przedziale $[1, 2]$ jest $f''(1) = \frac{2}{1^3} = 2$, więc możemy przyjąć $M = 2$. Stąd na mocy $(**)$ maksymalny błąd obliczenia jaki wystąpił przy stosowniu metody trapezów jest nie większy niż wartość

$$\frac{M(b-a)^3}{12n^2} = \frac{2 \cdot (2-1)^3}{12 \cdot (10)^2} = \frac{1}{600} < 2 \cdot 10^{-3} \ .$$

Metoda Simpsona.

Jeżeli f jest funkcją ciągłą określoną w przedziale $[a, b]$ oraz jeżeli π jest podziałem przedziału $[a, b]$ takim, że $\pi : \ a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$, to

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{3n}\Big[f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + \ldots + \\ + 2f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)\Big] \ .$$

Rozważmy funkcję postaci $y = cx^2 + dx + e$. Jeżeli $c \neq 0$, to wykresem tej funkcji jest parabola.

Pole A obszaru wynosi

$$A = \int_{-h}^{h} (cx^2 + dx + e)dx = \left[c\frac{x^3}{3} + d\frac{x^2}{2} + ex\right]_{-h}^{h} = \frac{1}{3}h(2ch^2 + 6e) \ .$$

Ponieważ punkty P_0, P_1, P_2 leżą na paraboli więc współrzędne tych punktów $P_0(-h, y_0)$, $P_1(0, y_1)$, $P_2(h, y_2)$ spełniają równanie tej paraboli tzn. $y_0 = ch^2 - dh + e$, $y_1 = e$, $y_2 = ch^2 + dh + e$.

Stąd $y_0 + 4y_1 + y_2 = 2ch^2 + 6e$. W konsekwencji $A = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2)$.

Pole B obszaru wynosi

$$B = \int_{x_0}^{x_2} (cx^2 + dx + e)dx = \left[c\frac{x^3}{3} + d\frac{x^2}{2} + ex \right]_{x_0}^{x_2} =$$

$$= c\frac{x_2^3}{3} + d\frac{x_2^2}{2} + ex_2 - c\frac{x_0^3}{3} - d\frac{x_0^2}{2} - ex_0 =$$

$$= \frac{c}{3}(x_2^3 - x_0^3) + \frac{d}{2}(x_2^2 - x_0^2) + e(x_2 - x_0) =$$

$$= \frac{c}{3}(x_2 - x_0)(x_2^2 - x_2x_0 + x_0^2) + \frac{d}{2}(x_2 - x_0)(x_2 + x_0) + e(x_2 - x_0) =$$

$$= (x_2 - x_0)\left[\frac{c}{3}(x_2^2 - x_2x_0 + x_0^2) + \frac{d}{2}(x_2 + x_0) + e \right] .$$

Jeżeli $f(x) \geq 0$ na $[a, b]$ to w metodzie Simpsona całkę oznaczoną przybliżamy wartością pola obszaru znajdującego się pod krzywą f w przedziale $[a, b]$.

Niech $h = \dfrac{b-a}{n}$, $\pi :\ a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b_n$.

Niech $P_k(x_k, y_k)$ będzie punktem na krzywej $y = f(x)$ powstałym z przecięcia wykresu funkcji f oraz prostej $x = x_k$. Jeżeli punkty P_0, P_1, P_2 leżą na paraboli $y = cx^2 + dx + e$ to pole obszaru poniżej łuku $P_0P_1P_2$ wyraża się wzorem $\frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2)$.

Jeżeli P_2, P_3, P_4 są punktami leżącymi na paraboli $y = cx^2 + dx + e$, która przybliża wykres naszej funkcji, to pole obszaru poniżej wyraża się wzorem $\frac{h}{3}(y_2 + 4y_3 + y_4)$.

Kontynuujemy nasze postępowanie dalej i dla punktów P_{n-2}, P_{n-1}, P_n otrzymujemy, że pole obszaru położonego poniżej paraboli przybliżającej wykres naszej funkcji od x_{n-2} do x_n wyraża się wzorem $\frac{h}{3}(y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n)$.

Sumując otrzymane wyniki mamy

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + \ldots + 2y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n) \ .$$

Błąd przybliżenia dla metody Simpsona.

Jeżeli M jest dodatnią liczbą rzeczywistą taką, że $|f^{(4)}(x)| < M$ dla każdego $x \in [a,b]$ (gdzie $f^{(4)}(x)$ oznacza czwartą pochodną funkcji f w punkcie x, to błąd jaki pojawia się w przypadku obliczania całki nieoznaczonej $\int_a^b f(x)dx$ metodą Simpsona jest nie większy niż: $\dfrac{M(b-a)^5}{180n^4}$.

Przykład 13.

Wykorzystując metodę Simpsona, przybliżyć całkę $\int_1^2 \frac{1}{x} dx$, dla $n = 10$.

Podać błąd przybliżenia. Ponieważ

$$\frac{b-a}{3n} = \frac{2-1}{30} = \frac{1}{30}$$

więc wykorzystując metodę Simpsona mamy

$$\int_1^2 \frac{1}{x} dx \approx \frac{1}{30} \cdot (20.7944) \approx 0.6932 \; .$$

Chcąc obliczyć błąd jaki wystąpił przy obliczaniu całki tą metodą należy znaleźć czwartą pochodną funkcji f

$$f(x) = \frac{1}{x} \, , \; f'(x) = -\frac{1}{x^2} \, , \; f''(x) = \frac{2}{x^3} \, , \; f'''(x) = -\frac{6}{x^4} \, , \; f^{(4)}(x) = \frac{24}{x^5} \; .$$

Ponieważ największą wartością pochodnej czwartego rzędu w przedziale $[1,2]$ jest

$$f^{(4)}(1) = 24$$

więc możemy przyjąć $M = 4$.

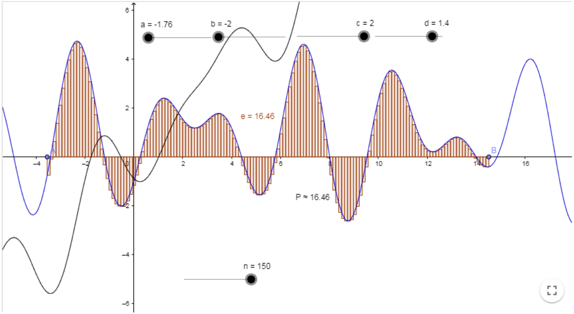
Na mocy naszych rozważań błąd jakiego szukamy jest nie większy niż $\frac{24(2-1)^5}{180(10)^4} = \frac{2}{150000} < 1,4 \cdot 10^{-5}$.

Zauważmy, że błąd jaki wystąpił przy obliczaniu całki metodą Simpsona jest mniejszy niż w przypadku stosowania metody trapezów.

Geogebra.

Wracamy do wykorzystania programu “Geogebra” do ilustracji materiału. Oczywiście: proszę uruchamiać skrypty na swoich komputerach...

Tutaj sumy Riemanna i całki. Całka a pole. Kolejne materiały między innymi tutaj oraz jeszcze tu. Inne materiały: opracować lub poszukać.



Klasyczny przykład zastosowania całek w **grafice komputerowej** to równanie renderowania Kajiya (co gorsza - potrzebne na ogół metody całkowania numerycznego :-)).
Inny przypadek: w **teorii kolejkowania** - np. równanie całkowe Pollaczka (ale też: o czym później) - całki podwójne niewłaściwe (prawdopodobieństwo opóźniania kolejkowania) - to w kolejnym wykładzie (niestety tylko o ile zdążymy!).

Absolutna "klasyka" - szacowanie sum (częste w obliczeniach) poprzez całki:

$$\int_{m-1}^{n} f(x)\,dx \leq \sum_{k=m}^{n} f(k) \leq \int_{m}^{n+1} f(x)\,dx.$$

A teraz zadanie: jakie są **założenia**, aby powyższy wzór był prawdziwy? Odpowiedzi szukaj na wykładach z analizy...

Przedstawimy poniżej podstawowe wzory pól ograniczonych krzywymi.

Twierdzenie. *Pole* $|P|$ *obszaru* P *ograniczonego dwiema krzywymi* $y = \varphi(x)$ *i* $y = \psi(x)$, *gdzie* $\psi(x) \geq \varphi(x)$ *dla* $a \leq x \leq b$ *i rzędnymi w punktach* $x = a$ *i* $x = b$ *wyraża się wzorem*

$$|P| = \int_a^b [\psi(x) - \varphi(x)]dx \ .$$

Twierdzenie. *Jeżeli krzywa k o równaniach parametrycznych* $x = x(t)$, $y = y(t)$, $\alpha \leq t \leq \beta$ *jest klasy* C^1 *(tzn. funkcje* $x(t)$ *oraz* $y(t)$ *mają ciągłe pochodne pierwszego rzędu) przy czym* $y(t) \geq 0$ *oraz* $x'(t) > 0$ *w* $< \alpha, \beta >$ *to pole* $\mid P \mid$ *obszaru* P *zawartego między tą krzywą, osią Ox i rzędnymi w punktach końcowych krzywej, wyraża się wzorem*

$$\mid P \mid = \int_{\alpha}^{\beta} y(t)x'(t)dt \ .$$

Przy założeniach twierdzenia oraz jeżeli $x'(t) < 0$ *w* $< \alpha, \beta >$ *mamy*

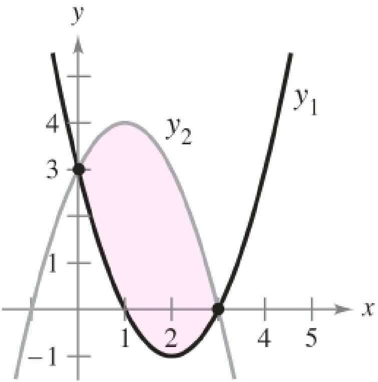
$$\mid P \mid = -\int_{\alpha}^{\beta} y(t)x'(t)dt \ .$$

Ćwiczenie.

Obliczyć samodzielnie pole pomiędzy krzywymi:

$$y_1 = x^2 - 4x + 3$$

$$y_2 = -x^2 + 2x + 3$$

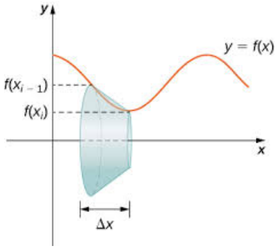


Obliczanie objętości i pola powierzchni brył obrotowych.

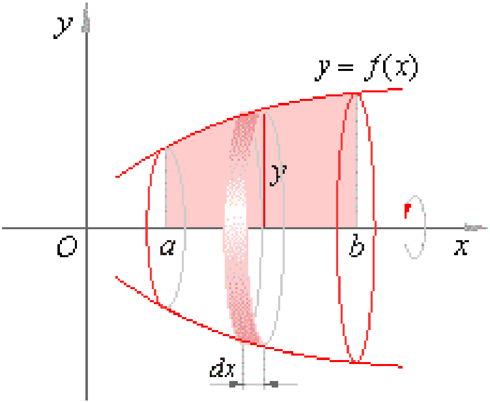
Niech dany będzie łuk AB krzywej o równaniu $y = f(x)$, gdzie $f(x)$ jest funkcją ciągłą i nieujemną w przedziale $< a, b >$.

Wówczas *objętość bryły obrotowej* ograniczonej powierzchnią, która powstaje, gdy łuk AB wraz z rzędnymi w końcu łuku obraca się dookoła osi Ox, obliczamy według wzoru

$$V = \pi \int_a^b y^2 dx \ .$$



Bryły obrotowe.



Pole powierzchni bryły obrotowej.

Pole powierzchni obrotowej powstałej przez obrót łuku AB dookoła osi OX obliczamy według wzoru

$$S = 2\pi \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx \ ,$$

przy założeniu dodatkowym, że funkcja $y = f(x)$ ma w przedziale $a \leq x \leq b$ ciągłą pochodną.

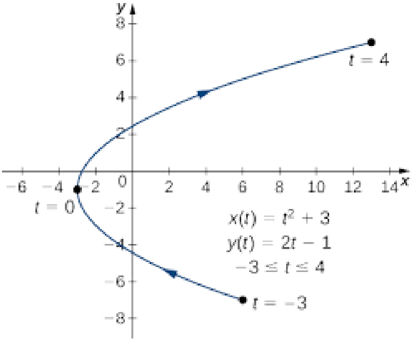
Obliczanie długości łuku.

Jeżeli krzywa wyznaczona jest równaniem postaci $y = f(x)$, przy czym funkcja $f(x)$ ma w przedziale $a \leq x \leq b$ ciągłą pochodną, to długość łuku w tym przedziale wyraża się wzorem

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx \ .$$

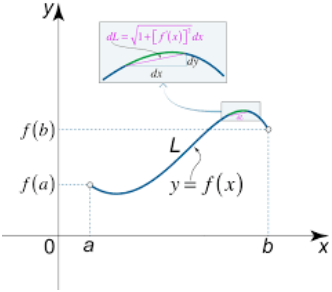
Jeżeli krzywa dana jest parametrycznie za pomocą równań $x = g(t)$, $y = h(t)$, przy czym funkcja $g(t)$ i $h(t)$ mają w przedziale $t_1 \leq t \leq t_2$ ciągłe pochodne oraz łuk nie ma części wielokrotnych, to długość łuku wyraża się wzorem

$$L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt \ .$$



Jeżeli krzywa dana jest równaniem we współrzędnych biegunowych $r = f(\Theta)$, przy czym funkcja $f(\Theta)$ ma w przedziale $\alpha \leq \Theta \leq \beta$ ciągłą pochodną i łuk nie ma części wielokrotnych, to długość łuku wyraża się wzorem

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\Theta}\right)^2} d\Theta \ .$$



Czas najwyższy sprecyzować co oznacza “przybliżmy funkcję” czy “błąd przybliżenia”...

Wszyscy intuicyjnie znają pojęcie odległości między dwoma punktami (obiektami). Naturalne wydaje się, że jest to długość odcinka łączącego te punkty.

A jednak czasami, nawet nieświadomie, inaczej mierzymy odległość ... Podamy tu jak w matematyce usystematyzowano to pojęcie i wskażemy kilka przykładów.

Wprowadzimy pojęcie metryki (odległości) na dowolnym zbiorze X.

Definicja. Jeżeli w niepustym zbiorze X ... dla każdych dwóch elementów x, y tego zbioru przyporządkowano liczbę nieujemną $d(x, y)$ taką, że

1^0 $d(x,y) = 0 \iff x = y$,

2^0 $d(x,y) = d(y,x)$,

3^0 $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ dla każdego $z \in X$.

Wówczas d nazywamy odległością albo metryką, a parę (X, d) przestrzenią metryczną. Elementy x przestrzeni metrycznej X nazywamy punktami, a warunek 3^0 - nierównością trójkąta.

Przykłady I.

Warto tu podkreślić, że definicja podaje jedynie aksjomaty jakie musi spełnić funkcja d, aby być metryką, natomiast konstrukcja takiej funkcji może być różna. Stąd w szczególności na zbiorze X może być kilka różnych metryk. Podamy tu kilka ciekawych i charakterystycznych przykładów.

(1) Zacznijmy od pokazania, że metrykę można wprowadzić na dowolnym zbiorze X. Określmy funkcję d następująco:

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & x = y \;, \\ 1 & x \neq y \;. \end{cases}$$

Metrykę tę nazywamy dyskretną.

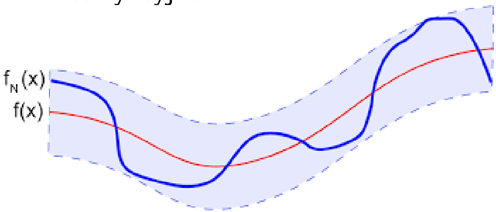
Metryka jednostajna.

Przypomnijmy metrykę jednostajną: $x, y \in C(a, b)$

$$d(x, y) = \sup_{t \in <0,1>} |x(t) - y(t)| \; .$$

To ważny przykład w wielu dziedzinach matematyki i informatyki. Tę samą metrykę można rozpatrywać na obszerniejszych przestrzeniach, niż tylko funkcji ciągłych!

To ważna metryka. Wydaje się bardzo dobrą w zastosowaniach informatycznych, ale posiada jedną istotną wadę: wymaga sprawdzenia różnic wartości funkcji we **wszystkich** punktach przedziału, a to jest trudne i nie zawsze wykonalne, a ponadto - bardzo restrykcyjne.



Być może główną operacją opartą o metryki w informatyce będzie dla Państwa jednak przybliżanie danej danej funkcji f ciągami funkcji (f_k) o pewnych "lepszych" własnościach np. łatwiej lub dokładniej wyliczalnych (np. funkcję ciągłą wielomianem, funkcją schodkową lub łamaną).

Musimy wyjaśnić

- jak to zrobić (w jakim sensie jest zbieżność),
- jak kontrolować błąd popełniany przy tej operacji (odległość granicy f od przybliżenia f_k).

I kolejna ważna definicja. Proszę zawsze wyobrażać sobie w tym miejscu ciągi *funkcji* przybliżających daną funkcję...

Definicja. Mówimy, że ciąg (x_n) punktów $x_n \in X$ jest zbieżny do punktu $x \in X$ gdy

$$d(x_n, x) \longrightarrow 0 \qquad \text{dla} \quad n \to \infty \ ,$$

gdzie zbieżność jest w sensie ciągu liczbowego tj.

$$\underset{\varepsilon>0}{\forall} \ \underset{N\in\mathbb{N}}{\exists} \ \underset{n\geq N}{\forall} \ d(x_n, x) < \varepsilon \ .$$

Warto zauważyć, że ciąg (x_n) jest zbieżny do $x \in X \iff$ dla każdej kuli $K(x, r)$ (dla $r > 0$) prawie wszystkie wyrazy ciągu (x_n) należą do kuli $K(x, r)$.

Uogólnijmy teraz znaną dla ciągów liczbowych definicję:

Definicja. Ciąg (x_n) punktów przestrzeni metrycznej (X, d) spełnia warunek Cauchy'ego (jest ciągiem Cauchy'ego), gdy dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje taka liczba $N \in \mathbb{N}$ taka, że dla dowolnych $m, n > N$ mamy $d(x_n, x_m) < \varepsilon$.

A teraz kilka związanych z tym własności:

Twierdzenie.

(a) Ciąg zbieżny jest ciągiem Cauchy'ego.

(b) Ciąg Cauchy'ego jest ograniczony.

(c) Ciąg Cauchy'ego zawierający podciąg zbieżny do punktu x jest też zbieżny do x.

Nie zachodzi natomiast twierdzenie analogiczne do twierdzenia Bolzano-Weierstrassa dla ciągów liczbowych !

Mamy więc nową definicję:

Definicja. Przestrzeń metryczna (X, d) nazywa się zupełną, jeżeli każdy ciąg Cauchy'ego w tej przestrzeni jest ciągiem zbieżnym (do pewnego $x \in X$).

Tak więc tw. Bolzano-Weierstrassa stwierdza, że $(\mathbb{R}, d_2)$ jest przestrzenią zupełną. My możemy podać ogólniejsze:

Twierdzenie. *Przestrzeń* $(\mathbb{R}^k, d_2)$ *jest zupełna.*

Ciąg kolejnych przybliżeń.

Definicja. Odwzorowanie $T : X \to X$ przestrzeni metrycznej $< X, d >$ w siebie nazywamy kontrakcją lub odwzorowaniem zwężającym, gdy istnieje taka liczba L, spełniająca nierówności $0 < L < 1$, że dla każdych $x, y \in X$ zachodzi nierówność

$$d(T(x), T(y)) \leq Ld(x, y) \ .$$

Przestrzeń metryczną nazywamy zupełną, gdy każdy ciąg spełniający warunek Cauchy'ego jest zbieżny.

Twierdzenie (Banacha o punkcie stałym).

Niech X będzie przestrzenią metryczną zupełną. Jeżeli odwzorowanie $T : X \to X$ jest kontrakcją ze stałą $L < 1$, to istnieje dokładnie jeden punkt stały x_0 tego odwzorowania. Ponadto punkt ten można otrzymać jako granicę ciągu (x_n) określonego w następujący sposób: x_1 jest dowolnym punktem z przestrzeni X, a $x_{n+1} = T(x_n)$ dla $n = 1, 2, \ldots$.

Prawdziwa jest również następująca nierówność

$$d(x_n, x_0) \leq \frac{L^{n-1}}{1 - L} \cdot d(x_2, x_1).$$

Ciąg (x_n) nazywamy ciągiem kolejnych przybliżeń lub ciągiem kolejnych iteracji odwzorowania T. Nierówność ta przedstawia błąd popełniony kiedy rozwiązanie równania $T(x) = x$ zastąpimy rozwiązaniem przybliżonym x_n.

O tej i innych **metodach iteracyjnych** - na metodach numerycznych.

Metoda iteracji prostych bazuje na twierdzeniu Banacha o punkcie stałym i ma kilka zalet...

Ćwiczenie: obliczyć tą metodą przybliżone rozwiązanie równania w przedziale $[0, 2]$:

$$x - \frac{x^2 + 2}{3x^2 + 1} = 0.$$

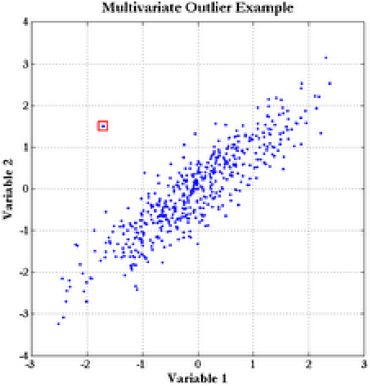
(Wsk.: zapisujemy $x = \frac{x^2+2}{3x^2+1}$, czyli stosujemy twierdzenie dla $T(x) = \frac{x^2+2}{3x^2+1}$, sprawdzamy warunek Lipschitz'a (powinno wyjść $L = 2...$), kładziemy np. $x = 1$ itd.)

Więcej o metrykach i ich zastosowaniach - na **innym** przedmiocie (będzie wśród takich do wyboru)...

Metryka Mahalanobisa.

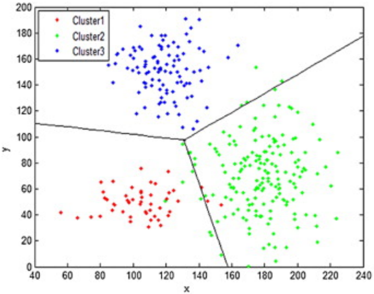
Dane mamy 2 wektory $\mathrm{x} = [x_1, x_2, \ldots, x_n]$, $\mathrm{y} = [y_1, y_2, \ldots, y_n]$ w przestrzeni $\mathbb{R}^n$, oraz pewną macierz symetryczną C. **Metryka Mahalanobisa** zdefiniowana jest jako:

$$d_m(\mathrm{x}, \mathrm{y}) := \sqrt{(\mathrm{x} - \mathrm{y})^T C^{-1} (\mathrm{x} - \mathrm{y})}.$$

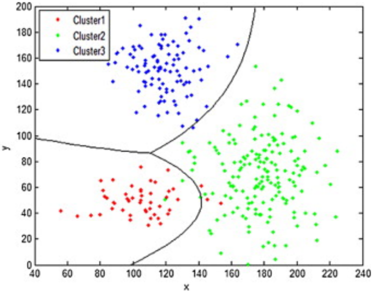


Metryka Mahalanobisa.

To jednak robi różnicę ... - a to przecież **metryka ważona**!!

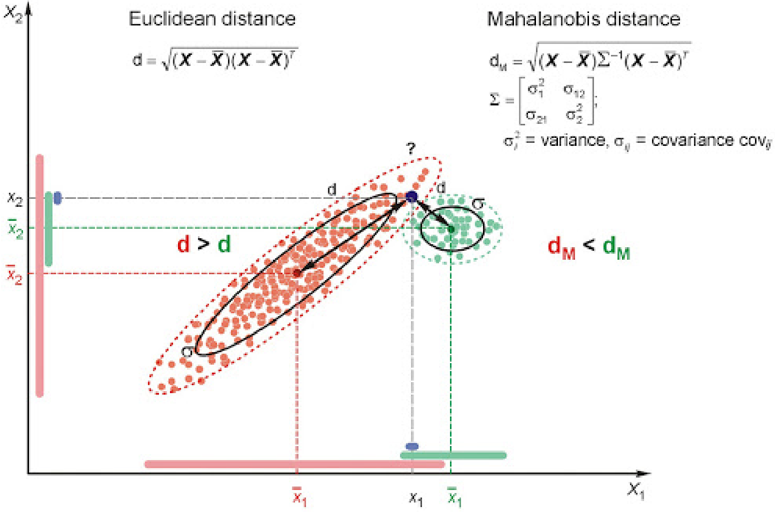


(a) Cluster's boundaries by Euclidean distance



(b) Clusters' boundaries by Mahalanobis distance

(np. w przypadku zmiennych losowych wagi a_i to odwrotności wariancji $d_m(\mathrm{x}, \boldsymbol{\mu}) = \sqrt{\frac{(x_1-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} + \ldots + \frac{(x_n-\mu_n)^2}{\sigma_n^2}}$).


Euclidean distance
$d = \sqrt{(X - \bar{X})(X - \bar{X})^T}$
Mahalanobis distance
$d_M = \sqrt{(X - \bar{X})\Sigma^{-1}(X - \bar{X})^T}$
$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 \end{bmatrix}$,
σ_i^2 = variance, σ_{ij} = covariance cov_{ij}
d > d
$d_M < d_M$
?
d
d
σ
σ
x_2
$\bar{x}_2$
$\bar{x}_2$
X_2
X_1
$\bar{x}_1$
x_1
$\bar{x}_1$

Metryki Hamminga i Levenshteina.

Metryka Hamminga to miara odmienności dwóch ciągów o takiej samej długości, wyrażająca liczbę miejsc (pozycji), na których te dwa ciągi się różnią. Innymi słowy jest to najmniejsza liczba zmian (operacji zastępowania elementu innym), jakie pozwalają przeprowadzić jeden ciąg na drugi.

Jest stosowana w kodowaniu i w przypadku ciągów binarnych (można stosować też dla innych łańcuchów) a i b odległość Hamminga jest równa liczbie jedynek w słowie $a \; XOR \; b$, czyli jeśli $a = (a_1, a_2, ..., a_n)$, $b = (b_1, b_2, ..., b_n)$, to

$$d_{HM}(a, b) = \sum_{i=1}^{n} [a_i(1 - b_i) + b_i(1 - a_i)].$$

Metryka Levenshteima jest to metryka w przestrzeni ciągów znaków, zdefiniowana następująco - działaniem prostym na napisie nazwiemy: wstawienie nowego znaku do napisu, usunięcie znaku z napisu, zamianę znaku w napisie na inny znak.

Przykład.

A tu zadanie z konkursu dla uczniów szkół średnich “Koala” 2020/21 - to właśnie **metryka Levenshteina** pomiędzy danymi układami monet z działaniem prostym opisanym w zadaniu (m.in. przesuwanie par monet o różnych nominałach itd.)...

9. Przekładaniec

Ułóżcie trzy złotówki i dwie dwuzłotówki na przemian w rzędzie, dokładnie tak jak na obrazku (a). Ruch polega na przesunięciu dwóch stykających się monet o różnych nominałach na inne miejsce w rzędzie, przy czym obowiązują takie zasady:

- Obie przesuwane monety muszą nadal się stykać i pozostać w tej samej kolejności.
- Pozostałe monety pozostają na swoich miejscach i nie można ich przesuwać, np. zsuwać po powstaniu luk.
- Cały rząd może zmienić położenie, w trakcie przesuwania mogą powstawać luki w układzie, np. takie jak na rysunku (c), gdzie pierwsza luka może pomieścić dwie monety, a druga trzy.

Wykonując jak najmniej ruchów, doprowadźcie do układu, w którym złotówki zajmują trzy pierwsze miejsca w rzędzie, a dwuzłotówki – dwa kolejne, dokładnie tak jak na obrazku (b). Ile ruchów wykonaliście?

Nazwijmy rozpiętością układu odległość między pierwszą a ostatnią monetą w układzie, mierzoną średnicą monety (np. rozpiętość układu początkowego to 4, a rozpiętość układu z rysunku (c) to 9). Rozpiętością serii ruchów nazwijmy największą z rozpiętości wszystkich układów powstających po drodze (czyli jeśli np. rozpiętości układów powstających w kolejnych krokach to: 4, 5, 6, 7, 9, 6, 7, 4, to rozpiętość całej serii wynosi 9). Spośród możliwych rozwiązań o minimalnej liczbie ruchów wybierzcie to, dla którego rozpiętość jest najmniejsza. Ile wynosi ta rozpiętość?

Jako odpowiedź podajcie dwie liczby: liczbę ruchów i rozpiętość.


(a)


(b)

```
int LevenshteinDistance(char s[1..m], char t[1..n])

declare int d[0..m, 0..n] // d - tablica (m+1) na (n+1)
 for i from 0 to m
       d[i, 0] := i
 for j from 1 to n
       d[0, j] := j

 for i from 1 to m
     for j from 1 to n
       if s[i] = t[j] then cost := 0
                       else cost := 1
       d[i, j] := minimum(d[i-1, j] + 1,   // usuwanie
                          d[i, j-1] + 1,  // wstawianie
                          d[i-1, j-1] + cost) // zamiana

   return d[m, n]
```

Inne metryki na rodzinach funkcji.

W praktyce informatycznej poza metryką jednostajną korzysta się na ogół z dwóch innych (nawet częściej niż z tej). Nie będziemy skupiać się teraz na zbiorze funkcji (tak naprawdę klas funkcji), na których definiujemy te metryki, temat można poszerzyć korzystając z literatury.

Niech x, y będą funkcjami całkowalnymi. Utożsamiając funkcje równe prawie wszędzie (poza zbiorem miary zero) mamy na takiej rodzinie metrykę d_1:

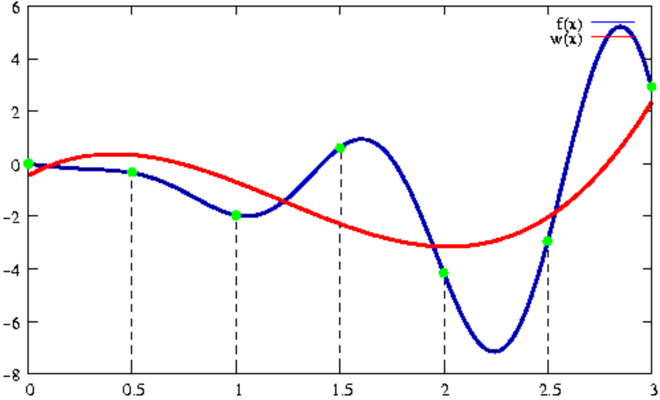
$$d_1(x,y) = \int_a^b |x(t) - y(t)|\, dt,$$

d_1

... a jeżeli te funkcje są całkowalne z kwadratem (tj. x^2 i y^2 są całkowalne) - z takim samym utożsamieniem mamy metrykę "średniokwadratową" d_2:

$$d_2(x, y) = \left(\int_a^b |x(t) - y(t)|^2 \, dt \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Może to zaskakujące, ale ta ostatnia metryka jest podstawową do oceny odległości pomiędzy funkcjami (lub zbiorami ich wartości) w większości algorytmów aproksymacyjnych.



Wielomian w (czerwony) stopnia 3, aproksymujący 7 zadanych wartości (zaznaczone na zielono) danej funkcji f w sensie minimalizacji błędu średniokwadratowego.